

Мудрецы и шляпы

Задачу представляют Бурсиан О., Кохась К., Латышев А., Ретинский В.

1 Знакомьтесь: игра в шляпы

Пусть дан неориентированный граф G , в каждой вершине которого находится один мудрец и один сундук со шляпами разного цвета. Мудрецы знакомы друг с другом, граф G , расположение мудрецов по вершинам графа и все цвета шляп в сундуках зафиксированы и известны всем. В частности, каждый мудрец понимает, в какой вершине находится каждый из его соседей. Судья проводит с мудрецами следующий тест. Он надевает каждому мудрецу шляпу из его сундука. Каждый мудрец видит только шляпы мудрецов, находящихся в соседних вершинах графа, но не видит своей шляпы и не знает ее цвета. Мудрецы не общаются. По команде судьи мудрецы одновременно называют цвет. Считается, что мудрецы успешно прошли тест = «выиграли», если хотя бы один из них угадал.

Перед тестом мудрецам сообщили правила теста и дали возможность устроить совещание, на котором они должны определить публичную стратегию. Публичность означает, что все, включая судью, знают ее. Стратегия мудрецов должна быть детерминированной — каждый мудрец должен назвать цвет, исходя только из того, какие цвета он видит у соседей. Будем говорить, что стратегия выигрышная, если при любой раскладке шляп хотя бы один мудрец угадает цвет надетой на него шляпы. Также будем говорить, что мудрецы выигрывают, если они имеют выигрышную стратегию, и проигрывают, если не имеют.

Вот пара задач на этот сюжет.

1.1. Каждому из двух мудрецов надевают шляпу белого, синего или красного цвета, и сообщают, что цвета их шляп разные. Каждый из них видит шляпу другого, но не видит свою. Они должны одновременно попытаться угадать цвет своей шляпы, написав его на бумажках. Докажите, что мудрецы могут заранее договориться действовать так, чтобы хотя бы один из них угадал.

1.2. Султан устроил экзамен 11 придворным мудрецам. По правилу экзамена султан размещает 10 мудрецов в 10 ям, расположенных по кругу, и еще одного мудреца сажает на вышку в центре круга. На лбу у каждого из первых 10 мудрецов султан пишет число 1 или 2; на лбу у центрального мудреца султан пишет число от 1 до 1024. Мудрец на вышке видит числа на всех остальных мудрецах, а те видят его число (но не видят друг друга). Все мудрецы должны одновременно попытаться угадать свои числа. Султан заранее объяснил мудрецам правила экзамена и дал им время посоветоваться до начала экзамена. Могут ли мудрецы действовать так, чтобы хотя бы один из них заведомо угадал свое число?

Мы будем отождествлять вершину графа G и мудреца, который в ней находится. Будем считать, что цвета пронумерованы числами $0, 1, 2, 3, \dots$, и что в сундуке мудреца X лежат шляпы с цветами от 0 до некоторого числа $h(X) - 1$, множество (цветов) шляп в сундуке мудреца X будем обозначать $\text{Col } X$.

Игрой в шляпы назовем пару $\langle G, h \rangle$, где $G = \langle V, E \rangle$ — граф, $h: V \rightarrow \mathbb{N}$ — функция, сопоставляющая вершине количество (цветов) шляп, лежащих в сундуке в этой вершине. Функцию h мы будем называть «шляпностью». Вместо $h(A)$ мы будем иногда писать \hat{A} . Если нам известно, что в игре $\langle G, h \rangle$ мудрецы выигрывают, будем говорить, что $\langle G, h \rangle$ *выигрышный граф*.

Выигрышный граф будем называть *простым*, если он не содержит выигрышного подграфа $\langle G', h' \rangle$, где $G' \subsetneq G$, $h' = h|_{V(G')}$.

1.3. Докажите, что на графе на рис. 1 мудрецы выигрывают.

1.4. Является ли выигрышный граф на рис. 1 простым?

1.5. Докажите, что на графе «путь $A_1 A_2 \dots A_n$ », где $n \geq 2$, а шляпности указаны на рис. 2, мудрецы выигрывают.

1.6. Является ли выигрышный граф на рис. 2 простым?

1.7. Докажите, что на графе $K_{2,3}$ с указанными шляпностями (рис. 3) мудрецы выигрывают.

1.8. Могут ли мудрецы выиграть на графе $K_{1,3}$ с указанными шляпностями (рис. 4)?

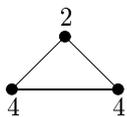


Рис. 1.

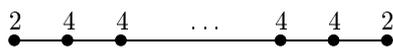


Рис. 2. Путь из n вершин

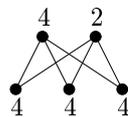


Рис. 3. Граф $K_{2,3}$

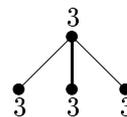


Рис. 4. Граф $K_{1,3}$

1.9. Докажите, что на цикле C_n , $n \geq 4$ с указанными шляпностями (рис. 5) мудрецы выигрывают.

1.10. На цикле C_n , $n \geq 4$ с указанными шляпностями (рис. 6) мудрецы выигрывают.

1.11. Существует ли простой выигрышный граф, на котором при любом раскладе шляп не менее двух мудрецов угадывают свой цвет?

1.12. Докажите, что на полном двудольном графе $K_{99,50}$ мудрецы проигрывают, если шляпность всех мудрецов равна 100.

1.13. Мудрецы расположены на графе «путь AB » (рис. 7, $n \geq 4$). Перед совещанием судья пообещал мудрецам, что A и B получают шляпы одинаковых цветов. Смогут ли мудрецы выиграть?

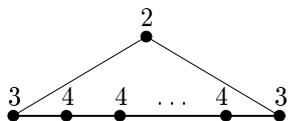


Рис. 5. Цикл из n вершин

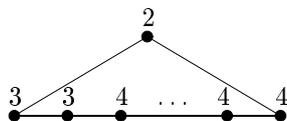


Рис. 6. Цикл из n вершин

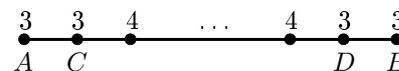


Рис. 7. Путь AB из n вершин

1.14. Пусть мудрецы играют на графе G с функцией шляпности h , но судья заранее пообещал им, что в тот момент, когда он наденет шляпу на мудреца A , он шепнет ему на ухо истинное утверждение вида «я тебе только что надел шляпу одного из двух цветов: c_1 или c_2 ». Таким образом, мудрецы во время совещания знают о том, что судья сделает подсказку, но не знают, какие именно цвета он назовет. Поэтому мудрецы определяют стратегии всех, кроме A , как обычно, а мудрец A получает набор из $C_{h(A)}^2$ стратегий — по одной на каждую возможную подсказку судьи.

Докажите, что эта подсказка не повлияет на исход игры.

2 Игры на кликах

2.1. Существует ли выигрышный граф, не содержащий в качестве подграфа 4-клики, на котором шляпности всех мудрецов равны 4?

2.2. Мудрецы находятся в вершинах полного графа K_n , у i -го мудреца в сундуке a_i шляп разных цветов. Докажите, что мудрецы выигрывают в том и только том случае, если

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \geq 1.$$

2.3. Назовем стратегию мудрецов *точной*, если на каждом раскладе шляп угадывает ровно один мудрец. Найдите все игры, в которых возможна точная стратегия.

2.4. Граф G — это полный граф на n вершинах, из которого удалили одно ребро. Шляпности всех мудрецов равны n . Могут ли мудрецы выиграть на таком графе?

2.5. Граф G — это полный граф на 4 вершинах A, B, C, D , из которого удалили ребро CD . При этом $h(A) = 6$, $h(B) = 6$, $h(C) = 2$, $h(D) = 3$. Могут ли мудрецы выиграть на таком графе?

2.6. Граф G — это полный граф на n вершинах A_1, A_2, \dots, A_n , из которого удалили ребро $A_{n-1}A_n$. Шляпности вершин равны a_1, \dots, a_n . Оказалось, что граф выигрышный и при этом

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n-1}a_n} = 1.$$

Докажите, что $a_1 a_2 \dots a_{n-2}$ делится на $a_{n-1} a_n$.

2.7. Могут ли мудрецы выиграть на графе «Средний бантик» (рис. 8)?

2.8. Могут ли мудрецы выиграть на графе «Большой бантик» (рис. 9)?

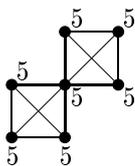


Рис. 8. Граф «Средний бантик»

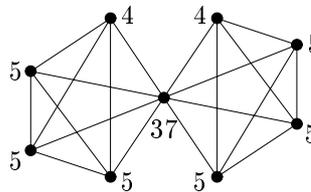


Рис. 9. Граф «Большой бантик»

3 Операции с графами

Пусть $\langle G_1, h_1 \rangle, \langle G_2, h_2 \rangle$ — две игры такие, что $V_1 \cap V_2 = \{v\}$. Пусть $G = G_1 +_v G_2$ — объединение графов G_1 и G_2 , в котором обе вершины v объединены в одну вершину. Пусть функция $h: V_1 \cup V_2 \rightarrow \mathbb{N}$ совпадает с h_i на $V_i \setminus \{v\}$ ($i = 1, 2$) и $h(v) = h_1(v)h_2(v)$. Игру $\langle G, h \rangle$ будем обозначать $G_1 \times_v G_2$ (рис. 10).



Рис. 10. Игра $G_1 \times_v G_2$

3.1. Теорема о произведении. Если мудрецы выигрывают на графах G_1 и G_2 , то они выигрывают и на графе $G_1 \times_v G_2$.

Пусть G_1 и G_2 — два графа, не имеющие общих вершин. *Подстановкой графа G_2 в граф G_1 на место вершины v* назовем граф, получающийся объединением графов $G_1 \setminus v$ и G_2 с добавлением ребер, которые соединяют каждую вершину G_2 с каждым соседом v . Такую подстановку будем обозначать $G_1[v := G_2]$.

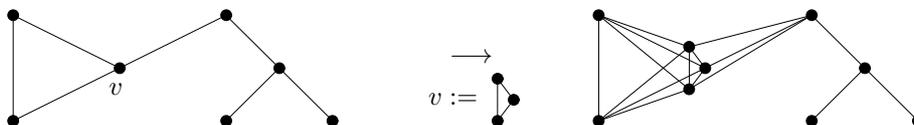


Рис. 11. Подстановка графа на место вершины

3.2. Теорема о подстановке. Пусть мудрецы выигрывают в игры $\langle G_1, h_1 \rangle$ и $\langle G_2, h_2 \rangle$. Пусть G — это граф подстановки $G_1[v := G_2]$, где $v \in G_1$ — произвольная вершина. Тогда игра $\langle G, h \rangle$ выигрышная, где

$$h(u) = \begin{cases} h_1(u) & u \in G_1, \\ h_2(u) \cdot h_1(v) & u \in G_2. \end{cases}$$

3.3. Пусть $\langle G, h \rangle$ — игра, в которой мудрецы выигрывают, BC — ребро графа G . Рассмотрим граф $G' = \langle V', E' \rangle$, получающийся добавлением к графу G новой вершины A : $V' = V \cup \{A\}$, $E' = E \cup \{AB, AC\}$. Тогда мудрецы выигрывают в игре $\langle G', h' \rangle$ (см. рис. 12), где

$$h'(u) = \begin{cases} 2, & u = A, \\ 2h(B), & u = B, \\ 2h(C), & u = C, \\ h(u), & \text{для остальных вершин } u \in V. \end{cases}$$

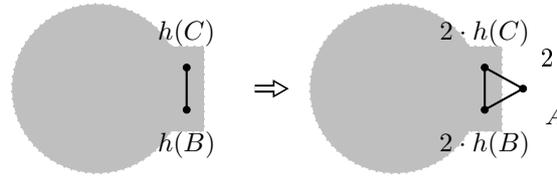


Рис. 12. Добавление вершины A шляпности 2 к ребру BC

3.4. Пусть $\langle G_1, h_1 \rangle, \langle G_2, h_2 \rangle$ — две игры, в которых мудрецы выигрывают. Пусть $A_1, A_2, \dots, A_k \in V_1; B_1, B_2, \dots, B_m \in V_2$. Рассмотрим граф $G' = \langle V', E' \rangle$, получающийся добавлением к графу $G_1 \cup G_2$ всех ребер $A_i B_j$: $V' = V_1 \cup V_2, E' = E_1 \cup E_2 \cup \{A_i B_j, i = 1, \dots, k; j = 1, \dots, m\}$ (рис. 13). Тогда мудрецы выигрывают в игре $\langle G', h' \rangle$, где

$$h'(u) = \begin{cases} h_1(u), & u \in G_1 \setminus \{A_1, A_2, \dots, A_k\}, \\ h_2(u), & u \in G_2 \setminus \{B_1, B_2, \dots, B_m\}, \\ h_1(u) + 1, & u \in \{A_1, A_2, \dots, A_k\}, \\ h_2(u) + 1, & u \in \{B_1, B_2, \dots, B_m\}. \end{cases}$$

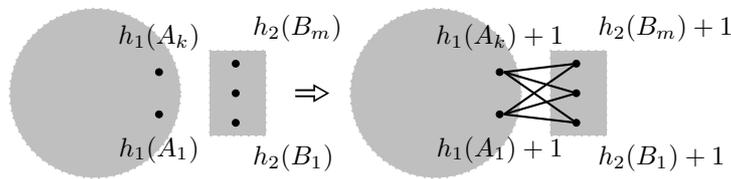


Рис. 13. Склейка двух графов, $k = 2, m = 3$

3.5. Пусть $\langle G, h \rangle$ — игра, в которой мудрецы выигрывают, $Z, C \in V$ — две вершины графа G . Рассмотрим граф $G' = \langle V', E' \rangle$, получающийся добавлением к графу G нового пути $ZABC$: $V' = V \cup \{A, B\}, E' = E \cup \{ZA, AB, BC\}$. Тогда мудрецы выигрывают в игре $\langle G', h' \rangle$, где $h'(Z) = 2h(Z), h'(C) = h(C) + 1, h'(A) = 2$ и $h'(B) = 3$, для остальных вершин h' совпадает с h (рис. 14).

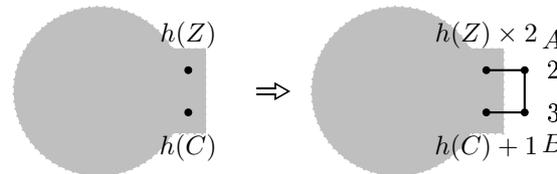


Рис. 14. Добавление двух вершин шляпностей 2 и 3 соединенных ребром

3.6. Пусть граф $\langle G, h' \rangle$ выигрышный, $V(G) = \{A_1, \dots, A_n\}$. Возьмем n выигрышных графов $\langle G_i, h_i \rangle$ и отметим в каждом из них одну вершину A_i . Построим на отмеченных вершинах граф G . В этом «суперграфе» зададим шляпность $h(A_i) = h'(A_i)h_i(A_i)$ (а у прочих вершин шляпность та же, что и в родных графах). Тогда мудрецы выигрывают.

3.7. Добавление к графу G висячей вершины A , где $\hat{A} > 2$, не влияет на выигрышность.

3.8. а) Добавление к графу G с вершиной A шляпности 2 двух новых вершин B и C шляпности 5 и ребер AB, AC, BC не влияет на выигрышность.

б) Добавление к графу G с вершиной A шляпности 3 двух новых вершин B и C шляпности 7 и 5 и ребер AB, AC, BC не влияет на выигрышность.

3.9. Пусть G_1 и G_2 — графы с вершиной A , на которых мудрецы проигрывают в случае, когда $\hat{A} = 2$. Тогда мудрецы проигрывают на графе $G = G_1 \uparrow_A G_2$, в котором $\hat{A} = 2$.

3.10. Пусть $H = \langle G, h \rangle$ — проигрышная игра, B — любая вершина графа G . Рассмотрим граф $G' = \langle V', E' \rangle$, получающийся добавлением к графу G новой висячей вершины A : $V' = V \cup \{A\}, E' = E \cup \{AB\}$. Тогда мудрецы проигрывают в игре $\langle G', h' \rangle$, где $h(A) = 2, h'(B) = 2h(B) - 1$ и $h'(u) = h(u)$ для остальных вершин $u \in V$.

4 Шахматы вслепую

Игра «Шах ладьей». Два шахматиста \mathcal{L} и \mathcal{R} сидят напротив друг друга, на стене за спиной у каждого закреплена «его» шахматная доска так, что каждый шахматист не видит свою доску, но видит доску соперника. Судья выставляет на каждую из досок одного короля. После этого шахматисты независимо друг от друга должны назвать одну клетку на своей шахматной доске и судья ставит на эту клетку ладью. Если хотя бы один из королей оказался под боем ладьи (или ладья поставлена на ту же клетку, где стоит король), шахматисты выиграли, в противном случае они проиграли. Шахматные доски игроков могут быть произвольного и неодинакового размера. Как и в игре «Hats», шахматисты заранее вырабатывают публичную детерминированную стратегию. Судья знает эту стратегию и играет против шахматистов.

Пусть граф G — это цикл $ABCD A$, а шляпность задается функцией h . На самом деле граф G — это полный двудольный граф $K_{2,2}$, из-за чего мудрецы A и C видят одно и то же, и мудрецы B и D также видят одно и то же. Тогда мы назовем пару игроков A и C шахматистом \mathcal{L} и будем считать, что его доска имеет размеры $h(A) \times h(C)$, а пару B и D — шахматистом \mathcal{R} и будем считать, что его доска имеет размеры $h(B) \times h(D)$. Таким образом игра «Hats» на цикле $ABCD A$ с функцией шляпности h эквивалентна игре «Шах ладьей» на досках $L(h(A) \times h(C))$ и $R(h(B) \times h(D))$.

Крестом в клетчатом прямоугольнике будем называть объединение любого вертикального и любого горизонтального ряда клеток. Крест однозначно задается клеткой, находящейся на пересечении этих рядов, она называется *центром* креста. Ладья, стоящая в центре креста, держит под боем в точности все клетки креста.

В задаче 4.1 можно сдавать пункты по отдельности.

4.1. В игре «Шах ладьей» шахматисты выигрывают на следующих парах досок:

- W1) одна из досок имеет размер $1 \times k$, k — любое натуральное число;
 W2) $L(2 \times k)$ и $R(2 \times m)$, где k и m — любые натуральные числа;
 W3) $L(3 \times 3)$, $R(3 \times 3)$; W4) $L(2 \times 3)$, $R(3 \times 4)$;
 W5) $L(2 \times 4)$, $R(3 \times 3)$; W6) $L(2 \times 2)$, $R(k \times m)$, где $\min(k, m) \leq 4$.

На следующих парах досок шахматисты проигрывают:

- L1) $L(2 \times 3)$, $R(4 \times 4)$; L2) $L(2 \times 3)$, $R(3 \times 5)$;
 L3) $L(2 \times 4)$, $R(3 \times 4)$; L4) $L(3 \times 3)$, $R(3 \times 4)$;
 L5) $L(2 \times 2)$, $R(5 \times 5)$; L6) $L(2 \times 5)$, $R(3 \times 3)$.

Для прочих размеров досок применима логика «мажоризации». Например, шахматисты проигрывают на досках $L(3 \times 4)$, $R(3 \times 4)$, потому что они проигрывают даже в более простом случае L3. Шахматисты выигрывают на досках $L(2 \times 3)$, $R(3 \times 3)$, потому что они выигрывают даже, когда одна из досок крупнее, как в W3.

Шах ферзем. Рассмотрим вариант игры, в котором оба шахматиста выставляют на доску не ладью, а ферзя. Будем называть эту игру «Шах ферзем».

4.2. В игре «Шах ферзем» $L(4 \times 5)$, $R(4 \times 5)$ шахматисты выигрывают.

4.3. В игре «Шах ферзем» $L(4 \times 4)$, $R(5 \times 5)$ шахматисты выигрывают.

4.4. В игре «Шах ферзем» $L(7 \times 8)$, $R(7 \times 7)$ шахматисты проигрывают.

4.5. В игре «Шах ферзем» $L(3 \times 4)$, $R(7 \times 7)$ шахматисты проигрывают.

4.6. В игре «Шах ферзем» $L(4 \times 5)$, $R(5 \times 5)$ шахматисты проигрывают.

4.7. Рассмотрим вариант игры «Шах ферзем», в котором 5 шахматистов расположены так, что каждый из них видит доски всех остальных, но не видит свою собственную. Все доски имеют размер 11×11 . Как и в исходной игре, судья ставит на каждую доску короля, а шахматисты независимо указывают, куда поставить ферзя. Смогут ли шахматисты выиграть?

5 Еще несколько задач

5.1. Пусть G — граф с вершинами B и C . Пусть функция шляпности такова, что $\widehat{B} = \widehat{C} = 2$ и при этом граф проигрышный. Добавим к графу новую вершину A , которая соединена только с B и C . Тогда мудрецы проигрывают на полученном графе, если $\widehat{A} = 2$, $\widehat{B} = 3$, $\widehat{C} = 7$, а шляпности остальных вершин не изменились.

5.2. Верно ли, что существует такое «большое» число k , что любой граф G , в котором степени всех вершин не превосходят 3, а шляпности всех вершин равны k , проигрышный?

5.3. Верно ли, что существует такое «большое» число d , что любой граф G , в котором степени всех вершин равны d , а шляпности всех вершин равны 4, выигрышный?

РЕШЕНИЯ

1.1. Они могут разместить цвета по циклу, например, белый→синий→красный→белый, и далее пусть каждый из них, увидев цвет шляпы приятеля, запишет цвет, следующий за ним по циклу.

1.2. Ответ: да.

Можно считать, что число на вышке записано в двоичной системе счисления, а мудрецам в ямах пишут на лбу числа 0 или 1. Пусть k -й мудрец в яме отыгрывает стратегию «мой бит не совпадает с k -м битом на вышке», а мудрец на вышке просто составляет число из битов в ямах.

1.3. Считаем, что цвета — это числа от 0 до 3. Пусть верхний мудрец называет четность суммы цветов шляп двух других мудрецов. А двое остальных называют цвет, исходя из гипотез «сумма цветов всех шляп дает остаток 1 по модулю 4» и «сумма цветов всех шляп дает остаток 3 по модулю 4».

1.4. Ответ: да.

Достаточно проверить, что при удалении одного ребра получается проигрышный граф, т. е. что граф «путь из двух звеньев» со шляпностями 2, 4, 4 или 4, 2, 4 проигрышный.

Применим вероятностные соображения: так, для случая 2, 4, 4, доли общего числа раскладов, на которых выигрывают мудрецы, равны соответственно $1/2$, $1/4$, $1/4$, что в сумме составляет как раз 1. Но случаи, в которых угадывают мудрецы в крайних вершинах, независимы: на $1/8$ доле всех раскладов угадывают оба крайних мудреца. Таким образом, суммарная доля всех раскладов, на которых угадывают мудрецы, равна $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} < 1$.

Аналогично разбирается другой случай.

1.5. То, что мудрецы выигрывают при $n = 2$, когда шляпы всего двух цветов, широко известно: первый мудрец отыгрывает гипотезу «у нас одинаковые шляпы», а второй — «у нас разные шляпы». Несколько раз применяя утверждение задачи 3.1, получаем отсюда утверждение для остальных n .

1.6. Ответ: да.

Достаточно проверить, что граф «путь P_k » со шляпностями 2, 4, ..., 4 проигрышный. С помощью конструктора задачи 3.7 это утверждение легко сводится к проверке проигрышности игры двух человек со шляпностями 2 и 4.

Но можно затеять рассуждение по индукции. Пусть A — мудрец шляпности 2, B — его сосед. По стратегии мудрец A в зависимости от цвета B (четыре варианта) называет один из двух цветов, скажем, красный и синий. Пусть в двух или более случаях мудрец A называет синий цвет («плохие» расклады), а в остальных случаях — красный («хорошие» расклады). Пусть судья даст мудрецу A красную шляпу, и объявит, что мудрецу B будут выдаваться шляпы каких-то двух цветов, соответствующих плохому раскладу. Тогда мудрец A заведомо не угадает, а мудрец B может считать его шляпность равна 2. Игра свелась к более короткому пути того же вида.

1.7. Пусть в одной доле находятся две вершины X и Y , а в другой доле — вершины A , B , C , причем $\hat{Y} = 2$, $\hat{X} = \hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = 4$. Опишем выигрышную стратегию мудрецов. Каждый из четырех цветов можно истолковывать как двухбитное двоичное число, состоящее из *левого* и *правого* бита. Мудрец, собирающийся назвать цвет определенной четности, уже определился с правым битом и должен выбрать одно из двух значений левого бита. Цвет шляпы Y — один бит — мы также будем интерпретировать как четность.

Пусть мудрец Y назовет ту четность y , которая преобладает среди шляп A , B , C .

Каждый из мудрецов A , B , C видит шляпу Y . Поэтому они понимают, что если большинство шляп A , B , C имеют ту же четность, что и шляпа Y , то мудрец Y угадает цвет своей шляпы. Значит, им надо исходить из предположения, что большинство их шляп имеют четность \bar{Y} . Поэтому, называя свои ответы, каждый из них будет выбирать из двух возможных цветов, имеющих четность \bar{Y} .

С другой стороны, мудрец X так же, как и Y , видит, какая четность преобладает среди шляп A , B , C , и знает, чему равно y . Таким образом, мудрец X знает, что если на мудреце Y

надета шляпа цвета y , то тот угадал. Поэтому мудрец X должен исходить из предположения, что на мудреце Y надета шляпа цвета \bar{y} . Но тогда он знает, что в этом случае мудрецы A, B, C исходят из предположения, что большинство их шляп имеет четность y . Итак, мудрец X видит, какая четность доминирует среди цветов A, B, C , и знает, что мудрецы A, B, C исходят из предположения, что у них именно эта четность и доминирует. Пусть мудрец X выберет среди мудрецов A, B, C двоих со шляпами доминирующей четности, назовем этих мудрецов *главными*.

Теперь покажем, как «предположения» превратить в стратегию. Столбцы следующей таблицы соответствуют цветам шляпы X , а строки — мудрецам A, B, C . Пусть каждый из мудрецов A, B, C возьмет для своего ответа левый бит из своей строки таблицы (а правый бит определен «предположением»).

	0	1	2	3
A	0	0	1	1
B	0	1	0	1
C	0	1	1	0

Мудрец X видит, угадал ли кто-то из главных мудрецов среди A, B, C цвет своей шляпы по указанной стратегии. Если оба главных мудреца не угадали, то это значит, что они оба указали неверный левый бит цвета своей шляпы.

Пусть, например, главные мудрецы — это A и B , пусть они указали соответственно биты 0 и 1 и не угадали. Мудрец A указывает бит 0, только если цвет шляпы X равен 0 или 1; мудрец B указывает бит 1, только если цвет шляпы X равен 1 или 3. Таким образом, оба события происходят только в случае, когда цвет шляпы X равен 1, именно этот цвет и должен назвать мудрец X .

Аналогичные действия мудрец X выполняет во всех остальных случаях. Его успех гарантируется следующим *Волшебным свойством* таблицы.

Если в таблице выбрать две произвольные строки и в каждой из них (независимо от другой) закрасить две клетки, содержащие одинаковые символы, то ровно один столбец содержит две закрашенные клетки.

Волшебное свойство проверяется (очевидным) перебором. Отметим, что для выигрышности стратегии хватило бы более слабого требования «не более чем один столбец таблицы содержит две закрашенные клетки».

1.8. Допустим, что у мудрецов есть выигрышная стратегия. Пусть v — вершина степени 3, u_1, u_2, u_3 — висячие вершины. Назначим вершине v первый цвет. Пусть мудрецы u_1, u_2, u_3 согласно стратегии называют цвета h_1, h_2, h_3 .

Теперь проведем второй эксперимент: назначим вершине v второй цвет. Пусть мудрецы u_1, u_2, u_3 согласно стратегии называют цвета e_1, e_2, e_3 .

Наконец, проведем финальный эксперимент. Для каждого $i = 1, 2, 3$ обозначим через d_i цвет, который не был назван мудрецом u_i в первых двух экспериментах (если есть выбор — берем любой цвет из двух возможных). Для каждого i назначим висячей вершине u_i цвет d_i . Цвета шляп у соседей мудреца v уже заданы, значит, известен его ответ по стратегии. Назначим вершине v тот из цветов — первый или второй, который не совпадает с этим ответом. Мудрецы проиграли.

Это рассуждение работает, даже если $\hat{v} = 2$.

1.9. Это утверждение получается применением конструктора из задачи 3.4, где в качестве G_2 берется граф, состоящий из одной вершины шляпности 1! Действительно, мудрецы выигрывают на пути, изображенном на рис. 2, а описанный в задаче граф получается добавлением к этому пути одновершинного графа G_2 , при этом в месте склейки шляпности увеличиваются на 1.

1.10. Это утверждение получается применением конструктора из задачи 3.5. Действительно, мудрецы выигрывают на пути, изображенном на рис. 2, а описанный в задаче граф получается добавлением к этому пути нового ребра со шляпностями вершин 2 и 3 и подходящим изменением шляпностей вершин, к которым они прикрепляются.

1.11. Ответ: нет.

Пусть $\langle G, a \rangle$ — простой выигрышный граф, $A \in V(G)$.

Дадим мудрецу A шляпу цвета 0. Тогда для остальных мудрецов зафиксировалась стратегия на проигрышном графе $G \setminus A$. Значит, мудрецам на графе $G \setminus A$ можно раздать шляпы так, что никто из них не угадает. В полученном раскладе шляп на всем графе G угадать может только мудрец A .

1.12. Приведем стратегию судьи. Сначала рассмотрим на доле A , состоящей из 50 мудрецов, 51 расклад шляп, когда все мудрецы из A получают шляпы одного цвета, и этот цвет один из первых 51. На каждого из мудрецов второй доли B наденем ту шляпу, которую он не назовет по своей стратегии ни для одного из 51 раскладов. Зафиксируем построенный на доле B расклад и посмотрим, что по стратегии скажут для него мудрецы из A . Их 50, значит, какой-то цвет из первых 51 не назовет никто. Наденем шляпы этого цвета на всех мудрецов доли A . В результате никто из мудрецов не угадал.

Приведенное рассуждение работает для всех двудольных графов, у которых в минимальной доле не более $k - 2$ вершин, где k — шляпность мудрецов. Если одна из долей содержит $k - 1$ вершину, то мудрецы выигрывают в случае, когда размер второй доли очень велик.

1.13. Ответ: да, мудрецы выигрывают.

Пусть мудрец A играет по стратегии «Вижу 2 — говорю 2, иначе говорю 0», а мудрец B — по стратегии «Вижу 2 — говорю 2, иначе говорю 1», Мудрецы C и D , если видят на своем одиокоме (A или B) соседе шляпу цвета 0 или 1, говорят 2. В противном случае они полагают, что у них не 2, и играют с остальными мудрецами в игру из задачи 1.5.

По этой стратегии мудрецы действительно выиграют. Потому что либо у мудрецов A и B шляпа цвета 0 или 1 и тогда кто-то из этих четырех выигрывает сразу, либо у них шляпа цвета 2 и тогда у мудрецов C и D точно не 2 (иначе A или B угадали), и тогда C и D выигрывают на пути между ними.

1.14. Допустим, что мудрецы выигрывают с подсказкой. Зафиксируем для всех мудрецов, кроме A , стратегии, которые они используют при игре с подсказкой, и покажем, как можно задать стратегию мудреца A , чтобы с этим набором стратегий мудрецы выигрывали без подсказки.

Допустим, что при назначении мудрецу A шляпы цвета x нашелся расклад шляп на всем графе, в котором мудрец A получил цвет x , соседи мудреца A получили цвета u, v, w, \dots , остальные мудрецы тоже получили какие-то цвета, и при этом никто из мудрецов (исключая A) не угадал. Тогда мы хотим, чтобы в этой ситуации мудрец A угадал свой цвет, т. е. его стратегия должна удовлетворять требованию $f_A(u, v, w, \dots) = x$.

Эти требования, полученные для разных раскладов, не противоречат друг другу. Действительно, если бы существовал еще один расклад, где у соседей по-прежнему цвета u, v, w, \dots , а мудрец A получил другой цвет y , то мудрецы не могли бы выиграть с подсказкой A^* , поскольку, имея эти два расклада, можно сообщить мудрецу A , что цвет его шляпы x или y , после чего реализовать тот из раскладов, для которого он не угадывает цвет своей шляпы.

Игра на клике

2.1. Ответ: да.

Например «бантик» (рис. 15). С помощью конструктора из задачи 3.4 можно строить подобные примеры для любого n .

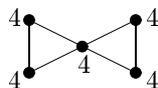


Рис. 15. Бантик

2.2. Так как i -й мудрец угадывает на $\frac{1}{a_i}$ -й доле всех раскладов, то если сумма меньше 1, найдется расклад, где никто не угадает.

Докажем, что если сумма больше либо равна 1, мудрецы выигрывают. Мы предлагаем два решения.

Решение 1 (теорема Холла). Зафиксируем i (номер какого-то мудреца) и разобьем множество всех раскладов шляп на подмножества по a_i элементов. В каждом раскладе шляп удалим цвет c_i и для оставшегося набора $c = (c_1, \dots, c_{i-1}, \widehat{c}_i, c_{i+1}, \dots, c_n)$ (шляпка означает, что цвет пропущен) положим

$$A_c^i = \{(c_1, \dots, c_{i-1}, x, c_{i+1}, \dots, c_n) : x \in \text{Col}(A_i)\}.$$

Имея в виду применение теоремы Холла о паросочетаниях, назовем множества A_c^i «девушками», а сами расклады шляп — «юношами». Будем говорить, что юноша и девушка знакомы, если расклад шляп является элементом множества A_c^i . Каждый юноша знаком с n девушками, при этом для каждого i каждый юноша знаком ровно с одной девушкой вида A_c^i . Каждая девушка A_c^i знакома ровно с a_i юношами.

Докажем, что существует паросочетание, сопоставляющее каждому юноше девушку. Для этого достаточно проверить условие теоремы, утверждающее, что каждые m юношей знакомы вместе с не менее чем m девушками. Рассмотрим произвольный набор из m юношей. Так как при каждом i девушка A_c^i знакома ровно с a_i юношами, m юношей для каждого i знакомы в сумме не менее чем с m/a_i девушками вида A_c^i . Суммируя по i , получаем, что общее число знакомых девушек не меньше $\frac{m}{a_1} + \frac{m}{a_2} + \dots + \frac{m}{a_n} \geq m$. Условие теоремы Холла выполнено.

Итак, существует паросочетание, которое каждому раскладу шляп ставит в соответствие множество вида A_c^i . Отметим, что при выполнении равенства $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} = 1$ это паросочетание фактически отмечает один элемент в каждом множестве A_c^i . Если же выполняется неравенство $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} > 1$, то «останутся одинокие девушки», т. е. в некоторых множествах A_c^i может не оказаться ни одного отмеченного элемента.

Построенное паросочетание позволяет задать стратегию мудрецов. Пусть j -й мудрец действует по правилу: увидев шляпы других мудрецов, т. е. набор цветов $c = (c_1, \dots, c_{j-1}, c_{j+1}, \dots, c_n)$, он однозначно восстанавливает множество A_c^j , которое фактически состоит из всевозможных способов дополнить набор c до расклада шляп. При этом текущий расклад шляп является одним из элементов этого множества. Мудрец должен назвать тот цвет, который в множестве A_c^j отмечен нашим паросочетанием (а если отмеченного элемента нет, называет цвет произвольно).

Поскольку каждый расклад шляп отображается нашим паросочетанием как отмеченный элемент одного из множеств A_c^i , для этого расклада шляп i -й мудрец угадает цвет.

Решение 2 (явная стратегия). Пусть $N = \text{НОК}(a_1, a_2, \dots, a_n)$, для k от 1 до n положим $d_k = N/a_k$. Будем отождествлять множество возможных цветов шляпы k -го мудреца с множеством остатков $d_k, 2d_k, \dots, a_k d_k$ по модулю N .

Пусть мудрецам даны шляпы: k -й мудрец получает шляпу цвета $x_k d_k$, где $x_k \in \{1, 2, \dots, a_k\}$. Положим $S = x_1 d_1 + x_2 d_2 + \dots + x_n d_n \pmod{N}$. Каждый мудрец, видя окружающих, может написать все слагаемые этой суммы кроме своего собственного. Делая предположение о цвете своей шляпы, он получает предполагаемое значение всей суммы. Пусть первый мудрец проверяет гипотезу $S \in \{1, 2, \dots, d_1\}$; второй мудрец проверяет гипотезу $S \in \{d_1 + 1, d_1 + 2, \dots, d_1 + d_2\}$ и т. д., n -й мудрец проверяет гипотезу $S \in \{d_1 + d_2 + \dots + d_{n-1} + 1, \dots, d_1 + d_2 + \dots + d_{n-1} + d_n\}$. Гипотеза k -го мудреца затрагивает d_k последовательных остатков, среди которых ровно один делится на d_k . Именно этот остаток и определяет цвет шляпы, который должен назвать k -й мудрец.

2.3. Ответ: точные стратегии существуют только на кликах и только в том случае, когда выполняется равенство

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} = 1. \quad (1)$$

Пусть в графе имеются две несмежные вершины A и B . Тогда выдадим произвольный расклад шляп всем мудрецам, кроме A и B . Теперь ответы мудрецов A и B определены по стратегии. Выдадим им такие шляпы, чтобы они угадали. На построенном раскладе шляп A, B и, возможно, кто-то еще угадают. Следовательно, стратегия не является точной. То, что в случае клики существование точной стратегии эквивалентно равенству (1), следует из доказательства задачи 2.2.

2.4. Ответ: нет, мудрецы проигрывают.

Пару мудрецов A, B можно интерпретировать как шахматиста с доской $n \times n$. Нетрудно видеть, что доля общего числа раскладов, на которых он выигрывает, равна $\frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}$. Что касается остальных мудрецов, каждый выигрывает на $\frac{1}{n}$ -й части всех раскладов. Таким образом, суммарная доля раскладов, на которых кто-то выигрывает, меньше 1.

2.5. Ответ: да, мудрецы выигрывают.

Будем интерпретировать цвета шляп A и B как вычеты по модулю 6, цвет C — как вычет по модулю 2, цвет D — как вычет по модулю 3. Обозначим цвета шляп мудрецов A и B через a и b . Пусть C называет цвет $c = (a + b) \bmod 2$, D — цвет $d = (a + b) \bmod 3$. Если мудрецы C и D не угадали, выполняются равенство $a + b = c + 1 \bmod 2$ и $(a + b = d + 1 \bmod 3$ или $a + b = d + 2 \bmod 3)$. Тогда пусть A вычисляет свой цвет в предположениях $a + b = c + 1 \bmod 2$ и $a + b = d + 1 \bmod 3$; а B — в предположениях $a + b = c + 1 \bmod 2$ и $a + b = d + 2 \bmod 3$.

Предлагаем читателю в качестве упражнения получить этот же результат, используя конструктор задачи 3.3.

2.6. Пусть X — множество раскладов шляп для первых $n - 2$ мудрецов, т. е., иначе говоря, это множество наборов из $n - 2$ цветов, где первый цвет — это возможный цвет шляпы мудреца A_1 , второй цвет — мудреца A_2 и т. д., $(n - 2)$ -й цвет — мудреца A_{n-2} . Пусть $\alpha = a_1 a_2 \dots a_{n-2}$, тогда $|X| = \alpha$. Обозначим через L_i ($i = 1, 2, \dots, a_{n-1}$) — подмножества X , такие что если мудрец A_{n-1} видит комбинацию из L_i , то он называет цвет i . Аналогично определим множества R_j ($j = 1, 2, \dots, a_n$) для мудреца A_n . Пусть L_k — множество L_i минимальной мощности, $|L_k| = M \leq \frac{\alpha}{a_{n-1}}$. Теперь рассмотрим множества $R_j \setminus L_k$ ($j = 1, 2, \dots, a_n$). В них суммарно $\alpha - M$ элементов, поэтому если $R_m \setminus L_k$ — минимальное по мощности, то $|R_m \setminus L_k| \leq \frac{\alpha - M}{a_n}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} |L_k \cup R_m| &\leq M + \frac{\alpha - M}{a_n} = \frac{\alpha}{a_n} + M \left(1 - \frac{1}{a_n}\right) \leq \frac{\alpha}{a_n} + \frac{\alpha}{a_{n-1}} \left(1 - \frac{1}{a_n}\right) = \\ &= \alpha \left(\frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n-1}a_n}\right) = \alpha \left(1 - \sum_{i=1}^{n-2} \frac{1}{a_i}\right) = \alpha - \frac{\alpha}{a_1} - \dots - \frac{\alpha}{a_{n-2}}. \end{aligned} \quad (1)$$

Таким образом, когда на мудреце A_{n-1} надета шляпа цвета k , а на мудреце A_n — цвета m , выигрывать должен кто-то из мудрецов A_1, A_2, \dots, A_{n-2} , и число раскладов, для которых происходит это событие, составляет долю $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{n-2}}$ от общего числа раскладов. Но как мы знаем, указанная доля ограничивает сверху число раскладов, на которых могут выиграть мудрецы A_1, A_2, \dots, A_{n-2} . Следовательно, оба неравенства (1) должны обращаться в равенство. Тогда $|L_k| = \frac{\alpha}{a_{n-1}}$ (и вообще $|L_i| = \frac{\alpha}{a_{n-1}}$ для всех i) и $|R_m \setminus L_k| = \frac{\alpha}{a_n} - \frac{\alpha}{a_{n-1}a_n}$.

Аналогично $|R_j| = \frac{\alpha}{a_n}$, значит, $|R_m \cap L_k| = \frac{\alpha}{a_{n-1}a_n}$, и α делится на $a_{n-1}a_n$.

2.7. Ответ: да, мудрецы выигрывают.

Пусть G_1 и G_2 — 4-клики, из которых склеен бантик, A — общая вершина клик, цвета мудрецов — остатки по модулю 5.

Мудрецы $G_1 \setminus A$ подсчитывают сумму остатков-цветов на G_1 и разыгрывают гипотезы для трех последовательных значений остатка этой суммы, скажем, для 2, 3 и 4. Аналогично поступают мудрецы на $G_2 \setminus A$.

Что же делать мудрецу A ? Он должен ухитриться отыграть сразу две гипотезы на G_1 и две гипотезы на G_2 . Спасает его только то, что обе гипотезы — об одной и той же его несчастной шляпе! Чтобы стратегия сработала, надо по разному конвертировать цвета A в остатки по модулю 5, например, так:

Цвет	Красный	Синий	Белый	Желтый	Черный
Его код в G_1	0	1	2	3	4
Его код в G_2	0	2	4	1	3

Указанная кодировка обладает тем свойством, что любая пара, состоящая из последовательных остатков в строке G_1 , пересекается с любой парой последовательных остатков в строке G_2 не более чем по одному элементу. Мудрец A вычисляет два последовательных остатка, соответствующих гипотезам «сумма всех остатков на G_1 равна 0 или 1» и «сумма всех остатков на G_2 равна 0 или 1», и называет цвет пересечения этих пар, если он есть.

2.8. Ответ: да, мудрецы и здесь выигрывают.

Рассмотрим вычеты по модулю $740 = 4 \cdot 5 \cdot 37$. Пусть цвета шляп мудреца шляпности k — вычеты, делящиеся на $\frac{740}{k}$. Тогда рассмотрим S_1 и S_2 — суммы вычетов-цветов в левой и правой 5-кликах. Пусть левый мудрец шляпности 4 предполагает, что S_1 лежит в множестве $\{1, 2, \dots, 185\}$. Он получает 185 подряд идущих вычетов, среди которых ровно один делится на 185. Цвет, соответствующий этому вычету, мудрец и называет. Аналогично три левых мудреца шляпности 5 предполагают, что S_1 лежит в множествах $\{186, \dots, 333\}$, $\{334, \dots, 481\}$, $\{482, \dots, 629\}$ соответственно. Так же, но только работая с S_2 , поступают правые мудрецы. Если еще никто не выиграл, то A (мудрец со шляпностью 37) понимает, что S_1 лежит в $\{630, \dots, 720\}$, так что ему нужно выбирать из не более чем 6 подряд идущих цветов. То же можно сказать про S_2 . Чтобы все сработало, давайте мудрецы левой и правой клики будут по-разному переводить цвета мудреца A в вычеты. По нашему правилу цвета шляп мудреца A — это вычеты по модулю 740, делящиеся на 20, т.е. фактически это вычеты по модулю 37. Если мудрецы левой клики сопоставляют некоторому цвету вычет x , то пусть мудрецы правой клики сопоставляют этому же цвету вычет $6x \pmod{37}$ (отображение $x \mapsto 6x$ взаимно однозначно на множестве остатков при делении на 37). Как нетрудно проверить, любые два множества вида $\{x, x+1, \dots, x+5\}$ и $\{6y, 6y+6, \dots, 6y+30\}$ пересекаются не более чем по одному элементу. Значит, A назовет цвет из пересечения этих множеств, либо назовет произвольный цвет, если пересечение пусто.

Конструкторы

3.1. Цвет шляпы мудреца v в графе $G_1 \times_v G_2$ можно интерпретировать как пару цветов (c_1, c_2) , где c_i — цвет шляпы v в графе G_i . Пусть зафиксированы выигрышные стратегии для графов G_1 и G_2 . Построим стратегию на $G_1 \times_v G_2$: пусть все мудрецы, кроме v , играют по выигрышной стратегии для соответствующего графа. Что касается мудреца v , он будет играть сразу по обеим стратегиям: пусть он независимо даст два ответа c_1 и c_2 — ответ c_i соответствует его выигрышной стратегии для графа G_i (для вычисления этого ответа мудрец v смотрит только на своих соседей из графа G_i). Пара (c_1, c_2) — это корректный цвет шляпы мудреца v на графе $G_1 \times_v G_2$, это и есть ответ мудреца v в конструируемой стратегии.

Построенная стратегия выигрышная, потому что либо кто-то из G_1 или из G_2 угадает цвет, либо v угадает обе компоненты своего цвета.

3.2. Пусть f_1 и f_2 — выигрышные стратегии игр на графах G_1 и G_2 соответственно.

Также пусть каждый мудрец u из подграфа G_2 графа G получает композитный цвет (c_1, c_2) , где $0 \leq c_1 \leq h_1(v) - 1$, $0 \leq c_2 \leq h_2(u) - 1$. Тогда все «левые половины» этих мудрецов отыгрывают стратегию $f_1(v)$, а «правые половины» этих мудрецов отыгрывают стратегию f_2 . В частности это означает, что все мудрецы из подграфа G_2 будут называть цвета, у которых первая компонента одна и та же.

Что касается остальных мудрецов из G , те из них, кто не является соседом v , играют по стратегии f_1 . Мудрецы из G_1 , являющиеся соседями мудреца v , после подстановки обнаружили, что вместо одного соседа v у них теперь имеется $|V_2|$ соседей (причем, вообще говоря, с разными шляпами). Эти мудрецы поступают следующим образом: все они вместо одной шляпы v видят все шляпы на подграфе G_2 и знают стратегии мудрецов на этом подграфе. Значит, они понимают, кто выигрывает в игре на подграфе G_2 , обозначим этого игрока v_{new} (если победителей несколько, они выбирают в качестве v_{new} одного из победителей, например, того, кто идет первым в заранее составленном списке). В результате, каждый (бывший) сосед v смотрит только на v_{new} , точнее, на первую компоненту его цвета, и тоже играет по стратегии f_1 .

В результате либо угадает кто-то из подграфа $G_1 \setminus \{v\}$, либо v_{new} угадает левую компоненту своего цвета, а правую компоненту он угадывает по своему определению. Таким образом, всегда кто-нибудь угадает свой цвет.

3.3. Цвета шляп игроков B и C можно интерпретировать как пары вида (c, ϵ) , где c — возможный цвет шляпы в игре $\langle G, h \rangle$, $\epsilon \in \{0, 1\}$. Пусть мудрец A отыгрывает гипотезу $c(A) = \epsilon_B + \epsilon_C \pmod{2}$. Мудрецы B и C видят своих соседей в графе G и знают, какие цвета $c(B)$, $c(C)$ они должны назвать по выигрышной стратегии в игре $\langle G, h \rangle$. Видя шляпу мудреца A , а также шляпы друг друга, мудрецы B и C могут вычислить, какие значения ϵ_B и ϵ_C им следует взять в дополнение к $c(B)$, $c(C)$.

3.4. По сравнению с исходными графами у мудрецов A_i и B_j добавился один новый цвет, будем считать, что этот цвет — красный. Пусть «мегамудрец» A говорит, что у него все шляпы красные, если видит хоть одну красную шляпу у мудреца B , в противном случае пусть A играет по обычной стратегии в графе G_1 . Если «мегамудрец» B видит хоть одну красную шляпу у A , то он понимает, что A выиграл, если у B есть хоть одна красная шляпа. Тогда B должен позаботиться о тех раскладах, где у него нет ни одной красной шляпы, и просто отыгрывать свою стратегию на графе G_2 . Если же «мегамудрец» B не видит ни одной красной шляпы у A , то он понимает, что A выиграл, только если у B тоже нет красных шляп, тогда, чтобы проконтролировать оставшиеся расклады, B говорит, что у него все шляпы красные.

3.5. Мы укажем стратегию для новых вершин и частично для старых, затем разберем несколько раскладов, на которых они выигрывают «сразу», а затем скажем, что на остальных они выигрывают при помощи стратегии для графа G .

Опишем выигрышную стратегию. Будем обозначать c_x цвет шляпы, которую получил мудрец x . Цвет вершины Z будем считать «композитным»: $c_Z = (\epsilon, C)$, где первый «бит» ϵ может принимать значения 0 и 1, а второй цвет C — те $h(Z)$ цветов, которые были изначально в графе G .

- Мудрец A , в случае если видит на мудреце B шляпу цвета 0 или 1, говорит то, что видит на нем, иначе говорит первый бит цвета c_Z .
- Мудрец B , в случае если видит на мудреце C шляпу нового цвета, говорит «2», а иначе он говорит значение разности $1 - c_A$.

Разберем все варианты пар (c_A, c_B) и опишем остальную часть стратегии, заодно доказав, что она выигрышная. В случаях $(0, 0)$ и $(1, 1)$ мудрец A сразу угадывает. В случаях $(0, 1)$ и $(1, 0)$, если не дать мудрецу C шляпу нового цвета, то угадает мудрец B . Поэтому мудрец C , видя на мудреце B шляпу цвета отличного от 2, может смело называть шляпу нового цвета и кто-то из A, B, C угадает. Остались варианты $(0, 2)$ и $(1, 2)$. В них мудрец A угадает, если его цвет совпадет с первым битом c_Z , поэтому Z может считать, что у него первый бит отличается от цвета c_A , то есть ему нужно угадывать только второй «бит», то есть $h(Z)$ возможных значений. В то же время мудрец B в этих двух случаях угадает только в случае, когда у мудреца C новый цвет. То есть C , видя на мудреце B шляпу цвета 2, может считать, что нового цвета у него нет. Таким образом, нужно выиграть в игру $\langle G, h \rangle$, что мы умеем делать по условию.

3.6. Утверждение непосредственно следует из теоремы о произведении (задача 3.1).

3.7. Пусть A — новая висючая вершина, B — соседняя с ней вершина графа G , обозначим граф с добавленной вершиной через G_1 .

В одну сторону утверждение очевидно. Если игра на G выигрышная, то игра на G_1 тоже выигрышная. Докажем теперь, что если игра на G_1 выигрышная, то и на G тоже выигрышная.

Пусть мудрецы выбрали выигрышную стратегию на G_1 . Напомним, что в задаче 1.14 доказано, что если во время теста судья дает одному из мудрецов, скажем B , подсказку вида «у тебя шляпа одного из двух цветов c_1 или c_2 », то эта подсказка не повлияет на исход игры. Назовем эту подсказку B^* .

Докажем, что если мудрецы выигрывают в игру на G_1 , то они смогут выиграть на графе G с подсказкой B^* . Пусть фиксирована выигрышная стратегия f на графе G_1 . Построим выигрышную стратегию на G с подсказкой B^* . Пусть все мудрецы из $V(G) \setminus B$ пользуются стратегией f . Для каждой пары цветов (b_1, b_2) , $b_1 \neq b_2$, которые можно выдать мудрецу B , найдем такой цвет $a \in \text{Col } A$, что $f_A(b_1) \neq a$, $f_A(b_2) \neq a$, такой цвет найдется, поскольку $\hat{A} \geq 3$.

Теперь зададим стратегию мудреца B на графе G с учетом подсказки, а именно, пусть в случае, когда B видит у соседей на графе G комплект цветов c и получает подсказку «твоя шляпа цвета b_1 или b_2 », он выдает ответ $f_B(a, c)$, т. е. отвечает по стратегии f , как если бы он видел на G_1 цвет a у мудреца A и комплект цветов c у остальных соседей. При этом может оказаться, что цвет, который назовет B , не совпадет ни с b_1 , ни с b_2 .

Эта стратегия выигрышная, потому что когда в игре на G_1 мы даем во время теста мудрецу A шляпу цвета a и следим, чтобы он не угадал (не выдавая B какие-то шляпы) то для мудреца B остаются возможными помимо прочего цвета b_1 и b_2 , и на графе G_1 кто-то угадывает. Значит, с подсказкой B^* угадывают.

3.8. Докажем более общий факт, из которого следуют сразу оба утверждения.

Добавление к графу G с вершиной A двух новых вершин B и C и ребер AB, BC, CA не влияет на выигрышность, если шляпности новых вершин удовлетворяют условию $2(\hat{B} + \hat{C}) < \hat{B} \cdot \hat{C}$ (шляпности вершин графа G не изменились).

Пусть G' — полученный граф. Если мудрецы выигрывают на графе G , то они выигрывают и на G' . Проверим, что из выигрышности G' следует выигрышность G .

Пусть f' — выигрышная стратегия на G' . Построим f — выигрышную стратегию на G . Для мудрецов из $G \setminus A$ стратегия остается прежней. Зададим стратегию мудреца A . Пусть дан расклад шляп на графе G . Мудрец A видит цвета всех своих соседей в графе G и рассматривает $\hat{B} \cdot \hat{C}$ способов выбрать цвета для B и C . Далее мудрец A смотрит, что он должен отвечать на все эти варианты согласно стратегии f' , и называет цвет, встречающийся в его ответах чаще всего (точнее, не реже всего).

Покажем, что полученная стратегия выигрывает на графе G . Зафиксируем расположение шляп на графе G и предположим, что ни один мудрец из $G \setminus A$ не угадал. Если на мудрецов B и C надеть шляпы произвольным образом, то мы получим расстановку шляп на G' , в которой все мудрецы из $G \setminus A$ не угадают свой цвет по стратегии f' . Значит, его угадает A , B или C . Но из имеющихся $\widehat{B} \cdot \widehat{C}$ случаев расстановки шляп на B и C мудрец B угадает в \widehat{C} случаях, а мудрец C — в \widehat{B} случаях. Значит, A должен угадать свой цвет не менее чем в $\widehat{B} \cdot \widehat{C} - (\widehat{B} + \widehat{C}) > \frac{\widehat{B} \cdot \widehat{C}}{2}$ случаях. Таким образом, мудрец A угадывает свой цвет в большинстве вариантов, и как раз этот цвет он угадает по стратегии f .

3.9. Обозначим через N_i множество соседей мудреца A в графе G_i , а через S множество всевозможных раскладов шляп у мудрецов из N_2 . Если x — один из двух возможных цветов шляпы мудреца A , то второй цвет мы будем обозначать \bar{x} .

Зафиксируем для мудрецов на графе G произвольную стратегию f и опишем стратегию чертика, по которой он сможет обыграть мудрецов.

Выберем произвольный расклад шляп $s \in S$ у соседей A в подграфе G_2 . Этот расклад однозначно задает стратегию f^s мудрецов в подграфе G_1 , которая, как мы знаем, проигрышная на этом подграфе. Выберем произвольный опровергающий расклад шляп φ_s на графе G_1 для стратегии f^s . Тогда мудрец A получает шляпу $\varphi_s(A)$ и не угадывает, это значит, что выбранный расклад шляп φ_s определяет такой расклад шляп $t = \varphi_s|_{N_1}$ мудрецам из N_1 , что $f_A(t, s) = f_A^s(t) = \varphi_s(A)$.

Пусть чертик строит опровергающие расклады шляп на всем графе G , применяя следующий принцип: если в конструируемом опровергающем раскладе шляп предполагается дать мудрецам из N_2 расклад шляп s , то при этом всем мудрецам в подграфе G_1 будет выдан расклад φ_s . При соблюдении этого принципа, во-первых, мудрец A и все остальные мудрецы на подграфе G_1 заведомо не угадают цвет своей шляпы, а во-вторых, стратегия мудреца A теперь полностью определяется лишь раскладами шляп из S (потому что на компоненте G_1 мы сразу же задаем расклад h_s и никаких других вариантов не рассматриваем).

Итак, чертик видит, что мудрецы из $V(G_2) \setminus A$ применяют стратегию f , а мудрец A фактически пользуется стратегией «вижу у соседей из N_2 расклад s — называю цвет $\varphi_s(A)$ ». Поскольку граф G_2 проигрышный, для этой стратегии существует опровергающий расклад шляп ψ на подграфе G_2 . Этот расклад шляп позволяет чертику корректно задать опровергающий расклад шляп на всем графе G . Действительно расклад шляп ψ определяет набор $s = \psi|_{N_2}$ цветов шляп у соседей A в подграфе G_2 , а набор s задает опровергающий расклад шляп φ_s на подграфе G_1 , при этом расклады ψ и φ_s совместимы: оба расклада назначают мудрецу A цвет $\varphi_s(A)$, тогда как стратегия f требует назвать цвет $\overline{\varphi_s(A)}$.

3.10. Пусть мудрецы зафиксировали стратегию f на графе G' . Построим проигрышный расклад для этой стратегии. Для этого посмотрим на стратегию мудреца A . Он какой-то из двух цветов говорит реже, а именно не более, чем $h(B) - 1$ раз. Выдадим ему шляпу этого цвета. Теперь, чтобы он не угадал, мы обязаны давать B шляпу одного из оставшихся $h(B)$ цветов (если их осталось больше, оставим ровно $h(B)$). Ну и отлично, мы как раз умеем выдавать расклад на оставшемся графе, где у B только $h(B)$ цветов. Это и будет опровергающий расклад на всем графе.

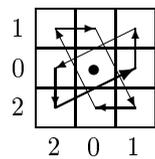
Шахматы вслепую

4.1.

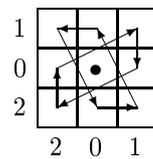
W1) Тривиально. На языке шляп это игра, где какому-то из мудрецов всегда дают шляпу одного и того же цвета, конечно, он его угадает, даже не глядя на других.

W2) На языке шляп в соответствующем 4-цикле шляпность двух соседних мудрецов равна двум, эти два мудреца и обеспечат выигрыш, не глядя на остальных.

W3) Это утверждение — пересказ на язык игры «Шах ладьей» утверждения о том, что мудрецы выигрывают на 4-цикле, если всем дают шляпы трех цветов. Например, стратегия мудрецов, описанная в [1], на шахматном языке выглядит следующим образом. Если шахматист видит, что король напарника стоит в центре, он ставит ладью в центр. В противном случае он ставит ладью на ту клетку, куда показывает стрелка, ведущая от короля (на вспомогательной диаграмме для этого шахматиста), см. рис. 16. Координаты клеток на рисунке соответствуют номерам цветов шляп из [1]. Так, шахматист \mathcal{L} , увидев, что король напарника стоит на клетке $(2, 2)$, ставит свою ладью на клетку $(1, 0)$ (этот случай соответствует более жирной стрелке на левом рис. 16).



Стратегия \mathcal{L}



Стратегия \mathcal{R}

Рис. 16.

W4) Пронумеруем клетки доски $L(2 \times 3)$ слева направо сверху вниз, рис. 17a. Пусть стратегия шахматиста \mathcal{R} задается таблицей на рис. 17b. Здесь в клетках доски $R(3 \times 4)$ поставлено 6 меток. Метка r_i означает, что шахматист \mathcal{R} , увидев, что король напарника стоит на i -й клетке доски $L(2 \times 3)$, поставит ладью на клетку доски $R(3 \times 4)$ с меткой r_i .

Стратегию шахматиста \mathcal{L} тоже зададим с помощью доски 3×4 , см. рис. 17c. Здесь в каждой клетке доски $R(3 \times 4)$ поставлено число от 1 до 6 — номер какой-то клетки доски $L(2 \times 3)$. Когда шахматист \mathcal{L} видит, что король стоит на доске $R(3 \times 4)$ в клетке с меткой k , он поставит ладью на клетку номер k доски $L(2 \times 3)$. Чтобы избежать недоразумений в обозначениях, для шахматиста \mathcal{R} мы используем метки вида «буква r с индексом», а для шахматиста \mathcal{L} — метки вида «число».

1	2	3
4	5	6

а) Разметка доски L

r_4	r_5		
r_6			r_3
		r_2	r_1

б) Стратегия шахматиста \mathcal{R}

1	3	3	5
2	1	4	5
2	6	6	4

в) Стратегия шахматиста \mathcal{L}

Рис. 17. Выигрышная стратегия для игры $L(2 \times 3)$, $R(3 \times 4)$

Опишем, каким образом задаются выигрышные стратегии с помощью введенных обозначений.

Утверждение. Стратегия шахматистов выигрышная в том и только том случае, когда для любых трех различных клеток a, b, c доски $L(2 \times 3)$, таких что клетки b и c не лежат в кресте клетки a , выполняется следующее свойство на доске R : все клетки доски $R(3 \times 4)$, помеченные числом a , лежат в пересечении крестов r_b и r_c .

Например, при $a = 1$, $b = 5$, $c = 6$ клетки с меткой 1 на доске $R(3 \times 4)$ лежат в пересечении крестов r_5 и r_6 . (Пересечение крестов r_5 и r_6 подкрашено на рис. 17b.)

1. Если центры крестов лежат в разных вертикалях и горизонталях, то каждое попарное пересечение состоит из двух клеток — см. пример на рис. 19*b*, где закрашено пересечение крестов r_5 и r_6 — итого не более 6 клеток.

2. Если центры никаких двух крестов не совпадают и при этом два центра лежат на одной горизонтали или вертикали (как например r_4 и r_5 на рис. 19*b*, то пересечение этих двух крестов содержит 4 клетки и добавление третьего креста может дать в объединение попарных пересечений еще 4 клетки, только если центр этого креста лежит на одной линии с одним из первых двух центров (как r_4 и r_6 на рис. 19*b*. В этом случае получается 8 клеток, при этом 7 из них лежат в одном кресте (в рассматриваемом примере — в кресте r_4).

3. Если центры двух крестов совпадают, то пересечение крестов содержит 7 клеток. При любом положении третьего центра множество попарных пересечений не увеличится.

Итак, для клеток с метками 1, 2, 3 на доске $R(4 \times 4)$ имеется не более 8 позиций, аналогично для клеток с метками 4, 5, 6 тоже не более 8 позиций. Поскольку доска $R(4 \times 4)$ содержит 16 клеток, мы имеем 8 позиций для меток 1, 2, 3 и 8 позиций для меток 4, 5, 6. Но как установлено в переборе, 8 позиций реализуются только в виде множества «целый крест» плюс одна клетка. Осталось заметить, что двумя крестами и двумя дополнительными клетками невозможно накрыть всю доску $R(4 \times 4)$.

L2) Как и в п. L1 доска $L(2 \times 3)$ здесь та же самая, а правая доска тоже «довольно большая». Аналогично убеждаемся, что объединение попарных пересечений любых трех крестов (возможно, совпадающих) на доске $R(3 \times 5)$ содержит не более 8 клеток; случаи, в которых это пересечение содержит 7 или 8 клеток, показаны на рис. 20, — это случаи, когда центры двух крестов лежат в одной строке или столбце (в том числе, когда они лежат в одной клетке).

Во всех вариантах объединение попарных пересечений трех крестов занимает одну горизонталь доски полностью, а в каждой из двух других горизонталей оно занимает меньше половины клеток. Это значит, что объединение двух таких множеств не может составлять всю доску.

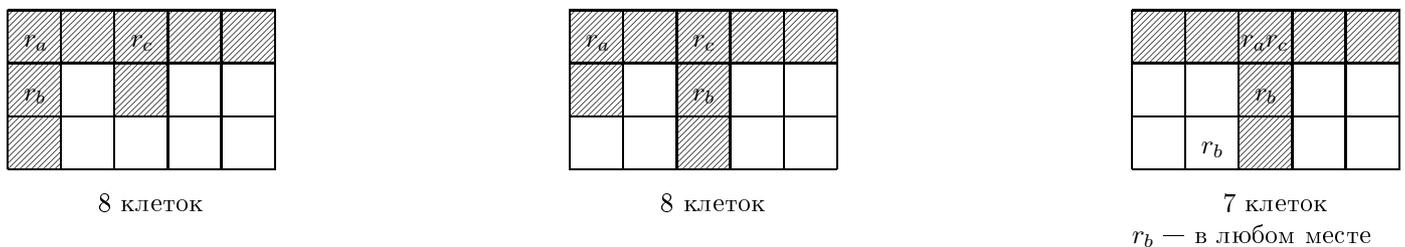


Рис. 20. Объединение попарных пересечений трех крестов на доске $R(3 \times 5)$

L3) Это рассуждение сообщил нам Олег Чемокос. Зафиксируем какие-нибудь стратегии шахматистов \mathcal{L} и \mathcal{R} и проверим, что найдутся положения королей, в которых оба короля избегают шаха. Заметим, что если король стоит в какой-либо клетке доски $L(2 \times 4)$, то на доске имеется три «слабые» клетки (в другой строке), — клетки, с которых ладья не может побить этого короля. Для выигрышной стратегии все положения короля на доске $R(3 \times 4)$, вызывающие ответный ход шахматиста L в слабую клетку, должны находиться в одном кресте. При этом в роли слабых клеток могут оказаться любые три клетки одной строки — это произойдет, если король находится во второй строке в столбце, содержащем четвертую клетку.

Стратегия шахматиста \mathcal{L} — это отображение $\phi: R(3 \times 4) \rightarrow L(2 \times 4)$, которое определяет, на какую клетку $\phi(K_R)$ шахматист \mathcal{L} поставит ладью, если увидит короля на клетке K_R доски $R(3 \times 4)$. Покрасим клетки доски $R(3 \times 4)$ в два цвета: клетку x , для которой клетка $\phi(x)$ находится в первой строке доски $L(2 \times 4)$ красим в белый цвет, остальные в черный. Не умаляя общности можем считать, что клеток белого цвета на доске не меньше, чем черного. Разберем два случая, охватывающих все возможности, которыми может быть реализовано это «не меньше».

1. Одна из строк доски $R(3 \times 4)$ содержит три белые клетки r_1, r_2, r_3 (будем называть эту строку первой) и еще одна строка (вторая) — две белые клетки r_4 и r_5 . Тогда в первой строке доски $L(2 \times 4)$ можно выбрать клетку ℓ , для которой прообраз $\phi^{-1}(\ell)$ — либо пустое множество, либо одна клетка первой строки, скажем, r_1 . В этом случае остальные клетки первой строки являются слабым множеством, а его прообраз содержит клетки r_2, r_3, r_4 и r_5 , не лежащие в одном кресте.

2. Каждая строка доски $R(3 \times 4)$ содержит две белые клетки. Тогда выберем в первой строке доски $L(2 \times 4)$ клетку ℓ , для которой прообраз $\phi^{-1}(\ell)$ состоит не более чем из одной клетки (для определенности она находится в третьей строке). В этом случае остальные клетки первой строки доски $L(2 \times 4)$ являются слабым множеством, а их четыре прообраза, лежащие в первых двух строках доски $R(3 \times 4)$, образуют множество, не лежащее в одном кресте.

L4) Допустим, что у шахматистов существует выигрышная стратегия. Воспользуемся обозначениями для описания выигрышных стратегий из п. W4). Пронумеруем клетки доски $L(3 \times 3)$ числами от 1 до 9. Тогда стратегия шахматиста \mathcal{R} задается выставлением на доску $R(3 \times 4)$ девяти символов — r_1, r_2, \dots, r_9 . При этом стратегия шахматиста \mathcal{L} задается выписыванием в каждой клетке доски $R(3 \times 4)$ чисел от 1 до 9, которые мы будем называть метками.

Как и в предыдущем пункте, при выставлении короля в клетку i на доске $L(3 \times 3)$ имеется 4 клетки, с которых ладья не может бить этого короля. Эти клетки и их номера будем называть i -слабыми. Для выигрышности стратегии необходимо, чтобы при всех i метки на доске $R(3 \times 4)$, совпадающие с i -слабыми номерами, находились в кресте с центром в r_i .

Заметим, что символы r_1, r_5 и r_9 должны находиться в разных строках доски $R(3 \times 4)$. Действительно, нетрудно видеть, что каждая клетка доски $L(3 \times 3)$ находится в слабой позиции по отношению к одной из клеток с номерами 1, 5 или 9. (Например, 1 и 2 в слабой позиции к 9, 3 — в слабой позиции к 5 и т. д.) Следовательно, каждая метка на доске $R(3 \times 4)$ лежит в r_1 -, r_5 - или r_9 -кресте. Это может быть только если символы r_1, r_5 и r_9 находятся в разных строках.

Аналогично, символы r_i, r_j и r_k находятся в разных строках, если клетки i, j, k занимают три разные строки и три столбца доски $L(3 \times 3)$.

Следствие. Для расположения символов r_1, r_2, \dots, r_9 на доске $R(3 \times 4)$ возможны два случая: 1) либо символы r_1, r_2, r_3 стоят в одной строке доски $R(3 \times 4)$, символы r_4, r_5, r_6 стоят в другой строке, а символы r_7, r_8, r_9 — в третьей;

2) либо символы r_1, r_4, r_7 стоят в одной строке доски $R(3 \times 4)$, символы r_2, r_5, r_8 стоят в другой строке, а символы r_3, r_6, r_9 — в третьей.

Следствие доказывается умеренно противным перебором.

Докажем теперь, что выигрышных стратегий с таким обширным набором свойств не существует. Поставим ладей на все клетки r_i доски $R(3 \times 4)$ (в клетку ставим столько ладей, сколько в ней символов r_i). По следствию в первой строке доски $R(3 \times 4)$ имеется «пустая» клетка, т. е. клетка, не содержащая ни одного символа r_i , но содержащая некоторую метку a . Пусть она для определенности находится в четвертом столбце (рис. 21). По утверждению на эту клетку направлено 4 ладейных удара, причем две из этих четырех ладей находятся в одной строке, и еще две — в другой. Это значит, что в одной из клеток четвертого столбца заведомо стоят две ладьи. Пусть для определенности это клетка находится во второй строке. Теперь мы знаем, что всего во второй строке поставлено 3 ладьи, причем две из них находятся в одной клетке.

Значит, во второй строке есть две «пустые» клетки. Выберем ту из них, над которой в первой строке стоит не более одной ладьи. Пусть эта клетка для определенности находится в первом

			a
b			$r_1 r_2$
$r_7 r_8$	\times	\times	

Рис. 21. Стратегия для случая L3

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10

а) Разметка доски L

1	2	
3	4	

б) Стратегия шахматиста \mathcal{L}

Рис. 22. Ищем стратегию для игры $L(2 \times 5), R(3 \times 3)$

столбце и содержит метку b . На выбранную клетку тоже направлено 4 ладейных удара от двух пар ладей, стоящих в двух строках. Одна пара ладей расположена, очевидно, во второй же строке, а другая пара — в третьей строке (в первой строке над клеткой b не более одной ладьи). Теперь мы видим, что одна из клеток третьей строки — во втором или третьем столбце — не может собрать на себя 4 ладейных удара из двух разных строк. Противоречие.

L5) Допустим, что у шахматистов существует выигрышная стратегия. Воспользуемся обозначениями для описания выигрышных стратегий из п. W4). Пронумеруем клетки доски $L(2 \times 2)$ числами от 1 до 4. Тогда стратегия шахматиста \mathcal{R} задается выставлением на доску $R(5 \times 5)$ четырех символов — r_1, r_2, r_3, r_4 . На доске $R(5 \times 5)$ найдется хотя бы одна клетка, назовем ее Q , не лежащая ни в одном из четырех крестов, определяемых этими символами. Стратегия шахматиста \mathcal{L} задается выписыванием в каждой клетке доски $R(5 \times 5)$ числа от 1 до 4. Рассмотрим число, написанное в клетке Q , не умаляя общности это 1. Рассмотрим число на доске $L(2 \times 2)$, стоящее по диагонали от 1, не умаляя общности, это 4. Пусть судья поставит королей: на доске $R(5 \times 5)$ в клетку Q , а на доске $L(2 \times 2)$ — в клетку 4. Тогда игрок \mathcal{L} поставит ладью на клетку 1 доски $L(2 \times 2)$, а игрок \mathcal{R} поставит ладью на клетку r_4 доски $R(5 \times 5)$. Ни одна из ладей не ставит шах. Шахматисты проиграли.

L6) Разметим доску L , как на рис. 22 а). Как и W4), стратегия шахматиста \mathcal{L} задается выписыванием в каждую клетку доски $R(3 \times 3)$ числа от 1 до 10 — номера клетки на доске $L(2 \times 5)$. Поскольку на доске $L(2 \times 5)$ всего две горизонтали, найдется две строки доски $R(3 \times 3)$, в каждой из которых написаны номера двух клеток, таких что все эти четыре клетки (возможно, среди них есть совпадающие) лежат в одной горизонтали доски $L(2 \times 5)$. Пусть j — номер клетки из второй горизонтали, являющийся i -слабым сразу по отношению ко всем этим клеткам.

Например, пусть на доске $R(3 \times 3)$ стоят метки 1, 2, 3, 4, как на рис. 22 б). Тогда 1-, 2-, 3- и 4-слабым одновременно является номер 10. Это значит, то ладья на клетке r_{10} доски $R(3 \times 3)$ держит под боем клетки с метками 1, 2, 3 и 4. Это невозможно: чтобы бить метки 1 и 2, она должна находиться в верхней строке доски $R(3 \times 3)$, а чтобы бить 3 и 4 — в нижней.

По той же причине невозможен и общий случай: клетка r_j должна оказаться сразу в двух строках $R(3 \times 3)$.

4.2. Покрасим клетки обеих досок, как показано на рис. 23, а). Пусть оба шахматиста выставляют своих ферзей только на клетки, помеченные ферзями, причем пусть первый шахматист действует из предположения «Короли стоят на клетках одинакового цвета», а второй — из предположения «Короли стоят на клетках разного цвета».

Впрочем, на столь небольшой доске работает несколько неожиданный эффект: ферзь, стоящий на клетке $c2$, держит под боем все клетки того же цвета в шахматной раскраске! Поэтому вместо «экзотической» раскраски можно использовать обычную шахматную, рис. 23, б).

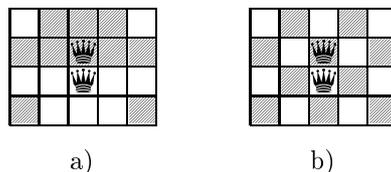


Рис. 23. «Шах ферзем» на досках 4×5

4.3. Утверждение задачи было найдено с помощью компьютера. Участники конференции предложили симпатичные логические стратегии.

Решение 1 (Кононенко Николай). Зададим стратегию шахматистов. Разметим доску $R(5 \times 5)$ как показано на рис. 24 а). Увидев короля на клетке с меткой j , шахматист \mathcal{L} ставит ладью на клетку доски $L(4 \times 4)$, помеченную числом j , рис. 24 б). Таким образом, шахматист \mathcal{L} использует всего четыре позиции для своего ферзя. Для каждой клетки доски $L(4 \times 4)$ на рис. 24 в) показано,

с каких позиций ферзь шахматиста \mathcal{L} не бьет эту клетку. Например, числа 1 и 2 в левом нижнем углу означают, что левая нижняя угловая клетка доски $L(4 \times 4)$ не пробивается ферзем с 1-й и со 2-й позиций, показанных на рис. 24b), а прочерк означает, что клетка пробивается со всех позиций.

3	1	3	1	3
1	3	3	3	4
3	3	3	3	3
2	3	3	3	4
3	2	3	2	3
<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>

а) Стратегия шахматиста \mathcal{L}

	1	3	
		2	
4			

б) Куда ставим ферзя

3	2,4	4	1,2
2	4	—	4
3	—	4	1,4
1,2	3	1	3

в) Инструкция для \mathcal{R}

Рис. 24.

Увидев короля на доске $L(4 \times 4)$, шахматист \mathcal{R} с помощью рис. 24c) сразу понимает, с каких «невыгодных» позиций ферзь его напарника не может поставить шах. Поэтому он должен разместить своего ферзя на доске $R(5 \times 5)$ так, чтобы тот пробивал все клетки, отправляющие ферзя шахматиста \mathcal{L} на невыгодную позицию.

Для невыгодных позиций 1, 2 можно поставить ферзя на клетку $b3$, для 1, 4 — на клетку $c4$, для 2, 4 — на клетку $c2$, для 3 — на клетку $c3$.

Решение 2 (Преснова Екатерина, Рацеева Ольга).

Разметим доску $L(4 \times 4)$ как показано на рис. 25a). Наблюдение 1: для этой разметки выполняется свойство — для любой пары меток все клетки, помеченные этой парой меток пробиваются одним ферзем. Например, все клетки, помеченные 0 или 1, пробиваются с клетки $a4$; все клетки, помеченные 0 или 2, пробиваются с клетки $c2$ и т. д.

Увидев короля на клетке с меткой j , пусть шахматист \mathcal{R} ставит ладью на клетку \mathbb{W}_j доски $R(5 \times 5)$, рис. 25b). Наблюдение 2: любая клетка доски $R(5 \times 5)$ пробивается как минимум с двух разных мест из этого набора. Тогда шахматист \mathcal{L} , увидев короля на доске $R(5 \times 5)$ сразу понимает, с каких позиций (среди указанных четырех) ферзь игрока \mathcal{R} не может объявить шах. В силу наблюдения 2 таких «невыгодных» позиций не более двух, и шахматист \mathcal{L} должен поставить своего ферзя на доске $L(4 \times 4)$ так, чтобы тот пробивал все клетки, отправляющие ферзя шахматиста \mathcal{L} на невыгодную позицию. Это возможно, в силу наблюдения 1.

0	1	0	1
1	0	2	2
0	2	0	2
1	3	2	0

а)

\mathbb{W}_0		\mathbb{W}_1	
\mathbb{W}_2		\mathbb{W}_3	

б)

Рис. 25.

					<i>C</i>
	<i>B</i>				
<i>A</i>					

Рис. 26.

4.4. Решение 1 (Костина Екатерина, Миргалимова Розалина, Хамикова Марина). Приведем доказательство более сильного факта — что в игре «Шах ферзем» на досках $L(4 \times 6)$, $R(7 \times 7)$ мудрецы проигрывают.

Пусть судья планирует поставить короля на одну из клеток A, B, C доски $L(4 \times 6)$ (рис. 26). Для каждого из этих положений игрок \mathcal{R} готов поставить ферзя на доску $R(7 \times 7)$. Поскольку три ферзя не могут держать под боем все клетки доски 7×7 , на доске $R(7 \times 7)$ найдется клетка, которую не бьет ни один из ферзей. Если судья поставит короля на эту клетку, игрок \mathcal{L} поставит в ответ ферзя на доску $L(4 \times 6)$. Так как клетки A, B, C не могут быть побиты одним ферзем,

хотя бы одна из них окажется не под боем, и судья, окончательно сформулирует свои планы по поводу доски B : он поставит короля именно на эту клетку. Шахматисты проиграли.

Решение 2 (обычные вероятностные соображения). Но поданы они так, что мозг не сразу готов их воспринимать.

Стратегия шахматиста \mathcal{L} — это отображение $\phi: R(7 \times 7) \rightarrow L(7 \times 8)$, которое определяет, на какую клетку $\phi(K_R)$ шахматист \mathcal{L} поставит ферзя, если увидит короля на клетке K_R доски $R(7 \times 7)$. Зафиксируем какую-нибудь стратегию шахматиста \mathcal{L} и проверим, что для любой стратегии шахматиста \mathcal{R} , найдутся положения королей, для которых они не окажутся под шахом.

Для каждого положения K_L короля на доске L вычислим сумму

$$S(K_L) = \sum_{\substack{Q_L: \\ Q_L \notin C(K_L)}} |\phi^{-1}(Q_L)|.$$

Здесь индекс суммирования Q_L пробегает клетки доски L , находясь на которых ферзь шахматиста \mathcal{L} не дает шах королю, стоящему на клетке K_L . Таким образом, сумма подсчитывает количество возможных положений короля на доске R , для которых игрок \mathcal{L} , пользуясь фиксированной стратегией ϕ , не сможет сделать шах.

Теперь просуммируем все эти величины по всем клеткам доски L :

$$S = \sum_{\substack{K_L: \\ K_L \in L(7,8)}} S(K_L) = \sum_{\substack{K_L: \\ K_L \in L(7,8)}} \sum_{\substack{Q_L: \\ Q_L \notin C(K_L)}} |\phi^{-1}(Q_L)|. \quad (2)$$

Величина S равна числу способов поставить двух королей на доски так, чтобы при этом шахматист \mathcal{L} не поставил шах своему королю. Отметим, что индекс K_L в первой сумме пробегает 56 значений — все клетки доски L .

Оценим сумму S другим способом: поставим короля на любую из клеток K_R доски $R(7 \times 7)$ (49 вариантов), тогда шахматист \mathcal{L} поставит ферзя на клетку $\phi(K_R)$. На доске $L(7 \times 8)$ максимальное число клеток, которое может бить ферзь, равно 26, поэтому для любой клетки $\phi(K_R)$ найдется не меньше $56 - 26 = 30$ клеток K_L , находящихся вне ее креста. Таким образом, $S \geq 49 \cdot 30$.

Возвращаясь к формуле (2), мы можем сделать вывод, что существует клетка K_L , для которой $S(K_L) \geq \frac{49 \cdot 30}{56} = 26,25$. Иными словами, если на доске L король поставлен на клетку K_L , то для этой клетки найдется 27 положений короля на доске R , для которого игрок \mathcal{L} не ставит шах своему королю. Во всех этих случаях шах должен поставить игрок \mathcal{R} , причем его ход однозначно задается королем на клетке K_L . Но любой ферзь на доске $R(7 \times 7)$ бьет не более 25 клеток, значит, найдется положение короля на доске R не под шахом.

Таким образом, всегда можно выбрать позиции королей на обеих досках, для которых оба шахматиста не поставят шах.

4.5. Надо бы это доказать

4.6. Надо бы это доказать

4.7. Ответ: да. На доске 11×11 можно поставить 5 ферзей, которые держат под боем все клетки (например, $b4, d10, f6, h2$ и $j8$). Тогда скомбинируем идею решения задачи 4.2 и стандартную идею игры в шляпы пяти цветов на 5-кликке.

5.1. Пусть мудрецы зафиксировали какую-то стратегию на новом графе. Стратегию мудреца A можно задать в виде таблицы 3×7 : строки соответствуют цветам шляп мудреца B , столбцы — цветам шляп мудреца A . В клетке таблицы записывают номер цвета (0 или 1), который называет мудрец A , когда видит у B и C соответствующие цвета шляп.

В каждом столбце таблицы один из символов — 0 или 1 — встречается два раза. Отметим клетки, содержащие повторяющийся символ. (Если символ встретился во всех трех клетках столбца, отметим любые две из них.) Отмеченные клетки могут находиться либо в первой и второй строках, либо во второй и третьей, либо в первой и третьей. Поскольку столбцов 7, по принципу Дирихле

найдутся две строки, в которых отмеченные клетки занимают три столбца. В отмеченных клетках одного столбца может находиться два нуля или две единицы, следовательно, можно выбрать два столбца из трех, так, что в указанных столбцах в отмеченных клетках стоит одно и то же число.

Итак, мы выбрали в таблице две строки (для определенности i -ю и j -ю) и два столбца (для определенности k -й и ℓ -й), на пересечении которых стоит одно и то же число, для определенности 0. Теперь мы без проблем построим опровергающий расклад шляп на все графе. Дадим мудрецу A шляпу цвета 1, мудрецу B будем подбирать шляпу i -го и j -го цвета, а мудрецу C — k -го или ℓ -го. При таком подходе к делу мудрец A заведомо не угадает свой цвет, так как в соответствии с таблицей назовет цвет 0. Что же касается назначения конкретных цветов мудрецам B и C , да и всем остальным, запустим игру на графе G : после фиксации цвета мудреца A стратегия остальных мудрецов на графе G определена однозначно, принятые ограничения на цвета шляп B и C позволяют полагать, что их шляпности теперь равны 2. Поскольку граф G проигрышный, мы сумеем предъявить на нем опровергающий расклад шляп.

5.2. Докажем следующее чуть более сильное утверждение.

Существует натуральное число N такое, что на любом графе G , у которого степени всех вершин не превосходят 3, а функции шляпности задается формулой

$$\hat{a} = \begin{cases} 3, & \text{если } \deg a = 1, \\ 41, & \text{если } \deg a = 2, \\ N, & \text{если } \deg a = 3, \end{cases}$$

мудрецы проигрывают.

Доказательство. Обозначим $m = 80 \binom{81}{41} + 1$. Покажем, что $N = 80 \binom{m}{41} \binom{81}{41} + 1$ сгодится.

Индукция по числу вершин. База (граф из двух вершин) очевидна. Переход. Рассмотрим вершину наименьшей степени, обозначим ее A .

Случай 1. $\deg A = 1$. По утверждению задачи 3.7 добавление вершины степени 3 не влияет на выигрышность графа, а если в проигрышном графе еще увеличить шляпность одной из вершин, то он так и останется проигрышным.

Случай 2. $\deg A = 2$. Обозначим соседей A через B и C , $\deg B \leq \deg C$.

Лемма. Таблица $(2k - 1) \times (2(\ell - 1) \binom{2k-1}{k} + 1)$ покрашена в 2 цвета. Тогда можно выбрать такие k строк и ℓ столбцов, что все клетки на пересечении этих строк и столбцов покрашены в один и тот же цвет.

Доказательство. Рассмотрим произвольный столбец, в нем $2k - 1$ клетка. Тогда по принципу Дирихле найдется k клеток одного цвета. Отметим эти k клеток. Сделаем этого для каждого столбца. Число способов отметить k клеток из $2k - 1$ равно $\binom{2k-1}{k}$, эти клетки могут быть одного из двух цветов. Значит, по принципу Дирихле найдутся ℓ столбцов таких, что отмеченные клетки находятся в одном и том же наборе строк и они одного и того же цвета. Это и требовалось. \square

Случай 2.1. $\deg B = \deg C = 2$. Покажем, что мудрецы проиграют в графе G , даже если $\hat{A} = 2$. Предположим, что существует выигрышная стратегия мудрецов в G . Стратегия мудреца A — это таблица 41×41 , в которой каждая клетка покрашена в один из двух цветов. Оставив от нее только 5 строк, воспользуемся леммой для $k = \ell = 3$. Из таблицы можно выбрать 3 строки и 3 столбца так, что их пересечения покрашены в один цвет. Тогда судья наденет на A шляпу другого цвета, а для B и C будет выбирать только трех цветов, соответствующих трем строкам и трем столбцам соответственно. Мы получим выигрышную стратегию для $G \setminus A$, $\hat{B} = \hat{C} = 3$, что противоречит индукционному предположению.

Случай 2.2. $\deg B = 2$, $\deg C = 3$. Покажем, что и здесь мудрецы проиграют в графе G , даже если $\hat{A} = 2$. Для $k = 3$, $\ell = 41$ таблица из леммы имеет размеры 5×801 , а шляпности мудрецов B и C существенно больше: они равны 41 и N . Применяя лемму аналогично случаю 2.1, опять получаем противоречие.

Случай 2.3. $\deg B = \deg C = 3$. Действуем аналогично случаю 2.1, используем лемму для $k = \ell = 41$. Ей можно пользоваться, поскольку при $k = \ell = 41$ таблица имеет размеры $81 \times m$, оба из которых меньше шляпности мудрецов N .

Случай 3. $\deg A = 3$. Пусть B, C и D — соседи мудреца A . Тогда $\deg B = \deg C = \deg D = 3$. Зафиксируем какой-нибудь цвет мудреца D . Тогда стратегия мудреца A — табличка $N \times N$. Оставив 81 строку и m столбов, используем лемму, находим 41 строку и 41 столбец, пересечения которых покрашены в один цвет. Число способов выбрать 41 строку и 41 столбец равно $\binom{m}{41} \binom{81}{41}$. Прделаем эти действия для каждого из N возможных цветов мудреца D . Так как $N = 80 \binom{m}{41} \binom{81}{41} + 1$, то найдется цвет мудреца D , для которого наборы строк, столбцов и цвета пересечений совпадают. Наденем на мудреца A противоположный цвет, оставим по 41 варианту цветов мудрецам B, C, D , и получим противоречие с индукционным предположением.

Список литературы

- [1] Задачи Санкт-Петербургской олимпиады школьников по математике 2016 года. М.: МЦНМО, 2017.

Sages and hats

Bursian O., Kokhas K., Latyshev A., Retinskiy V.

1 Get acquaintance: “Hats” game

Let undirected graph G be given, there is one sage and one chest with hats of different colors in each vertex of G . The sages know each other. Graph G , location of the sages in graph vertices and colors of hats in the chests are fixed and known to all. In particular, each sage understands, in which vertex each of his neighbours is situated. Judge conducts the following test with the sages.

Judge places a hat on head of each sage from the corresponding chest. Each sage sees only the hats of sages in neighbour graph vertices, but he does not see his own hat and does not know its color. The sages are not allowed to communicate. By judge signal the sages name a color simultaneously. We say that the sages have passed the test successfully = «have win», if at least one of them has named correct color of his own hat.

Rules were explained to the sages before the test and they had possibility to hold a discussion, in which they have to determine a public strategy. Publicity means that everybody, including the judge, knows this strategy. The strategy of sages should be deterministic, i.e. each sage decision is determined uniquely by the hats of other sages. We call a strategy *winning* if for any hat placement at least one sage names correctly color of his own hat. Also we say that the sages win if they have a winning strategy and loose if they have not.

Here is a pair of problems on this topic.

1.1. Each of two sages obtains a hat of white, blue or red color, placed on his head. The sages received the message before the test that the colors of their hats are different. Each of them sees the hat of the other sage but does not see his own hat. They must try to guess simultaneously colors of their hats (each of them writes a color on piece of paper). Prove that the sages can come to agreement how to act in advance so that at least one of them will guess the color correctly.

1.2. Sultan gives examination for 11 court sages (viziers). By examination rules sultan puts 10 sages on 10 pits, located around a circle, and he imprisons one more sage to the tower in the centre of the circle. On forehead of each of the first 10 sages sultan writes number 1 or 2; on forehead of the central sage sultan writes a number from 1 to 1024. The sage in the tower sees numbers of all the others, and they see his number (but do not see each other). All the sages must try to guess their own numbers simultaneously. Sultan explained to the sages the rules of examination in advance and gave them time for discussion before the examination starts. Can the sages act so that at least one of them certainly guesses his number?

We will identify the vertex of graph G and the sage in it. We mean that colors are numbered by 0, 1, 2, 3, ..., and that hats with colors from 0 to some number $h(X) - 1$ lie in the chest of sage X , the set of hat colors in the chest of sage X is denoted by $\text{Col } X$.

We call a *hats game* a pair $\langle G, h \rangle$, where $G = \langle V, E \rangle$ is a graph, $h: V \rightarrow \mathbb{N}$ is a function that shows how many hats are in the chest in each vertex. We call function h «hatness». We will sometimes write \hat{A} instead of $h(A)$. If the sages win in game $\langle G, h \rangle$, we say that $\langle G, h \rangle$ is a *winning graph*.

We call a winning graph *simple*, if it does not contain winning subgraph $\langle G', h' \rangle$, where $G' \subsetneq G$, $h' = h|_{V(G')}$.

1.3. Prove that the sages win on the graph in fig. 1.

1.4. Is winning graph in fig. 1 simple?

1.5. Prove that the sages win on the graph «path $A_1A_2 \dots A_n$ », where $n \geq 2$ and hatnesses are given in fig. 2.

1.6. Is winning graph in fig. 2 simple?

1.7. Prove that the sages win on graph $K_{2,3}$ with given hatnesses (fig. 3).

1.8. Do the sages win on graph $K_{1,3}$ with given hatnesses (fig. 4)?

1.9. Prove that the sages win on the cycle C_n , $n \geq 4$, with given hatnesses (fig. 5).

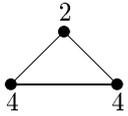
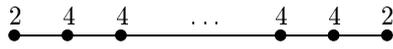
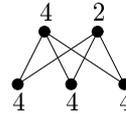
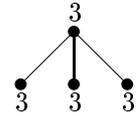


Figure 1.

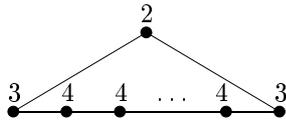
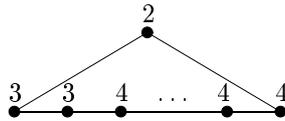
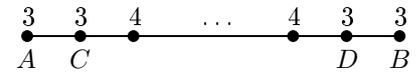
Figure 2. Path with n verticesFigure 3. Graph $K_{2,3}$ Figure 4. Graph $K_{1,3}$

1.10. Prove that the sages win on the cycle C_n , $n \geq 4$ with given hatnesses (fig. 6).

1.11. Does there exist a simple winning graph, on which at least two sages guess their own colors correctly for any hats placement?

1.12. Prove that on complete bipartite graph $K_{99,50}$ sages loose, if hatness of each sage equals 100.

1.13. Sages are on the graph «path AB » (fig. 7, $n \geq 4$). Before the discussion the judge promised to the sages that A and B will get hats of the same color. Do the sages win?

Figure 5. Cycle with n verticesFigure 6. Cycle with n verticesFigure 7. Path AB with n vertices

1.14. Let sages play on graph G with hatness function h . The judge promised them in advance that during the test when he will put a hat on the sage A head he will whisper into his ear a true statement of the form «I has placed on your head a hat of one of two colors c_1 or c_2 ». Therefore, in the discussion the sages know that during the test the judge will give to a sage A a hint, but they do not know what colors he will name. So the sages determine strategies for all the sages except A , as usual, and sage A gets the set of $\binom{h(A)}{2}$ strategies, one for each possible judge's hint.

Prove that this hint does not affect the game result.

2 Games on cliques

2.1. Does there exist a winning graph not containing a 4-clique as subgraph, for which hatnesses of all sages equal 4?

2.2. Sages are in vertices of complete graph K_n , in the chest of i -th sage there are a_i hats of different colors. Prove that the sages win if and only if

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \geq 1.$$

2.3. We call a strategy of sages *exact*, if for each hats placement exactly one sage guesses his color correctly. Find all games for which an exact strategy exists.

2.4. Graph G is obtained from complete graph on n vertices by removing one edge. The hatnesses of all sages equal n . Do the sages win on such graph?

2.5. Graph G is complete graph with 4 vertices A, B, C, D , in which edge CD has been removed. And $h(A) = 6$, $h(B) = 6$, $h(C) = 2$, $h(D) = 3$. Do the sages win on such graph?

2.6. Graph G is complete graph with n vertices A_1, A_2, \dots, A_n , in which edge $A_{n-1}A_n$ has been removed. The hatnesses of vertices equal a_1, \dots, a_n . It turned out that the graph is winning and

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n-1}a_n} = 1.$$

Prove that $a_1 a_2 \dots a_{n-2}$ is divisible by $a_{n-1} a_n$.

2.7. Do the sages win on the graph «Medium bow» (fig. 8)?

2.8. Do the sages win on the graph «Big bow» (fig. 9)?

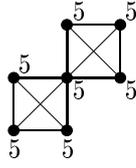


Figure 8. Graph «Medium bow»

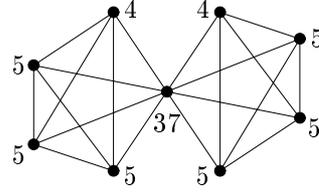


Figure 9. Graph «Big bow»

3 Graph operations

Let $\langle G_1, h_1 \rangle, \langle G_2, h_2 \rangle$ be two games such that $V_1 \cap V_2 = \{v\}$. Let $G = G_1 \times_v G_2$ be the union of graphs G_1 and G_2 , in which both vertices v are united into one vertex. Let function $h: V_1 \cup V_2 \rightarrow \mathbb{N}$ coincide with h_i on $V_i \setminus \{v\}$ ($i = 1, 2$) and $h(v) = h_1(v)h_2(v)$. Denote the game $\langle G, h \rangle$ by $G_1 \times_v G_2$ (fig. 10).

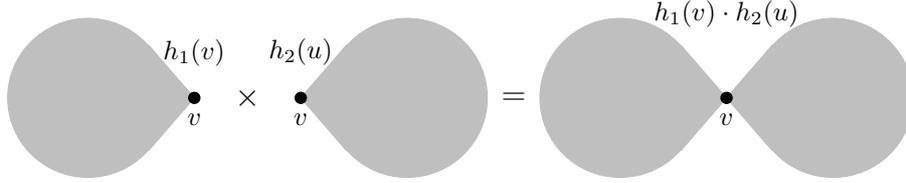


Figure 10. Game $G_1 \times_v G_2$

3.1. Theorem about product. If sages win on graphs G_1 and G_2 , then they win also on graph $G_1 \times_v G_2$.

Let G_1 and G_2 be two graphs without common vertices. By the *substitution of graph G_2 to graph G_1 on the place of vertex v* we call the graph obtained by union of graphs $G_1 \setminus v$ and G_2 with adding of all edges, that connect each vertex of G_2 with each neighbour of v . We denote the substitution by $G_1[v := G_2]$.

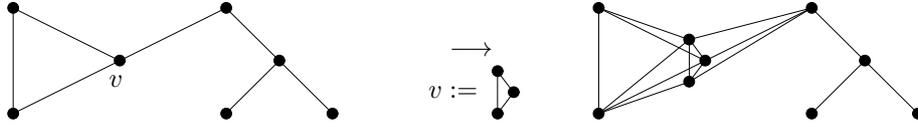


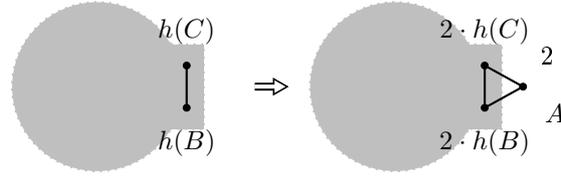
Figure 11. Substitution of graph on the place of vertex

3.2. Theorem about substitution. Let sages win in games $\langle G_1, h_1 \rangle$ and $\langle G_2, h_2 \rangle$. Let G be the graph of substitution $G_1[v := G_2]$, where $v \in G_1$ is an arbitrary vertex. Then game $\langle G, h \rangle$ is winning, where

$$h(u) = \begin{cases} h_1(u) & u \in G_1, \\ h_2(u) \cdot h_1(v) & u \in G_2. \end{cases}$$

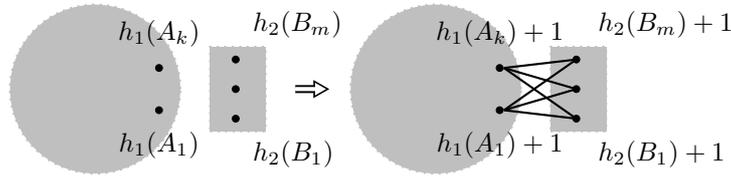
3.3. Let $\langle G, h \rangle$ be a game, in which sages win, let BC be an edge of graph G . Consider graph $G' = \langle V', E' \rangle$, obtained by adding new vertex A to graph G : $V' = V \cup \{A\}$, and two edges: $E' = E \cup \{AB, AC\}$. Then the sages win in the game $\langle G', h' \rangle$ (see fig. 12), where

$$h'(u) = \begin{cases} 2, & u = A, \\ 2h(B), & u = B, \\ 2h(C), & u = C, \\ h(u), & \text{for other vertices } u \in V. \end{cases}$$

Figure 12. Addition of vertex A of hatness 2 to edge BC

3.4. Let $\langle G_1, h_1 \rangle, \langle G_2, h_2 \rangle$ be two games, in which sages win. Let $A_1, A_2, \dots, A_k \in V_1; B_1, B_2, \dots, B_m \in V_2$. Consider graph $G' = \langle V', E' \rangle$, obtained by adding all the edges $A_i B_j$ to graph $G_1 \cup G_2$: $V' = V_1 \cup V_2, E' = E_1 \cup E_2 \cup \{A_i B_j, i = 1, \dots, k; j = 1, \dots, m\}$ (fig. 13). Then the sages win in game $\langle G', h' \rangle$, where

$$h'(u) = \begin{cases} h_1(u), & u \in G_1 \setminus \{A_1, A_2, \dots, A_k\}, \\ h_2(u), & u \in G_2 \setminus \{B_1, B_2, \dots, B_m\}, \\ h_1(u) + 1, & u \in \{A_1, A_2, \dots, A_k\}, \\ h_2(u) + 1, & u \in \{B_1, B_2, \dots, B_m\}. \end{cases}$$

Figure 13. Gluing of two graphs, $k = 2, m = 3$

3.5. Let $\langle G, h \rangle$ be a game in which sages win, let $Z, C \in V$ be two vertices of graph G . Consider graph $G' = \langle V', E' \rangle$, obtained by adding new path $ZABC$ to graph G : $V' = V \cup \{A, B\}, E' = E \cup \{ZA, AB, BC\}$. Then the sages win in game $\langle G', h' \rangle$, where $h'(Z) = 2h(Z), h'(C) = h(C) + 1, h'(A) = 2$ and $h'(B) = 3$ and $h'(u) = h(u)$ for other vertices $u \in V$ (fig. 14).

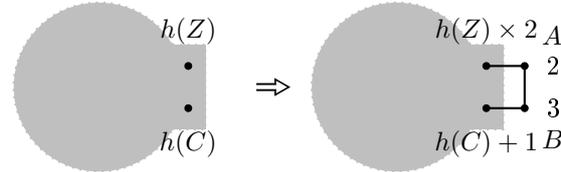


Figure 14. Addition of two vertices with hatnesses 2 and 3 connected by edge

3.6. Let graph $\langle G, h' \rangle$ be winning, $V(G) = \{A_1, \dots, A_n\}$. Take n winning graphs $\langle G_i, h_i \rangle$ and mark in each of them one vertex A_i . Construct graph G on the set of marked vertices. For this «supergraph» define hatness function as $h(A_i) = h'(A_i)h_i(A_i)$ (and for the other vertices hatness is the same as in the initial graphs). Then the sages win.

3.7. The addition to graph G a pendant vertex A , where $\hat{A} > 2$, does not affect the result of the game.

3.8. a) Addition of two new vertices B and C of hatness 5 and edges AB, AC, BC to graph G with vertex A of hatness 2 does not affect the result of the game.

b) Addition of two new vertices B and C of hatnesses 7 and 5 and edges AB, AC, BC to graph G with vertex A of hatness 3 does not affect the result of the game.

3.9. Let G_1 and G_2 be graphs with vertex A in which sages loose if $\hat{A} = 2$. Then the sages loose on graph $G = G_1 \uparrow_A G_2$, in which $\hat{A} = 2$.

3.10. Let $H = \langle G, h \rangle$ be a losing game, B be an arbitrary vertex of graph G . Consider graph $G' = \langle V', E' \rangle$, obtained by addition new pendant vertex A to graph G : $V' = V \cup \{A\}, E' = E \cup \{AB\}$. Then the sages loose in game $\langle G', h' \rangle$, where $h(A) = 2, h'(B) = 2h(B) - 1$ and $h'(u) = h(u)$ for other vertices $u \in V$.

4 Blind chess

Game «Check by rook». Two chess players \mathcal{L} and \mathcal{R} are sitting opposite each other, there is a chessboard on the wall behind of each of them. Each chess player does not see his own board but sees the board of the other chess player. The judge puts one king on each of these boards. After that the chess players must to name one cell of his chessboard independently of each other and the judge puts rook on this square. If at least one of the kings is in rook check (under attack of rook) (or the rook has been put on the same cell, where king is), then the chess players win, otherwise they lose.

Chessboards of the players can be different and of arbitrary sizes. As in the game «Hats», the chess players determine public deterministic strategy in advance. The judge knows this strategy and plays against the chess players.

Let graph G be the cycle $ABCD$ with hatness function h . In fact, graph G is the complete bipartite graph $K_{2,2}$, so sages A and C see the same, and sages B and D also see the same. Then a pair of players A and C we call chess player \mathcal{L} and we will mean that his board has size $h(A) \times h(C)$, and a pair B and D we call chess player \mathcal{R} and we will mean that his board has size $h(B) \times h(D)$. Therefore game «Hats» on the cycle $ABCD$ with hatness function h is equivalent to game «Rook check» on boards $L(h(A) \times h(C))$ and $R(h(B) \times h(D))$.

Union of any vertical and any horizontal row of chessboard we call *cross*. Cross is uniquely defined by the cell, situated in the intersection of these rows, it is called the *centre* of the cross. The rook located in the centre of the cross, holds in check exactly all cells of the cross.

In problem 4.1 you can submit items solutions separately.

4.1. In the game «Check by rook» the chess players win on the following pairs of board:

W1) one of the boards has size $1 \times k$, where k is an arbitrary positive integer;

W2) $L(2 \times k)$ and $R(2 \times m)$, where k and m are arbitrary positive integers;

W3) $L(3 \times 3)$, $R(3 \times 3)$; W4) $L(2 \times 3)$, $R(3 \times 4)$;

W5) $L(2 \times 4)$, $R(3 \times 3)$; W6) $L(2 \times 2)$, $R(k \times m)$, where $\min(k, m) \leq 4$.

The chess players lose on the following pairs of boards:

L1) $L(2 \times 3)$, $R(4 \times 4)$; L2) $L(2 \times 3)$, $R(3 \times 5)$;

L3) $L(2 \times 4)$, $R(3 \times 4)$; L4) $L(3 \times 3)$, $R(3 \times 4)$;

L5) $L(2 \times 2)$, $R(5 \times 5)$; L6) $L(2 \times 5)$, $R(3 \times 3)$.

For boards of other sizes the question if the sages win can be solved by comparing with these cases. For example, the chess players lose on the boards $L(3 \times 4)$, $R(3 \times 4)$ because they lose even in simpler case L3. The chess players win on the boards $L(2 \times 3)$, $R(3 \times 3)$ because they win even when one of the boards is larger (as in case W3).

Check by queen. Consider variant of the game when both chess players put on the board a queen instead of a rook. We call this game «Check by queen».

4.2. In the game «Check by queen» $L(4 \times 5)$, $R(4 \times 5)$ the chess players win.

4.3. In the game «Check by queen» $L(4 \times 4)$, $R(5 \times 5)$ the chess players win.

4.4. In the game «Check by queen» $L(7 \times 8)$, $R(7 \times 7)$ the chess players lose.

4.5. In the game «Check by queen» $L(3 \times 4)$, $R(7 \times 7)$ the chess players lose.

4.6. In the game «Check by queen» $L(4 \times 5)$, $R(5 \times 5)$ the chess players lose.

4.7. Consider variant of the game «Check by queen», in which 5 chess players are situated so that each of them sees the boards of the others but does not see his own board. All boards have size 11×11 . As in the initial game, the judge puts one king on each board, and the chess players simultaneously point to the cell, where the queen has to be put. Can the chess players win?

5 Several more problems

5.1. Let G be graph with vertices B and C . Let hatness function is such that $\widehat{B} = \widehat{C} = 2$ and the graph is losing. Add to the graph new vertex A , which is connected only with B and C . Then the sages lose on the obtained graph, if $\widehat{A} = 2$, $\widehat{B} = 3$, $\widehat{C} = 7$, and hatnesses of other vertices have not changed.

5.2. Is it true that there exists such «large» number k that any graph G , in which degrees of all vertices do not exceed 3, and hatnesses of all vertices equal k , is losing?

5.3. Is it true that there exists such «large» number d , that any graph G , in which degrees of all vertices equal d , and hatnesses of all vertices equal 4, is winning?

SOLUTIONS

1.1. They can arrange colors on cycle, for example, white→blue→red→white, and further let each of them will write next color in order of the cycle, looking at the color of fellow's hat.

1.2. Answer: yes.

Let the number on the tower be written in binary notation, and the numbers 0 or 1 be written on the forehead of each of the sages in pits (instead of 1 and 2). Let the k -th sage in the pit play according the strategy «my bit does not coincide with the k -th bit on the tower», and the sage in the tower only compose his number from the bits in pits.

1.3. Let colors be numbers from 0 to 3. Let the upper sage call the parity of sum of hat colors on two other sages. And the other two sages, since they see the third one and each other, can understand what two colors they must exclude, and play as if they are on the graph-edge with two colors.

1.4. Answer: yes.

It is enough to check that after removing of one edge losing graph is obtained, i.e. that graph «path with two edges» with hatnesses 2, 4, 4 or 4, 2, 4 is losing.

Apply probabilistic arguments: so, for the case 2, 4, 4, the fractions of the number of placements, for which the sages win, equals $1/2, 1/4, 1/4$ correspondingly, that is exactly 1 in total. But the cases, in which the sages in outermost vertices guess correctly, are independent: on $1/8$ part of all placements both outermost sages guess correctly. Therefore, the total part of all placements, on which the sages guess correctly, equals $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} < 1$.

Another case is considered similarly.

1.5. It is well known that the sages win for $n = 2$, when hats can be one of two colors: the first plays according the hypothesis «we have equal hats», and the second «we have different hats». Applying the problem 3.1 several times, we obtain the statement for the other n .

1.6. Answer: yes.

It is enough to check that graph «path P_k » with hatnesses 2, 4, \dots , 4 is losing. Using the constructor from problem 3.7 this statement is easily reduced to the checking whether the game of two persons with hatnesses 2 and 4 is winning or not.

But it can be done also by induction. Let A be the sage with hatness 2, B be his neighbour. By the strategy sage A depending on the color of B (four variants) says one of two colors, say, red or blue. Let sage A say blue color in two or more cases («bad» placements), and say red in the other cases («good» placements). Let the judge give red hat to sage A and declares that sage B will get hats of some two colors corresponding to bad placement. Then sage A will certainly guess incorrectly, and sage B can consider that his hatness equals 2. The game is reduced to shorter path of the same kind.

1.7. Let X and Y be two vertices in the first part, and A, B, C be vertices in the second part, and $\widehat{Y} = 2, \widehat{X} = \widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = 4$. Describe the winning strategy of the sages. Each of four colors can be interpreted as 2-bit binary number consisting of the *left* and the *right* bits. If a sage is ready to say color of defined parity, he already determined with right bit and must to choose one of two values of left bit. The color of Y 's hat, one bit, we also will interpret as parity.

Let sage Y say the parity y that is dominant among hats A, B, C .

Each of sages A, B, C sees hat of Y . So they understand that if the most of hats A, B, C have the same parity as Y 's hat, then sage Y guesses correctly color of his hat. Therefore, they act assuming that the most of hats has parity \overline{y} . Hence, in order to say their guesses each of them must choose a color between two possible colors with parity \overline{y} .

From the other hand, sage X (and sage Y too) sees, what parity is dominant among hats A, B, C , and knows the value of y . Therefore, sage X knows that if the hat of color y is on sage Y , then Y has guessed correctly. Hence sage X assumes that hat of color \overline{y} is on sage Y . But then he knows that in this case sages A, B, C proceed from the assumption that most of their hats have parity y . Thus, sage X sees what is dominant parity among colors A, B, C , and he knows that sages A, B, C proceed

from the assumption that this parity is really dominant among their hats. Let sage X choose the two sages with hats of dominant parity among A, B, C , we call these sages *main*.

Now we show how the «assumptions» can be transformed into a strategy. Columns of the following table correspond to colors of hat X , and rows correspond to sages A, B, C . Let each of sages A, B, C take left bit from his own row of table for his guess (and right bit is defined by the «assumption»).

	0	1	2	3
A	0	0	1	1
B	0	1	0	1
C	0	1	1	0

Sage X sees whether somebody of main sages among A, B, C has guessed correctly the color of his own hat by the given strategy or not. If two main sages have guessed incorrectly then it means that they both pointed wrong left bit of color of their own hats.

Let, for example, main sages be A and B , let them point to bits 0 and 1 correspondingly and have not guessed correctly. Sage A points to bit 0, only if the color of hat X equals 0 or 1; sage B points to bit 1, only if the color of hat X equals 1 or 3. Therefore, both events happen only in the case when the color of hat X equals 1, and sage X must say exactly this color.

Sage X performs similar actions in all other cases. His success is guaranteed by the following *magic property* of the table.

If two arbitrary rows are chosen in the table and two cells in each of them (independently of the other), containing equal symbols are painted over, then exactly one column contains two painted over cells.

Magic property is checked by (evident) considering of all the possible cases. Note that weaker requirement «no more than one column of the table contains two painted over cells» is enough to provide the strategy to be winning.

1.8. Suppose that the sages have a winning strategy. Let v be the vertex of degree 3, u_1, u_2, u_3 be pendant vertices. Will assign the first color to vertex v . Let sages u_1, u_2, u_3 say colors h_1, h_2, h_3 according to the strategy.

Now conduct the second experiment: assign second color to vertex v . Let sages u_1, u_2, u_3 say colors e_1, e_2, e_3 according to the strategy.

Finally, conduct the last experiment. For each $i = 1, 2, 3$ denote by d_i the color that has not been said by sage u_i in the first two experiments (if we have a choice, then we take any color of two possible ones). For each i assign color d_i to pendant vertex u_i . The hat colors for neighbours of sage v are already given, so, his answer by the strategy is known. Assign to vertex v first or second color that does not coincide with this answer. The sages have lost.

1.9. This statement is obtained by applying the constructor from problem 3.4, where graph consisting of one vertex with hatness 1 is taken as $G_2!$ Indeed, the sages win on the path drawn in fig. 2, and the graph, described in the problem, is obtained by the addition of one-vertex graph G_2 to this path, and in the place of gluing the hatnesses increase by 1.

1.10. This statement is obtained by applying the constructor from problem 3.5, Indeed, the sages win on the path drawn in fig. 2, and the graph, described in the problem, is obtained by addition new edge with hatnesses of vertices 2 and 3 to this path and appropriate change of vertex hatnesses, to which they are fastened.

1.11. Answer: no.

Let $\langle G, a \rangle$ be simple winning graph, $A \in V(G)$.

Give hat of color 0 to sage A . Then for the other sages strategy on a losing graph $G \setminus A$ has been fixed. So there is a losing hat placement for the sages on the graph $G \setminus A$, give it to them. In the obtained hats placement on the whole graph G only sage A can guess correctly.

1.12. Present the judge's strategy. First consider 51 hats placements on the part A , consisting of 50 sages, where all sages of A will obtain hats of the same color, and this color is one of the first 51 colors.

Will put on each of the sages of the second part B the hat, that he will say by his strategy for no one of 51 placements. Fix constructed on the part B placement and look what the sages of A will say by their strategy. There are 50 sages, therefore, some color from the first 51 ones nobody says. Put hats of this color on all the sages of part A . As a result nobody of the sages has guessed correctly.

The presented reasoning works for all bipartite graphs, in the smaller part of which there are no more than $k - 2$ vertices, where k is hatness of the sages. If one of the parts contains $k - 1$ vertices, then the sages win in the case, when the size of the second part is very large.

1.13. Answer: yes, the sages win.

Let sage A plays by the strategy «If I see 2, then I say 2, otherwise I say 0», and sage B by the strategy «If I see 2, then I say 2, otherwise I say 1», Sages C and D say 2, if they see hat of color 0 or 1 on their lonely neighbour (A or B). In the opposite case they assume that they have hats not of color 2, and play the game from problem 1.5 with the other sages.

By this strategy the sages really win. Because either sages A и B have hat of color 0 or 1 and then somebody of these four wins, or they have hat of color 2 and then sages C and D have exactly not 2 (otherwise A or B have guessed correctly), and therefore C and D will win on the path between them.

1.14. Suppose that the sages win with the hint. Fix strategies for all sages except A , that they use in game with hint, and will show, how to give the strategy of sage A in order to the sages win without hint.

Assume that if we assign hat of color x to sage A there exists the hats placement on the whole graph, in which sage A has obtained color x , the neighbours of sage A have obtained colors u, v, w, \dots , the other sages have also obtained some colors, and nobody of the sages (excluding A) has guessed correctly. Then we want sage A to guess his color correctly in this situation, i.e. his strategy must satisfy the requirement $f_A(u, v, w, \dots) = x$.

These requirements obtained for different placements, do not contradict to each other. Indeed, if there exists another placement, where neighbours still have colors u, v, w, \dots , and sage A obtained another color y , then the sages could not win with hint A^* , since, having these two placements in mind, the judge can tell sage A , that the color of his hat is either x or y , and after that realize the placement for which A 's guess is incorrect.

Game on clique

2.1. Answer: yes.

For example, «bow» (fig. 15). By the constructor from problem 3.4 one can to construct similar examples for any n .

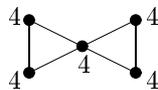


Figure 15. Bow

2.2. Since i -th sage guesses correctly on $\frac{1}{a_i}$ -th part of all placements, if the sum is less than 1, there exists placement, where nobody guesses correctly.

Prove that if the sum is greater or equal to 1, then the sages win. We suggest two solutions.

Solution 1 (Hall's theorem). Fix i (the number of some sage) and partition the set of all hats placements into subsets of a_i elements. In each hats placement we delete color c_i and for the remaining set $c = (c_1, \dots, c_{i-1}, \widehat{c}_i, c_{i+1}, \dots, c_n)$ (symbol "hat" means that this color is omitted) let

$$A_c^i = \{(c_1, \dots, c_{i-1}, x, c_{i+1}, \dots, c_n) : x \in \text{Col}(A_i)\}.$$

Keeping in mind application of Hall's marriage theorem, call the sets A_c^i «girls», and placements themselves call «boys». Will say that boy s and girl A_c^i know each other, if the hats placement s is

an element of the set A_c^i . Each boy knows n girls, and for each i each boy knows exactly one girl of type A_c^i . Each girl A_c^i knows exactly a_i boys.

Prove that there exists matching sending each boy to a girl. For this it is enough to check the theorem condition that each m boys know together at least m girls. Consider an arbitrary set of m boys. Since for each i girl A_c^i knows exactly a_i boys, then for each i m boys know in total at least m/a_i girls of kind A_c^i . Summing over i , obtain that the total number of girls which are familiar with these m boys is not less than $\frac{m}{a_1} + \frac{m}{a_2} + \dots + \frac{m}{a_n} \geq m$. The condition of Hall's theorem holds.

Thus, there exists a matching that put into correspondence to every hat placement a set of kind A_c^i . Note that, when equality $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} = 1$ holds, this matching in fact selects one element in each set A_c^i . Otherwise, if inequality $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} > 1$ holds, then «there will be lonely girls», i. e. no elements are selected in some sets A_c^i .

The constructed matching allows to define sages' strategy. Let j -th sage acts by the rule: looking at hats of the other sages, i.e. the set of colors $c = (c_1, \dots, c_{j-1}, c_{j+1}, \dots, c_n)$, he reconstructs the set A_c^j , which is really consists of all possible ways to supplement set c to the hats placement on the whole graph. Observe that the current hats placement is one of the elements of this set. The sage must say the color that is marked in set A_c^j by our matching (if there is no marked element, he says color arbitrarily).

Since each hats placement is mapped by our matching to the selected element of one of sets A_c^i , for this hats placement i -th sage will guess correctly his own color.

Solution 2 (explicit strategy). Let $N = \text{LCM}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ and for k from 1 to n let $d_k = N/a_k$. We identify the set of possible hat colors of k -th sage and the set of remainders $d_k, 2d_k, \dots, a_k d_k$ modulo N .

Let hats be given to the sages: k -th sage obtains hat of color $x_k d_k$, where $x_k \in \{1, 2, \dots, a_k\}$. Let $S = x_1 d_1 + x_2 d_2 + \dots + x_k d_k \pmod{N}$. Each sage looking around can write all the summands of this sum except his own one. Making assumption about the value of the sum, he can calculate the color of his own hat. Let the first sage check hypothesis $S \in \{1, 2, \dots, d_1\}$; the second sage check hypothesis $S \in \{d_1 + 1, d_1 + 2, \dots, d_1 + d_2\}$ and so on, the n -th sage check hypothesis $S \in \{d_1 + d_2 + \dots + d_{n-1} + 1, \dots, d_1 + d_2 + \dots + d_{n-1} + d_n\}$. The hypothesis of k -th sage concerns d_k consecutive remainders, exactly one among them is divisible by d_k . This remainder defines the color of hat that the k -th sage should say.

2.3. Answer: exact strategies exist only on cliques and only when the equality

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} = 1 \quad (1)$$

holds.

If the graph contains two non adjacent vertices A and B , then put arbitrary hats to all sages except A and B . Now the answers of A and B are defined by the strategy. Give them hats for which their guesses are correctly. On the constructed hats placement A , B and, possibly, somebody else guesses correctly. Therefore, the strategy is not exact. Hence the graph is a clique. It follows from the proof of problem 2.2 that for cliques the existence of an exact strategy is equivalent to equality (1).

2.4. Answer: no, the sages lose.

A pair of sages A , B can be interpreted as a chess player with $n \times n$ board. It is easy to see that the fraction of total number of placements, for which he wins, equals $\frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}$. As for the other sages, each of them wins on $\frac{1}{n}$ -th part of all placements. Therefore, the total fraction of all placements, on which somebody wins, is not less than 1.

2.5. Answer: yes, the sages win.

We interpret hat colors of sages A and B as residues modulo 6, a color C as a residue modulo 2, a color D as a residue modulo 3. Denote hat colors of sages A and B by a and b . Let sage C say color $c = (a+b) \pmod{2}$, sage D say color $d = (a+b) \pmod{3}$. If sages C and D have not guessed correctly, the equality $a + b = c + 1 \pmod{2}$ holds and also one of the following equalities holds: $a + b = d + 1 \pmod{3}$

or $a + b = d + 2 \pmod 3$. Then let A compute his own color assuming that $a + b = c + 1 \pmod 2$ and $a + b = d + 1 \pmod 3$; and B compute assuming that $a + b = c + 1 \pmod 2$ and $a + b = d + 2 \pmod 3$.

We offer to the reader obtain the same result as an exercise using the constructor from problem 3.3.

2.6. Let X be the set of hats placements for the first $n - 2$ sages, i. e., in other words, that is the collection of sets of $n - 2$ colors, where the first color is a possible hat color of sage A_1 , the second color is a possible hat color of sage A_2 and so on, the $(n - 2)$ -th color is a possible hat color of sage A_{n-2} . Let $\alpha = a_1 a_2 \dots a_{n-2}$, then $|X| = \alpha$. Denote by L_i ($i = 1, 2, \dots, a_{n-1}$) the subsets of X , such that if sage A_{n-1} sees on his neighbours the set of colors from L_i , then he says color i . Similarly define sets R_j ($j = 1, 2, \dots, a_n$) for sage A_n . Let L_k be the set L_i of minimum cardinality, $|L_k| = M \leq \frac{\alpha}{a_{n-1}}$. Now consider sets $R_j \setminus L_k$ ($j = 1, 2, \dots, a_n$). In these sets there are $\alpha - M$ elements in total, so if $R_m \setminus L_k$ is the set of minimum cardinality, then $|R_m \setminus L_k| \leq \frac{\alpha - M}{a_n}$. Therefore,

$$\begin{aligned} |L_k \cup R_m| &\leq M + \frac{\alpha - M}{a_n} = \frac{\alpha}{a_n} + M \left(1 - \frac{1}{a_n}\right) \leq \frac{\alpha}{a_n} + \frac{\alpha}{a_{n-1}} \left(1 - \frac{1}{a_n}\right) = \\ &= \alpha \left(\frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n-1}a_n}\right) = \alpha \left(1 - \sum_{i=1}^{n-2} \frac{1}{a_i}\right) = \alpha - \frac{\alpha}{a_1} - \dots - \frac{\alpha}{a_{n-2}}. \end{aligned} \quad (1)$$

Thus, when sage A_{n-1} has hat of color k , and sage A_n has hat of color m , somebody of sages A_1, A_2, \dots, A_{n-2} will win, and the number of placements, for which this event happens, equals the fraction $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{n-2}}$ of total number of placements. But as we know, the indicated fraction bounds from above the number of placements, for which sages A_1, A_2, \dots, A_{n-2} win. Therefore, both inequalities (1) must be equalities. Then $|L_k| = \frac{\alpha}{a_{n-1}}$ (and in general $|L_i| = \frac{\alpha}{a_{n-1}}$ for all i), and $|R_m \setminus L_k| = \frac{\alpha}{a_n} - \frac{\alpha}{a_{n-1}a_n}$. Analogously $|R_j| = \frac{\alpha}{a_n}$. Therefore $|R_m \cap L_k| = \frac{\alpha}{a_{n-1}a_n}$, and α is divisible by $a_{n-1}a_n$.

2.7. Answer: yes, the sages win.

Let G_1 and G_2 be 4-cliques in the bow, A be their common vertex, colors of the sages be the remainders modulo 5.

Let the sages on $G_1 \setminus A$ compute the sum of remainders-colors on G_1 and play according hypotheses that the sum has remainder, say, for 2, 3 and 4 modulo 5. The sages on $G_2 \setminus A$ play similarly.

What sage A have do? He should play checking two hypotheses on G_1 and two hypotheses on G_2 at the same moment. The only that rescues him is that both hypotheses are about his unhappy hat! The strategy will work if we could convert colors of A 's hat to remainders modulo 5 in different ways:

Color	Red	Blue	White	Yellow	Black
His code in G_1	0	1	2	3	4
His code in G_2	0	2	4	1	3

The presented coding has the property that any pair consisting of successive remainders in row G_1 , intersects with any pair of successive remainders in row G_2 in no more than one element. Sage A computes two successive remainders corresponding to the hypotheses «the sum of all remainders on G_1 equals 0 or 1» and «the sum of all remainders on G_2 equals 0 or 1», and says color of the intersection of these pairs, if it exists.

2.8. Answer: yes, the sages win here too.

Consider residues modulo $740 = 4 \cdot 5 \cdot 37$. Let hat colors of sage with hatness k be the residues divisible by $\frac{740}{k}$. Denote by S_1 and S_2 the sums of residues-colors in the left and the right 5-cliques. Let the left sage of hatness 4 suppose that S_1 belongs to the set $\{1, 2, \dots, 185\}$. He obtains 185 consecutive residues, exactly one of them is divisible by 185. The sage says the color, corresponding to this residue. Similarly three left sages with hatness 5 suppose that S_1 belongs to sets $\{186, \dots, 333\}$, $\{334, \dots, 481\}$, $\{482, \dots, 629\}$ correspondingly. The right sages acts similarly, but working with S_2 . If now nobody has won, then A (the sage with hatness 37) understands that S_1 belongs to $\{630, \dots, 720\}$, so he needs to choose from at most 6 consecutive colors. The same can be said about S_2 . Let the sages of left and

right cliques convert the colors of sage A to the residues by different ways. By our rule the hat colors of sage A are the residues modulo 740, divisible by 20, i.e. really this is the residues modulo 37. If the sages of left clique convert a color to residue x , then the sages of right clique convert the same color to residue $6x \pmod{37}$ (the map $x \mapsto 6x$ is 1-to-1 on the sets of residues modulo 37). As it is easy to see, any two sets of the form $\{x, x + 1, \dots, x + 5\}$ and $\{6y, 6y + 6, \dots, 6y + 30\}$ intersect in at most one element. Then A calls the intersection color of these sets (or calls an arbitrary color if the intersection is empty).

Constructors

3.1. Hat color of sage v in the graph $G_1 \times_v G_2$ can be interpreted as a pair of colors (c_1, c_2) , where c_i is the hat color of v in graph G_i . Fix winning strategies for graphs G_1 and G_2 . Construct strategy on $G_1 \times_v G_2$: let all sages except v , play by the winning strategy for the corresponding graph (the neighbours of v in G_i look only at the component c_i of v 's composite color). As to sage v , he plays by both strategies giving two answers c_1 and c_2 independently; answer c_i corresponds to his winning strategy for graph G_i (for computing this answer sage v looks only on his neighbours from graph G_i). Pair (c_1, c_2) is concrete hat color of sage v on the graph $G_1 \times_v G_2$, that is the answer of sage v in the constructing strategy.

The constructed strategy is winning because either somebody from G_1 or from G_2 will guess correctly his own color, or v will guess correctly both components of his own color.

3.2. Let f_1 and f_2 be winning strategies from games on graphs G_1 and G_2 correspondingly.

Let also each sage u of subgraph G_2 of graph G obtain composite color (c_1, c_2) , where $0 \leq c_1 \leq h_1(v) - 1$, $0 \leq c_2 \leq h_2(u) - 1$. Then all «left halves» of these sages play strategy $f_1(v)$, and «right halves» of these sages play strategy f_2 . In particular it means that all sages from subgraph G_2 name colors, that have the same first component.

As for the other sages from G , those of them, who are not the neighbours of v , play by the strategy f_1 . The sages from G_1 , that are the neighbours of sage v , after the substitution discovered[found out] that instead of one neighbour of v they had now $|V_2|$ neighbours (and, generally speaking, with different hats). These sages act by the following way: all they instead of one hat of v see all the hats on subgraph G_2 and know the strategies of sages on that[this] graph. Therefore, they understand who wins in the game on subgraph G_2 , denote this player by v_{new} (if there are several winners, then they choose one of the winners as v_{new} , for example, the winner that is in the first place in the list, drawn up before). As a result, each former neighbour of v looks only at v_{new} , precisely, on the first component of his color, and also plays by the strategy f_1 .

As a result either somebody guesses correctly from subgraph $G_1 \setminus \{v\}$, or v_{new} guesses correctly the left component of his own color, and the right component he guesses by his definition. Thus, somebody will guess correctly his own color.

3.3. Hat colors of players B and C can be interpreted as pairs in the form (c, ϵ) , where c is possible hat color in the game $\langle G, h \rangle$, $\epsilon \in \{0, 1\}$. Let sage A play according hypothesis $c(A) = \epsilon_B + \epsilon_C \pmod{2}$. Sages B and C see their neighbours in graph G and know what colors $c(B)$, $c(C)$ they must name by winning strategy in game $\langle G, h \rangle$. Looking at hat of sage A , and also the hats of each other, sages B and C can compute what values ϵ_B and ϵ_C they must take in addition to $c(B)$, $c(C)$.

3.4. By comparison with initial graphs one new color has been added for sages A_i and B_j , we mean that this color is red. Let «megassage» A says that he has all hats red, if he sees at least one red hat on sage B , in the opposite case let A play by usual strategy on graph G_1 . If «megassage» B sees at least one red hat on A , then he understands that A has won, if B has at least one red hat. Then B must care about the placements, where he has no red hats, and simply plays his strategy on graph G_2 . If «megassage» B does not see red hats on A , then he understands that A has won, only if B does not have red hats too, then, for checking the remained placements, B says that all his hats are red.

3.5. We show strategy for new vertices and partially for old ones, then consider several placements, on which they win «immediately», and then say that on the other ones they win with the help of strategy for graph G .

Describe a winning strategy. Denote by c_x the hat color which sage x has obtained. The color of vertex Z we will consider as «composite»: $c_Z = (\epsilon, C)$, where the first «bit» ϵ can take on values 0 and 1, and the second color C can take on those $h(Z)$ colors that were in graph G initially.

- Sage A , in the case when he sees hat of color 0 or 1 on sage B , says what he sees, otherwise he says the first bit of color c_Z .

- Sage B , in the case when he sees hat of new color on sage C , says 2, otherwise he says the value of $1 - c_A$.

Consider all variants of pairs (c_A, c_B) and describe the other part of strategy, also proving that it is winning. In the cases $(0, 0)$ and $(1, 1)$ sage A immediately guesses correctly. In the cases $(0, 1)$ and $(1, 0)$, if we will not give hat of new color to sage C , then sage B will guess correctly. So sage C , seeing on sage B hat of color different from 2, can fearlessly name hat of new color and somebody of A, B, C will guess correctly. It remains to consider the cases $(0, 2)$ and $(1, 2)$. Sage A will guess correctly in them, if his color coincides with the first bit of c_Z , therefore Z can mean that his first bit differs from color c_A , that is he needs to guess only the second «bit», i.e. $h(Z)$ possible values. At the same time sage B in these two cases will guess correctly only in the case, when sage C has new color. That is C , seeing hat of color 2 on sage B , can assume that his color is not new color. Thus, the sages need to win in the game $\langle G, h \rangle$, that we are able to do by the condition.

3.6. The statement immediately follows from the theorem about product (product 3.1).

3.7. Let A be new pendant vertex, B be a neighbour to it vertex of graph G , denote the graph with added vertex by G_1 .

In one direction the statement is evident. If the game on G is winning, then game on G_1 is also winning. Prove now that if the game on G_1 is winning, then the game on G is also winning.

Let the sages choose a winning strategy on G_1 . Remind that in problem 1.14 it has been proved that if during the test the judge gives to one of the sages, say B , hint in the form «you have hat of one of two colors c_1 or c_2 », then this hint does not affect the game result. Denote this hint by B^* .

Prove that if the sages win in the game on G_1 , then they can win on graph G with hint B^* . Fix a winning strategy f on graph G_1 . Construct a winning strategy on G with hint B^* . Let all sages from $V(G) \setminus B$ use strategy f . For each pair of colors (b_1, b_2) , $b_1 \neq b_2$, that can be given to sage B , find such a color $a \in \text{Col } A$ that $f_A(b_1) \neq a$, $f_A(b_2) \neq a$, there exists such color, since $\widehat{A} \geq 3$.

Now specify the strategy of sage B on graph G taking into account the hint, namely, let in the case, when B sees the set of colors c on the heads of his neighbours on graph G and obtains the hint «your hat is of color b_1 or b_2 », he gives the answer $f_B(a, c)$, i.e. answers by strategy f , as he saw on G_1 color a on the head of sage A and set of colors c on the heads of other neighbours. And it can be turned out that the color that B says, does not coincide with b_1 and with b_2 .

This strategy is winning because when in the game on G_1 we give hat of color a to sage A during the test and observe that he does not guess correctly (not giving some hats to B), then for sage B colors b_1 and b_2 are remained possible, and on graph G_1 somebody guesses correctly. Thus, the sages win with hint B^* .

3.8. Prove the more general case, from which both statements immediately follow.

The addition of two new vertices B and C and edges AB, BC, CA to graph G with vertex A does not affect whether graph is winning or not, if the hatnesses of new vertices satisfy to the condition $2(\widehat{B} + \widehat{C}) < \widehat{B} \cdot \widehat{C}$ (the hatnesses of vertices of graph G have not been changed).

Let G' be the obtained graph. If the sages win on graph G , then they win on G' too. Verify that if G' is winning, then G is winning.

Let f' be a winning strategy on G' . Construct f , the winning strategy on G . For the sages from $G \setminus A$ the strategy remains the same. Set the strategy of sage A . Let a hats placement on graph G be given. Sage A sees the colors of all his neighbours in graph G and considers $\widehat{B} \cdot \widehat{C}$ ways to choose colors for B and C . Further sage A examines what he has to answer in all these cases according to strategy f' , and calls the color that is the most common in his answers.

Show that the obtained strategy wins on graph G . Fix a hats placement on graph G and suppose that no one of the sages from $G \setminus A$ has guessed correctly. If put hats on the heads of sages B and C arbitrarily, then we will obtain a hats placement on G' , in which all the sages from $G \setminus A$ has not guessed correctly their colors by strategy f' . Therefore, A, B or C will guess correctly. But from available $\widehat{B} \cdot \widehat{C}$ ways of hats placement on the heads of B and C sage B will guess correctly in \widehat{C} cases, and

sage C in \widehat{B} cases. Therefore, A has to guess correctly his color in at least $\widehat{B} \cdot \widehat{C} - (\widehat{B} + \widehat{C}) > \frac{\widehat{B} \cdot \widehat{C}}{2}$ cases. Hence, sage A guesses his color in the most of cases, and he will guess just this color by strategy f .

3.9. Denote by N_i the set of neighbours of sage A in graph G_i , and by S the set of all possible hats placements of the sages from N_2 . If x is one of two possible hat colors of sage A , then the second color we will denote by \bar{x} .

Fix arbitrary strategy f for the sages on graph G and describe devil's (sometimes we call the judge so) strategy, by which he will can to outplay the sages.

Choose arbitrary hats placement $s \in S$ for the neighbours of A in subgraph G_2 . This placement uniquely sets strategy f^s of the sages in subgraph G_1 , which is, as we know, losing on this subgraph. Choose arbitrary disproving hats placement φ_s on graph G_1 for strategy f^s . Then sage A obtains hat $\varphi_s(A)$ and has not guessed correctly, it means that the chosen hats φ_s defines such a hats placement $t = \varphi_s|_{N_1}$ for the sages from N_1 , that $f_A(t, s) = f_A^s(t) = \overline{\varphi_s(A)}$.

Let the devil construct disproving hats placements on all graph G applying the following principle: if in the constructing disproving hats placement it is assumed to give hats placement s to the sages from N_2 , then hats placement φ_s will be given to all the sages in subgraph G_1 . In the observance of this principle, first, sage A and all the other sages on subgraph G_1 have not certainly guessed correctly colors of their own hats, and second, the strategy of sage A is now completely defined only by hats placements from S (since on component G_1 we immediately set placement h_s and do not consider any other variants[cases]).

So, the devil sees that the sages from $V(G_2) \setminus A$ apply strategy f , and sage A really use the strategy «if I see placement s on the heads of my neighbours from N_2 , then I say color $\varphi_s(A)$ ». Since graph G_2 is losing, then there exists a disproving hats placement ψ on subgraph G_2 for this strategy. This hats placement allows to the devil to set correctly a disproving hats placement on all graph G . Indeed, hats placement ψ defines the set $s = \psi|_{N_2}$ of hat colors for the neighbours of A in subgraph G_2 , and set s defines a disproving hats placement φ_s on subgraph G_1 , and placements ψ and φ_s are compatible: both placements assign color $\varphi_s(A)$ to sage A , whereas strategy f requires to call color $\overline{\varphi_s(A)}$.

3.10. Let the sages fix strategy f on graph G' . Construct a losing placement for this strategy. Look at the strategy of sage A for this. He says one of two colors less often, namely, no more than $h(B) - 1$ times. Give the hat of this color to him. Now, in order to prevent him to guess correctly, we must give to B the hat of one of the remaining $h(B)$ colors (if more colors remain, select $h(b)$ colors). That is good, we just know how to give a placement on the remained graph, where B has only $h(B)$ colors. That is a disproving hats placement on the whole graph.

Blind chess

4.1.

W1) It is trivial. In the language of hats it is a game, where some of the sages always obtains hat of the same color, certainly, he will guess it correctly, even not looking at the others.

W2) In the language of hats in the corresponding 4-cycle the hatness of two neighbour sages equals two, these two sages will provide win, even not looking at the others.

W3) This statement is a retelling to the language of the game «Check by rook» of the statement that the sages win on 4-cycle, if they all obtain hats of three colors. For example, the strategy of the sages, described in [1], in the chess language looks by the following way. If chess player sees that the king of the fellow is located in the centre, he puts the rook to the centre. In the opposite case he puts the rook to the cell, where the arrow points, leading from the king (on the auxiliary diagram for this chess player), see fig. 16. The coordinates of cells in the figure correspond to the numbers of hat colors from [1]. So, chess player \mathcal{L} , seeing that the king of the fellow is located in cell $(2, 2)$, puts his rook on cell $(1, 0)$ (this case corresponds to bold arrow in left fig. 16).



Figure 16.

W4) Number the cells of board $L(2 \times 3)$ from left to right from top to bottom, fig. 17a. Let the strategy of chess player \mathcal{R} is given by the table in fig. 17b. Here six labels have been put in the cells of board $R(3 \times 4)$. Label r_i means that chess player \mathcal{R} , seeing that the king of the fellow is located in i -th cell of board $L(2 \times 3)$, puts the rook on the cell of board $R(3 \times 4)$ with label r_i .

The strategy of chess player \mathcal{L} we also set with the help of board 3×4 , see fig. 17c. Here there is a number from 1 to 6 in each cell of board $R(3 \times 4)$, this number denotes some cell of board $L(2 \times 3)$. When chess player \mathcal{L} sees that the king is located on board $R(3 \times 4)$ in the cell with label k , he puts the rook on the cell with number k of board $L(2 \times 3)$. To avoid misunderstandings in the notations, we use the labels of type «letter r with index» for chess player \mathcal{R} , and the labels of type «number» for chess player \mathcal{L} .

1	2	3
4	5	6

a) Labelling of board L

r_4	r_5	
r_6		r_3
	r_2	r_1

b) The strategy of chess player \mathcal{R}

1	3	3	5
2	1	4	5
2	6	6	4

c) The strategy of chess player \mathcal{L}

Figure 17. The winning strategy for game $L(2 \times 3)$, $R(3 \times 4)$

Describe how winning strategies can be set with the help of the introduced notations.

Statement. A strategy of chess players is winning if and only if for any three different cells a , b , c of board $L(2 \times 3)$ such that cells b and c do not belong to the cross of cell a , the following property on board R holds: *all the cells of board $R(3 \times 4)$, marked by number a , belong to the intersection of the crosses r_b and r_c .*

For example for $a = 1, b = 5, c = 6$ the cells with label 1 on board $R(3 \times 4)$ are located in the intersection of crosses r_5 and r_6 . (The intersection of crosses r_5 and r_6 is painted in fig. 17b.)

Proof of the statement. Let the judge put the king on the cell of board $R(3 \times 4)$ labeled by 1 (for the other labels the reasoning are similar), this case specifies to us the triple of cells $a = 1, b = 5, c = 6$. Then chess player L puts the rook on cell 1 of board $L(2 \times 3)$ by his strategy. Further, let the judge put the king on 5-th or on 6-th cell of board $L(2 \times 3)$, only in these cases the king on board L will not be in check. Therefore, in these situations check is provided by chess player \mathcal{R} . It means that the cell with label 1 must belong to the cross of cell r_5 and similarly the cell with label 1 must belong to the cross of cell r_6 . The statement is proved.

It remains to note (trying all possible cases) that the statement holds for the given example.

W5) The strategy is specified similarly to the case W4), see fig. 18.

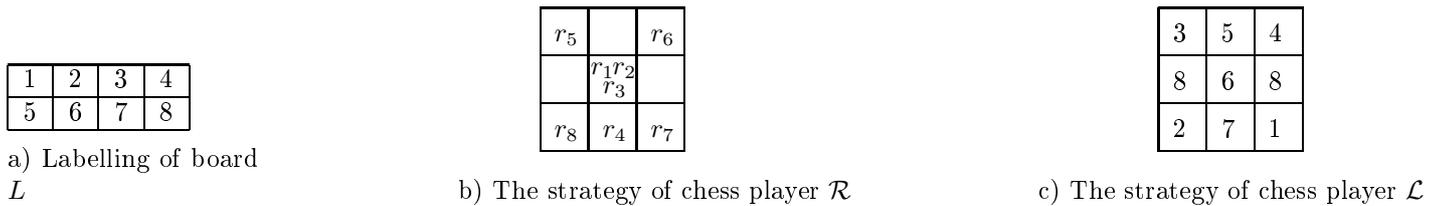


Figure 18. The winning strategy for the game $L(2 \times 4), R(3 \times 3)$

W6) In the language of hats this case means that the cycle contains path P_3 with hatnesses of vertices 2, x , 2, where $x \leq 4$. The sages win on such path.

L1) As in item W4), number the cells of board $L(2 \times 3)$ from left to right from top to bottom, fig. 19a. Then the strategy of chess player \mathcal{R} is specified by the table, similar to the one shown in fig. 19b. Note that for this way to specify the strategy it is allowed that several labels r_i are on the same cell. The strategy of chess player \mathcal{L} can also be specified with the help of board 4×4 , for example, as it is done in fig. 19c.

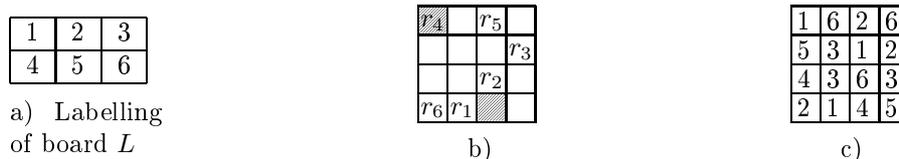


Figure 19. Two ways to specify the strategies

As in item W4), the following statement holds.

Statement. Strategy of chess players is winning if and only if for any three different cells a, b, c of board $L(2 \times 3)$, such that cells b and c do not belong to the cross of cell a , the following property on board R holds: *all cells of board $R(4 \times 4)$, marked by number a , belong to the intersection of crosses r_b and r_c .*

For example, for the strategy shown in fig. 19c, the triple of cells $a = 1, b = 5, c = 6$ does not satisfy to the *statement*: only one of the three cells with label 1 belongs to the intersection of crosses r_5 and r_6 . (The intersection of crosses r_5 and r_6 is painted in fig. 19b.)

Prove that the chess players have not a winning strategy.

Fix a strategy of chess player \mathcal{R} . Using the *statement*, try to understand, where the cells with labels 1, 2, and 3 can be located on board $R(4 \times 4)$. By the *statement*, the cells with label 1 belong to the intersection of crosses r_5 and r_6 , the cells with label 2 to the intersection of crosses r_4 and r_6 , and the cells with label 3 to the intersection of r_4 and r_5 .

Note that the union of pairwise intersection of any three crosses (possibly, coinciding) on board $R(4 \times 4)$ contains at most 8 cells. Indeed, consider the cases.

1. If the centres of the crosses belong to different verticals and horizontals, then each pairwise intersection consists of two cells, see the example in fig. 19b, where the intersection of crosses r_5 and r_6 is painted; there are not more than 6 cells.

2. If the centres of any two crosses do not coincide and two centres belong to one horizontal or vertical (as for example r_4 and r_5 in fig. 19b, then the intersection of these two crosses contains 4 cells and adding of the third cross can give another 4 cells to the union of pairwise intersections, only if the centre of this cross belongs to the same line as one of the first two centres (as r_4 and r_6 in fig. 19b. In this case there are 8 cells, and 7 of them belong to one cross (in the considered example in the cross r_4).

3. If the centres of two crosses coincide, then the intersection of crosses contains 7 cells. For any location of the third centre the set of pairwise intersection does not increase.

Thus, for cells with labels 1, 2, 3 on board $R(4 \times 4)$ there are at most 8 positions, similarly for the cells with labels 4, 5, 6 there are at most 8 positions too. Since board $R(4 \times 4)$ contains 16 cells, we have 8 positions for labels 1, 2, 3 and 8 positions for labels 4, 5, 6. But as it was established by trying all possible cases, 8 positions can be realized only as the set «whole cross» plus one cell. It remains to note that it is impossible to cover all the board $R(4 \times 4)$ by two crosses and two additional cells.

L2) As in item L1 board $L(2 \times 3)$ here is the same, and the right board is also «large enough». Similarly we make sure that the union of pairwise intersections of any three crosses (possibly, coinciding) on board $R(3 \times 5)$ contains no more than 8 cells; the cases, in which this intersection contains 7 or 8 cells, are shown in fig. 20, this are the cases, when the centres of two crosses belong to one row or one column (including the case, when they are in one cell).

In all the cases the union of pairwise intersections of three crosses occupies one whole horizontal of the board, and in each of two other horizontals it occupies less than a half of cells. It means that the union of two such sets cannot cover the whole board.

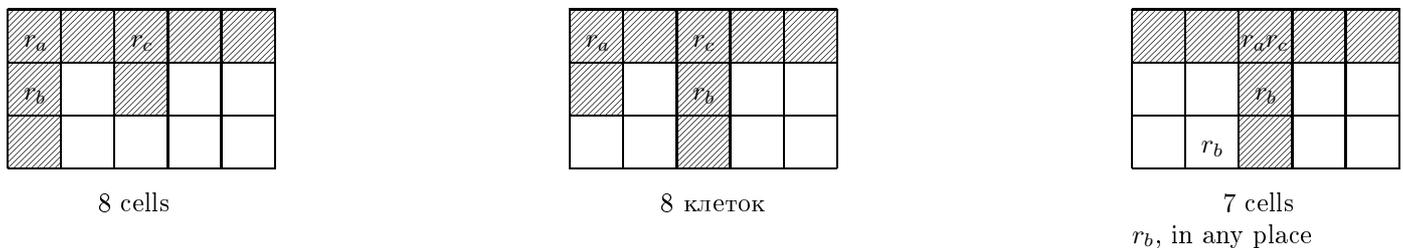


Figure 20. The union of pairwise intersections of three crosses on board $R(3 \times 5)$

L3) This reasoning is offered by Oleg Chemokos. Fix some strategies of chess players \mathcal{L} and \mathcal{R} and check that such positions of kings can be found that both kings will avoid a check. Note that if a king is located in some cell of board $L(2 \times 4)$, then there are three «weak» cells (in another row) on the board, the cells, from which rook cannot attack this king. For winning strategy all the positions of king on board $R(3 \times 4)$, for which chess player \mathcal{L} puts a rook to a weak cell, must be located in one cross. And any three cells of one row can form the set of weak cells; it happens, if a king is located in the second row in the column containing the fourth cell.

The strategy of chess player \mathcal{L} is a mapping $\phi: R(3 \times 4) \rightarrow L(2 \times 4)$ that defines what cell $\phi(K_R)$ for putting the rook will be chosen by chess player \mathcal{L} , if he will see the king in the cell K_R of board $R(3 \times 4)$. Paint the cells of board $R(3 \times 4)$ in two colors: cell x , for which cell $\phi(x)$ is located in the first row of board $L(2 \times 4)$ we paint in white color, the others into black. Without loss of generality we may think that the number of white cells on the board is not less than the number of black cells. Consider two cases, covered all the possibilities, describing how this «not less» can be realized.

1. One of the rows of the board $R(3 \times 4)$ contains three white cells r_1, r_2, r_3 (will call this row the first) and another one row (the second) contains two white cells r_4 and r_5 . Then cell ℓ can be chosen

in the first row of the board $L(2 \times 4)$ such that preimage $\phi^{-1}(\ell)$ is either empty set, or just one cell of the first row, say, r_1 . In this case the other cells of the first row form a weak set, and its preimage contains cells r_2, r_3, r_4 and r_5 , not belonging to one cross.

2. Each row of board $R(3 \times 4)$ contains two white cells. Then choose in the first row of the board $L(2 \times 4)$ a cell ℓ , for which preimage $\phi^{-1}(\ell)$ consists of at most one cell (for specificity, it is located in the third row). In this case the other cells of the first row of the board $L(2 \times 4)$ form a weak set, and their four preimages, belonging to the first two rows of board $R(3 \times 4)$, form a set that cannot be covered by one cross.

L4) Suppose that the chess players have a winning strategy. Using the notations for describing winning strategies from item W4). Number the cells of board $L(3 \times 3)$ by numbers from 1 to 9. Then the strategy of chess player \mathcal{R} is specified by a placement of nine symbols: r_1, r_2, \dots, r_9 on board $R(3 \times 4)$. And the strategy of chess player \mathcal{L} is specified by writing the numbers from 1 to 9 in each cell of board $R(3 \times 4)$, which we call labels.

As in the previous item, when we put the king on cell i on board $L(3 \times 3)$ there are 4 cells, from which the rook cannot attack this king. These cells and their numbers we call i -weak. If the strategy is winning, then it is necessary that for all i the labels on board $R(3 \times 4)$, coinciding with i -weak numbers, are located in the cross with centre in r_i .

Note that symbols r_1, r_5 and r_9 must be located in different rows of board $R(3 \times 4)$. Indeed, it is easy to see that each cell of board $L(3 \times 3)$ is located in weak position with respect to one of the cells with numbers 1, 5 or 9. (For example, 1 and 2 are in weak position with respect to 9, 3 is in weak position with respect to 5 and so on). Therefore, each label on board $R(3 \times 4)$ is located in r_1 -, r_5 - or r_9 -cross. It can be only if symbols r_1, r_5 and r_9 are located in different rows.

Similarly, symbols r_i, r_j and r_k are located in different rows, if cells i, j, k occupy three different rows and three columns of board $L(3 \times 3)$.

Corollary. Two possible cases of placement of symbols r_1, r_2, \dots, r_9 on board $R(3 \times 4)$ are possible: 1) either symbols r_1, r_2, r_3 are located in one row of board $R(3 \times 4)$, symbols r_4, r_5, r_6 are located in another row, and symbols r_7, r_8, r_9 are in the third row;

2) or symbols r_1, r_4, r_7 are located in one row of board $R(3 \times 4)$, symbols r_2, r_5, r_8 are located in another row, and symbols r_3, r_6, r_9 are in the third row.

The corollary is proved by gently nasty looking all the possible cases.

Prove that there are no winning strategies that have these properties. Put rooks on all cells r_i of board $R(3 \times 4)$ (we put on cell as many rooks as there are symbols r_i in it). By the corollary in the first row of board $R(3 \times 4)$ there is an «empty» cell, i. e. cell, containing no symbols r_i , but containing some label a . Let for the specificity it be located in the fourth column (fig. 21). By the statement, 4 rook's attacks are directed to this cell, and two of these four rooks are located in one row, and another two are in another row. It means that two rooks are certainly located in one of the cells of fourth column. Let for the specificity this cell be located in the second row. Now we know that in the second row 3 rooks have been put in total, and two of them are located in one cell.

Therefore, there are two «empty» cells in the second row. We choose one of them, above which in the first row no more than one rook is located. Let this cell be located in the first column for the specificity and contains label b . 4 rook's attacks from two pairs of rooks, located in two rows, are directed to the chosen cell. One pair of rooks is located, evidently, in the second row, and another pair is located in the third row (there is no more than one rook in the first row above cell b). Now we see that one of

			a
b			$r_1 r_2$
$r_7 r_8$	\times	\times	

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10

a) Labelling of board L

1	2	
3	4	

b) The strategy of chess player \mathcal{L}

Figure 21. The strategy for the case L3

Figure 22. We find a strategy for the game $L(2 \times 5), R(3 \times 3)$

the cells in the third row, in the second or in the third column, cannot gather 4 rook's attacks from two different rows. It is contradiction.

L5) Suppose that the chess players have a winning strategy. Use the notations for describing winning strategies from item W4). Number the cells of board $L(2 \times 2)$ by numbers from 1 to 4. Then the strategy of chess player \mathcal{R} is specified by placement of four symbols r_1, r_2, r_3, r_4 on the board $R(5 \times 5)$. On board $R(5 \times 5)$ at least one cell can be found, not belonging to any of four crosses, defined by these symbols; call this cell Q . The strategy of chess player \mathcal{L} is specified by writing in each cell of board $R(5 \times 5)$ the numbers from 1 to 4. Consider the number, written in cell Q , without loss of generality, it is 1. Consider the number, written in cell Q , without loss of generality, it is 4. Let the judge put the kings: on cell Q on board $R(5 \times 5)$ and on cell 4 on board $L(2 \times 2)$. Then player \mathcal{L} puts the rook on cell 1 of board $L(2 \times 2)$, and player \mathcal{R} puts the rook on cell r_4 of board $R(5 \times 5)$. None of the rooks has a king in check. The chess players lost.

L6) Label board L , as in fig. 22 a). As in W4), the strategy of chess player \mathcal{L} is specified by writing in each cell of board $R(3 \times 3)$ the numbers from 1 to 10, the numbers of cells on board $L(2 \times 5)$. Since there are only two horizontals in board $L(2 \times 5)$, there exist two rows of board $R(3 \times 3)$, in each of them the numbers of two cells are written, such that all these four cells (possibly, there are coinciding among them) belong to one horizontal of board $L(2 \times 5)$. Let j be the number of the cell from the second horizontal, that is i -weak with respect to all these cells.

For example, let labels 1, 2, 3, 4 are located on board $R(3 \times 3)$, as in fig. 22 b). Then the number 10 is 1-, 2-, 3- and 4-weak simultaneously. It means that the rook on cell r_{10} of board $R(3 \times 3)$ attacks the cells with labels 1, 2, 3 and 4. It is impossible: it must be located in the upper row of board $R(3 \times 3)$ to attack labels 1 and 2, and in the bottom row to attack 3 and 4.

By the same reason the general case is also impossible: cell r_j must be located in two rows of $R(3 \times 3)$ simultaneously.

4.2. Paint the cells of both boards as shown in fig. 23, a). Let both chess players put their queens only on the cells that occupied by the queens, and let the first chess player act according the assumption «Kings are located in cells of the same color», and the second from the assumption «The kings are located in cells of different colors».

We can use the usual chess coloring instead of «exotic» coloring as above. Indeed, the queen, located in cell $c2$, holds under attack all the cells of the same color in chessboard coloring! And the same for $c3$, fig. 23, b).

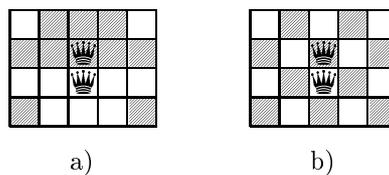


Figure 23. «Check by queen» on boards 4×5

4.3. Statement of the problem has been found with help of computer. The participants of our conference suggest beautiful logical strategies.

Solution 1 (Kononenko Nikolay). Specify strategy of the chess players. Label board $R(5 \times 5)$ as shown in fig. 24 a). Seeing the king on the cell with label j , chess player \mathcal{L} puts the rook on the cell of board $L(4 \times 4)$, labelled by number j , fig. 24 b). Therefore, chess player \mathcal{L} uses only four positions for his queen. For each cell of board $L(4 \times 4)$ in fig. 24 c) it is shown, from which positions the queen of chess player \mathcal{L} does not attack this cell. For example, the numbers 1 and 2 in the lower left corner mean that the lower left corner cell of board $L(4 \times 4)$ is not under attack by the queen located at 1-th and in 2-th positions, shown in fig. 24 b), and “-” means that the cell is under attack from all positions.

3	1	3	1	3
1	3	3	3	4
3	3	3	3	3
2	3	3	3	4
3	2	3	2	3
<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>

	1	3	
		2	
4			

3	2,4	4	1,2
2	4	-	4
3	-	4	1,4
1,2	3	1	3

a) The strategy of chess player \mathcal{L}

b) On which cell we put the queen

c) Instruction for \mathcal{R}

Figure 24.

Seeing the king on board $L(4 \times 4)$, chess player \mathcal{R} with help of fig. 24 c) immediately understands, from which «unfavourable» positions the queen of his fellow cannot put the king in check. Therefore he must to locate his queen on board $R(5 \times 5)$ so that it attacks all the cells, sending the queen of chess player \mathcal{L} to a unfavourable position.

For unfavourable positions 1, 2 it is possible to put the queen on cell $b3$, for 1, 4 on cell $c4$, for 2, 4 on cell $c2$, for 3 on cell $c3$.

Solution 2 (Presnova Ekaterina, Raceeva Olga).

Label board $L(4 \times 4)$ as shown in fig. 25 a). Observation 1: for this labelling the property holds: for any pair of labels all the cells marked by this pair of labels, can be attacked by one queen. For example, all the cells, marked by 0 or 1, can be attacked from cell $a4$; all the cells marked by 0 or 2, can be attacked from cell $c2$ and so on.

Seeing the king in the cell with label j , let chess player \mathcal{R} put the rook on position \mathbb{W}_j of board $R(5 \times 5)$, fig. 25 b). Observation 2: any cell of board $R(5 \times 5)$ can be attacked from at least two different positions from this set. Then chess player \mathcal{L} , seeing the king on board $R(5 \times 5)$ immediately understands, from which positions (among the indicated four positions) the queen of player \mathcal{R} cannot put the king in check. In view of observation 2 there are no more than 2 such «unfavourable» positions, and chess player \mathcal{L} should put his queen on board $L(4 \times 4)$ so that he attacks all the cells, sending the queen of chess player \mathcal{L} on unfavourable position. It is possible, in view of observation 1.

0	1	0	1
1	0	2	2
0	2	0	2
1	3	2	0

a)

	\mathbb{W}_0		\mathbb{W}_1	
	\mathbb{W}_2		\mathbb{W}_3	

b)

					<i>C</i>
	<i>B</i>				
<i>A</i>					

Figure 26.

Figure 25.

4.4. Solution 1 (Kostina Ekaterina, Mirgalimova Rozalina, Hamikova Marina). We will prove the stronger fact, that in the game «Check by queen» on boards $L(4 \times 6)$, $R(7 \times 7)$ the sages lose.

Let the judge plans to put the king on one of cells A , B , C of board $L(4 \times 6)$ (fig. 26). For each of these positions player \mathcal{R} is ready to put the queen on board $R(7 \times 7)$. Since three queens cannot hold in check all the cells of board 7×7 , there exists a cell on board $R(7 \times 7)$, which is attacked by no one of the queens. If the judge puts the king on this cell, player \mathcal{L} answers putting the queen on board $L(4 \times 6)$. Since cells A , B , C cannot be attacked by one queen, at least one of them will be not under attack, and the judge, finally will formulates his plans regards board B : he will put the king exactly on this cell. The chess players have lost.

4.5. The result is obtained by computer.

4.6. The result is obtained by computer.

4.7. Answer: yes. 5 queens can be placed on 11×11 board, that attack all the cells (for example, $b4$, $d10$, $f6$, $h2$ and $j8$). Then combine idea of the solution of problem 4.2 and standard idea of the game with hats of five colors on 5-clique.

5.1. Let the sage fix some strategy on new graph. The strategy of sage A can be given in the form of 3×7 table: the rows correspond to the hat colors of sage B , the columns to the hat colors of sage A . In cell of table number of color (0 or 1) will be written, that sage A calls, when he sees on B and C the corresponding hat colors.

In each column of the table one of the symbols, 0 or 1, occurs two times. Mark the cells containing repeated symbol. (If symbol occurs in all three cells of column, mark any two of them.) The marked cells can be located either in the first and the second rows, or in the first and the third. Since there are 7 columns, by the pigeonhole principle there exist two rows, in which the marked cells occupy three columns. In the marked cells of one column two zeroes and two ones can be, therefore, it is possible to choose two columns of three so that in the indicated columns in the marked cells there is the same number.

Thus, we have chosen in the table two rows (for the specificity i -th and j -th) and two columns (for the specificity k -th and ℓ -th), in the intersection of which there is the same number, for the specificity it is 0. Now we without problem construct a disproving hats placement on all the graph. Give hat of color 1 to sage A , will choose hat of i -th and j -th color to sage B , k -th or ℓ -th to sage C . For this approach sage A will certainly guessed incorrectly his own color, since in according to the table he will call color 0. As to assignment of concrete colors to sages B and C , and also for the others, consider game on graph G : after fixation of color of sage A the strategy of other sages on graph G is uniquely defined, the accepted restrictions of hat colors of B and C allow to suppose that their hatnesses now equal 2. Since graph G is losing, we will can to present a disproving hats placement on it.

5.2. Prove the following a few more strong statement.

There exists positive integer N such as on any graph G , degrees of all vertices of which do not exceed 3, and hatness function is given by formula

$$\widehat{a} = \begin{cases} 3, & \text{if } \deg a = 1, \\ 41, & \text{if } \deg a = 2, \\ N, & \text{if } \deg a = 3, \end{cases}$$

the sages lose.

Proof. Denote $m = 80 \binom{81}{41} + 1$. Show that $N = 80 \binom{m}{41} \binom{81}{41} + 1$ is suitable.

Induction by the number of vertices. Basis (graph with two vertices) is evident. Induction step. Consider the vertex of the least degree, denote it by A .

Case 1. $\deg A = 1$. By the statement of problem 3.7 addition of vertex of degree 3 does not affect the property of graph be winning or not, and if increase hatness of one of vertices much in losing graph, then it remains losing.

Case 2. $\deg A = 2$. Denote the neighbours of A by B and C , $\deg B \leq \deg C$.

L e m m a. Table $(2k - 1) \times (2(\ell - 1) \binom{2k-1}{k} + 1)$ is painted in 2 colors. Then it is possible to choose such k rows and ℓ columns that all these cells in the intersection of these rows and columns have been painted in the same color.

Proof. Consider arbitrary column, there are $2k - 1$ cells in it. Then by the pigeonhole principle there exist k cells of one color. Mark these k cells. Make this for each column. The number of ways to mark k cells of $2k - 1$ equals $\binom{2k-1}{k} + 1$, these cells can be of one of two colors. Therefore, by the pigeonhole principle there exist ℓ columns such that the marked cells are located in the same set of rows and they are of the same color. Q.E.D. \square

Case 2.1. $\deg B = \deg C = 2$. Show that the sages lose in graph G , even if $\widehat{A} = 2$. Suppose that there exists a winning strategy of the sages on G . The strategy of sage A is a 41×41 table, in which

each cell is painted in one of two colors. Оставив от нее only 5 rows, apply the lemma for $k = \ell = 3$. 3 rows and 3 columns can be chosen from the table so that their intersections are painted in one color. Then the judge will put hat of another color on A , and for B and C will choose hats of only three colors corresponding to three rows and three columns correspondingly[?]. We will obtain the winning strategy for $G \setminus A$, $\widehat{B} = \widehat{C} = 3$ that contradict the induction hypothesis.

Case 2.2. $\deg B = 2$, $\deg C = 3$. Show that here the sages lose too on graph G , even if $\widehat{A} = 2$. For $k = 3$, $\ell = 41$ the table from the lemma has size 5×801 , and the hatsnesses of sages B and C are much larger: they equal 41 and N . Applying the lemma similarly to case 2.1, we obtain contradiction again.

Case 2.3. $\deg B = \deg C = 3$. Similarly to case 2.1, use the lemma for $k = \ell = 41$. We can use it because for $k = \ell = 41$ the table has size $81 \times N$, both dimensions are less than hatsnesses of sages of N .

Case 3. $\deg A = 3$. Let B, C and D be the neighbours of sage A . Then $\deg B = \deg C = \deg D = 3$. Fix some color of sage D . Then the strategy of sage A is a $N \times N$ table. Taking 81 rows and m columns, apply the lemma, find 41 rows and 41 columns, the intersections of which are painted in one color. The number of ways to choose 41 rows and 41 columns equals $\binom{m}{41} \binom{81}{41}$. Perform these actions for each of N possible colors of sage D . Since $N = 80 \binom{m}{41} \binom{81}{41} + 1$, there exists a color of sage D , for which the sets of rows, columns and colors of intersections coincide. Put on sage A hat of the opposite color, take 41 colors for each of the sages B, C, D , and obtain the contradiction to the induction hypothesis.

References

- [1] Задачи Санкт-Петербургской олимпиады школьников по математике 2016 года. М.: МЦНМО, 2017.

Шашки Фейнмана

Введение в ‘алгоритмическую’ квантовую теорию поля

Е. Ахмедова, Р. Валиева, А. Воропаев, М. Скопенков, А. Устинов

Резюме. Оказывается, радужные разводы на мыльных пузырях и невероятные законы движения электронов можно объяснить с помощью одной очень незатейливой модели. Это игра, в которой по простым правилам по клетчатой доске движется шашка, а мы следим за ее поворотами. Эти “шашки Фейнмана”, с некоторыми серьезными оговорками, могут описать все на свете явления, кроме атомного ядра и гравитации. Мы будем решать задачи по математике и обсуждать их физический смысл; предварительных знаний по физике не требуется.

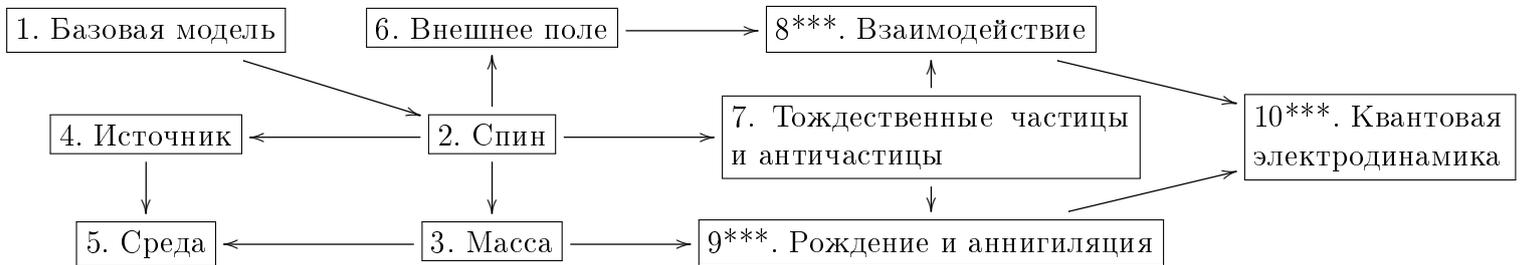
Основные результаты.

- явная формула для доли света данного цвета, отражаемого стеклянной пластиной данной ширины (задача 24);
- явная формула для вероятности обнаружения в данной точке электрона, испущенного из $(0, 0)$ (задача 15; см. рис. 1).

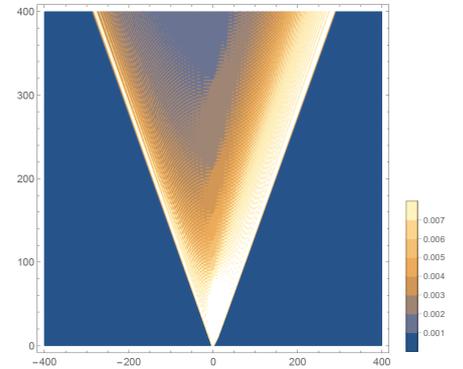
Хотя эти результаты сформулированы в терминах физики, они являются математическими теоремами, так как далее приводятся математические модели интересующих нас явлений, со строгими определениями. Точнее, последовательность моделей, описывающих явления со всё большей точностью.

План. Мы начнём с базовой модели и будем уточнять её в каждом последующем разделе. Перед каждым уточнением мы укажем, для ответа на какой физический *вопрос* оно нужно, какие упрощающие *предположения* в нём используются и какие экспериментальные *результаты* оно позволяет объяснить. Наша цель — получить так называемую *двумерную квантовую электродинамику*, однако финальные шаги в этом направлении (намеченные в разделах 8–10) пока не сделаны. (Её 4-мерный аналог способен, с некоторыми серьезными оговорками и исключениями, описать все явления, но мы не будем рассматривать его.)

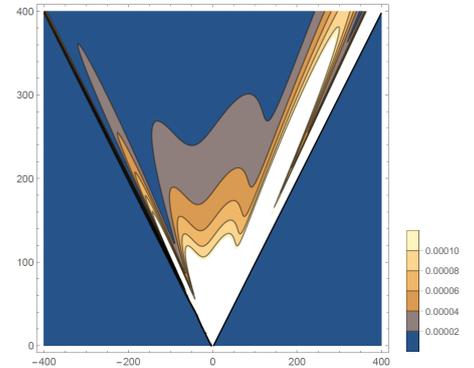
Схема уточнений может помочь вам в выборе порядка решения задач:



Соглашения. Если в условии задачи сформулировано утверждение, то его надо доказать. *Загадка* — это задача, в которой требуется и сформулировать утверждение, и доказать его. Трудные задачи отмечены звёздочками; за решение одной из них вы получите *первый разряд* по шашкам Фейнмана, а за решение трёх из трёх разных разделов — станете *мастером*. Решения принимаются в письменном виде, но вы можете потратить решённую звёздочку на 10 попыток сдать задачу устно (успешных или нет). Если не получается решить задачу, попробуйте следующие: в них могут быть подсказки. Даже если вы не докажете основные результаты, вы многое узнаете. Приветствуются попытки сформулировать и доказать свои собственные гипотезы; вы получите ранг *гроссмейстера* за нетривиальное открытие (а может быть, даже напишете собственную научную статью).



Базовая модель из §1



Модель с массой из §3

Рис. 1: Вероятность нахождения электрона в данной точке (белым показаны сильные колебания)

1 Базовая модель

Вопрос: какова вероятность обнаружения электрона в клетке (x, y) , если он был испущен из клетки $(0, 0)$?

Предположения: электрон равномерно движется по оси y и не движется по оси z , точечный источник, единичная масса и шаг решётки, нет взаимодействий, нет рождения электрон-позитронных пар.

Результаты: эксперимент на двух щелях, сохранение заряда.

На бесконечной шахматной доске пешка ходит на соседнюю по диагонали клетку, влево-вверх или вправо-вверх. Каждому пути s пешки сопоставим вектор $\vec{a}(s)$ на плоскости следующим образом. В начале движения этот вектор направлен вверх и имеет длину 1. Пока пешка движется вдоль прямой, вектор не меняется, а после каждого поворота пешки он поворачивается на 90° по часовой стрелке (независимо от того, в какую сторону повернула пешка). В конце движения вектор сжимается $2^{(y-1)/2}$ раз, где y — общее число ходов пешки (т.е. заменяется на вектор такого же направления, но длины $1/2^{(y-1)/2}$). Полученный в итоге вектор и есть $\vec{a}(s)$. Например, для верхнего пути на рис. 2 вектор $\vec{a}(s) = (1/8, 0)$.

Обозначим $\vec{a}(x, y) := \sum_s \vec{a}(s)$, где суммирование ведется по всем путям пешки из клетки $(0, 0)$ в клетку (x, y) , начинающихся с хода вправо-вверх. Если таких путей нет, то будем считать $\vec{a}(x, y) := \vec{0}$. Например, $\vec{a}(1, 3) = (0, -1/2) + (1/2, 0) = (1/2, -1/2)$. Квадрат длины вектора $\vec{a}(x, y)$ называется *вероятностью*¹ обнаружения в точке (x, y) электрона, испущенного из точки $(0, 0)$. Она обозначается $P(x, y) := |\vec{a}(x, y)|^2$.

На рис. 1 цвет точки (x, y) , где $x + y$ чётно, показывает значение $P(x, y)$. Стороны «угла» на этом рисунке не параллельны прямым $y = \pm x$ (и никто не знает, почему!).

Будем называть клетки (x, y) с чётными и нечётными $x + y$ *чёрными* и *белыми* соответственно.

1. Наблюдения для малых y . Ответьте на вопросы для $y = 1, 2, 3, 4$ (и сформулируйте свои собственные вопросы и предположения для произвольного y): найдите $\vec{a}(x, y)$ и $P(x, y)$ для всех x ; когда $P(x, y) = 0$? Чему равна $\sum_{x \in \mathbb{Z}} P(x, y)$ для фиксированного y ? Как направлены $\vec{a}(1, y)$ и $\vec{a}(0, y)$?

*Вероятность*² обнаружения электрона в клетке (x, y) при поглощении в клетке (x', y') определяется аналогично $P(x, y)$, только суммирование производится по путям s , не проходящим через (x', y') . Обозначим ее $P(x, y$ минуя $x', y')$.

2. Эксперимент на двух щелях. Верно ли, что $P(x, y) = P(x, y$ минуя $0, 2) + P(x, y$ минуя $2, 2)$? А что $P(x, y$ минуя $x', y') \leq P(x, y)$?

3. Найдите $P(0, 12)$. Придумайте быстрый способ составления таблицы значений $\vec{a}(x, y)$, не требующий перебора всех путей. (Команда, первой принёсшая правильное решение, получает *первый разряд*.)

Обозначим через $a_1(x, y)$ и $a_2(x, y)$ координаты вектора $\vec{a}(x, y)$; см. рис. 3.

4. Уравнение Дирака. Выразите $a_1(x, y)$ и $a_2(x, y)$ через $a_1(x \pm 1, y - 1)$ и $a_2(x \pm 1, y - 1)$.

5. Сохранение вероятности/заряда. Для каждого целого $y > 0$ выполнено $\sum_{x \in \mathbb{Z}} P(x, y) = 1$.

6. Симметрия. Найдите формулу, которая связывает между собой $a_1(x, 100)$ при $x < 0$ и при $x \geq 0$. Тот же вопрос про $a_1(x, 100) + a_2(x, 100)$.

7. Принцип Гюйгенса. Как быстро найти $\vec{a}(x, 199)$, зная $\vec{a}(x, 100)$ при всех целых x ?

8. Используя компьютер, постройте графики функций $f_y(x) = P(x, y)$ для разных y (соедините каждую пару точек $(x, f_y(x))$ и $(x + 2, f_y(x + 2))$ отрезком); ср. с рис. 3. То же для функции $a_1(x, y)$.

9.* Найдите явную формулу для вектора $\vec{a}(x, y)$ и вероятности $P(x, y)$ (в ответе можно использовать сумму не более y слагаемых).

10.** (Загадка) Угадайте простую «приближённую формулу» для $\vec{a}(x, y)$ и $P(x, y)$, работающую при $|x| \ll y$.

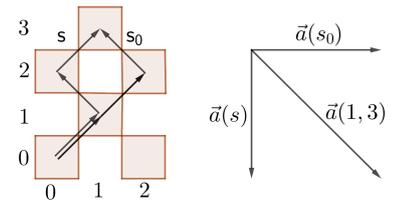


Рис. 2: Пути пешек

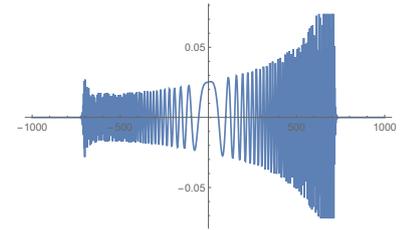


Рис. 3: $a_2(x, 1000)$

¹Удобно считать, что значение y фиксировано, а клетки $(-y, y), (-y + 2, y), \dots, (y, y)$ — это все возможные исходы эксперимента. Например, y -тая горизонталь может быть фотопластиной, детектирующей электрон.

Знакомство с теорией вероятностей не требуется для решения предложенных задач.

Осторожно! Такое правило вычисления вероятности годится только для базовой модели; позже мы его изменим, когда будем уточнять модель. Мы будем делать подобные замечания каждый раз, когда будем нарушать какой-то фундаментальный принцип ради простоты.

²Здесь появляется дополнительный исход эксперимента, когда электрон поглощается и не достигает фотопластины.

2 Спин

Вопрос: какова вероятность обнаружения правого электрона в клетке (x, y) , если правый электрон был испущен из клетки $(0, 0)$?

Предположения: те же.

Результаты: переворот спина.

Трюк, использованный для решения предыдущих задач, имеет физический смысл: удобно считать, что электрон находится в одном из двух возможных состояний: *движущимся вправо* или *движущимся влево*. Мы будем писать просто ‘правый’ или ‘левый’ для краткости³. Это не просто удобная формальность, но неотъемлемое свойство электрона, называемое *спином*⁴.

Обозначим через $\vec{a}(x, y, +) := \sum_s \vec{a}(s)$, где суммирование ведется по всем путям шашки из клетки $(0, 0)$ в клетку (x, y) , которые начинаются и заканчиваются ходом вправо-вверх. Определим $\vec{a}(x, y, -)$ как аналогичную сумму по всем путям шашки из клетки $(0, 0)$ в клетку (x, y) , которые начинаются ходом вправо-вверх, а заканчиваются ходом влево-вверх.

Квадрат длины вектора $\vec{a}(x, y, +)$ (соответственно $\vec{a}(x, y, -)$) называется *вероятностью*⁵ обнаружить правый (соответственно левый) электрон в клетке (x, y) , если правый электрон был испущен из клетки $(0, 0)$. Обозначим их как $P(x, y, +) := |\vec{a}(x, y, +)|^2$ и $P(x, y, -) := |\vec{a}(x, y, -)|^2$.

11. Выразите $\vec{a}(x, y, +)$ и $\vec{a}(x, y, -)$ через $a_1(x, y)$ и $a_2(x, y)$; $P(x, y)$ через $P(x, y, +)$ и $P(x, y, -)$.

12.* Переворот спина. Какова вероятность $P(y_0, -) := \sum_{x \in \mathbb{Z}} P(x, y_0, -)$ обнаружить левый электрон на прямой $y = y_0$ (в ответе можно использовать сумму не более y_0 слагаемых)? Найдите максимальный элемент и предел последовательности $P(1, -), P(2, -), P(3, -), \dots$

Ликбез по анализу. Следующие формулы могут быть полезны для решения задачи 12 и прочих задач со звёздочкой.

Напомним, что $\sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} = 2 - \frac{1}{2^n}$. Очевидно, что чем больше n , тем ближе сумма к 2. Мы хотели бы писать $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2$; для этого введём определение такой бесконечной суммы. Мы говорим, что последовательность a_1, a_2, a_3, \dots имеет предел a , если для любого действительного $\varepsilon > 0$ найдётся такое N , что для любого натурального $n > N$ верно $|a_n - a| < \varepsilon$. Обозначение: $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. В частности, $\lim_{n \rightarrow \infty} (2 - \frac{1}{2^n}) = 2$. Определим бесконечную сумму как $\sum_{k=0}^{\infty} a_k := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k$. Тогда в самом деле $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2$.

Следующее обобщение, называемое *биномом Ньютона*, разрешается использовать без доказательства:

$$(1+x)^r = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r(r-1) \cdots (r-k+1)}{k(k-1) \cdots 1} x^k$$

для всех комплексных x , для которых $|x| < 1$, и для всех действительных r , или для $x = 1$ и $r > -1$. В частности, для $r = -1$ и $r = -\frac{1}{2}$ получаем:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \quad \text{и} \quad \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k(2k-1) \cdots (k+1)}{k(k-1) \cdots 1} \frac{x^k}{4^k}.$$

С помощью *формулы Стирлинга* можно оценить слагаемые в бинOME Ньютона:

$$\sqrt{2\pi} k^{k+1/2} e^{-k} \leq k! \leq e k^{k+1/2} e^{-k},$$

где e обозначает $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^n$. Это иррациональное число между 2.71 и 2.72.

³Обратите внимание, что в размерности 3 и больше *правый* и *левый* означают не направление движения, а нечто совсем другое. Хотя это часто представляют, как направление вращения электрона, эти состояния не имеют неквантовых аналогов.

⁴И *киральностью*; будьте внимательны: термин *спин* обычно обозначает свойство, не имеющее никакого отношения к направлению движения.

⁵Таким образом, результатом эксперимента является пара (конечная координата по x , направление последнего хода), а конечная координата по y фиксирована.

Именно эти вероятности являются фундаментальными, а $P(x, y)$ в общем случае *по определению* равна выражению из решения задачи 11, а не приведённому выше выражению $P(x, y) = |\vec{a}(x, y)|^2$ (которое случайно совпало с нужным в простом случае).

3 Масса

Вопрос: какова вероятность обнаружения правого электрона массой m в клетке (x, y) , если он был испущен из клетки $(0, 0)$?

Предположения: масса и шаг решётки теперь произвольные.

Результаты: формула для вероятности для маленького шага решётки.

Чтобы провести эксперимент, проверяющий нашу модель, нам нужно следующее обобщение.

Зафиксируем $\varepsilon, m > 0$, называемые *шагом решётки* и *массой частицы* соответственно. Каждому пути s сопоставим вектор $\vec{a}(s, m\varepsilon)$ следующим образом. В начале движения у нас будет вектор $(0, 1)$. Пока шашка движется вдоль прямой, вектор не меняется, а после каждого поворота он поворачивается на 90° по часовой стрелке и умножается на $m\varepsilon$. В конце движения вектор сжимается в $(1 + m^2\varepsilon^2)^{(y-1)/2}$ раз, где y — общее число ходов шашки. Полученный в итоге вектор и есть $\vec{a}(s, m\varepsilon)$. Векторы $\vec{a}(x, y, m\varepsilon, \pm)$ и числа $P(x, y, m\varepsilon, \pm)$ определяются аналогично $\vec{a}(x, y, \pm)$ и $P(x, y, \pm)$, только вместо $\vec{a}(s)$ используется $\vec{a}(s, m\varepsilon)$. В частности, $P(x, y, 1, +) = P(x, y, +)$. На нижнем графике рисунка 1 цвет точки (x, y) для чётных $x + y$ показывает значение $P(x, y, 0.02, +) + P(x, y, 0.02, -)$.

13. (Загадка) Безмассовые и тяжёлые частицы. Найдите $P(x, y, 0, +)$ и придумайте определение числа $P(x, y, \infty, +)$ для всех x, y .

14. Решите аналоги задач 4, 5, и 9 для $m\varepsilon \neq 1$.

В эксперименте мы измеряем вероятность найти электрон не в отдельных точках, а на *интервалах* $x_0 \leq x \leq x_0 + \Delta x, y = y_0$. Здесь $x_0, y_0, \Delta x$ — это не целые числа, а длины, измеряемые в метрах. Если все клетки маленькие и имеют размеры $\frac{1}{n} \times \frac{1}{n}$, то этот интервал можно приблизить набором чёрных клеток $(2 \lfloor \frac{nx}{2} \rfloor, 2 \lfloor \frac{ny}{2} \rfloor)$ с x, y , удовлетворяющими (не)равенствам выше. Это приводит нас к следующей задаче.⁶

15.* (Первая основная задача) Непрерывный предел. Найдите $\lim_{n \rightarrow \infty} n \vec{a}(2 \lfloor \frac{nx}{2} \rfloor, 2 \lfloor \frac{ny}{2} \rfloor, \frac{m}{n}, -)$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} n \vec{a}(2 \lfloor \frac{nx}{2} \rfloor, 2 \lfloor \frac{ny}{2} \rfloor, \frac{m}{n}, +)$ для всех x, y, m . В ответе разрешается использовать следующие выражения⁷:

$$J_0(z) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(z/2)^{2k}}{(k!)^2} \quad \text{и} \quad J_1(z) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(z/2)^{2k+1}}{k!(k+1)!}.$$

4 Источник

Вопрос: какова вероятность обнаружения правого электрона в клетке (x, y) , если он был испущен источником с длиной волны λ ?

Предположения: теперь источник реалистичный.

Результаты: распространение волн.

Реалистичный источник испускает электроны не точечно из $x = 0$ (как в нашей игре), а широким волновым импульсом. В терминах нашей игры это означает, что шашка может начинать из любой чёрной клетки на горизонтали $y = 0$ (не слишком далеко от начала координат), но исходное направление вектора $\vec{a}(s)$ повернуто на угол, пропорциональный расстоянию от стартовой клетки до $(0, 0)$; см. рис. 4.

Более строго, зафиксируем действительные $\varepsilon, \lambda > 0$ и нечётное Δ , называемые *шагом решётки*, *длиной волны*, и *шириной импульса* соответственно. Обозначим через $R^\alpha \vec{a}$ поворот вектора \vec{a} на угол $|\alpha|$ против часовой стрелки, если $\alpha \geq 0$, и по часовой, если $\alpha < 0$. Определим вектор

$$\vec{a}(x, y, \lambda/\varepsilon, \Delta, +) := \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{\substack{x_0=1-\Delta \\ x_0 \text{ чётно}}}^{\Delta-1} \sum_s R^{2\pi x_0 \varepsilon / \lambda} \vec{a}(s),$$

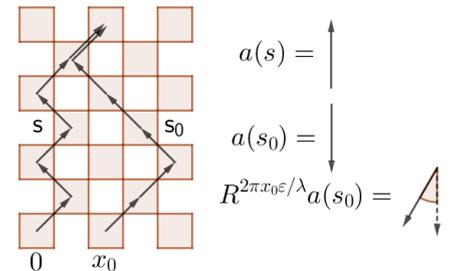


Рис. 4: Пути шашек теперь могут начинаться с разных клеток.

⁶Объяснить, откуда в пределах берётся нормирующий множитель n , несколько сложнее; мы не будем это делать.

⁷Называемые *функциями Бесселя*, они почти так же хорошо исследованы, как синус и косинус; предварительное знакомство с ними не требуется.

где вторая сумма берётся по всем путям s из клетки $(x_0, 0)$ в клетку (x, y) , которые начинаются и заканчиваются ходом вправо-вверх. Квадрат длины этого вектора назовём *вероятностью обнаружить правый электрон в клетке (x, y) , если он был испущен источником с длиной волны λ и шириной импульса Δ* . Эта вероятность обозначается $P(x, y, \lambda/\varepsilon, \Delta, +)$. Определим $\vec{a}(x, y, \lambda/\varepsilon, \Delta, -)$ и $P(x, y, \lambda/\varepsilon, \Delta, -)$ аналогично. В частности, $P(x, y, \lambda/\varepsilon, 1, +) = P(x, y, +)$ для всех λ, ε , и $\vec{a}(x+1, 1, \lambda/\varepsilon, \Delta, +) = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \left(-\sin \frac{2\pi x \varepsilon}{\lambda}, \cos \frac{2\pi x \varepsilon}{\lambda} \right)$ для чётных $|x| < \Delta$.

16. Пусть $\Delta = 3$, $\lambda/\varepsilon = 4$. Найдите вектор $\vec{a}(x, y, 4, 3, +)$ и вероятность $P(x, y, 4, 3, +)$ для $y = 1, 2, 3$ и всех x . Чему равна $\sum_{x \in \mathbb{Z}} (P(x, y, 4, 3, +) + P(x, y, 4, 3, -))$ для фиксированного $y = 1, 2, 3$? Когда $P(x, 3, 4, 3, +) = 0$?

17. Сохранение вероятности/заряда. Решите аналоги задач 4 и 5 для $\vec{a}(x, y, \lambda/\varepsilon, \Delta, -)$, $\vec{a}(x, y, \lambda/\varepsilon, \Delta, +)$, и $P(x, y, \lambda/\varepsilon, \Delta, +) + P(x, y, \lambda/\varepsilon, \Delta, -)$ вместо $a_1(x, y)$, $a_2(x, y)$ и $P(x, y)$.

18. Причинность. И $\sqrt{\Delta} \vec{a}(x, y, \lambda/\varepsilon, \Delta, +)$, и $\Delta P(x, y, \lambda/\varepsilon, \Delta, +)$ не зависят от Δ для $\Delta > y + |x|$.

Обозначим⁸ $\vec{a}(x, y, \lambda/\varepsilon, \pm) = \sqrt{\Delta} \vec{a}(x, y, \lambda/\varepsilon, \Delta, \pm)$ и $P(x, y, \lambda/\varepsilon, \pm) = \Delta P(x, y, \lambda/\varepsilon, \Delta, \pm)$ для $\Delta > y + |x|$.

19. Волна. Как найти $\vec{a}(x, 100, \lambda/\varepsilon, +)$ для всех чётных x , если нам известен этот вектор для одного чётного x ?

20.* Распространение волн. Для всех $x, y, \lambda, \varepsilon$ найдите $\vec{a}(x, y, \lambda/\varepsilon, -)$, $P(x, y, \lambda/\varepsilon, -)$ и $P(x, y, \lambda/\varepsilon, -) + P(x, y, \lambda/\varepsilon, +)$.

5 Среда

Вопрос: какая доля света данного цвета отражается стеклянной пластиной данной ширины?

Предположения: угол падения равен 90° , нет поляризации света; масса частицы теперь зависит от x , но не зависит от цвета.

Результаты: отражение от тонкой плёнки.

Нашу модель также можно применить для описания распространения света в прозрачной среде, например в стекле⁹. Свет распространяется так, как будто он имеет ненулевую массу в среде и нулевую вне её¹⁰. Длина волны определяет цвет.

21. (Загадка) Дайте такое определение аналога $\vec{a}(s, m\varepsilon)$ для случая, когда масса $m = m(x)$ зависит от x , чтобы аналоги задач 4 и 5 остались верными.

Для заданной массы $m = m(x)$ определим вектор $\vec{a}(x, y, m(x)\varepsilon, \lambda/\varepsilon, \pm)$ и число $P(x, y, m(x)\varepsilon, \lambda/\varepsilon, \pm)$ аналогично $\vec{a}(x, y, \lambda/\varepsilon, \pm)$ и $P(x, y, \lambda/\varepsilon, \pm)$, только заменим в определении $\vec{a}(s)$ на $\vec{a}(s, m\varepsilon)$. Пока что будем считать, что $\varepsilon = 1$.

22. Отражение от одной поверхности. Найдите $P(x, y, m(x), \lambda, +)$ и $P(x, y, m(x), \lambda, -)$ для

$$m(x) = m_0(x) \equiv 0 \quad \text{и} \quad m(x) = m_1(x) = \begin{cases} 0.2, & \text{при } x = 0; \\ 0, & \text{при } x \neq 0. \end{cases}$$

Фиксируем нечётное $L > 1$, называемое *шириной стеклянной пластины*. Сначала предположим для простоты, что свет отражается только от двух поверхностей пластины, и для этого рассмотрим¹¹

$$m_2(x) = \begin{cases} -0.2, & \text{при } x = 1; \\ +0.2, & \text{при } x = L; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

⁸Обозначение $\vec{a}(x, y, \lambda/\varepsilon, \pm)$ надо не путать с $\vec{a}(x, y, m\varepsilon, \pm)$ выше.

⁹Осторожно: как правило, шашки Фейнмана не подходят для описания света; частичное отражение — это замечательное исключение.

¹⁰Масса пропорциональна $(n-1)/(2\sqrt{n})$, где n показатель преломления; у стекла $n \approx 1.5$ и $(n-1)/(2\sqrt{n}) \approx 0.2$.

¹¹Это упрощающее предположение требует отрицательной массы на левой поверхности; причина этого станет ясна после решения задачи 25.

Вероятность отражения/прохождения¹² света с длиной волны λ от стеклянной пластины ширины L — это соответственно

$$P(\lambda, L, -) = \lim_{\substack{y \rightarrow +\infty \\ y \text{ чётно}}} P(0, y, m_2(x), \lambda, -);$$

$$P(\lambda, L, +) = \lim_{\substack{y \rightarrow +\infty \\ y \text{ чётно}}} P(L + 1, y, m_2(x), \lambda, +).$$

23. Постройте график функции $f(L) = P(0, 2L, m_2(x), 16, -)$.

24.* (Вторая основная задача) **Отражение от двух поверхностей.** Найдите $P(\lambda, L, -)$, $P(\lambda, L, +)$, $P(\lambda, L, -) + P(\lambda, L, +)$ и $\max_L P(\lambda, L, -)$.

На самом деле, свет отражается *внутри* пластины; этим нельзя пренебрегать, если мы хотим точнее вычислить вероятность отражения (вычислить её точно, без упрощающих предположений, видимо, невозможно для таких сложных веществ, как стекло). Поэтому мы существенно модифицируем нашу модель. Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$. Зафиксируем $m > 0$ и положим $m_3(x) = m$ при $0 < x \leq L/\varepsilon$ и $m_3(x) = 0$ иначе. Теперь для каждого хода, начинающегося в клетке внутри стекла, наш вектор будет дополнительно поворачиваться на угол $\arctg m\varepsilon$ по часовой стрелке (независимо от того, поворачивает ли шашка в этой клетке)¹³. Другими словами, положим $\vec{a}_m(s, m(x)\varepsilon) := R^{-k \arctg m\varepsilon} \vec{a}(s, m(x)\varepsilon)$, где k — это количество ходов на пути s , начинающихся в полосе $0 < x \leq L/\varepsilon$. Определим $P_m(x, y, m(x)\varepsilon, \frac{\lambda}{\varepsilon}, -)$ аналогично $P(x, y, m(x)\varepsilon, \frac{\lambda}{\varepsilon}, -)$, только заменим в определении $\vec{a}(s, m(x)\varepsilon)$ на $\vec{a}_m(s, m(x)\varepsilon)$.

25.** **Отражение от тонкой плёнки.** Найдите $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \lim_{\substack{y \rightarrow +\infty \\ y \text{ чётно}}} P_m(0, y, m_3(x)\varepsilon, \frac{\lambda}{\varepsilon}, -)$. Для каких m максимум этого выражения по L равен $\max_L P(\lambda, L, -)$? (Разрешается без доказательства использовать то, что предел $\lim_{\substack{y \rightarrow +\infty \\ x+y \text{ чётно}}} R^{2\pi y\varepsilon/\lambda} \vec{a}(x, y, m_3(x)\varepsilon, \frac{\lambda}{\varepsilon}, -)$ существует для всех x .)

¹²Концептуальнее было бы определить $P(\lambda, L, -) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{\Delta \rightarrow +\infty} \lim_{y \rightarrow +\infty} \sum_{x \in \mathbb{Z}} P(x, y, m_3(x)\varepsilon, \frac{\lambda}{\varepsilon}, \Delta, -)$, но мы не будем так делать.

¹³Этот дополнительный поворот можно объяснить следующим образом. Свет может рассеяться в каждой клетке внутри стекла несколько раз. Каждое рассеивание добавляет множитель $-im\varepsilon$ к нашему вектору (рассматриваемому, как комплексное число) и может поменять или не поменять направление движения шашки. Предположим, $m\varepsilon < 1$. Таким образом, ход без изменения направления движения добавляет множитель

$$1 \text{ (нет рассеиваний)} - im\varepsilon \text{ (1 рассеивание)} + (-im\varepsilon)^2 \text{ (2 рассеивания)} + \dots = \frac{1}{1 + im\varepsilon}.$$

Без рассеиваний шашка движется прямо. Таким образом, поворот в определённой клетке внутри стекла добавляет множитель

$$-im\varepsilon \text{ (1 рассеивание)} + (-im\varepsilon)^2 \text{ (2 рассеивания)} + (-im\varepsilon)^3 \text{ (3 рассеивания)} + \dots = \frac{-im\varepsilon}{1 + im\varepsilon}.$$

Это те же множители, что и в модели из §3, дополнительно повернутые на угол $\arctg m\varepsilon$ по часовой стрелке.

6 Внешнее поле

Вопрос: какова вероятность обнаружения правого электрона в клетке (x, y) , если он движется в данном магнитном поле u ?

Предположения: магнитное поле существует только в плоскости Oxy , электрон не воздействует на него.

Результаты: отклонение электрона в магнитном поле, 'прецессия' спина, сохранение заряда.

Внешнее магнитное поле влияет на движение так¹⁴.

Общая точка четырёх клеток доски называется *вершиной*. Магнитное поле¹⁵ u это фиксированный способ сопоставить каждой вершине число $+1$ или -1 . В частности, на рис. 5 магнитное поле равно -1 в верхнем правом углу каждой клетки (x, y) , где x и y чётны. Изменим определение вектора $\vec{a}(s)$, меняя его направление на противоположное каждый раз, когда шашка проходит через вершину с магнитным полем -1 . Обозначим полученный вектор через $\vec{a}(s, u)$. Более формально, $\vec{a}(s, u) = \vec{a}(s)u(C_1)u(C_2) \dots u(C_y)$, где C_1, C_2, \dots, C_y — это все вершины на пути s . Определим $\vec{a}(x, y, u, \pm)$ и $P(x, y, u, \pm)$ аналогично $\vec{a}(x, y, \pm)$ и $P(x, y, \pm)$, заменив в определении $\vec{a}(s)$ на $\vec{a}(s, u)$. В частности, если $u(C) = +1$ тождественно, то $P(x, y, u) = P(x, y)$.

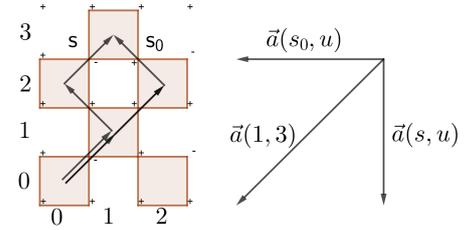


Рис. 5: Пути в поле

26. Однородное поле. Пусть $u(C) = -1$, если C это верхний правый угол клетки (x, y) , где x и y чётны, и $u(C) = +1$ иначе. Найдите вектор $\vec{a}(x, y, u, +)$ и вероятность $P(x, y, u, +)$ для $y = 1, 2, 3, 4$ и всех целых x . Чему равна $\sum_{x \in \mathbb{Z}} (P(x, y, u, +) + P(x, y, u, -))$ для фиксированного $y = 1, 2, 3, 4$?

27. 'Прецессия' спина в магнитном поле. Используя компьютер, постройте график функции $f(y) = \sum_{x \in \mathbb{Z}} P(x, y, u, +)$ для поля u из предыдущей задачи.

Для данного магнитного поля u назовём белую клетку *отрицательной*, если u равно -1 ровно в 1 или 3 углах клетки.

28. Калибровочные преобразования. Одновременное изменение знаков значений u в 4 углах одного чёрного квадрата не меняет $P(x, y, u, +)$.

29. Кривизна. Магнитное поле u можно сделать тождественно равным $+1$ в клетчатом прямоугольнике, используя преобразования из задачи 28, тогда и только тогда, когда в прямоугольнике нет отрицательных белых клеток.

30. Гомологии. Магнитное поле u равно $+1$ на границе клетчатого прямоугольника $m \times n$. Чему может быть равно количество отрицательных белых клеток в прямоугольнике?

31. Сохранение вероятности/заряда. Решите аналоги задач 4 и 5 для u , не равного тождественно $+1$.

7 Тождественные частицы и античастицы

Вопрос: какова вероятность обнаружения электронов (или электрона и позитрона) в клетках F и F' , если они были испущены из A и A' ?

Предположения: те же, что и в базовой модели; координата по оси Oy интерпретируется, как время.

Результаты: принцип запрета Паули.

Движение нескольких электронов можно описать следующей моделью.

Каждой паре путей s, s' шашки, состоящих из y ходов каждый, сопоставим вектор $\vec{a}(s, s')$ следующим образом. Начнём с вектора $(0, 1)$. Передвинем шашку сначала вдоль одного пути, а потом вдоль другого, поворачивая при этом вектор по правилу из §1: каждый раз, когда шашка меняет направление, вектор поворачивается на 90° по часовой стрелке. (То есть, в итоге вектор повернётся $t(s) + t(s')$

¹⁴Обратите внимание, что хотя этот метод рассмотрения магнитного поля хорошо известен, он сильно отличается от метода, изложенного в [Feunman].

¹⁵Или, точнее, *электромагнитный потенциал*. Поле следует интерпретировать как *магнитное* или *электрическое* в зависимости от того, интерпретируется ли координата по y как *положение* или как *время*.

раз, где $t(S)$ — это количество поворотов на пути S .) Кроме того, в конце мы делим вектор на 2^{y-1} . Полученный вектор будем обозначать $\vec{a}(s, s')$. В частности, на рис. 2 вектор $\vec{a}(s, s_0) = (-1/4, 0)$.

Зафиксируем клетки $A = (0, 0)$, $A' = (x_0, 0)$, $F = (x, y)$, $F' = (x', y)$ и их диагональных соседей $B = (1, 1)$, $B' = (x_0 + 1, 1)$, $E = (x - 1, y - 1)$, $E' = (x' - 1, y - 1)$, где $x_0 \neq 0$. Обозначим через¹⁶

$$\vec{a}(AB, A'B' \rightarrow EF, E'F') := \sum_{\substack{s: AB \rightarrow EF \\ s': A'B' \rightarrow E'F'}} \vec{a}(s, s') - \sum_{\substack{s: AB \rightarrow E'F' \\ s': A'B' \rightarrow EF}} \vec{a}(s, s'),$$

где первая сумма по всем парам, состоящим из пути s , начинающимся ходом AB и заканчивающимся ходом EF , и пути s' , начинающимся ходом $A'B'$ и заканчивающимся ходом $E'F'$; во второй сумме последние ходы поменяны местами.

Квадрат длины $P(AB, A'B' \rightarrow EF, E'F') = |\vec{a}(AB, A'B' \rightarrow EF, E'F')|^2$ называется *вероятностью¹⁷ обнаружить правые электроны в F и F' , если они были испущены из A и A'* . В частности, $P(AB, A'B' \rightarrow EF, EF) = 0$, то есть два правых электрона не могут быть одновременно в одном месте; это называется *принципом запрета*.

32. Независимость. При $x_0 \geq 2y$ и $x' > x$ выразите $P(AB, A'B' \rightarrow EF, E'F')$ через $P(x, y, +)$ и $P(x' - x_0, y, +)$.

33. Принцип запрета (для промежуточных состояний). Докажите, что $\vec{a}(AB, A'B' \rightarrow EF, E'F')$ не изменится, если суммы в определении будут только по тем парам путей s, s' , у которых нет *общих ходов*.

Определим $P(AB, A'B' \rightarrow EF, E'F')$ аналогично для $E = (x \pm 1, y - 1)$, $E' = (x' \pm 1, y - 1)$.

34. Сохранение вероятности/заряда. Для каждого фиксированного $y \geq 1$ выполняется равенство $\sum_{E, E', F, F'} P(AB, A'B' \rightarrow EF, E'F') = 1$, где сумма берётся по всем четвёркам $F = (x, y)$, $F' = (x', y)$, $E = (x \pm 1, y - 1)$, $E' = (x' \pm 1, y - 1)$.

У электрона есть античастица, называемая *позитрон*. Можно представлять себе античастицу как частицу, движущуюся назад во времени. Движение можно описать следующей похожей моделью.

Поставим на доску ещё одну шашку, которая сможет двигаться только вправо-вниз и влево-вниз. Будем называть новую шашку *чёрной*, а старую *белой*.

Для каждой пары путей s, s' белой и чёрной шашек соответственно, определим вектор $\vec{a}(s, s')$ аналогично написанному выше, только для каждого поворота *чёрной* шашки будем поворачивать вектор *против часовой стрелки*, а не по (независимо от направления поворота). В частности, $\vec{a}(s, s') = (0, 2^{1-y})$, если s' — это то же путь, что и s , но проходимый в обратном направлении. Обозначим¹⁸ через

$$\vec{a}(AB, B'A' \rightarrow EF, F'E') := \sum_{s, s'} \vec{a}(s, s')$$

сумму по всем парам, состоящим из пути s белой шашки, начинающимся ходом AB и заканчивающимся ходом EF , и пути s' чёрной шашки, начинающимся ходом $F'E'$ и заканчивающимся ходом $B'A'$. Квадрат длины $P(AB, B'A' \rightarrow EF, F'E') = |\vec{a}(AB, B'A' \rightarrow EF, F'E')|^2$ будем называть *вероятностью обнаружить электрон в клетке F , а позитрон в F' , если они были испущены из A и A'* .

35. Независимость. Решите аналог задачи 32 для $P(AB, B'A' \rightarrow EF, F'E')$.

¹⁶Здесь важно, что s и s' — это пути *однотипных* частиц, например двух электронов. Иначе вторая сумма опускается. Знак перед второй суммой меняется на плюс для некоторых частиц, например *фотонов* (частиц света).

¹⁷Удобно считать, что значение y фиксировано, а четвёрки (F, F', E, E') — это возможные исходы эксперимента.

¹⁸Это определение осмысленно только при $x_0 \geq 2y$; иначе аннигиляцией частиц нельзя пренебречь, и модель становится неадекватной.

8 Взаимодействие***

Вопрос: тот же, что и в базовой модели, но теперь координата по оси Oy интерпретируется, как время.

Предположения: электрон создаёт магнитное поле, влияющее на движение; ограждение волнонепроницаемыми стенками.

Результаты: взаимодействие со стенками влияет на движение электрона.

Мы дошли до неизученной области: физически корректное строгое определение следующего уточнения пока неизвестно. В этом разделе мы даём **НЕПРАВИЛЬНОЕ определение, приводящее к парадоксальным результатам:**

- уточнение описывает взаимодействие электрона со стенками, а не с собственным полем;
- взаимодействие (со стенками) передаётся с бесконечной скоростью, а не со скоростью света.

Но мы надеемся, что предложенные здесь идеи всё равно могут представлять интерес.

Движение электрона само по себе создаёт магнитное поле, которое в свою очередь влияет на движение. Созданное поле случайно, с вероятностью, получающейся сложением по всем возможным промежуточным полям.

Фиксируем $g \geq 0$, называемое *константой взаимодействия*¹⁹ (она связана с зарядом электрона). Фиксируем чёрную клетку (x, y) , называемую *конечным положением*. Фиксируем прямоугольник R , составленный из всех таких клеток (x', y') , что $1 - y < x' < y$ и $0 < y' < y$. Эта *волнонепроницаемая коробка* R окружает все возможные пути s из $(0, 0)$ в (x, y) , кроме первого и последнего хода; она необходима для того, чтобы приведённая ниже сумма по всем промежуточным полям была конечной.

Возьмём любой такой путь s и произвольную расстановку u чисел ± 1 на всех вершинах в *прямоугольнике* R . Обозначим через n количество отрицательных белых клеток в R для расстановки u (они будут играть роль поворотов шашки). Обозначим через

$$\vec{a}(s, u, g) = \frac{g^n}{2^{(y-2)^2} (1+g^2)^{(y-1)^2/2}} R^{-\pi n/2} \vec{a}(s, u)$$

вектор²⁰ $\vec{a}(s, u)$, повернутый по часовой стрелке на $n \cdot 90^\circ$, умноженный на g^n и поделённый на $2^{(y-2)^2} (1+g^2)^{(y-1)^2/2}$.

Обозначим через u_{fin} произвольную расстановку чисел ± 1 на всех вершинах *верхней стороны* *прямоугольника* R такую, что u_{fin} равно $+1$ на концах стороны. Она называется *конечным магнитным полем*. Обозначим через

$$\vec{a}(x, y, u_{\text{fin}}, g, +) := \sum_{s, u} \vec{a}(s, u, g)$$

сумму по всем путям s из $(0, 0)$ в (x, y) , начинающимся и заканчивающимся ходом вправо-вверх, и по всем таким расстановкам u чисел ± 1 на всех вершинах в *прямоугольнике* R , что

$$u = \begin{cases} u_{\text{fin}} & \text{на верхней стороне } R; \\ +1 & \text{на всех остальных сторонах } R. \end{cases}$$

Квадрат длины вектора $\vec{a}(x, y, u_{\text{fin}}, g, +)$ называется *вероятностью того, что конечное магнитное поле равно u_{fin} , а правый электрон обнаружен в (x, y)* . Обозначение: $P(x, y, u_{\text{fin}}, g, +) = |\vec{a}(x, y, u_{\text{fin}}, g, +)|^2$. $P(x, y, u_{\text{fin}}, g, -)$ определяется аналогично.

36. Найдите вероятности $P(x, y, u_{\text{fin}}, 1, +)$ и $P(x, y, u_{\text{fin}}, 1, -)$ для $g=1$, $y=2, 3$ и всех возможных x и u_{fin} .

Сумма²¹

$$P(x, y, g, +) = \sum_{u_{\text{fin}}} P(x, y, u_{\text{fin}}, g, +)$$

¹⁹Если шаг решётки ϵ не фиксирован, то g может зависеть от него. Это называется *перенормировкой*; мы не будем обсуждать её.

²⁰Он определён корректно, так как путь s целиком содержится в R , не считая первого и последнего хода. Будем считать, что $g^n = 1$ при $g = n = 0$.

²¹Здесь мы суммируем не вектора, а вероятности. Не путайте обозначение $P(x, y, g, +)$ с $P(x, y, t\epsilon, +)$.

по всем расстановкам u_{fin} чисел ± 1 на вершинах верхней стороны прямоугольника R — это *вероятность обнаружения правого электрона в (x, y)* . Определим $P(x, y, g, -)$ аналогично. В частности, $P(x, y, 0, +) = P(x, y, +)$ (почему?).

37.* Для произвольного пути s из $(0, 0)$ в (x, y) , рассмотрим сумму $\sum_u \vec{a}(s, u, g)$ по всем таким расстановкам u чисел ± 1 на всех вершинах в прямоугольнике R , что $u = +1$ на границе R . Выразите эту сумму через $\vec{a}(s)$ и количества белых клеток в частях, на которые путь s делит R .

38.* Расстановки u_{\pm} равны соответственно ± 1 в правом верхнем углу клетки $(2 - y, y - 1)$, и равны $+1$ во всех остальных вершинах верхней стороны R . Решите аналоги задач 4 и 5 для $\vec{a}(x, y, u_{\pm}, g, \pm)$ и $P(x, y, g, +) + P(x, y, g, -)$ вместо $a_1(x, y)$, $a_2(x, y)$ и $P(x, y)$.

9 Рождение и аннигиляция***

Вопрос: то же, что и в модели с тождественными частицами и античастицами.

Предположения: электрон-позитронные пары теперь рождаются и аннигилируют, нет взаимодействия, ограждение отражающими стенками.

Результаты: нет; эта модель — лишь составная часть более реалистичной модели со взаимодействием.

Наконец, мы дошли до неизученной области: **мы сформулируем проблему, которая остается открытой уже почти 40 лет.** Начнём с упоминания того, чего *нет* в этом разделе:

- мы *не* даём определения очередного уточнения модели (оно пока неизвестно);
- уточнение (даже если его определить) *не* сможет объяснить никаких новых экспериментальных результатов.

Но

- мы *даём* чёткую формулировку задачи: какие именно свойства должно иметь уточнение;
- это уточнение — важная часть последующих, замечательно согласующихся с экспериментом.

Неформально, наш план заключается в следующем. Пути шашки, поворачивающие вниз или вверх, или образующие циклы, означают рождение и аннигиляцию электрон-позитронных пар. Даже если в начале у нас были всего один или два электрона, в конце мы можем получить много электронов и позитронов. Каждой возможной конфигурации полученных частиц мы хотим сопоставить комплексное число, квадрат модуля которого будет в каком-то смысле вероятностью этой конфигурации. Это число будет суммой по всем возможным промежуточным состояниям между начальной конфигурацией и конечной, то есть по всем «путям», их соединяющим. Чтобы сделать сумму конечной, мы ограничиваем пространство отражающими стенками.

Зафиксируем прямоугольник R , состоящий из всех таких клеток (x, y) , что $x_{\min} \leq x \leq x_{\max}$ и $0 \leq y \leq y_{\max}$ (линии $x = x_{\min}$ и $x = x_{\max}$ называются *отражающими стенками*). Зафиксируем $m, \varepsilon > 0$, называемые *массой* и *шагом решётки*.

Начальная конфигурация — это расстановка²² одного из знаков “+” или “−” в некоторых вершинах внутри R , лежащих между линиями $y = 0$ и $y = 1$. С физической точки зрения эти знаки означают начальное положение позитронов и электронов соответственно (а точки без знака свободны). Для нашей игры это означает, что шашка проходит вершины со знаком “−”, двигаясь влево-вверх или вправо-вверх, а вершины со знаком “+” — влево-вниз или вправо-вниз (и не проходит через вершины без знака). Аналогично, *конечной конфигурацией* называется расстановка знаков на вершинах, лежащих между линиями $y = y_{\max}$ и $y = y_{\max} - 1$. *Промежуточная конфигурация* — это расстановка одного из знаков “+” и “−” в некоторых вершинах внутри R так, что в каждой чёрной клетке полосы $1 \leq y \leq y_{\max} - 1$ разность между количеством “+” и “−” в 2 верхних вершинах равна соответствующей разности в 2 нижних вершинах. Для нашей игры это означает, что шашки начинают и заканчивают движение только на линиях $y = 0$ и $y = y_{\max}$. Другими словами, в каждой чёрной клетке знаки в вершинах могут быть расставлены одним из 19 способов²³, показанных в левой части рисунка 6. Эти 19 способов назовём *базовыми конфигурациями*.

²²Эта расстановка не имеет никакого отношения к магнитному полю из §6.

²³Мы рассматриваем именно знаки, а *не* возможные пути шашки через конкретную клетку, как на рисунке 6 справа.

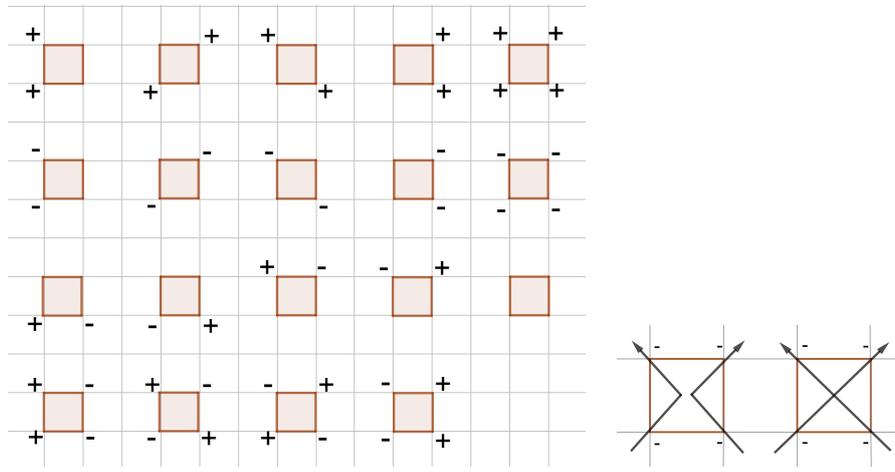


Рис. 6: Базовые конфигурации

Предположим, что каждой базовой конфигурации сопоставили комплексное число (зависящее от $m\varepsilon$). “Правильный” способ выбрать эти числа неизвестен; считайте, что они — фиксированные параметры нашей модели.

Рассмотрим произвольную промежуточную конфигурацию. В каждую чёрную клетку внутри R , не имеющую общих точек с границей, напишем число, соответствующее базовой конфигурации этой клетки. Сопоставим промежуточной конфигурации произведение всех написанных чисел.

Теперь для каждой пары из начальной и конечной конфигураций сложим комплексные числа, сопоставленные всем возможным промежуточным конфигурациям между ними. Сопоставим нашей паре полученное комплексное число.

39. (Загадка) Рассмотрим конфигурации совсем без знаков “+”. Возьмём $A, A', B, B', E, E', F, F'$ — чёрные клетки, описанные в §7, и произвольные $x_{\min} < -y$ и $x_{\max} > x_0 + y$. Фиксируем начальную и конечную конфигурации с ровно двумя знаками “-”, расположенными в правых верхних углах клеток A, A' и E, E' соответственно. Сопоставьте каждой из 6 базовых конфигураций без знаков “+” комплексное число так, чтобы сумма чисел, сопоставленных всем промежуточным конфигурациям без знаков “+”, была равна вектору $\vec{a}(AB, A'B' \rightarrow EF, E'F')$, определённому в §7.

Особый интерес представляет случай, когда начальная конфигурация состоит из одного знака “-” в правой верхней вершине клетки $(0, 0)$, а конечная конфигурация — из одного знака “-” в левой нижней или правой нижней вершине чёрной клетки (x, y_{\max}) . Комплексные числа, соответствующие этим парам, обозначаются соответственно $\vec{a}(x, y_{\max}, m\varepsilon, x_{\min}, x_{\max}, +)$ и $\vec{a}(x, y_{\max}, m\varepsilon, x_{\min}, x_{\max}, -)$.

Непрерывный предел, который мы ожидаем получить в этой модели, формулируется в терминах *модифицированных функций Бесселя и функций Ганкеля*:

$$\begin{aligned}
 K_0(x) &= \int_1^\infty \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t^2 - 1}} dt & H_0^{(1)}(x) &= \frac{2}{i\pi} \int_1^\infty \frac{e^{ixt}}{\sqrt{t^2 - 1}} dt \\
 K_1(x) &= x \int_1^\infty e^{-xt} \sqrt{t^2 - 1} dt & H_1^{(1)}(x) &= -\frac{2x}{i\pi} \int_1^\infty e^{ixt} \sqrt{t^2 - 1} dt
 \end{aligned}$$

40.* Непрерывный предел.** Сопоставьте такие комплексные числа 19 базовым конфигурациям, чтобы для всех $|y| < |x|$ было верно

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x_{\max} \rightarrow \infty} n \vec{a} \left(2 \left\lfloor \frac{nx}{2} \right\rfloor, 2 \left\lfloor \frac{ny}{2} \right\rfloor, \frac{m}{n}, -x_{\max}, x_{\max}, - \right) &= m K_0(m\sqrt{x^2 - y^2}); \\
 \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x_{\max} \rightarrow \infty} n \vec{a} \left(2 \left\lfloor \frac{nx}{2} \right\rfloor, 2 \left\lfloor \frac{ny}{2} \right\rfloor, \frac{m}{n}, -x_{\max}, x_{\max}, + \right) &= -im \frac{x + y}{\sqrt{x^2 - y^2}} K_1(m\sqrt{x^2 - y^2});
 \end{aligned}$$

а для всех $|y| > |x|$ было верно

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x_{\max} \rightarrow \infty} n \vec{a} \left(2 \left\lfloor \frac{nx}{2} \right\rfloor, 2 \left\lfloor \frac{ny}{2} \right\rfloor, \frac{m}{n}, -x_{\max}, x_{\max}, - \right) &= im \frac{\pi}{2} H_0^{(1)}(m\sqrt{y^2 - x^2}); \\
 \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x_{\max} \rightarrow \infty} n \vec{a} \left(2 \left\lfloor \frac{nx}{2} \right\rfloor, 2 \left\lfloor \frac{ny}{2} \right\rfloor, \frac{m}{n}, -x_{\max}, x_{\max}, + \right) &= m \frac{\pi}{2} \cdot \frac{x + y}{\sqrt{y^2 - x^2}} H_1^{(1)}(m\sqrt{y^2 - x^2}).
 \end{aligned}$$

Обсудим физический смысл этого уточнения. Для $y \gg |x|$ правые части двух последних равенств очень близки к правым частям ответа к задаче 10. Поэтому может возникнуть желание интерпретировать уточнение, как более точное приближение для вероятности обнаружить электрон в клетке (x, y) . Но против этого есть серьёзные возражения.

Во-первых, *принципиально* невозможно точно измерить координаты электрона²⁴. Эта априорная неопределённость имеет тот же порядок, что и исправление, вносимое уточнением. Таким образом, уточнение не добавляет ничего нового к описанию движения электрона.

Во-вторых, для фиксированной начальной конфигурации сумма квадратов модулей чисел, присвоенных всем возможным конечным конфигурациям, *не* равна 1 (даже в непрерывном пределе). Причиной этого является то, что конфигурации не являются взаимоисключающими: для данной конфигурации поля существует положительная вероятность обнаружить при измерении, что оно находится в другой конфигурации. Мы не знаем ясного объяснения этому.

В общем, это уточнение не имеет прямой физической интерпретации, и его следует рассматривать, как составную часть будущих уточнений.

10 $(1 + 1)$ -мерная квантовая электродинамика***

Вопрос: какова вероятность обнаружить электроны (или электрон+позитрон) с импульсами q и q' в далёком будущем, если они были испущены с импульсами p и p' в далёком прошлом?

Предположения: взаимодействие теперь есть; остались только базовые упрощающие предположения: нет ядерных сил и гравитации, электрон движется только по оси Ox (а ось Oy интерпретируется, как время).

Результаты: квантовые поправки.

Объединение (пока неизвестных) уточнений, обсуждаемых в двух предыдущих разделах даст элементарное определение $(1 + 1)$ -мерной КЭД.

Будущие исследования

Алгоритмическая квантовая теория поля для каждой экспериментально наблюдаемой величины и положительного числа ε даёт точную формулировку алгоритма, выдающего предсказанное значение величины с точностью ε . (Разумеется, предсказанное значение не обязано совпадать с экспериментом для ε меньшего, чем точность самой теории.) Это является продолжением *конструктивной* квантовой теории поля, которая ещё далека от того, чтобы считаться алгоритмической.

Эпилог (подводные камни)

Мы надеемся, что по крайней мере некоторые из наших читателей заинтересовались элементарными частицами и хотят узнать о них больше. В качестве эпилога дадим несколько предостережений таким читателям.

В научно-популярной литературе теорию элементарных частиц часто переупрощают. Наш материал не является исключением. Простые модели, представленные здесь, очень грубы, и слепо доверять им нельзя. Простота — их единственное достоинство; если относиться к ним слишком серьёзно, эти модели даже могут дать неправильную физическую интуицию. Настоящее понимание теории частиц требует серьёзных познаний в физике и математике.

Также мы хотим отметить, что сейчас практически нет математических результатов в решёточной квантовой теории поля; почти всё, что имеется — всего лишь компьютерные симуляции. Наконец, есть “*теории Новой Физики*”, которые разрабатываются безо всяких объективных критериев истины: такие теории не поддерживаются ни экспериментальными, ни математическими доказательствами (и некоторые из них имеют экспериментальное опровержение).

²⁴Не надо путать это с *принципом неопределённости*, который устанавливает предел точности одновременного измерения координат и импульса.

Указания, ответы, решения

Для каждого вектора $\vec{a} \in \mathbb{R}^2$ обозначим через a_1, a_2 координаты вектора \vec{a} . Например, $\vec{a}(x, y, m\varepsilon, -) = (a_1(x, y, m\varepsilon, -), a_2(x, y, m\varepsilon, -))$. Иногда мы будем смотреть на вектор \vec{a} , как на комплексное число $a_1 + ia_2$ (при этом для решение большинства задач не требуется использование комплексных чисел).

В дальнейшем, если не сказано иначе, x и y одной чётности.

1. *Ответ.* Вектор в клетке (x, y) таблицы — это $\vec{a}(x, y)$, а если клетка (x, y) пуста, то $\vec{a}(x, y) = (0, 0)$.

4	$(\frac{1}{2\sqrt{2}}, 0)$		$(0, -\frac{1}{2\sqrt{2}})$		$(\frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$		$(0, \frac{1}{2\sqrt{2}})$
3		$(\frac{1}{2}, 0)$		$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$		$(0, \frac{1}{2})$	
2			$(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$		$(0, \frac{1}{\sqrt{2}})$		
1				$(0, 1)$			
y \ x	-2	-1	0	1	2	3	4

В таблице ниже число в клетке (x, y) равно $P(x, y)$, а если клетка (x, y) пуста, то $P(x, y) = 0$.

4	1/8		1/8		5/8		1/8
3		1/4		1/2		1/4	
2			1/2		1/2		
1				1			
y \ x	-2	-1	0	1	2	3	4

(Векторы $\vec{a}(x, y)$ можно легко вычислить последовательно с помощью задачи 4.) См. также следующую таблицу.

4	\rightarrow p=1/8		\downarrow p=1/8		\swarrow p=5/8		\uparrow p=1/8	$ \frac{1}{2\sqrt{2}}$
3		\rightarrow p=1/4		\swarrow p=1/2		\uparrow p=1/4		$ \frac{1}{2}$
2			\rightarrow p=1/2		\uparrow p=1/2			$ \frac{1}{\sqrt{2}}$
1				\uparrow p=1				$ 1$
0			\circ					
	-2	-1	0	1	2	3	4	

Для всех натуральных y верно $\sum_{x \in \mathbb{Z}} P(x, y) = 1$. (Это требуется доказать в задаче 5.)

Для $-4 \leq -y < x \leq y \leq 4$ вероятность $P(x, y)$ равна 0 тогда и только тогда, когда числа x, y разной чётности. Для всех $x > y$ и $x < -y + 1$ верно $P(x, y) = 0$. (В общем случае неизвестно, возможно ли равенство $P(x, y) = 0$ для каких-то x, y одной чётности при $-y + 1 \leq x \leq y$.)

Для всех нечётных y верно $\vec{a}(0, y) = 0$. Для всех $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ верно:

- вектор $\vec{a}(0, 8n + 2)$ направлен вправо,
- вектор $\vec{a}(0, 8n + 4)$ направлен вниз,
- вектор $\vec{a}(0, 8n + 6)$ направлен влево,
- вектор $\vec{a}(0, 8n + 8)$ направлен вверх.

Аналогично, для всех чётных y верно $\vec{a}(1, y) = 0$. Для всех $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ верно:

- вектор $\vec{a}(1, 8n + 3)$ направлен вправо-вниз,
- вектор $\vec{a}(1, 8n + 5)$ направлен влево-вниз,
- вектор $\vec{a}(1, 8n + 7)$ направлен влево-вверх,
- вектор $\vec{a}(1, 8n + 9)$ направлен вправо-вверх.

(См. замечание после ответа к задаче 9.)

Замечание. В таблице на пересечении k -ого столбца и n -ой строки стоит $2^{(n+k-2)/2}\vec{a}(k-n+1, n+k-1)$:

(0, 1)	(0, 1)	(0, 1)	(0, 1)	(0, 1)	(0, 1)	(0, 1)	(0, 1)
(1, 0)	(1, -1)	(1, -2)	(1, -3)	(1, -4)	(1, -5)	(1, -6)	(1, -7)
(1, 0)	(0, -1)	(-1, -1)	(-2, 0)	(-3, 2)	(-4, 5)	(-5, 9)	(-6, 14)
(1, 0)	(-1, -1)	(-2, 0)	(-2, 2)	(-1, 4)	(1, 5)	(4, 4)	(8, 0)
(1, 0)	(-2, -1)	(-2, 1)	(0, 3)	(3, 3)	(6, 0)	(8, -6)	(8, -14)
(1, 0)	(-3, -1)	(-1, 2)	(3, 3)	(6, 0)	(6, -6)	(2, -12)	(-6, -14)
(1, 0)	(-4, -1)	(1, 3)	(6, 2)	(6, -4)	(0, -10)	(-10, -10)	(-20, 0)
(1, 0)	(-5, -1)	(4, 4)	(8, 0)	(2, -8)	(-10, -10)	(-20, 0)	(-20, 20)

2. *Ответ:* нет на оба вопроса. Например, $P(2, 4) = 5/8 \neq 1/8 + 1/4 = P(2, 4 \text{ минуя } 2, 2) + P(2, 4 \text{ минуя } 0, 2)$ и $P(0, 4) = 1/8 < 1/4 = P(0, 4 \text{ минуя } 2, 2)$.

3. *Ответ:* $P(0, 12) = 25/512$. *Подсказка:* ответ можно получить сразу с помощью замечания после ответа к задаче 9, или его можно быстро вычислить рекурсивно с помощью ответа к задаче 4.

4. *Ответ:*
$$\begin{cases} a_1(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2}}a_2(x+1, y-1) + \frac{1}{\sqrt{2}}a_1(x+1, y-1); \\ a_2(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2}}a_2(x-1, y-1) - \frac{1}{\sqrt{2}}a_1(x-1, y-1). \end{cases}$$

Решение. Выведем формулу для $a_2(x, y)$; формула для $a_1(x, y)$ выводится аналогично. Рассмотрим произвольный путь s из $(0, 0)$ в (x, y) . Обозначим через $t(s)$ количество поворотов у s . Обозначим $\vec{a}(s) = (a_1(s), a_2(s))$. Заметим, что $a_2(s) \neq 0$ тогда и только тогда, когда $t(s)$ чётно, и $a_1(s) \neq 0$ тогда и только тогда, когда $t(s)$ нечётно. Таким образом, $a_2(x, y) = \sum_{s:t(s) \text{ чётно}} a_2(s)$ и $a_1(x, y) = \sum_{s:t(s) \text{ нечётно}} a_2(s)$.

Последний ход пути s сделан либо из $(x-1, y)$, либо из $(x+1, y)$. Очевидно, что если $t(s)$ чётно, то последний ход направлен вправо-вверх, а если нечётно — то влево-вверх. Так как нас интересует $a_2(x, y)$, то будем предполагать, что последний ход сделан вправо-вверх.

Обозначим через s' путь s без последнего хода. Если направления последних ходов s и s' совпадают, то $\vec{a}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{a}(s')$, иначе $\vec{a}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_2(s'), -a_1(s'))$. Таким образом,

$$a_2(x, y) = \sum_{s:t(s) \text{ even}} a_2(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sum_{s':t(s') \text{ even}} a_2(s') - \sum_{s':t(s') \text{ odd}} a_1(s') \right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_2(x-1, y-1) - a_1(x-1, y-1)).$$

5. Докажем индукцией по y , что $\sum_{x \in \mathbb{Z}} P(x, y) = 1$ для всех $y > 0$. Очевидно, $\sum_{x \in \mathbb{Z}} P(x, 1) = 1$. Шаг индукции непосредственно следует из следующих вычислений:

$$\begin{aligned} \sum_{x \in \mathbb{Z}} P(x, y+1) &= \sum_{x \in \mathbb{Z}} [a_1(x, y+1)^2 + a_2(x, y+1)^2] = \sum_{x \in \mathbb{Z}} a_1(x, y+1)^2 + \sum_{x \in \mathbb{Z}} a_2(x, y+1)^2 = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{x \in \mathbb{Z}} (a_1(x+1, y) + a_2(x+1, y))^2 + \frac{1}{2} \sum_{x \in \mathbb{Z}} (a_2(x-1, y) - a_1(x-1, y))^2 = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{x \in \mathbb{Z}} (a_1(x, y) + a_2(x, y))^2 + \frac{1}{2} \sum_{x \in \mathbb{Z}} (a_2(x, y) - a_1(x, y))^2 = \sum_{x \in \mathbb{Z}} [a_1(x, y)^2 + a_2(x, y)^2] = \sum_{x \in \mathbb{Z}} P(x, y). \end{aligned}$$

Обобщение закона сохранения, найденное Глебом Минаевым и Иваном Русских.

Сделаем замену координат $(x, y) \mapsto (t, u) = (\frac{x+y}{2} - 1, \frac{y-x}{2})$, то есть повернём картинку на 45° по часовой стрелке и сдвинем на 1 по горизонтали (чтобы не учитывать первый шаг, который всегда один и тот же).

Обозначим $\vec{b}(t, u) := \vec{a}(t-u+1, t+u+1)$, $Q(t, u) := P(t-u+1, t+u+1)$, $\vec{B}(t, u) := (1+m^2\varepsilon^2)^{(t+u)/2} \vec{b}(t, u)$. Координаты векторов $\vec{b}(t, u)$ и $\vec{B}(t, u)$ будем обозначать через $b_1(t, u)$, $b_2(t, u)$, $B_1(t, u)$, $B_2(t, u)$.

Заметим, что в новой системе координат мы сдвигаем шашку не по диагонали между чёрными клетками доски, а в соседнюю точку на целочисленной решётке. Тогда можно считать, что мы начинаем в $(0, 0)$ и можем попасть в любую точку $(\mathbb{N} \cup \{0\})^2$, а «нулевой шаг» из $(-1, 0)$ в $(0, 0)$ учитывается лишь при подсчёте количества поворотов.

Для подмножества точек нашей решётки $M \subset (\mathbb{N} \cup \{0\})^2$ определим $\vec{b}(t, u \text{ минуя } M) := \sum_s \vec{b}(s)$, где суммирование ведётся по всем путям s из $(0, 0)$ в (t, u) , не проходящим через точки множества M . Аналогичным образом определим $Q(t, u \text{ минуя } M)$, $\vec{b}(t, u \text{ минуя } M, \pm)$, $Q(t, u \text{ минуя } M, \pm)$.

Также для множества M определим

$$Q(M) := \sum_{p \in M} Q(p \text{ минус } M \setminus \{p\}).$$

Следует отметить, что для бесконечного множества M сумма становится бесконечной. Порядок суммирования для бесконечной суммы в данном случае не важен, поскольку все слагаемые положительны.

Теорема 1. Пусть дано такое конечное множество $M \subset (\mathbb{N} \cup \{0\})^2$, что не существует бесконечного пути шашки из $(0; 0)$, не проходящего через точки множества M . Тогда $Q(M) = 1$.

Доказательство. Докажем утверждение индукцией по $m := \max_{(t,u) \in M} (t + u)$, то есть по максимальному номеру диагонали, идущей вправо-вниз, на которой лежит хотя бы одна точка множества M (будем называть эту диагональ *максимальной*).

База: $m = 0$. В этом случае $M = (0, 0)$, а $Q(M) = Q(0, 0) = 1$.

Шаг. Докажем лемму:

Лемма 1. Пусть даны точка $(t, u) \in (\mathbb{N} \cap \{0\})^2$ и множество $A \subset (\mathbb{N} \cap \{0\})^2$, не содержащее точек (t, u) , $(t, u + 1)$ и $(t + 1, u)$. Тогда

$$Q(t, u \text{ минус } A) = Q(t, u + 1 \text{ минус } A, -) + Q(t + 1, u \text{ минус } A, +).$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} Q(t, u + 1 \text{ минус } A, -) + Q(t + 1, u \text{ минус } A, +) &= b_1(t, u + 1 \text{ минус } A)^2 + b_2(t + 1, u \text{ минус } A)^2 = \\ &= \frac{1}{2} \left((b_1(t, u \text{ минус } A) + b_2(t, u \text{ минус } A))^2 + (b_2(t, u \text{ минус } A) - b_1(t, u \text{ минус } A))^2 \right) = \\ &= b_1(t, u \text{ минус } A)^2 + b_2(t, u \text{ минус } A)^2 = Q(t, u \text{ минус } A). \end{aligned}$$

□

Рассмотрим какую-нибудь точку $(t, u) \in M$ с максимальным $t + u$. Пусть в (t, u) снизу приходит какой-либо путь шашки из $(0, 0)$, не проходящий через $M \setminus \{(t, u)\}$. Тогда есть путь в $(t, u - 1)$, не проходящий через $M \setminus \{(t, u - 1)\}$. Заметим, что тогда $(t, u - 1) \notin M$, так как путь в (t, u) приходит снизу. Значит, есть путь и в $(t + 1, u - 1)$, не проходящий через $M \setminus \{(t + 1, u - 1)\}$. Если $(t + 1, u - 1) \notin M$, то существует путь, приходящий в эту точку и уходящий на бесконечность, при этом не проходящий через точки множества M , например, путь, который после точки (t, u) идёт только вправо (он действительно не проходит через точки множества M , так как выбранная диагональ максимальна). Значит, $(t + 1, u - 1) \in M$. Заметим, что $Q(a, b \text{ минус } A) = Q(a, b \text{ минус } A, +) + Q(a, b \text{ минус } A, -)$ для любого множества $A \subset (\mathbb{N} \cap \{0\})^2$. Пусть $K := M \setminus \{(t, u); (t + 1, u - 1)\}$. Тогда можно записать следующую цепочку равенств для множества $A = K$ (в ней используется лемма 1):

$$\begin{aligned} Q(M) &= Q(K) + Q(t, u \text{ минус } M \setminus \{(t, u)\}) + Q(t + 1, u - 1 \text{ минус } M \setminus \{(t + 1, u - 1)\}) = \\ &= Q(K) + Q(t, u \text{ минус } M \setminus \{(t, u)\}, +) + Q(t, u \text{ минус } M \setminus \{(t, u)\}, -) + \\ &\quad + Q(t + 1, u - 1 \text{ минус } M \setminus \{(t + 1, u - 1)\}, +) + Q(t + 1, u - 1 \text{ минус } M \setminus \{(t + 1, u - 1)\}, -) = \\ &= Q(K) + Q(t, u \text{ минус } M \setminus \{(t, u)\}, +) + \\ &\quad + Q(t, u - 1 \text{ минус } M \setminus \{(t, u - 1)\}) + Q(t + 1, u - 1 \text{ минус } M \setminus \{(t + 1, u - 1)\}, -) = \\ &= Q(M \cup \{(t, u - 1)\}). \end{aligned}$$

Поэтому, если мы добавим точку $(t, u - 1)$ в множество M , вероятность $Q(M)$ не изменится. Аналогичное верно и для путей, приходящих в (t, u) слева.

Заметим, что каждой операцией мы ставим точки на диагональ $t + u = m - 1$, а значит, максимальная диагональ, занятая точками множества M , не менялась. Тем самым, добавив несколько точек в множество M , мы сделали так, чтобы в точки из множества M , лежащие на максимальной диагонали, больше не приходило путей из $(0, 0)$, не проходящих через другие точки множества M . Следовательно, при удалении всех точек с максимальной диагонали не меняется $Q(M)$ и не появляется бесконечного пути, не проходящего через точки M . Заметим, что мы изменили M таким образом, что $Q(M)$ не изменилось, а номер максимальной занятой диагонали уменьшился. По предположению индукции новое $Q(M)$ равно 1, значит, и старое равнялось 1. □

6. *Ответ.* Для всех x верно $a_1(x, y) = a_1(-x, y)$ и $a_2(x, y) + a_1(x, y) = a_2(2 - x, y) + a_1(2 - x, y)$.

Решение. Для каждого пути s обозначим через $f(s)$ отражение s относительно оси Oy . Тогда если s ведёт в (x, y) , то $f(s)$ ведёт в $(-x, y)$.

Для каждого пути s обозначим через $g(s)$ путь, состоящий из тех же ходов, что s , но сделанных в обратном порядке. Заметим, что изменение порядка ходов не влияет на то, где путь закончится.

Теперь рассмотрим такой путь s в (x, y) , что $t(s)$ нечётно. Последний ход s направлен влево-вверх. Таким образом, последний ход $f(s)$ направлен вправо-вверх, значит первый ход $g(f(s))$ направлен вправо-вверх. Таким образом, $f \circ g$ — это биекция между путями в (x, y) с нечётным числом поворотов, начинающихся ходом вправо-вверх, и путями в $(-x, y)$ с нечётным числом поворотов, начинающихся ходом вправо-вверх.

Второе равенство можно доказать с помощью результата из задачи 4:

$$a_1(x, y) + a_2(x, y) = \sqrt{2} \cdot a_1(x - 1, y + 1) = \sqrt{2} \cdot a_1(1 - x, y + 1) = a_1(2 - x, y) + a_2(2 - x, y).$$

Замечание. Эти равенства также можно доказать индукцией по y , используя задачу 4. Также из формулы для $a_2(x, y)$ из задачи 9 следует, что для всех x, y верно: $(y - x) a_2(x, y) = (y + x - 2) a_2(2 - x, y)$. Если вы найдёте комбинаторное доказательство последней формулы, то, пожалуйста, сообщите нам.

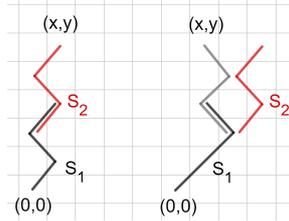
7. *Ответ:* для всех $0 < y' < y$ верно:

$$a_1(x, y) = \sum_{x'} [a_2(x', y') a_1(x' - x + 1, y - y' + 1) + a_1(x', y') a_2(x - x' + 1, y - y' + 1)],$$

$$a_2(x, y) = \sum_{x'} [a_2(x', y') a_2(x - x' + 1, y - y' + 1) - a_1(x', y') a_1(x - x' - 1, y - y' + 1)].$$

Искомое выражение для $\vec{a}(x, 199)$ получается при $y = 199$ и $y' = 100$.

Решение. Зафиксируем натуральное $y' < y$. Рассмотрим путь s из $(0, 0)$ в (x, y) . Обозначим через (x', y') клетку, по которой s пересекается со строкой $y = y'$. Обозначим через s_1 часть пути s , которая ведёт из $(0, 0)$ в (x', y') , а через s_2 часть пути s , которая начинается в строке $y = y' - 1$ и заканчивается в (x, y) . Сдвинем s_2 так, чтобы он начинался с $(0, 0)$.



Обозначим через $\vec{a}(s) = (a_1(s), a_2(s))$. Тогда

$$a_1(s) = \begin{cases} a_1(s_1) a_2(s_2) & \text{если ход в } (x', y') \text{ направлен влево-вверх,} \\ a_2(s_1) a_1(s_2) & \text{если ход в } (x', y') \text{ направлен вправо-вверх,} \end{cases}$$

$$a_2(s) = \begin{cases} -a_1(s_1) a_1(s_2), & \text{если ход в } (x', y') \text{ направлен влево-вверх,} \\ a_2(s_1) a_2(s_2), & \text{если ход в } (x', y') \text{ направлен вправо-вверх.} \end{cases}$$

Таким образом,

$$a_1(x, y) = \sum_s a_1(s) = \sum_{x'} \sum_{s \text{ через } (x', y')} a_1(s) = \sum_{x'} \left[\sum_{\substack{s \text{ через } (x', y'), \\ \text{ход в } (x', y') \\ \text{направлен вправо-вверх}}} a_2(s_1) a_1(s_2) + \sum_{\substack{s \text{ through } (x', y'), \\ \text{ход в } (x', y') \\ \text{направлен влево-вверх}}} a_1(s_1) a_2(s_2) \right]$$

$$= \sum_{x'} [a_2(x', y') a_1(x' - x + 1, y - y' + 1) + a_1(x', y') a_2(x' + 1 - x, y - y' + 1)].$$

Формула для $a_2(x, y)$ доказывается аналогично.

Замечание. Формулы, иллюстрирующие принцип Гюйгенса, имеют вид свёртки. В комбинаторике *свёрткой* двух последовательностей $\{a_k\}$ и $\{b_l\}$ ($k, l \geq 0$) называется последовательность $\{c_n\}$ ($n \geq 0$), задаваемая

равенством $c_n = \sum_{k+l=n} a_k b_l$. Свёртке двух последовательностей соответствует произведение их производящих функций: если

$$A(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k, \quad B(t) = \sum_{l=0}^{\infty} b_l t^l, \quad C(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n,$$

то $C(t) = A(t)B(t)$. Поэтому, правильно подобрав производящие функции, можно записать принцип Гюйгенса в более компактной форме.

Рассмотрим две последовательности многочленов Лорана (то есть многочлены, в которых допускаются также отрицательные степени переменной t):

$$P_n = P_n(t) = \sum_{m=-n+2}^n a_1(m, n) t^m, \quad Q_n = Q_n(t) = \sum_{m=-n+2}^n a_2(m, n) t^m.$$

Эти многочлены можно воспринимать, как производящие функции последовательностей $a_{1,2}(m, n)$ с фиксированным n . Из ответов к задачам 6 и 7 мы имеем

$$\begin{aligned} a_2(x, y) &= \sum_{x'} [a_2(x', y') a_2(x - x' + 1, y - y' + 1) - a_1(x', y') a_1(x' - x + 1, y - y' + 1)] = \\ &= \sum_{x'} [a_2(x', y') a_2(x - x' + 1, y - y' + 1) - a_1(x', y') a_1(x - x' - 1, y - y' + 1)]. \end{aligned}$$

Эта формула равносильна следующей *теореме сложения* для многочленов Q_n :

$$Q_{n+m} = \frac{1}{t} Q_n Q_{m+1} - t P_n P_{m+1}.$$

Также из задач 6 и 7 мы получаем

$$\begin{aligned} a_1(x, y) &= \sum_{x'} [a_2(x', y') a_1(x - x' + 1, y - y' + 1) + a_1(x', y') a_2(x' - x + 1, y - y' + 1)] = \\ &= \sum_{x'} [a_2(x', y') a_1(x - x' + 1, y - y' + 1) + \\ &+ a_1(x', y') (a_2(x - x' + 1, y - y' + 1) + a_1(x - x' + 1, y - y' + 1) - a_1(x - x' - 1, y - y' + 1))]. \end{aligned}$$

Эта формула равносильна следующей *теореме сложения* для многочленов P_n :

$$P_{n+m} = \frac{1}{t} (Q_n P_{m+1} + P_n Q_{m+1}) + \left(\frac{1}{t} - t \right) P_n P_{m+1}.$$

В частности, подставив $m = 1$, мы получим уравнение Дирака, записанное в терминах многочленов P_n и Q_n :

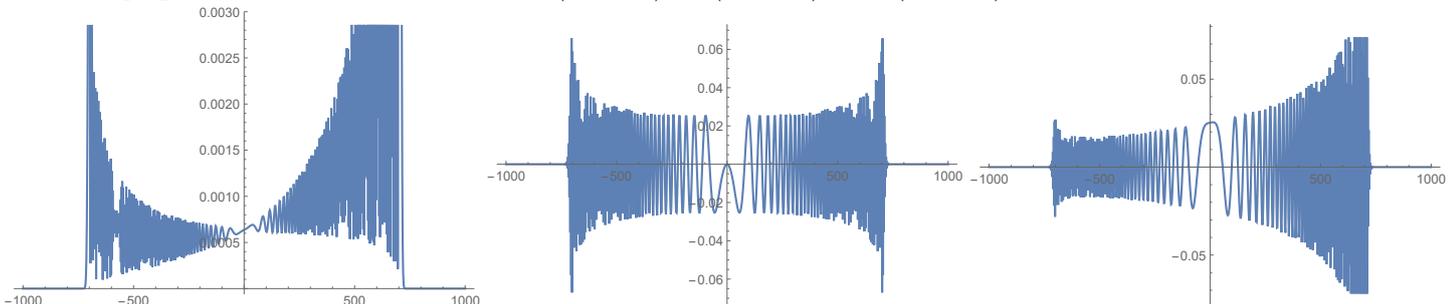
$$\begin{cases} P_{n+1} &= \frac{1}{t} Q_n P_2 + P_n \cdot \left(\frac{1}{t} Q_2 + \frac{1}{t} P_2 - t P_2 \right) = \frac{1}{t\sqrt{2}} (Q_n + P_n), \\ Q_{n+1} &= \frac{1}{t} Q_n Q_2 - t P_n P_2 = \frac{t}{\sqrt{2}} (Q_n - P_n). \end{cases}$$

Отсюда непосредственно следует, что

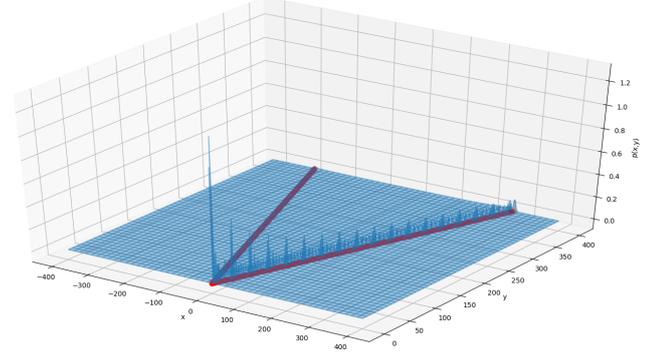
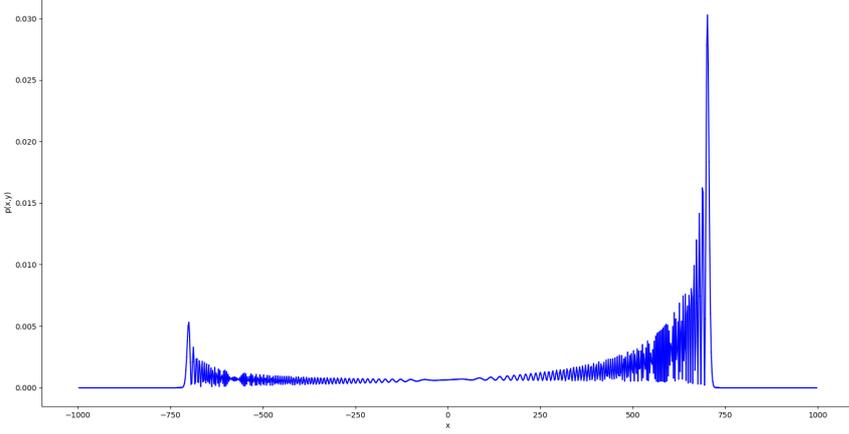
$$\begin{cases} t\sqrt{2}P_{n+1} - Q_n &= P_n = Q_n - \frac{\sqrt{2}}{t}Q_{n+1} \\ t\sqrt{2}P_{n+1} - P_n &= Q_n = P_n + \frac{\sqrt{2}}{t}Q_{n+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_{n+1} &= \frac{\sqrt{2}}{t}Q_n - \frac{Q_{n+1}}{t^2} \\ Q_{n+1} &= t^2 P_{n+1} - t\sqrt{2}P_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_{n+1} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(t + \frac{1}{t} \right) P_n - P_{n-1} \\ Q_{n+1} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(t + \frac{1}{t} \right) Q_n - Q_{n-1}. \end{cases}$$

Последняя формула даёт нам ещё одно рекурсивное определение P_n и Q_n .

8. Ответ: графики зависимости от x для $P(x, 1000)$, $a_1(x, 1000)$, и $a_2(x, 1000)$ соответственно:



В графике для $P(x, 1000)$ большие значения не были изображены, чтобы сделать колебания более заметными. Сравните с расположенными ниже графиками $P(x, 1000)$ и $P(x, y)$, на которых большие значения изображены (любезно предоставленными А. Даниярходжановым и Ф. Куяновым, участниками Летней школы «Современная Математика» в Дубне, 2019):



9. Ответ 1: для всех $y > |x|$ верно:

$$a_1(x, y) = 2^{(1-y)/2} \sum_{w \equiv_2 \frac{y-x-2}{2}} (-1)^{\frac{y-x-2+2w \cdot \text{sign}(x)}{4}} \binom{|x|}{w} \binom{\frac{y-|x|-2}{2}}{\frac{y-x-2-2w}{4}},$$

$$a_2(x, y) = 2^{(1-y)/2} \sum_{w \equiv_2 \frac{y-x}{2}} (-1)^{\frac{y-x+2w \cdot \text{sign}(x)}{4}} \binom{|x|}{w} \binom{\frac{y-|x|-2}{2}}{\frac{y-x-2w}{4}};$$

для всех $y = x > 0$ верно:

$$a_1(y, y) = 0,$$

$$a_2(y, y) = 2^{(1-y)/2};$$

для всех $0 < y < |x|$ или $y = -x > 0$ верно:

$$a_1(x, y) = 0,$$

$$a_2(x, y) = 0.$$

Ответ 2: для всех $y > |x|$ верно:

$$a_1(x, y) = 2^{(1-y)/2} \sum_{r=0}^{\lfloor y/2 \rfloor} (-1)^r \binom{(x+y-2)/2}{r} \binom{(y-x-2)/2}{r} =$$

$$a_2(x, y) = 2^{(1-y)/2} \sum_{r=0}^{\lfloor y/2 \rfloor} (-1)^r \binom{(x+y-2)/2}{r} \binom{(y-x-2)/2}{r-1}$$

Для прочих y всё аналогично ответу 1.

Ответ 3. При чётном $p+q$ и $2-q \leq p \leq q$ выполняется²⁵

$$a_1(p, q) = (-1)^q 2^{(q-3)/2} \cdot \sum_{k=\frac{q+|p|-2}{2}}^{q-2} (-2)^{-k} \cdot \frac{k!}{(q-2-k)! \left(\frac{p-q}{2} + 1 + k\right)! \left(k - \frac{p+q}{2} + 1\right)!}$$

$$a_2(p, q) = 2^{(1-q)/2} \cdot \binom{q-1}{\frac{q-p}{2}} - (-1)^q 2^{(q-3)/2} \sum_{k=\frac{q+|p|-2}{2}}^{q-2} (-2)^{-k} \cdot \frac{k!(k+p+1)}{(q-1-k)! \left(\frac{p-q}{2} + 1 + k\right)! \left(k - \frac{p+q}{2} + 1\right)!}$$

²⁵Для знакоков: дроби в этих выражениях равны соответственно

$$\binom{k}{q-2-k, \frac{p-q}{2} + 1 + k, k - \frac{p+q}{2} + 1} \text{ и } \binom{k}{q-2-k, \frac{p-q}{2} + 1 + k, k - \frac{p+q}{2} + 1} \cdot \frac{k+p+1}{q-1-k}.$$

Замечание. Из ответа 2 видно, что для всех $1 \leq k \leq y - 1$ числа $a_1(-y + 2k, y)$ и $a_2(-y + 2k, y)$ равны коэффициентам при t^{y-k-1} и t^{y-k} в разложении $2^{(1-y)/2}(1+t)^{y-k-1}(1-t)^{k-1}$. В частности,

$$\begin{aligned} a_1(0, 4n+2) &= \frac{(-1)^n}{2^{(4n+1)/2}} \binom{2n}{n}, & a_1(0, 4n) &= 0, \\ a_2(0, 4n+2) &= 0, & a_2(0, 4n) &= \frac{(-1)^n}{2^{(4n-1)/2}} \binom{2n-1}{n}. \end{aligned}$$

Суммы в формулах для $a_1(x, y)$ и $a_2(x, y)$ для $y > |x|$ являются частными случаями хорошо известных *гипергеометрических функций* (но знакомство с ними не требуется для дальнейшего):

$$\begin{aligned} a_1(x, y) &= 2^{(1-y)/2} {}_2F_1 \left(1 - \frac{x+y}{2}, 1 + \frac{x-y}{2}, 1; -1 \right), \\ a_2(x, y) &= 2^{(1-y)/2} \left(1 - \frac{x+y}{2} \right) {}_2F_1 \left(2 - \frac{x+y}{2}, 1 + \frac{x-y}{2}, 2; -1 \right). \end{aligned}$$

Указание. Сначала докажем формулы из ответа 2. Вычислим $a_1(x, y)$ для $y > |x|$. Нам достаточно рассматривать только пути с нечётным числом поворотов (остальные не влияют на $a_1(x, y)$). Обозначим через R и L количество ходов вправо-вверх и влево-вверх соответственно. Эти числа однозначно определяются условиями $L + R = y$ и $R - L = x$. Обозначим через $2r + 1$ количество поворотов в пути. Обозначим через x_1, x_2, \dots, x_{r+1} количество ходов вправо-вверх *перед* первым, третьим, \dots , последним поворотом соответственно. Обозначим через y_1, y_2, \dots, y_{r+1} количество ходов влево-вверх *после* первого, третьего, \dots , последнего поворота соответственно. Тогда $x_k, y_k \geq 1$ для всех $1 \leq k \leq r + 1$ и

$$\begin{aligned} R &= x_1 + \dots + x_{r+1}; \\ L &= y_1 + \dots + y_{r+1}. \end{aligned}$$

С другой стороны, каждый набор натуральных чисел $(x_1, x_2, \dots, x_{r+1}, y_1, y_2, \dots, y_{r+1})$, удовлетворяющий полученным уравнениям, однозначно определяет путь из $(0, 0)$ в (x, y) с нечётным числом поворотов.

Мы свели задачу к комбинаторной: найти количество натуральных решений двух полученных уравнений. Для первого уравнения это количество равно количеству способов поставить r перегородок между R шарами, то есть, $\binom{R-1}{r}$. Тогда

$$a_1(x, y) = 2^{(1-y)/2} \sum_{r=0}^{\lfloor y/2 \rfloor} (-1)^r \binom{R-1}{r} \binom{L-1}{r}.$$

Так как $L + R = y$ и $R - L = x$, мы вывели искомую формулу из ответа 2.

Формулу для $a_1(x, y)$ из ответа 1 можно вывести, пользуясь многочленом из замечания после ответа. В зависимости от знака x мы получаем:

$$2^{(1-y)/2}(1+t)^{y-k-1}(1-t)^{k-1} = \begin{cases} 2^{(1-y)/2}(1-t^2)^{\frac{y-x-2}{2}}(1-t)^x, & \text{при } x \geq 0; \\ 2^{(1-y)/2}(1-t^2)^{\frac{y+x-2}{2}}(1+t)^{-x}, & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Для всех $|x| < y$ числа $a_1(x, y)$ и $a_2(x, y)$ равны коэффициентам при $t^{\frac{x-y-2}{2}}$ и $t^{\frac{x-y}{2}}$ в разложении этих многочленов. Разбирая случаи $x \geq 0$ и $x < 0$ по отдельности, мы сразу получаем искомую формулу.

Доказательство формул для $a_2(x, y)$ при $y > |x|$ аналогично. Случай $y \leq |x|$ очевиден.

Решение Александра Кудрявцева, участника Летней конференции Турнира городов.

Докажем ответ 3. Обозначим $c_{p,q} = a_1(2p-q+1, q+1) \cdot 2^{q/2}$, $d_{p,q} = a_2(2p-q+1, q+1) \cdot 2^{q/2}$ (они определены корректно при $0 \leq p \leq q-1$). Обозначим через $C(x, y), D(x, y)$ производящие функции для $c_{p,q}$ и $d_{p,q}$. Из ответа к задаче 4 получаем следующие уравнения:

$$\begin{cases} \frac{C(x, y) - C(x, 0)}{y} = D(x, y) + C(x, y) \\ \frac{D(x, y) - D(x, 0)}{y} = x \cdot (D(x, y) - C(x, y)) \end{cases}$$

Так как $C(x, 0) = 0$ и $D(x, 0) = 1$, то

$$\begin{cases} C(x, y) = y \cdot (D(x, y) + C(x, y)) \\ D(x, y) - 1 = xy \cdot (D(x, y) - C(x, y)) \end{cases}$$

Решив систему, получаем $C(x, y) = \frac{y}{1 - y - xy + 2xy^2}$ и $D(x, y) = \frac{1 - y}{1 - y - xy + 2xy^2}$. Тогда

$$\frac{C(x, y)}{y} = \frac{D(x, y)}{1 - y} = 1 + y(1 + x - 2xy) + y^2(1 + x - 2xy)^2 + \dots$$

Обозначим это выражение через $E(x, y)$ и запишем его коэффициент при $x^n \cdot y^m$ (при $n \leq m$, иначе он равен 0):

$$\sum_{k=\max(n, m-n)}^m (-2)^{m-k} \cdot \frac{k!}{(m-k)!(n-m+k)!(k-n)!},$$

действительно, из каждого слагаемого вида $y^k(1+x-2xy)^k$ можно взять ровно одну комбинацию множителей:

- чтобы степень при y была равна m , множителей $-2xy$ должно быть $m - k$;
- чтобы степень при x была равна n , множителей x должно быть $n - (m - k)$;
- чтобы всего множителей было k , множителей 1 должно быть $k - (n - (m - k)) - (m - k) = k - n$.

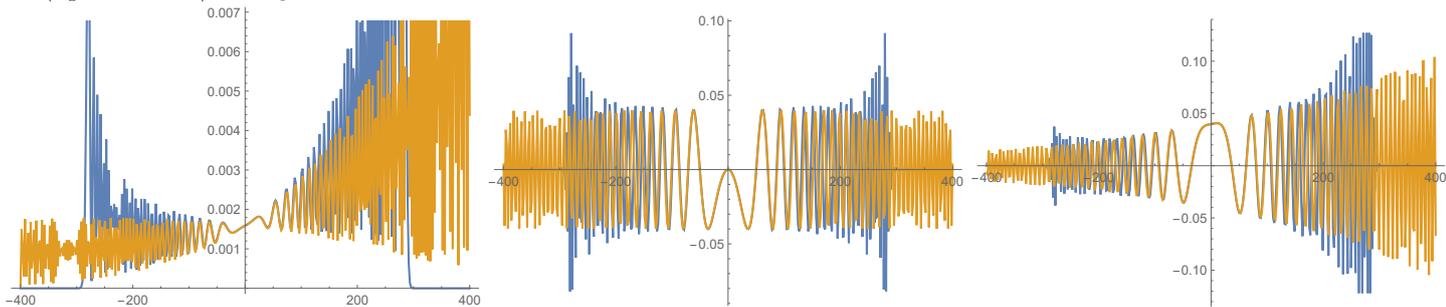
Количество же способов выбрать $m - k$, $k - n$ и $n - (m - k)$ скобок равно дроби справа.

Теперь из соотношений $C(x, y) = y \cdot E(x, y)$, $D(x, y) = E(x, y) - C(x, y)$ несложно вывести ответ 3.

10. Ответ:

$$\vec{a}(x, y) = \frac{\sqrt{2} \left(\sin \left(\frac{\pi y}{4} - \frac{x^2}{2y} \right), e^{x/y} \cos \left(\frac{\pi y}{4} + \frac{x(2-x)}{2y} \right) \right)}{\sqrt{\pi y}} + O \left(\frac{\log^2 y}{y} \right) \text{ при } |x| = O(\sqrt{y}).$$

Замечание. Сравните графики $P(x, 400)$, $a_1(x, 400)$ и $a_2(x, 400)$ (синие) с их приближениями в правой части (оранжевые) для $y = 400$:



Решение: Заметим, что по задаче 9

$$\begin{aligned} a_2(-n + 2k + 1, n + 1) &= 2^{-n/2} [x^{k-1}] (-1)^k (1+x)^{n-k-1} (1-x)^k; \\ a_1(-n + 2k + 1, n + 1) &= 2^{-n/2} [x^k] (-1)^k (1+x)^{n-k-1} (1-x)^k. \end{aligned}$$

Поэтому

$$a_2(-n + 2k + 1, n + 1) = 2^{-n/2} (-1)^k \int_0^1 (1 + e^{2\pi i t})^{n-k-1} (1 - e^{2\pi i t})^k e^{-2\pi i (k-1)t} dt.$$

Для нечетного n определим $l = k - \frac{n-1}{2}$. Тогда

$$a_2(-n + 2k + 1, n + 1) = \frac{i^k}{\sqrt{2}} \int_0^1 (\sin(2\pi t))^{\frac{n-1}{2}} (\operatorname{tg}(\pi t))^l e^{-2\pi i (l-1)t} dt.$$

Поскольку $l \ll n$, с хорошей точностью можем вычислять интеграл только в окрестностях $(1/4 - \delta, 1/4 + \delta)$, $(3/4 - \delta, 3/4 + \delta)$.

Определим $U \ll \sqrt{n \log n}$, $|l| \leq U$.

Пусть в окрестности точки $1/4$ переменная $t = 1/4 + \tau$, $|\tau| \leq \delta$,

$$\begin{aligned} \sin(2\pi t) &= \cos(2\pi \tau) = 1 - 2\pi^2 \tau^2 + O(\tau^4) = e^{-2\pi^2 \tau^2} + O(\tau^4); \\ \operatorname{tg}(\pi t) &= 1 + 2\pi \tau + O(\tau^2) = e^{2\pi \tau} + O(\tau^2); \\ e^{-2\pi i (l-1)t} &= i^{1-l} e^{-2\pi i (l-1)\tau}, \end{aligned}$$

тогда получим

$$\frac{i^{k+1-l}}{\sqrt{2}} \int_{-\delta}^{\delta} (e^{-2\pi^2 \tau^2} + O(\tau^4))^{\frac{n-1}{2}} (e^{2\pi \tau} + O(\tau^2))^l e^{-2\pi i (l-1)\tau} d\tau. \quad (*)$$

Так как $n\tau^4 \ll 1$ и $l\tau^2 \ll 1$, то есть $n\delta^4 \ll 1$ и $U\delta^2 \ll 1$, то

$$(*) = \frac{i^{\frac{n+1}{2}}}{\sqrt{2}} \int_{-\delta}^{\delta} (e^{-(n-1)\pi^2\tau^2} + O(\tau^4))(e^{2\pi\tau l} + O(\tau^2))e^{-2\pi i(l-1)\tau} d\tau.$$

Если раскрыть скобки, то получим слагаемое $O(n\tau^4 e^{2\pi l\tau}) = O(n\delta^4 e^{2\pi U\delta}) = O(n^{-\Delta})$, если потребовать $U\delta \ll \log n$. Следовательно,

$$(*) = \frac{i^{\frac{n+1}{2}}}{\sqrt{2}} \int_{-\delta}^{\delta} (e^{-(n-1)\pi^2\tau^2 + 2\pi\tau l - 2\pi i(l-1)\tau} + O(n^{-\Delta}) + O(U\delta^2)) d\tau.$$

Теперь оценим остаток:

$$\int_{\delta}^{\infty} e^{-(n-1)\pi^2\tau^2 + 2\pi\tau l} d\tau = \int_{\delta}^{\infty} e^{-(n-1)\pi^2(\tau - \frac{l}{\pi(n-1)})^2 + \frac{l^2}{n-1}} d\tau \ll \int_{\delta}^{\infty} e^{-(n-1)\pi^2\frac{\tau^2}{4} + \frac{l^2}{n-1}} d\tau \leq \frac{1}{\sqrt{n-1}} e^{-(n-1)\delta^2},$$

поскольку $\frac{\tau}{2} \geq \frac{l}{\pi(n-1)}$, то есть $\delta \geq U/(n-1)$.

Значит, необходимым является условие $n\delta^2 \gg \log n$. Теперь вычислим

$$\begin{aligned} (*) &= \frac{i^{\frac{n+1}{2}}}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(n-1)\pi^2\tau^2 + 2\pi\tau l - 2\pi i(l-1)\tau} d\tau + O(n^{-\Delta}) + O(U\delta^3) = \\ &= \frac{i^{\frac{n+1}{2}}}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(n-1)\pi^2\tau^2 + 2\pi\tau l - 2\pi i(l-1)\tau} d\tau + O(\log^2 n/n), \end{aligned}$$

так как $U\delta^3 \ll \log n \cdot \delta^2 \ll \log^2 n/n$.

В конце концов, по формуле $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2 + bt} dt = \sqrt{\pi/a} e^{b^2/4a}$ вычислим

$$(*) = \frac{i^{\frac{n+1}{2}}}{\sqrt{2\pi(n-1)}} e^{\frac{(2l-1) - 2i(l-1)}{n-1}} + O(\log^2 n/n).$$

В окрестности точки $3/4$ интеграл равен $\frac{i^{\frac{3n+1}{2}}}{\sqrt{2}} e^{\frac{(2l-1) + 2i(l-1)}{n-1}}$ и, поскольку $3\frac{n+1}{2} \equiv -\frac{n+1}{2} \pmod{4}$,

$$\begin{aligned} a_2(-n + 2k + 1, n + 1) &= e^{2l-1} \sqrt{\frac{2}{\pi(n-1)}} \cos\left(\frac{\pi(n+1)}{4} - \frac{2l^2}{n-1} + -\frac{2l}{n-1}\right) + O(\log^2 n/n) = \\ &= -e^{2l-1} \sqrt{\frac{2}{\pi(n-1)}} \sin\left(\frac{\pi(n-1)}{4} - \frac{2l^2}{n-1} + \frac{2l}{n-1}\right) + O(\log^2 n/n). \end{aligned}$$

Аналогично,

$$a_1(-n + 2k + 1, n + 1) = \sqrt{\frac{2}{\pi(n-1)}} \cos\left(\frac{\pi(n-1)}{4} - \frac{2l^2}{n-1}\right) + O(\log^2 n/n).$$

Для четного n ответ следующий:

$$\begin{aligned} a_2(-n + 2k + 1, n + 1) &= e^{2l} \sqrt{\frac{2}{\pi(n-2)}} \cos\left(\frac{\pi(n+1)}{4} - \frac{2(l^2 - 1/4)}{n-2}\right) + O(\log^2 n/n); \\ a_1(-n + 2k + 1, n + 1) &= \sqrt{\frac{2}{\pi(n-2)}} \sin\left(\frac{\pi(n+1)}{4} - \frac{2(l + 1/2)^2}{n-2}\right) + O(\log^2 n/n), \end{aligned}$$

где $l = k - n/2$.

11. Ответ: $P(x, y) = P(x, y, +) + P(x, y, -)$; $\vec{a}(x, y, +) = (0, a_2(x, y))$; $\vec{a}(x, y, -) = (a_1(x, y), 0)$.

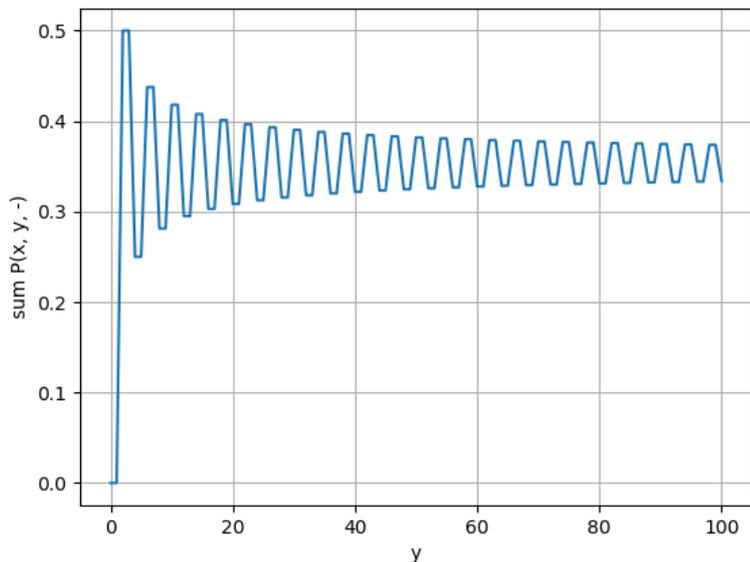
Решение. Заметим, что если путь s из $(0, 0)$ в (x, y) заканчивается ходом влево-вверх, то шаг меняет направление нечётное число раз. Тогда $\vec{a}(s) = (\pm 2^{\frac{1-y}{2}}, 0)$. Аналогично, если путь s заканчивается ходом вправо-вверх, то $\vec{a}(s) = (0, \pm 2^{\frac{1-y}{2}})$. Таким образом, $\vec{a}(x, y, +) = (0, a_2(x, y))$ и $\vec{a}(x, y, -) = (a_1(x, y), 0)$.

Отсюда можно напрямую получить формулу для вероятности:

$$P(x, y) = |\vec{a}(x, y, +) + \vec{a}(x, y, -)|^2 = a_1^2(x, y) + a_2^2(x, y) = P(x, y, +) + P(x, y, -).$$

12. Ответ: для всех натуральных $y \geq 2$ верно: $P(y, -) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\lfloor y/2 \rfloor - 1} \frac{1}{(-4)^k} \binom{2k}{k}$. Также $\max_y P(y, -) = P(2, -) = P(3, -) = 1/2$ и $\lim_{y \rightarrow \infty} P(y, -) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Замечание. График последовательности, любезно предоставленный Глебом Минаевым и Иваном Русских, участниками Летней конференции Турнира Городов:



Решение. Обозначим

$$S_1(y) := \sum_x a_1^2(x, y); \quad S_2(y) := \sum_x a_2^2(x, y); \quad S_{12}(y) := \sum_x a_1(x, y)a_2(x, y).$$

По задаче 5 для всех $y > 0$ верно:

$$S_1(y) + S_2(y) = 1.$$

Из ответов к задачам 4, 6 и 7 следует:

$$a_1(0, 2y) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_x a_1(x, y)(a_2(x, y) - a_1(x, y)) + a_2(x, y)(a_2(x, y) + a_1(x, y)) = \frac{1}{\sqrt{2}}(S_2(y) + 2S_{12}(y) - S_1(y)).$$

По определению и ответу к задаче 4 получаем:

$$S_1(y+1) - S_2(y+1) = 2S_{12}(y).$$

Тогда

$$S_1(y+1) - S_2(y+1) = S_1(y) - S_2(y) + a_1(0, 2y)\sqrt{2}.$$

Так как $S_1(y) + S_2(y) = 1$, мы получили рекуррентную формулу $S_1(y+1) = S_1(y) + \frac{1}{\sqrt{2}}a_1(0, 2y)$.

Из замечания к решению задачи 9 по индукции следует, что

$$S_1(y) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\lfloor y/2 \rfloor - 1} \frac{1}{(-4)^k} \binom{2k}{k}.$$

Осталось заметить, что $P(y, -) = S_1(y)$ по задаче 11.

Так как последовательность $\binom{2j}{j} \frac{1}{4^j}$ убывающая, мы получаем: $P(y, -) < P(3, -)$ для всех $y > 3$, так что $\max_y P(y, -) = P(2, -) = P(3, -) = 1/2$.

По биному Ньютона мы получаем: $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k} x^k = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}$ для всех $x \in [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$. Подставляя $x = -\frac{1}{4}$, мы получаем $\lim_{y \rightarrow \infty} P(y, -) = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k} \left(-\frac{1}{4}\right)^k = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Замечание. С помощью формулы Стирлинга (см. §2) можно оценить скорость сходимости:

$$|P(k, -) - \lim_{y \rightarrow \infty} P(y, -)| < \frac{1}{2 \cdot 4^{\lfloor k/2 \rfloor}} \binom{2\lfloor k/2 \rfloor}{\lfloor k/2 \rfloor} \leq \frac{e}{2\pi\sqrt{2\lfloor k/2 \rfloor}} < \frac{1}{2\sqrt{k}}.$$

13. Ответ:

$$P(x, y, 0, +) = \begin{cases} 1, & \text{при } x = y; \\ 0, & \text{при } x \neq y. \end{cases}$$

$$P(x, y, \infty, +) = \begin{cases} 1, & \text{при } x = 1, y \equiv 1 \pmod{2}; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Решение. Если количество поворотов ну пути s ненулевое, то по определению $\vec{a}(s, 0) = 0$. Тогда $\vec{a}(x, y, 0, +) \neq 0$ если и только если $x = y$. Случай $x = y$ очевиден.

Ответ для $P(x, y, \infty, +)$ нельзя *доказать*, поскольку он является определением. Но мы можем объяснить, почему было выбрано именно такое определение. Если $m\varepsilon$ ‘очень большой’, то $\vec{a}(s, m\varepsilon)$ будет ‘маленьким’, если только шаг не поворачивает после каждого хода.

Замечание. $P(x, y, \infty, +) = \lim_{m\varepsilon \rightarrow \infty} P(x, y, m\varepsilon, +)$.

В самом деле,

$$\lim_{m\varepsilon \rightarrow \infty} |\vec{a}(s, m\varepsilon)| = \lim_{m\varepsilon \rightarrow \infty} \frac{(m\varepsilon)^{t(s)}}{(\sqrt{1 + (m\varepsilon)^2})^{y-1}} = \lim_{m\varepsilon \rightarrow \infty} \frac{1}{(\sqrt{1 + (m\varepsilon)^2})^{y-1-t(s)}} = \begin{cases} 1, & \text{при } t(s) = y - 1; \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases}$$

где $t(s)$ равно количеству поворотов на пути s . Для вычисления $P(x, y, m\varepsilon, +)$ достаточно рассматривать только пути s с $t(s) \equiv 0 \pmod{2}$, откуда мы и получаем ответ.

14. Ответ. Обозначим через $a_1(x, y, m\varepsilon, -)$, $a_2(x, y, m\varepsilon, -)$ и $a_1(x, y, m\varepsilon, +)$, $a_2(x, y, m\varepsilon, +)$ первую и вторую координаты векторов $\vec{a}(x, y, m\varepsilon, -)$ и $\vec{a}(x, y, m\varepsilon, +)$ соответственно (см. соглашение в начале раздела «Указания, ответы, решения»). Тогда:

$$\begin{aligned} a_1(x, y, m\varepsilon, -) &= \frac{1}{\sqrt{1 + m^2\varepsilon^2}} (a_1(x + 1, y - 1, m\varepsilon, -) + m\varepsilon a_2(x + 1, y - 1, m\varepsilon, +)), \\ a_2(x, y, m\varepsilon, +) &= \frac{1}{\sqrt{1 + m^2\varepsilon^2}} (a_2(x - 1, y - 1, m\varepsilon, +) - m\varepsilon a_1(x - 1, y - 1, m\varepsilon, -)), \\ a_2(x, y, m\varepsilon, -) &= a_1(x, y, m\varepsilon, +) = 0. \end{aligned}$$

Для всех $y > |x|$ верно:

$$\begin{aligned} a_1(x, y, m\varepsilon) &= (1 + m^2\varepsilon^2)^{(1-y)/2} \sum_{r=0}^{\lfloor y/2 \rfloor} (-1)^r \binom{(x+y-2)/2}{r} \binom{(y-x-2)/2}{r} (m\varepsilon)^{2r+1}, \\ a_2(x, y, m\varepsilon) &= (1 + m^2\varepsilon^2)^{(1-y)/2} \sum_{r=0}^{\lfloor y/2 \rfloor} (-1)^r \binom{(x+y-2)/2}{r} \binom{(y-x-2)/2}{r-1} (m\varepsilon)^{2r}; \end{aligned}$$

Для всех $y = x > 0$ верно:

$$\begin{aligned} a_1(y, y, m\varepsilon) &= 0, \\ a_2(y, y, m\varepsilon) &= (1 + m^2\varepsilon^2)^{(1-y)/2}; \end{aligned}$$

Для всех $0 < y < |x|$ или $y = -x > 0$ верно

$$\begin{aligned} a_1(x, y, m\varepsilon) &= 0, \\ a_2(x, y, m\varepsilon) &= 0. \end{aligned}$$

Решение. Сначала решим аналог задачи 4 для произвольного $m\varepsilon$. Выведем формулу для $a_2(x, y, m\varepsilon, +)$. Рассмотрим произвольный путь s из $(0, 0)$ в (x, y) .

Последний ход пути s сделан либо из $(x-1, y)$, либо из $(x+1, y)$. Обозначим через s' путь s без последнего хода. Если направления последних ходов y s и s' совпадают, то $\vec{a}(s, m\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}} \vec{a}(s', m\varepsilon)$, иначе $\vec{a}(s, m\varepsilon) = \frac{m\varepsilon}{\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}} (a_2(s', m\varepsilon), -a_1(s', m\varepsilon))$.

Таким образом, $a_2(x, y, m\varepsilon, +) = \frac{1}{\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}} (a_2(x-1, y-1, m\varepsilon, +) - m\varepsilon a_1(x-1, y-1, m\varepsilon, -))$. Формула для $a_1(x, y, m\varepsilon, -)$ доказывается аналогично. То, что $a_2(x, y, m\varepsilon, -) = a_1(x, y, m\varepsilon, +) = 0$, очевидно.

Теперь решим аналог задачи 5: мы докажем, что $\sum_{x \in \mathbb{Z}} P(x, y, m\varepsilon) = 1$ для всех $y \geq 1$ индукцией по y , используя полученные формулы. Очевидно, $\sum_{x \in \mathbb{Z}} P(x, 1, m\varepsilon) = 1$. Шаг индукции сразу следует из следующих

вычислений:

$$\begin{aligned}
\sum_{x \in \mathbb{Z}} P(x, y+1, m\varepsilon) &= \\
&= \sum_{x \in \mathbb{Z}} [a_1(x, y+1, m\varepsilon, -)^2 + a_2(x, y+1, m\varepsilon, +)^2] = \\
&= \sum_{x \in \mathbb{Z}} a_1(x, y+1, m\varepsilon, -)^2 + \sum_{x \in \mathbb{Z}} a_2(x, y+1, m\varepsilon, +)^2 = \\
&= \frac{1}{1+m^2\varepsilon^2} \sum_{x \in \mathbb{Z}} (a_1(x+1, y, m\varepsilon, -) + m\varepsilon a_2(x+1, y, m\varepsilon, +))^2 + \\
&+ \frac{1}{1+m^2\varepsilon^2} \sum_{x \in \mathbb{Z}} (a_2(x-1, y, m\varepsilon, +) - m\varepsilon a_1(x-1, y, m\varepsilon, -))^2 = \\
&= \frac{1}{1+m^2\varepsilon^2} \sum_{x \in \mathbb{Z}} (a_1(x, y, m\varepsilon, -) + m\varepsilon a_2(x, y, m\varepsilon, +))^2 + \frac{1}{1+m^2\varepsilon^2} \sum_{x \in \mathbb{Z}} (a_2(x, y, m\varepsilon, +) - m\varepsilon a_1(x, y, m\varepsilon, -))^2 = \\
&= \sum_{x \in \mathbb{Z}} [a_1(x, y, m\varepsilon, -)^2 + a_2(x, y, m\varepsilon, +)^2] = \sum_{x \in \mathbb{Z}} P(x, y, m\varepsilon).
\end{aligned}$$

Решим аналог задачи 9 для произвольного $m\varepsilon$. Найдём $a_1(x, y)$ для всех $y > |x|$. Нам достаточно рассмотреть пути с нечётным количеством поворотов. Обозначим через $2r+1$ количество поворотов в пути. Обозначим через R и L количество ходов вправо-вверх и влево-вверх соответственно. Обозначим через x_1, x_2, \dots, x_{r+1} количество ходов вправо-вверх *перед* первым, третьим, \dots , последним поворотом соответственно. Обозначим через y_1, y_2, \dots, y_{r+1} количество ходов влево-вверх *после* первого, третьего, \dots , последнего поворота соответственно. Тогда $x_k, y_k \geq 1$ для всех $1 \leq k \leq r+1$ и

$$\begin{aligned}
R &= x_1 + \dots + x_{r+1}; \\
L &= y_1 + \dots + y_{r+1}.
\end{aligned}$$

Мы свели задачу к комбинаторной: найти количество натуральных решений двух полученных уравнений. Для первого уравнения это количество равно количеству способов поставить r перегородок между R шарами, то есть, $\binom{R-1}{r}$. Тогда:

$$a_1(x, y, m\varepsilon) = (1+m^2\varepsilon^2)^{(1-y)/2} \sum_{r=0}^{\lfloor y/2 \rfloor} (-1)^r \binom{R-1}{r} \binom{L-1}{r} (m\varepsilon)^{2r+1}.$$

Так как $L+R=y$ и $R-L=x$, мы получили искомую формулу. Доказательство формулы для $a_2(x, y)$ при $y > |x|$ аналогично. Случай $y \leq |x|$ очевиден.

15. Ответ: при $|x| < y$ верно

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} n \vec{a} \left(2 \left\lfloor \frac{nx}{2} \right\rfloor, 2 \left\lfloor \frac{ny}{2} \right\rfloor, \frac{m}{n}, - \right) &= (m J_0(m\sqrt{y^2-x^2}), 0); \\
\lim_{n \rightarrow \infty} n \vec{a} \left(2 \left\lfloor \frac{nx}{2} \right\rfloor, 2 \left\lfloor \frac{ny}{2} \right\rfloor, \frac{m}{n}, + \right) &= \left(0, -m \frac{x+y}{\sqrt{y^2-x^2}} J_1(m\sqrt{y^2-x^2}) \right);
\end{aligned}$$

при $|x| \geq y$ оба предела равны 0.

Замечание. Этот предел совпадает с запаздывающим фундаментальным решением уравнения Дирака, описывающего движение электрона по плоскости.

Решение. Определим *модифицированные функции Бесселя*

$$I_0(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2k}}{(k!)^2} \quad \text{и} \quad I_1(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2k+1}}{k!(k+1)!}.$$

Ответ следует из более сильной теоремы 2.

Теорема 2. Если $0 < \varepsilon_0 \leq 1/2$, $\min\{y+x, y-x\} \geq \varepsilon_0$, $z := m\sqrt{y^2-x^2}$, $n \geq n_0 = n_0(z, \varepsilon_0) = 4e^{3z}/\varepsilon_0^2$, то

$$\begin{aligned}
a_1 \left(2 \left\lfloor \frac{nx}{2} \right\rfloor, 2 \left\lfloor \frac{ny}{2} \right\rfloor, \frac{m}{n}, - \right) &= \frac{m}{n} \left(J_0(z) + O \left(\frac{\log^2 n}{\varepsilon_0 n} I_0(z) \right) \right), \\
a_2 \left(2 \left\lfloor \frac{nx}{2} \right\rfloor, 2 \left\lfloor \frac{ny}{2} \right\rfloor, \frac{m}{n}, + \right) &= -\frac{m}{n} \frac{y+x}{\sqrt{y^2-x^2}} \left(J_1(z) + O \left(\frac{\log^2 n}{\varepsilon_0 n} I_1(z) \right) \right).
\end{aligned}$$

Доказательство. Обозначим через $x_n = 2 \lfloor \frac{nx}{2} \rfloor$, $y_n = 2 \lfloor \frac{ny}{2} \rfloor$. По задаче 9

$$a_1 \left(x_n, y_n, \frac{m}{n}, - \right) = \left(1 + \frac{m^2}{n^2} \right)^{\frac{1-y_n}{2}} \frac{m}{n} \sum_{r=0}^{\lfloor y_n/2 \rfloor} (-1)^r \binom{(y_n+x_n-2)/2}{r} \binom{(y_n-x_n-2)/2}{r} \left(\frac{m}{n} \right)^{2r},$$

$$a_2 \left(x_n, y_n, \frac{m}{n}, + \right) = \left(1 + \frac{m^2}{n^2} \right)^{\frac{1-y_n}{2}} \frac{m}{n} \sum_{r=1}^{\lfloor y_n/2 \rfloor} (-1)^r \binom{(y_n+x_n-2)/2}{r} \binom{(y_n-x_n-2)/2}{r-1} \left(\frac{m}{n} \right)^{2r-1}.$$

Так как $1 + \frac{m^2}{n^2} \leq e^{m^2/n^2}$, то $\left(1 + \frac{m^2}{n^2} \right)^{\frac{1-y_n}{2}} \geq e^{\frac{m^2}{n^2} \left(\frac{1-y_n}{2} \right)}$, потому что $y_n \geq 1$. Также $\frac{1-y_n}{2} \geq \frac{-y_n}{2}$. Отсюда получаем

$$1 \geq \left(1 + \frac{m^2}{n^2} \right)^{\frac{1-y_n}{2}} \geq e^{\frac{m^2}{n^2} \left(\frac{-y_n}{2} \right)} \geq 1 - \frac{m^2 y}{2n}.$$

Значит, $\left(1 + \frac{m^2}{n^2} \right)^{\frac{1-y_n}{2}} = 1 + O\left(\frac{m^2 y}{n}\right)$.

Чтобы найти асимптотику a_1 и a_2 , рассмотрим сумму первых $T := \lfloor \log n \rfloor + 1$ слагаемых. Из неравенств $y \geq \varepsilon_0$ и $n \geq \frac{4}{\varepsilon_0^2}$ следует, что всего слагаемых $\lfloor \frac{y_n}{2} \rfloor \geq T$, потому что $\frac{ny}{2} \geq \sqrt{n} \geq \log n + 1$ при $n > 0$.

При $r \geq T$ отношение последовательных слагаемых в выражениях для a_1 и a_2 равны соответственно

$$\left(\frac{m}{n} \right)^2 \frac{((y_n+x_n-2)/2-r)((y_n-x_n-2)/2-r)}{(r+1)^2} < \left(\frac{m}{n} \right)^2 \cdot \frac{n(y+x)}{2T} \cdot \frac{n(y-x)}{2T} = \frac{z^2}{4T^2},$$

$$\left(\frac{m}{n} \right)^2 \frac{((y_n+x_n-2)/2-r)((y_n-x_n-2)/2-r+1)}{(r-1)r} < \left(\frac{m}{n} \right)^2 \cdot \frac{n(y+x)}{2T} \cdot \frac{n(y-x)}{2T-2} = \frac{z^2}{4T(T-1)}.$$

Из $n > e^{3z+1}$ следует, что $T = \lfloor \log n \rfloor + 1 \geq 3z+1$ и $\frac{z^2}{4T^2} < \frac{z^2}{4T(T-1)} < \frac{1}{2}$. Значит, в обоих случаях остаточный член (то есть сумма по всем $r \geq T$) меньше суммы геометрической прогрессии со знаменателем $\frac{1}{2}$. Значит,

$$a_1 \left(n_x, n_y, \frac{m}{n}, - \right) = \frac{m}{n} \left(1 + O\left(\frac{m^2 y}{n}\right) \right) \cdot \left[\sum_{r=0}^{T-1} (-1)^r \binom{(y_n+x_n-2)/2}{r} \binom{(y_n-x_n-2)/2}{r} \left(\frac{m}{n} \right)^{2r} + O\left(\frac{(y^2-x^2)^T}{(T!)^2} \cdot \left(\frac{m}{2} \right)^{2T} \right) \right],$$

$$a_2 \left(n_x, n_y, \frac{m}{n}, + \right) = \frac{m}{n} \left(1 + O\left(\frac{m^2 y}{n}\right) \right) \cdot \left[\sum_{r=1}^{T-1} (-1)^r \binom{(y_n+x_n-2)/2}{r} \binom{(y_n-x_n-2)/2}{r-1} \left(\frac{m}{n} \right)^{2r-1} + O\left(\frac{(y+x)^T (y-x)^{T-1}}{(T-1)!T!} \cdot \left(\frac{m}{2} \right)^{2T-1} \right) \right].$$

Остаточный член в последней формуле можно оценить следующим образом. Так как $T! \geq (T/3)^T$ и $T \geq \sqrt{y^2-x^2} \frac{3m\sqrt{\varepsilon}}{2} = \frac{3\sqrt{\varepsilon}}{2} z$, то

$$\frac{(y^2-x^2)^T}{(T!)^2} \cdot \left(\frac{m}{2} \right)^{2T} \leq \frac{(y^2-x^2)^T}{(T)^{2T}} \cdot \left(\frac{3m}{2} \right)^{2T} \leq e^{-T} \leq \frac{1}{n}.$$

Теперь преобразуем биномиальные коэффициенты следующим образом:

$$\binom{\alpha n - 1}{r} = \frac{(\alpha n - 1) \cdots (\alpha n - r)}{r!} = \frac{(\alpha n)^r}{r!} \left(1 - \frac{1}{\alpha n} \right) \cdots \left(1 - \frac{r}{\alpha n} \right).$$

Если $\alpha \geq \varepsilon_0$ и $r < T$, то $\frac{r}{\alpha n} < \frac{T}{\alpha n} < \frac{\sqrt{n}}{n\varepsilon_0} = \frac{1}{\sqrt{n\varepsilon_0}} \leq \frac{\varepsilon_0}{2} \cdot \frac{1}{\varepsilon_0} = \frac{1}{2}$. Значит, из неравенства $e^{-2x} \leq 1-x < e^{-x}$ при $0 \leq x \leq 1/2$ следует, что

$$\left(1 - \frac{1}{\alpha n} \right) \cdots \left(1 - \frac{r}{\alpha n} \right) \geq e^{\frac{-2}{\alpha n}} e^{\frac{-4}{\alpha n}} \cdots e^{\frac{-2r}{\alpha n}} = e^{\frac{-r(r+1)}{\alpha n}} \geq e^{\frac{-T^2}{\alpha n}} \geq 1 - \frac{T^2}{\alpha n} \geq 1 - \frac{T^2}{\varepsilon_0 n}.$$

Таким образом, $\binom{\alpha n - 1}{r} = \frac{(\alpha n)^r}{r!} \left(1 + O\left(\frac{T^2}{\varepsilon_0 n}\right) \right)$.

Обозначим через $R = \frac{T^2}{\varepsilon_0 n} I_0(z)$. Подставив полученные выражения для $\binom{y_n+x_n-2}{r}$ и $\binom{y_n-x_n-2}{r}$ в выражение для a_1 , мы получаем

$$\begin{aligned} a_1\left(x_n, y_n, \frac{m}{n}, -\right) &= \frac{m}{n} \left(1 + O\left(\frac{m^2 y}{n}\right)\right) \cdot \left[\sum_{r=0}^{T-1} (-1)^r \left(\frac{m}{2}\right)^{2r} \frac{(y^2 - x^2)^r}{(r!)^2} + O(R) \right] = \\ &= \frac{m}{n} \left(1 + O\left(\frac{m^2 y}{n}\right)\right) \cdot \left[\sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \left(\frac{m}{2}\right)^{2r} \frac{(y^2 - x^2)^r}{(r!)^2} + O(R) \right] = \frac{m}{n} \left(1 + O\left(\frac{m^2 y}{n}\right)\right) \cdot (J_0(z) + O(R)). \end{aligned}$$

Теперь мы можем заменить сумму с T слагаемыми бесконечной суммой, так как “хвост” знакопередающегося ряда с убывающими по модулю слагаемыми можно оценить первым слагаемым:

$$\left| \sum_{r=T}^{\infty} (-1)^r \left(\frac{m}{2}\right)^{2r} \frac{(y^2 - x^2)^r}{(r!)^2} \right| \leq \frac{(z/2)^{2T}}{(T!)^2} \leq \frac{1}{n}$$

(последнее неравенство было доказано ранее).

Так как $m^2 y \varepsilon_0 \leq m^2 \cdot \max\{y+x, y-x\} \cdot \min\{y+x, y-x\} = m^2(y^2 - x^2) = z^2 \leq 9z^2 \leq T^2$, то $\frac{m^2 y}{n} J_0(z) \leq \frac{T^2}{\varepsilon_0 n} I_0(z)$, откуда $a_1\left(x_n, y_n, \frac{m}{n}, -\right) = \frac{m}{n} (J_0(z) + O(R))$, как мы и хотели.

Аналогично,

$$\begin{aligned} a_2\left(x_n, y_n, \frac{m}{n}, +\right) &= \frac{m}{n} \left(1 + O\left(\frac{m^2 y}{n}\right)\right) \cdot \frac{y+x}{\sqrt{y^2 - x^2}} \cdot \left[\sum_{r=1}^{T-1} (-1)^r \left(\frac{m}{2}\right)^{2r-1} \frac{(y^2 - x^2)^{\frac{2r-1}{2}}}{(r-1)!r!} + O\left(\frac{T^2}{\varepsilon_0 n} I_1(z)\right) \right] = \\ &= -\frac{m}{n} \cdot \frac{y+x}{\sqrt{y^2 - x^2}} \left(J_1(z) + O\left(\frac{T^2}{\varepsilon_0 n} I_1(z)\right) \right). \end{aligned}$$

□

Решение Ивана Гайдай-Турлова, Тимофея Ковалёва и Алексея Львова (участников Летней конференции Турнира городов).

Обозначим $x_n = 2\lfloor \frac{nx}{2} \rfloor$, $y_n = 2\lfloor \frac{ny}{2} \rfloor$, $A = \frac{x_n + y_n}{2}$, $B = \frac{y_n - x_n}{2}$

Лемма 2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \left(\frac{m}{n}\right)^2\right)^{\frac{yn-1}{2}} = 1$.

Доказательство. Так как $1 < \left(1 + \left(\frac{m}{n}\right)^2\right)^{\frac{yn-1}{2}} < \left(1 + \left(\frac{m}{n}\right)^2\right)^{ny}$.

$\left(1 + \left(\frac{m}{n}\right)^2\right)^{ny} = \sqrt[n]{\left(1 + \left(\frac{m}{n}\right)^2\right)^{n^2 y}} \rightarrow \sqrt[n]{e^{m^2 y}} \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$. Поэтому $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \left(\frac{m}{n}\right)^2\right)^{\frac{yn-1}{2}} = 1$ по теореме о двух полицейских. □

Лемма 3. $\lim_{n \rightarrow \infty} n(-1)^l C_{A-1}^l C_{B-1}^l \left(\frac{m}{n}\right)^{2l+1} = (-1)^l \cdot \frac{\left(\frac{x+y}{2}\right)^l \left(\frac{y-x}{2}\right)^l \cdot m^{2l+1}}{(l!)^2}$.

Доказательство. Имеем $n \cdot (-1)^l C_{A-1}^l C_{B-1}^l \left(\frac{m}{n}\right)^{2l+1} = (-1)^l \cdot \frac{(A-1)(A-2)\dots(A-l) \cdot (B-1)(B-2)\dots(B-l)}{(l!)^2} \cdot \frac{m^{2l+1}}{n^{2l}}$. Значит, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A-i}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lfloor \frac{nx}{2} \rfloor + \lfloor \frac{ny}{2} \rfloor}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{nx}{2} + \frac{ny}{2} + o(n)}{n} = \frac{x+y}{2}$. Аналогично, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{B-i}{n} = \frac{y-x}{2}$. Значит,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n(-1)^l C_{A-1}^l C_{B-1}^l \left(\frac{m}{n}\right)^{2l+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^l \cdot \frac{(A-1)(A-2)\dots(A-l) \cdot (B-1)(B-2)\dots(B-l)}{(l!)^2} \cdot \frac{m^{2l+1}}{n^{2l}} = \\ &= (-1)^l \cdot \frac{\left(\frac{x+y}{2}\right)^l \left(\frac{y-x}{2}\right)^l \cdot m^{2l+1}}{(l!)^2}. \end{aligned}$$

□

При этом для всех n выполнено: $|(-1)^l C_{A-1}^l C_{B-1}^l \left(\frac{m}{n}\right)^{2l+1}| < |(-1)^l \cdot \frac{\left(\frac{x+y}{2}\right)^l \left(\frac{y-x}{2}\right)^l \cdot m^{2l+1}}{(l!)^2}|$, так как $\frac{A-i}{n} < \frac{A}{n} < \frac{y+x}{2}$ и $\frac{B-i}{n} < \frac{B}{n} < \frac{y-x}{2}$.

Лемма 4. Ряд $n \cdot \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l C_{A-1}^l C_{B-1}^l \left(\frac{m}{n}\right)^{2l+1}$ сходится абсолютно для всех n .

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} n \cdot \sum_{l=0}^{\infty} |(-1)^l C_{A-1}^l C_{B-1}^l \left(\frac{m}{n}\right)^{2l+1}| &< \sum_{l=0}^{\infty} |(-1)^l \cdot \frac{\left(\frac{x+y}{2}\right)^l \left(\frac{y-x}{2}\right)^l \cdot m^{2l+1}}{(l!)^2}| = \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} m \cdot \frac{\left(\frac{x+y}{2}\right)^l \left(\frac{y-x}{2}\right)^l \cdot m^{2l}}{(l!)^2} < \sum_{l=0}^{\infty} m \cdot \frac{\left(\frac{x+y}{2}\right)^l \left(\frac{y-x}{2}\right)^l \cdot m^{2l}}{(l!)} = m \cdot e^{\frac{y^2-x^2}{4} m^2}. \end{aligned}$$

□

Поэтому $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l C_{A-1}^l C_{B-1}^l \left(\frac{m}{n}\right)^{2l+1} = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{l=0; 2|l}^{\infty} C_{A-1}^l C_{B-1}^l \left(\frac{m}{n}\right)^{2l+1}\right) - \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{l=0; 2 \nmid l}^{\infty} C_{A-1}^l C_{B-1}^l \left(\frac{m}{n}\right)^{2l+1}\right).$

Лемма 5. Дана такая последовательность последовательностей неотрицательных вещественных чисел $(\{a_0(n)\}, \{a_1(n)\}, \dots)$, что для всех $i \in \mathbb{N}$ верно $\lim_{n \rightarrow \infty} a_i(n) = b_i$. При этом $a_i(n) < b_i$ для всех i, n . Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{\infty} a_i(n) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i.$$

Доказательство. Обозначим $b = \sum_{i=0}^{\infty} b_i$. Тогда $\sum_{i=0}^{\infty} a_i(n) < b$ для всех n . Пусть дано $\varepsilon > 0$. Рассмотрим N такое, что $\sum_{i=0}^N b_i > b - \varepsilon$. Пусть M_i для $0 \leq i \leq N$ таковы, что $\forall t \geq M_i : a_i(t) > b_i - \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}$. Тогда для всех $n > \max(M_0, M_1, \dots, M_N)$ выполнено $\sum_{i=0}^{\infty} a_i(n) > b - \varepsilon$. Значит, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{\infty} a_i(n) = b$. □

По лемме и утверждению 3 получаем $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \sum_{l=0; 2|l}^{\infty} C_{A-1}^l C_{B-1}^l \left(\frac{m}{n}\right)^{2l+1} = \sum_{l=0; 2|l}^{\infty} \frac{\left(\frac{x+y}{2}\right)^l \left(\frac{y-x}{2}\right)^l \cdot m^{2l+1}}{(l!)^2}$ Значит, по задаче 14 и утверждению 2

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \vec{a}(x_n, y_n, \frac{m}{n}, -) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \sum_{l=0; 2|l}^{\infty} (-1)^l C_{A-1}^l C_{B-1}^l \left(\frac{m}{n}\right)^{2l+1} = \\ &= \left(\sum_{l=0; 2|l}^{\infty} \frac{\left(\frac{x+y}{2}\right)^l \left(\frac{y-x}{2}\right)^l \cdot m^{2l+1}}{(l!)^2}\right) - \left(\sum_{l=0; 2 \nmid l}^{\infty} \frac{\left(\frac{x+y}{2}\right)^l \left(\frac{y-x}{2}\right)^l \cdot m^{2l+1}}{(l!)^2}\right) = m \cdot J_0(m\sqrt{y^2 - x^2}). \end{aligned}$$

Аналогично получаем $\lim_{n \rightarrow \infty} n \vec{a}(x_n, y_n, \frac{m}{n}, +) = -im \frac{x+y}{\sqrt{y^2-x^2}} \cdot J_1(m\sqrt{y^2 - x^2})$.

16. *Ответ:* см. таблицу ниже; пара $(c, d)_+$ в клетке (x, y) означает, что $\vec{a}(x, y, 4, 3, +) = \frac{1}{\sqrt{3}}(c, d)$, а $(c, d)_-$ означает, что $\vec{a}(x, y, 4, 3, -) = \frac{1}{\sqrt{3}}(c, d)$; если клетка (x, y) пуста, то $\vec{a}(x, y, 4, 3, +) = \vec{a}(x, y, 4, 3, -) = (0, 0)$.

3	$(0, 0)_+$ $(-1, 0)_-$		$(0, 1)_+$ $(0, 0)_-$		$(0, -2)_+$ $(0, 0)_-$		$(0, 2)_+$ $(-1, 0)_-$		$(0, -1)_+$ $(0, 0)_-$
2		$(0, 0)_+$ $(-1, 0)_-$		$(0, -1)_+$ $(1, 0)_-$		$(0, 1)_+$ $(-1, 0)_-$		$(0, -1)_+$ $(0, 0)_-$	
1			$(0, -1)_+$ $(0, 0)_-$		$(0, 1)_+$ $(0, 0)_-$		$(0, -1)_+$ $(0, 0)_-$		
$\begin{array}{c} y \\ \hline x \end{array}$	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5

Указание. Заметим, что нас интересуют только чётные x_0 , так что $2\pi x_0 \varepsilon / \lambda = \frac{\pi x_0}{2}$ делится нацело на π . По аналогии с задачей 1, отсюда следует, что $\vec{a}(x, y, 4, 3, +)$ параллелен Oy , а $\vec{a}(x, y, 4, 3, -)$ параллелен Ox (будьте внимательны: это неверно для произвольного ε / λ).

17. Найдём более общую формулу; решением этой задачи будет частный случай $m\varepsilon = 1$. Обозначим

$$\begin{aligned} a_-(x, y) &:= \vec{a}(x, y, m\varepsilon, \lambda/\varepsilon, \Delta, -); \\ a_+(x, y) &:= \vec{a}(x, y, m\varepsilon, \lambda/\varepsilon, \Delta, +), \end{aligned}$$

где векторы в правой части определяются аналогично $\vec{a}(x, y, \lambda/\varepsilon, \Delta, \pm)$ и $\vec{a}(x, y, m\varepsilon, \pm)$. (Обратите внимание, что $a_-(x, y)$ и $a_+(x, y)$ это вектор-значные функции; в отличие от $a_1(x, y)$ и $a_2(x, y)$ они не являются координатами какого-то вектора.) Тогда мы получаем уравнение Дирака (где $i := R^{\pi/2}$ — это поворот на 90°

против часовой стрелки)

$$\begin{cases} a_-(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}}a_-(x+1, y-1) + \frac{-im\varepsilon}{\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}}a_+(x+1, y-1); \\ a_+(x, y) = \frac{-im\varepsilon}{\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}}a_-(x-1, y-1) + \frac{1}{\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}}a_+(x-1, y-1). \end{cases}$$

Из задачи 14 мы знаем, что эти равенства верны при $\Delta = 1$. Они остаются верными и для произвольного Δ , потому что не важно, в каком порядке применять $R^{2\pi x_0\varepsilon/\lambda}$ и $i = R^{\pi/2}$.

С помощью этих равенств мы по аналогии с задачей 14 получаем $\sum_{x \in \mathbb{Z}} P(x, y, \lambda/\varepsilon, \Delta) = 1$ для всех $y \geq 1$ индукцией по y .

18. Так как $\Delta P(x, y, \lambda/\varepsilon, \Delta, +) = |\sqrt{\Delta}\vec{a}(x, y, \lambda/\varepsilon, \Delta, +)|^2$, достаточно доказать, что $\sqrt{\Delta}\vec{a}(x, y, \lambda/\varepsilon, \Delta, +)$ не зависит от Δ при $\Delta > y + |x|$. По определению $\sqrt{\Delta}\vec{a}(x, y, \lambda/\varepsilon, \Delta, +) = \sum_{\substack{x_0=\Delta-1 \\ x_0=1-\Delta \\ x_0 \text{ чётно}}}^{x_0=\Delta-1} \sum_s R^{2\pi x_0\varepsilon/\lambda}\vec{a}(s)$. Но путей s , начинающихся в $(x_0, 0)$ и заканчивающихся в (x, y) , не существует при $|x - x_0| > y$, так что если число $\Delta \geq y + |x|$, то его увеличение не меняет сумму.

19. *Ответ:* если x_1 и x_2 чётны, то

$$\vec{a}(x_1, y, \lambda/\varepsilon, +) = R^{(x_1-x_2)2\pi\varepsilon/\lambda}\vec{a}(x_2, y, \lambda/\varepsilon, +)$$

$$\vec{a}(x_1, y, \lambda/\varepsilon, -) = R^{(x_1-x_2)2\pi\varepsilon/\lambda}\vec{a}(x_2, y, \lambda/\varepsilon, -).$$

Решение. Из решения задачи 18 следует, что $\vec{a}(x, y, \lambda/\varepsilon, +) = \sum_{x_0 \text{ чётно}} \sum_s R^{2\pi x_0\varepsilon/\lambda}\vec{a}(s)$, где вторая сумма по всем путям s из $(x_0, 0)$ в (x, y) , которые начинаются и заканчиваются ходом вправо-вверх. Каждому пути s_1 из $(x_0, 0)$ в (x_1, y) сопоставим единственный путь s_2 из $(x_0 + (x_2 - x_1), 0)$ в (x_2, y) , полученный из s_1 параллельным переносом на $(x_1 - x_2, 0)$. Таким образом, суммы для $x = x_1$ и $x = x_2$ берутся по одним и тем же векторам, только при $x = x_1$ они повернуты на $2\pi x_0\varepsilon/\lambda$, а при $x = x_2$ они повернуты на $2\pi(x_0 + (x_2 - x_1))\varepsilon/\lambda$, откуда следует ответ.

20. Найдём более общую формулу; решением этой задачи будет частный случай $m\varepsilon = 1$.

Ответ. Обозначим $E = \arccos\left(\frac{\cos(2\pi\varepsilon/\lambda)}{\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}}\right)$. Тогда для чётного $x + y$ верно:

$$\vec{a}(x, y, \lambda/\varepsilon, -) = \left(\frac{m\varepsilon \cos(2\pi\varepsilon x/\lambda) \sin((y-1)E)}{\sqrt{1+m^2\varepsilon^2} \sin E}, \frac{m\varepsilon \sin(2\pi\varepsilon x/\lambda) \sin((y-1)E)}{\sqrt{1+m^2\varepsilon^2} \sin E} \right);$$

$$\vec{a}(x, y, \lambda/\varepsilon, +) = \left(\frac{\cos(2\pi\varepsilon(x-2)/\lambda) \sin(yE) - \cos(2\pi\varepsilon x/\lambda) \sin((y-2)E)}{2 \cos(2\pi\varepsilon/\lambda) \sin E}, \right. \\ \left. \frac{-\sin(2\pi\varepsilon(x-2)/\lambda) \sin(yE) + \sin(2\pi\varepsilon x/\lambda) \sin((y-2)E)}{2 \cos(2\pi\varepsilon/\lambda) \sin E} \right);$$

$$P(x, y, \lambda/\varepsilon, -) = \frac{m^2\varepsilon^2 \sin^2((y-1)E)}{m^2\varepsilon^2 + \sin^2(2\pi\varepsilon/\lambda)};$$

$$P(x, y, \lambda/\varepsilon, +) = \frac{m^2\varepsilon^2 \cos^2((y-1)E) + \sin^2(2\pi\varepsilon/\lambda)}{m^2\varepsilon^2 + \sin^2(2\pi\varepsilon/\lambda)};$$

$$P(x, y, \lambda/\varepsilon, -) + P(x, y, \lambda/\varepsilon, +) = 1.$$

Замечание. В комплексной форме,

$$\vec{a}(x, y, \lambda/\varepsilon, -) = r^x \frac{m\varepsilon \sin((y-1)E)}{\sqrt{1+m^2\varepsilon^2} \sin E};$$

$$\vec{a}(x, y, \lambda/\varepsilon, +) = r^{x-1} \left(\frac{\sin((y-1)E) \sin(2\pi\varepsilon/\lambda)}{\sqrt{1+m^2\varepsilon^2} \sin E} + i \cos((y-1)E) \right),$$

где $r = \cos(2\pi\varepsilon/\lambda) + i \sin(2\pi\varepsilon/\lambda)$. Это решение уравнения Дирака (см. решение задачи 17) с (квази)периодическим начальным условием $a_-(x, 0) = 0$ и $a_+(x, 0) = (-\sin \frac{2\pi x\varepsilon}{\lambda}, \cos \frac{2\pi x\varepsilon}{\lambda})$. Число E имеет физический смысл: это энергия.

Указание. Формулы для $\vec{a}(x, y, \lambda/\varepsilon, +)$ и $\vec{a}(x, y, \lambda/\varepsilon, -)$ могут быть доказаны индукцией по y . База очевидна; шаг следует из задачи 17. После этого формулы для $P(x, y, \lambda/\varepsilon, +)$ и $P(x, y, \lambda/\varepsilon, -)$ можно вычислить напрямую.

Путь к решению. Будем воспринимать векторы, как комплексные числа. Тогда $R^\alpha \vec{a} = (\cos \alpha + i \sin \alpha) \vec{a}$. Обозначим $r = \cos(2\pi\varepsilon/\lambda) + i \sin(2\pi\varepsilon/\lambda)$; тогда $r^{-1} = \cos(2\pi\varepsilon/\lambda) - i \sin(2\pi\varepsilon/\lambda)$. Обозначим $f(y) = r^{-y} \vec{a}(y, y, \lambda/\varepsilon, +)$

и $g(y) = r^{-y}\vec{d}(y, y, \lambda/\varepsilon, -)$. Обозначим $M = \frac{m\varepsilon}{\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}}$ и $U = \frac{1}{\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}}$. Из задачи 19 следует, что при чётном $x + y$ вектор $\vec{d}(x, y, \lambda/\varepsilon, +) = r^x f(y)$ и $\vec{d}(x, y, \lambda/\varepsilon, -) = r^x g(y)$. Из задачи 17 следует $r^x f(y) = Ur^{x-1}f(y-1) - iMr^{x-1}g(y-1)$ и $r^x g(y) = Ur^{x+1}g(y-1) - iMr^{x+1}f(y-1)$. Так как $r \neq 0$, то мы можем поделить обе части на r^x и получить следующую систему:

$$\begin{cases} f(y) = Ur^{-1}f(y-1) - iMr^{-1}g(y-1) & (1) \\ g(y) = Urg(y-1) - iMrf(y-1) & (2) \\ f(1) = ir^{-1} & (3) \\ g(1) = 0 & (4) \end{cases}$$

Есть несколько способов решить эту систему (мы рассматривали варианты решений через производящие функции и через диагонализацию ‘матрицы перехода’), но наиболее доступным (для матшкольников), видимо, является преобразование этой системы к виду линейной рекурренты порядка 2. Из (1) мы получаем $g(y-1) = \frac{1}{M}irf(y) - \frac{U}{M}if(y-1)$. Отсюда и из (2) получаем $g(y) = \frac{U}{M}ir^2f(y) - \frac{1}{M}irf(y-1)$. Отсюда и из (1) получаем $f(y) = U(r+r^{-1})f(y-1) - f(y-2)$.

Решением этой рекурренты является $f(n) = c_1d_+^n + c_2d_-^n$, где

$$d_+ = \frac{U(r+r^{-1}) + \sqrt{U^2(r+r^{-1})^2 - 4}}{2} = U \cos(2\pi\varepsilon/\lambda) + i\sqrt{U^2 \sin^2(2\pi\varepsilon/\lambda) + M^2},$$

$$d_- = \frac{U(r+r^{-1}) - \sqrt{U^2(r+r^{-1})^2 - 4}}{2} = U \cos(2\pi\varepsilon/\lambda) - i\sqrt{U^2 \sin^2(2\pi\varepsilon/\lambda) + M^2}.$$

Это корни уравнения $t^2 - U(r+r^{-1})t + 1 = 0$, а c_1 и c_2 — это константы, которые можно найти, используя (3) и (4). Так как мы работаем с комплексными числами, запись $\sqrt{U^2(r+r^{-1})^2 - 4}$ неоднозначна. Но мы можем выбрать любой из двух корней; $\sqrt{U^2(r+r^{-1})^2 - 4}$ обозначает $2i\sqrt{U^2 \sin^2(2\pi\varepsilon/\lambda) + M^2}$. Мы получаем

$$c_1 = i \frac{r^{-1} - Ud_-}{d_+ - d_-} \text{ и } c_2 = i \frac{r^{-1} - Ud_+}{d_- - d_+}.$$

Заметим, что $E = \arccos(U \cos(2\pi\varepsilon/\lambda))$. Мы получаем $d_+ = \cos E + i \sin E$ и $d_- = \cos E - i \sin E$. Тогда $\vec{d}(x, y, \lambda/\varepsilon, +) = r^x f(y) = ir^x \frac{(r^{-1}-Ud_-)^{d_+^y} - (r^{-1}-Ud_+)^{d_-^y}}{d_+ - d_-} = ir^{x-1} \frac{\sin(yE)}{\sin E} - iUr^x \frac{\sin((y-1)E)}{\sin E}$.

Теперь вычислим $P(x, y, \lambda/\varepsilon, +) = \vec{d}(x, y, \lambda/\varepsilon, +) \cdot \overline{\vec{d}(x, y, \lambda/\varepsilon, +)}$. Из формул выше следует, что $\bar{r} = r^{-1}$, $\overline{d_+} = d_-$, $\overline{d_-} = d_+$, $\overline{c_1} = i \frac{r^{-1}-Ud_+}{d_+ - d_-}$ и $\overline{c_2} = i \frac{r^{-1}-Ud_-}{d_- - d_+}$. Отсюда (с помощью некоторых упрощений) мы наконец получаем $P(x, y, \lambda/\varepsilon, +) = \frac{(d_+ - d_-)^2 - M^2(d_+^{y-1} - d_-^{y-1})^2}{(d_+ - d_-)^2} = 1 - \frac{M^2 \sin^2((y-1)E)}{\sin^2 E}$.

Аналогично мы получаем, что $\vec{d}(x, y, \lambda/\varepsilon, -) = r^x M \frac{\sin((y-1)E)}{\sin E}$ и $P(x, y, \lambda/\varepsilon, -) = \frac{M^2 \sin^2((y-1)E)}{\sin^2 E}$.

21. Решение. Обозначим через x_i координату по оси Ox у клетки, в которую шашка попадает на i -м ходе пути s (то есть, шашка идёт по клеткам $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(x_2, 2)$, \dots , (x_y, y)). Чтобы дать определение вектора $\vec{d}(s, m(x)\varepsilon)$, начнём с вектора $(0, 1)$. Пока шашка движется прямо, вектор не меняется, но если шашка меняет направление после n -ого хода, вектор поворачивается на 90° по часовой стрелке и умножается на $m(x_n)\varepsilon$. Кроме того, в конце мы делим вектор на $\prod_{n=1}^{y-1} \sqrt{1+m^2(x_n)\varepsilon^2}$, где y — это количество ходов пути s . Полученный вектор мы обозначаем через $\vec{d}(s, m(x)\varepsilon)$. Числа $a_1(x, y, m(x)\varepsilon)$ и $a_2(x, y, m(x)\varepsilon)$ определяются аналогично $a_1(x, y)$ и $a_2(x, y)$, только $\vec{d}(s)$ заменяется на $\vec{d}(s, m(x)\varepsilon)$.

По аналогии с задачей 4 мы получаем формулы

$$a_1(x_0, y, m(x)\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{1+m^2(x_0+1)\varepsilon^2}}(a_1(x_0+1, y, m(x)\varepsilon) + m(x_0+1)\varepsilon \cdot a_2(x_0+1, y, m(x)\varepsilon)),$$

$$a_2(x_0, y, m(x)\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{1+m^2(x_0-1)\varepsilon^2}}(a_2(x_0-1, y, m(x)\varepsilon) - m(x_0-1)\varepsilon \cdot a_1(x_0-1, y, m(x)\varepsilon)).$$

22. Ответ: Для всех x, y одной чётности:

$$P(x, y, m_0(x), \lambda/\varepsilon, +) = 1;$$

$$P(x, y, m_0(x), \lambda/\varepsilon, -) = 0.$$

$$P(x, y, m_1(x), \lambda/\varepsilon, +) = \begin{cases} \frac{1}{1.04} = \frac{25}{26}, & \text{при } 0 < x < y; \\ 1, & \text{иначе;} \end{cases}$$

$$P(x, y, m_1(x), \lambda/\varepsilon, -) = \begin{cases} \frac{0.04}{1.04} = \frac{1}{26}, & \text{при } -y < x < 0; \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases}$$

Решение. Аналогично задаче 13 мы получаем $P(x, y, m_0(x), \lambda/\varepsilon, +) = 1$, $P(x, y, m_0(x), \lambda/\varepsilon, -) = 0$ для всех x, y одной чётности.

Условие $\vec{a}(s, m_1(x)) \neq 0$ означает, что шашка могла поворачиваться только в клетках $(0, 2), (0, 4), \dots, (0, 2 \cdot \lfloor \frac{y}{2} \rfloor)$. Поэтому количество поворотов в любом пути s , у которого $\vec{a}(s, m_1(x)) \neq 0$, не больше 1.

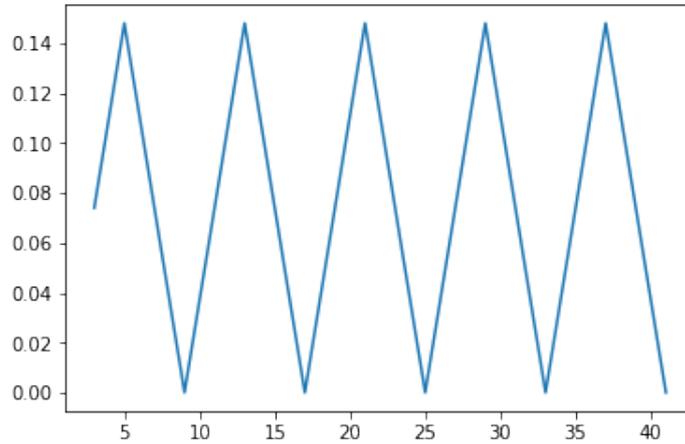
Чтобы вычислить $P(x, y, m_1(x), \lambda/\varepsilon, +)$, нужно рассматривать только пути, заканчивающиеся ходом вправо-вверх — то есть те, в которых нет поворотов. Но такой путь s , ведущий в клетку (x, y) , только один. Если он не проходит по клеткам с координатами $(0, 1), (0, 2), \dots, (0, y - 1)$ (то есть, $x \leq 0$ или $x \geq y$) то $P(x, y, m_1(x), \lambda/\varepsilon, +) = 1$. Иначе длина вектора $\vec{a}(s, m_1(x))$ равна $\frac{1}{\sqrt{1+0.2^2}}$.

Чтобы вычислить $P(x, y, m_1(x), \lambda/\varepsilon, -)$, рассмотрим пути, которые поворачивают ровно в одном месте: на оси Oy . Если такой путь s существует (то есть, $-y < x < 0$), то длина вектора $\vec{a}(s, m_1(x))$ равна $\frac{0.2}{\sqrt{1+0.2^2}}$. Иначе она равна 0.

23. Решение. Если $\vec{a}(s, m_2(x)) \neq 0$, то шашка поворачивала только в клетках с координатой по оси x , равной 1 или L . Чтобы вычислить $P(0, 2L, m_2(x), 16, -)$, достаточно рассмотреть только пути в нечётном количестве поворотов. Так как при $L > 1$ верно неравенство $y = 2L < 3(L - 1)$, то количество поворотов у таких путей равно 1. Тогда либо путь начинается в клетке $(0, 0)$ и поворачивает в клетке (L, L) , либо он начинается в клетке $(2 - 2L, 0)$ и поворачивает в $(1, 2L - 1)$. Векторы этих двух путей отличаются поворотом на $\pi - \frac{\pi(L-1)}{4}$ и делением на 1.04. Так как квадрат длины вектора первого пути равен $\frac{1}{26}$, а квадрат длины второго равен $\frac{1}{26 \cdot 1.04^2}$, то по теореме косинусов

$$P(0, 2L, m_2(x), 16, -) = \frac{1}{26} \left(1 + \frac{1}{1.04^2} - \frac{2}{1.04} \cos \frac{\pi(L-1)}{4} \right) \approx 0.074 \left(1 - \cos \frac{\pi(L-1)}{4} \right).$$

График этой функции изображён на следующем рисунке (любезно предоставленном Punnawith Thuwajit, участником Летней конференции Турнира городов).



24. Ответ:

$$P(\lambda, L, -) = \frac{0.1664}{1.1664 + \operatorname{ctg}^2 \frac{2\pi(L-1)}{\lambda}}; \quad \max_L P(\lambda, L, -) = \frac{0.1664}{1.1664} \approx 0.14;$$

$$P(\lambda, L, +) = \frac{1}{1 + 0.1664 \sin^2 \frac{2\pi(L-1)}{\lambda}}; \quad P(\lambda, L, -) + P(\lambda, L, +) = 1.$$

Указание. Обозначим $m = 0.2$ и $\phi = \frac{2\pi}{\lambda}(L - 1)$. При чётном $y > 2L - 2$ мы получаем

$$P(0, y, m_2(x), \lambda, -) = \left| e^{\frac{2\pi i}{\lambda}(2-y)} \frac{m}{\sqrt{1+m^2}} \left(-1 + \frac{1}{1+m^2} e^{2i\phi} + \frac{m^2}{(1+m^2)^2} (e^{2i\phi})^2 + \dots + \frac{1}{m^2} \left(\frac{m^2}{1+m^2} e^{2i\phi} \right)^{\lfloor \frac{y-2}{2(L-1)} \rfloor} \right) \right|^2.$$

Тогда, так как $\cos 2\phi = 1 - 2\sin^2 \phi$, мы получаем

$$\begin{aligned} P(\lambda, L, -) &= \frac{m^2}{1+m^2} \cdot \left| 1 - \frac{1}{1+m^2} e^{2i\phi} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{m^2}{1+m^2} e^{2i\phi} \right)^k \right|^2 = \\ &= \frac{m^2}{1+m^2} \cdot \left| 1 - \frac{1}{1+m^2} e^{2i\phi} \frac{1}{1 - \frac{m^2}{1+m^2} e^{2i\phi}} \right|^2 = \frac{m^2}{1+m^2} \cdot \frac{|1 - e^{2i\phi}|^2}{|1 - \frac{m^2}{1+m^2} e^{2i\phi}|^2} = \\ &= \frac{m^2(1+m^2)(2 - 2\cos(2\phi))}{(1+m^2)^2 + m^4 - 2m^2(1+m^2)\cos(2\phi)} = \frac{4m^2(1+m^2)}{(1+2m^2)^2 + \operatorname{ctg}^2 \phi} = \frac{0.1664}{1.1664 + \operatorname{ctg}^2 \frac{2\pi}{\lambda}(L-1)}. \end{aligned}$$

Таким образом, $\max_L P(\lambda, L, -) = \frac{0.1664}{1.1664} \approx 0.14$.

Аналогично,

$$\begin{aligned} P(\lambda, L, +) &= \left| \frac{1}{1+m^2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{m^2}{1+m^2} e^{2i\phi} \right)^k \right|^2 = \left| \frac{1}{1+m^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{m^2}{1+m^2} e^{2i\phi}} \right|^2 = \\ &= \frac{1}{(1+m^2)^2 + m^4 - 2(1+m^2)m^2\cos(2\phi)} = \frac{1}{1+4m^2(1+m^2)\sin^2 \phi} = \frac{1}{1+0.1664\sin^2 \frac{2\pi}{\lambda}(L-1)}. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$1 - \frac{1}{1+0.1664\sin^2 \frac{2\pi}{\lambda}(L-1)} = \frac{0.1664}{\frac{1}{\sin^2 \frac{2\pi}{\lambda}(L-1)} + 0.1664} = \frac{0.1664}{1.1664 + \operatorname{ctg}^2 \frac{2\pi}{\lambda}(L-1)}.$$

Тогда $P(\lambda, L, -) + P(\lambda, L, +) = 1$.

25. Ответ:

$$\frac{(n^2 - 1)^2}{(n^2 + 1)^2 + 4n^2 \cot^2 \frac{2\pi Ln}{\lambda}} \quad \text{и} \quad m = \frac{(0.3328 + 0.864\sqrt{1.04}) \cdot \pi}{\lambda},$$

где $n = \sqrt{1 + m\lambda/\pi}$ (коэффициент преломления; заметьте, что связь между m и n изменилась, когда мы перешли к отражению внутри стекла). Для указанного m предел равен

$$\frac{0.1664}{1.1664 + \cot^2 \frac{2\pi L(1.08+0.08\sqrt{1.04})}{\lambda}}.$$

Замечание. Первая формула из ответа хорошо известна и подтверждена экспериментами. Примечательное научно-популярное обсуждение задач 23–25 можно найти в [Feunpman], а вывод уравнений на физическом уровне строгости — в [Landafshitz, глава X, §86, задача 4].

Путь к решению. Рассмотрим уравнение Дирака из решения задачи 17. Будем искать решение вида

$$(a_+(x, y), a_-(x, y)) = (a_+(x), a_-(x))e^{-2\pi i \varepsilon y/\lambda}.$$

Используем задачу 20, чтобы угадать $a_{\pm}(x)$ по отдельности для $x \leq 0$, $0 \leq x \leq L/\varepsilon$ и $x \geq L/\varepsilon$. Предположим для простоты, что $1/\varepsilon$ — нечётное число. Для краткости будем писать $m(x) := m_3(x)$.

Сначала рассмотрим полуплоскость $x \leq 0$ (слева от стекла). Сформулируем, что такое решение уравнения Дирака в полуплоскости. По аналогии с задачей 17, под *уравнением Дирака в чёрной клетке* (x, y) мы понимаем систему

$$\begin{cases} a_-(x-1, y+1) &= \frac{1}{\sqrt{1+m(x)^2\varepsilon^2}} a_-(x, y) + \frac{-im(x)\varepsilon}{\sqrt{1+m(x)^2\varepsilon^2}} a_+(x, y); \\ a_+(x+1, y+1) &= \frac{-im(x)\varepsilon}{\sqrt{1+m(x)^2\varepsilon^2}} a_-(x, y) + \frac{1}{\sqrt{1+m(x)^2\varepsilon^2}} a_+(x, y). \end{cases}$$

Решением уравнения Дирака в полуплоскости $x \leq 0$ называется пара $(a_+(x, y), a_-(x, y))$, удовлетворяющая уравнениям в каждой чёрной клетке полуплоскости. В частности, $a_-(x, y)$ определено при $x \leq 0$, в то время как $a_+(x, y)$ определено при $x \leq 1$. Будем искать решение вида $(a_+(x), a_-(x)) = (i e^{2\pi i x \varepsilon/\lambda}, r(\varepsilon) e^{-2\pi i x \varepsilon/\lambda})$ для некоторого $r(\varepsilon) \in \mathbb{C}$, который будет найден позднее, где формулы для $a_+(x)$ и $a_-(x)$ верны для $x \leq 1$ и $x \leq 0$ соответственно. (В терминах физики, $a_+(x, y)$ — это падающая волна, $a_-(x, y)$ — это отражённая волна, а $|\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} r(\varepsilon)|^2$ — это вероятность отражения.)

Для полуплоскости $x \geq L/\varepsilon$ возьмём $(a_+(x), a_-(x)) = (t(\varepsilon) e^{2\pi i x \varepsilon/\lambda}, 0)$ для некоторого $t(\varepsilon) \in \mathbb{C}$, который будет найден позднее, где формулы для $a_+(x)$ и $a_-(x)$ верны для $x \geq L/\varepsilon + 1$ и $x \geq L/\varepsilon$ соответственно. (В терминах физики, $a_+(x)$ — это прошедшая волна, а $|\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} t(\varepsilon)|^2$ — вероятность прохождения.)

Для $0 \leq x \leq L/\varepsilon$ будем искать решение вида

$$\begin{aligned} a_+(x) &= a(\varepsilon) e^{2\pi i x \varepsilon / \lambda'(\varepsilon)} + b(\varepsilon) e^{-2\pi i x \varepsilon / \lambda'(\varepsilon)}, \\ a_-(x) &= c(\varepsilon) e^{2\pi i x \varepsilon / \lambda'(\varepsilon)} + d(\varepsilon) e^{-2\pi i x \varepsilon / \lambda'(\varepsilon)}. \end{aligned}$$

для некоторых коэффициентов $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ и $\lambda' > 0$, зависящих от ε (это комбинация преломлённой и отражённой волн). В дальнейшем $a, b, c, d, \lambda', r, t$ обозначают пределы соответствующих функций при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Предел λ' (длины преломлённой волны) можно найти с помощью уравнения Дирака. Подставив выражения для $a_{\pm}(x)$ в уравнение Дирака, сократив общие множители, и взяв предел при $\varepsilon \rightarrow 0$, мы получим

$$\begin{aligned} ma &= \left(m - \frac{2\pi}{\lambda'} + \frac{2\pi}{\lambda} \right) c, \\ mc &= \left(m + \frac{2\pi}{\lambda'} + \frac{2\pi}{\lambda} \right) a. \end{aligned}$$

Также мы получим аналогичное равенство с b и d вместо c и a . Отсюда следует, что $\lambda' = \lambda/n$, где $n = \sqrt{1 + m\lambda/\pi}$ (коэффициент преломления).

Сшивание решений ($a_+(x)$ в $x = 1$ и $x = L/\varepsilon + 1$, а $a_-(x)$ в $x = 0$ и $x = L/\varepsilon$) даёт нам систему линейных уравнений от a, b, c, d, r, t :

$$\begin{aligned} a_-(0) &= r(\varepsilon) = c(\varepsilon) + d(\varepsilon), & a_-(L/\varepsilon) &= 0 = c(\varepsilon) e^{2\pi i L/\lambda'} + d(\varepsilon) e^{-2\pi i L/\lambda'}, \\ a_+(1) &= i e^{2\pi i L/\lambda} = a(\varepsilon) e^{2\pi i L/\lambda'} + b(\varepsilon) e^{-2\pi i L/\lambda'}, & a_+(L/\varepsilon + 1) &= t(\varepsilon) e^{2\pi i (L+\varepsilon)/\lambda} = a(\varepsilon) e^{2\pi i (L+\varepsilon)/\lambda'} + b(\varepsilon) e^{-2\pi i (L+\varepsilon)/\lambda'}. \end{aligned}$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ и решая полученную систему линейных уравнений, мы находим a, b, c, d, r, t . Разумеется, надо проверить, что прежде, чем мы перешли к пределу, наши выражения для $a_{\pm}(x)$, полученные из этих уравнений, удовлетворяли уравнению Дирака в каждой чёрной клетке. Мы опускаем это.

Осталось доказать, что $(a_+(x), a_-(x)) = \lim_{\substack{y \rightarrow +\infty \\ y+x \text{ even}}} R^{2\pi y \varepsilon / \lambda} \vec{a}(x, y, m_3(x)\varepsilon, \frac{\lambda}{\varepsilon}, -)$; Тогда число $|r|^2$ является искомым пределом. Мы не знаем элементарного доказательства этого, и поэтому опускаем детали.

Нестрого, идея заключается в том, чтобы показать, что предел не зависит от начальных значений $a_+(x, 0)$ при $x > 0$ и $a_-(x, 0)$ при $x < L/\varepsilon$; после этого можно заменить эти начальные значения решениями, полученными выше, что приведёт к успеху. Независимость от $a_+(x, 0)$ при $x > L/\varepsilon$ и от $a_-(x, 0)$ при $x < 0$ очевидна. Чтобы доказать независимость от $a_{\pm}(x, 0)$ при $0 \leq x \leq L/\varepsilon$, предположим, что $a_{\pm}(x, 0)$ существует только на отрезке $0 \leq x \leq L/\varepsilon$, и рассмотрим линейное преобразование

$$\begin{aligned} U: & (a_-(0, 0), a_-(2, 0), \dots, a_-(L/\varepsilon - 1, 0), a_+(0, 0), \dots, a_+(L/\varepsilon - 1, 0)) \\ & \mapsto (a_-(0, 2), a_-(2, 2), \dots, a_-(L/\varepsilon - 1, 2), a_+(0, 2), \dots, a_+(L/\varepsilon - 1, 2)). \end{aligned}$$

Покажем, что модули собственных значений U меньше 1. Рассмотрим собственный вектор v с координатами $v_1 = a_-(0, 0), \dots, v_{L/\varepsilon+1} = a_+(L/\varepsilon - 1, 0)$. Без нарушения общности v_k — самая левая ненулевая координата. Если $k > 1$, то Uv имеет ненулевую $(k-1)$ -ую координату; но Uv пропорционален v , получаем противоречие. Так что $k = 1$. Отсюда $a_-(2, 2) \neq 0$ из уравнения Дирака. Значит, по сохранению вероятности

$$\begin{aligned} \|v\| &= |a_-(0, 0)|^2 + |a_-(2, 0)|^2 + \dots + |a_+(L/\varepsilon - 1, 0)|^2 \\ &= |a_-(2, 2)|^2 + |a_-(0, 2)|^2 + \dots + |a_+(L/\varepsilon - 1, 2)|^2 \\ &> |a_-(0, 2)|^2 + \dots + |a_+(L/\varepsilon - 1, 2)|^2 \\ &= \|Uv\|. \end{aligned}$$

Отсюда модуль собственного значения v строго меньше 1. Поэтому $\|U^y\| \rightarrow 0$ при $y \rightarrow \infty$, откуда следует, что значения $a_{\pm}(x, 0)$ при $0 \leq x \leq L$ не влияют на предел.

26. Ответ. Вектор в клетке (x, y) таблицы — это $\vec{a}(x, y, u, +)$, а если клетка (x, y) пуста, то $\vec{a}(x, y, u, +) = (0, 0)$.

4			$(0, \frac{1}{2\sqrt{2}})$		$(0, 0)$		$(0, \frac{1}{2\sqrt{2}})$
3				$(0, -\frac{1}{2})$		$(0, \frac{1}{2})$	
2					$(0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$		
1				$(0, -1)$			
$y \backslash x$	-2	-1	0	1	2	3	4

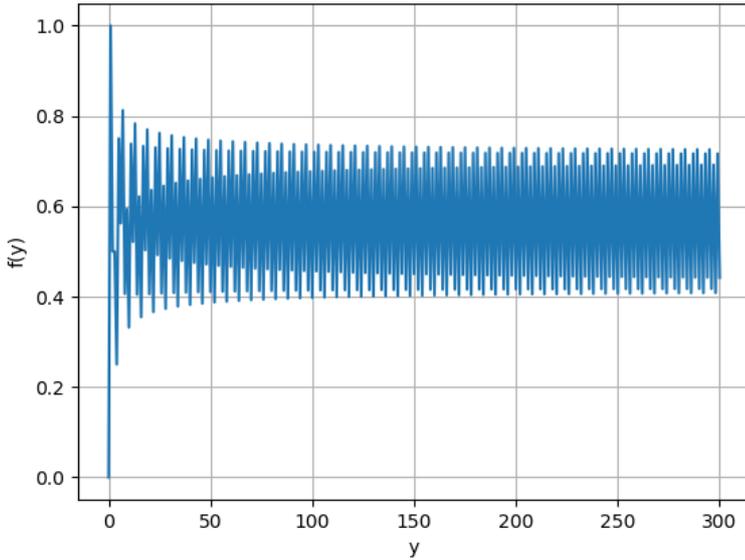
В следующей таблице число в клетке (x, y) — это $P(x, y, u, +)$, а пустая клетка (x, y) означает, что $P(x, y, u, +) = 0$.

4			1/8		0		1/8
3				1/4		1/4	
2					1/2		
1				1			
y \ x	-2	-1	0	1	2	3	4

(Векторы $\vec{a}(x, y, u, +)$ можно легко вычислить, используя задачу 31.)

Для всех $y > 1$ верно $\sum_{x \in \mathbb{Z}} (P(x, y, u, +) + P(x, y, u, -)) = 1$. (Это одно из утверждений задачи 31.)

27. Ответ (любезно предоставленный Глебом Минаевым и Иваном Русских, участниками Летней конференции Турнира городов):



28. Решение. Обозначим через u' поле, получающееся из u заменой знаков в вершинах чёрной клетки (a, b) . Заметим, что если путь s не начинается и не заканчивается в клетке (a, b) , то он либо проходит через две вершины, значение u в которых изменилось, либо не проходит ни через одну. Таким образом, $\vec{a}(s, u) = \vec{a}(s, u')$. Если $(a, b) \neq (0, 0)$ и $(a, b) \neq (x, y)$, то равенство $P(x, y, u', +) = P(x, y, u, +)$ следует из этого напрямую.

Осталось рассмотреть только случаи $(a, b) = (0, 0)$ и $(a, b) = (x, y)$. Каждый путь s из $(0, 0)$ в (x, y) будет проходить ровно через одну вершину, значение u в которой изменилось, поэтому $\vec{a}(s, u') = -\vec{a}(s, u)$. Таким образом, в этих случаях мы также получаем $P(x, y, u', +) = P(x, y, u, +)$.

29. Решение. Назовём *обращением* чёрной клетки (x, y) изменение значений u во всех вершинах этой клетки. Обозначим через вершину (x, y) верхнюю правую вершину клетки (x, y) , а через $u(x, y)$ — значение u в этой вершине.

Заметим, что обращение чёрной клетки не меняет знак ни одной белой клетки, так как в каждой белой клетке количество изменённых вершин чётно. Если все значения поля u в прямоугольнике положительны, то и все белые клетки в прямоугольнике положительны. Таким образом, если в u изначально были отрицательные белые клетки, то нельзя сделать u тождественно равным $+1$, обращая чёрные клетки.

Предположим, в прямоугольнике $M \times N$, где N — это высота, нет отрицательных белых клеток. Без ограничения общности будем считать вершину $(0, 0)$ левым нижним углом прямоугольника. Докажем индукцией по N , что u можно сделать тождественно равным $+1$ с помощью обращения чёрных клеток.

База: $N = 0$. Приведём алгоритм, позволяющий сделать u тождественно равным $+1$ в прямоугольнике $M \times 0$ (то есть, в вершинах $(0, 0), (1, 0), \dots, (M, 0)$).

Заметим, что для любого k , обратив либо клетку $(k + 1, 0)$, либо клетку $(k + 1, 1)$, мы можем изменить значение u в вершинах $(k, 0)$ и $(k + 1, 0)$. Будем называть эту операцию *обращением* k .

Алгоритм такой. Найдём наименьшее такое $0 \leq k \leq M$, что $u(k, 0) = -1$, и применим обращение k . Если после применения этой операции ещё остались такие $0 \leq k \leq M$, что $u(k, 0) = -1$, то наименьшее такое k хотя бы на 1 больше, чем до применения операции. Значит, не больше чем за $M + 1$ применений операции мы получим u , тождественно равное $+1$ в прямоугольнике $M \times 0$.

Шаг: Пусть дан прямоугольник $M \times (N + 1)$. Сначала сделаем u тождественно равным $+1$ в нижнем прямоугольнике $M \times N$ (это возможно по предположению индукции). После этого для каждой белой клетки

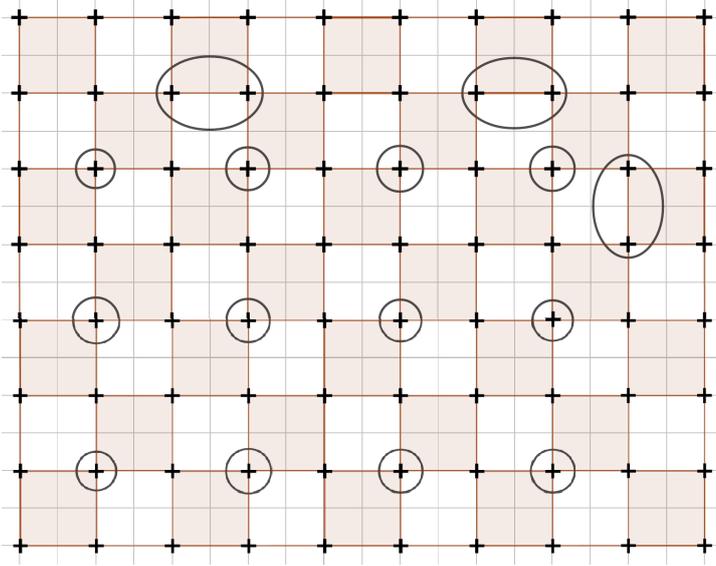
$(k, N+1)$ обратим клетку $(k, N+2)$, если в обеих общих вершинах этих клеток поле u имело значение -1 . Так как все белые клетки были положительными, то после этого поле u может иметь отрицательное значение только в одной или двух вершинах в углах прямоугольника $M \times (N+1)$ (и только если в соответственном углу стоит чёрная клетка). Но тогда значения в любой из этих вершин можно исправить, обратив другую чёрную клетку, которая к ней прилегает. Сделав это, мы получим искомое поле u , тождественно равное $+1$ во всех вершинах прямоугольника $M \times (N+1)$.

30. Ответ: Если ширина или длина прямоугольника равна 1, то таких клеток ноль. Если же они обе больше 1, то любое чётное неотрицательное число, не большее общего количества белых клеток в прямоугольнике.

Указание. Построим граф: вершинами будут белые клетки прямоугольника, а ребро между двумя вершинами графа означает, что соответствующие клетки соприкасаются по вершине, и в этой вершине значение u равно $+1$. Тогда отрицательными белыми клетками будут в точности те, которым соответствуют вершины нечётной степени в графе. По лемме о рукопожатиях количество таких вершин чётно.

Покажем, что любое чётное неотрицательное число, не большее общего количества белых клеток, можно реализовать.

Для поля u_0 , тождественно равного $+1$, отрицательных белых клеток не будет. Поле u_{2k+2} с $2k+2$ отрицательными белыми клетками получается из поля u_{2n} заменой значений u_{2n} на -1 в любой обведённой области на рисунке, в которой это ещё не сделано.



31. Ответ. Напомним, что $u(x, y)$ — это значение u в правой верхней вершине клетки (x, y) . Тогда

$$a_1(x, y, u) = \frac{1}{\sqrt{2}}u(x, y-1)(a_1(x+1, y-1, u) + a_2(x+1, y-1, u)),$$

$$a_2(x, y, u) = \frac{1}{\sqrt{2}}u(x-1, y-1)(-a_1(x-1, y-1, u) + a_2(x-1, y-1, u)).$$

Указание. Решение аналога задачи 4 отличается от решения оригинала только добавлением множителей $u(x, y-1)$ и $u(x-1, y-1)$, так как последний ход пути s проходит через правую верхнюю вершину либо клетки $(x, y-1)$, либо $(x-1, y-1)$.

Аналог задачи 5 можно доказать индукцией по y . Шаг индукции следует из следующих вычислений:

$$\begin{aligned} \sum_{x \in \mathbb{Z}} P(x, y+1, u) &= \sum_{x \in \mathbb{Z}} [a_1(x, y+1, u)^2 + a_2(x, y+1, u)^2] = \sum_{x \in \mathbb{Z}} a_1(x, y+1, u)^2 + \sum_{x \in \mathbb{Z}} a_2(x, y+1, u)^2 = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{x \in \mathbb{Z}} u(x, y)^2 (a_1(x+1, y, u) + a_2(x+1, y, u))^2 + \frac{1}{2} \sum_{x \in \mathbb{Z}} u(x-1, y)^2 (a_2(x-1, y, u) - a_1(x-1, y, u))^2 = \\ &= \sum_{x \in \mathbb{Z}} \frac{(a_1(x, y, u) + a_2(x, y, u))^2}{2} + \sum_{x \in \mathbb{Z}} \frac{(a_2(x, y, u) - a_1(x, y, u))^2}{2} = \sum_{x \in \mathbb{Z}} [a_1(x, y, u)^2 + a_2(x, y, u)^2] = \sum_{x \in \mathbb{Z}} P(x, y, u). \end{aligned}$$

32. Ответ: $P(AB, A'B' \rightarrow EF, E'F') = \begin{cases} P(x, y, -)P(x' - x_0, y, -), & \text{если } E = (x+1, y), E' = (x'+1, y), \\ P(x, y, -)P(x' - x_0, y, +), & \text{если } E = (x+1, y), E' = (x'-1, y), \\ P(x, y, +)P(x' - x_0, y, -), & \text{если } E = (x-1, y), E' = (x'+1, y), \\ P(x, y, +)P(x' - x_0, y, +), & \text{если } E = (x-1, y), E' = (x'-1, y). \end{cases}$

Решение. Заметим, что $\vec{a}(s, s') = -i\vec{a}(s)\vec{a}(s')$, где $\vec{c}_1\vec{c}_2$ обозначает произведение комплексных чисел \vec{c}_1 и \vec{c}_2 . Рассмотрим случай $x' > x$. Тогда из-за того, что $x_0 \geq 2y$, если существует путь из A в F' , то из A' нет пути ни в F , ни в F' . Аналогично про существование пути из A' в F . Значит, нас интересуют только пары путей s и s' , где s ведёт из A в F , а s' из A' в F' .

Таким образом, $\sum_{\substack{s: AB \rightarrow EF \\ s': A'B' \rightarrow E'F'}} \vec{a}(s, s') = 0$ и

$$\vec{a}(AB, A'B' \rightarrow EF, E'F') = \sum_{\substack{s: AB \rightarrow EF \\ s': A'B' \rightarrow E'F'}} \vec{a}(s, s') = \sum_{\substack{s: AB \rightarrow EF \\ s': A'B' \rightarrow E'F'}} -i\vec{a}(s)\vec{a}(s') = -i \left(\sum_{s: AB \rightarrow EF} \vec{a}(s) \right) \left(\sum_{s': A'B' \rightarrow E'F'} \vec{a}(s') \right),$$

откуда сразу следует ответ. Случай $x' < x$ разбирается аналогично.

33. Указание. Предположим, что пути $s : AB \rightarrow EF$ и $s' : A'B' \rightarrow E'F'$ имеют общий ход. Обозначим через CD первый из общих ходов у s и s' , а через C — клетку, из которой он был сделан. Обозначим через \tilde{s} путь, совпадающий с путём s до клетки C и с путём s' после C , а через \tilde{s}' путь, совпадающий с s' до C и с s после. Пути \tilde{s}, \tilde{s}' начинаются ходами $AB, A'B'$ и заканчиваются ходами $E'F'$ и EF соответственно.

Суммарное число поворотов на путях s и s' равно суммарному числу поворотов на путях \tilde{s} и \tilde{s}' по построению. Значит, $\vec{a}(s, s') = \vec{a}(\tilde{s}, \tilde{s}')$. Заметим, что $f : (s, s') \mapsto (\tilde{s}, \tilde{s}')$ — это биекция, так как CD это первый из совпадающих ходов. Одна из пар (s, s') и (\tilde{s}, \tilde{s}') даёт $\vec{a}(EF, E'F')$ с коэффициентом $(+1)$, а другая — с коэффициентом (-1) . Значит, эти пары сокращаются друг с другом.

$a(E, E', \uparrow, +, +) a(E, E', \uparrow, +, -) a(E, E', \uparrow, -, +) a(E, E', \uparrow, -, -) a(E, E', \downarrow, +, +) a(E, E', \downarrow, +, -) a(E, E', \downarrow, -, +) a(E, E', \downarrow, -, -)$

34. Указание. Докажем требуемое индукцией по y . База очевидна.

Заметим, что по аналогии с задачей 11 $\vec{a}(AB, A'B' \rightarrow EF, E'F')$ параллелен одной из осей координат. Обозначим через $a_1(AB, A'B' \rightarrow EF, E'F')$ и $a_2(AB, A'B' \rightarrow EF, E'F')$ координаты этого вектора.

Фиксируем стартовые ходы AB и $A'B'$. Обозначим через $a(E, E', \uparrow, +, -) = a_1(AB, A'B' \rightarrow EF, E'F')$, где EF — это ход вправо-вверх, $E'F'$ — ход влево-вверх а $a_1(AB, A'B' \rightarrow EF, E'F')$ — (возможно) ненулевая координата соответствующего вектора. $a(E, E', \uparrow, +, +)$, $a(E, E', \uparrow, -, +)$ и $a(E, E', \uparrow, -, -)$ определяются аналогично. Обозначим через $a(E, E', \downarrow, +, -) = a_1(AB, A'B' \rightarrow DE, D'E')$, где DE — это ход вправо-вверх, а $D'E'$ — ход влево-вверх. $a(E, E', \downarrow, +, +)$, $a(E, E', \downarrow, -, +)$ и $a(E, E', \downarrow, -, -)$ определяются аналогично.

Заметим, что в шаге индукции достаточно доказать равенство

$$\begin{aligned} & \sum_{E, E'} ((a(E, E', \uparrow, +, +))^2 + (a(E, E', \uparrow, +, -))^2 + (a(E, E', \uparrow, -, +))^2 + (a(E, E', \uparrow, -, -))^2) = \\ & = \sum_{E, E'} ((a(E, E', \downarrow, +, +))^2 + (a(E, E', \downarrow, +, -))^2 + (a(E, E', \downarrow, -, +))^2 + (a(E, E', \downarrow, -, -))^2). \end{aligned}$$

Чтобы доказать это равенство, мы докажем, что для каждой пары (E, E') , где E и E' лежат на одной горизонтальной линии, верно

$$\begin{aligned} & (a(E, E', \uparrow, +, +))^2 + (a(E, E', \uparrow, +, -))^2 + (a(E, E', \uparrow, -, +))^2 + (a(E, E', \uparrow, -, -))^2 = \\ & = (a(E, E', \downarrow, +, +))^2 + (a(E, E', \downarrow, +, -))^2 + (a(E, E', \downarrow, -, +))^2 + (a(E, E', \downarrow, -, -))^2. \end{aligned}$$

Аналогично решению задачи 4 мы получаем:

$$\begin{aligned} a(E, E', \uparrow, +, +) &= \frac{1}{2}(a(E, E', \downarrow, +, +) - a(E, E', \downarrow, +, -) - a(E, E', \downarrow, -, +) - a(E, E', \downarrow, -, -)), \\ a(E, E', \uparrow, +, -) &= \frac{1}{2}(a(E, E', \downarrow, +, +) - a(E, E', \downarrow, +, -) + a(E, E', \downarrow, -, +) + a(E, E', \downarrow, -, -)), \\ a(E, E', \uparrow, -, +) &= \frac{1}{2}(a(E, E', \downarrow, +, +) + a(E, E', \downarrow, +, -) - a(E, E', \downarrow, -, +) + a(E, E', \downarrow, -, -)), \\ a(E, E', \uparrow, -, -) &= \frac{1}{2}(-a(E, E', \downarrow, +, +) - a(E, E', \downarrow, +, -) - a(E, E', \downarrow, -, +) + a(E, E', \downarrow, -, -)). \end{aligned}$$

Из этого можно с помощью подстановки и раскрытия скобок получить искомое равенство.

$$\mathbf{35. Ответ:} P(AB, B'A' \rightarrow EF, F'E') = \begin{cases} P(x, y, -)P(x_0 - x', y, -), & \text{если } E = (x + 1, y), E' = (x' + 1, y), \\ P(x, y, -)P(x_0 - x', y, +), & \text{если } E = (x + 1, y), E' = (x' - 1, y), \\ P(x, y, +)P(x_0 - x', y, -), & \text{если } E = (x - 1, y), E' = (x' + 1, y), \\ P(x, y, +)P(x_0 - x', y, +), & \text{если } E = (x - 1, y), E' = (x' - 1, y). \end{cases}$$

Указание. Заметим, что $\vec{a}(s, s') = i\vec{a}(s)\vec{a}^*(s')$, где $\vec{c}_1\vec{c}_2$ обозначает произведение комплексных чисел \vec{c}_1 и \vec{c}_2 , а \vec{a}^* обозначает сопряжение.

36. Ответ: для всех u_{fin} имеем

$$\begin{aligned} P(2, 2, u_{\text{fin}}, 1, +) &= 1/4, & P(0, 2, u_{\text{fin}}, 1, -) &= 1/4, \\ P(3, 3, u_{\text{fin}}, 1, +) &= 1/32, & P(1, 3, u_{\text{fin}}, 1, -) &= 1/32, \\ P(1, 3, u_{\text{fin}}, 1, +) &= 1/32, & P(-1, 3, u_{\text{fin}}, 1, -) &= 1/32; \end{aligned}$$

все оставшиеся вероятности вырождаются при $y = 2, 3$.

37. Ответ: $\sum_u \vec{a}(g, s, u) = 2^{3y-4}(1+g^2)^{\frac{y-1}{2}} \cos((r-l) \arctg(g))\vec{a}(s)$.

Указание. Для краткости введём обозначение $Z := \frac{1}{2^{(y-2)^2}(1+g^2)^{\frac{(y-1)^2}{2}}}$.

Обозначим через r и l соответственно количество белых клеток в R по правую и по левую стороны относительно s . Заметим, что r и l нечётны тогда и только тогда, когда нечётно количество знаков “-” в вершинах, через которые проходит путь s (то есть когда $\vec{a}(s, u) = -\vec{a}(s)$).

Простая лемма (без доказательства): Пусть b - количество черных клеток, не касающихся границы в прямоугольнике R . Тогда количество полей u , таких что внутри R ровно $2k$ отрицательных белых клеток, равно количеству способов сопоставить знаки “-” ровно $2k$ белым клеткам внутри R , умноженному на 2^b . (Множитель 2^b - это количество калибровочных преобразований из Задачи 28.)

Из леммы следует, что

$$\begin{aligned} \sum_u \vec{a}(g, s, u) &= Z \sum_u (-ig)^n \vec{a}(s, u) = 2^b Z \left[\sum_{k,m} (-ig)^{k+m} \binom{r}{k} \binom{l}{m} - \sum_{k,m} (-ig)^{k+m} \binom{r}{k} \binom{l}{m} \right] \vec{a}(s) = \\ &= 2^{b-2} Z \left[((1+ig)^r + (1-ig)^r) \left((1+ig)^l + (1-ig)^l \right) - ((1+ig)^r - (1-ig)^r) \left((1+ig)^l - (1-ig)^l \right) \right] \vec{a}(s) = \\ &= 2^b Z \operatorname{Re} \left((1+ig)^r (1-ig)^l \right) \vec{a}(s) = 2^b (1+g^2)^{\frac{r+l}{2}} Z \cos((r-l) \arctg(g)) \vec{a}(s). \end{aligned}$$

Так как $b = r+l = y^2 - y$, наш ответ можно упростить до $\sum_u \vec{a}(g, s, u) = 2^{3y-4}(1+g^2)^{\frac{y-1}{2}} \cos((r-l) \arctg(g))\vec{a}(s)$.

38. Ответ. Определим

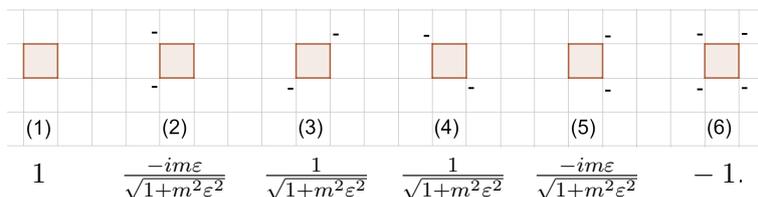
$$\begin{aligned} a_{--}(x, y) &:= a_2(x, y, u_-, g, -), & a_{-+}(x, y) &:= a_1(x, y, u_-, g, +), \\ a_{+-}(x, y) &:= a_1(x, y, u_+, g, -), & a_{++}(x, y) &:= a_2(x, y, u_+, g, +). \end{aligned}$$

Обозначим за $R(y) = R$ прямоугольник, образованный всеми клетками (x', y') такими, что $1 - y < x' < y$ и $0 < y' < y$. Пусть $\alpha = \alpha(x, y) = (\Delta l - \Delta r) \arctan g$, где Δl и Δr - это количества белых клеток в $R(y)$ вне $R(y-1)$ расположенными левее и правее квадрата $(x+1, y-1)$. Пусть $\beta = \alpha(x-2, y)$. Тогда

$$\begin{cases} a_{++}(x, y) = \frac{\cos \beta}{\sqrt{2}} (a_{++}(x-1, y-1) - a_{+-}(x-1, y-1)) - \frac{\sin \beta}{\sqrt{2}} (a_{-+}(x-1, y-1) - a_{--}(x-1, y-1)); \\ a_{+-}(x, y) = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{2}} (a_{++}(x+1, y-1) + a_{+-}(x+1, y-1)) - \frac{\sin \alpha}{\sqrt{2}} (a_{-+}(x+1, y-1) + a_{--}(x+1, y-1)); \\ a_{-+}(x, y) = \frac{\sin \beta}{\sqrt{2}} (a_{++}(x-1, y-1) - a_{+-}(x-1, y-1)) + \frac{\cos \beta}{\sqrt{2}} (a_{-+}(x-1, y-1) - a_{--}(x-1, y-1)); \\ a_{--}(x, y) = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{2}} (a_{++}(x+1, y-1) + a_{+-}(x+1, y-1)) + \frac{\cos \alpha}{\sqrt{2}} (a_{-+}(x+1, y-1) + a_{--}(x+1, y-1)). \end{cases}$$

Указание. Последняя формула определяет ортогональное преобразование, из которого следует, что $\sum_{x \in \mathbb{Z}} (P(x, y) P(x, y, g, -)) = 1$, индукцией по y .

39. Ответ. Нумерация базовых конфигураций приведена на картинке ниже:



Указание. Докажем, что сумма $\vec{a}(s, s')$ по всем путям s, s' , проходящим только через вершины со знаком “-”, равно произведению всех комплексных чисел, сопоставленных чёрным квадратам в прямоугольнике.

Заметим, что квадраты типа (1) не влияют на ответ, так как через них не проходит ни один путь. В квадратах типов (2) и (5) все проходящие через них пути обязательно поворачивают, что домножает $\vec{a}(s, s')$ на $\frac{-im\varepsilon}{\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}}$. В квадратах типов (3) и (4) проходящий через них путь поворачивать не может, поэтому $\vec{a}(s, s')$ домножается на $\frac{1}{\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}}$. Через квадраты типа (6) пути могут проходить двумя способами: оба поворачивают или оба не поворачивают. Если пути поворачивают, то $\vec{a}(s, s')$ домножается на $\left(\frac{-im\varepsilon}{\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}}\right)^2$, иначе домножается на $\frac{-1}{1+m^2\varepsilon^2}$. В сумме квадрат типа (6) даёт в произведение вклад равный -1 .

Благодарности

Авторы благодарны В. Скопенковой за некоторые рисунки, Г. Челнокову, И. Иванову за полезные дискуссии, и всем участникам Летней конференции Турнира городов в Аранджеловаце и Летней школы “Современная математика” в Дубне за их вклад.

Список литературы

- [Feynman] Feynman, Richard (2006). QED: The strange theory of light and matter. Princeton University Press. ISBN 0-691-12575-9. Перевод на русский язык: Фейнман Р. КЭД. Странная теория света и вещества. Сер. “Библиотечка “Квант” ” вып. 66. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит-ры, 144с.
- [Gersch] Gersch, H.A., Feynman’s relativistic chessboard as an Ising model, Int J Theor Phys 20:7 (1981), 491–501.
- [Landafshitz] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, L.P. Pitaevskii (1984). Electrodynamics of Continuous Media. Vol. 8 (2nd ed.). Butterworth-Heinemann. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. – Издание 4-е, стереотипное. — М.: Физматлит, 2005. – 656 с. – («Теоретическая физика», том VIII).
- [Ord] G.N. Ord, Classical particles and the Dirac equation with an electromagnetic field, Chaos, Solitons & Fractals 8:5 (1997), 727-741.
- [Ord-Gualtieri] G. N. Ord and J. A. Gualtieri, The Feynman Propagator from a Single Path, Phys. Rev. Lett. 89, 250403 (2002).

Feynman checkerboard

An intro to algorithmic quantum field theory

E. Akhmedova, M. Skopenkov, A. Ustinov, R. Valieva, A. Voropaev

Summary. It turns out that rainbow patterns on soapbubbles and unbelievable laws of motion of electrons can be explained by means of one simple-minded model. It is a game, in which a checker moves on a checkerboard by certain simple rules, and we count the turnings. This ‘Feynman checkerboard’ can explain all phenomena in the world (with a serious proviso) except atomic nuclei and gravitation. We are going to solve mathematical problems related to the game and discuss their physical meaning; no knowledge of physics is assumed.

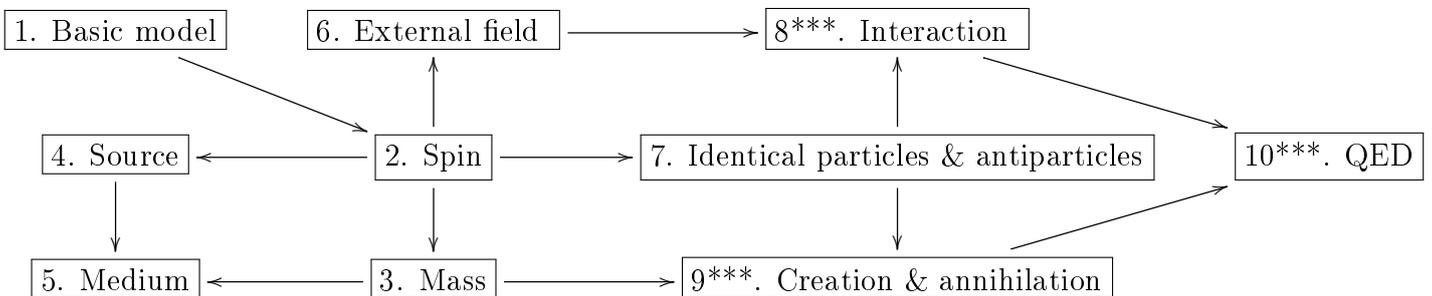
Main results. The main results are explicit formulae for

- the percentage of light of given color reflected by a glass plate of given width (Problem 24);
- the probability to find an electron at a given point, if it was emitted from the origin (Problem 15; see Figure 1).

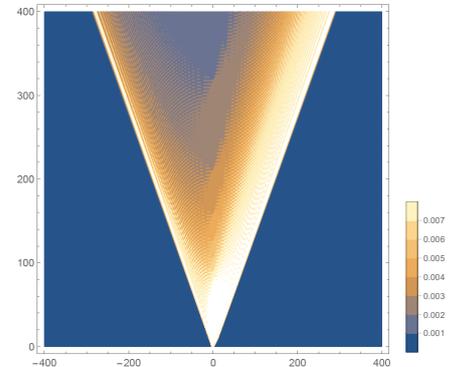
Although the results are stated in physical terms, they are mathematical theorems, because we provide mathematical models of the physical phenomena in question, with all the objects defined rigorously. More precisely, a sequence of models with increasing precision.

Plan. We start with a basic model and upgrade it step by step in each subsequent section. Before each upgrade, we summarize which physical *question* does it address, which simplifying *assumptions* does it resolve or impose additionally, and which experimental *results* does it explain. Our aim is what is called *2-dimensional quantum electrodynamics* but the last steps on this way (sketched in Sections 8–10) still have not been done. (A *4-dimensional* one can already explain all phenomena — with proviso and exceptions — but we do not discuss it.)

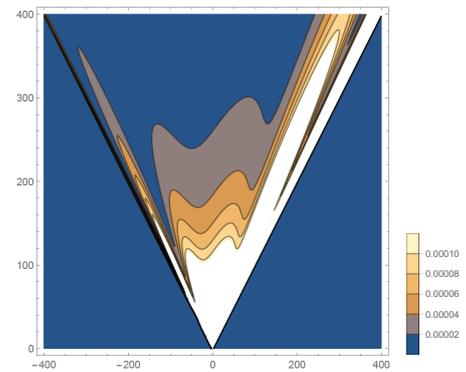
The scheme of upgrades dependence might help to choose your way:



Conventions. If a problem is a statement of an assertion, then it is requested to prove the assertion. A *puzzle* is a problem, in which both a precise statement and a proof are requested. Hard problems are marked with stars; you get *first rank in Feynman checkerboard* for solving one, and *masters in Feynman checkerboard* for solving three from three different sections. Solutions are accepted in writing but you may spend an earned star for 10 attempts to submit a solution in oral form (successful or not). If you cannot solve a problem, proceed to the next ones: they may provide hints. Even if you do not reach the top (the proofs of main results), you learn much. You are encouraged to state and try to prove also your own observations and conjectures; you become a *grand-master in Feynman checkerboard* for discovering a new nontrivial one (and maybe even write your own scientific paper).



Basic model from §1



Model with mass from §3

Figure 1: The probability to find an electron at a given point (white depicts large oscillations)

1 Basic model

Question: what is the probability to find an electron at the point (x, y) , if it was emitted from the point $(0, 0)$?

Assumptions: no self-interaction, no creation of electron-positron pairs, unit mass and lattice step, point source; no nuclear forces, no gravitation, electron moves uniformly along the y -axis and does not move along the z -axis.

Results: double-slit experiment, charge conservation.

On an infinite checkerboard, a checker moves to the diagonal-neighboring squares, either upwards-right or upwards-left. To each path s of the checker, assign a vector $\vec{a}(s)$ as follows. Start with a vector of length 1 directed upwards. While the checker moves straightly, the vector is not changed, but each time when the checker changes the direction, the vector is rotated through 90° clockwise (independently of the direction the checker turns). In addition, at the very end the vector is divided by $2^{(y-1)/2}$, where y is the total number of moves. The final position of the vector is what we denote by $\vec{a}(s)$. For instance, for the path in Figure 2 to the top, the vector $\vec{a}(s) = (1/8, 0)$ is directed to the right and has length $1/8$.

Denote $\vec{a}(x, y) := \sum_s \vec{a}(s)$, where the sum is over all the paths of the checker from the square $(0, 0)$ to the square (x, y) , starting with the upwards-right move. Set $\vec{a}(x, y) := \vec{0}$, if there are no such paths. For instance, $\vec{a}(1, 3) = (0, -1/2) + (1/2, 0) = (1/2, -1/2)$. The length square of the vector $\vec{a}(x, y)$ is called the *probability*¹ to find an electron in the square (x, y) , if it was emitted from the square $(0, 0)$. Notation: $P(x, y) := |\vec{a}(x, y)|^2$.

In Figure 1 to the top, the color of a point (x, y) with even $x + y$ depicts the value $P(x, y)$. The sides of the apparent angle are *not* the lines $y = \pm x$ (and nobody knows why!).

In what follows squares (x, y) with even and odd $x + y$ are called *black* and *white* respectively.

1. Observations for small y . Answer the following questions for each $y = 1, 2, 3, 4$ (and state your own questions and conjectures for arbitrary y): Find the vector $\vec{a}(x, y)$ and the probability $P(x, y)$ for each x . When $P(x, y) = 0$? What is $\sum_{x \in \mathbb{Z}} P(x, y)$ for fixed y ? What are the directions of $\vec{a}(1, y)$ and $\vec{a}(-1, y)$?

The *probability*² to find an electron in the square (x, y) subject to absorption in square (x', y') is defined analogously to $P(x, y)$, only the summation is over those paths s that do not pass through (x', y') . The probability is denoted by $P(x, y \text{ bypass } x', y')$.

2. Double-slit experiment. Is it true that $P(x, y) = P(x, y \text{ bypass } 0, 2) + P(x, y \text{ bypass } 2, 2)$? Is it true that $P(x, y) \geq P(x, y \text{ bypass } x', y')$?

3. Find $P(0, 12)$. How to table the values $\vec{a}(x, y)$ quickly without exhaustion of all paths? (The first solution grants *first rank* in Feynman checkers.)

Denote by $a_1(x, y)$ and $a_2(x, y)$ the coordinates of $\vec{a}(x, y)$; see Figure 3.

4. Dirac's equation. Express $a_1(x, y)$ and $a_2(x, y)$ through $a_1(x \pm 1, y - 1)$ and $a_2(x \pm 1, y - 1)$.

5. Probability/charge conservation. For each positive integer y we have $\sum_{x \in \mathbb{Z}} P(x, y) = 1$.

6. Symmetry. How the values $a_1(x, 100)$ for $x < 0$ and for $x \geq 0$ are related with each other? The same for the values $a_1(x, 100) + a_2(x, 100)$.

7. Huygens' principle. What is a fast way to find $\vec{a}(x, 199)$, if we know $\vec{a}(x, 100)$ for all integers x ?

8. Using a computer, plot the graphs of the functions $f_y(x) = P(x, y)$ for various y , joining each pair of points $(x, f_y(x))$ and $(x + 2, f_y(x + 2))$ by a segment; cf. Figure 3. The same for the function $a_1(x, y)$.

9.* Find an explicit formula for the vector $\vec{a}(x, y)$ and the probability $P(x, y)$ (it is allowed to use a sum with at most y summands in the answer).

10.** (Skipable puzzle) Guess a simple "approximate formula" for $\vec{a}(x, y)$ and $P(x, y)$, accurate for $|x| \ll y$.

¹One should think of the value y as fixed, and the squares $(-y, y), (-y + 2, y), \dots, (y, y)$ as all the possible outcomes of an experiment. For instance, the y -th horizontal might be a photoplate detecting the electron.

Familiarity with probability theory is *not* required for solving the presented problems.

Beware that our rule for the probability computation is valid only for the basic model in question; we are going to change the rule slightly in the upgrades. We make similar remarks each time we break some fundamental principles for simplicity.

²Thus an additional outcome of the experiment is that the electron has been absorbed and has not reached the photoplate.

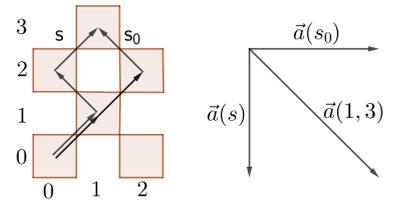
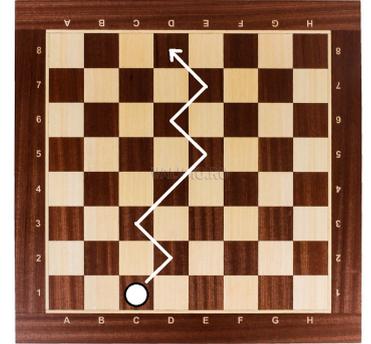


Figure 2: Checker paths

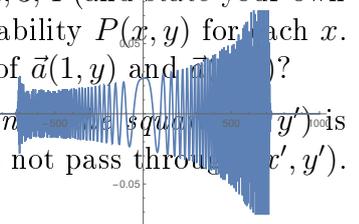


Figure 3: $a_2(x, 1000)$

2 Spin

Question: what is the probability to find a right electron at (x, y) , if a right electron was emitted from $(0, 0)$?

Assumptions: the same.

Results: spin reversal.

The trick in the solution of the previous problems has a physical meaning: it is convenient to consider an electron as being in one of the two states: *right-moving* or *left-moving*. We write just ‘right’ or ‘left’ for brevity³. This is not just a convenience but reflects an inalienable electron’s property called *spin*⁴.

Denote $\vec{a}(x, y, +) := \sum_s \vec{a}(s)$, where the sum is over only those paths from $(0, 0)$ to (x, y) , which both start and finish with an upwards-right move. Define $\vec{a}(x, y, -)$ to be an analogous sum over paths which start with an upwards-right move but finish with an upwards-left move.

The length square of the vector $\vec{a}(x, y, +)$ (respectively, $\vec{a}(x, y, -)$) is called the *probability*⁵ to find a right (respectively, left) electron in the square (x, y) , if a right electron was emitted from the square $(0, 0)$. Denote by $P(x, y, +) := |\vec{a}(x, y, +)|^2$ and $P(x, y, -) := |\vec{a}(x, y, -)|^2$ these probabilities.

11. Express $\vec{a}(x, y, +)$ and $\vec{a}(x, y, -)$ through $a_1(x, y)$ and $a_2(x, y)$; $P(x, y)$ through $P(x, y, +)$ and $P(x, y, -)$.

12.* Spin reversal. What is the probability $P(y_0, -) := \sum_{x \in \mathbb{Z}} P(x, y_0, -)$ to find a left electron on the line $y = y_0$ (it is allowed to use a sum with at most y_0 summands in the answer)? Find the maximal element and the limit of the sequence $P(1, -), P(2, -), P(3, -), \dots$

A crash-course in calculus. For this and other problems *with stars*, the following formulæ might be useful.

Recall that $\sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} = 2 - \frac{1}{2^n}$. Clearly, as n increases, the sum becomes closer and closer to 2. We would like to write $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2$; let us give a definition of such an infinite sum. A sequence a_1, a_2, a_3, \dots has a limit a , if for each real $\varepsilon > 0$ there is N such that for each integer $n > N$ we have $|a_n - a| < \varepsilon$. Notation: $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. For instance, $\lim_{n \rightarrow \infty} (2 - \frac{1}{2^n}) = 2$. By definition, put $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k$. Then indeed $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2$.

The following generalization is called *Newton’s binomial theorem* (allowed to use without proof):

$$(1+x)^r = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r(r-1)\cdots(r-k+1)}{k(k-1)\cdots 1} x^k$$

for each complex x with $|x| < 1$ and each real r , or for $x = 1$ and $r > -1$. In particular, for $r = -1$ and $-\frac{1}{2}$ we get

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \quad \text{and} \quad \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k(2k-1)\cdots(k+1)}{k(k-1)\cdots 1} \frac{x^k}{4^k}.$$

The following *Stirling formula* allows to estimate the summands in Newton’s binomial theorem:

$$\sqrt{2\pi} k^{k+1/2} e^{-k} \leq k(k-1)\cdots 1 \leq e k^{k+1/2} e^{-k}.$$

Here e denotes $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^n$. It is an irrational number between 2.71 and 2.72.

3 Mass

Question: what is the probability to find a right electron of mass m at (x, y) , if it was emitted from $(0, 0)$?

Assumptions: the mass and the lattice step are now arbitrary.

Results: a formula for the probability for small lattice step.

To check our model against experiment we need the following generalization.

Fix $\varepsilon, m > 0$ called *lattice step* and *particle mass* respectively. To each path s of the checker, assign a vector $\vec{a}(s, m\varepsilon)$ as follows. Start with the vector $(0, 1)$. While the checker moves straightly, the vector is not changed, but each time when the checker changes the direction, the vector is rotated through 90°

³Beware that in 3 or more dimensions ‘right’ and ‘left’ mean something very different from the movement direction. Although often visualized as the direction of the electron rotation, these states cannot be explained in nonquantum terms.

⁴And *chirality*; beware that the term *spin* usually refers to a property, not related to the movement direction at all.

⁵Thus an experiment outcome is a pair (final x -coordinate, last-move direction), whereas the final y -coordinate is fixed. These are the fundamental probabilities, whereas $P(x, y)$ should in general be *defined* by the formula from the solution of Problem 11 rather than the above formula $P(x, y) = |\vec{a}(x, y)|^2$ (being a coincidence).

clockwise and multiplied by $m\varepsilon$. In addition, at the very end the vector is divided by $(1 + m^2\varepsilon^2)^{(y-1)/2}$, where y is the total number of moves. The final position of the vector is what we denote by $\vec{a}(s, m\varepsilon)$. The vectors $\vec{a}(x, y, m\varepsilon, \pm)$ and the numbers $P(x, y, m\varepsilon, \pm)$ are defined analogously to $\vec{a}(x, y, \pm)$ and $P(x, y, \pm)$, only $\vec{a}(s)$ is replaced by $\vec{a}(s, m\varepsilon)$. For instance, $P(x, y, 1, +) = P(x, y, +)$. In Figure 1 to the bottom, the color of a point (x, y) with even $x + y$ depicts the value $P(x, y, 0.02, +) + P(x, y, 0.02, -)$.

13. (Puzzle) Massless and heavy particles. Find $P(x, y, 0, +)$ and define $P(x, y, \infty, +)$ for each x, y .

14. Solve analogues of Problems 4, 5, and 9 for $m\varepsilon \neq 1$.

In an experiment, we measure the probabilities to find the electron in *intervals* $x_0 \leq x \leq x_0 + \Delta x$, $y = y_0$ rather than at particular *points*. Here $x_0, y_0, \Delta x$ are not integers but actual lengths measured in meters. If all squares have small size $\frac{1}{n} \times \frac{1}{n}$, then the interval is approximated by the collection of black squares $(2 \lfloor \frac{nx}{2} \rfloor, 2 \lfloor \frac{ny}{2} \rfloor)$ with x, y satisfying the above (in)equalities. This leads to the following problem.⁶

15.* (First main problem) Continuum limit. For each x, y, m find $\lim_{n \rightarrow \infty} n \vec{a}(2 \lfloor \frac{nx}{2} \rfloor, 2 \lfloor \frac{ny}{2} \rfloor, \frac{m}{n}, -)$ and $\lim_{n \rightarrow \infty} n \vec{a}(2 \lfloor \frac{nx}{2} \rfloor, 2 \lfloor \frac{ny}{2} \rfloor, \frac{m}{n}, +)$ In the answer, it is allowed to use the following expressions⁷

$$J_0(z) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(z/2)^{2k}}{(k!)^2} \quad \text{and} \quad J_1(z) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(z/2)^{2k+1}}{k!(k+1)!}.$$

4 Source

Question: what is the probability to find a right electron at (x, y) , if it was emitted by a source of wave length λ ?

Assumptions: the source is now realistic.

Results: wave propagation.

A realistic source does not produce electrons localized at $x = 0$ (as in our game) but a rather wide wave impulse instead. For our game, this means that the checker can start from an arbitrary black square on the horizontal line $y = 0$ (not too far from the origin), but the initial direction of the vector $\vec{a}(s)$ is rotated through an angle proportional to the distance from the starting square to the origin; see Figure 4.

Formally, fix real $\varepsilon, \lambda > 0$ and odd Δ called *lattice step*, *wave length*, and *impulse width* respectively. Denote by $R^\alpha \vec{a}$ the rotation of a vector \vec{a} through the angle $|\alpha|$, which is counterclockwise for $\alpha \geq 0$ and clockwise for $\alpha < 0$. Define the vector

$$\vec{a}(x, y, \lambda/\varepsilon, \Delta, +) := \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{\substack{x_0=1-\Delta \\ x_0 \text{ even}}}^{\Delta-1} \sum_s R^{2\pi x_0 \varepsilon / \lambda} \vec{a}(s),$$

where the second sum is over all checker paths s from the square $(x_0, 0)$ to the square (x, y) , starting *and ending* with an upwards-right move. The length square of the vector is the *probability to find a right electron at (x, y) , emitted by a source of wave length λ and impulse width Δ* . It is denoted by $P(x, y, \lambda/\varepsilon, \Delta, +)$. Define $\vec{a}(x, y, \lambda/\varepsilon, \Delta, -)$ and $P(x, y, \lambda/\varepsilon, \Delta, -)$ analogously. For instance, $P(x, y, \lambda/\varepsilon, 1, +) = P(x, y, +)$ for each λ, ε , and $\vec{a}(x+1, 1, \lambda/\varepsilon, \Delta, +) = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} (-\sin \frac{2\pi x \varepsilon}{\lambda}, \cos \frac{2\pi x \varepsilon}{\lambda})$ for even $|x| < \Delta$.

16. Let $\Delta = 3, \lambda/\varepsilon = 4$. Find the vector $\vec{a}(x, y, 4, 3, +)$ and the probability $P(x, y, 4, 3, +)$ for $y = 1, 2, 3$ and each x . What is $\sum_{x \in \mathbb{Z}} (P(x, y, 4, 3, +) + P(x, y, 4, 3, -))$ for fixed $y = 1, 2, 3$? When $P(x, 3, 4, 3, +) = 0$?

17. Probability/charge conservation. Solve analogues of Problems 4 and 5 for $\vec{a}(x, y, \lambda/\varepsilon, \Delta, -)$, $\vec{a}(x, y, \lambda/\varepsilon, \Delta, +)$, and $P(x, y, \lambda/\varepsilon, \Delta, +) + P(x, y, \lambda/\varepsilon, \Delta, -)$ instead of $a_1(x, y)$, $a_2(x, y)$, and $P(x, y)$.

18. Causality. Both $\sqrt{\Delta} \vec{a}(x, y, \lambda/\varepsilon, \Delta, +)$ and $\Delta P(x, y, \lambda/\varepsilon, \Delta, +)$ do not depend on Δ for $\Delta > y + |x|$. Denote⁸ $\vec{a}(x, y, \lambda/\varepsilon, \pm) = \sqrt{\Delta} \vec{a}(x, y, \lambda/\varepsilon, \Delta, \pm)$ and $P(x, y, \lambda/\varepsilon, \pm) = \Delta P(x, y, \lambda/\varepsilon, \Delta, \pm)$ for any $\Delta > y + |x|$.

19. Wave. How to find $\vec{a}(x, 100, \lambda/\varepsilon, +)$ for all even x , if we know it for just one even x ?

20.* Wave propagation. For each $x, y, \lambda, \varepsilon$ find $\vec{a}(x, y, \lambda/\varepsilon, -)$, $P(x, y, \lambda/\varepsilon, -)$, $P(x, y, \lambda/\varepsilon, -) + P(x, y, \lambda/\varepsilon, +)$.

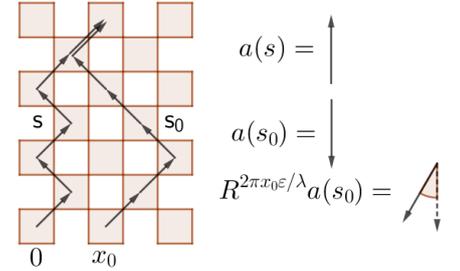


Figure 4: Checker paths may now start at distinct squares

⁶In the limits, the normalization factor of n is a bit harder to explain; we not discuss it.

⁷Called *Bessel functions*, which are almost as well-studied as sine and cosine; but familiarity with them is not required.

⁸The notation $\vec{a}(x, y, \lambda/\varepsilon, \pm)$ should not be confused with $\vec{a}(x, y, m\varepsilon, \pm)$.

5 Medium

Question: which part of light of given color reflects from a glass plate of given width?

Assumptions: right angle of incidence, no polarization of light; the mass now depends on x but not on the color.

Results: thin-film reflection.

Our model can be applied also to describe propagation of light in transparent media such as glass⁹. Light propagates as if it had some nonzero mass inside the media, while the mass remains zero outside¹⁰. The wavelength determines the color of light.

21. (Puzzle) Define an analogue of $\vec{a}(s, m\varepsilon)$ in the case when the mass $m = m(x)$ depends on x so that analogues of Problems 4 and 5 remain true.

Given a mass $m = m(x)$, define $\vec{a}(x, y, m(x)\varepsilon, \lambda/\varepsilon, \pm)$ and $P(x, y, m(x)\varepsilon, \lambda/\varepsilon, \pm)$ analogously to $\vec{a}(x, y, \lambda/\varepsilon, \pm)$ and $P(x, y, \lambda/\varepsilon, \pm)$, only replace $\vec{a}(s)$ by $\vec{a}(s, m\varepsilon)$ in the definition. First we take $\varepsilon = 1$.

22. One-surface reflection. Find $P(x, y, m(x), \lambda, +)$ and $P(x, y, m(x), \lambda, -)$ for

$$m(x) = m_0(x) \equiv 0 \quad \text{and} \quad m(x) = m_1(x) = \begin{cases} 0.2, & \text{for } x = 0; \\ 0, & \text{for } x \neq 0. \end{cases}$$

Now fix odd $L > 1$ called the *width of a glass plate*. First assume for simplicity that light is reflected only by the two surfaces of the plate and thus take¹¹

$$m_2(x) = \begin{cases} -0.2, & \text{for } x = 1; \\ +0.2, & \text{for } x = L; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

The *reflection/transmission probabilities*¹² of light of wavelength λ by glass plate of width L are respectively

$$P(\lambda, L, -) = \lim_{\substack{y \rightarrow +\infty \\ y \text{ even}}} P(0, y, m_2(x), \lambda, -);$$

$$P(\lambda, L, +) = \lim_{\substack{y \rightarrow +\infty \\ y \text{ even}}} P(L + 1, y, m_2(x), \lambda, +).$$

23. Plot the graph of the function $f(L) = P(0, 2L, m_2(x), 16, -)$.

24.* (Second main problem) **Two-surface reflection.** Find $P(\lambda, L, -)$, $P(\lambda, L, +)$, $P(\lambda, L, -) + P(\lambda, L, +)$, and $\max_L P(\lambda, L, -)$.

In fact the light is reflected *inside* the plate; this should be taken into account for a more accurate computation of the reflection probability (there is no hope for an exact solution for complicated matter such as glass). For this purpose we need to modify the model essentially. Take arbitrary $\varepsilon > 0$. Fix $m > 0$ and let $m_3(x) = m$ for $0 < x \leq L/\varepsilon$ and $m_3(x) = 0$ otherwise. Now for each move starting in a square inside the glass, our vector is additionally rotated through the angle $\arctan m\varepsilon$ clockwise (independently on if the checker does or does not turn in the square)¹³. In other words, set $\vec{a}_m(s, m(x)\varepsilon) := R^{-k \arctan m\varepsilon} \vec{a}(s, m(x)\varepsilon)$, where k is the number of moves starting in the strip $0 < x \leq L/\varepsilon$ in the path s . Define $P_m(x, y, m(x)\varepsilon, \frac{\lambda}{\varepsilon}, -)$ analogously to $P(x, y, m(x)\varepsilon, \frac{\lambda}{\varepsilon}, -)$, only replace $\vec{a}(s, m(x)\varepsilon)$ by $\vec{a}_m(s, m(x)\varepsilon)$ in the definition.

25. Thin-film reflection.** Find $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \lim_{\substack{y \rightarrow +\infty \\ y \text{ even}}} P_m(0, y, m_3(x)\varepsilon, \frac{\lambda}{\varepsilon}, -)$. For which m maximum of the expression over L equals $\max_L P(\lambda, L, -)$? (Use existence of $\lim_{\substack{y \rightarrow +\infty \\ y+x \text{ even}}} R^{2\pi y\varepsilon/\lambda} \vec{a}(x, y, m_3(x)\varepsilon, \frac{\lambda}{\varepsilon}, -)$ without proof.)

⁹Beware: in general Feynman checkerboard is inappropriate to describe light; partial reflection is a remarkable exception.

¹⁰The mass is proportional to $(n - 1)/2\sqrt{n}$, where n is the refractive index; for glass $n \approx 1.5$ and $(n - 1)/2\sqrt{n} \approx 0.2$.

¹¹This simplifying assumption requires negative mass for the left surface; the origin of that becomes clear after solving 25.

¹²It is more conceptual to define $P(\lambda, L, -) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{\Delta \rightarrow +\infty} \lim_{y \rightarrow +\infty} \sum_{x \in \mathbb{Z}} P(x, y, m_3(x)\varepsilon, \frac{\lambda}{\varepsilon}, \Delta, -)$ but we do not.

¹³This additional rotation is explained as follows. The light can be scattered in each square inside the glass several times. Each individual scattering gives a factor of $-im\varepsilon$ to our vector (viewed as a complex number) and may or may not change the movement direction. Assume that $m\varepsilon < 1$. Thus a move without changing the direction contributes a factor of

$$1 \text{ (no scattering)} - im\varepsilon \text{ (1 scattering)} + (-im\varepsilon)^2 \text{ (2 scatterings)} + \dots = \frac{1}{1 + im\varepsilon}.$$

Without a scattering, the checker moves straightly. Thus a turn in a particular square inside the glass contributes a factor

$$-im\varepsilon \text{ (1 scattering)} + (-im\varepsilon)^2 \text{ (2 scatterings)} + (-im\varepsilon)^3 \text{ (3 scatterings)} + \dots = \frac{-im\varepsilon}{1 + im\varepsilon}.$$

These are the same factors as in the model from §3 but additionally rotated through the angle $\arctan m\varepsilon$ clockwise.

6 External field

Question: what is the probability to find a right electron at (x, y) , if it moves in a given magnetic field u ?

Assumptions: the magnetic field vanishes outside the xy -plane, it is not affected by the electron.

Results: deflection of electron and spin ‘precession’ in a magnetic field, charge conservation.

An external magnetic field changes the motion as follows¹⁴.

A common point of 4 squares of the checkerboard is called a *vertex*. A *magnetic field*¹⁵ is a fixed assignment u of numbers $+1$ and -1 to all the vertices. For instance, in Figure 5, the magnetic field is -1 at the top-right vertex of each square (x, y) with both x and y even. Modify the definition of the vector $\vec{a}(s)$ by reversing the direction each time when the checker passes through a vertex with the magnetic field -1 . Denote by $\vec{a}(s, u)$ the resulting vector. Formally, put $\vec{a}(s, u) = \vec{a}(s)u(C_1)u(C_2)\dots u(C_y)$, where C_1, C_2, \dots, C_y are all the vertices passed by s . Define $\vec{a}(x, y, u, \pm)$ and $P(x, y, u, \pm)$ analogously to $\vec{a}(x, y, \pm)$ and $P(x, y, \pm)$ replacing $\vec{a}(s)$ by $\vec{a}(s, u)$ in the definition. For instance, if $u(C) = +1$ identically, then $P(x, y, u) = P(x, y)$.

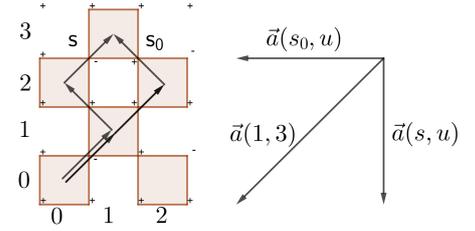


Figure 5: Paths in a field

26. Homogeneous field. Let $u(C) = -1$, if C is the top-right vertex of a square (x, y) with both x and y even, and $u(C) = +1$ otherwise. Find the vector $\vec{a}(x, y, u, +)$ and the probability $P(x, y, u, +)$ for $y = 1, 2, 3, 4$ and each integer x . What is $\sum_{x \in \mathbb{Z}} (P(x, y, u, +) + P(x, y, u, -))$ for fixed $y = 1, 2, 3$, or 4 ?

27. Spin ‘precession’ in a magnetic field. Plot the graph of the function $f(y) = \sum_{x \in \mathbb{Z}} P(x, y, u, +)$ for the field u from the previous problem using a computer.

For a given magnetic field u , a white square is *negative*, if u equals -1 at 1 or 3 vertices of the square.

28. Gauge transformations. Changing the signs of the values of u at the 4 vertices of one black square simultaneously does not change $P(x, y, u, +)$.

29. Curvature. One can make u to be identically $+1$ in a rectangle formed by checkerboard squares using the transformations from Problem 28, if and only if there are no negative white squares in the rectangle.

30. Homology. The magnetic field u equals $+1$ on the boundary of a rectangle $m \times n$ formed by checkerboard squares. Which can be the number of negative white squares in the rectangle?

31. Probability/charge conservation. Solve analogues of Problems 4, 5 for u not being identically $+1$.

7 Identical particles and antiparticles

Question: what is the probability to find electrons (or electron+positron) at F and F' , emitted from A and A' ?

Assumptions: the same as in the basic model; y -coordinate is interpreted as time.

Results: exclusion principle.

The motion of several electrons is described by a similar model as follows.

To each pair of paths s, s' of the checker, consisting of y moves each, assign a vector $\vec{a}(s, s')$ as follows. Start with the vector $(0, 1)$. Move the checker consecutively along both paths, and rotate the vector according to the same rule as in §1: each time when the checker changes the direction, the vector is rotated through 90° *clockwise*. (Thus the vector is rotated totally $t(s) + t(s')$ times, where $t(S)$ is the number of turns in a path S .) In addition, at the very end the vector is divided by 2^{y-1} . The final position of the vector is denoted by $\vec{a}(s, s')$. For instance, in Figure 2 we have $\vec{a}(s, s_0) = (-1/4, 0)$.

Fix squares $A = (0, 0)$, $A' = (x_0, 0)$, $F = (x, y)$, $F' = (x', y)$ and their diagonal neighbors $B = (1, 1)$, $B' = (x_0 + 1, 1)$, $E = (x - 1, y - 1)$, $E' = (x' - 1, y - 1)$, where $x_0 \neq 0$. Denote¹⁶

$$\vec{a}(AB, A'B' \rightarrow EF, E'F') := \sum_{\substack{s: AB \rightarrow EF \\ s': A'B' \rightarrow E'F'}} \vec{a}(s, s') - \sum_{\substack{s: AB \rightarrow E'F' \\ s': A'B' \rightarrow EF}} \vec{a}(s, s'),$$

¹⁴Beware that this method of adding the magnetic field, although well-known, is very different from the one from [Feynman].

¹⁵Or *electromagnetic vector-potential*, to be precise. The field is interpreted as *magnetic* or *electric* depending on if the y -coordinate is interpreted as *position* or *time*.

¹⁶Here it is essential that s and s' are paths of particles of *the same sort*, e.g., two electrons. Otherwise the 2nd sum is omitted. The sign before the 2nd sum is changed to plus for some other sorts of particles, e.g., *photons* (particles of light).

where the first sum is over all pairs consisting of a checker path s starting with the move AB and ending with the move EF , and a path s' starting with the move $A'B'$ and ending with the move $E'F'$, whereas in the second sum the final moves are interchanged.

The length square $P(AB, A'B' \rightarrow EF, E'F') = |\vec{a}(AB, A'B' \rightarrow EF, E'F')|^2$ is called the *probability¹⁷ to find right electrons at F and F' , if they are emitted from A and A'* . In particular, $P(AB, A'B' \rightarrow EF, EF) = 0$, i.e., two right electrons cannot be found at the same point; this is called *exclusion principle*.

32. Independence. For $x_0 \geq 2y$ and $x' > x$ express $P(AB, A'B' \rightarrow EF, E'F')$ through $P(x, y, +)$ and $P(x' - x_0, y, +)$.

33. Exclusion principle (for intermediate states). Prove that $\vec{a}(AB, A'B' \rightarrow EF, E'F')$ is not changed, if the sums in the definition are over only those pairs of paths s, s' which have *no common moves*.

Define $P(AB, A'B' \rightarrow EF, E'F')$ analogously also for $E = (x \pm 1, y - 1)$, $E' = (x' \pm 1, y - 1)$.

34. Probability/charge conservation. We have $\sum_{E, E', F, F'} P(AB, A'B' \rightarrow EF, E'F') = 1$, where the sum is over all quadruples $F = (x, y)$, $F' = (x', y)$, $E = (x \pm 1, y - 1)$, $E' = (x' \pm 1, y - 1)$ with fixed $y \geq 1$.

An electron has an antiparticle called *positron*. One can think of an antiparticle as a particle moving backwards in time. The motion is described by a similar model as follows.

Add one more checker to the checkerboard, which now moves either downwards-right or downwards-left to the diagonal neighbors. The added checker is called *black*, while the one studied before is called *white*.

For each pair of paths s, s' of the white and black checker respectively, define a vector $\vec{a}(s, s')$ analogously to the above, only for each turn of the *black* checker rotate the vector *counterclockwise* rather than clockwise (independently of the direction the checker turns). For instance, $\vec{a}(s, s') = (0, 2^{1-y})$, if s and s' is the same path with opposite directions. Denote¹⁸ by

$$\vec{a}(AB, B'A' \rightarrow EF, F'E') := \sum_{s, s'} \vec{a}(s, s')$$

the sum is over all the pairs of a white-checker path s starting with the move AB and ending with the move EF , and a black-checker path s' starting with the move $F'E'$ and ending with the move $B'A'$. The length square $P(AB, B'A' \rightarrow EF, F'E') = |\vec{a}(AB, B'A' \rightarrow EF, F'E')|^2$ is called the *probability to find an electron at F and a positron at F' , if they are emitted from A and A'* .

35. Independence. Solve analogue of Problem 32 for $P(AB, B'A' \rightarrow EF, F'E')$.

8 Interaction***

Question: the same as in the basic model but the y -coordinate is now interpreted as time.

Assumptions: the electron now generates a magnetic field affecting the motion; encircling by waveproof walls.

Results: interaction with the walls changes the motion of an electron.

We have reached an unexplored area: a physically correct rigorous definition of the next upgrade is not yet known. In this section we give a **WRONG definition leading to paradoxical results**:

- the upgrades measures the interaction of the electron with the walls rather than self-interaction;
- the interaction (with the walls) propagates at infinite speed rather than the speed of light.

But we hope that the introduced ideas still might be of interest.

The moving electron itself generates an magnetic field, which in turn affects the motion. The generated field is random, with the probability resulting from summation over all possible intermediate fields.

Fix $g \geq 0$ called the *interaction constant*¹⁹ (it is related to the electron charge). Fix a black square (x, y) called the *final position*. Fix the rectangle R formed by all the squares (x', y') such that $1 - y < x' < y$

¹⁷One should think of the value y as fixed, and the quadruples (F, F', E, E') as the possible outcomes of an experiment.

¹⁸This definition makes sense only for $x_0 \geq 2y$; otherwise annihilation of particles cannot be ignored, and the model becomes inappropriate.

¹⁹If the lattice step ϵ is not fixed, then g might depend on it. This is called *renormalization*; we do not discuss it.

and $0 < y' < y$. This *waveproof box* R encircles any possible checker path s from $(0,0)$ to (x,y) excluding the first and the last move; it is required to make the sum over all intermediate fields below finite.

Take any such path s and any assignment u of the numbers ± 1 to all the vertices *in the rectangle* R . Let n be the number of negative white squares in R for u (they play the role of turnings of the checker). Denote by

$$\vec{a}(s, u, g) = \frac{g^n}{2^{(y-2)^2} (1+g^2)^{(y-1)^2/2}} R^{-\pi n/2} \vec{a}(s, u)$$

the vector²⁰ $\vec{a}(s, u)$, rotated clockwise through $n \cdot 90^\circ$, multiplied by g^n and divided by $2^{(y-2)^2} (1+g^2)^{(y-1)^2/2}$.

Let u_{fin} be any assignment of the numbers ± 1 to all the vertices *on the top side of* R such that u_{fin} equals $+1$ at the endpoints of the side. It is called the *final magnetic field*. Denote by

$$\vec{a}(x, y, u_{\text{fin}}, g, +) := \sum_{s,u} \vec{a}(s, u, g)$$

the sum over all the paths s from $(0,0)$ to (x,y) starting and ending with an upwards-right move and over all the assignments u of the numbers ± 1 to all the vertices *in the rectangle* R such that

$$u = \begin{cases} u_{\text{fin}} & \text{on the top side of } R; \\ +1 & \text{on all the other sides of } R. \end{cases}$$

The length square $P(x, y, u_{\text{fin}}, g, +) = |\vec{a}(x, y, u_{\text{fin}}, g, +)|^2$ is the *probability that the final magnetic field equals u_{fin} and a right electron is found at (x,y)* . Define $P(x, y, u_{\text{fin}}, g, -)$ analogously.

36. Find the probabilities $P(x, y, u_{\text{fin}}, 1, +)$ and $P(x, y, u_{\text{fin}}, 1, -)$ for $g=1, y=2, 3$ and all possible x and u_{fin} .

The sum²¹

$$P(x, y, g, +) = \sum_{u_{\text{fin}}} P(x, y, u_{\text{fin}}, g, +)$$

over all assignments u_{fin} of the numbers ± 1 to the vertices on the top side of R is the *probability to find a right electron at (x,y)* . Define $P(x, y, g, -)$ analogously. For instance, $P(x, y, 0, +) = P(x, y, +)$ (why?).

37.* For a path s from $(0,0)$ to (x,y) , consider the sum $\sum_u \vec{a}(s, u, g)$ over all assignments u of ± 1 to all the vertices in the rectangle R such that $u = +1$ on the boundary of R . Express the sum through $\vec{a}(s)$ and the number of white squares in each of the two parts, into which R is divided by the path s .

38.* Let u_{\pm} be equal to ± 1 respectively at the top-right corner of the square $(2-y, y-1)$, and equal to $+1$ at all the other vertices on the top side of R . Solve analogues of Problems 4 and 5 for $\vec{a}(x, y, u_{\pm}, g, \pm)$ and $P(x, y, g, +) + P(x, y, g, -)$ instead of $a_1(x, y)$, $a_2(x, y)$, and $P(x, y)$.

9 Creation and annihilation***

Question: the same as in the model with identical particles and antiparticles.

Assumptions: electron-positron pairs now created and annihilated, no interaction, encircling by reflecting walls.

Results: no; this is only an ingredient for more realistic models with interaction.

Finally we have reached an unexplored area: **we state an almost 40-years-old open problem.** Start with mentioning what is *not done* in this section:

- we do *not* give a definition of the new upgrade (it is unknown so far);
- the upgrade (even if defined) would *not* explain any new experimental results.

But

- we *do* give a precise statement of the problem: which exactly properties of the upgrade are requested;

²⁰It is well-defined because the path s is contained in R except the first and the last move. We set $g^n = 1$ for $g = n = 0$.

²¹Here we sum probabilities rather than vectors. The notation $P(x, y, g, +)$ should not be confused with $P(x, y, m\varepsilon, +)$.

- the upgrade is an important ingredient of further ones fantastically agreeing with experiment.

Informally, our plan is as follows. Checker paths turning downwards or upwards or forming cycles mean creation and annihilation of electron-positron pairs. Even if we start with just one electron, we might end up with many electrons and positrons. To each possible configuration of the resulting particles, we want to assign a complex number so that its length square is the probability of the configuration in a sense. The number itself is the sum over all possible transitions from the initial configuration to the final one, that is, all possible paths configurations joining them. To make the sum finite, we put reflecting walls around.

Fix a rectangle R formed by all the squares (x, y) such that $x_{\min} \leq x \leq x_{\max}$ and $0 \leq y \leq y_{\max}$ (the lines $x = x_{\min}$ and $x = x_{\max}$ are called *reflecting walls*). Fix $m, \varepsilon > 0$ called *mass* and *lattice step*.

An *initial configuration* is any assignment²² of one of the signs “+” or “-” to some vertices inside R lying between the lines $y = 0$ and $y = 1$. Physically the signs mean the initial positions of positrons and electrons respectively (and points without a sign are vacant). For our game, this means that the checkers pass the vertices with the “-” sign upwards-left or -right, and the vertices with the “+” sign — downwards-left or -right (and do not pass through vertices without a sign). Analogously, a *final configuration* is an assignment to vertices between the lines $y = y_{\max}$ and $y = y_{\max} - 1$. An *intermediate configuration* is any assignment of one of the signs “+” or “-” to some vertices inside R such that the difference between the number of “+” and “-” signs on the 2 top vertices of each black square in the strip $1 \leq y \leq y_{\max} - 1$ equals the difference on the 2 bottom vertices. For our game, this means that the checkers start and finish motion in the lines $y = 0$ or $y = y_{\max}$ only. In other words, the signs at the vertices of each black square are in one of the 19 positions²³ shown in Figure 6 to the left. These 19 positions are called *basic configurations*.

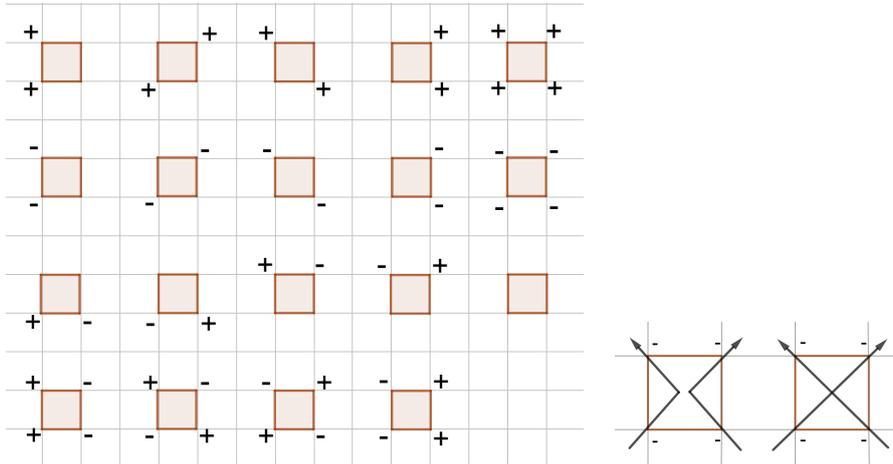


Figure 6: Basic configurations

Suppose that one has assigned a complex number (depending on $m\varepsilon$) to each of the 19 basic configurations. A “right” choice of the numbers is unknown; think of them as fixed parameters of our model.

Then take any intermediate configuration. In each black square inside R not having common points with the boundary, write the complex number assigned to the basic configuration in the black square. Assign the product of all the written numbers to the intermediate configuration.

Now to any pair of initial and final configurations, sum the complex numbers assigned to all possible intermediate configurations between them. Assign the resulting complex number to the pair.

39. (Puzzle) Restrict to configurations without “+” signs. Let $A, A', B, B', E, E', F, F'$ be the black squares defined in §7. Take any $x_{\min} < -y$ and $x_{\max} > x_0 + y$. Fix the initial and final configurations with exactly two “-” signs, located at the top-right vertices of the squares A, A' , and E, E' respectively. Assign complex numbers to the 6 basic configurations without “+” signs so that the sum of the numbers assigned to all intermediate configurations *without “+” signs* equals to the vector $\vec{a}(AB, A'B' \rightarrow EF, E'F')$ from §7.

A case of particular interest is when the initial configuration consists of just one “-” sign at the top-right vertex of the square $(0, 0)$ and the final configuration consists of just one “-” sign at the bottom-right

²²The assignment has nothing to do with the magnetic field from §6.

²³We consider positions of signs, but *not* possible checker paths in a particular black square like in Figure 6 to the right.

or bottom-left vertex of a black square (x, y_{\max}) . The complex numbers assigned to the pairs in question are denoted by $\bar{a}(x, y_{\max}, m\varepsilon, x_{\min}, x_{\max}, -)$ and $\bar{a}(x, y_{\max}, m\varepsilon, x_{\min}, x_{\max}, +)$ respectively.

The desired continuum limit of these complex numbers involves the following *modified Bessel functions and Hankel functions*:

$$\begin{aligned} K_0(x) &= \int_1^\infty \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t^2-1}} dt & H_0^{(1)}(x) &= \frac{2}{i\pi} \int_1^\infty \frac{e^{ixt}}{\sqrt{t^2-1}} dt \\ K_1(x) &= x \int_1^\infty e^{-xt} \sqrt{t^2-1} dt & H_1^{(1)}(x) &= -\frac{2x}{i\pi} \int_1^\infty e^{ixt} \sqrt{t^2-1} dt \end{aligned}$$

40.* Continuum limit.** Assign complex numbers to the 19 basic configurations so that for each $|y| < |x|$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x_{\max} \rightarrow \infty} n \bar{a} \left(2 \left\lfloor \frac{nx}{2} \right\rfloor, 2 \left\lfloor \frac{ny}{2} \right\rfloor, \frac{m}{n}, -x_{\max}, x_{\max}, - \right) &= m K_0(m\sqrt{x^2-y^2}); \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x_{\max} \rightarrow \infty} n \bar{a} \left(2 \left\lfloor \frac{nx}{2} \right\rfloor, 2 \left\lfloor \frac{ny}{2} \right\rfloor, \frac{m}{n}, -x_{\max}, x_{\max}, + \right) &= -im \frac{x+y}{\sqrt{x^2-y^2}} K_1(m\sqrt{x^2-y^2}); \end{aligned}$$

and for each $|y| > |x|$ we have

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x_{\max} \rightarrow \infty} n \bar{a} \left(2 \left\lfloor \frac{nx}{2} \right\rfloor, 2 \left\lfloor \frac{ny}{2} \right\rfloor, \frac{m}{n}, -x_{\max}, x_{\max}, - \right) &= im \frac{\pi}{2} H_0^{(1)}(m\sqrt{y^2-x^2}); \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x_{\max} \rightarrow \infty} n \bar{a} \left(2 \left\lfloor \frac{nx}{2} \right\rfloor, 2 \left\lfloor \frac{ny}{2} \right\rfloor, \frac{m}{n}, -x_{\max}, x_{\max}, + \right) &= m \frac{\pi}{2} \cdot \frac{x+y}{\sqrt{y^2-x^2}} H_1^{(1)}(m\sqrt{y^2-x^2}). \end{aligned}$$

Let us discuss the physical meaning of the upgrade. For $y \gg |x|$ the right-hand sides of the latter two equations are very close to the right-hand sides of the answer to Problem 10. Thus one may wish to interpret the upgrade as a more accurate approximation for the probability to find the electron in a square (x, y) . But this faces serious objections.

First, it is *in principle* impossible to measure the coordinates of an electron exactly²⁴. Such a priori uncertainty has the same order of magnitude as the correction introduced by the upgrade. Thus the upgrade does not actually add anything to description of the electron motion.

Second, for fixed initial configuration, the squares of the absolute values of the numbers assigned to all the possible final configurations do *not* sum up to 1 (even in the continuum limit). The reason is that distinct configurations are not mutually exclusive: for a field in a given configuration, there is a positive probability to find it in a different configuration. We do not know any clear explanation of that.

To summarize, the upgrade lacks a direct physical interpretation, and should be considered as an ingredient for further upgrades.

10 (1 + 1)-dimensional quantum electrodynamics***

Question: what is the probability to find electrons (or electron+positron) with momenta q and q' in the far future, if they were emitted with momenta p and p' in the far past?

Assumptions: interaction now switched on; all simplifying assumptions removed except the default ones: no nuclear forces, no gravitation, electron moves only along the x -axis (and y -coordinate is interpreted as time).

Results: quantum corrections.

Unifying the (so far unknown) upgrades discussed in the previous two sections would give an elementary definition of (1 + 1)-dimensional QED.

Future research

An *algorithmic* quantum field theory is a one which for each experimentally observable quantity and a positive number ε provides a precise statement of an algorithm giving the predicted value of the quantity within accuracy ε . (Surely, the predicted value does not have to agree with the experiment for ε less than accuracy of theory itself.) This is an extension of *constructive* quantum field theory, the latter currently being far away from *algorithmic* one.

²⁴This should not be confused with *uncertainty principle*, which does not allow simultaneous measurement of the coordinates and momentum.

Epilogue (underwater rocks)

We hope that at least some of our readers have become interested in elementary particles and want to learn more about them. As an epilogue, let us give a few warnings to such readers.

In popular science, theory of elementary particles is usually oversimplified. This sequence of problems is not an exception. The toy models introduced here are very rough and should be considered with a grain of salt. Simplicity is their only advantage; if taken too seriously, the models could even give a wrong physical intuition. Real understanding of particles theory requires excellent knowledge of both physics and mathematics.

We should also remark that nowadays there are almost no mathematical results in lattice quantum field theory; what we have is usually just a numeric simulation. Finally, there are “*theories of New Physics*” which are developed without any objective truth criterion: such theories are supported by neither experimental nor mathematical proofs (and some of them have experimental disproofs).

Hints, solutions, answers

For any vector $\vec{a} \in \mathbb{R}^2$ denote by a_1, a_2 the coordinates of \vec{a} . E.g., $\vec{a}(x, y, m\varepsilon, -) = (a_1(x, y, m\varepsilon, -), a_2(x, y, m\varepsilon, -))$. Sometimes the vector \vec{a} is considered as a complex number $a_1 + ia_2$ (although complex numbers are not required for the solution of most problems). In what follows assume that x and y have the same parity unless the opposite is indicated.

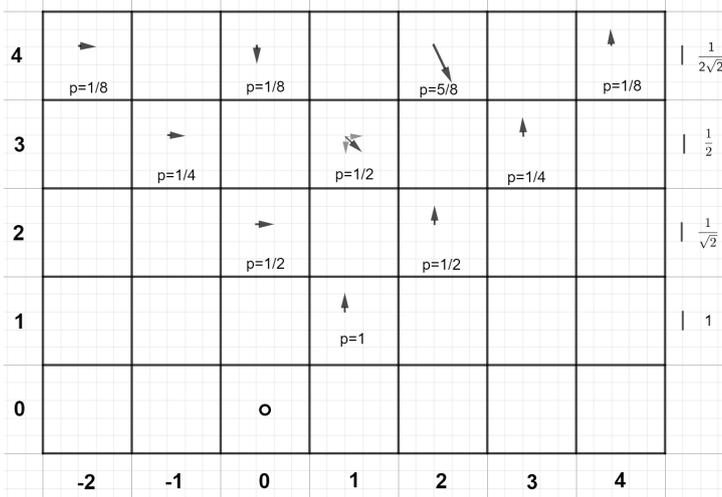
1. *Answer.* In the table, the vector in the cell (x, y) is $\vec{a}(x, y)$, and an empty cell (x, y) means that $\vec{a}(x, y) = (0, 0)$.

4	$(\frac{1}{2\sqrt{2}}, 0)$		$(0, -\frac{1}{2\sqrt{2}})$		$(\frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$		$(0, \frac{1}{2\sqrt{2}})$
3		$(\frac{1}{2}, 0)$		$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$		$(0, \frac{1}{2})$	
2			$(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$		$(0, \frac{1}{\sqrt{2}})$		
1				$(0, 1)$			
$y \backslash x$	-2	-1	0	1	2	3	4

In the following table, the number in the cell (x, y) is $P(x, y)$, and an empty cell (x, y) means that $P(x, y) = 0$.

4	1/8		1/8		5/8		1/8
3		1/4		1/2		1/4	
2			1/2		1/2		
1				1			
$y \backslash x$	-2	-1	0	1	2	3	4

(The vectors $\vec{a}(x, y)$ can be easily computed consecutively using Problem 4.) See also the following figure.



For any positive y we have $\sum_{x \in \mathbb{Z}} P(x, y) = 1$. (This is Problem 5.)

For $-4 \leq -y < x \leq y \leq 4$ the probability $P(x, y)$ equals 0 if and only if one of the numbers x, y is odd and the other one is even. For any $x > y$ and $x < -y + 1$ we have $P(x, y) = 0$. (In general it is not known, if $P(x, y) = 0$ can vanish for x and y of the same parity satisfying $-y < x \leq y$.)

For each odd y we have $\vec{a}(0, y) = 0$. For each nonnegative integer n we have

- the vector $\vec{a}(0, 8n + 2)$ is directed to the right,
- the vector $\vec{a}(0, 8n + 4)$ is directed downwards,
- the vector $\vec{a}(0, 8n + 6)$ is directed to the left,
- the vector $\vec{a}(0, 8n + 8)$ is directed upwards.

Analogously, for each even y we have $\vec{a}(1, y) = 0$. For each nonnegative integer n we have

- the vector $\vec{a}(1, 8n + 3)$ is directed downwards-right,
- the vector $\vec{a}(1, 8n + 5)$ is directed downwards-left,
- the vector $\vec{a}(1, 8n + 7)$ is directed upwards-left,
- the vector $\vec{a}(1, 8n + 9)$ is directed upwards-right.

(See the remark after the answer to Problem 9.)

Remark. In the table, $2^{(n+k-2)/2}\vec{a}(k-n+1, n+k-1)$ stands at the intersection of k -th column and n -th row:

(0, 1)	(0, 1)	(0, 1)	(0, 1)	(0, 1)	(0, 1)	(0, 1)	(0, 1)
(1, 0)	(1, -1)	(1, -2)	(1, -3)	(1, -4)	(1, -5)	(1, -6)	(1, -7)
(1, 0)	(0, -1)	(-1, -1)	(-2, 0)	(-3, 2)	(-4, 5)	(-5, 9)	(-6, 14)
(1, 0)	(-1, -1)	(-2, 0)	(-2, 2)	(-1, 4)	(1, 5)	(4, 4)	(8, 0)
(1, 0)	(-2, -1)	(-2, 1)	(0, 3)	(3, 3)	(6, 0)	(8, -6)	(8, -14)
(1, 0)	(-3, -1)	(-1, 2)	(3, 3)	(6, 0)	(6, -6)	(2, -12)	(-6, -14)
(1, 0)	(-4, -1)	(1, 3)	(6, 2)	(6, -4)	(0, -10)	(-10, -10)	(-20, 0)
(1, 0)	(-5, -1)	(4, 4)	(8, 0)	(2, -8)	(-10, -10)	(-20, 0)	(-20, 20)

2. *Answer:* no for both questions. For example, $P(2, 4) = 5/8 \neq 1/8 + 1/4 = P(2, 4 \text{ bypass } 2, 2) + P(2, 4 \text{ bypass } 0, 2)$ and $P(0, 4) = 1/8 < 1/4 = P(0, 4 \text{ bypass } 2, 2)$.

3. *Answer:* $P(0, 12) = 25/512$. *Hint:* the answer is obtained immediately by means of Remark after the answer to Problem 9 or it can be quickly computed recursively by means of the answer to Problem 4.

4. *Answer:*
$$\begin{cases} a_1(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2}}a_2(x+1, y-1) + \frac{1}{\sqrt{2}}a_1(x+1, y-1); \\ a_2(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2}}a_2(x-1, y-1) - \frac{1}{\sqrt{2}}a_1(x-1, y-1). \end{cases}$$

Solution. Let us derive the formula for $a_2(x, y)$; the derivation for $a_1(x, y)$ is analogous. Consider any path s from $(0, 0)$ to (x, y) . Denote by $t(s)$ the number of turnings in s . Denote $\vec{a}(s) = (a_1(s), a_2(s))$. Notice that the component $a_2(s) \neq 0$ if and only if $t(s)$ is even and $a_1(s) \neq 0$ if and only if $t(s)$ is odd. Therefore, $a_2(x, y) = \sum_{s:t(s) \text{ even}} a_2(s)$ and $a_1(x, y) = \sum_{s:t(s) \text{ odd}} a_1(s)$.

The last move in the path s is made either from $(x-1, y)$ or from $(x+1, y)$. It is obvious that if $t(s)$ is even, then the last move is directed upwards-right, else it is directed upwards-left. Since we are interested in $a_2(x, y)$, assume that last move is directed upwards-right.

Denote by s' the path s without the last move. If the directions of the last moves in s and s' coincide, then $\vec{a}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{a}(s')$, otherwise $\vec{a}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_2(s'), -a_1(s'))$. Therefore,

$$a_2(x, y) = \sum_{s:t(s) \text{ even}} a_2(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sum_{s':t(s') \text{ even}} a_2(s') - \sum_{s':t(s') \text{ odd}} a_1(s') \right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_2(x-1, y-1) - a_1(x-1, y-1)).$$

5. Let us prove by induction over y that $\sum_{x \in \mathbb{Z}} P(x, y) = 1$ for all $y \geq 1$: Obviously, $\sum_{x \in \mathbb{Z}} P(x, 1) = 1$. The step of induction follows immediately from the following computation:

$$\begin{aligned} \sum_{x \in \mathbb{Z}} P(x, y+1) &= \sum_{x \in \mathbb{Z}} [a_1(x, y+1)^2 + a_2(x, y+1)^2] = \sum_{x \in \mathbb{Z}} a_1(x, y+1)^2 + \sum_{x \in \mathbb{Z}} a_2(x, y+1)^2 = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{x \in \mathbb{Z}} (a_1(x+1, y) + a_2(x+1, y))^2 + \frac{1}{2} \sum_{x \in \mathbb{Z}} (a_2(x-1, y) - a_1(x-1, y))^2 = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{x \in \mathbb{Z}} (a_1(x, y) + a_2(x, y))^2 + \frac{1}{2} \sum_{x \in \mathbb{Z}} (a_2(x, y) - a_1(x, y))^2 = \sum_{x \in \mathbb{Z}} [a_1(x, y)^2 + a_2(x, y)^2] = \sum_{x \in \mathbb{Z}} P(x, y). \end{aligned}$$

A generalization of conservation law by Gleb Minaev and Ivan Russkikh, participants of Summer conference of Tournament of towns. Perform the change coordinates $(x, y) \mapsto (t, u) = (\frac{x+y}{2} - 1, \frac{y-x}{2})$, i.e., rotate the coordinate system through 45 degrees clockwise and shift it by the vector $(-1, 0)$.

Denote $\vec{b}(t, u) := \vec{a}(t-u+1, t+u+1)$, $Q(t, u) := P(t-u+1, t+u+1)$, $\vec{B}(t, u) := (1+m^2\varepsilon^2)^{(t+u)/2} \vec{b}(t, u)$. The coordinates of the vectors $\vec{b}(t, u)$ and $\vec{B}(t, u)$ denote by $b_1(t, u)$, $b_2(t, u)$, $B_1(t, u)$, $B_2(t, u)$.

Remark. In the new coordinate system, a checker moves between neighbouring points of the integer lattice rather than along the diagonals between black squares. Also we suppose that we start at $(0, 0)$ and move to any point of $(\mathbb{N} \cup \{0\})^2$, and the additional “pre-move” from $(-1, 0)$ to $(0, 0)$ is taken into account only to compute the number of turns.

For a subset $M \subset (\mathbb{N} \cup \{0\})^2$ denote $\vec{b}(t, u \text{ bypass } M) := \sum_s \vec{b}(s)$, where we sum is over all paths s from $(0, 0)$ to (t, u) , which bypass the points of the set M . Analogously, define $Q(t, u \text{ bypass } M)$, $\vec{b}(t, u \text{ bypass } M, \pm)$, $Q(t, u \text{ bypass } M, \pm)$. Also for a set M denote

$$Q(M) := \sum_{p \in M} Q(p \text{ bypass } M \setminus \{p\}).$$

Remark. Note that for an infinite set M the sum becomes infinite as well. The order of a summation is irrelevant because all the summands are positive.

Theorem 1. For each finite set $M \subset (\mathbb{N} \cup \{0\})^2$ such that there are no infinite paths from $(0;0)$ bypassing the points of M we have $Q(M) = 1$.

Proof. Prove the theorem by induction over $m := \max_{(t,u) \in M} (t+u)$, i.e., the maximal number of a downwards-right diagonal containing at least one point of the set M . The diagonal is called *maximal*.

Base: $m = 0$. In this case $M = (0,0)$ and $Q(M) = Q(0,0) = 1$.

Step. Let us prove a lemma.

Lemma 1. If a set $A \subset (\mathbb{N} \cap \{0\})^2$, which does not contain the points $(t, u), (t, u+1), (t+1, u) \in (\mathbb{N} \cap \{0\})^2$, then

$$Q(t, u \text{ bypass } A) = Q(t, u+1 \text{ bypass } A, -) + Q(t+1, u \text{ bypass } A, +).$$

Proof. This is straightforward:

$$\begin{aligned} Q(t, u+1 \text{ bypass } A, -) + Q(t+1, u \text{ bypass } A, +) &= b_1(t, u+1 \text{ bypass } A)^2 + b_2(t+1, u \text{ bypass } A)^2 = \\ &= \frac{(b_1(t, u \text{ bypass } A) + b_2(t, u \text{ bypass } A))^2 + (b_2(t, u \text{ bypass } A) - b_1(t, u \text{ bypass } A))^2}{2} = \\ &= b_1(t, u \text{ bypass } A)^2 + b_2(t, u \text{ bypass } A)^2 = Q(t, u \text{ bypass } A). \quad \square \end{aligned}$$

Suppose that the point $(t, u) \in M$ is such that $t+u$ is maximal. Suppose that there is a checker path starting at the point $(0,0)$ and ending at (t, u) with the last move, say, in the upwards direction bypassing all the points of the set $M \setminus \{(t, u)\}$. Then there exists a path to the point $(t, u-1)$, bypassing all the points of the set $M \setminus \{(t, u-1)\}$. Notice that in this case $(t, u-1) \notin M$, because the move to (t, u) is in the upwards direction. Hence there exists a path to the point $(t+1, u-1)$, bypassing all the points of the set $M \setminus \{(t+1, u-1)\}$. If $(t+1, u-1) \notin M$ then there exists a path going to infinity passing through $(t+1, u-1)$ and bypassing all the points of the set M . For example, the path turning right at the point (t, u) and only going right from there passes through (t, u) and bypasses all the points in M because the diagonal is maximal. Therefore $(t+1, u-1) \in M$. Notice that $Q(a, b \text{ bypass } A) = Q(a, b \text{ bypass } A, +) + Q(a, b \text{ bypass } A, -)$ for any set $A \subset (\mathbb{N} \cap \{0\})^2$. Denote $K := M \setminus \{(t, u); (t+1, u-1)\}$. Then we have the following chain of equalities (where we use 1 for the set $A = K$):

$$\begin{aligned} Q(M) &= Q(K) + Q(t, u \text{ bypass } M \setminus \{(t, u)\}) + Q(t+1, u-1 \text{ bypass } M \setminus \{(t+1, u-1)\}) = \\ &= Q(K) + Q(t, u \text{ bypass } M \setminus \{(t, u)\}, +) + Q(t, u \text{ bypass } M \setminus \{(t, u)\}, -) + \\ &\quad + Q(t+1, u-1 \text{ bypass } M \setminus \{(t+1, u-1)\}, +) + Q(t+1, u-1 \text{ bypass } M \setminus \{(t+1, u-1)\}, -) = \\ &= Q(K) + Q(t, u \text{ bypass } M \setminus \{(t, u)\}, +) + \\ &\quad + Q(t, u-1 \text{ bypass } M \setminus \{(t, u-1)\}) + Q(t+1, u-1 \text{ bypass } M \setminus \{(t+1, u-1)\}, -) = Q(M \cup \{(t, u-1)\}). \end{aligned}$$

Thus if the point $(t, u-1)$ is added to the set M then the probability $Q(M)$ is not changed.

This way we put new points onto the diagonal $t+u = m-1$, therefore, the maximal diagonal is not changed. Thus if we add a few points to the set M , then the paths bypassing other points of the set M bypass the points of M in the maximal diagonal as well. Therefore, if we remove all the points from the maximal diagonal, then $Q(M)$ is not changed and no infinite path bypassing the points of the set M appears. This way we change M keeping $Q(M)$ fixed but decreasing the number of a maximal diagonal. By the inductive hypothesis the new $Q(M)$ equals 1, hence the old one also equals 1. \square

6. Answer. For each x we have $a_1(x, y) = a_1(-x, y)$ and $a_2(x, y) + a_1(x, y) = a_2(2-x, y) + a_1(2-x, y)$.

Solution. For each path s denote by $f(s)$ the reflection of s with respect to the y axis. Then if s is a path to (x, y) , then $f(s)$ is a path to $(-x, y)$.

For each path s denote by $g(s)$ the path consisting of the same moves as s , but in the opposite order. Notice that reordering of moves does not affect the endpoint.

Now consider a path s to (x, y) such that $t(s)$ is odd. Then the last move in s is upwards-left. Therefore, the last move in $f(s)$ is upwards-right, hence the first move in $g(f(s))$ is upwards-right. Thus $f \circ g$ is a bijection between paths to (x, y) with odd number of tunings beginning with an upwards-right move and paths to $(-x, y)$ with odd number of tunings beginning with an upwards-right move.

To prove the second equation use the result of Problem 4:

$$a_1(x, y) + a_2(x, y) = \sqrt{2} \cdot a_1(x-1, y+1) = \sqrt{2} \cdot a_1(1-x, y+1) = a_1(2-x, y) + a_2(2-x, y).$$

Remark. These identities can also be proved simultaneously by induction over y using Problem 4. Also Problem 9 implies another identity $(y-x)a_2(x,y) = (y+x-2)a_2(2-x,y)$.

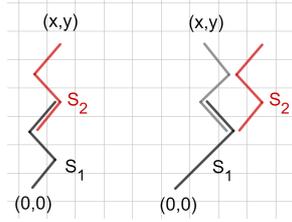
7. *Answer:* for each $0 < y' < y$ we have

$$a_1(x,y) = \sum_{x'} [a_2(x',y')a_1(x-x'+1,y-y'+1) + a_1(x',y')a_2(x'-x+1,y-y'+1)],$$

$$a_2(x,y) = \sum_{x'} [a_2(x',y')a_2(x-x'+1,y-y'+1) - a_1(x',y')a_1(x'-x+1,y-y'+1)].$$

The required expression for $\vec{a}(x,199)$ is obtained by taking $y = 199$ and $y' = 100$.

Solution. Fix any positive integer $y' < y$. Consider a path s from $(0,0)$ to (x,y) . Denote by (x',y') the square at which s intersects the line $y = y'$. Denote by s_1 the part of s that joins $(0,0)$ with (x',y') and by s_2 the part starting at the intersection square of s with the line $y = y' - 1$ and ending at (x,y) . Translate the path s_2 so that it starts at $(0,0)$.



Denote $\vec{a}(s) = (a_1(s), a_2(s))$. Then

$$a_1(s) = \begin{cases} a_1(s_1)a_2(s_2) & \text{if the move to } (x',y') \text{ is upwards-left,} \\ a_2(s_1)a_1(s_2) & \text{if the move to } (x',y') \text{ is upwards-right,} \end{cases}$$

$$a_2(s) = \begin{cases} -a_1(s_1)a_1(s_2), & \text{if the move to } (x',y') \text{ is upwards-left,} \\ a_2(s_1)a_2(s_2), & \text{if the move to } (x',y') \text{ is upwards-right.} \end{cases}$$

Therefore,

$$a_1(x,y) = \sum_s a_1(s) = \sum_{x'} \sum_{s \text{ through } (x',y')} a_1(s) = \sum_{x'} \left[\sum_{\substack{s \text{ through } (x',y'), \\ \text{move to } (x',y') \\ \text{is upwards-right}}} a_2(s_1)a_1(s_2) + \sum_{\substack{s \text{ through } (x',y'), \\ \text{move to } (x',y') \\ \text{is upwards-left}}} a_1(s_1)a_2(s_2) \right] =$$

$$= \sum_{x'} [a_2(x',y')a_1(x-x'+1,y-y'+1) + a_1(x',y')a_2(x'-x+1,y-y'+1)].$$

The formula for $a_2(x,y)$ is proven analogously.

Remark. Formulae illustrating the Huygens principle have the form of a convolution. In combinatorics the *convolution* of two given sequences $\{a_k\}$ and $\{b_l\}$ ($k, l \geq 0$) is the sequence $\{c_n\}$ ($n \geq 0$), defined by the equality $c_n = \sum_{k+l=n} a_k b_l$. A convolution of two sequences corresponds to the product of their *generating functions*: if

$$A(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k, \quad B(t) = \sum_{l=0}^{\infty} b_l t^l, \quad C(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n,$$

then $C(t) = A(t)B(t)$. Therefore, choosing the generating functions in a right way, we can write down the Huygens principle in a more compact form.

Define two series of Laurent polynomials (i.e., polynomials in variables t and t^{-1}):

$$P_n = P_n(t) = \sum_{m=-n+2}^n a_1(m,n)t^m, \quad Q_n = Q_n(t) = \sum_{m=-n+2}^n a_2(m,n)t^m.$$

These polynomials can be considered as generating functions of the sequences $a_{1,2}(m, n)$ with fixed n . From the answer to the Problems 6 and 7 we have

$$\begin{aligned} a_2(x, y) &= \sum_{x'} [a_2(x', y')a_2(x - x' + 1, y - y' + 1) - a_1(x', y')a_1(x' - x + 1, y - y' + 1)] = \\ &= \sum_{x'} [a_2(x', y')a_2(x - x' + 1, y - y' + 1) - a_1(x', y')a_1(x - x' - 1, y - y' + 1)]. \end{aligned}$$

This formula is equivalent to the following *addition theorem* for Q -polynomials:

$$Q_{n+m} = \frac{1}{t}Q_nQ_{m+1} - tP_nP_{m+1}.$$

Also from the Problems 6 and 7 we have

$$\begin{aligned} a_1(x, y) &= \sum_{x'} [a_2(x', y')a_1(x - x' + 1, y - y' + 1) + a_1(x', y')a_2(x' - x + 1, y - y' + 1)] = \\ &= \sum_{x'} [a_2(x', y')a_1(x - x' + 1, y - y' + 1) + \\ &\quad + a_1(x', y')(a_2(x - x' + 1, y - y' + 1) + a_1(x - x' + 1, y - y' + 1) - a_1(x - x' - 1, y - y' + 1))]. \end{aligned}$$

This formula respectively is equivalent to the following addition theorem for P -polynomials:

$$P_{n+m} = \frac{1}{t}(Q_nP_{m+1} + P_nQ_{m+1}) + \left(\frac{1}{t} - t\right)P_nP_{m+1}.$$

In particular substitution of $m = 1$ gives Dirac's equation written in terms of P - and Q -polynomials:

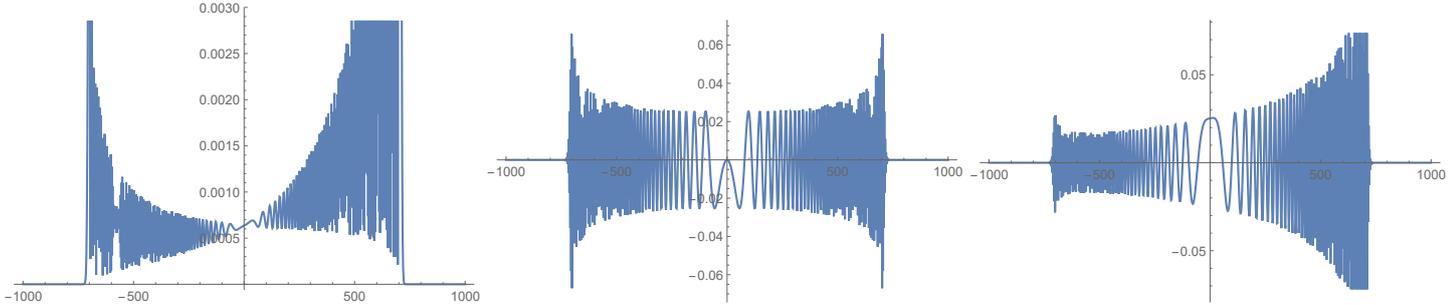
$$\begin{cases} P_{n+1} &= \frac{1}{t}Q_nP_2 + P_n \cdot \left(\frac{1}{t}Q_2 + \frac{1}{t}P_2 - tP_2\right) = \frac{1}{t\sqrt{2}}(Q_n + P_n), \\ Q_{n+1} &= \frac{1}{t}Q_nQ_2 - tP_nP_2 = \frac{t}{\sqrt{2}}(Q_n - P_n). \end{cases}$$

It follows immediately that

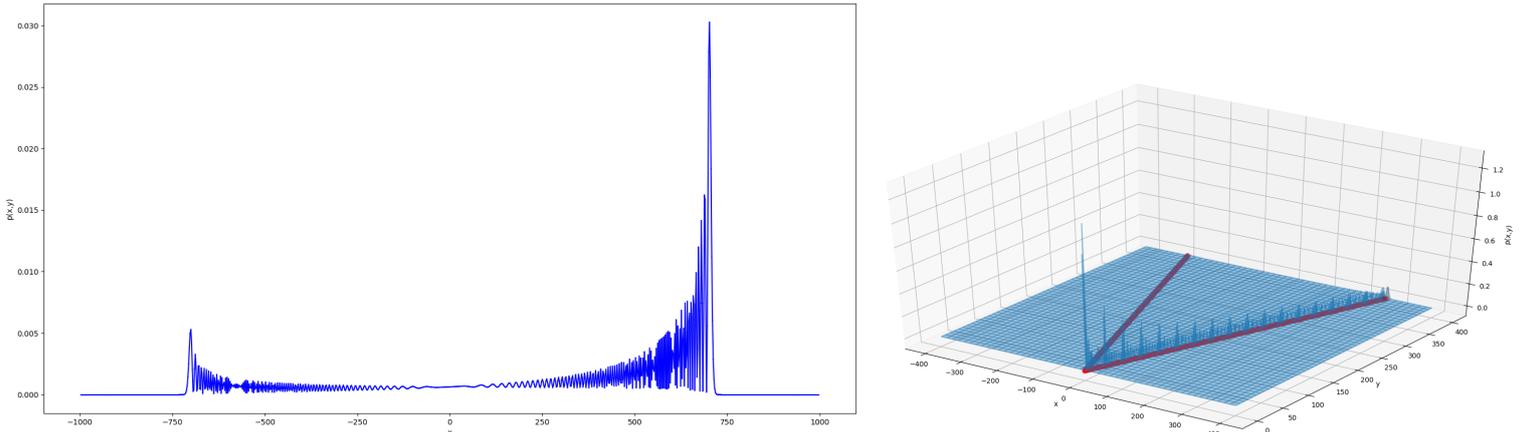
$$\begin{cases} t\sqrt{2}P_{n+1} - Q_n &= P_n = Q_n - \frac{\sqrt{2}}{t}Q_{n+1} \\ t\sqrt{2}P_{n+1} - P_n &= Q_n = P_n + \frac{\sqrt{2}}{t}Q_{n+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_{n+1} &= \frac{\sqrt{2}}{t}Q_n - \frac{Q_{n+1}}{t^2} \\ Q_{n+1} &= t^2P_{n+1} - t\sqrt{2}P_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_{n+1} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(t + \frac{1}{t}\right)P_n - P_{n-1} \\ Q_{n+1} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(t + \frac{1}{t}\right)Q_n - Q_{n-1}. \end{cases}$$

The latter formulae give us yet another recursive definitions for P_n and Q_n .

8. Answer: the graphs of $P(x, 1000)$, $a_1(x, 1000)$, and $a_2(x, 1000)$ respectively as functions in x :



In the above graph of $P(x, 1000)$, large values are cut out, to make the oscillations more visible. Compare with the following graphs of $P(x, 1000)$ and $P(x, y)$ without cutting (kindly provided by A. Daniyarkhodzhaev and F. Kuyanov, participants of the Summer School in Contemporary Mathematics in Dubna, 2019):



9. *Answer 1:* for each $y > |x|$ we have

$$a_1(x, y) = 2^{(1-y)/2} \sum_{w \equiv_2 \frac{y-x-2}{2}} (-1)^{\frac{y-x-2+2w \cdot \text{sign}(x)}{4}} \binom{|x|}{w} \binom{\frac{y-|x|-2}{2}}{\frac{y-x-2-2w}{4}},$$

$$a_2(x, y) = 2^{(1-y)/2} \sum_{w \equiv_2 \frac{y-x}{2}} (-1)^{\frac{y-x+2w \cdot \text{sign}(x)}{4}} \binom{|x|}{w} \binom{\frac{y-|x|-2}{2}}{\frac{y-x-2w}{4}};$$

for each $y = x > 0$ we have

$$a_1(y, y) = 0,$$

$$a_2(y, y) = 2^{(1-y)/2};$$

for each $0 < y < |x|$ or $y = -x > 0$ we have

$$a_1(x, y) = 0,$$

$$a_2(x, y) = 0.$$

Answer 2: for each $y > |x|$ we have

$$a_1(x, y) = 2^{(1-y)/2} \sum_{r=0}^{\lfloor y/2 \rfloor} (-1)^r \binom{(x+y-2)/2}{r} \binom{(y-x-2)/2}{r},$$

$$a_2(x, y) = 2^{(1-y)/2} \sum_{r=1}^{\lfloor y/2 \rfloor} (-1)^r \binom{(x+y-2)/2}{r} \binom{(y-x-2)/2}{r-1};$$

For other y the answer is the same as Answer 1.

Answer 3. For even $p+q$ and $2-q \leq p \leq q$ we have²⁵

$$a_1(p, q) = (-1)^q 2^{(q-3)/2} \cdot \sum_{k=\frac{q+|p|-2}{2}}^{q-2} (-2)^{-k} \cdot \frac{k!}{(q-2-k)! \left(\frac{p-q}{2} + 1 + k\right)! \left(k - \frac{p+q}{2} + 1\right)!}$$

$$a_2(p, q) = 2^{(1-q)/2} \cdot \binom{q-1}{\frac{q-p}{2}} - (-1)^q 2^{(q-3)/2} \sum_{k=\frac{q+|p|-2}{2}}^{q-2} (-2)^{-k} \cdot \frac{k!(k+p+1)}{(q-1-k)! \left(\frac{p-q}{2} + 1 + k\right)! \left(k - \frac{p+q}{2} + 1\right)!}$$

Remark. Answer 2 shows that $a_1(-y+2k, y)$ and $a_2(-y+2k, y)$ are the coefficients before t^{y-k-1} and t^{y-k} in the expansion of $2^{(1-y)/2}(1+t)^{y-k-1}(1-t)^{k-1}$ for $1 \leq k \leq y-1$. In particular,

$$a_1(0, 4n+2) = \frac{(-1)^n}{2^{(4n+1)/2}} \binom{2n}{n}, \quad a_1(0, 4n) = 0,$$

$$a_2(0, 4n+2) = 0, \quad a_2(0, 4n) = \frac{(-1)^n}{2^{(4n-1)/2}} \binom{2n-1}{n}.$$

The sums in the expressions for $a_1(x, y)$ and $a_2(x, y)$ for $y > |x|$ are particular cases of well-known Gaussian *hypergeometric functions* (but familiarity with them is not required for what follows):

$$a_1(x, y) = 2^{(1-y)/2} {}_2F_1 \left(1 - \frac{x+y}{2}, 1 + \frac{x-y}{2}, 1; -1 \right),$$

$$a_2(x, y) = 2^{(1-y)/2} \left(1 - \frac{x+y}{2} \right) {}_2F_1 \left(2 - \frac{x+y}{2}, 1 + \frac{x-y}{2}, 2; -1 \right).$$

Hint. Let us find $a_1(x, y)$ for $y > |x|$. Consider a path from the square $(0, 0)$ to the square (x, y) with an odd number of turns (the others do not contribute to $a_1(x, y)$). Denote by R and L the number of upwards-right

²⁵Fractions in those equalities are respectively

$$\binom{k}{q-2-k, \frac{p-q}{2} + 1 + k, k - \frac{p+q}{2} + 1} \text{ and } \binom{k}{q-2-k, \frac{p-q}{2} + 1 + k, k - \frac{p+q}{2} + 1} \cdot \frac{k+p+1}{q-1-k}.$$

and upwards-left moves respectively. These numbers are uniquely determined by the conditions $L + R = y$ and $R - L = x$. Denote by $2r + 1$ the number of turns in the path. Let x_1, x_2, \dots, x_{r+1} be the number of consecutive upwards-right moves *before* the first, the third, \dots , the last turn respectively. Let y_1, y_2, \dots, y_{r+1} be the number of consecutive upwards-left moves *after* the first, the third, \dots , the last turn respectively. Then $x_k, y_k \geq 1$ and

$$\begin{aligned} R &= x_1 + \dots + x_{r+1}; \\ L &= y_1 + \dots + y_{r+1}. \end{aligned}$$

Conversely, each collection $(x_1, x_2, \dots, x_{r+1}, y_1, y_2, \dots, y_{r+1})$ satisfying the resulting equations determines a path from $(0, 0)$ to (x, y) with an odd number of turns.

The problem now reduces to a combinatorial one: find the number of positive integer solutions of the resulting equations. For the first equation, this number equals to the number of ways to put r sticks between R coins in a row, that is, $\binom{R-1}{r}$. Thus

$$a_1(x, y) = 2^{(1-y)/2} \sum_{r=0}^{\lfloor y/2 \rfloor} (-1)^r \binom{R-1}{r} \binom{L-1}{r}.$$

Since $L + R = y$ and $R - L = x$, the required formula from Answer 2 follows.

The formula for $a_1(x, y)$ from Answer 1 can be derived using the polynomial from the remark after the answer. Depending on the sign of x we get

$$2^{(1-y)/2} (1+t)^{y-k-1} (1-t)^{k-1} = \begin{cases} 2^{(1-y)/2} (1-t^2)^{\frac{y-x-2}{2}} (1-t)^x, & \text{for } x \geq 0; \\ 2^{(1-y)/2} (1-t^2)^{\frac{y+x-2}{2}} (1+t)^{-x}, & \text{for } x < 0. \end{cases}$$

For each $|x| < y$ the numbers $a_1(x, y)$ and $a_2(x, y)$ are equal to the coefficients before $t^{\frac{x-y-2}{2}}$ and $t^{\frac{x-y}{2}}$ in the expansion of the polynomials. Considering the cases $x \geq 0$ and $x < 0$ separately we get the required formula.

The proof of the formulae for $a_2(x, y)$ for $y > |x|$ is analogous. The case $y \leq |x|$ is obvious.

Solution by Alexander Kudryavtsev (participant of Summer conference of Tournament of Towns). Denote $c_{p,q} = a_1(2p - q + 1, q + 1) \cdot 2^{q/2}$, $d_{p,q} = a_2(2p - q + 1, q + 1) \cdot 2^{q/2}$ (they are well-defined for $0 \leq p \leq q - 1$). Let $C(x, y), D(x, y)$ be generating functions of $c_{p,q}$ and $d_{p,q}$ respectively. From the answer to Problem 4 we obtain the following equations:

$$\begin{cases} \frac{C(x, y) - C(x, 0)}{y} = D(x, y) + C(x, y) \\ \frac{D(x, y) - D(x, 0)}{y} = x \cdot (D(x, y) - C(x, y)) \end{cases}$$

Since $C(x, 0) = 0$ and $D(x, 0) = 1$, we get

$$\begin{cases} C(x, y) = y \cdot (D(x, y) + C(x, y)) \\ D(x, y) - 1 = xy \cdot (D(x, y) - C(x, y)) \end{cases}$$

The solution of this system is $C(x, y) = \frac{y}{1 - y - xy + 2xy^2}$ and $D(x, y) = \frac{1 - y}{1 - y - xy + 2xy^2}$. Denote

$$E(x, y) := \frac{C(x, y)}{y} = \frac{D(x, y)}{1 - y} = 1 + y(1 + x - 2xy) + y^2(1 + x - 2xy)^2 + \dots$$

The coefficient of $x^n \cdot y^m$ in the $E(x, y)$ is equal to

$$\sum_{k=\max(n, m-n)}^m (-2)^{m-k} \cdot \frac{k!}{(m-k)!(n-m+k)!(k-n)!},$$

since from every summand of the form $y^k(1 + x - 2xy)^k$ we must take exactly one combination of factors:

- for the power of y to be equal to m , the number of factors $-2xy$ must be exactly $m - k$;
- for the power of x to be equal to n , the number of factors x must be exactly $n - (m - k)$;
- for the total number of factors to be k , the number of factors 1 must be $k - (n - (m - k)) - (m - k) = k - n$.

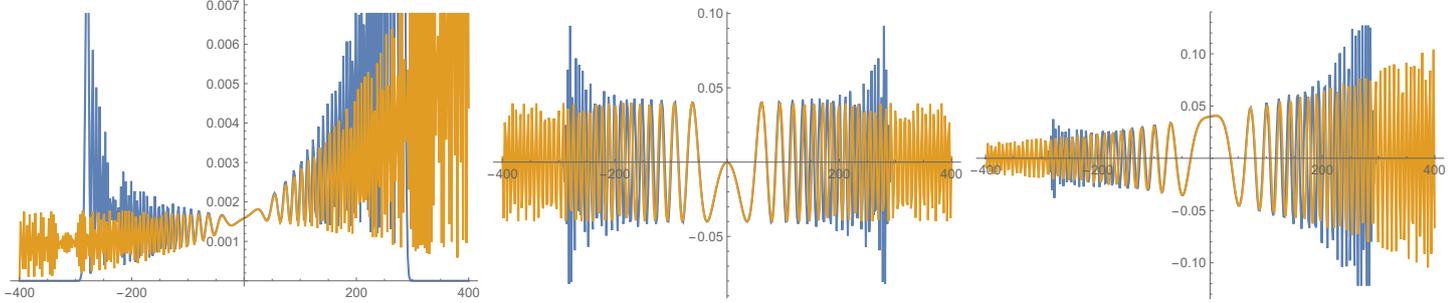
And the number of ways to choose $m - k$, $k - n$ and $n - (m - k)$ factors $(1 + x - 2xy)$ equals to the fraction in the formula for $E(x, y)$.

Now Answer 3 can be easily obtained from the equations $C(x, y) = y \cdot E(x, y)$ and $D(x, y) = E(x, y) - C(x, y)$.

10. *Answer:*

$$\vec{a}(x, y) = \frac{\sqrt{2} \left(\sin \left(\frac{\pi y}{4} - \frac{x^2}{2y} \right), e^{x/y} \cos \left(\frac{\pi y}{4} + \frac{x(2-x)}{2y} \right) \right)}{\sqrt{\pi y}} + O \left(\frac{\log^2 y}{y} \right) \text{ for } |x| = O(\sqrt{y}).$$

Remark. Compare the graphs of $P(x, 400)$, $a_1(x, 400)$, and $a_2(x, 400)$ (blue) with the graphs of their approximations in the right-hand side for $y = 400$ (orange):



Hint. Note that by Problem 9

$$\begin{aligned} a_2(-n + 2k + 1, n + 1) &= 2^{-n/2} [x^{k-1}] (-1)^k (1 + x)^{n-k-1} (1 - x)^k; \\ a_1(-n + 2k + 1, n + 1) &= 2^{-n/2} [x^k] (-1)^k (1 + x)^{n-k-1} (1 - x)^k. \end{aligned}$$

Thus

$$a_2(-n + 2k + 1, n + 1) = 2^{-n/2} (-1)^k \int_0^1 (1 + e^{2\pi i t})^{n-k-1} (1 - e^{2\pi i t})^k e^{-2\pi i (k-1)t} dt.$$

For an odd n denote $l = k - \frac{n-1}{2}$. We have

$$a_2(-n + 2k + 1, n + 1) = \frac{i^k}{\sqrt{2}} \int_0^1 (\sin(2\pi t))^{\frac{n-1}{2}} (\tan(\pi t))^l e^{-2\pi i (l-1)t} dt.$$

Since $l \ll n$, we can calculate the integral in the areas $(1/4 - \delta, 1/4 + \delta)$, $(3/4 - \delta, 3/4 + \delta)$ with good accuracy.

Denote $U \ll \sqrt{n \log n}$, $|l| \leq U$.

In $(1/4 - \delta, 1/4 + \delta)$ we have $t = 1/4 + \tau$, $|\tau| \leq \delta$,

$$\begin{aligned} \sin(2\pi t) &= \cos(2\pi\tau) = 1 - 2\pi^2\tau^2 + O(\tau^4) = e^{-2\pi^2\tau^2} + O(\tau^4); \\ \tan(\pi t) &= 1 + 2\pi\tau + O(\tau^2) = e^{2\pi\tau} + O(\tau^2); \\ e^{-2\pi i (l-1)t} &= i^{1-l} e^{-2\pi i (l-1)\tau} \end{aligned}$$

and we get

$$\frac{i^{k+1-l}}{\sqrt{2}} \int_{-\delta}^{\delta} (e^{-2\pi^2\tau^2} + O(\tau^4))^{\frac{n-1}{2}} (e^{2\pi\tau} + O(\tau^2))^l e^{-2\pi i (l-1)\tau} d\tau. \quad (*)$$

As $n\tau^4 \ll 1$ and $l\tau^2 \ll 1$, i.e. $n\delta^4 \ll 1$ and $U\delta^2 \ll 1$,

$$(*) = \frac{i^{\frac{n+1}{2}}}{\sqrt{2}} \int_{-\delta}^{\delta} (e^{-(n-1)\pi^2\tau^2} + O(\tau^4)) (e^{2\pi\tau l} + O(\tau^2)) e^{-2\pi i (l-1)\tau} d\tau.$$

If we open the brackets we get the summand $O(n\tau^4 e^{2\pi l\tau}) = O(n\delta^4 e^{2\pi U\delta}) = O(n^{-\Delta})$, since we ask $U\delta \ll \log n$. Then

$$(*) = \frac{i^{\frac{n+1}{2}}}{\sqrt{2}} \int_{-\delta}^{\delta} (e^{-(n-1)\pi^2\tau^2 + 2\pi\tau l - 2\pi i (l-1)\tau} + O(n^{-\Delta}) + O(U\delta^2)) d\tau.$$

Now estimate the error

$$\int_{\delta}^{\infty} e^{-(n-1)\pi^2\tau^2 + 2\pi\tau l} d\tau = \int_{\delta}^{\infty} e^{-(n-1)\pi^2(\tau - \frac{l}{\pi(n-1)})^2 + \frac{l^2}{n-1}} d\tau \ll \int_{\delta}^{\infty} e^{-(n-1)\pi^2\frac{\tau^2}{4} + \frac{l^2}{n-1}} d\tau \leq \frac{1}{\sqrt{n-1}} e^{-(n-1)\delta^2},$$

since $\frac{\tau}{2} \geq \frac{l}{\pi(n-1)}$, i.e. $\delta \geq U/(n-1)$.

So the necessary condition is $n\delta^2 \gg \log n$. Then we can calculate

$$(*) = \frac{i^{\frac{n+1}{2}}}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(n-1)\pi^2\tau^2 + 2\pi\tau l - 2\pi i(l-1)\tau} d\tau + O(n^{-\Delta}) + O(U\delta^3) = \frac{i^{\frac{n+1}{2}}}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(n-1)\pi^2\tau^2 + 2\pi\tau l - 2\pi i(l-1)\tau} d\tau + O(\log^2 n/n),$$

since $U\delta^3 \ll \log n \cdot \delta^2 \ll \log^2 n/n$.

Finally, from the formula $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2+bt} dt = \sqrt{\pi/ae} e^{b^2/4a}$ we get

$$(*) = \frac{i^{\frac{n+1}{2}}}{\sqrt{2\pi(n-1)}} e^{\frac{(2l-1)-2i(l-1)}{n-1}} + O(\log^2 n/n).$$

In the area of $3/4$ the integral approximately equals $i^{\frac{3n+1}{2}} e^{\frac{(2l-1)+2i(l-1)}{n-1}}$ and, since $3\frac{n+1}{2} \equiv -\frac{n+1}{2} \pmod{4}$,

$$\begin{aligned} a_2(-n+2k+1, n+1) &= e^{2l-1} \sqrt{\frac{2}{\pi(n-1)}} \cos\left(\frac{\pi(n+1)}{4} - \frac{2l^2}{n-1} + \frac{2l}{n-1}\right) + O(\log^2 n/n) = \\ &= -e^{2l-1} \sqrt{\frac{2}{\pi(n-1)}} \sin\left(\frac{\pi(n-1)}{4} - \frac{2l^2}{n-1} + \frac{2l}{n-1}\right) + O(\log^2 n/n). \end{aligned}$$

Analogously,

$$a_1(-n+2k+1, n+1) = \sqrt{\frac{2}{\pi(n-1)}} \cos\left(\frac{\pi(n-1)}{4} - \frac{2l^2}{n-1}\right) + O(\log^2 n/n).$$

For an even n the answer is

$$\begin{aligned} a_2(-n+2k+1, n+1) &= e^{2l} \sqrt{\frac{2}{\pi(n-2)}} \cos\left(\frac{\pi(n+1)}{4} - \frac{2(l^2-1/4)}{n-2}\right) + O(\log^2 n/n); \\ a_1(-n+2k+1, n+1) &= \sqrt{\frac{2}{\pi(n-2)}} \sin\left(\frac{\pi(n+1)}{4} - \frac{2(l+1/2)^2}{n-2}\right) + O(\log^2 n/n), \end{aligned}$$

where $l = k - n/2$.

11. Answer: $P(x, y) = P(x, y, +) + P(x, y, -)$; $\vec{a}(x, y, +) = (0, a_2(x, y))$; $\vec{a}(x, y, -) = (a_1(x, y), 0)$.

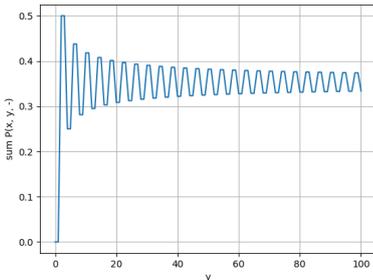
Solution. Note that if a path s from $(0, 0)$ to (x, y) starts and finishes with an upward-left move, then the checker changes the direction an odd number of times. Therefore, $\vec{a}(s) = (\pm 2^{\frac{1-y}{2}}, 0)$. Analogously, if a path s finishes with an upward-right move, then $\vec{a}(s) = (0, \pm 2^{\frac{1-y}{2}})$. Hence, $\vec{a}(x, y, +) = (0, a_2(x, y))$ and $\vec{a}(x, y, -) = (a_1(x, y), 0)$.

For the probability, the following formula comprehensively explains the answer:

$$P(x, y) = |\vec{a}(x, y, +) + \vec{a}(x, y, -)|^2 = a_1^2(x, y) + a_2^2(x, y) = P(x, y, +) + P(x, y, -).$$

12. Answer: for each integer $y \geq 2$ we have $P(y, -) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\lfloor y/2 \rfloor - 1} \frac{1}{(-4)^k} \binom{2k}{k}$. We have also $\max_y P(y, -) = P(2, -) = P(3, -) = 1/2$ and $\lim_{y \rightarrow \infty} P(y, -) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Remark. The graph of the sequence kindly provided by Gleb Minaev and Ivan Russkikh, participants of Summer Conference of Tournament of Towns:



Solution. Denote

$$S_1(y) = \sum_x a_1^2(x, y); \quad S_2(y) = \sum_x a_2^2(x, y); \quad S_{12}(y) = \sum_x a_1(x, y)a_2(x, y).$$

By Problem 5 for each $y \geq 1$ we have

$$S_1(y) + S_2(y) = 1.$$

By the answers to Problem 4, Problem 6 and Problem 7 we have

$$a_1(0, 2y) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_x a_1(x, y)(a_2(x, y) - a_1(x, y)) + a_2(x, y)(a_2(x, y) + a_1(x, y)) = \frac{1}{\sqrt{2}}(S_2(y) + 2S_{12}(y) - S_1(y)).$$

By definition and the answer to Problem 4 we have

$$S_1(y+1) - S_2(y+1) = 2S_{12}(y).$$

Hence,

$$S_1(y+1) - S_2(y+1) = S_1(y) - S_2(y) + a_1(0, 2y)\sqrt{2}.$$

Since $S_1(y) + S_2(y) = 1$, we have the recurrence relation $S_1(y+1) = S_1(y) + \frac{1}{\sqrt{2}}a_1(0, 2y)$.

The remark from the solution of Problem 9 implies by induction that

$$S_1(y) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\lfloor y/2 \rfloor - 1} \frac{1}{(-4)^k} \binom{2k}{k}.$$

It only remains to recall that $P(y, -) = S_1(y)$ by Problem 11.

Since the sequence $\binom{2j}{j} \frac{1}{4^j}$ decreases, it follows that $P(y, -) < P(3, -)$ for each $y > 3$, thus $\max_y P(y, -) = P(2, -) = P(3, -) = 1/2$.

By the Newton binomial theorem we get $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k} x^k = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}$ for each $x \in [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$. Setting $x = -\frac{1}{4}$ we obtain $\lim_{y \rightarrow \infty} P(y, -) = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k} \left(-\frac{1}{4}\right)^k = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Remark. Using the Stirling formula (see §2) one can estimate the convergence rate:

$$|P(k, -) - \lim_{y \rightarrow \infty} P(y, -)| < \frac{1}{2 \cdot 4^{\lfloor k/2 \rfloor}} \binom{2\lfloor k/2 \rfloor}{\lfloor k/2 \rfloor} < \frac{e}{2\pi\sqrt{2\lfloor k/2 \rfloor}} < \frac{1}{2\sqrt{k}}.$$

13. Answer:

$$P(x, y, 0, +) = \begin{cases} 1, & \text{for } x = y; \\ 0, & \text{for } x \neq y. \end{cases}$$

$$P(x, y, \infty, +) = \begin{cases} 1, & \text{for } x = 1, y \equiv 1 \pmod{2}; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Solution. By the definition, if the number of turns in a path s is nonzero then $\vec{a}(s, 0) = 0$. Therefore, $\vec{a}(x, y, 0, +) \neq 0$ if and only if $x = y$. Hence, we get the answer for $P(x, y, 0, +)$. The case $x = y$ is obvious.

One cannot *prove* the answer for $P(x, y, \infty, +)$ because it is a definition; but let us provide a *motivation* for the definition. If $m\varepsilon$ is “very large”, then $\vec{a}(s, m\varepsilon)$ is “small” unless the checker turns at each move; this gives the formula for $P(x, y, \infty, +)$.

Remark. $P(x, y, \infty, +) = \lim_{m\varepsilon \rightarrow \infty} P(x, y, m\varepsilon, +)$. Indeed,

$$\lim_{m\varepsilon \rightarrow \infty} |\vec{a}(s, m\varepsilon)| = \lim_{m\varepsilon \rightarrow \infty} \frac{(m\varepsilon)^{t(s)}}{(\sqrt{1+(m\varepsilon)^2})^{y-1}} = \lim_{m\varepsilon \rightarrow \infty} \frac{1}{(\sqrt{1+(m\varepsilon)^2})^{y-1-t(s)}} = \begin{cases} 1, & \text{for } t(s) = y-1; \\ 0, & \text{otherwise;} \end{cases}$$

where $t(s)$ is the number of turns in the path s . To compute $P(x, y, m\varepsilon, +)$, we take only paths with $t \equiv 0 \pmod{2}$, hence we get the answer.

14. Answer. Recall the notation introduced at the beginning of section “Hints...”. We have

$$a_1(x, y, m\varepsilon, -) = \frac{1}{\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}}(a_1(x+1, y-1, m\varepsilon, -) + m\varepsilon a_2(x+1, y-1, m\varepsilon, +)),$$

$$a_2(x, y, m\varepsilon, +) = \frac{1}{\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}}(a_2(x-1, y-1, m\varepsilon, +) - m\varepsilon a_1(x-1, y-1, m\varepsilon, -)),$$

$$a_2(x, y, m\varepsilon, -) = a_1(x, y, m\varepsilon, +) = 0.$$

For each $y > |x|$ we have

$$a_1(x, y, m\varepsilon) = (1+m^2\varepsilon^2)^{(1-y)/2} \sum_{r=0}^{\lfloor y/2 \rfloor} (-1)^r \binom{(x+y-2)/2}{r} \binom{(y-x-2)/2}{r} (m\varepsilon)^{2r+1},$$

$$a_2(x, y, m\varepsilon) = (1+m^2\varepsilon^2)^{(1-y)/2} \sum_{r=1}^{\lfloor y/2 \rfloor} (-1)^r \binom{(x+y-2)/2}{r} \binom{(y-x-2)/2}{r-1} (m\varepsilon)^{2r};$$

For each $y = x > 0$ we have

$$\begin{aligned} a_1(y, y, m\varepsilon) &= 0, \\ a_2(y, y, m\varepsilon) &= (1 + m^2\varepsilon^2)^{(1-y)/2}; \end{aligned}$$

For each $0 < y < |x|$ or $y = -x > 0$ we have

$$\begin{aligned} a_1(x, y, m\varepsilon) &= 0, \\ a_2(x, y, m\varepsilon) &= 0. \end{aligned}$$

Hint. First let us solve the analogue of Problem 4 for $m\varepsilon \neq 1$. Let us derive the formula for $a_2(x, y, m\varepsilon, +)$. Consider any path s from $(0, 0)$ to (x, y) .

The last move in the path s is made either from $(x-1, y)$ or from $(x+1, y)$. Denote by s' the path s without the last move. If the directions of the last moves in s and s' coincide, then $\vec{a}(s, m\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}}\vec{a}(s', m\varepsilon)$, otherwise $\vec{a}(s, m\varepsilon) = \frac{m\varepsilon}{\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}}(a_2(s', m\varepsilon), -a_1(s', m\varepsilon))$.

Therefore, $a_2(x, y, m\varepsilon, +) = \frac{1}{\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}}(a_2(x-1, y-1, m\varepsilon, +) - m\varepsilon a_1(x-1, y-1, m\varepsilon, -))$. The formula for $a_1(x, y, m\varepsilon, -)$ is proved analogously.

Now let us solve the analogue of Problem 5: we prove that $\sum_{x \in \mathbb{Z}} P(x, y, m\varepsilon) = 1$ for all $y \geq 1$ by induction over y using these results. Obviously, $\sum_{x \in \mathbb{Z}} P(x, 1, m\varepsilon) = 1$. The step of induction follows immediately from the following computation:

$$\begin{aligned} \sum_{x \in \mathbb{Z}} P(x, y+1, m\varepsilon) &= \sum_{x \in \mathbb{Z}} [a_1(x, y+1, m\varepsilon, -)^2 + a_2(x, y+1, m\varepsilon, +)^2] = \sum_{x \in \mathbb{Z}} a_1(x, y+1, m\varepsilon, -)^2 + \sum_{x \in \mathbb{Z}} a_2(x, y+1, m\varepsilon, +)^2 \\ &= \frac{1}{1+m^2\varepsilon^2} \sum_{x \in \mathbb{Z}} (a_1(x+1, y, m\varepsilon, -) + m\varepsilon a_2(x+1, y, m\varepsilon, +))^2 + \frac{1}{1+m^2\varepsilon^2} \sum_{x \in \mathbb{Z}} (a_2(x-1, y, m\varepsilon, +) - m\varepsilon a_1(x-1, y, m\varepsilon, -))^2 = \\ &= \frac{1}{1+m^2\varepsilon^2} \sum_{x \in \mathbb{Z}} (a_1(x, y, m\varepsilon, -) + m\varepsilon a_2(x, y, m\varepsilon, +))^2 + \frac{1}{1+m^2\varepsilon^2} \sum_{x \in \mathbb{Z}} (a_2(x, y, m\varepsilon, +) - m\varepsilon a_1(x, y, m\varepsilon, -))^2 = \\ &= \sum_{x \in \mathbb{Z}} [a_1(x, y, m\varepsilon, -)^2 + a_2(x, y, m\varepsilon, +)^2] = \sum_{x \in \mathbb{Z}} P(x, y, m\varepsilon). \end{aligned}$$

Let us now solve the analogue of Problem 9 for $m\varepsilon \neq 1$. Let us find $a_1(x, y)$ for $y > |x|$. We need to consider paths with an odd number of turns only. Denote by $2r+1$ the number of turns in a path. Denote by R and L the number of upwards-right and upwards-left moves respectively. Let x_1, x_2, \dots, x_{r+1} be the number of upwards-right moves *before* the first, the third, \dots , the last turn respectively. Let y_1, y_2, \dots, y_{r+1} be the number of upwards-left moves *after* the first, the third, \dots , the last turn respectively. Then $x_k, y_k \geq 1$ for $1 \leq k \leq r+1$ and

$$\begin{aligned} R &= x_1 + \dots + x_{r+1}; \\ L &= y_1 + \dots + y_{r+1}. \end{aligned}$$

The problem now reduces to a combinatorial one: find the number of positive integer solutions of the resulting equations. For the first equation, this number equals to the number of ways to put r sticks between R coins in a row, that is, $\binom{R-1}{r}$. Thus

$$a_1(x, y, m\varepsilon) = (1 + m^2\varepsilon^2)^{(1-y)/2} \sum_{r=0}^{\lfloor y/2 \rfloor} (-1)^r \binom{R-1}{r} \binom{L-1}{r} (m\varepsilon)^{2r+1}.$$

Since $L + R = y$ and $R - L = x$, the required formula follows. The proof of the formula for $a_2(x, y)$ for $y > |x|$ is analogous. The case $y \leq |x|$ is obvious.

15. Answer: for $|x| < y$ we have

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \vec{a} \left(2 \left\lfloor \frac{nx}{2} \right\rfloor, 2 \left\lfloor \frac{ny}{2} \right\rfloor, \frac{m}{n}, - \right) &= (m J_0(m\sqrt{y^2 - x^2}), 0); \\ \lim_{n \rightarrow \infty} n \vec{a} \left(2 \left\lfloor \frac{nx}{2} \right\rfloor, 2 \left\lfloor \frac{ny}{2} \right\rfloor, \frac{m}{n}, + \right) &= \left(0, -m \frac{x+y}{\sqrt{y^2 - x^2}} J_1(m\sqrt{y^2 - x^2}) \right); \end{aligned}$$

for $|x| \geq y$ both limits vanish.

Remark. The limit coincides with the retarded fundamental solution of Dirac's equation, describing motion of an electron in the plane.

Solution by Ivan Gaidai-Turlov, Timofey Kovalev and Alexey Lvov, participants of Summer conference of Tournament of towns. Denote $x_n := 2\lfloor \frac{nx}{2} \rfloor$, $y_n := 2\lfloor \frac{ny}{2} \rfloor$, $A := \frac{x_n + y_n}{2}$, $B := \frac{y_n - x_n}{2}$.

Lemma 2. $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + (\frac{m}{n})^2)^{\frac{y_n - 1}{2}} = 1$.

Proof. We have $1 < (1 + (\frac{m}{n})^2)^{\frac{y_n - 1}{2}} < (1 + (\frac{m}{n})^2)^{ny}$, therefore if $n \rightarrow \infty$ then $(1 + (\frac{m}{n})^2)^{ny} = \sqrt[n]{(1 + (\frac{m}{n})^2)^{n^2 y}} \rightarrow \sqrt[n]{e^{m^2 y}} \rightarrow 1$. Hence by the squeeze theorem we have $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + (\frac{m}{n})^2)^{\frac{y_n - 1}{2}} = 1$. \square

Lemma 3. $\lim_{n \rightarrow \infty} n(-1)^l C_{A-1}^l C_{B-1}^l (\frac{m}{n})^{2l+1} = (-1)^l \cdot \frac{(\frac{x+y}{2})^l (\frac{y-x}{2})^l \cdot m^{2l+1}}{(l!)^2}$.

Proof. Clearly, $n \cdot (-1)^l C_{A-1}^l C_{B-1}^l (\frac{m}{n})^{2l+1} = (-1)^l \cdot \frac{(A-1)(A-2)\dots(A-l) \cdot (B-1)(B-2)\dots(B-l)}{(l!)^2} \cdot \frac{m^{2l+1}}{n^{2l}}$.

Thus $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A-i}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lfloor \frac{nx}{2} \rfloor + \lfloor \frac{ny}{2} \rfloor}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{nx}{2} + \frac{ny}{2} + o(n)}{n} = \frac{x+y}{2}$. Analogously, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{B-i}{n} = \frac{y-x}{2}$.

Therefore,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot (-1)^l C_{A-1}^l C_{B-1}^l (\frac{m}{n})^{2l+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^l \cdot \frac{(A-1)\dots(A-l) \cdot (B-1)\dots(B-l)}{(l!)^2} \cdot \frac{m^{2l+1}}{n^{2l}} = (-1)^l \cdot \frac{(\frac{x+y}{2})^l (\frac{y-x}{2})^l \cdot m^{2l+1}}{(l!)^2}.$$

\square

For each n we have $|(-1)^l C_{A-1}^l C_{B-1}^l (\frac{m}{n})^{2l+1}| < |(-1)^l \cdot \frac{(\frac{x+y}{2})^l (\frac{y-x}{2})^l \cdot m^{2l+1}}{(l!)^2}|$ because $\frac{A-i}{n} < \frac{A}{n} < \frac{y+x}{2}$ and $\frac{B-i}{n} < \frac{B}{n} < \frac{y-x}{2}$.

Lemma 4. The series $n \cdot \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l C_{A-1}^l C_{B-1}^l (\frac{m}{n})^{2l+1}$ converges absolutely for all n .

Proof. We have

$$\begin{aligned} n \cdot \sum_{l=0}^{\infty} |(-1)^l C_{A-1}^l C_{B-1}^l (\frac{m}{n})^{2l+1}| &< \sum_{l=0}^{\infty} |(-1)^l \cdot \frac{(\frac{x+y}{2})^l (\frac{y-x}{2})^l \cdot m^{2l+1}}{(l!)^2}| = \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} m \cdot \frac{(\frac{x+y}{2})^l (\frac{y-x}{2})^l \cdot m^{2l}}{(l!)^2} < \sum_{l=0}^{\infty} m \cdot \frac{(\frac{x+y}{2})^l (\frac{y-x}{2})^l \cdot m^{2l}}{(l!)} = m \cdot e^{\frac{y^2 - x^2}{4} m^2}. \end{aligned}$$

\square

Hence $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l C_{A-1}^l C_{B-1}^l (\frac{m}{n})^{2l+1} = (\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{l=0; 2|l}^{\infty} C_{A-1}^l C_{B-1}^l (\frac{m}{n})^{2l+1}) - (\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{l=0; 2 \nmid l}^{\infty} C_{A-1}^l C_{B-1}^l (\frac{m}{n})^{2l+1})$.

Lemma 5. Suppose $(\{a_0(n)\}, \{a_1(n)\}, \dots)$ is a sequence of nonnegative sequences such that $\lim_{n \rightarrow \infty} a_i(n) = b_i$ and $a_i(n) < b_i$ for each i, n . Then $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{\infty} a_i(n) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i$.

Proof. Denote $b := \sum_{i=0}^{\infty} b_i$. Then for each n we have $\sum_{i=0}^{\infty} a_i(n) < b$. Take any $\varepsilon > 0$. Take such N that $\sum_{i=0}^N b_i > b - \varepsilon$. For each $0 \leq i \leq N$ take M_i such that $\forall t \geq M_i : a_i(t) > b_i - \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}$. Then for all $n > \max(M_0, M_1, \dots, M_N)$ we have $\sum_{i=0}^{\infty} a_i(n) > b - \varepsilon$. Therefore, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{\infty} a_i(n) = b$. \square

From Lemmas 5 and 3 it follows that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \sum_{l=0; 2|l}^{\infty} C_{A-1}^l C_{B-1}^l (\frac{m}{n})^{2l+1} = \sum_{l=0; 2|l}^{\infty} \frac{(\frac{x+y}{2})^l (\frac{y-x}{2})^l \cdot m^{2l+1}}{(l!)^2}.$$

Therefore, by Problem 14 and Lemma 2 we have

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \vec{a}(x_n, y_n, \frac{m}{n}, -) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \sum_{l=0}^{\infty} n(-1)^l C_{A-1}^l C_{B-1}^l (\frac{m}{n})^{2l+1} = \\ &= (\sum_{l=0; 2|l}^{\infty} \frac{(\frac{x+y}{2})^l (\frac{y-x}{2})^l \cdot m^{2l+1}}{(l!)^2}) - (\sum_{l=0; 2 \nmid l}^{\infty} \frac{(\frac{x+y}{2})^l (\frac{y-x}{2})^l \cdot m^{2l+1}}{(l!)^2}) = m \cdot J_0(m \sqrt{y^2 - x^2}). \end{aligned}$$

It can be proven analogously that $\lim_{n \rightarrow \infty} n\bar{a}(x_n, y_n, \frac{m}{n}, +) = -im \frac{x+y}{\sqrt{y^2-x^2}} \cdot J_1(m\sqrt{y^2-x^2})$.

Solution. Denote *modified Bessel functions*

$$I_0(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2k}}{(k!)^2} \quad \text{and} \quad I_1(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2k+1}}{k!(k+1)!}.$$

The answer follows from the following stronger theorem.

Theorem 2. *Let $0 < \varepsilon_0 \leq 1/2$, $\min\{y+x, y-x\} \geq \varepsilon_0$, $z := m\sqrt{y^2-x^2}$, $n \geq n_0 = n_0(z, \varepsilon_0) = 4e^{3z}/\varepsilon_0^2$. Then*

$$\begin{aligned} a_1\left(2\left\lfloor\frac{nx}{2}\right\rfloor, 2\left\lfloor\frac{ny}{2}\right\rfloor, \frac{m}{n}, -\right) &= \frac{m}{n} \left(J_0(z) + O\left(\frac{\log^2 n}{\varepsilon_0 n} I_0(z)\right) \right), \\ a_2\left(2\left\lfloor\frac{nx}{2}\right\rfloor, 2\left\lfloor\frac{ny}{2}\right\rfloor, \frac{m}{n}, +\right) &= -\frac{m}{n} \frac{y+x}{\sqrt{y^2-x^2}} \left(J_1(z) + O\left(\frac{\log^2 n}{\varepsilon_0 n} I_1(z)\right) \right). \end{aligned}$$

Proof. Denote $x_n = 2\lfloor\frac{nx}{2}\rfloor$, $y_n = 2\lfloor\frac{ny}{2}\rfloor$. By Problem 9 we have

$$\begin{aligned} a_1\left(x_n, y_n, \frac{m}{n}, -\right) &= \left(1 + \frac{m^2}{n^2}\right)^{\frac{1-y_n}{2}} \frac{m}{n} \sum_{r=0}^{\lfloor y_n/2 \rfloor} (-1)^r \binom{(y_n+x_n-2)/2}{r} \binom{(y_n-x_n-2)/2}{r} \left(\frac{m}{n}\right)^{2r}, \\ a_2\left(x_n, y_n, \frac{m}{n}, +\right) &= \left(1 + \frac{m^2}{n^2}\right)^{\frac{1-y_n}{2}} \frac{m}{n} \sum_{r=1}^{\lfloor y_n/2 \rfloor} (-1)^r \binom{(y_n+x_n-2)/2}{r} \binom{(y_n-x_n-2)/2}{r-1} \left(\frac{m}{n}\right)^{2r-1}. \end{aligned}$$

Since $1 + \frac{m^2}{n^2} \leq e^{m^2/n^2}$ it follows that $\left(1 + \frac{m^2}{n^2}\right)^{\frac{1-y_n}{2}} \geq e^{\frac{m^2}{n^2}(\frac{1-y_n}{2})}$ because $y_n \geq 1$. Also $\frac{1-y_n}{2} \geq \frac{-y_n}{2}$. Hence,

$$1 \geq \left(1 + \frac{m^2}{n^2}\right)^{\frac{1-y_n}{2}} \geq e^{\frac{m^2}{n^2}(\frac{-y_n}{2})} \geq 1 - \frac{m^2 y}{2n}.$$

Thus $\left(1 + \frac{m^2}{n^2}\right)^{\frac{1-y_n}{2}} = 1 + O\left(\frac{m^2 y}{n}\right)$.

To find the asymptotic form for a_1 and a_2 consider the T -th partial sums with $T = \lfloor \log n \rfloor + 1$ summands. The inequalities $y \geq \varepsilon_0$ and $n \geq \frac{4}{\varepsilon_0^2}$ guarantee that the total number of summands $\lfloor \frac{y_n}{2} \rfloor \geq T$ because $\frac{ny}{2} \geq \sqrt{n} \geq \log n + 1$ for $n > 0$.

For $r \geq T$ the ratios of consecutive summands in the expressions for a_1 and a_2 equal respectively

$$\begin{aligned} \left(\frac{m}{n}\right)^2 \frac{((y_n+x_n-2)/2-r)((y_n-x_n-2)/2-r)}{(r+1)^2} &< \left(\frac{m}{n}\right)^2 \cdot \frac{n(y+x)}{2T} \cdot \frac{n(y-x)}{2T} = \frac{z^2}{4T^2}, \\ \left(\frac{m}{n}\right)^2 \frac{((y_n+x_n-2)/2-r)((y_n-x_n-2)/2-r+1)}{(r-1)r} &< \left(\frac{m}{n}\right)^2 \cdot \frac{n(y+x)}{2T} \cdot \frac{n(y-x)}{2T-2} = \frac{z^2}{4T(T-1)}. \end{aligned}$$

From the condition $n > e^{3z+1}$ it follows that $T = \lfloor \log n \rfloor + 1 \geq 3z + 1$ and $\frac{z^2}{4T^2} < \frac{z^2}{4T(T-1)} < \frac{1}{2}$. Therefore, in both cases the error term (i.e., the sum over $r \geq T$) is less than the sum of geometric series with ratio $\frac{1}{2}$. Hence,

$$\begin{aligned} a_1\left(n_x, n_y, \frac{m}{n}, -\right) &= \frac{m}{n} \left(1 + O\left(\frac{m^2 y}{n}\right)\right) \\ &\quad \cdot \left[\sum_{r=0}^{T-1} (-1)^r \binom{(y_n+x_n-2)/2}{r} \binom{(y_n-x_n-2)/2}{r} \left(\frac{m}{n}\right)^{2r} + O\left(\frac{(y^2-x^2)^T}{(T!)^2} \cdot \left(\frac{m}{2}\right)^{2T}\right) \right], \\ a_2\left(n_x, n_y, \frac{m}{n}, +\right) &= \frac{m}{n} \left(1 + O\left(\frac{m^2 y}{n}\right)\right) \\ &\quad \cdot \left[\sum_{r=1}^{T-1} (-1)^r \binom{(y_n+x_n-2)/2}{r} \binom{(y_n-x_n-2)/2}{r-1} \left(\frac{m}{n}\right)^{2r-1} + O\left(\frac{(y+x)^T (y-x)^{T-1}}{(T-1)! T!} \cdot \left(\frac{m}{2}\right)^{2T-1}\right) \right]. \end{aligned}$$

The error term in the latter formulae are estimated as follows. Since $T! \geq (T/3)^T$ and $T \geq \sqrt{y^2-x^2} \frac{3m\sqrt{e}}{2} = \frac{3\sqrt{e}}{2}z$, it follows that

$$\frac{(y^2-x^2)^T}{(T!)^2} \cdot \left(\frac{m}{2}\right)^{2T} \leq \frac{(y^2-x^2)^T}{(T)^{2T}} \cdot \left(\frac{3m}{2}\right)^{2T} \leq e^{-T} \leq \frac{1}{n}.$$

Now transform binomial coefficients in the following way:

$$\binom{\alpha n - 1}{r} = \frac{(\alpha n - 1) \cdots (\alpha n - r)}{r!} = \frac{(\alpha n)^r}{r!} \left(1 - \frac{1}{\alpha n}\right) \cdots \left(1 - \frac{r}{\alpha n}\right).$$

If $\alpha \geq \varepsilon_0$ and $r < T$ then $\frac{r}{\alpha n} < \frac{T}{\alpha n} < \frac{\sqrt{n}}{n\varepsilon_0} = \frac{1}{\sqrt{n\varepsilon_0}} \leq \frac{\varepsilon_0}{2} \cdot \frac{1}{\varepsilon_0} = \frac{1}{2}$. Hence from the inequalities $e^{-2x} \leq 1 - x < e^{-x}$ for $0 \leq x \leq 1/2$ it follows that

$$\left(1 - \frac{1}{\alpha n}\right) \cdots \left(1 - \frac{r}{\alpha n}\right) \geq e^{-\frac{2}{\alpha n}} e^{-\frac{4}{\alpha n}} \cdots e^{-\frac{2r}{\alpha n}} = e^{-\frac{r(r+1)}{\alpha n}} \geq e^{-\frac{T^2}{\alpha n}} \geq 1 - \frac{T^2}{\alpha n} \geq 1 - \frac{T^2}{\varepsilon_0 n}.$$

Therefore, $\binom{\alpha n - 1}{r} = \frac{(\alpha n)^r}{r!} \left(1 + O\left(\frac{T^2}{\varepsilon_0 n}\right)\right)$.

Denote $R = \frac{T^2}{\varepsilon_0 n} I_0(z)$. Replacing $\binom{(y_n + x_n - 2)/2}{r}$ and $\binom{(y_n - x_n - 2)/2}{r}$ in the previous expression for a_1 we get

$$\begin{aligned} a_1\left(x_n, y_n, \frac{m}{n}, -\right) &= \frac{m}{n} \left(1 + O\left(\frac{m^2 y}{n}\right)\right) \cdot \left[\sum_{r=0}^{T-1} (-1)^r \left(\frac{m}{2}\right)^{2r} \frac{(y^2 - x^2)^r}{(r!)^2} + O(R)\right] = \\ &= \frac{m}{n} \left(1 + O\left(\frac{m^2 y}{n}\right)\right) \cdot \left[\sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \left(\frac{m}{2}\right)^{2r} \frac{(y^2 - x^2)^r}{(r!)^2} + O(R)\right] = \frac{m}{n} \left(1 + O\left(\frac{m^2 y}{n}\right)\right) \cdot (J_0(z) + O(R)). \end{aligned}$$

Here we can replace the sum with T summands by an infinite sum because the “tail” of alternating series with decreasing absolute value of the summands can be estimated by the first summand:

$$\left|\sum_{r=T}^{\infty} (-1)^r \left(\frac{m}{2}\right)^{2r} \frac{(y^2 - x^2)^r}{(r!)^2}\right| \leq \frac{(z/2)^{2T}}{(T!)^2} \leq \frac{1}{n}$$

(the latter inequality has been proved before).

We have $m^2 y \varepsilon_0 \leq m^2 \cdot \max\{y + x, y - x\} \cdot \min\{y + x, y - x\} = m^2(y^2 - x^2) = z^2 \leq 9z^2 \leq T^2$, thus $\frac{m^2 y}{n} J_0(z) \leq \frac{T^2}{\varepsilon_0 n} I_0(z)$, hence $a_1\left(x_n, y_n, \frac{m}{n}, -\right) = \frac{m}{n}(J_0(z) + O(R))$ as required.

Analogously,

$$\begin{aligned} a_2\left(x_n, y_n, \frac{m}{n}, +\right) &= \frac{m}{n} \left(1 + O\left(\frac{m^2 y}{n}\right)\right) \cdot \frac{y + x}{\sqrt{y^2 - x^2}} \cdot \left[\sum_{r=1}^{T-1} (-1)^r \left(\frac{m}{2}\right)^{2r-1} \frac{(y^2 - x^2)^{\frac{2r-1}{2}}}{(r-1)!r!} + O\left(\frac{T^2}{\varepsilon_0 n} I_1(z)\right)\right] = \\ &= -\frac{m}{n} \cdot \frac{y + x}{\sqrt{y^2 - x^2}} \left(J_1(z) + O\left(\frac{T^2}{\varepsilon_0 n} I_1(z)\right)\right). \end{aligned}$$

□

16. Answer: see the following table, where the pair $(c, d)_+$ in the cell (x, y) means that $\vec{a}(x, y, 4, 3, +) = \frac{1}{\sqrt{3}}(c, d)$, and $(c, d)_-$ means that $\vec{a}(x, y, 4, 3, -) = \frac{1}{\sqrt{3}}(c, d)$; an empty cell (x, y) means that $\vec{a}(x, y, 4, 3, +) = \vec{a}(x, y, 4, 3, -) = (0, 0)$.

3	$(0, 0)_+$ $(-1, 0)_-$		$(0, 1)_+$ $(0, 0)_-$		$(0, -2)_+$ $(0, 0)_-$		$(0, 2)_+$ $(-1, 0)_-$		$(0, -1)_+$ $(0, 0)_-$
2		$(0, 0)_+$ $(-1, 0)_-$		$(0, -1)_+$ $(1, 0)_-$		$(0, 1)_+$ $(-1, 0)_-$		$(0, -1)_+$ $(0, 0)_-$	
1			$(0, -1)_+$ $(0, 0)_-$		$(0, 1)_+$ $(0, 0)_-$		$(0, -1)_+$ $(0, 0)_-$		
$y \backslash x$	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5

Hint. Note that we are interested only in even x_0 , thus $2\pi x_0 \varepsilon / \lambda = \frac{\pi x_0}{2}$ is a multiple of π . Analogously to Problem 1, that means that $\vec{a}(x, y, 4, 3, +)$ is parallel to Oy and $\vec{a}(x, y, 4, 3, -)$ is parallel to Ox (be careful: this is not true for an arbitrary ε / λ).

17. Let us give a more general formula; the solution of the problem is the particular case $m\varepsilon = 1$. Denote

$$\begin{aligned} a_-(x, y) &:= \vec{a}(x, y, m\varepsilon, \lambda/\varepsilon, \Delta, -); \\ a_+(x, y) &:= \vec{a}(x, y, m\varepsilon, \lambda/\varepsilon, \Delta, +), \end{aligned}$$

where the vectors in the right-hand side are defined analogously to $\vec{a}(x, y, \lambda/\varepsilon, \Delta, \pm)$ and $\vec{a}(x, y, m\varepsilon, \pm)$. (Beware that $a_-(x, y)$ and $a_+(x, y)$ are *vector*-valued functions; unlike $a_1(x, y)$ and $a_2(x, y)$ they are *not* coordinates of any vector.) Then we have the *Dirac equation* (where $i := R^{\pi/2}$ is the counterclockwise rotation through 90°)

$$\begin{cases} a_-(x, y) &= \frac{1}{\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}}a_-(x+1, y-1) + \frac{-im\varepsilon}{\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}}a_+(x+1, y-1); \\ a_+(x, y) &= \frac{-im\varepsilon}{\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}}a_-(x-1, y-1) + \frac{1}{\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}}a_+(x-1, y-1). \end{cases}$$

From Problem 14 we know that this equation holds for $\Delta = 1$. It can be generalised for any greater Δ because one can change the order of rotations $R^{2\pi x_0\varepsilon/\lambda}$ and $i = R^{\pi/2}$.

Using this equation, analogously to Problem 14 we get $\sum_{x \in \mathbb{Z}} P(x, y, \lambda/\varepsilon, \Delta) = 1$ for $y \geq 1$ by induction over y .

18. Since $\Delta P(x, y, \lambda/\varepsilon, \Delta, +) = |\sqrt{\Delta}\vec{a}(x, y, \lambda/\varepsilon, \Delta, +)|^2$, it suffices to prove that $\sqrt{\Delta}\vec{a}(x, y, \lambda/\varepsilon, \Delta, +)$ does not depend on Δ for $\Delta > y + |x|$. By definition $\sqrt{\Delta}\vec{a}(x, y, \lambda/\varepsilon, \Delta, +) = \sum_{\substack{x_0=\Delta-1 \\ x_0=1-\Delta \\ x_0 \text{ even}}} \sum_s R^{2\pi x_0\varepsilon/\lambda}\vec{a}(s)$. But there are no paths s starting at $(x_0, 0)$ and ending at (x, y) for $|x - x_0| > y$, thus increasing Δ over $y + |x|$ does not change the sum.

19. Answer: if x_1 and x_2 are both even, then

$$\begin{aligned} \vec{a}(x_1, y, \lambda/\varepsilon, +) &= R^{(x_1-x_2)2\pi\varepsilon/\lambda}\vec{a}(x_2, y, \lambda/\varepsilon, +), \\ \vec{a}(x_1, y, \lambda/\varepsilon, -) &= R^{(x_1-x_2)2\pi\varepsilon/\lambda}\vec{a}(x_2, y, \lambda/\varepsilon, -). \end{aligned}$$

Solution. From the solution of Problem 18 it follows that $\vec{a}(x, y, \lambda/\varepsilon, +) = \sum_{x_0 \text{ even}} \sum_s R^{2\pi x_0\varepsilon/\lambda}\vec{a}(s)$, where the second sum is over those paths from $(x_0, 0)$ to (x, y) , which both start and finish with an upwards-right move. To each path s_1 from $(x_0, 0)$ to (x_1, y) assign the unique path s_2 from $(x_0 + (x_2 - x_1), 0)$ to (x_2, y) , obtained from s_1 by translation by $(x_1 - x_2, 0)$ and vice versa. Thus we sum over the same vectors, but for $x = x_1$ they are rotated through $2\pi x_0\varepsilon/\lambda$ while for $x = x_2$ they are rotated through $2\pi(x_0 + (x_2 - x_1))\varepsilon/\lambda$, and we are done.

20. Let us give a more general formula; the solution of the problem is the particular case $m\varepsilon = 1$.

Answer. Denote $E = \arccos\left(\frac{\cos(2\pi\varepsilon/\lambda)}{\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}}\right)$. Then for even $x + y$ we have:

$$\begin{aligned} \vec{a}(x, y, \lambda/\varepsilon, -) &= \left(\frac{m\varepsilon \cos(2\pi\varepsilon x/\lambda) \sin((y-1)E)}{\sqrt{1+m^2\varepsilon^2} \sin E}, \frac{m\varepsilon \sin(2\pi\varepsilon x/\lambda) \sin((y-1)E)}{\sqrt{1+m^2\varepsilon^2} \sin E} \right); \\ \vec{a}(x, y, \lambda/\varepsilon, +) &= \left(\frac{\cos(2\pi\varepsilon(x-2)/\lambda) \sin(yE) - \cos(2\pi\varepsilon x/\lambda) \sin((y-2)E)}{2 \cos(2\pi\varepsilon/\lambda) \sin E}, \right. \\ &\quad \left. \frac{-\sin(2\pi\varepsilon(x-2)/\lambda) \sin(yE) + \sin(2\pi\varepsilon x/\lambda) \sin((y-2)E)}{2 \cos(2\pi\varepsilon/\lambda) \sin E} \right); \\ P(x, y, \lambda/\varepsilon, -) &= \frac{m^2\varepsilon^2 \sin^2((y-1)E)}{m^2\varepsilon^2 + \sin^2(2\pi\varepsilon/\lambda)}; \\ P(x, y, \lambda/\varepsilon, +) &= \frac{m^2\varepsilon^2 \cos^2((y-1)E) + \sin^2(2\pi\varepsilon/\lambda)}{m^2\varepsilon^2 + \sin^2(2\pi\varepsilon/\lambda)}; \end{aligned}$$

$$P(x, y, \lambda/\varepsilon, -) + P(x, y, \lambda/\varepsilon, +) = 1.$$

Remark. In complex form,

$$\begin{aligned} \vec{a}(x, y, \lambda/\varepsilon, -) &= r^x \frac{m\varepsilon \sin((y-1)E)}{\sqrt{1+m^2\varepsilon^2} \sin E}; \\ \vec{a}(x, y, \lambda/\varepsilon, +) &= r^{x-1} \left(\frac{\sin((y-1)E) \sin(2\pi\varepsilon/\lambda)}{\sqrt{1+m^2\varepsilon^2} \sin E} + i \cos((y-1)E) \right), \end{aligned}$$

where $r = \cos(2\pi\varepsilon/\lambda) + i \sin(2\pi\varepsilon/\lambda)$. This is the solution of the Dirac equation (see the solution of Problem 17) with the (quasi)periodic initial condition $a_-(x, 0) = 0$ and $a_+(x, 0) = (-\sin \frac{2\pi x\varepsilon}{\lambda}, \cos \frac{2\pi x\varepsilon}{\lambda})$. The number E has physical meaning of energy.

Hint. Formulas for $\vec{a}(x, y, \lambda/\varepsilon, +)$ and $\vec{a}(x, y, \lambda/\varepsilon, -)$ can be proven by induction over y . The base is obvious; the inductive step follows from Problem 17. Then $P(x, y, \lambda/\varepsilon, +)$ and $P(x, y, \lambda/\varepsilon, -)$ are computed directly.

Path to solution. Let us view vectors as complex numbers. Then $R^\alpha \vec{a} = (\cos \alpha + i \sin \alpha)\vec{a}$. Denote $r = \cos(2\pi\varepsilon/\lambda) + i \sin(2\pi\varepsilon/\lambda)$; then $r^{-1} = \cos(2\pi\varepsilon/\lambda) - i \sin(2\pi\varepsilon/\lambda)$. Denote $f(y) = r^{-y}\vec{a}(y, y, \lambda/\varepsilon, +)$ and $g(y) = r^{-y}\vec{a}(y, y, \lambda/\varepsilon, -)$. Denote $M = \frac{m\varepsilon}{\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}}$ and $U = \frac{1}{\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}}$. By Problem 19 for even $x+y$ we have $\vec{a}(x, y, \lambda/\varepsilon, +) = r^x f(y)$ and $\vec{a}(x, y, \lambda/\varepsilon, -) = r^x g(y)$. By Problem 17 we have $r^x f(y) = U r^{x-1} f(y-1) - i M r^{x-1} g(y-1)$ and

$r^x g(y) = Ur^{x+1}g(y-1) - iMr^{x+1}f(y-1)$. Since $r \neq 0$, we can divide each side by r^x and obtain the following system:

$$\begin{cases} f(y) = Ur^{-1}f(y-1) - iMr^{-1}g(y-1) & (1) \\ g(y) = Urg(y-1) - iMrf(y-1) & (2) \\ f(1) = ir^{-1} & (3) \\ g(1) = 0 & (4) \end{cases}$$

There are multiple ways of solving this system (we have thought about generating functions and about diagonalising the ‘transfer matrix’) but the one which is probably most accessible (to math high-school students in Russia) is transforming this system into a linear recurrence relation of degree 2. From (1) we have $g(y-1) = \frac{1}{M}irf(y) - \frac{U}{M}if(y-1)$. From this and (2) we have $g(y) = \frac{U}{M}ir^2f(y) - \frac{1}{M}irf(y-1)$. From this and (1) we have $f(y) = U(r+r^{-1})f(y-1) - f(y-2)$.

The solution of this recurrence equation is $f(n) = c_1d_+^n + c_2d_-^n$, where

$$d_+ = \frac{U(r+r^{-1}) + \sqrt{U^2(r+r^{-1})^2 - 4}}{2} = U \cos(2\pi\varepsilon/\lambda) + i\sqrt{U^2 \sin^2(2\pi\varepsilon/\lambda) + M^2}$$

$$d_- = \frac{U(r+r^{-1}) - \sqrt{U^2(r+r^{-1})^2 - 4}}{2} = U \cos(2\pi\varepsilon/\lambda) - i\sqrt{U^2 \sin^2(2\pi\varepsilon/\lambda) + M^2}$$

are the roots of the equation $t^2 - U(r+r^{-1})t + 1 = 0$, and c_1 and c_2 are constants that are found using (3) and (4). Since we are dealing with complex numbers, the notation $\sqrt{U^2(r+r^{-1})^2 - 4}$ is ambiguous. But we can choose any of the two roots; $\sqrt{U^2(r+r^{-1})^2 - 4}$ denotes $2i\sqrt{U^2 \sin^2(2\pi\varepsilon/\lambda) + M^2}$. It follows that

$$c_1 = i \frac{r^{-1} - Ud_-}{d_+ - d_-} \quad \text{and} \quad c_2 = i \frac{r^{-1} - Ud_+}{d_- - d_+}.$$

Note that $E = \arccos(U \cos(2\pi\varepsilon/\lambda))$. We have $d_+ = \cos E + i \sin E$ and $d_- = \cos E - i \sin E$. Thus we have $\vec{a}(x, y, \lambda/\varepsilon, +) = r^x f(y) = ir^x \frac{(r^{-1}-Ud_-)^{d_+^y} - (r^{-1}-Ud_+)^{d_-^y}}{d_+ - d_-} = ir^{x-1} \frac{\sin(yE)}{\sin E} - iUr^x \frac{\sin((y-1)E)}{\sin E}$.

Now we compute $P(x, y, \lambda/\varepsilon, +) = \vec{a}(x, y, \lambda/\varepsilon, +) \cdot \vec{a}(x, y, \lambda/\varepsilon, +)$. It follows from formulas above that $\bar{r} = r^{-1}$, $\bar{d}_+ = d_-$, $\bar{d}_- = d_+$, $\bar{c}_1 = i \frac{r^{-1}-Ud_+}{d_+ - d_-}$ and $\bar{c}_2 = i \frac{r^{-1}-Ud_-}{d_- - d_+}$. From this (with some simplification) we finally have

$$P(x, y, \lambda/\varepsilon, +) = \frac{(d_+ - d_-)^2 - M^2(d_+^{y-1} - d_-^{y-1})^2}{(d_+ - d_-)^2} = 1 - \frac{M^2 \sin^2((y-1)E)}{\sin^2 E}.$$

Analogously we get $\vec{a}(x, y, \lambda/\varepsilon, -) = r^x M \frac{\sin((y-1)E)}{\sin E}$ and $P(x, y, \lambda/\varepsilon, -) = \frac{M^2 \sin^2((y-1)E)}{\sin^2 E}$.

21. Solution. Let $(0, 0), (1, 1), (x_2, 2), \dots, (x_y, y)$ be the squares passed by the path s . To define the vector $\vec{a}(s, m(x)\varepsilon)$, start with the vector $(0, 1)$. While the checker moves straightly, the vector is not changed, but if the checker changes the direction after the n -th move, the vector is rotated through 90° clockwise and multiplied by $m(x_n)\varepsilon$. In addition, at the very end the vector is divided by $\prod_{n=1}^{y-1} \sqrt{1 + m^2(x_n)\varepsilon^2}$, where y is the total number of moves. The final position of the vector is what we denote by $\vec{a}(s, m(x)\varepsilon)$. The numbers $a_1(x, y, m(x)\varepsilon)$ and $a_2(x, y, m(x)\varepsilon)$ are defined analogously to $a_1(x, y)$ and $a_2(x, y)$, only $\vec{a}(s)$ is replaced by $\vec{a}(s, m(x)\varepsilon)$.

The formulas analogous to the ones from Problem 4 are the following:

$$a_1(x_0, y, m(x)\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{1 + m^2(x_0 + 1)\varepsilon^2}} (a_1(x_0 + 1, y, m(x)\varepsilon) + m(x_0 + 1)\varepsilon \cdot a_2(x_0 + 1, y, m(x)\varepsilon)),$$

$$a_2(x_0, y, m(x)\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{1 + m^2(x_0 - 1)\varepsilon^2}} (a_2(x_0 - 1, y, m(x)\varepsilon) - m(x_0 - 1)\varepsilon \cdot a_1(x_0 - 1, y, m(x)\varepsilon)).$$

22. Answer: For each x, y we have

$$P(x, y, m_0(x), \lambda/\varepsilon, +) = 1;$$

$$P(x, y, m_0(x), \lambda/\varepsilon, -) = 0.$$

$$P(x, y, m_1(x), \lambda/\varepsilon, +) = \begin{cases} \frac{1}{1.04} = \frac{25}{26}, & \text{for } 0 < x < y; \\ 1, & \text{otherwise;} \end{cases}$$

$$P(x, y, m_1(x), \lambda/\varepsilon, -) = \begin{cases} \frac{0.04}{1.04} = \frac{1}{26}, & \text{for } -y < x < 0; \\ 0, & \text{otherwise;} \end{cases}$$

Solution. Analogously to Problem 13 we have $P(x, y, m_0(x), \lambda/\varepsilon, +) = 1$, $P(x, y, m_0(x), \lambda/\varepsilon, -) = 0$ for each x, y .

The condition $\vec{a}(s, m_1(x)) \neq 0$ means that the checker, if at all changed the direction, turned in one of the squares with the coordinates $(0, 2), (0, 4), \dots, (0, 2 \cdot \lfloor \frac{y}{2} \rfloor)$. Thus the number of turns in any path s with $\vec{a}(s, m_1(x)) \neq 0$ is not greater than 1.

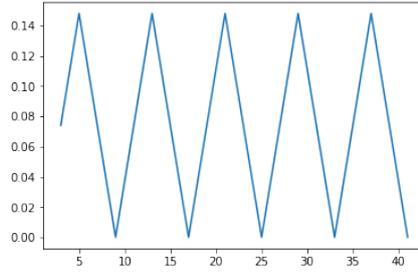
To compute $P(x, y, m_1(x), \lambda/\varepsilon, +)$ we need to consider only the paths ending with an upwards-right move – i.e. without turns. If the path s does not contain any of the squares with coordinates $(0, 1), (0, 2), \dots, (0, y - 1)$ (amounting to $x \leq 0$ or $x \geq y$) then $P(x, y, m_1(x), \lambda/\varepsilon, +) = 1$. Otherwise, the length of the vector $\vec{a}(s, m(x))$ equals $\frac{1}{\sqrt{1+0.2^2}}$.

To compute $P(x, y, m_1(x), \lambda/\varepsilon, -)$, consider paths having exactly one turn in the square with zero x -coordinate. If there is such a path s (i.e. $-y < x < 0$), then the length of the vector $\vec{a}(s, m(x))$ equals $\frac{0.2}{\sqrt{1+0.2^2}}$. Otherwise, it equals zero.

23. Solution. If $\vec{a}(s, m_2(x)) \neq 0$ then the checker changed the direction only in the squares with the x -coordinate equal to 1 or L . To compute $P(0, 2L, m_2(x), 16, -)$ we need to consider only the paths with an odd number of turns. Since for $L > 1$ we have $y = 2L < 3(L - 1)$ (for $L = 1$ the function $f(L)$ is undefined), it follows that the number of turns must be exactly 1. Therefore, either the path starts in the square $(0, 0)$ and changes the direction in the square (L, L) , or the path starts in the square $(2 - 2L, 0)$ and changes the direction in $(1, 2L - 1)$. The vectors for these two paths are related by the rotation through the angle $\pi - \frac{\pi(L-1)}{4}$ and division by 1.04. Since the vector for the latter path has square $\frac{1}{26}$ and the one for the former one has square $\frac{1}{26 \cdot 1.04^2}$, by the law of cosines we get

$$P(0, 2L, m_2(x), 16, -) = \frac{1}{26} \left(1 + \frac{1}{1.04^2} - \frac{2}{1.04} \cos \frac{\pi(L-1)}{4} \right) \approx 0.074 \left(1 - \cos \frac{\pi(L-1)}{4} \right).$$

The graph of this function is shown in the following figure (kindly provided by Punnawith Thuwajit, a participant of Summer Conference of Tournament of Towns).



24. Answer:

$$P(\lambda, L, -) = \frac{0.1664}{1.1664 + \cot^2 \frac{2\pi(L-1)}{\lambda}}; \quad \max_L P(\lambda, L, -) = \frac{0.1664}{1.1664} \approx 0.14;$$

$$P(\lambda, L, +) = \frac{1}{1 + 0.1664 \sin^2 \frac{2\pi(L-1)}{\lambda}}; \quad P(\lambda, L, -) + P(\lambda, L, +) = 1.$$

Hint. Denote $m = 0.2$ and $\phi = \frac{2\pi}{\lambda}(L-1)$. For $y > 2L - 2$ we have

$$P(0, y, m_2(x), \lambda, -) = \left| e^{\frac{2\pi i}{\lambda}(2-y)} \frac{m}{\sqrt{1+m^2}} \left(-1 + \frac{1}{1+m^2} e^{2i\phi} + \frac{m^2}{(1+m^2)^2} (e^{2i\phi})^2 + \dots + \frac{1}{m^2} \left(\frac{m^2}{1+m^2} e^{2i\phi} \right)^{\lfloor \frac{y-2}{2(L-1)} \rfloor} \right) \right|^2,$$

Then, since $\cos 2\phi = 1 - 2\sin^2 \phi$, we have

$$\begin{aligned} P(\lambda, L, -) &= \frac{m^2}{1+m^2} \cdot \left| 1 - \frac{1}{1+m^2} e^{2i\phi} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{m^2}{1+m^2} e^{2i\phi} \right)^k \right|^2 = \\ &= \frac{m^2}{1+m^2} \cdot \left| 1 - \frac{1}{1+m^2} e^{2i\phi} \frac{1}{1 - \frac{m^2}{1+m^2} e^{2i\phi}} \right|^2 = \frac{m^2}{1+m^2} \cdot \frac{|1 - e^{2i\phi}|^2}{|1 - \frac{m^2}{1+m^2} e^{2i\phi}|^2} = \\ &= \frac{m^2(1+m^2)(2 - 2\cos(2\phi))}{(1+m^2)^2 + m^4 - 2m^2(1+m^2)\cos(2\phi)} = \frac{4m^2(1+m^2)}{(1+2m^2)^2 + \cot^2 \phi} = \frac{0.1664}{1.1664 + \cot^2 \frac{2\pi}{\lambda}(L-1)}. \end{aligned}$$

Therefore, $\max_L P(\lambda, L, -) = \frac{0.1664}{1.1664} \approx 0.14$. Analogously,

$$\begin{aligned} P(\lambda, L, +) &= \left| \frac{1}{1+m^2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{m^2}{1+m^2} e^{2i\phi} \right)^k \right|^2 = \left| \frac{1}{1+m^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{m^2}{1+m^2} e^{2i\phi}} \right|^2 = \\ &= \frac{1}{(1+m^2)^2 + m^4 - 2(1+m^2)m^2 \cos(2\phi)} = \frac{1}{1 + 4m^2(1+m^2) \sin^2 \phi} = \frac{1}{1 + 0.1664 \sin^2 \frac{2\pi}{\lambda}(L-1)}. \end{aligned}$$

Note that

$$1 - \frac{1}{1 + 0.1664 \sin^2 \frac{2\pi}{\lambda}(L-1)} = \frac{0.1664}{\frac{1}{\sin^2 \frac{2\pi}{\lambda}(L-1)} + 0.1664} = \frac{0.1664}{1.1664 + \cot^2 \frac{2\pi}{\lambda}(L-1)}.$$

Hence, $P(\lambda, L, -) + P(\lambda, L, +) = 1$.

25. Answer:

$$\frac{(n^2 - 1)^2}{(n^2 + 1)^2 + 4n^2 \cot^2 \frac{2\pi Ln}{\lambda}} \quad \text{and} \quad m = \frac{(0.3328 + 0.864\sqrt{1.04}) \cdot \pi}{\lambda},$$

where $n = \sqrt{1 + m\lambda/\pi}$ (the *refractive index*; notice that the relation between m and n has changed when we passed to reflection inside the glass). For the latter m the limit equals

$$\frac{0.1664}{1.1664 + \cot^2 \frac{2\pi L(1.08 + 0.08\sqrt{1.04})}{\lambda}}.$$

Remark. The first formula in the answer is well-known and confirmed by experiment. A remarkable detailed popular science discussion of Problems 23–25 can be found in [Feynman], and a derivation of the equations on a physical level of rigor – in [Landafshitz, Chapter X, §86, Problem 4].

Path to solution. Consider Dirac's equation from the solution of Problem 17. Search for a solution of the form

$$(a_+(x, y), a_-(x, y)) = (a_+(x), a_-(x))e^{-2\pi i \varepsilon y/\lambda}.$$

Use Problem 20 to guess $a_{\pm}(x)$ separately for $x \leq 0$, $0 \leq x \leq L/\varepsilon$, and $x \geq L/\varepsilon$. Assume for simplicity that $1/\varepsilon$ is an odd integer. Abbreviate $m_3(x) =: m(x)$.

First consider the half-plane $x \leq 0$ (to the left from glass). We need to specify what is meant by a solution of Dirac's equation in the half-plane. Analogously to Problem 17, by *Dirac's equation in a black square* (x, y) we mean the system

$$\begin{cases} a_-(x-1, y+1) &= \frac{1}{\sqrt{1+m(x)^2\varepsilon^2}}a_-(x, y) + \frac{-im(x)\varepsilon}{\sqrt{1+m(x)^2\varepsilon^2}}a_+(x, y); \\ a_+(x+1, y+1) &= \frac{-im(x)\varepsilon}{\sqrt{1+m(x)^2\varepsilon^2}}a_-(x, y) + \frac{1}{\sqrt{1+m(x)^2\varepsilon^2}}a_+(x, y). \end{cases}$$

A *solution of Dirac's equation in the half-plane* $x \leq 0$ is a pair $(a_+(x, y), a_-(x, y))$ satisfying the equation in each black square in the half-plane. In particular, $a_-(x, y)$ is defined for $x \leq 0$, whereas $a_+(x, y)$ is defined for $x \leq 1$. Search for a solution of the form $(a_+(x), a_-(x)) = (i e^{2\pi i x \varepsilon/\lambda}, r(\varepsilon) e^{-2\pi i x \varepsilon/\lambda})$ for some $r(\varepsilon) \in \mathbb{C}$ to be determined later, where the formulae for $a_+(x)$ and $a_-(x)$ hold for $x \leq 1$ and $x \leq 0$ respectively. (Physically, $a_+(x, y)$ is the incident wave, $a_-(x, y)$ is the reflected wave, and $|\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} r(\varepsilon)|^2$ is the reflection probability.)

For the half-plane $x \geq L/\varepsilon$ take $(a_+(x), a_-(x)) = (t(\varepsilon) e^{2\pi i x \varepsilon/\lambda}, 0)$ for some $t(\varepsilon) \in \mathbb{C}$ to be determined later, where the formulae for $a_+(x)$ and $a_-(x)$ hold for $x \geq L/\varepsilon + 1$ and $x \geq L/\varepsilon$ respectively. (Physically, $a_+(x)$ is the transmitted wave, and $|\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} t(\varepsilon)|^2$ is the transmission probability.)

For $0 \leq x \leq L/\varepsilon$ search for a solution of the form

$$\begin{aligned} a_+(x) &= a(\varepsilon) e^{2\pi i x \varepsilon/\lambda'(\varepsilon)} + b(\varepsilon) e^{-2\pi i x \varepsilon/\lambda'(\varepsilon)}, \\ a_-(x) &= c(\varepsilon) e^{2\pi i x \varepsilon/\lambda'(\varepsilon)} + d(\varepsilon) e^{-2\pi i x \varepsilon/\lambda'(\varepsilon)}. \end{aligned}$$

for some coefficients $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ and $\lambda' > 0$ depending on ε (we have a combination of refracted and reflected waves). In what follows $a, b, c, d, \lambda', r, t$ denote the limits of the above numbers as $\varepsilon \rightarrow 0$.

The limit λ' (*wavelength of refracted wave*) is determined by Dirac's equation as follows. Substituting the expressions for $a_{\pm}(x)$ into Dirac's equation, canceling common factors, and taking the limit $\varepsilon \rightarrow 0$ we get

$$\begin{aligned} ma &= \left(m - \frac{2\pi}{\lambda'} + \frac{2\pi}{\lambda} \right) c, \\ mc &= \left(m + \frac{2\pi}{\lambda'} + \frac{2\pi}{\lambda} \right) a. \end{aligned}$$

We also get an analogous equation with b and d instead of c and a . This implies that $\lambda' = \lambda/n$, where $n = \sqrt{1 + m\lambda/\pi}$ (refractive index).

Sewing together the solutions (namely, $a_+(x)$ at $x = 1$ and $x = L/\varepsilon + 1$, whereas $a_-(x)$ at $x = 0$ and $x = L/\varepsilon$) gives a system of linear equations in a, b, c, d, r, t :

$$\begin{aligned} a_-(0) = r(\varepsilon) = c(\varepsilon) + d(\varepsilon), & & a_-(L/\varepsilon) = 0 = c(\varepsilon) e^{2\pi i L/\lambda'} + d(\varepsilon) e^{-2\pi i L/\lambda'}, \\ a_+(1) = i e^{2\pi i L/\lambda} = a(\varepsilon) e^{2\pi i L/\lambda'} + b(\varepsilon) e^{-2\pi i L/\lambda'}, & & a_+(L/\varepsilon + 1) = t(\varepsilon) e^{2\pi i (L+\varepsilon)/\lambda} = a(\varepsilon) e^{2\pi i (L+\varepsilon)/\lambda'} + b(\varepsilon) e^{-2\pi i (L+\varepsilon)/\lambda'}. \end{aligned}$$

Passing to the limit $\varepsilon \rightarrow 0$ and solving the resulting system of linear equations we find a, b, c, d, r, t . Surely, one still needs to check that even before passing to the limit, the expressions for $a_{\pm}(x)$ determined by our equations indeed satisfy Dirac's equation in *each* black square. We omit that.

It remains to prove that $(a_+(x), a_-(x)) = \lim_{\substack{y \rightarrow +\infty \\ y+x \text{ even}}} R^{2\pi y \varepsilon/\lambda} \vec{a}(x, y, m_3(x) \varepsilon, \frac{\lambda}{\varepsilon}, -)$; then the number $|r|^2$ is the required limit. We do not know any elementary proof of that assertion and thus omit the details.

Informally, the idea is to show that the limit does not depend on the initial values $a_+(x, 0)$ for $x > 0$ and $a_-(x, 0)$ for $x < L/\varepsilon$; then one can replace these initial values by the solution we have found above and get the result. Independence on $a_+(x, 0)$ for $x > L/\varepsilon$ and $a_-(x, 0)$ for $x < 0$ is obvious. To prove independence on $a_{\pm}(x, 0)$ for $0 \leq x \leq L/\varepsilon$, assume that $a_{\pm}(x, 0)$ vanishes outside the segment $0 \leq x \leq L/\varepsilon$ and consider the linear transformation

$$\begin{aligned} U: (a_-(0, 0), a_-(2, 0), \dots, a_-(L/\varepsilon - 1, 0), a_+(0, 0), \dots, a_+(L/\varepsilon - 1, 0)) \\ \mapsto (a_-(0, 2), a_-(2, 2), \dots, a_-(L/\varepsilon - 1, 2), a_+(0, 2), \dots, a_+(L/\varepsilon - 1, 2)). \end{aligned}$$

Let us show that the absolute values of all the eigenvalues of U are less than 1. Consider an eigenvector v with the coordinates $v_1 = a_-(0, 0), \dots, v_{L/\varepsilon+1} = a_+(L/\varepsilon - 1, 0)$. Let v_k be the leftmost nonzero coordinate. If $k > 1$ then Uv has nonzero $(k-1)$ -th coordinate; but Uv is proportional to v , a contradiction. Thus $k = 1$. Hence $a_-(-2, 2) \neq 0$ by Dirac's equation. Then by the probability conservation

$$\begin{aligned} \|v\| &= |a_-(0, 0)|^2 + |a_-(2, 0)|^2 + \dots + |a_+(L/\varepsilon - 1, 0)|^2 \\ &= |a_-(-2, 2)|^2 + |a_-(0, 2)|^2 + \dots + |a_+(L/\varepsilon - 1, 2)|^2 \\ &> |a_-(0, 2)|^2 + \dots + |a_+(L/\varepsilon - 1, 2)|^2 \\ &= \|Uv\|. \end{aligned}$$

Thus the absolute value of the eigenvalue v is strictly less than 1. Thus $\|U^y\| \rightarrow 0$ as $y \rightarrow \infty$, which proves that the values $a_{\pm}(x, 0)$ for $0 \leq x \leq L$ do not affect the limit.

26. Answer: In the table, the vector in the cell (x, y) is $\vec{a}(x, y, u, +)$, and an empty cell (x, y) means that $\vec{a}(x, y, u, +) = (0, 0)$.

4			$(0, \frac{1}{2\sqrt{2}})$		$(0, 0)$		$(0, \frac{1}{2\sqrt{2}})$
3				$(0, -\frac{1}{2})$		$(0, \frac{1}{2})$	
2					$(0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$		
1				$(0, -1)$			
y \diagdown x	-2	-1	0	1	2	3	4

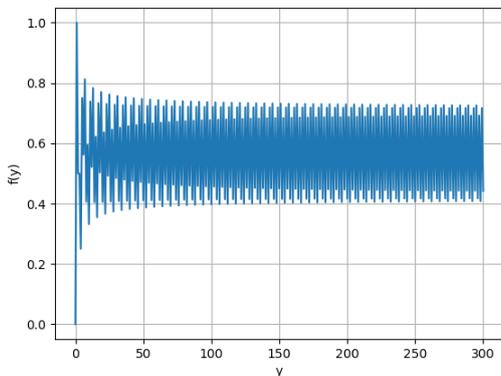
In the following table the number in the cell (x, y) is $P(x, y, u, +)$, and an empty cell (x, y) means that $P(x, y, u, +) = 0$.

4			1/8		0		1/8
3				1/4		1/4	
2					1/2		
1				1			
y \diagdown x	-2	-1	0	1	2	3	4

(The vectors $\vec{a}(x, y, u, +)$ can be easily computed using Problem 31.)

For any positive y we have $\sum_{x \in \mathbb{Z}} (P(x, y, u, +) + P(x, y, u, -)) = 1$. (This is one of the statements of Problem 31.)

27. Answer (kindly provided by Gleb Minaev and Ivan Russkikh, participants of Summer Conference of Tournament of Towns):



28. Solution. Suppose that u' is the result of changing the values of u in all the vertices of a black square (a, b) . Notice that if a path s neither starts nor ends in the square (a, b) , then it either passes through two vertices with a changed value of u or does not pass through such vertices at all. Therefore, $\vec{a}(s, u) = \vec{a}(s, u')$. The equation $P(x, y, u', +) = P(x, y, u, +)$ for any $(x, y) \neq (a, b)$ follows immediately.

The only case left to prove is $(a, b) = (x, y)$ or $(a, b) = (0, 0)$. For each path s starting or ending in (a, b) we have $\vec{a}(s, u') = -\vec{a}(s, u)$ because s passes through exactly one vertex with a changed value of u . Therefore, $P(a, b, u', +) = P(a, b, u, +)$.

29. Solution. The top-right vertex of the square (x, y) is called *vertex* (x, y) . Denote by $u(x, y)$ the value of u at the vertex (x, y) . *Reversing* a black square (x, y) means changing the values of u at all the four vertices of the square.

Notice that reversing a black square does not change the sign of any white squares, because the number of changed vertices in each white square is even. If all values of a field in a rectangle are positive, then all the white squares inside the rectangle are positive. Therefore, it is impossible to make u identically $+1$ by reversing black squares, if initially there is a negative white square.

Suppose that there are no negative white squares in a rectangle $M \times N$, where N is the height of the rectangle. Let the vertex $(0, 0)$ be at the bottom-left of the rectangle. Let us prove that u can be made identically $+1$ through reversal of black squares by induction over N .

Base: $N = 0$. Let us describe the algorithm for making u identically $+1$ in the rectangle $M \times 0$ (i.e. in vertices $(0, 0), (1, 0), \dots, (M, 0)$).

Note that for all k we can reverse either square $(k + 1, 0)$ or square $(k + 1, 1)$, thereby we can change the signs of the values of u in vertices $(k, 0)$ and $(k + 1, 0)$. Denote this operation *reversing* k .

The algorithm is as follows: Find the minimum $0 \leq k \leq M$ such that $u(k, 0) = -1$, and reverse k . If after that there still exists $0 \leq k \leq M$ such that $u(k, 0) = -1$, than the minimum such k is at least 1 more than before using the operation. Therefore, after at most $M + 1$ operations we make u to be identically $+1$ in the rectangle $M \times 0$.

Step: Suppose that the statement is true for N and prove it for $N + 1$ by giving an explicit algorithm.

First make u identically $+1$ in the lower rectangle $M \times N$ by applying the algorithm for N . Then for each white square $(k, N + 1)$ in the rectangle reverse the square $(k, N + 2)$ if $u(k - 1, N + 1) = u(k, N + 1) = -1$, otherwise do nothing. Finally, if the square $(0, N + 1)$ is black and $u(-1, N + 1) = -1$ then reverse the square $(-1, N + 2)$, and if the square $(M, N + 1)$ is black and $u(M, N + 1) = -1$ then reverse the square $(M + 1, N + 2)$. The result is a field, positive in the whole rectangle $(M + 1) \times N$.

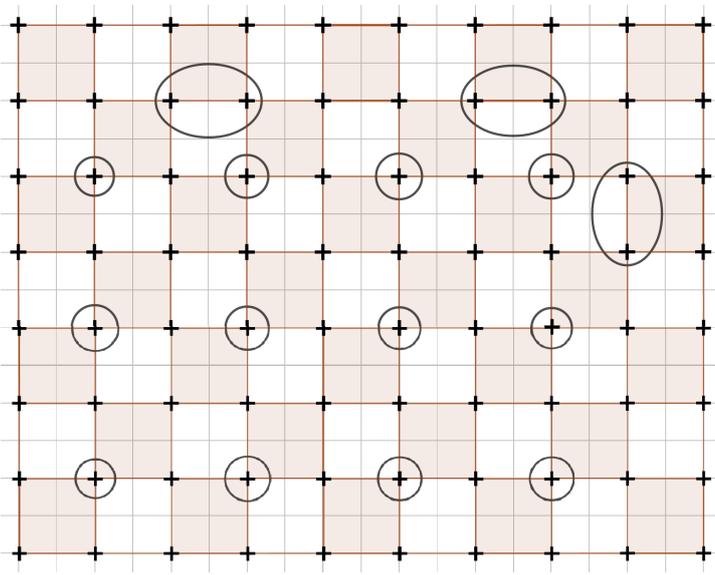
30. Answer: Zero, if one of the sides of the rectangle is 1, and any even number no greater than the number of white squares in the rectangle, if both sides are greater than 1.

Hint. Denote by $n(x, y, u)$ the number of vertices of the square (x, y) where the value of u is negative. Notice that any vertex that is strictly inside the rectangle (not on the boundary) is a vertex of exactly four squares in that rectangle, two of which are white. Therefore, the sum of $n(x, y, u)$ over all white squares in the rectangle is even. Hence the number of negative white squares is even.

Let us show that any even number no greater than the number of white squares in the rectangle is indeed possible.

If both the length and the width of the rectangle are even, then for any field that is positive everywhere in the rectangle except for n vertices with both coordinates even there are exactly $2n$ negative white squares.

For odd length or width (greater than 1) see the figure below. The identically $+1$ field has no negative white squares. The field u_{2n+2} with $2n + 2$ negative white squares is obtained from the field u_{2n} by changing all the values of u_{2n} to the opposite in any single encircled area where they have not been changed before.



31. *Answer.* Recall that $u(x, y)$ is the value of u in the top-right vertex of the square (x, y) . Then

$$a_1(x, y, u) = \frac{1}{\sqrt{2}}u(x, y-1)(a_1(x+1, y-1, u) + a_2(x+1, y-1, u)),$$

$$a_2(x, y, u) = \frac{1}{\sqrt{2}}u(x-1, y-1)(-a_1(x-1, y-1, u) + a_2(x-1, y-1, u)).$$

Hint. The solution of the analogue of Problem 4 is very similar to the original one, only the factors $u(x, y-1)$ and $u(x-1, y-1)$ are added due to the last step of the path s passing through the top-right vertex of either $(x, y-1)$ or $(x-1, y-1)$.

Let us prove the analogue of Problem 5 by induction over y . The step of induction follows immediately from the following computation:

$$\begin{aligned} \sum_{x \in \mathbb{Z}} P(x, y+1, u) &= \sum_{x \in \mathbb{Z}} [a_1(x, y+1, u)^2 + a_2(x, y+1, u)^2] = \sum_{x \in \mathbb{Z}} a_1(x, y+1, u)^2 + \sum_{x \in \mathbb{Z}} a_2(x, y+1, u)^2 = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{x \in \mathbb{Z}} u(x, y)^2 (a_1(x+1, y, u) + a_2(x+1, y, u))^2 + \frac{1}{2} \sum_{x \in \mathbb{Z}} u(x-1, y)^2 (a_2(x-1, y, u) - a_1(x-1, y, u))^2 = \\ &= \sum_{x \in \mathbb{Z}} \frac{(a_1(x, y, u) + a_2(x, y, u))^2}{2} + \sum_{x \in \mathbb{Z}} \frac{(a_2(x, y, u) - a_1(x, y, u))^2}{2} = \sum_{x \in \mathbb{Z}} [a_1(x, y, u)^2 + a_2(x, y, u)^2] = \sum_{x \in \mathbb{Z}} P(x, y, u). \end{aligned}$$

$$32. \text{ Answer: } P(AB, A'B' \rightarrow EF, E'F') = \begin{cases} P(x, y, -)P(x' - x_0, y, -), & \text{if } E = (x+1, y), E' = (x'+1, y), \\ P(x, y, -)P(x' - x_0, y, +), & \text{if } E = (x+1, y), E' = (x'-1, y), \\ P(x, y, +)P(x' - x_0, y, -), & \text{if } E = (x-1, y), E' = (x'+1, y), \\ P(x, y, +)P(x' - x_0, y, +), & \text{if } E = (x-1, y), E' = (x'-1, y). \end{cases}$$

Solution. Notice that $\vec{a}(s, s') = -i\vec{a}(s)\vec{a}(s')$, where $\vec{a}\vec{b}$ denotes the product of complex numbers \vec{a} and \vec{b} . Without loss of generality suppose that $x' > x$. Due to the condition $x_0 \geq 2y$ there are no paths starting at A and ending in F' and no paths starting at A' and ending in F .

$$\text{Therefore } \sum_{\substack{s: AB \rightarrow E'F' \\ s': A'B' \rightarrow EF}} \vec{a}(s, s') = 0 \text{ and } \vec{a}(AB, A'B' \rightarrow EF, E'F') = \sum_{\substack{s: AB \rightarrow EF \\ s': A'B' \rightarrow E'F'}} \vec{a}(s, s').$$

If $E = (x-1, y)$ and $E' = (x'-1, y)$ then $\vec{a}(AB, A'B' \rightarrow EF, E'F') = -i \sum_{s, s'} \vec{a}(s)\vec{a}(s')$, where the sum is over s and s' ending with an upwards-right move. Therefore, $\vec{a}(AB, A'B' \rightarrow EF, E'F') = -i\vec{a}(x, y, +)\vec{a}(x'-x_0, y, +)$. Hence $P(AB, A'B' \rightarrow EF, E'F') = P(x, y, +)P(x'-x_0, y, +)$.

If $E = (x+1, y)$ and $E' = (x'-1, y)$ then $\vec{a}(AB, A'B' \rightarrow EF, E'F') = -i \sum_{s, s'} \vec{a}(s)\vec{a}(s')$, where the sum is over s ending with an upwards-left move and s' ending with an upwards right move. Hence $P(AB, A'B' \rightarrow EF, E'F') = P(x, y, -)P(x'-x_0, y, +)$.

If $E = (x-1, y)$ and $E' = (x'+1, y)$ then $\vec{a}(AB, A'B' \rightarrow EF, E'F') = -i \sum_{s, s'} \vec{a}(s)\vec{a}(s')$, where the sum is over s ending with an upwards-right move and s' ending with an upwards left move. Hence $P(AB, A'B' \rightarrow EF, E'F') = P(x, y, +)P(x'-x_0, y, -)$.

If $E = (x + 1, y)$ and $E' = (x' + 1, y)$ then $\vec{a}(AB, A'B' \rightarrow EF, E'F') = -i \sum_{s, s'} \vec{a}(s) \vec{a}(s')$, where the sum is over s and s' ending with an upwards-left move. Hence $P(AB, A'B' \rightarrow EF, E'F') = P(x, y, -)P(x' - x_0, y, -)$.

33. Hint. Suppose that paths $s : AB \rightarrow EF$ and $s' : A'B' \rightarrow E'F'$ have a common move. Suppose that CD is the first common move of s and s' . Denote by \tilde{s} the path that coincides with s up to the square C and with s' after C . and \tilde{s}' the path that coincides with s' before C and with s after. The paths \tilde{s}, \tilde{s}' start with the moves $AB, A'B'$ and end with moves $E'F'$ and EF respectively.

The total number of turns in the paths s and s' equals the total number of turns in \tilde{s} and \tilde{s}' , because CD is a common move for all of them. Therefore, $\vec{a}(s, s') = \vec{a}(\tilde{s}, \tilde{s}')$. Notice that $f : (s, s') \mapsto (\tilde{s}, \tilde{s}')$ is a bijection, because CD is exactly the first common move. One of (s, s') and (\tilde{s}, \tilde{s}') contributes to $\vec{a}(EF, E'F')$ with the coefficient $(+1)$ and the other one with the the coefficient (-1) . Therefore, these pairs cancel each other.

34. Hint. Let us prove this equality by induction over y . The base is obvious.

Note that by analogy with Problem 11, $\vec{a}(AB, A'B' \rightarrow EF, E'F')$ is parallel to either the line $x = 0$ or the line $y = 0$. Denote by $a_1(AB, A'B' \rightarrow EF, E'F')$ and $a_2(AB, A'B' \rightarrow EF, E'F')$ its coordinates.

Fix the starting moves AB and $A'B'$ of the paths. Denote by $a(E, E', \uparrow, +, -) = a_1(AB, A'B' \rightarrow EF, E'F')$, where EF is an upwards-right move, $E'F'$ is an upwards-left move, and $a_1(AB, A'B' \rightarrow EF, E'F')$ is the (possibly) non-zero coordinate of the corresponding vector. $a(E, E', \uparrow, +, +)$, $a(E, E', \uparrow, -, +)$ and $a(E, E', \uparrow, -, -)$ are defined analogously. Denote $a(E, E', \downarrow, +, -) = a_1(AB, A'B' \rightarrow DE, D'E')$, where DE is an upwards-right move and $D'E'$ is an upwards-left move. $a(E, E', \downarrow, +, +)$, $a(E, E', \downarrow, -, +)$ and $a(E, E', \downarrow, -, -)$ are defined analogously.

Note that the induction step is a proof of the equality

$$\begin{aligned} & \sum_{E, E'} ((a(E, E', \uparrow, +, +))^2 + (a(E, E', \uparrow, +, -))^2 + (a(E, E', \uparrow, -, +))^2 + (a(E, E', \uparrow, -, -))^2) = \\ & = \sum_{E, E'} ((a(E, E', \downarrow, +, +))^2 + (a(E, E', \downarrow, +, -))^2 + (a(E, E', \downarrow, -, +))^2 + (a(E, E', \downarrow, -, -))^2). \end{aligned}$$

We will prove this equation by proving that for every pair (E, E') , where E and E' have the same y -coordinate,

$$\begin{aligned} & (a(E, E', \uparrow, +, +))^2 + (a(E, E', \uparrow, +, -))^2 + (a(E, E', \uparrow, -, +))^2 + (a(E, E', \uparrow, -, -))^2 = \\ & = (a(E, E', \downarrow, +, +))^2 + (a(E, E', \downarrow, +, -))^2 + (a(E, E', \downarrow, -, +))^2 + (a(E, E', \downarrow, -, -))^2. \end{aligned}$$

Analogously to Problem 4 we obtain

$$\begin{aligned} a(E, E', \uparrow, +, +) &= \frac{1}{2}(a(E, E', \downarrow, +, +) - a(E, E', \downarrow, +, -) - a(E, E', \downarrow, -, +) - a(E, E', \downarrow, -, -)), \\ a(E, E', \uparrow, +, -) &= \frac{1}{2}(a(E, E', \downarrow, +, +) - a(E, E', \downarrow, +, -) + a(E, E', \downarrow, -, +) + a(E, E', \downarrow, -, -)), \\ a(E, E', \uparrow, -, +) &= \frac{1}{2}(a(E, E', \downarrow, +, +) + a(E, E', \downarrow, +, -) - a(E, E', \downarrow, -, +) + a(E, E', \downarrow, -, -)), \\ a(E, E', \uparrow, -, -) &= \frac{1}{2}(-a(E, E', \downarrow, +, +) - a(E, E', \downarrow, +, -) - a(E, E', \downarrow, -, +) + a(E, E', \downarrow, -, -)). \end{aligned}$$

With this, we can prove our equation by substitution and expansion.

$$\mathbf{35. Answer:} \quad P(AB, B'A' \rightarrow EF, F'E') = \begin{cases} P(x, y, -)P(x_0 - x', y, -), & \text{if } E = (x + 1, y), E' = (x' + 1, y), \\ P(x, y, -)P(x_0 - x', y, +), & \text{if } E = (x + 1, y), E' = (x' - 1, y), \\ P(x, y, +)P(x_0 - x', y, -), & \text{if } E = (x - 1, y), E' = (x' + 1, y), \\ P(x, y, +)P(x_0 - x', y, +), & \text{if } E = (x - 1, y), E' = (x' - 1, y). \end{cases}$$

Hint. Notice that $\vec{a}(s, s') = i \vec{a}(s) \vec{a}^*(s')$, where $\vec{a}\vec{b}$ denotes the product of complex numbers \vec{a} and \vec{b} , and \vec{a}^* denotes conjugation.

For the remaining problems, we only give preliminary draft solutions.

36. Answer: for each u_{fin} we have

$$\begin{aligned} P(2, 2, u_{\text{fin}}, 1, +) &= 1/4, & P(0, 2, u_{\text{fin}}, 1, -) &= 1/4, \\ P(3, 3, u_{\text{fin}}, 1, +) &= 1/32, & P(1, 3, u_{\text{fin}}, 1, -) &= 1/32, \\ P(1, 3, u_{\text{fin}}, 1, +) &= 1/32, & P(-1, 3, u_{\text{fin}}, 1, -) &= 1/32; \end{aligned}$$

all the other probabilities vanish for $y = 2, 3$.

$$\mathbf{37. Answer:} \quad \sum_u \vec{a}(g, s, u) = 2^{3y-4} (1 + g^2)^{\frac{y-1}{2}} \cos((r-l) \arctan(g)) \vec{a}(s).$$

Hint. For brevity, denote $Z = \frac{1}{2^{(y-2)^2(1+g^2)} \frac{(y-1)^2}{2}}$.

Suppose that r and l are the numbers of white squares in R to the right and to the left from s respectively. Notice that r and l are odd if and only if the number of “ $-$ ” signs on the path s is odd (that is, $\vec{a}(s, u) = -\vec{a}(s)$).

Easy-to-prove lemma: if b is the number of black squares in R not touching the boundary, then the number of fields u with exactly $2k$ negative white squares equals 2^b times the number of ways to assign “ $-$ ” to $2k$ white squares in R . The factor 2^b is the number of gauge transformations from the Problem 28.

By the lemma we have

$$\begin{aligned} \sum_u \vec{a}(g, s, u) &= Z \sum_u (-ig)^n \vec{a}(s, u) = 2^b Z \left[\sum_{k,m \text{ even}} (-ig)^{k+m} \binom{r}{k} \binom{l}{m} - \sum_{k,m \text{ odd}} (-ig)^{k+m} \binom{r}{k} \binom{l}{m} \right] \vec{a}(s) = \\ &= 2^{b-2} Z \left[((1+ig)^r + (1-ig)^r) \left((1+ig)^l + (1-ig)^l \right) - ((1+ig)^r - (1-ig)^r) \left((1+ig)^l - (1-ig)^l \right) \right] \vec{a}(s) = \\ &= 2^b Z \operatorname{Re} \left((1+ig)^r (1-ig)^l \right) \vec{a}(s) = 2^b (1+g^2)^{\frac{r+l}{2}} Z \cos((r-l) \arctan(g)) \vec{a}(s). \end{aligned}$$

Since $b = r + l = y^2 - y$, it follows that $\sum_u \vec{a}(g, s, u) = 2^{3y-4} (1+g^2)^{\frac{y-1}{2}} \cos((r-l) \arctan(g)) \vec{a}(s)$.

38. Answer. Denote

$$\begin{aligned} a_{--}(x, y) &= a_2(x, y, u_-, g, -), & a_{-+}(x, y) &= a_1(x, y, u_-, g, +), \\ a_{+-}(x, y) &= a_1(x, y, u_+, g, -), & a_{++}(x, y) &= a_2(x, y, u_+, g, +). \end{aligned}$$

Denote by $R(y) = R$ the rectangle formed by all the squares (x', y') such that $1 - y < x' < y$ and $0 < y' < y$. Denote $\alpha = \alpha(x, y) = (\Delta l - \Delta r) \arctan g$, where Δl and Δr are the numbers of white squares in $R(y)$ outside $R(y-1)$ lying to the left and to the right from the square $(x+1, y-1)$. Denote $\beta = \alpha(x-2, y)$. Then

$$\begin{cases} a_{++}(x, y) &= \frac{\cos \beta}{\sqrt{2}} (a_{++}(x-1, y-1) - a_{+-}(x-1, y-1)) - \frac{\sin \beta}{\sqrt{2}} (a_{-+}(x-1, y-1) - a_{--}(x-1, y-1)); \\ a_{+-}(x, y) &= \frac{\cos \alpha}{\sqrt{2}} (a_{++}(x+1, y-1) + a_{+-}(x+1, y-1)) - \frac{\sin \alpha}{\sqrt{2}} (a_{-+}(x+1, y-1) + a_{--}(x+1, y-1)); \\ a_{-+}(x, y) &= \frac{\sin \beta}{\sqrt{2}} (a_{++}(x-1, y-1) - a_{+-}(x-1, y-1)) + \frac{\cos \beta}{\sqrt{2}} (a_{-+}(x-1, y-1) - a_{--}(x-1, y-1)); \\ a_{--}(x, y) &= \frac{\sin \alpha}{\sqrt{2}} (a_{++}(x+1, y-1) + a_{+-}(x+1, y-1)) + \frac{\cos \alpha}{\sqrt{2}} (a_{-+}(x+1, y-1) + a_{--}(x+1, y-1)). \end{cases}$$

Hint. The latter formula defines an orthogonal transformation, which implies that $\sum_{x \in \mathbb{Z}} (P(x, y, g, +) + P(x, y, g, -)) = 1$ by induction over y .

39. Answer. The number assigned to a basis configuration is shown below it:

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
1	$\frac{-im\varepsilon}{\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}}$	$\frac{-im\varepsilon}{\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}}$	-1.

Hint. Let us prove that the sum over all pairs of paths passing through vertices with “ $-$ ” signs only equals the product of all the numbers assigned to the black squares in the rectangle.

Notice that the squares of type (1) do not contribute to the result at all. Squares of types (2) and (5) can only be passed through by a path with a turn in that square, which means contributing a factor of $\frac{-im\varepsilon}{\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}}$ to $\vec{a}(s, s')$. Squares of types (3) and (4) can only be passed through by a path with a turn in that square which means contributing a factor of $\frac{1}{\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}}$ to $\vec{a}(s, s')$. Squares of type (6) can be passed through in two different ways: by two turning or two not turning paths. When the paths do turn, the square contributes $\left(\frac{-im\varepsilon}{\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}}\right)^2$ and when they do not, it contributes $\frac{-1}{1+m^2\varepsilon^2}$, which sums up to -1 .

Acknowledgements

The authors are grateful to V. Skopenkova for some of the figures, G. Chelnokov, I. Ivanov for useful discussions, and all participants of Summer Conference of Tournament of Towns in Arandelovac and Summer School in Contemporary Mathematics in Dubna for their contribution.

References

- [Feynman] Feynman, Richard (2006). QED: The strange theory of light and matter. Princeton University Press. ISBN 0-691-12575-9.
- [Gersch] Gersch, H.A., Feynman's relativistic chessboard as an Ising model, *Int J Theor Phys* 20:7 (1981), 491–501.
- [Jacobson-Schulman] T Jacobson and L S Schulman, Quantum stochastics: the passage from a relativistic to a non-relativistic path integral, *J Physics A* 17:2 (1984), 375–383.
- [Ju-Lee-Seo] Ju, H.-K.; Lee, H. & Seo, S. Integral polynomial sequences related with Krawtchouk matrices and associated Riordan arrays *Honam Math. J.* 34 (2012), 297–310.
- [Landafshitz] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, L.P. Pitaevskii (1984). *Electrodynamics of Continuous Media*. Vol. 8 (2nd ed.). Butterworth-Heinemann.
- [Ord] G.N. Ord, Classical particles and the Dirac equation with an electromagnetic field, *Chaos, Solitons & Fractals* 8:5 (1997), 727-741.
- [Ord-Gualtieri] G. N. Ord and J. A. Gualtieri, The Feynman Propagator from a Single Path, *Phys. Rev. Lett.* 89, 250403 (2002).

Теория узлов и зацеплений для пользователя *

представляют А. Глебов, Д. Елисеев, А. Еннэ, Р. Живалевич, Е. Морозов,
А. Скопенков, М. Фёдоров, Н. Хорошавкина †

Аннотация.

Мы определим простые инварианты узлов и зацеплений (коэффициент зацепления, инварианты Арфа и Кэссона, полиномы Александера-Конвея), мотивированные интересными результатами, формулировки которых доступны неспециалистам или школьникам (например, теоремы 1.1.3 и 1.2.2). Мы покажем как простейшие инварианты появляются естественным образом в результате попыток развязать узел или расцепить зацепление. Затем мы представим некоторые рекурсивные скейн-соотношения для простейших инвариантов, которые позволяют ввести более сильные инварианты. Мы сформулируем теорему Васильева-Концевича способом, удобным для подсчета самих инвариантов, а не только размерности пространства инвариантов. Мы также представим инварианты раскрасок, для определения которых мы не знаем элементарной мотивации.

Мы дадим строгие определения основных понятий, не препятствующие их интуитивному пониманию. Для изучения этого текста не требуется никаких предварительных знаний.

Рекомендации участникам.

Если условие задачи является формулировкой утверждения, то в задаче требуется это утверждение доказать. Если задача выделена словом «теорема» («лемма», «следствие» и т. д.), то её утверждение более важное. Как правило, мы приводим (в виде задачи) *формулировку* красивого или важного утверждения *перед* его *доказательством*. В таких случаях для доказательства утверждения могут потребоваться последующие задачи. Мы не лишаем Вас удовольствия самостоятельно найти момент, когда Вы наконец-то сможете доказать такое утверждение. Вообще, если Вы застряли на какой-то задаче, попробуйте перейти к следующим, они могут оказаться полезными. *Замечания* формально не используются в дальнейшем.

В тексте определения важных понятий помечены **жирным шрифтом**, чтобы затем было проще их найти. Мы рекомендуем всем участникам, работающим над проектом, *консультироваться* с жюри по любым вопросам, касающимся проекта. Те, кто успешно работают над проектом, получают интересные *дополнительные задачи (пункты, помеченные звездочками)*.

Участник (или группа участников) конференции, решающий задачи проекта, получает «боб» за каждое записанное решение, оцененное в «+» или «+». Дополнительные бобы могут выдаваться за красивые решения, решения сложных задач или оформление некоторых решений в

*Мы благодарны А. Рябичеву, А. Сосинскому и С. Чмутову за полезные обсуждения, а также В. Прасолову и издательству МЦНМО за возможность использовать некоторые задачи и рисунки из [Pr95]. Этот текст основан на курсе лекций А. Скопенкова, прочитанном в Независимом Московском Университете (включая программу Math in Moscow) и Московском Физико-Техническом Институте.

†А. Глебов: Новосибирский Государственный университет.

Д. Елисеев: Самарский университет.

А. Еннэ: Петрозаводский Государственный университет.

Р. Живалевич: <http://www.rade-zivaljevic.appspot.com/>, Институт математики в САНУ, Белград.

Е. Морозов, М. Фёдоров, Н. Хорошавкина: Высшая Школа Экономики, Москва.

А. Скопенков: <http://www.msme.ru/~skopenko>, Московский Физико-Технический Институт, Независимый Московский Университет.

системе Трех. У жюри бесконечно много бобов. Решения можно сдавать и устно, отдавая один боб за каждые пять попыток (не важно, удачных или нет).

Пожалуйста, сообщите нам, если Вы знаете решения каких-то из предложенных задач. Если Вы подтвердите свои знания, сообщив нам решения некоторых из них, Вам будет разрешено пользоваться ими при решении остальных, не получая по ним плюсы.

1 Задачи до промежуточного финиша

1.1 Основные определения и результаты об узлах

Начнем с неформального описания основных понятий (строгие определения даны после задачи 1.1.1). *Узел* можно представить себе как тонкую эластичную веревку, концы которой склеены — см. рис. 1. Как и на этом рисунке, узлы обычно изображаются с помощью их «удобной» проекции на плоскость, которая называется диаграммой узла. Представьте, что вы раскладываете веревку на столе, тщательно записывая как она пересекает себя (т.е. какая часть веревки лежит сверху). Необходимо помнить, что проекции одного и того же узла на разные плоскости могут иметь разный вид.

Тривиальный узел — это контур (граница) треугольника.

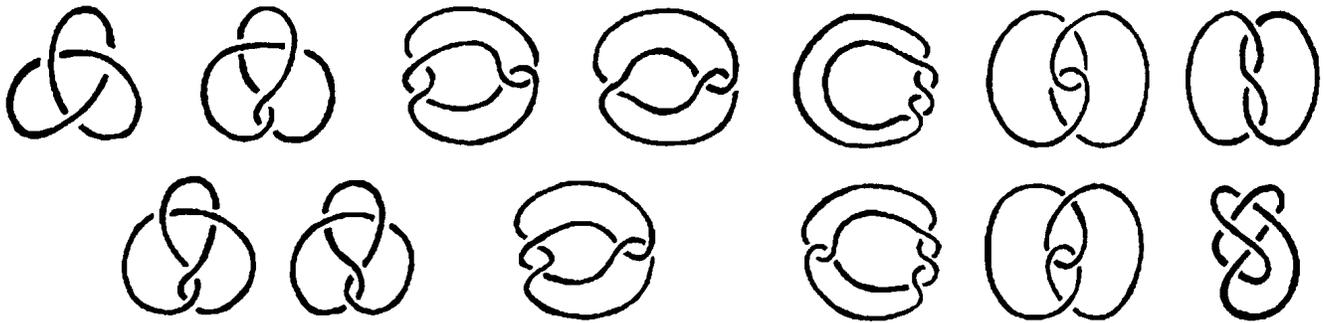


Рис. 1: Узлы, изотопные трилистнику (верхний ряд) и восьмерке (нижний ряд)

Под *изотопией* узла понимается его непрерывная деформация в пространстве как тонкой эластичной нити. В процессе деформации самопересечения не допускаются. Два узла называются *изотопными*, если один из них можно преобразовать в другой с помощью изотопии. В качестве доказательства изотопности конкретных узлов жюри принимает большую и понятную картинку или эксперимент с веревкой, воспроизводимый членом жюри.

Задача 1.1.1. (а) Некоторые два узла из верхнего ряда рис. 1 изотопны самому левому узлу. Для одного из этих двух узлов представьте изотопию с помощью движений Рейдемайстера (см. рис. 5).

(b)* Все узлы, представленные в верхнем ряду рис. 1 изотопны друг другу.

(c,d*) То же верно для узлов в нижнем ряду рис. 1.

(e) Все узлы с одинаковыми диаграммами изотопны.

Замечание. Здесь мы покажем необходимость строгого определения изотопии.

На рис. 2 показана изотопия между трилистником и тривиальным узлом. Действительно ли это изотопия? Это так называемая «кусочно-линейная необъемлемая изотопия», которая *отличается* от «кусочно-линейной объемлемой изотопии», определенной и используемой далее. (Первое понятие лучше отражает идею непрерывной деформации без самопересечений, но ма-

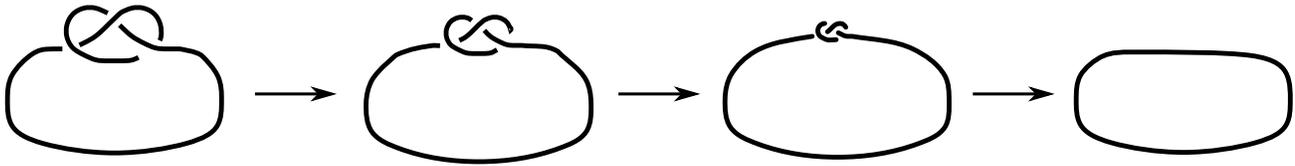


Рис. 2: Необъемлемая изотопия между трилистником и тривиальным узлом

лодоступно для старшеклассников, ср. [Sk16i].) На самом деле, любые два узла кусочно-линейно необъемлемо изотопны!

Обычная проблема с интуитивно понятными определениями не в том, что их трудно формализовать, а в том, что это можно сделать несколькими способами.

Узел — это пространственная замкнутая несамопересекающаяся ломаная.

Диаграмма узла — это его проекция общего положения¹ на плоскость², вместе с информацией, какая часть узла «проходит под» (проход), а какая — «проходит над» (переход) в каждом конкретном перекрестке.

Задача 1.1.2. Для любой диаграммы узла существует узел, проецирующийся на эту диаграмму. (Такой узел не обязательно единственный; см. впрочем задачу 1.1.1.e.)

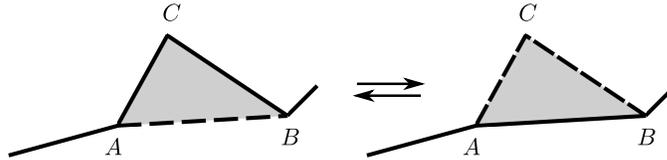


Рис. 3: Элементарное движение

Предположим, что стороны AC и CB треугольника ABC — ребра некоторого узла. Кроме того, предположим, что узел и часть плоскости, ограниченная треугольником ABC , ни в каких других точках не пересекаются. **Элементарное движение** $ACB \rightarrow AB$ — это замена двух ребер AC и CB ребром AB , либо обратная операция $AB \rightarrow ACB$ (рис. 3).³ Два узла K, L называются (кусочно-линейно объемлемо) **изотопными**, если существует последовательность узлов K_1, \dots, K_n такая, что $K_1 = K$, $K_n = L$, и каждый узел последовательности K_{j+1} получен из предыдущего узла K_j элементарным движением.

Теорема 1.1.3. (a) Тривиальный узел не изотопен трилистнику.

(b) Тривиальный узел не изотопен восьмерке.

(c) Трлистник не изотопен восьмерке.

(d) Существует бесконечное число попарно не изотопных узлов.

Эта теорема доказывается с использованием *инвариантов Арфа* и *Кэссона*, см. §1.4 и §2.1, или с использованием *правильных раскрасок*, см. §2.2 (так что нет необходимости тратить много времени, доказывая эти результаты прямо сейчас).

Замечание. Это замечание может быть полезным в качестве подсказки и предостережения к задачам 1.1.4 и 1.1.5.

¹Ломаная на плоскости называется ломаной *общего положения*, если существует ломаная L с тем же объединением ребер такая, что никакие три вершины ломаной L не лежат на одной прямой и никакие три отрезка, соединяющие некоторые вершины ломаной L , не имеют общей внутренней точки.

²Терминология университетской математики — «образ общего положения при проекции на плоскость».

³Если треугольник ABC вырожденный, то элементарное движение является либо разбиением ребра, либо обратной этому операцией.

В следующем абзаце мы докажем, что *если узел лежит в плоскости, то он изотопен тривиальному узлу.*

Обозначим узел, лежащий в плоскости, через $M_1M_2 \dots M_n$. Возьмем точку Z вне этой плоскости. Переведем $M_1M_2 \dots M_n$ в тривиальный узел M_1ZM_n следующей последовательностью элементарных движений:

$$M_1M_2 \rightarrow M_1ZM_2, \quad ZM_2M_3 \rightarrow ZM_3, \quad ZM_3M_4 \rightarrow ZM_4, \quad \dots, \quad ZM_{n-1}M_n \rightarrow ZM_n.$$

Следующий результат показывает, что промежуточные узлы изотопии, переводящей узел, лежащий в плоскости, в тривиальный узел, можно выбрать также лежащими в плоскости.

Теорема Шёнфлиса. Любая ломаная без самопересечений в плоскости изотопна (в этой плоскости) треугольнику.

Это усиленная версия следующего выдающегося результата.

Теорема Жордана. Любая замкнутая несамопересекающаяся ломаная L в плоскости \mathbb{R}^2 разбивает эту плоскость в точности на две части, т.е. $\mathbb{R}^2 - L$ — не связное множество, являющееся объединением двух связных множеств.

Подмножество плоскости называется *связным*, если любые две точки этого подмножества можно соединить ломаной, в нем лежащей.

Алгоритмическое объяснение почему теорема Жордана (а значит и теорема Шёнфлиса) нетривиальна, и доказательство теоремы Жордана см. в §1.3 ‘Intersection number for polygonal lines in the plane’ [Sk18], [Sk].

Задача 1.1.4. Предположим, что существует такая точка узла, что если мы идем вдоль узла, начиная с этой точки, то на некоторой диаграмме мы сначала встречаем только переходы, а затем только проходы. Тогда этот узел изотопен тривиальному узлу.⁴

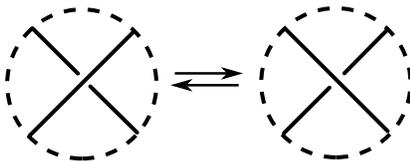


Рис. 4: Изменение перекрестка

Изменение перекрестка — такое изменение некоторого перекрестка, что проходы становятся переходами и наоборот, см. рис. 4.

Очевидно, после любого изменения перекрестка в диаграммах трилистника и восьмерки, показанных на рис. 1 мы получим диаграмму узла, изотопного тривиальному.

Лемма 1.1.5. Любая диаграмма узла может быть преобразована изменениями перекрестков в диаграмму узла, изотопного тривиальному.⁵

В этом тексте вместо изучения узлов с точностью до изотопии, мы будем изучать диаграммы узлов с точностью до эквивалентности, порожденной **движениями Рейдемейстера** (см. рис. 5⁶) и *движениями изотопии плоскости* (см. рис. 6 в середине и справа). Т.е. мы будем использовать без доказательства следующий результат.

⁴Эта задача будет мотивировкой для введения Арф-инварианта (§1.4). Доказательство иллюстрирует в малых размерностях основные идеи выдающегося доказательства Зимана многомерной теоремы о незаузленности сфер, см. обзор [Sk16c, Theorem 2.3].

⁵Эта простая лемма будет использована для индуктивного построения инвариантов, использующих скейн-соотношения, см. далее.

⁶Строгое определение первого движения Рейдемейстера легко дается с помощью рис. 6 (слева). У других движений Рейдемейстера есть аналогичные строгие определения. От участников *не* требуется использование этих строгих определений в решении задач. Вы можете использовать неформальное описание движений Рейдемейстера на рис. 5 и пропустить движения изотопии плоскости.

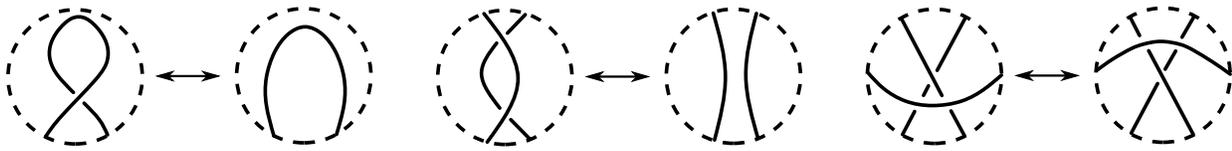


Рис. 5: Движения Рейдемейстера.

Даграммы узлов совпадают вне кругов, ограниченных пунктиром. Никакие другие части диаграмм, кроме нарисованных, не пересекаются с этими кругами. (То же верно для рис. 6, 4, 9 и 10.)

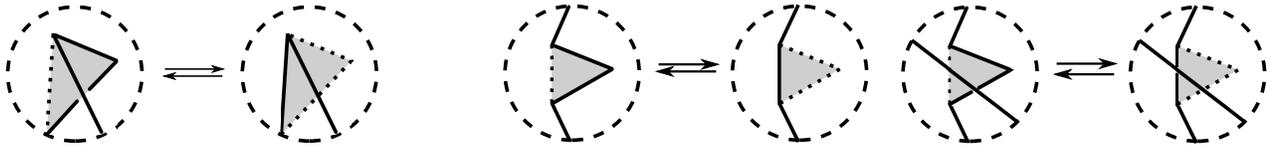


Рис. 6: (Слева) К строгому определению первого движения Рейдемейстера (В середине, справа) Движения изотопии плоскости

Теорема 1.1.6 (Рейдемейстера). * *Два узла изотопны тогда и только тогда, когда некоторая диаграмма первого узла может быть получена из некоторой диаграммы второго узла с помощью движений Рейдемейстера и движений изотопии плоскости.*

1.2 Основные определения и результаты о зацеплениях

Зацепление — это набор попарно непересекающихся узлов. Упорядоченные наборы называются упорядоченными или раскрашенными зацеплениями, в то время как неупорядоченные наборы называются неупорядоченными или нераскрашенными зацеплениями. В этом тексте под словом «зацепление» понимается «упорядоченное зацепление».

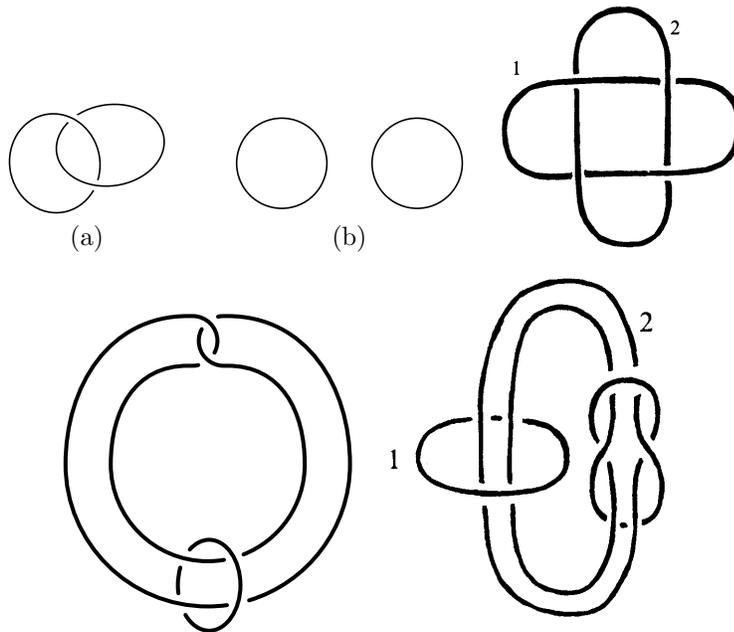


Рис. 7: Зацепление Хопфа, тривиальное зацепление и еще три зацепления

Тривиальное зацепление (с любым числом компонент) — зацепление, состоящее из треугольников, лежащих в параллельных плоскостях.

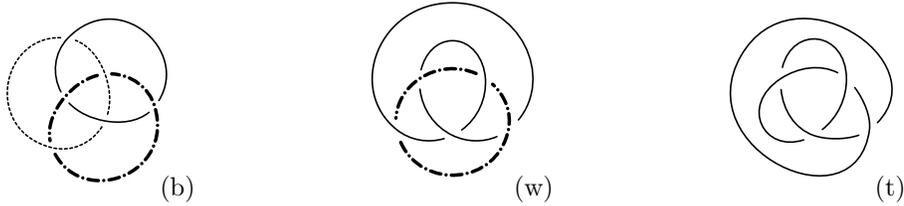


Рис. 8: Кольца Борромео, зацепление Уайтхеда и трилистник

Диаграммы, изотопия и т.д. для зацеплений определяются аналогично узлам. Аналоги лемм 1.1.6 и 1.1.5 для зацеплений верны.

Задача 1.2.1. (а) Зацепление Хопфа изотопно зацеплению, полученному из него перестановкой компонент.

(б) Зацепление Хопфа изотопно некоторому зацеплению, компоненты которого симметричны относительно некоторой прямой.

(с) Четвертое зацепление на рис. 7 изотопно зацеплению Уайтхеда на рис. 8.w.

(d,e*) Тоже, что и в пунктах (а,b) для зацепления Уайтхеда.

(f)* Кольца Борромео изотопны зацеплению, компоненты которого переставляются по циклу при повороте на угол $2\pi/3$ относительно некоторой прямой.

Теорема 1.2.2. (а) Зацепление Хопфа не изотопно тривиальному зацеплению.

(б) Зацепление Уайтхеда не изотопно тривиальному зацеплению.

(с) Зацепление Хопфа не изотопно зацеплению Уайтхеда.

(d) Кольца Борромео не изотопны тривиальному зацеплению.

Пункты (а) и (с) доказываются с использованием *коэффициента зацепления по модулю 2*, придумайте его самостоятельно или см. §1.3. Пункты (б) и (d) доказываются с использованием либо *полиномов Александра-Конвея*, см. §2.3, либо с помощью «тройного коэффициента зацепления» (инварианта Масси-Милнора) и «высшего коэффициента зацепления» (инварианта Сато-Левина) [Sk, §4.4-§4.6]. Пункт (d) также может быть доказан с использованием *правильных раскрасок*, см. §2.2.

1.3 Гауссов коэффициент зацепления по модулю 2 для диаграмм

Задача 1.3.1. Пусть A, B, C, D, E, F, O — это точки в пространстве, никакие четыре из которых не лежат в одной плоскости. Следующие три условия эквивалентны.

(i) Контур треугольника DEF пересекает часть плоскости ABC , ограниченную треугольником ABC , ровно в одной точке.

(ii) Отрезок BC проходит ниже (в смысле конструкции диаграммы зацепления) ровно одной из сторон DEF при взгляде из точки A .

(iii) Контур треугольника ABC проходит ниже нечетного числа сторон DEF при взгляде из точки O .

Предположим, что существует изотопия между двумя двухкомпонентными зацеплениями, и вторая компонента фиксирована в процессе изотопии. Тогда след первой компоненты — самопересекающийся цилиндр, не имеющий общих точек со второй компонентой. Если после изотопии компоненты расцеплены, то цилиндр можно дополнить до самопересекающегося диска, не имеющего общих точек со второй компонентой. Это наблюдение, вместе с задачей 1.3.1 и [Sk, Projection lemma 4.2.4] мотивируют следующее определение.

Коэффициентом зацепления по модулю 2 lk_2 плоской диаграммы двухкомпонентного зацепления называется взятое по модулю 2 число таких перекрестков диаграммы, для которых

первая компонента проходит над второй компонентой.

Задача 1.3.2. (а) Найдите коэффициент зацепления по модулю 2 для диаграмм на рис. 7, для пар колец Борромео и для зацепления Уайтхеда (рис. 8).

(б) Коэффициент зацепления по модулю 2 сохраняется при движениях Рейдемейстера.

Согласно (б) **коэффициент зацепления по модулю 2** двухкомпонентного зацепления (а также его класса изотопии) можно корректно определить как коэффициент зацепления по модулю 2 любой диаграммы этого зацепления.

Будем использовать без доказательства следующую *лемму о четности*: любые две замкнутые ломаные на плоскости, вершины которых находятся в общем положении, пересекаются в четном числе точек. Обсуждение и доказательство этой леммы можно найти в §1.3 ‘Intersection number for polygonal lines in the plane’ [Sk18], [Sk].

Задача 1.3.3. (а) Коэффициент зацепления по модулю 2 не изменяется при перестановке компонент зацепления.

(б) Существует двухкомпонентное зацепление, не изотопное тривиальному, у которого коэффициент зацепления по модулю 2 равен нулю.

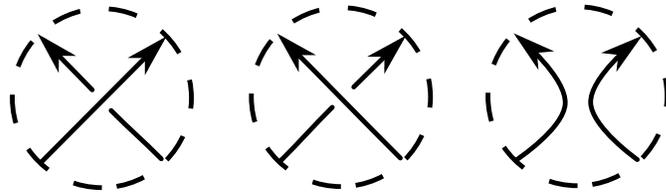


Рис. 9: Узлы K_+ , K_- , K_0

Обозначим через D_+ , D_- , D_0 любые три диаграммы ориентированных (узлов или) зацеплений, отличающиеся, как показано на рис. 9 (см. соглашения о рисунках в примечании к рис. 5). Также обозначим через K_+ , K_- , K_0 любые три зацепления с диаграммами D_+ , D_- , D_0 . Если некоторый инвариант (например, lk_2) определен для неориентированных зацеплений (или узлов), тогда его значение для зацепления присваивается этому зацеплению с любой ориентацией.

Теорема 1.3.4. *Существует единственный изотопический инвариант lk_2 со значениями 0 и 1 (неориентированных) двухкомпонентных зацеплений, принимающий значение 0 на тривиальном зацеплении и такой, что (для любых двух зацеплений K_+ и K_- , имеющих диаграммы, отличающиеся как показано на рис. 9)*

$$\text{lk}_2 K_+ - \text{lk}_2 K_- = \begin{cases} 1 & \text{в точке пересечения двух различных компонент;} \\ 0 & \text{в точке самопересечения одной из компонент.} \end{cases}$$

Задача 1.3.5. * Если коэффициент зацепления по модулю 2 двух (непересекающихся контуров) треугольников в пространстве равен нулю, то зацепление, образованное этими треугольниками, изотопно тривиальному.

Теорема 1.3.6 (Conway–Gordon–Sachs). * *Если никакие 4 из 6 точек в трехмерном пространстве не лежат в одной плоскости, то существует пара зацепленных треугольников с вершинами в этих 6 точках. Это означает, что внутренность первого треугольника пересекает контур второго треугольника ровно в одной точке.*

1.4 Арф-инвариант

Рассмотрим плоскую диаграмму некоторого узла и ее точку P , не являющуюся перекрестком. Назовем P *отмеченной точкой*. Неупорядоченная пара перекрестков A , B называется **скре-**

щивающейся (или P -скрещивающейся), если, обходя диаграмму в каком-нибудь направлении, начиная с P , и отмечая только перекрестки в A и в B , мы сначала встретим переход в A , затем переход в B , затем переход в A и, наконец, переход в B .

P -Арф-инвариантом arf_P плоской диаграммы называется четность числа ее P -скрещивающихся пар перекрестков.

Задача 1.4.1. (а) Если P -Арф-инвариант плоской диаграммы не равен нулю, то P не может быть точкой, рассмотренной в задаче 1.1.4.

(b,c,d) Найдите P -Арф-инвариант (какой-нибудь плоской диаграммы) тривиального узла, трилистника и восьмерки (при вашем выборе отмеченной точки P).

(е) P -Арф-инвариант не зависит от выбора отмеченной точки P .

Согласно (е) *Арф-инвариант* плоской диаграммы можно корректно определить как ее P -Арф-инвариант для произвольной отмеченной точки P .

(f) Арф-инвариант плоской диаграммы сохраняется при движениях Рейдемейстера.

Согласно (f) *Арф-инвариант* arf узла (или даже изотопического класса узлов) можно корректно определить как Арф-инвариант произвольной плоской диаграммы этого узла.

Задача 1.4.2. (а) Если на рис. 9 K_+ и K_- — это плоские диаграммы узлов, то K_0 — это плоская диаграмма двухкомпонентного зацепления и $\text{arf } K_+ - \text{arf } K_- = \text{lk}_2 K_0$.

(b) Существует узел, не изотопный тривиальному, Арф-инвариант которого равен нулю.

Теорема 1.4.3. Для (неориентированных) узлов существует единственный изотопический инвариант arf со значениями 0 и 1, принимающий значение 0 на тривиальном узле и такой что

$$\text{arf } K_+ - \text{arf } K_- = \text{lk}_2 K_0.$$

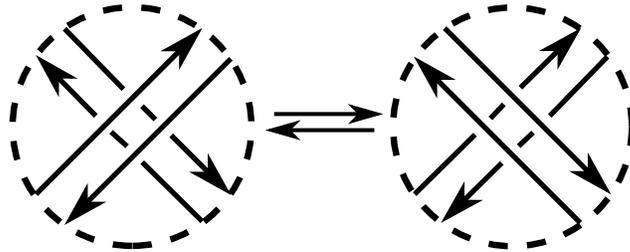


Рис. 10: Риносы

Задача 1.4.4. Два узла называются *Арф-эквивалентными*, если какая-нибудь диаграмма первого узла (с некоторой ориентацией) может быть преобразована в какую-нибудь диаграмму второго узла (с некоторой ориентацией) движениями Рейдемейстера и с помощью *риносов*, показанными на рис. 10.

(а) Если два узла Арф-эквивалентны, то их Арф-инварианты совпадают.

(b)* Восьмерка Арф-эквивалентна трилистнику.

(с)* Если у двух узлов Арф-инварианты совпадают, то эти узлы Арф-эквивалентны.

Теорема 1.4.5. * Рассмотрим 7 точек в пространстве, никакие 4 из которых не лежат в одной плоскости, и $\binom{7}{2} = 21$ отрезков, их соединяющих. Тогда существует замкнутая ломаная, составленная из этих отрезков и не изотопная контуру треугольника.

1.5 Ориентированные узлы и зацепления

Вы знаете, что такое ориентированная ломаная, так что Вы также знаете, что такое ориентированный узел (рис. 11).

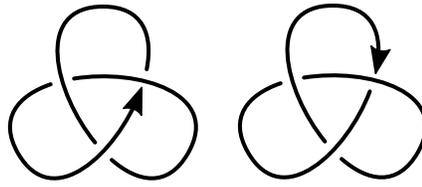


Рис. 11: Два трилистника с противоположными ориентациями

Неформальное понятие и строгое определение *изотопии* ориентированных узлов даются аналогично изотопии узлов.

Задача 1.5.1. Изотопные ориентированные ломаные без самопересечений на плоскости и на сфере определяются аналогично изотопным ориентированным узлам в пространстве.

(а) Ориентированный сферический треугольник изотопен на сфере тому же треугольнику с противоположной ориентацией.

(b) Аналог пункта (а) для плоскости неверен.

Задача 1.5.2. (а) Два тривиальных узла; (b) Два трилистника; (c) Две восьмерки с противоположными ориентациями изотопны.

Теорема 1.5.3. (Н. Trotter, 1964) *Существует ориентированный узел, не изотопный такому же узлу с противоположной ориентацией.*

Этот факт доказывается с использованием *полиномов Джонса* [PS96], [CDM12]; доказательство выходит за рамки данного текста.

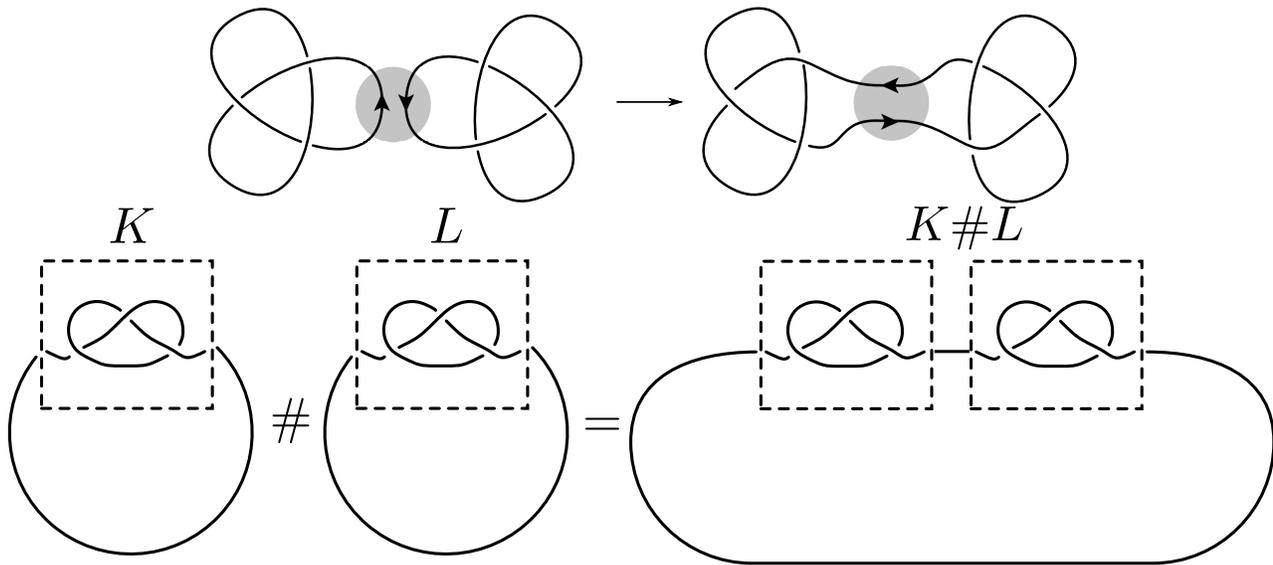


Рис. 12: Связная сумма узлов

Связная сумма $\#$ ориентированных узлов определена на рис. 12.⁷

Эта операция не является корректно определенной для ориентированных узлов. Так что мы обозначим через $K\#L$ любую связную сумму K и L .

⁷Более точно, рассмотрим непересекающиеся ориентированные диаграммы двух ориентированных узлов. Найдем в плоскости прямоугольник, одна пара сторон которого совпадает с некоторыми ребрами этих узлов, а остальная часть прямоугольника с узлами не пересекается, и эти ребра имеют одинаковую ориентацию вдоль контура прямоугольника. Теперь соединим две диаграммы, удалив эти ребра из узлов и добавив в качестве ребер отрезки, образующие другую пару сторон прямоугольника. Получившаяся диаграмма связной суммы имеют ориентацию, согласующуюся с ориентацией исходных диаграмм.

Задача 1.5.4. Для любых ориентированных узлов K, L, M и тривиального ориентированного узла O имеем

(a) $K \# O = K$. (b) $K \# L = L \# K$. (c) $(K \# L) \# M = K \# (L \# M)$.

(d) $\text{arf}(K \# L) = \text{arf} K + \text{arf} L$ (здесь узлы K, L неориентированные).

(Строгий смысл пункта (a) — «существует связная сумма K и O , изотопная K ». Строгое смысл пунктов (b) и (c) аналогичен. См. замечание ниже.)

Замечание. Класс изотопии узла — это множество узлов, ему изотопных.

Ориентированный класс изотопии $[K \# L]$ связной суммы двух ориентированных классов изотопии $[K], [L]$ ориентированных узлов K, L не зависит от выборов, сделанных в процессе построения, и от выбора представителей K, L классов $[K], [L]$. Следовательно, связная сумма ориентированных классов изотопии ориентированных узлов корректно определена как $[K] \#[L] := [K \# L]$, см. [Sk15p, Remark 2.3.a]. Для классов изотопии неориентированных узлов связная сумма не является корректно определенной операцией.

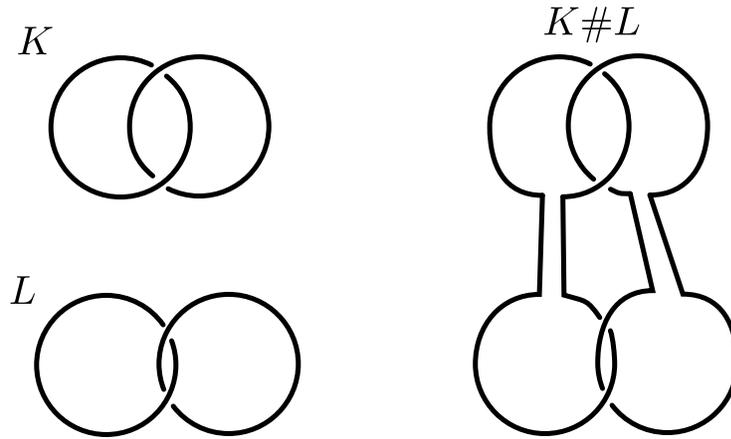


Рис. 13: Связная сумма зацеплений

Связная сумма $\#$ зацеплений (упорядоченных или нет, ориентированных или нет) определяется аналогично связной сумме узлов, см. рис. 13. Это операция не является корректно определенной для зацеплений и задача 1.5.6 показывает, что операция также не является корректно определенной для классов изотопии зацеплений. Так что мы обозначим через $K \# L$ любую связную сумму K и L .

Задача 1.5.5. (a,b,c,d) Докажите аналоги утверждений из задачи 1.5.4.a,b,c,d для зацеплений.

Задача 1.5.6. Существует две изотопные пары (K, L) и (K', L')

(a) неупорядоченных; (b)* упорядоченных

двухкомпонентных зацеплений (ориентированных или нет) таких, что некоторые связные суммы $K \# L$ и $K' \# L'$ не изотопны.

1.6 Гауссов коэффициент зацепления для плоских диаграмм

Пусть $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$ — упорядоченная пара векторов (ориентированных отрезков) на плоскости, пересекающихся в точке P . Определим **знак** точки P как $+1$ если ABC ориентирован по часовой стрелке и как -1 иначе (рис. 14).

Коэффициент зацепления lk диаграммы ориентированного двухкомпонентного зацепления — сумма знаков всех точек пересечения на диаграмме, в которых первая компонента проходит над второй компонентой. В каждом перекрестке *первый* (*второй*) вектор — это звено первой (второй) компоненты.

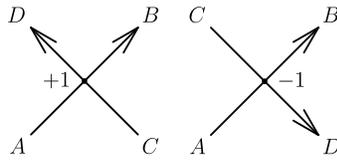


Рис. 14: Знак точки пересечения

Задача 1.6.1. (a,b) Найдите коэффициент зацепления для (некоторой диаграммы) зацепления Хопфа и пары колец Борромео, выбрав ориентацию компонент самостоятельно.

(c) Коэффициент зацепления сохраняется при движениях Рейдемейстера.

Из (c) следует, что **коэффициент зацепления** ориентированного двухкомпонентного зацепления (или его класса изотопии) — корректно определяется как коэффициент зацепления любой плоской диаграммы зацепления.

Модуль коэффициента зацепления (неориентированного) двухкомпонентного зацепления (или его класса изотопии) корректно определен независимо от ориентации компонент.

Будем использовать без доказательства следующую *лемму о тривиальности*: для любых двух замкнутых ломаных в плоскости, вершины которых находятся в общем положении, сумма знаков их точек пересечения равна нулю. Обсуждение и доказательство см. §1.3 ‘Intersection number for polygonal lines in the plane’ в [Sk18], [Sk].

Задача 1.6.2. (a) Перестановка компонент сохраняет коэффициент зацепления или меняет его знак на противоположный?

(b) Изменение ориентации любой компоненты меняет знак коэффициента зацепления на противоположный.

(c) Нарисуйте ориентированное двухкомпонентное зацепление с коэффициентом зацепления -5 .

(d) Для любой связной суммы $K \# L$ ориентированных двухкомпонентных зацеплений K, L имеем $\text{lk}(K \# L) = \text{lk } K + \text{lk } L$.

(e) Существует двухкомпонентное зацепление, не изотопное тривиальному зацеплению, коэффициент зацепления которого равен нулю.

Теорема 1.6.3. *Существует единственный целочисленный изотопический инвариант lk ориентированных двухкомпонентных зацеплений, который равен 0 для тривиального зацепления, такой, что*

$$\text{lk } K_+ - \text{lk } K_- = \begin{cases} 1 & \text{для перекрестков, в которых пересекаются разные компоненты;} \\ 0 & \text{для перекрестков, в которых одна компонента пересекает себя.} \end{cases}$$

Задача 1.6.4. Два зацепления (ориентированные или нет) называются *сингулярно гомотопными*, если одно зацепление можно непрерывно продеформировать в другое так, что во время деформации разные компоненты не пересекаются (но могут появляться самопересечения компонент). Или, эквивалентно, некоторая плоская диаграмма первого зацепления может быть преобразована в некоторую плоскую диаграмму второго зацепления с использованием движений Рейдемейстера и изменений перекрестка для одной компоненты.

(a) Зацепление Уайтхеда сингулярно гомотопно тривиальному зацеплению.

(b) Если два ориентированных двухкомпонентных зацепления сингулярно гомотопны, тогда их коэффициенты зацепления равны.

(c)* Если коэффициенты зацеплений двух двухкомпонентных зацеплений равны, то эти зацепления сингулярно гомотопны.

(d)* Кольца Борромео сингулярно не гомотопны тривиальному зацеплению.

2 Задачи после промежуточного финиша

2.1 Инвариант Кэссона

Знак перекрестка ориентированной плоской диаграммы узла определен после рисунка 14; первый (второй) вектор — это вектор перехода (прохода). Очевидно, знак не зависит от ориентации диаграммы и таким образом определен для неориентированных диаграмм.

Знак P -скрецивающей пары перекрестков на плоской диаграмме узла (для любой отмеченной точки P) — это произведение знаков соответствующих перекрестков.

P -инвариант Кэссона плоской диаграммы — это сумма знаков всех P -скрецивающихся пар перекрестков.

Задача 2.1.1. (a) Нарисуйте плоскую диаграмму узла и отмеченную точку P такие, что P -инвариант Кэссона плоской диаграммы равен -5 .

(b,c,d,e,f) То же, что и в задачах 1.4.1.b,c,d,e,f для инварианта Кэссона.

(g) Сформулируйте и докажите аналог задачи 1.4.2.a для инварианта Кэссона.

(h,i) То же, что и в задачах 1.4.2.b и 1.5.4.d для инварианта Кэссона.

Из (e,f) следует, что **инвариант Кэссона** (число Кэссона) c_2 плоской диаграммы узла (или даже изотопического класса узла) является корректно определенным инвариантом, если положить его равным P -инварианту Кэссона любой плоской диаграммы этого узла с любой отмеченной точкой P .

Теорема 2.1.2. *Существует единственный целочисленный изотопический инвариант c_2 для (неориентированных) узлов, который равен 0 для тривиального узла и для которого*

$$c_2(K_+) - c_2(K_-) = \text{lk } K_0.$$

(Число $\text{lk } K_0$ определено, поскольку изменение ориентации обеих компонент ориентированного зацепления не меняет коэффициент зацепления.)

2.2 Правильные раскраски

Дугой на плоской диаграмме (узла или зацепления) называется связный фрагмент, идущий от одного прохода до другого. **Правильная раскраска** плоской диаграммы (узла или зацепления) — это такая раскраска ее дуг в три цвета, что по крайней мере два цвета использовано, и в каждом перекрестке встречаются либо все три цвета, либо только один цвет. Плоская диаграмма (узла или зацепления) называется **раскрашиваемой в три цвета** если ее можно правильно раскрасить.

Задача 2.2.1. Для каждого из следующих узлов или зацеплений возьмите любую плоскую диаграмму и определите, является ли она раскрашиваемой в три цвета:

(a) тривиальный узел; (b) трилистник; (c) восьмерка.

(d-j) зацепления на рис. 7 и 8.

Задача 2.2.2. (a) Раскрашиваемость в три цвета плоской диаграммы сохраняется при движениях Рейдемейстера.

(b) Ни одно из зацеплений на рис. 7 и 8 (кроме тривиального зацепления) не изотопно тривиальному зацеплению.

Задача 2.2.3. Узел 5_1 не изотопен тривиальному узлу.

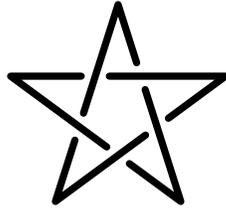


Рис. 15: Узел 5_1

2.3 Полиномы Александера-Конвея

Задача 2.3.1. * (а) Существует единственный изотопический инвариант трехкомпонентных ориентированных зацеплений arf со значениями 0 и 1, принимающий значение 0 на тривиальном зацеплении и такой, что

$$\text{arf}(K_+) - \text{arf}(K_-) = \begin{cases} \text{lk}_2 K_0 & \text{в точке пересечения различных компонент;} \\ 0 & \text{в точке самопересечения одной из компонент.} \end{cases}$$

(Здесь $\text{lk}_2 K_0$ определено, так как K_0 — двухкомпонентное зацепление.)⁸

(б) Существует единственный изотопический инвариант двухкомпонентных ориентированных зацеплений a_3 со значениями 0 и 1, принимающий значение 0 на тривиальном зацеплении и такой, что

$$a_3(K_+) - a_3(K_-) = \text{arf } K_0.$$

(Здесь $\text{arf } K_0$ определено, так как K_0 либо узел, либо трехкомпонентное зацепление.)

(в) Существует единственный изотопический инвариант четырехкомпонентных ориентированных зацеплений a_3 со значениями 0 и 1, принимающий значение 0 на тривиальном зацеплении и такой, что

$$a_3(K_+) - a_3(K_-) = \begin{cases} \text{arf } K_0 & \text{в точке пересечения различных компонент;} \\ 0 & \text{в точке самопересечения одной из компонент.} \end{cases}$$

(Здесь $\text{arf } K_0$ определено, так как K_0 — трехкомпонентное зацепление.)

Доказательство существования в задачах 2.3.1 и теореме 2.3.3 не приводится в этом тексте. Простое доказательство можно найти в [Ka06', §2-§5], [Ka06]. Вы можете заработать плюс, доказав единственность, и решать другие задачи, предполагая существование доказанным. Связь с правильными раскрасками см. в §6 [Ka06'].

Задача 2.3.2. Найдите (сами выберите ориентацию компонент)

(а) arf инвариант колец Борромео;

(б,с,д*) a_3 инвариант зацепления Хопфа, зацепления Уайтхеда и *четырёхкомпонентного зацепления Борромео*, т.е. такого четырехкомпонентного зацепления, для которого любое трехкомпонентное подзацепление изотопно тривиальному зацеплению, но само зацепление не изотопно тривиальному.

Теорема 2.3.3. * (а) Существует единственная бесконечная последовательность $c_{-1} = 0, c_0, c_1, c_2, \dots$ целочисленных изотопических инвариантов ориентированных неупорядоченных зацеплений, принимающая значения $c_0 = 1$ и $c_1 = c_2 = \dots = 0$ на тривиальном зацеплении, и такая, что

$$c_n(K_+) - c_n(K_-) = c_{n-1}(K_0)$$

⁸Теорема 1.4.3 является аналогом задачи 2.3.1 для однокомпонентных зацеплений (узлов). Определение arf , данное в §1.4 применимо только к узлам, и наша цель здесь — обобщить его на трехкомпонентные зацепления.

для любого $n \geq 0$.

(b) Существует единственная бесконечная последовательность $c_{-1} = 0, c_0, c_1, c_2, \dots$ целочисленных изотопически инвариантных ориентированных упорядоченных зацеплений, принимающая значения $c_0 = 1$ и $c_1 = c_2 = \dots = 0$ на тривиальном зацеплении, и такая, что для любого $n \geq 0$ имеем

$$c_n(K_+) - c_n(K_-) = c_{n-1}(K_0),$$

где K_0 — это K_0 с рис. 9 с некоторым упорядочением компонент.

Вообще-то две версии теоремы 2.3.3 эквивалентны. Вы можете использовать теорему 2.3.3.b без доказательства.⁹

Многочлен $C(K)(t) := c_0(K) + c_1(K)t + c_2(K)t^2 + \dots$ называется *многочленом Конвея*, см. задачу 2.3.5.e. Введение этого многочлена позволяет находить все инварианты c_n так же быстро, как и один из них. Формула из теоремы 2.3.3 эквивалентна следующему равенству

$$C(K_+) - C(K_-) = tC(K_0).$$

Задача 2.3.4. Найдите многочлены Конвея следующих зацеплений (выберите сами ориентацию для каждой компоненты).

- (a) тривиальное зацепление с двумя компонентами;
- (b) тривиальное зацепление с n компонентами;
- (c) зацепление Хопфа; (d) трилистник; (e) восьмерка;
- (f) зацепление Уайтхеда; (g) кольца Борромео; (h) узел 5_1 .

Задача 2.3.5. (a) Имеет место равенство $c_0(K) = 1$ если K узел, и $c_0(K) = 0$ в противном случае (т.е. если K имеет более одной компоненты).

- (b) Если K — узел, то $c_{2j+1}(K) = 0$, и c_2 это инвариант Кэссона.
- (c) Если K — двухкомпонентное зацепление, то $c_{2j}(K) = 0$, и c_1 это коэффициент зацепления.
- (d) Если K — k -компонентное зацепление, то $c_j(K) = 0$, если или $j \leq k - 2$, или $j - k$ чётно.
- (e) Для каждого узла или зацепления все инварианты c_n , кроме конечного числа, нулевые.

Задача 2.3.6. (a) Изменение ориентации всех компонент зацепления (в частности, изменение ориентации узла) сохраняет многочлен Конвея.

(b) Существует двухкомпонентное зацепление такое, что изменение ориентации одной его компоненты меняет степень многочлена Конвея (в частности, такое изменение ни сохраняет многочлен Конвея, ни меняет его знак).

- (c) Для любой связной суммы $K \# L$ узлов K, L верно $C(K \# L) = C(K)C(L)$.

Зацепление называется *разделяемым*, если оно изотопно зацеплению, компоненты которого содержатся в непересекающихся шарах.

- Задача 2.3.7.** (a,b,c) Ни одно зацепление из теоремы 1.2.2 не является разделяемым.
- (d) Многочлен Конвея разделяемого зацепления тривиален.

⁹Не вполне ясно, которая из двух версий сформулирована в [CDM12, §2.3.1], так что мы приводим обе версии и выводим более строгую версию из более слабой.

2.4 Vassiliev-Goussarov invariants (sketch)*

Denote by

- Σ the set of isotopy classes of singular knots [PS96, 4.1],
- δ_n the set of all chord diagrams that have n chords [PS96, 4.8];
- $\sigma(K)$ the *chord diagram* of a singular knot K [PS96, 4.8], [CDM12, 3.4.1] (not to be confused with *Gauss diagrams* for a non-singular knot K [CDM12, 1.8.4]).

Теорема 2.4.1 (Vassiliev-Kontsevich, [PS96], [CDM12]). *For any map $\lambda : \delta_n \rightarrow \mathbb{R}$ there exists a map $v : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ having properties (1)-(3) below if and only if λ satisfies to the 1-term and the 4-term relations [PS96, (4.5), (4.6)].*

(1) *For any singular knots K_+, K_- and K^0 from [PS96, (4.1)] (notice the difference with fig. 9) we have*

$$v(K_+) - v(K_-) = v(K^0),$$

- (2_n) *$v(K) = 0$ for each singular knot that has more than n double points, and*
 (3) *$v(K) = \lambda(\sigma(K))$ for each singular knot that has exactly n double points.*

A map $v : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ such that (1) holds is called a *Vassiliev-Goussarov invariant*.

A map $v : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ such that (2_n) holds is called a *map of order at most n* .

Задача 2.4.2. (a) The map v of theorem 2.4.1 is unique up to Vassiliev-Goussarov invariant of order at most $n - 1$. More precisely, the difference between maps $v, v' : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ satisfying to (1), (2_n) and (3), satisfies to (1) and (2_{n-1}).

(b) Prove the ‘only if’ part of theorem 2.4.1.

(0),(1),(2),(3)* Prove the ‘if’ part of theorem 2.4.1 for $n = 0, 1, 2, 3$.

Hint: for $n = 2$ use theorem 2.1.2, for $n = 3$ use the coefficient of h^3 in $J(e^h)$, where J is the Jones polynomial in t -parametrization [CDM12, 2.4.2, 2.4.3].

In the remaining problems theorem 2.4.1 can be used without proof. Assertion ‘ $v(K) = x$ for any singular knot K whose chord diagram is a ’ is shortened to ‘ $v(a) = x$ ’.

Задача 2.4.3. (a) There exists a unique Vassiliev-Goussarov invariant $v_2 : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ of order at most 2 such that

- $v_2(O) = 0$ for the trivial knot O , and
- $v_2(1212) = 1$ ((1212) is the ‘non-trivial diagram with 2 chords’ [PS96, Figure 4.4], 3rd diagram of the first line).

Warning: in this problem it is allowed to use theorem 2.4.1 but not theorem 2.1.2.

(b,b’,c,d) Calculate v_2 for the right trefoil, left trefoil, figure eight knot and the 5_1 knot.

Задача 2.4.4. (a) There exists a unique Vassiliev-Goussarov invariant $v_3 : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ of order at most 3 such that

- $v_3(O) = 0$ for the trivial knot O and for the left trefoil O , and
- $v_3(123123) = 1$ ((123123) is the ‘non-trivial most symmetric diagram with 3 chords’, [PS96, Figure 4.4], 5th diagram of the second line).

(b,c,d*) Calculate v_3 for the right trefoil, figure eight knot and the 5_1 knot.

Hints: Problems 2, 3, 4ab, Results/Theorems 11, 13, 14 from [PS96, §4].

Задача 2.4.5. (a) There exists a unique Vassiliev-Goussarov invariant $v_4 : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ of order at most 4 such that

- $v_4(O) = 0$ for the trivial knot O , for the left trefoil O , and for the right trefoil O ,
- $v_4(12341234) = 2$, $v_4(12341432) = 3$ and $v_4(12341423) = 5$ [PS96, Problem 4.4.b].

(c*,d*) Calculate v_4 for the figure eight knot and the 5_1 knot.

Указания и решения к задачам до промежуточного финиша

1.1.1. (a,b,c,d) См. [Pr95]. Проще всего изготовить трилистник и восьмерку из веревки или шнурка, а затем попытаться получить из этих узлов все узлы, изображенные на рисунке 1. Выполнить некоторые преобразования узла восьмерка вам поможет рис. 16.

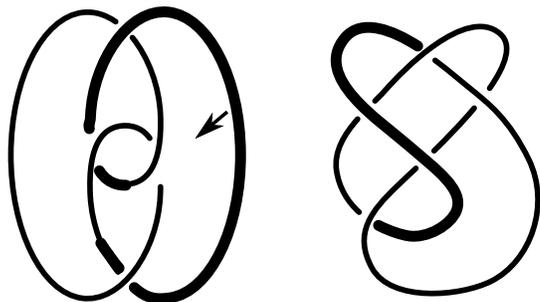


Рис. 16: Изотопия восьмерки

(e) Рассмотрим два узла с совпадающими плоскими диаграммами в горизонтальной плоскости π . Для каждой точки X в пространстве пусть $p(X)$ — прямая, проходящая через X и перпендикулярная π . Пусть $h(X)$ — высота X относительно π , положительная ($h(X) > 0$) если X находится в верхнем полупространстве и отрицательная ($h(X) < 0$) если X находится в нижнем полупространстве. Каждой точке A первого узла поставим в соответствие точку A' второго узла с помощью следующей процедуры. Рассмотрим два случая:

Случай 1: Проекция точки A на π не является перекрестком на плоской диаграмме. В этом случае прямая $p(A)$ пересекает первый узел только в точке A . Так как плоские диаграммы узлов совпадают, то прямая $p(A)$ пересекает второй узел также только в одной точке. Обозначим эту точку через A' .

Случай 2: проекция точки A на π является перекрестком на плоской диаграмме. В этом случае прямая $p(A)$ пересекает первый узел еще в одной точке $B \neq A$. Так как плоские диаграммы узлов совпадают, то прямая $p(A)$ пересекает второй узел тоже в двух точках: C и D . Без ограничения общности можно считать что $h(C) > h(D)$. Тогда если $h(A) > h(B)$, то положим $A' = C$, иначе $A' = D$.

Для каждой точки A первого узла и каждого числа $t \in [0, 1]$ пусть $A(t)$ — точка на прямой $p(A)$ на высоте $h(A(t)) = (1 - t)h(A) + th(A')$. По построению $A(0) = A$, $A(1) = A'$, и преобразование первого узла,двигающее точку $A(0)$ к точке $A(1)$ с постоянной скоростью так, что в момент времени t она находится в положении $A(t)$, является искомой изотопией.

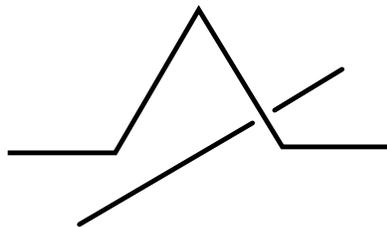


Рис. 17: Мостик через перекресток

1.1.2. Для каждого перекрестка на плоской диаграмме выберем на участке перекрестка, являющемся переходом, две точки, близкие к пересечению и находящиеся по разные стороны от него. Заменим отрезок между двумя выбранными точками «мостиком», соединяющим выбранные точки и «подымающимся» над плоской диаграммой (см. рис. 17.). После замены всех перекрестков такими «мостиками» мы получим искомый узел.

1.1.3. (a) Используйте результаты задач 1.4.1, 2.1.1, или 2.2.1.

(b) Используйте результаты задач 1.4.1 или 2.1.1.

(c) Используйте результат задачи 2.2.1.

(d) Рассмотрим любую связную сумму n копий трилистника. Согласно утверждениям 2.1.1.c,i инвариант Кэссона такого узла равен n . Следовательно, для различных значений n соответствующие узлы не изотопны.

1.1.4. Выберем узел, проецирующийся на данную плоскую диаграмму тем же способом, что и в утверждении 1.1.2. Будем считать, что все «мостики» лежат в верхнем полупространстве относительно плоскости проекции. По предположению существуют точки X и Y узла, которые разбивают узел на две ломаные p и q такие, что

- q лежит на плоскости проекции и проходит только через проходы;
- p проецируется на ломаную p' , которая проходит только через переходы.

Возьмем точку Z в верхнем полупространстве и точку T в нижнем полупространстве. Построим изотопию между заданным узлом и замкнутой ломаной $XZYT$, которая изотопна тривиальному узлу. Построение изотопии состоит из трех шагов, в каждом из которых точки X, Y остаются фиксированными.

Шаг 1. Изотопия между q и XTY . Предположим, что $q = A_0A_1 \dots A_n$, где $A_0 = X$ и $A_n = Y$. Тогда изотопия получается последовательностью элементарных движений

$$A_0A_1 \rightarrow A_0TA_1, \quad TA_1A_2 \rightarrow TA_2, \quad TA_2A_3 \rightarrow TA_3, \quad \dots TA_{n-1}A_n \rightarrow TA_n.$$

Шаг 2. Изотопия между p и p' . Уберем все «мостики» с помощью элементарных движений.

Шаг 3. Изотопия между p' и XZY . Строится аналогично шагу 1.

1.1.5. Следует из утверждения 1.1.4.

Другая идея доказательства (см. теорему 3.8 в [PS96]). Обозначим через π горизонтальную плоскость, содержащую диаграмму. Для каждой точки X в пространстве $p(X)$ и $h(X)$ определяются как в решении задачи 1.1.1.e. Пусть l — прямая на плоскости, которая проходит через вершину A_0 плоской диаграммы, и пусть вся диаграмма лежит по одну сторону от прямой l . Пусть A_0, A_1, \dots, A_n — все вершины плоской диаграммы в порядке их появления при движении вдоль диаграммы в некотором направлении. Выберем точки B_0, \dots, B_n так, что $A_i \in p(B_i)$ для $i = 1, \dots, n$, и $h(B_i) < h(B_j)$ для $i < j$. Пусть B_{n+1} — точка, проекция которой на π близка к A_0 и $h(B_{n+1}) > h(B_n)$. Тогда узел $B_0 \dots B_n B_{n+1}$ изотопен тривиальному узлу. Действительно, по построению прямой l , проекция узла на любую плоскость, перпендикулярную l , является замкнутой ломаной без самопересечений. Остается только изменить перекрестки плоской диаграммы так, чтобы они согласовывались с проекцией построенного узла на плоскость π .

1.1.6. См. §1.7 в [PS96].

Замечание. Так как в §1.6 [PS96] нет такого же строгого определения для движений Рейдемейстера как для движений изотопии плоскости,¹⁰ рассуждения в §1.7 [PS96] не являются

¹⁰Это также показывает, что наличие движений изотопии плоскости в утверждении из §1.7 [PS96] не делает само утверждение строгим, поэтому этого следует избегать. На интуитивном уровне движения изотопии плоскости следует пропускать. С альтернативным строгим определением ниже движения изотопии плоскости могут быть выражены с помощью движений Рейдемейстера и поэтому их следует опустить в утверждении.

Мы предложим альтернативное строгое определение первого движения Рейдемейстера. У других движений Рейдемейстера есть аналогичные строгие определения. Возьмем на плоскости замкнутую несамопересекающуюся ломаную L , внутренность которой (см. теорему Жордана в замечании после теоремы 1.1.3) пересекает диаграмму D по несамопересекающейся ломаной M , соединяющей две точки на L . Пусть N — замкнутая несамопересекающаяся ломаная во внутренности L такая, что $N \cap L = \emptyset$, $N \cap M$ — одна точка, и $M \cup N$ можно сделать (несамопересекающейся) ломаной общего положения. *Первое движение Рейдемейстера* — это замена M на $M \cup N$ в D с сохранением «информации» в соответствующем перекрестке.

строгим доказательством. По-видимому, строгое доказательство может быть получено с использованием строгого определения движений Рейдемейстера.

1.2.1. (a) Следует из (b) (или может быть доказано независимо).

(d) Следует из (e) (или может быть доказано независимо).

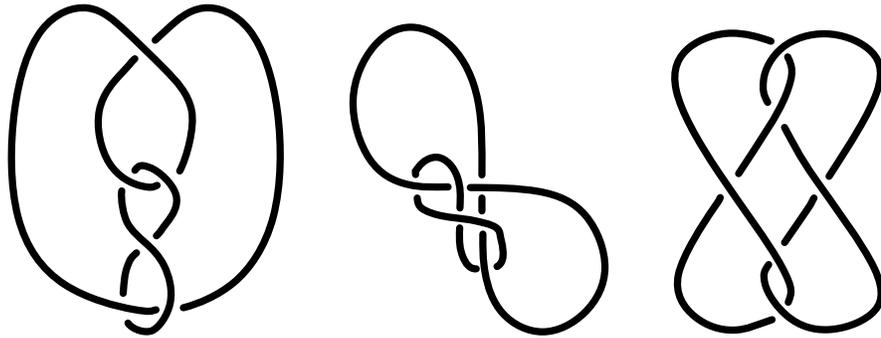


Рис. 18: Изотопия зацепления Уайтхеда

(e) См. рис.18.

(f) Возьмем три эллипса, заданных системами уравнений

$$\begin{cases} x = 0 \\ y^2 + 2z^2 = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} y = 0 \\ z^2 + 2x^2 = 1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} z = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 1. \end{cases}$$

См. рис. 19. Возьмем четырехугольники, описанные около этих эллипсов и симметричные относительно координатных осей. Искомая прямая задается уравнением $x = y = z$.

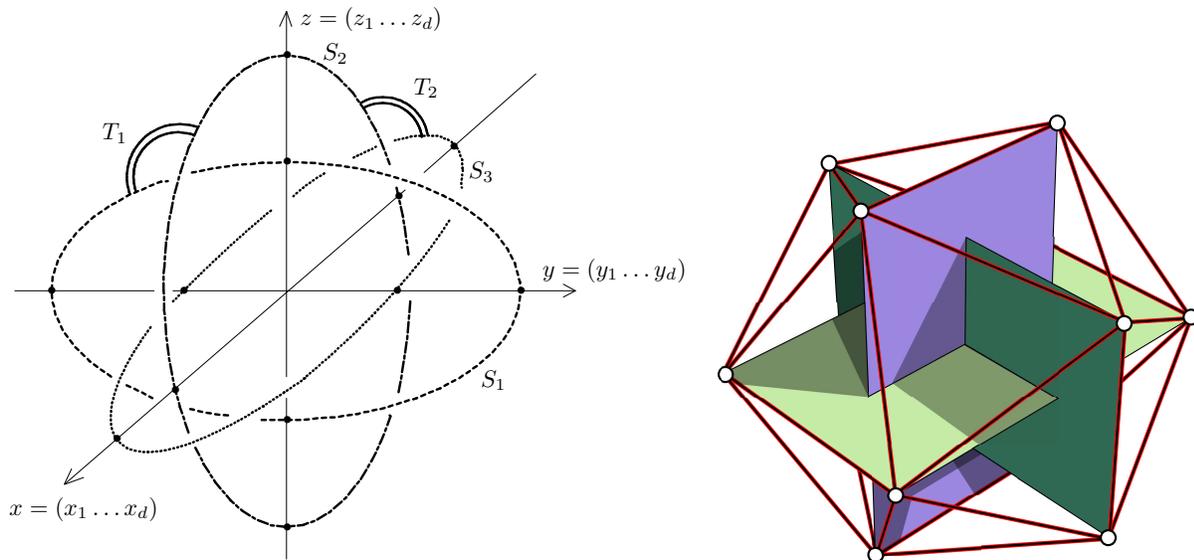


Рис. 19: Кольца Борромео

1.2.2. (a,c) Используйте результаты задачи 1.3.2.

(b,d) Используйте, например, результаты задачи 2.2.1 и 2.2.2.

1.3.1. Обозначим через $\langle ABC \rangle$ внутренность треугольника ABC .

(i \Leftrightarrow ii) Отрезок XY проходит над отрезком BC при взгляде из точки A , если и только если XY пересекает $\langle ABC \rangle$.

Контур треугольника DEF — это объединение отрезков DE , EF и DF . Поэтому i \Leftrightarrow ii.

(i \Leftrightarrow iii) Контур треугольника DEF либо не пересекается с поверхностью тетраэдра $OABC$, либо пересекается с ней ровно в двух точках. Это влечет эквивалентность следующих трех свойств:

- контур треугольника DEF пересекает $\langle ABC \rangle$ ровно в одной точке;
- контур треугольника DEF пересекает в точности один из треугольников $\langle OAB \rangle$, $\langle OBC \rangle$ или $\langle OAC \rangle$.
- контур треугольника ABC проходит в точности под одной из сторон DEF при взгляде из точки O .

1.3.2. (а) *Ответы* (слева направо): 1, 0, 0, 0.

(б) Докажите утверждение отдельно для каждого движения Рейдемейстера. При движениях I и III число перекрестков, в которых первая компонента проходит над второй, не изменяется. При движении II это число изменяется на 0 или ± 2 .

1.3.3. (а) Рассмотрим плоскую диаграмму зацепления. По лемме о четности (сформулированной перед задачей 1.3.3) число таких перекрестков, где первая компонента проходит над второй, имеет ту же четность что и число перекрестков, где вторая компонента проходит над первой. Это завершает доказательство.

(б) Примером является четвертое зацепление на рис. 7. Используя коэффициент зацепления, можно доказать, что это зацепление не изотопно тривиальному, см. §1.6.

1.3.4. Предположим, что f — другой инвариант, отличный от lk_2 и удовлетворяющий предположениям. Тогда $f - lk_2$ — изотопический инвариант, равный нулю на тривиальном зацеплении и инвариантный относительно изменений перекрестков. Согласно аналогу леммы 1.1.5 для зацеплений любая плоская диаграмма зацепления может быть получена из диаграммы зацепления, изотопного тривиальному, при помощи изменений перекрестков. Следовательно, $f - lk_2 = 0$.

1.3.5. Доказательство не должно представлять трудности, и мы рекомендуем вам восстановить его детали самостоятельно.

1.3.6. См. Теорему 1.1 в §1 [Sk14].

1.4.1. (а) Если P — такая точка на плоской диаграмме, как описано в задаче 1.1.4, то не существует P -скрецающихся пар перекрестков. Следовательно, P -Арф-инвариант равен нулю.

(б) *Ответ 0.* Тривиальный узел не имеет перекрестков и скрецающихся пар перекрестков. Поэтому Арф-инвариант этого узла равен нулю при любом выборе отмеченной точки.

(с) *Ответ: 1.* Трилистник имеет 3 перекрестка. Для любой отмеченной точки P ровно одна пара перекрестков является P -скрецающейся. Следовательно, P -Арф-инвариант трилистника равен 1.

(d) *Ответ: 1.*

(е) Достаточно показать, что Арф-инвариант не изменяется, когда отмеченная точка, двигаясь вдоль плоской диаграммы, пересекает один перекресток. Пусть P_1 и P_2 — две отмеченные точки такие, что отрезок P_1P_2 содержит в точности один перекресток X . Рассмотрим два случая.

Случай 1: P_1P_2 участвует в проходе. Тогда X не образует ни P_1 -скрецающейся, ни P_2 -скрецающейся пары ни с одним другим перекрестком. Поэтому P_1 - и P_2 -Арф-инварианты диаграммы равны.

Случай 2: P_1P_2 участвует в переходе. Тогда X делит диаграмму на две замкнутые ломаные q_1 и q_2 такие, что P_1 лежит на q_1 , а P_2 лежит на q_2 . Обозначим через n_1 (соответственно, n_2) число всех таких перекрестков на q_1 и q_2 , в которых q_1 проходит над q_2 (соответственно, q_2 проходит над q_1). Обозначим через N_1 (соответственно, N_2) количество P_1 -скрецающихся (соответственно, P_2 -скрецающихся) пар, образованных X и некоторым пересечением q_1 и q_2 .

Тогда

$$\text{arf}_{P_1} D - \text{arf}_{P_2} D = N_1 - N_2 = n_1 - n_2 \equiv_2 n_1 + n_2 \equiv_2 0,$$

где D — данная плоская диаграмма. В последней формуле

- первое равенство выполнено поскольку пара перекрестков в D является P_1 -скрецивающейся или P_2 -скрецивающейся (но не одновременно!) тогда и только тогда когда она образована X и некоторым пересечением q_1 и q_2 ;

- второе равенство выполнено поскольку $N_1 = n_1$ и $N_2 = n_2$; действительно, точка пересечения q_1 и q_2 образует P_1 -скрецивающуюся (соответственно, P_2 -скрецивающуюся) пару с X тогда и только тогда когда в этой точке q_1 проходит над (соответственно, под) q_2 ;

- \equiv_2 обозначает сравнение по модулю 2;

- последнее сравнение выполнено ввиду леммы о четности, примененной к ломаным q_1 и q_2 .

(f) Докажем утверждение отдельно для каждого движения Рейдемейстера. Основная идея состоит в удачном выборе отмеченной точки.

Движение типа I. Выберем отмеченные точки до и после движения, как показано на рис. 20 (слева). Проверьте, что перекресток A не образует P -скрецивающуюся пару ни с одним другим перекрестком.

Движение типа II. Выберем отмеченные точки до и после движения, как показано на рис. 20 (в центре). Проверьте, что ни один из перекрестков A и B не образует P -скрецивающуюся пару ни с одним другим перекрестком.

Движение типа III. Выберем отмеченные точки до и после движения, как показано на рис. 20 (справа). Проверьте, что ни один из перекрестков A, B не образует P -скрецивающуюся пару ни с одним другим перекрестком, и что ни один из перекрестков A', B' не образует P' -скрецивающуюся пару ни с одним другим перекрестком. Затем проверьте, что перекресток X , отличный от A, B, C , образует P -скрецивающуюся пару с C , если и только если X образует P' -скрецивающуюся пару с C' .

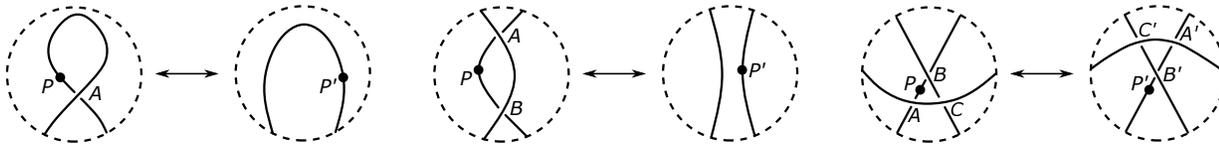


Рис. 20: Arf-инвариант не меняется при движениях Рейдемейстера

1.4.2. (a) Выберем отмеченные точки P_+, P_- , как показано на рис. 21. Проверьте, что перекресток A_- не образует P_- -скрецивающуюся пару ни с одним другим перекрестком в K_- . Затем проверьте, что число таких перекрестков, которые образуют P_+ -скрецивающуюся пару с A_+ в K_+ , сравнимо с $\text{lk}_2 K_0$ по модулю 2.

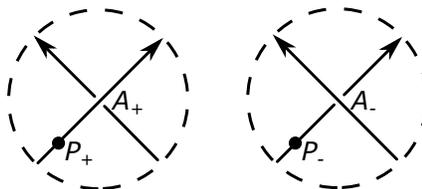


Рис. 21: Скайн-соотношения для Arf-инварианта

(b) Рассмотрим любую связную сумму двух трилистников. Согласно утверждениям 1.4.1.c и 1.5.4.d Арф-инвариант этого узла равен нулю. В то же время по утверждениям 2.1.1.c,i инвариант Кэссона этого узла равен 2. Следовательно, этот узел не изотопен тривиальному узлу.

1.4.3. Существование. Следует из утверждений 1.4.1.b и 1.4.2.a.

Единственность. Доказательство основано на тех же идеях, что и доказательство теоремы 1.3.4. Используйте саму лемму 1.1.5, а не ее аналог для зацеплений.

1.4.4. См. стр. 75–78 в [Ka87].

1.4.5. См. теорему 2 в [CG83].

1.5.1. (b) Первое решение. Назовем ориентированную ломаную *положительной*, если ограниченная ею часть плоскости лежит справа от любого ее звена (здесь используется теорема Жордана, сформулированная в замечании после теоремы 1.1.3). Покажите, что положительность ломаной сохраняется при элементарных движениях.

Указание ко второму решению. Положительность ломаной из предыдущего решения можно эквивалентно определить следующим образом. Будем говорить, что ориентированная ломаная $A_1 \dots A_n$ *положительна*, если для любой ее внутренней точки O сумма ориентированных углов $\angle A_1OA_2 + \angle A_2OA_3 + \dots + \angle A_{n-1}OA_n + \angle A_nOA_1$ положительна (т. е. *индекс* всякой внутренней точки ломаной относительно самой ломаной положителен).

1.5.2. (a), (b), (c) Каждый из трех указанных ориентированных узлов переводится в ориентированный узел с противоположной ориентацией вращением на угол π относительно «вертикальной» оси, проходящей через «самую верхнюю» точку узла (см. самую левую диаграмму на рис. 1 в первом и втором ряду для трилистника и восьмерки соответственно). Это вращение входит в непрерывное семейство вращений на угол $\pi t, t \in [0, 1]$ относительно той же прямой. Это и есть требуемая изотопия.

1.5.4. (a) См. рис. 22.

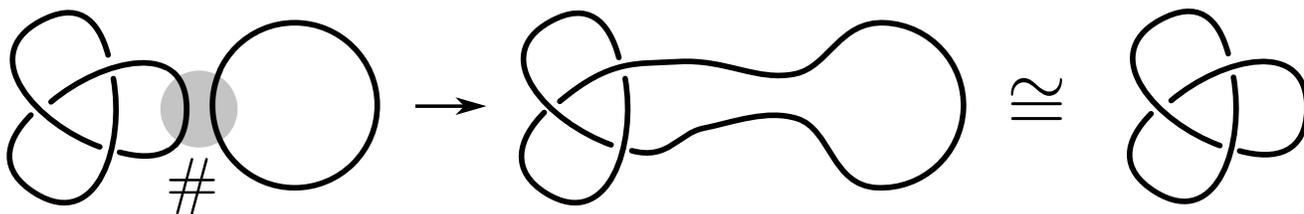


Рис. 22: К доказательству изотопности $K\#O$ и K

(b) Достаточно взять «маленький» узел из класса изотопии $[L]$ и «провести» его через узел класса изотопии $[K]$, см. рис. 23.

(c) Классы изотопии узлов из левой и правой частей равенства имеют общего представителя, показанного на рис. 24.

(d) Выберите отмеченную точку P близко к «месту соединения» узлов. Затем проверьте, что всякая P -скреживающаяся пара перекрестков в $K\#L$ получается из скреживающейся пары в K или из скреживающейся пары в L .

1.5.5. (d) Проверьте, что всякая точка пересечения разных компонент в $K\#L$ получается из точки пересечения разных компонент в K или точки пересечения разных компонент в L .

1.5.6. (a) В качестве примера можно взять одинаковые зацепления состоящие из трилистника и тривиального узла в непересекающихся кубах. См. рис. 3.16 в [PS96].

(b) См. [As]. На рис. 25 альтернативный пример, предложенный А. Рябичевым.

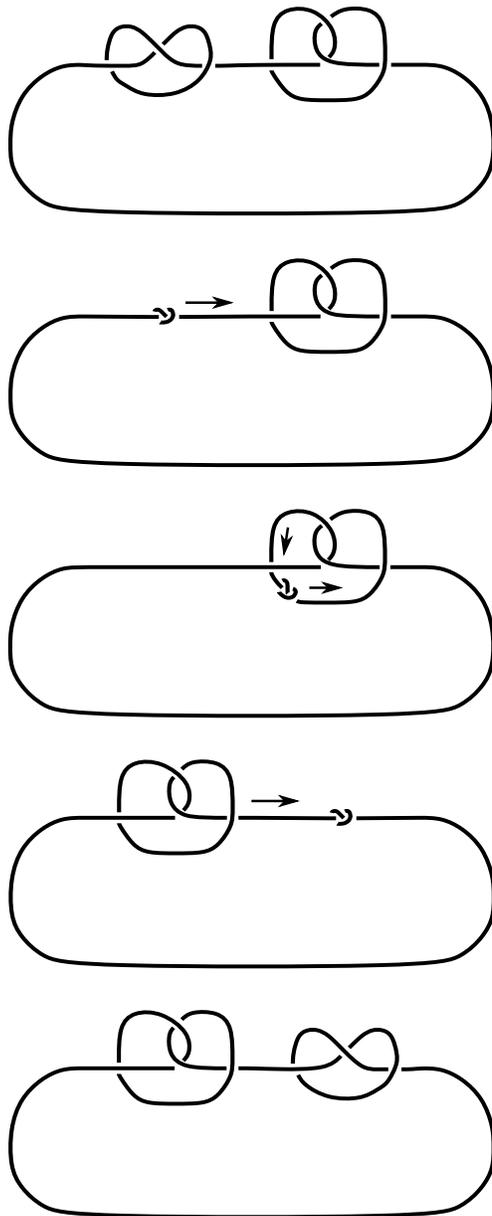


Рис. 23: К доказательству изотопности $K\#L$ и $L\#K$

1.6.1. *Ответы:* (a) 1; (b) 0.

(c) Доказательство аналогично 1.3.2. Достаточно проверить, что знаки всех точек пересечения не меняются при движениях Редемейстера.

1.6.2. (a) Доказательство аналогично 1.3.2.b. Рассмотрим плоскую диаграмму зацепления. Из леммы о тривиальности (сформулированной после задачи 1.6.2) следует, что сумма знаков точек пересечения, в которых первая компонента выше второй, противоположна сумме знаков точек пересечения, в которых вторая компонента выше первой. Поскольку перестановка компонент зацепления меняет знаки всех точек пересечения компонент, то коэффициент зацепления не меняется.

(b) Смена ориентации любой компоненты меняет знаки всех точек пересечения.

(c) Достаточно рассмотреть любую связную сумму пяти зацеплений Хопфа, у которых ориентации на компонентах выбраны таким образом, чтобы их коэффициент зацепления был равен -1 .

(d) Доказательство аналогично 1.5.4.

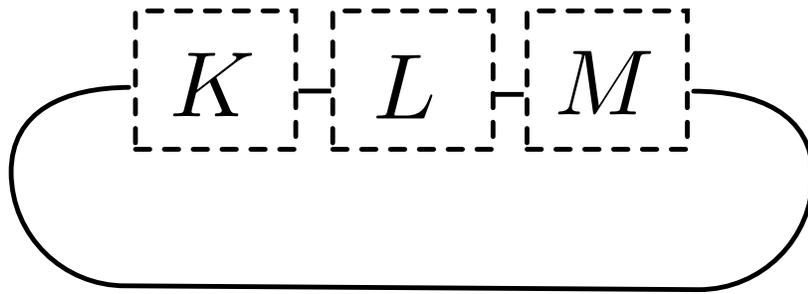


Рис. 24: К доказательству изотопности $(K\#L)\#M$ и $K\#(L\#M)$

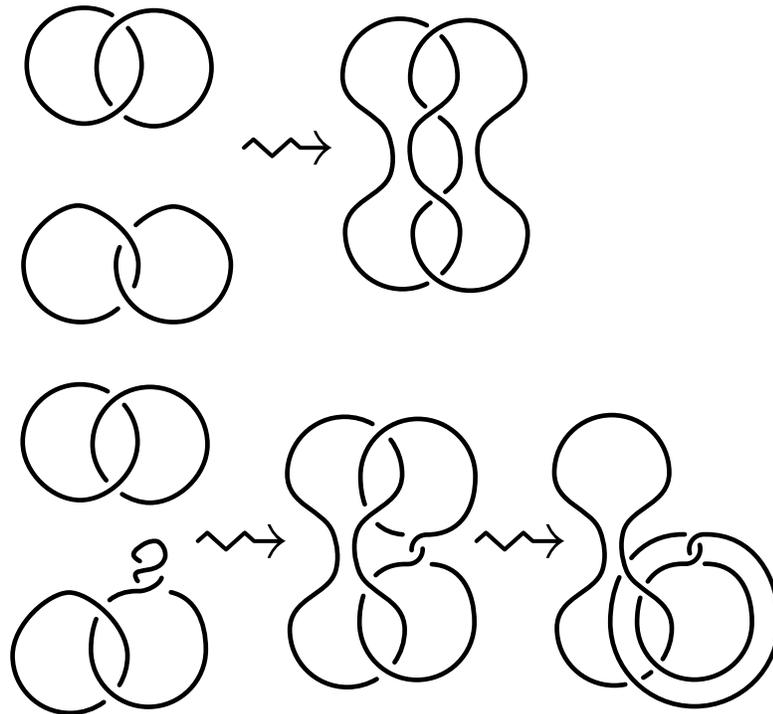


Рис. 25: Связная сумма изотопических классов упорядоченных зацеплений не является корректно определенной операцией

(e) Примером является зацепление Уайтхеда (оно не изотопно тривиальному по теореме 1.2.2).

1.6.3. Доказательство аналогично теореме 1.3.4.

Указания и решения к задачам после промежуточного фи-ниша

2.1.1. *Ответы:* (b) 0; (c) 1; (d) -1 .

(a) Рассмотрим любую связную сумму пяти восьмерок. Из п. (d) и задачи 2.1.1.j следует, что инвариант Кэссона данного узла равен -5 .

(b) Тривиальный узел не имеет перекрестков и потому скрещивающихся пар перекрестков. Поэтому инвариант Кэссона этого узла равен нулю.

(c) Все три перекрестка трилистника имеют одинаковый знак. Поскольку трилистник имеет только одну скрещивающуюся пару перекрестков (вне зависимости от выбора отмеченной точки), то инвариант Кэссона этого узла равен 1.

(e) Доказательство аналогично задаче 1.4.1.e. Используйте лемму о тривиальности, сформулированную после задачи 1.6.1. Здесь и далее важно следить за знаками точек пересечения!

(f) Доказательство аналогично утверждению 1.4.1.f.

(g) Доказательство аналогично утверждению 1.4.2.a.

(h) Рассмотрим любую связную сумму трилистника и восьмерки. Из задач 2.1.1.c,d и 2.1.1.i следует, что инвариант Кэссона этого узла равен 0. С другой стороны, из задач 2.3.4.d,e и 2.3.6.b следует, что многочлен Конвея этого узла равен $(t^2 + 1)(t^2 - 1) \neq 1$. Следовательно, этот узел не изотопен тривиальному.

(i) Доказательство аналогично утверждению 1.5.4.d.

2.1.2. Доказательство аналогично теореме 1.4.3.

2.2.1. *Ответы:* b,e — раскрашиваемы, a,c,d,f,g,h,i,j — не раскрашиваемы. Пример раскрашенного в три цвета трилистника см. в прикрепленной копии [Pr95, стр. 35, Рис. 4.3]. Правильную раскраску последней диаграммы с рис. 7 см. на рис. 26 слева. (Эта диаграмма была ошибочно названа нераскрашиваемой в три цвета в [Pr95, §4]. Эта небольшая ошибка была найдена Л. Баннором, С. Зотовой и Л. Кравцовой.)

2.2.2. (a) См. прикрепленную копию [Pr95, стр. 34, Теорема 4.1]

(b) Следует из (a) и утверждений 2.2.1.d-j (см. также [Pr95, стр. 30]). Последняя диаграмма с рис. 7 отлична от тривиального зацепления числом правильных раскрасок плоской диаграммы. Докажите, что это число сохраняется при движениях Рейдемейстера.

Плоская диаграмма называется *раскрашиваемой в 5 цветов*, если существует раскраска ее дуг в цвета 0, 1, 2, 3, 4 при которой

- хотя бы два цвета использованы;
- в каждой точке пересечения если верхняя дуга имеет цвет a , а две нижние дуги — цвета b и c , то $2a \equiv b + c \pmod{5}$.

Аналогично задаче 2.2.2.a можно показать, что раскрашиваемость в 5 цветов сохраняется при движениях Рейдемейстера. Для завершения доказательства достаточно заметить, что узел 5_1 является раскрашиваемым в 5 цветов (см. рис. 26 справа), а тривиальный узел — нет.

2.3.1. Это частные случаи теоремы 2.3.3 по модулю 2.

2.3.2. *Ответы:* (a, b) 0; (c) 1 (независимо от выбора ориентации).

Замечание. Инварианты arf и a_3 для зацеплений могут зависеть от выбора ориентации компонент (для a_3 это можно посмотреть в прикрепленной копии [CDM12, 2.3.4]).

2.3.3. Единственность доказывается аналогично теоремам 2.1.2 и 1.4.3; сначала решите задачу 2.3.4.

Вывод (a) из (b). Достаточно показать, что все инварианты c_n , определенные в (b), сохраняются при изменении порядка компонент.

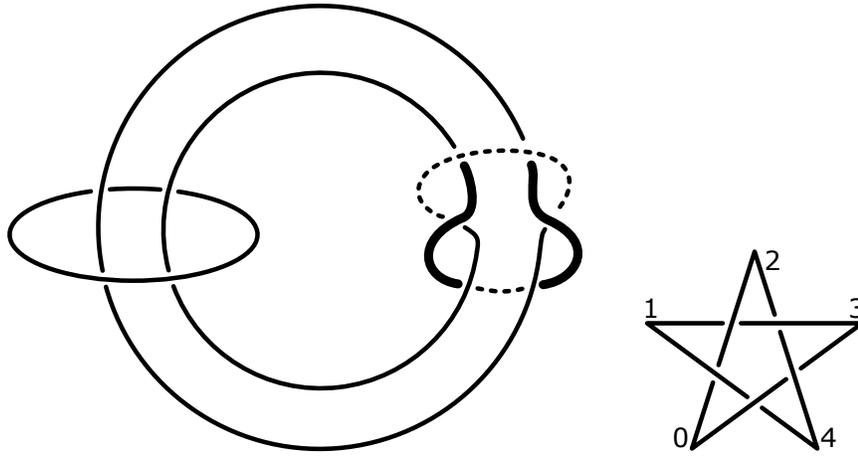


Рис. 26: Раскраска в 3 цвета зацепления и раскраска в 5 цветов узла 5_1

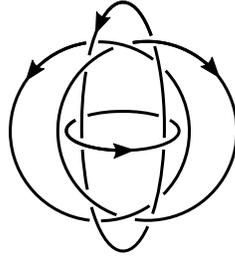


Рис. 27: Четырехкомпонентное зацепление Борромео

Пусть D — плоская диаграмма некоторого зацепления с двумя или более компонентами и пусть D' — плоская диаграмма, полученная из D изменением порядка компонент. Через $\text{sg} D$ обозначим число перекрестков в D . Через $u(D)$ обозначим минимально возможное число изменений перекрестков, необходимое для получения диаграммы зацепления, изотопного тривиальному, из D (такая последовательность изменений перекрестков существует по аналогу леммы 1.1.5 для зацеплений).

Докажем индукцией по $\text{sg} D$. Если $\text{sg} D = 0$, тогда D — диаграмма зацепления, изотопного тривиальному, и по утверждению 2.3.4.b имеем $C(D) = 0$ для любого порядка компонент. Предположим, что $\text{sg} D > 0$; тогда продолжим доказательство индукцией по $u(D)$. Если $u(D) = 0$, то D — диаграмма зацепления, изотопного тривиальному; этот случай рассмотрен выше. Предположим, что $u(D) > 0$ и пусть D_* — зацепление, полученное из D изменением перекрестка таким, что $u(D_*) < u(D)$. Предположим, что D'_* — зацепление, полученное из D' изменением того же перекрестка; тогда

$$\pm(C(D) - C(D_*)) = C(D_0) \text{ and } \pm(C(D') - C(D'_*)) = C(D'_0),$$

где

- D_0 — диаграмма зацепления K_0 (с некоторым порядком компонент) с рис. 9 и D , D_* — это D_+ , D_- в некотором порядке;
- D'_0 — диаграмма зацепления K_0 (с некоторым порядком компонент) с рис. 9 и D' , D'_* — это D_+ , D_- в некотором порядке.

Заметьте, что диаграммы D_* и D'_* совпадают с точностью до порядка компонент. То же верно для диаграмм D_0 и D'_0 . Так как $u(D_*) < u(D)$ и $\text{sg} D_0 < \text{sg} D$, из индуктивной гипотезы имеем $C(D_*) = C(D'_*)$ and $C(D_0) = C(D'_0)$. Тогда, $C(D) = C(D')$.

2.3.4. Ответы: (a, b) 0; (c) $\pm t$; (d) $1 + t^2$; (e) $1 - t^2$; (f) $\pm t^3$; (g) $\pm t^4$; (h) $1 + 3t^2 + t^4$.

Замечание. Знаки ответов к пунктам (с), (f), (g) зависят от выбора ориентации компонент.

Указание. Примеры вычислений для пунктов (а), (с) и (d) есть в прикрепленной копии [CDM12, 2.3.2].

2.3.5. Пусть D — плоская диаграмма данного зацепления K .

(а) Для любой диаграммы D_* , полученной из D изменением перекрестка, имеем $c_0(D) - c_0(D_*) = 0$. Т. е. c_0 не меняется при изменениях перекрестков. По аналогу леммы 1.1.5 для зацеплений диаграмма D может быть получена изменениями перекрестков из диаграммы зацепления, изотопного тривиальному. Утверждение следует из определения c_0 на тривиальном узле и утверждения 2.3.4.b.

(b) Первая часть следует из (d). Вторая часть следует из определения c_2 и теоремы 2.1.1.g.

(с) Первая часть следует из (d). Вторая часть следует из определений c_0, c_1 и теоремы 1.6.3.

(d) Доказательство индукцией по $\text{sg} D$. Если $\text{sg} D = 0$, то K изотопно тривиальному зацеплению. Если K — узел, то $C(D) = 1$. Иначе, $C(D) = 0$ по утверждению 2.3.4.b. Предположим, что $\text{sg} D > 0$; тогда продолжим доказательство индукцией по $u(D)$. Если $u(D) = 0$, то K изотопно тривиальному зацеплению; этот случай рассмотрен выше. Предположим, что $u(D) > 0$ и пусть D_* — зацепление, полученное из D изменениями перекрестков, и такое, что $u(D_*) < u(D)$. Тогда имеем

$$\pm(c_j(D) - c_j(D_*)) = c_{j-1}(D_0),$$

где D_0 — диаграмма с рис. 9, соответственно D, D_* — это D_+, D_- в некотором порядке. Заметьте, что зацепление D_* состоит из k компонент. Следовательно, если $j \leq k - 2$, то $j - 1 \leq k'$ и если $j - k$ чётно, то $(j - 1) - k'$ чётно. Так как $u(D_*) < u(D)$ и $\text{sg} D_0 < \text{sg} D$, по предположению индукции имеем $c_j(D_*) = c_{j-1}(D_0) = 0$. Тогда $c_j(D) = 0$.

(е) Докажем более общее утверждение: для плоской диаграммы D имеем $\deg C(D) \leq \text{sg} D$. Доказательство аналогично решению задачи 2.3.5.d.

2.3.6. (а) Доказательство аналогично решению задачи 2.3.5.d.

(b) См. прикрепленную копию [CDM12, 2.3.4].

(с) Доказательство пойдёт в духе решения задачи 2.3.5.d. Пусть D и G — плоские диаграммы K и L . Зафиксируем диаграмму G и докажем, что $C(D \# G) = C(D)C(G)$ индукцией по $\text{sg} D$.

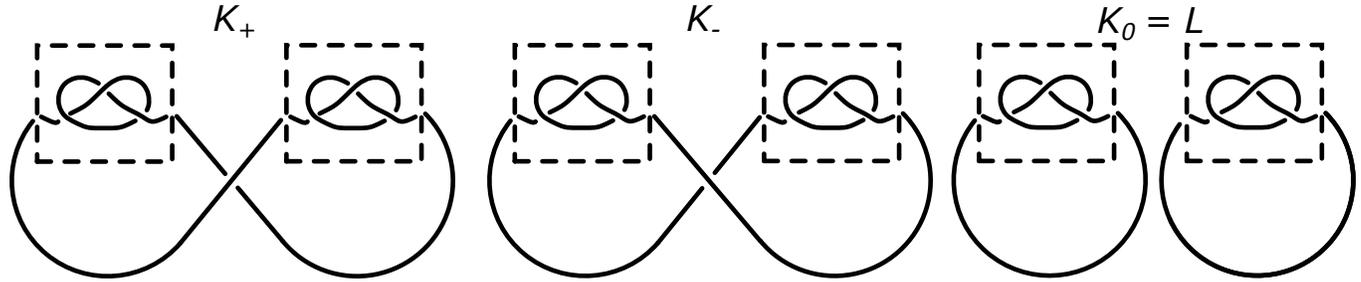


Рис. 28: Доказательство того, что $C(\text{разделяемое зацепление}) = 0$

2.3.7. (b,c,d) Следует из вышеприведенных 2.3.4.c,f,g и нижеприведенного 2.3.7.e.

(е) Если L — разделяемое зацепление, то найдутся такие зацепления K_+, K_-, K_0 , что

- их плоские диаграммы отличаются как на рис. 9;
- зацепления K_+ и K_- изотопны;
- зацепление K_0 изотопно L .

Имеем $C(L) = C(K_0) = \frac{1}{t}(C(K_+) - C(K_-)) = 0$.

Список литературы

- [As] *A. Asanau*. A simple proof that connected sum of ordered oriented links is not well-defined, Math. Notes, 2018.
- [Be07] * *M. Bestvina*. Knots: a handout for Summer Math Program. <http://www.math.utah.edu/~bestvina/HS07/knots-hs07.pdf>.
- [CDM12] * *S. Chmutov, S. Duzhin, J. Mostovoy*. Introduction to Vassiliev knot invariants, Cambridge Univ. Press, 2012. <http://www.pdmi.ras.ru/~duzhin/papers/cdbook>.
- [CG83] *J. H. Conway and C. M. A. Gordon*, Knots and links in spatial graphs, J. Graph Theory 7 (1983), 445–453.
- [Ka06] *L.H. Kauffman*. Formal Knot Theory, Dover Publications, 2006.
- [Ka06'] *L.H. Kauffman*. Remarks on Formal Knot Theory, arXiv:math/0605622 (note that the numbers and names of sections in table of contents i p. 1 are incorrect).
- [Ka87] *L.H. Kauffman*. On knots. Annals of Mathematics Studies. 115. Princeton University Press. 1987.
- [Pr95] * *В. В. Прасолов*. Наглядная топология. М.: МЦНМО, 1995. <http://prasolov.loegria.net/nagltop-3ed.pdf>
- [PS96] * *В. В. Прасолов, А. Б. Сосинский*. Узлы, зацепления, косы и трехмерные многообразия. М.: МЦНМО, 1997.
- [Sc] *M. Scharlemann*. Crossing changes, <http://web.math.ucsb.edu/~mgscharl/crossings.pdf>.
- [So89] * *А. Сосинский*. Узлы, зацепления и их полиномы. Квант, 1989, N4. http://kvant.mcsme.ru/1989/04/uzly_zacepleniya_i_ih_polinomy.htm.
- [Sk15p] *A. Skopenkov*. Classification of knotted tori, Proc. A of the Royal Society of Edinburgh, to appear, arxiv: 1502.04470.
- [Sk16c] * *A. Skopenkov*, Embeddings in Euclidean space: an introduction to their classification, http://www.map.mpim-bonn.mpg.de/Embeddings_in_Euclidean_space:_an_introduction_to_their_classification, submitted to Boll. Man. Atl.
- [Sk16i] * *A. Skopenkov*, Isotopy, submitted to Boll. Man. Atl. <http://www.map.mpim-bonn.mpg.de/Isotopy>.
- [Sk18] * *A. Skopenkov*. Invariants of graph drawings in the plane, arXiv:1805.10237.
- [Sk14] * *A. Skopenkov*. Realizability of hypergraphs and Ramsey link theory, arxiv:1402.0658.
- [Sk] * *А. Скопенков*. Алгебраическая топология с алгоритмической точки зрения, <http://www.mcsme.ru/circles/oim/algord.pdf>.

Книги, обзоры и описательные работы в этом списке помечены звездочками.

A user's guide to knot and link theory *

presented by D. Eliseev, A. Enne, M. Fedorov, A. Glebov,
N. Khoroshavkina, E. Morozov, A. Skopenkov, R. Živaljević †

Abstract.

We define simple invariants of knots or links (linking number, Arf-Casson invariants and Alexander-Conway polynomials) motivated by interesting results whose statements are accessible to a non-specialist or a student (e.g. Theorems 1.1.3 and 1.2.2). We show how the simplest invariants naturally appear in an attempt to unknot a knot or unlink a link. Then we present certain ‘skein’ recursive relations for the simplest invariants, which allow to introduce stronger invariants. We state the Vassiliev-Kontsevich theorem in a way convenient for calculating the invariants themselves, not only the dimension of the space of the invariants. We also present coloring invariants although we cannot explain in an elementary way how they appear.

We give rigorous definitions of the main notions in a way not obstructing intuitive understanding. No prerequisites are required for this text.

Recommendations for participants.

If a mathematical statement is formulated as a problem, then the objective is to prove this statement. If such a problem is labeled ‘theorem’ (‘lemma’, ‘corollary’, etc.), then this statement is considered more important. Usually we formulate as a problem a beautiful or important statement before giving a sequence of problems which constitute its proof. In this case, in order to prove this statement, one may need to solve some of the subsequent problems. We do not want to deprive you of the pleasure of finding the right moment when you finally are ready to prove the statement. In general, if you are stuck on a certain problem, try looking at the next ones. They may turn out to be helpful. *Remarks* are formally not used later.

When an important notion is defined, it is marked in **bold letters** so that it would be easier to find its definition later. We suggest to all students working on the project to *consult* the jury on any questions on the project. Students who successfully work or complete a part of the project will get interesting *extra problems* (subsections marked by stars; they are not yet elaborated).

For every solution which has been written down and marked with either ‘+’ or ‘+.’ a student (or a group of students) gets a ‘bean’. The jury may also award extra beans for beautiful solutions, solutions of hard problems, or solutions typeset in \TeX . The jury has infinitely many beans. One may submit a solution in oral form, but one loses a bean with each 5 attempts (successful or not).

Please notify us if you already know solutions of some of the problems. If you confirm your knowledge by presenting some of them, then you will be allowed to use them in solutions of other problems, without earning before a plus-mark (plus-sign) for their solutions.

*We are grateful to S. Chmutov, A. Ryabichev and A. Sossinsky for useful discussions, to V. Prasolov and the MCCME publishing house for allowing us to use some problems and figures from [Pr95]. This text is based on lectures by A. Skopenkov at Independent University of Moscow (including Math in Moscow Program) and Moscow Institute of Physics and Technology.

†D. Eliseev: Samara University. A. Enne: Petrozavodsk State University.

M. Fedorov, N. Khoroshavkina, E. Morozov: Higher School of Economics, Moscow.

A. Glebov: Novosibirsk State University.

A. Skopenkov: <https://users.mccme.ru/skopenko>, Moscow Institute of Physics and Technology, Independent University of Moscow.

R. Živaljević: <http://www.rade-zivaljevic.appspot.com/>, Mathematical Institute SANU, Belgrade.

1 Problems before the semifinal

1.1 Main definitions and results on knots

We start with informal description of the main notions (rigorous definitions are given after Problem 1.1.1). You can imagine a *knot* as a thin elastic string whose ends have been glued together, see fig. 1. As in this figure, knots are usually represented by their ‘nice’ plane projections called *knot diagrams*. Imagine laying down the rope on a table and carefully recording how it crosses itself (i.e. which part lies on top of the other). It should be kept in mind that the projections of the same knot on different planes can look quite dissimilar.

A **trivial knot** is the outline (the boundary) of a triangle.

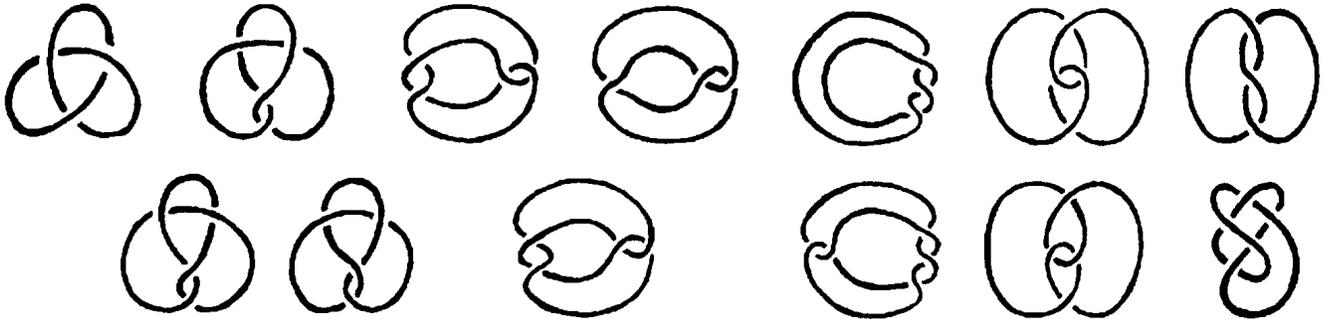


Figure 1: Knots isotopic to the trefoil knot (top row) and to the figure eight knot (bottom row)

By an *isotopy* of a knot we mean its continuous deformation in space as a thin elastic string; no self-intersections are allowed throughout the deformation. Two knots are *isotopic* if one can be transformed to the other by an isotopy. As a proof that specific knots are isotopic we accept a big clear picture, or an experiment with rope that can be repeated by a Jury member.

Problem 1.1.1. (a) Some two knots represented in the top row of fig. 1 are isotopic to the leftmost knot in this row. For one of these two knots decompose your isotopy into Reidemeister moves shown in fig. 5.

- (b)* All the knots represented in the top row of fig. 1 are isotopic to each other.
- (c,d*) The same is true for the knots represented in the bottom row of fig. 1.
- (e) All knots with the same knot diagram are isotopic.

Remark. Here we justify the necessity of a rigorous definition of isotopy.

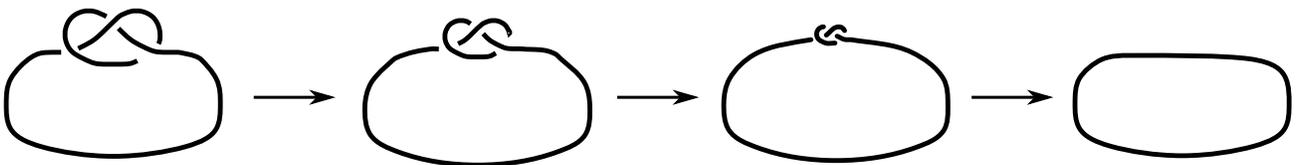


Figure 2: A (non-ambient) isotopy between the trefoil knot and the trivial knot

In fig. 2 we see an isotopy between the trefoil knot and the trivial knot. Is it indeed an isotopy? This is the so called ‘piecewise linear non-ambient isotopy’ which is *different* from the ‘piecewise linear ambient isotopy’ defined and used later. (The first notion better reflects the idea of continuous deformation without self-intersections, but is hardly accessible to high school students, cf. [Sk16i].) In fact, any two knots are piecewise linear non-ambient isotopic!

The usual problem with intuitive definitions is not that it is hard to make them rigorous, but that this can be done in several ways.

A **knot** is a spatial closed non-self-intersecting polygonal line.

A **plane diagram** of a knot is its generic¹ projection onto a plane², together with the information which part of the knot ‘goes under’ and which part ‘goes over’ at any given crossing.

Problem 1.1.2. For any knot diagram there is a knot projected to this diagram. (Such a knot need not be unique; see though problem 1.1.1.e.)

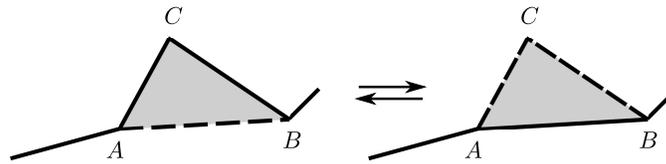


Figure 3: Elementary move

Suppose that two sides AC and CB of a triangle ABC are edges of a knot. Moreover, assume that the knot and (the part of the plane bounded by) the triangle ABC do not intersect at any other points. An **elementary move** $ACB \rightarrow AB$ is the replacement of the two edges AC and CB by the edge AB , or the inverse operation $AB \rightarrow ACB$ (fig. 3).³ Two knots K, L are called (piecewise linearly ambiently) **isotopic** if there is a sequence of knots K_1, \dots, K_n such that $K_1 = K$, $K_n = L$ and every subsequent knot K_{j+1} is obtained from the previous one K_j by an elementary move.

Theorem 1.1.3. (a) *The trivial knot is not isotopic to the trefoil knot.*

(b) *The trivial knot is not isotopic to the figure eight knot.*

(c) *The trefoil knot is not isotopic to the figure eight knot.*

(d) *There is an infinite number of pairwise non-isotopic knots.*

This is proved using *Arf* and *Casson invariants*, see §1.4 and §2.1, or using *proper colorings*, see §2.2 (so you need not spend much time on proving this result right now).

Remark. This remark might be useful as both a hint and a warning to problems 1.1.4 and 1.1.5.

In the following paragraph we prove that *if a knot lies in a plane, then the knot is isotopic to the trivial knot.*

Denote the knot in a plane by $M_1M_2 \dots M_n$. Take a point Z outside the plane. Then $M_1M_2 \dots M_n$ is transformed to the trivial knot M_1ZM_n by the following sequence of elementary moves:

$$M_1M_2 \rightarrow M_1ZM_2, \quad ZM_2M_3 \rightarrow ZM_3, \quad ZM_3M_4 \rightarrow ZM_4, \quad \dots, \quad ZM_{n-1}M_n \rightarrow ZM_n.$$

The following result shows that intermediate knots of an isotopy from a knot lying in a plane to the trivial knot can be chosen also to lie in this plane.

Schoenflies Theorem. Any closed polygonal line without self-intersections in the plane is isotopic (in the plane) to a triangle.

This is a stronger version of the following celebrated result.

Jordan Theorem. Every closed non-self-intersecting polygonal line L in the plane \mathbb{R}^2 splits the plane into exactly two parts, i.e. $\mathbb{R}^2 - L$ is not connected and is a union of two connected sets.

A subset of the plane is called *connected*, if every two points of this subset can be connected by a polygonal line lying in this subset.

¹A polygonal line in the plane is *generic* if there is a polygonal line L with the same union of edges such that no three vertices of L belong to any line and no three segments joining some vertices of L have a common interior point.

²A university-mathematics terminology is ‘a generic image under projection onto a plane’.

³If the triangle ABC is degenerate, then elementary move is either subdivision of an edge or inverse operation.

For an algorithmic explanation why the Jordan Theorem (and so the Schoenflies Theorem) is non-trivial, and for a proof of the Jordan Theorem, see §1.3 ‘Intersection number for polygonal lines in the plane’ of [Sk18], [Sk].

Problem 1.1.4. Suppose that there is a point on a knot such that if we go around the knot starting from this point, then on some plane diagram we first meet only overcrossings, and then only undercrossings. Then the knot is isotopic to the trivial knot.⁴

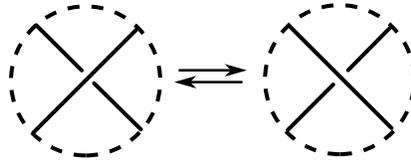


Figure 4: Crossing change

A **crossing change** is change of overcrossing to undercrossing or vice versa, see fig. 4.

Clearly, after any crossing change on the diagrams of the trefoil knot and the figure eight shown in fig. 1 we obtain a diagram of a knot isotopic to the trivial knot.

Lemma 1.1.5. Every plane diagram of a knot can be transformed by crossing changes to a plane diagram of a knot isotopic to the trivial knot.⁵

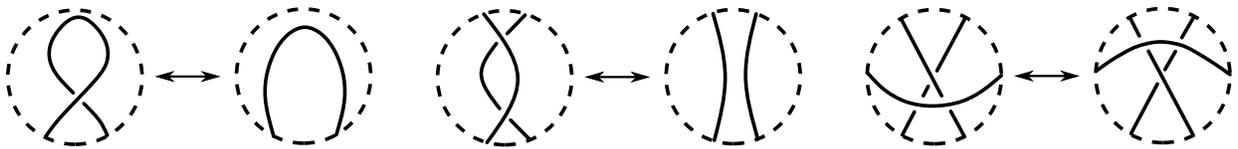


Figure 5: Reidemeister moves.

The plane diagrams are identical outside the disks bounded by dashed circles. No other sides of the plane diagrams except for the pictured ones intersect the disks. (Same for fig. 6, 4, 9 and 10.)

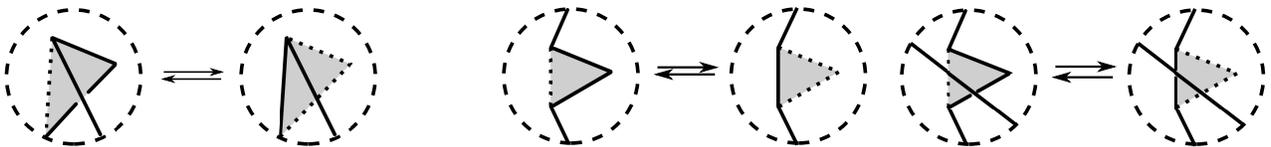


Figure 6: (Left) To a rigorous definition of the first Reidemeister move
(Middle, right) Plane isotopy moves

In this text instead of knots up to isotopy we shall study plane diagrams of knots up to (equivalence generated by) **Reidemeister moves** shown in fig. 5⁶ and *plane isotopy moves* shown in fig. 6 (middle, right). I.e. we shall use without proof the following result.

Theorem 1.1.6 (Reidemeister). * *Two knots are isotopic if and only if some plane diagram of the first knot can be obtained from some plane diagram of the second one by Reidemeister moves and plane isotopy moves.*

⁴This problem would be a motivation for introduction of the Arf invariant (§1.4). The proof illustrates in low dimensions one of the main ideas of the celebrated Zeeman’s proof of the higher-dimensional Unknotting Spheres Theorem, see survey [Sk16c, Theorem 2.3].

⁵This simple lemma will be used for inductive construction of invariants using skein relations, see below.

⁶A rigorous definition of the first Reidemeister move is easily given using fig. 6 (left). The other Reidemeister moves have analogous rigorous definitions. The participants are not required to use these rigorous definitions in solutions. You can use informal description of Reidemeister moves in fig. 5 and so ignore plane isotopy moves.

1.2 Main definitions and results on links

A **link** is a collection of pairwise disjoint knots, which are called the *components* of the link. Ordered collections are called ordered or colored links, while non-ordered collections are called non-ordered or non-colored links. In this text we abbreviate ‘ordered link’ to just ‘link’.

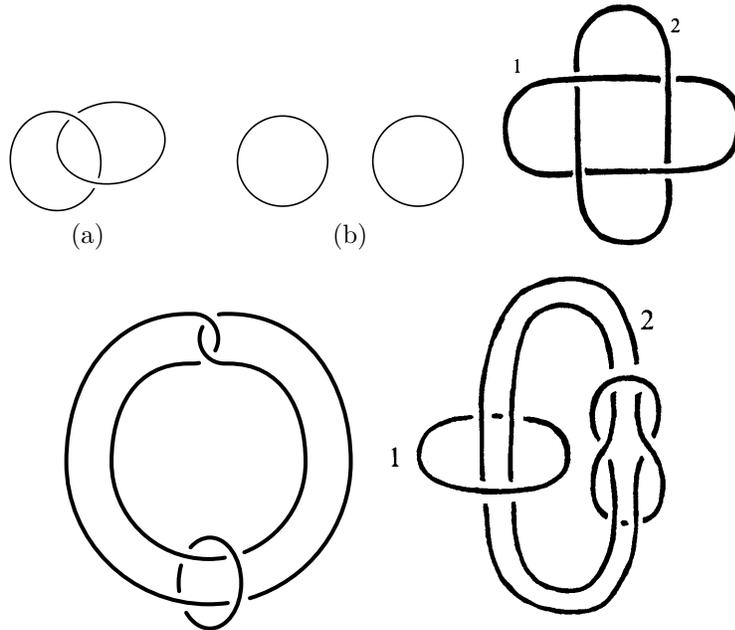


Figure 7: The Hopf link, the trivial link and another three links

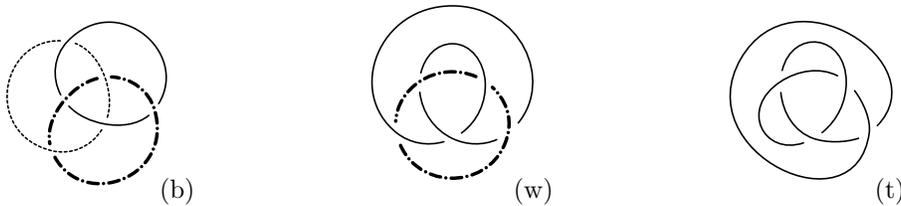


Figure 8: The Borromean rings, the Whitehead link and the trefoil knot

A **trivial link** (with any number of components) is a link formed by triangles in parallel planes.

Plane diagram, isotopy, etc. for links are defined analogously to knots.

The analogues of Lemmas 1.1.6 and 1.1.5 for links are correct.

Problem 1.2.1. (a) The Hopf link is isotopic to the link obtained from the Hopf link by switching the components.

(b) The Hopf link is isotopic to some link whose components are symmetric with respect to some straight line.

(c) The fourth link in fig. 7 is isotopic to the Whitehead link in fig. 8.w.

(d,e*) The same as in (a,b) for the Whitehead link.

(f)* The Borromean rings link is isotopic to a link whose components are permuted in a cyclic way under the rotation by angle $2\pi/3$ with respect to some straight line.

Theorem 1.2.2. (a) *The Hopf link is not isotopic to the trivial link.*

(b) *The Whitehead link is not isotopic to the trivial link.*

(c) *The Hopf link is not isotopic to the Whitehead link.*

(d) *The Borromean rings link is not isotopic to the trivial link.*

Parts (a) and (c) are proved using *linking number modulo 2*, invent it yourself or see §1.3. Parts (b) and (d) are proved using either *the Alexander-Conway polynomials*, see §2.3, or ‘triple linking’ (Massey-Milnor) number and ‘higher linking’ (Sato-Levine) number [Sk, §4.4-§4.6]. Part (d) can also be proved using *proper colorings*, see §2.2.

1.3 The Gauss linking number modulo 2 via plane diagrams

Problem 1.3.1. Let A, B, C, D, E, F, O be points in space, no four of which lie in one plane. The following three conditions are equivalent.

- (i) The outline of DEF intersects the part of the plane ABC bounded by the triangle ABC at exactly one point.
- (ii) The segment BC passes below (like in the construction of link diagram) exactly one side of DEF as seen from A .
- (iii) The outline of ABC passes below an odd number of sides of DEF as seen from O .

Suppose that there is an isotopy between two 2-component links, and the second component is fixed throughout the isotopy. Then the trace of the first component is a self-intersecting cylinder disjoint from the second component. If after the isotopy the components are unlinked, then the cylinder can be completed to a self-intersecting disk disjoint from the second component. This observation, together with problem 1.3.1 and [Sk, the Projection lemma 4.2.4], motivates the following definition.

The **linking number modulo 2** lk_2 of the plane diagram of a 2-component link is the number modulo 2 of crossing points on the diagram at which the first component passes above the second component.

Problem 1.3.2. (a) Find the linking number modulo 2 for the plane diagrams in fig. 7, for pairs of Borromean rings and for the Whitehead link (fig. 8).

(b) The linking number modulo 2 is preserved under Reidemeister moves.

By (b) the **linking number modulo 2** of a 2-component link (or even of its isotopy class) is well-defined by setting it to be the linking number modulo 2 of any plane diagram of the link.

We shall use without proof the following *Parity lemma*: any two closed polygonal lines in the plane whose vertices are in general position intersect at an even number of points. For a discussion and a proof see §1.3 ‘Intersection number for polygonal lines in the plane’ of [Sk18], [Sk].

Problem 1.3.3. (a) Switching the components of a link preserves the linking number modulo 2.

(b) There is a 2-component link which is not isotopic to the trivial link but which has zero linking number modulo 2.

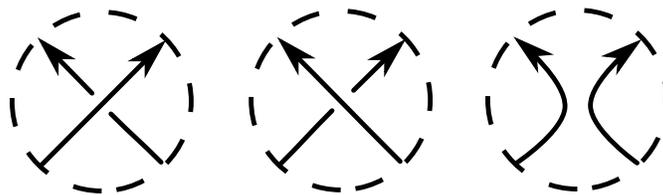


Figure 9: Knots K_+, K_-, K_0

Denote by D_+, D_-, D_0 any three diagrams of oriented (knots or) links differing as shown in fig. 9 (for a convention on figures see caption to fig. 5). We also denote by K_+, K_-, K_0 any three links who have diagrams D_+, D_-, D_0 . If an invariant (like lk_2) is defined for non-oriented links (or knots), then its value on a link is assigned to the link with any orientation.

Theorem 1.3.4. *There is a unique mod2-valued isotopy invariant lk_2 of (non-oriented) 2-component links that assumes value 0 on the trivial link and such that (for any links K_+ and K_- having plane diagrams differing as shown in fig. 9)*

$$\text{lk}_2 K_+ - \text{lk}_2 K_- = \begin{cases} 1 & \text{if at the crossing point different components cross each other;} \\ 0 & \text{if at the crossing point one component crosses itself.} \end{cases}$$

Problem 1.3.5. * If the linking number modulo 2 of two (disjoint outlines of) triangles in space is zero, then the link formed by the triangles is isotopic to the trivial link.

Theorem 1.3.6 (Conway–Gordon–Sachs). * *If no 4 of 6 points in 3-space lie in the same plane, then there are two linked triangles with vertices at these 6 points. That is, the part of the plane bounded by the first triangle intersects the outline of the second triangle exactly at one point.*

1.4 The Arf invariant

Take a plane diagram of a knot and a point P on the diagram different from crossing points. Call P a *basepoint*. A non-ordered pair of crossing points A and B is called **skew** (or P -skew) if going around the diagram in some direction starting from P and marking only crossings at A and B , we first mark overcrossing at A , then undercrossing at B , then undercrossing at A , and at last overcrossing at B .

The P -Arf invariant arf_P of the plane diagram is the parity of the number of all skew pairs of crossing points.

Problem 1.4.1. (a) If the P -Arf invariant of a plane diagram is non-zero, then P is not a point as in problem 1.1.4.

(b,c,d) Find the P -Arf invariant (of some plane diagram) of the trivial, the trefoil and the figure eight knots (for your choice of a basepoint P).

(e) The P -Arf invariant is independent of the choice of a basepoint P .

By (e) the *Arf invariant* of a plane diagram is well-defined by setting it to be the P -Arf invariant for any basepoint P .

(f) The Arf invariant of a plane diagram is preserved under Reidemeister moves.

By (f) the **Arf invariant** (Arf number) arf of a knot (or even of isotopy class of a knot) is well-defined by setting it to be the Arf invariant of any plane diagram of the knot.

Problem 1.4.2. (a) If in fig. 9 K_+, K_- are plane diagrams of knots, then K_0 is a plane diagram of 2-component link and $\text{arf } K_+ - \text{arf } K_- = \text{lk}_2 K_0$.

(b) There is a knot which is not isotopic to the trivial knot but which has zero Arf invariant.

Theorem 1.4.3. *There is a unique mod2-valued isotopy invariant arf of (non-oriented) knots that assumes value 0 on the trivial knot and such that*

$$\text{arf } K_+ - \text{arf } K_- = \text{lk}_2 K_0.$$

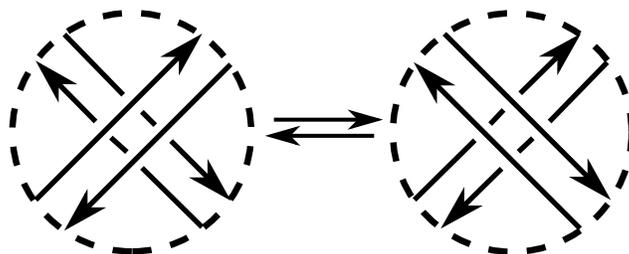


Figure 10: Pass move

Problem 1.4.4. Two knots are called *pass equivalent* if some plane diagram of the first knot (with some orientation) can be transformed to some plane diagram of the second knot (with some orientation) using Reidemeister moves and *pass moves* of fig. 10.

- (a) If two knots are pass equivalent, then their Arf invariants are equal.
- (b)* The eight figure knot is pass equivalent to the trefoil knot.
- (c)* If the Arf invariants of two knots are equal, then the knots are pass equivalent.

Theorem 1.4.5. * Take any 7 points in space, no four of which belong to any plane. Take $\binom{7}{2} = 21$ segments joining them. Then there is a closed polygonal line formed by taken segments and non-isotopic to the boundary of a triangle.

1.5 Oriented knots and links

You know what is oriented polygonal line, so you know what is oriented knot (fig. 11).

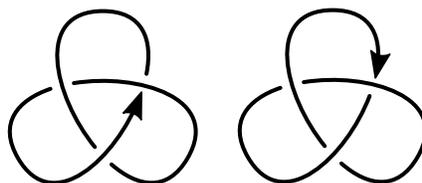


Figure 11: Two trefoil knots with the opposite orientations

Both the informal notion and rigorous definition of *isotopic* oriented knots are given analogously to isotopic knots.

Problem 1.5.1. Isotopic oriented polygonal lines without self-intersections on the plane and on the sphere are defined analogously to isotopic oriented knots in space.

- (a) An oriented spherical triangle is isotopic on the sphere to the same triangle with the opposite orientation.
- (b) The analogue of (a) for the plane is false.

Problem 1.5.2. (a) Two trivial; (b) Two trefoil; (c) Two figure eight knots with the opposite orientations are isotopic.

Theorem 1.5.3. (H. Trotter, 1964) *There exists an oriented knot which is not isotopic to the same knot with the opposite orientation.*

This is proved using *the Jones polynomial* [PS96], [CDM12]; the proof is outside the scope of this text.

The **connected sum** $\#$ of *oriented* knots is defined in fig. 12.⁷

This is not a well-defined operation on oriented knots. So we denote by $K\#L$ any of the connected sums of K and L .

Problem 1.5.4. For any oriented knots K, L, M and the trivial oriented knot O we have

- (a) $K\#O = K$. (b) $K\#L = L\#K$. (c) $(K\#L)\#M = K\#(L\#M)$.
- (d) $\text{arf}(K\#L) = \text{arf } K + \text{arf } L$ (here knots K, L are non-oriented).

(The rigorous meaning of (a) is ‘there is a connected sum of K and O isotopic to K ’. Analogous rigorous meanings have (b) and (c). See though Remark below.)

⁷More precisely, consider disjoint oriented plane diagrams of the two oriented knots. Find a rectangle in the plane where one pair of sides are edges of each knot, but the rectangle is otherwise disjoint from the knots, and the edges are oriented around the outline of the rectangle in the same direction. Now join the two diagrams together by deleting these edges from the knots and adding the edges that form the other pair of sides of the rectangle. The resulting connected sum diagram inherits an orientation consistent with the orientations of the two original diagrams.

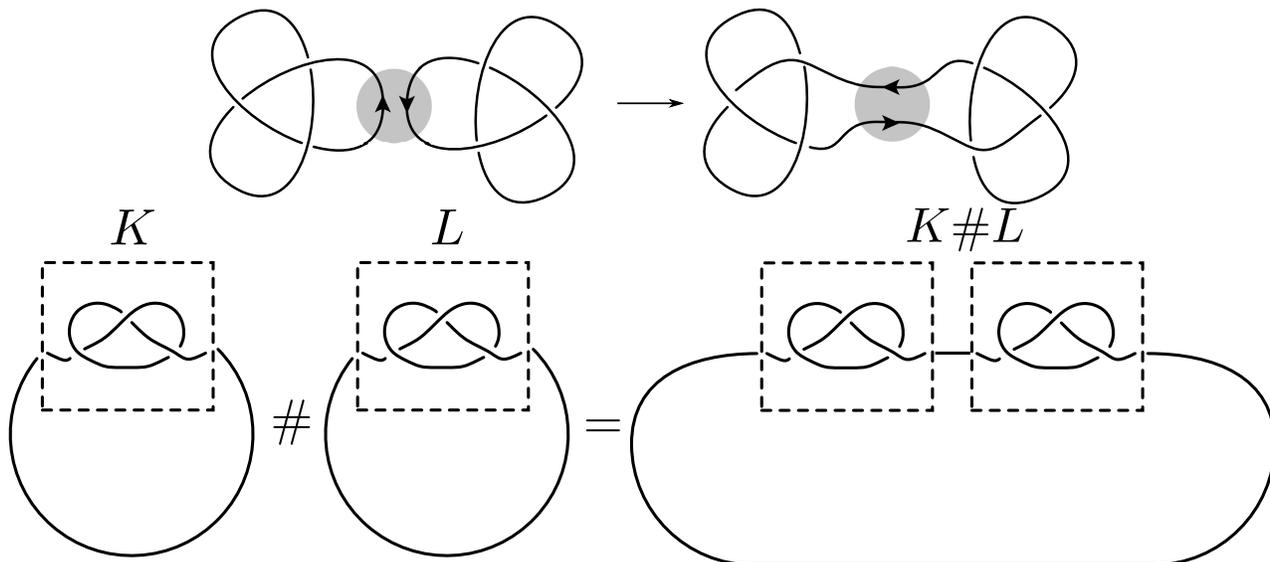


Figure 12: Connected sum of knots

Remark. An *isotopy class* of a knot is the set of knots isotopic to this knot. The oriented isotopy class $[K\#L]$ of the connected sum of two oriented isotopy classes $[K], [L]$ of oriented knots K, L is independent of the choices used in the construction, and of the representatives K, L of $[K], [L]$. Hence the connected sum of oriented isotopy classes of oriented knots is well-defined by $[K]\#[L] := [K\#L]$, see [Sk15p, Remark 2.3.a]. For isotopy classes of non-oriented knots the connected sum is not well-defined.

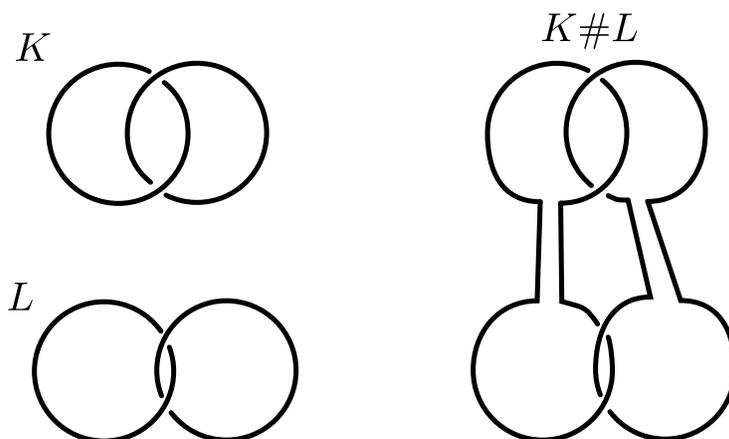


Figure 13: Connected sum of links

The connected sum $\#$ of links (ordered or not, oriented or not) is defined analogously to the connected sum of knots, see fig. 13. This is not a well-defined operation on links, and problem 1.5.6 shows that this does not give a well-defined operation on their isotopy classes. So we denote by $K\#L$ any of the connected sums of K and L .

Problem 1.5.5. (a,b,c,d) Prove the analogues of problem 1.5.4.a,b,c,d for links.

Problem 1.5.6. There are two isotopic pairs (K, L) and (K', L') of

(a) non-ordered; (b)* ordered

2-component links (oriented or not) such that some connected sums $K\#L$ and $K'\#L'$ are not isotopic.

1.6 The Gauss linking number via plane diagrams

Let $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$ be ordered pair of vectors (oriented segments) in the plane intersecting at a point P . Define the **sign** of P to be $+1$ if ABC is oriented clockwise and to be -1 otherwise (fig. 14).

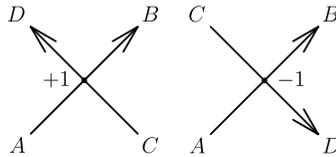


Figure 14: The sign of intersection point

The **linking number** lk of the plane diagram of an oriented 2-component link is the sum of signs of all those crossing points on the diagram at which the first component passes above the second component. At every crossing point the *first* (the *second*) vector is the oriented edge of the first (the second) component.

Problem 1.6.1. (a,b) Find the linking number for (some plane diagram of) the Hopf link and pairs of Borromean rings, for your choice of orientation on the components.

(c) The linking number is preserved under Reidemeister moves.

By (c) the **linking number** of an oriented 2-component link (or of its isotopy class) is well-defined by setting it to be the linking number of any plane diagram of the link.

The *absolute value of the linking number* of a (non-oriented) 2-component link (or of its isotopy class) is well-defined by taking any orientations on the components.

We shall use without proof the following *Triviality lemma*: for any two closed oriented polygonal lines in the plane whose vertices are in general position the sum of signs of their intersection points is zero. For a discussion and a proof see §1.3 ‘Intersection number for polygonal lines in the plane’ of [Sk18], [Sk].

Problem 1.6.2. (a) Does switching the components of a link preserve or negate the linking number?

(b) Reversing the orientation of either of the components negates the linking number.

(c) Draw an oriented 2-component link whose linking number is -5 .

(d) For any of the connected sums $K \# L$ of oriented 2-component links K, L we have $\text{lk}(K \# L) = \text{lk } K + \text{lk } L$.

(e) There is a 2-component link which is not isotopic to the trivial link but which has zero linking number.

Theorem 1.6.3. *There is a unique integer-valued isotopy invariant lk of oriented 2-component links that assumes value 0 on the trivial link and such that*

$$\text{lk } K_+ - \text{lk } K_- = \begin{cases} 1 & \text{if at the crossing point different components cross each other;} \\ 0 & \text{if at the crossing point one component crosses itself.} \end{cases}$$

Problem 1.6.4. Two links (oriented or not) are called *link homotopic* if one link can be continuously deformed to the other so that no intersections of different components appear throughout the deformation (but self-intersections of the components may appear). Or, equivalently, some plane diagram of the first link can be transformed to some plane diagram of the second link using Reidemeister moves and crossing changes of one component.

(a) The Whitehead link is link homotopic to the trivial link.

(b) If two oriented 2-component links are link homotopic, then their linking numbers are equal.

(c)* If the linking numbers of two 2-component links are equal, then the links are link homotopic.

(d)* The Borromean rings link is not link homotopic to the trivial link.

2 Problems after the semifinal

Subsection 2.2 only use the material of §§1.1 and 1.2. Subsection 2.3 only use the material of §§1.1, 1.2 and 1.5.

2.1 The Casson invariant

The **sign** of a crossing point of an oriented plane diagram of a knot is defined after figure 14; the first (the second) vector is the vector of overcrossing (of undercrossing). Clearly, the sign is independent of the orientation of the diagram, and so is defined for non-oriented diagram.

The **sign** of a P -skew pair of crossing points in a plane diagram of a knot (for any basepoint P) is the product of the signs of the two crossing points.

The P -Casson invariant of a plane diagram is the sum of signs over all P -skew pairs of crossing points.

Problem 2.1.1. (a) Draw a plane diagram of a knot and a basepoint P such that P -Casson invariant is -5 .

(b,c,d,e,f) Same as problems 1.4.1.b,c,d,e,f for the Casson invariant.

(g) Find and prove the analogue of problem 1.4.2.a for the Casson invariant.

(h,i) Same as problems 1.4.2.b and 1.5.4.d for the Casson invariant.

By (e,f) the **Casson invariant** (Casson number) c_2 of a plane diagram, of a knot, or even of isotopy class of a knot, is well-defined by setting it to be the P -Casson invariant of any plane diagram of the knot for any basepoint P .

Theorem 2.1.2. *There is a unique integer-valued isotopy invariant c_2 of (non-oriented) knots that assumes value 0 on the trivial knot and for which*

$$c_2(K_+) - c_2(K_-) = \text{lk } K_0.$$

(The number $\text{lk } K_0$ is well-defined because change of the orientation on both components of an oriented link does not change the linking number.)

2.2 Proper colorings

A *strand* in a plane diagram (of a knot or link) is a connected piece that goes from one undercrossing to the next. A **proper coloring** of a plane diagram (of a knot or link) is a coloring of its strands in one of three colors so that at least two colors are used, and at each crossing, either all three colors are present or only one color is present. A plane diagram (of a knot or link) is **3-colorable** if it has a proper coloring.

Problem 2.2.1. For each of the following knots or links take any diagram and decide if it is 3-colorable.

(a) the trivial knot. (b) the trefoil knot. (c) the figure eight knot.

(d-j) links in fig. 7 and 8.

Problem 2.2.2. (a) The 3-colorability of a plane diagram is preserved under the Reidemeister moves.

(b) Neither of links in fig. 7 and 8 (except the trivial link) is isotopic to the trivial link.

Problem 2.2.3. * The 5_1 knot is not isotopic to the trivial knot.



Figure 15: The 5_1 knot

2.3 Alexander-Conway polynomials

Problem 2.3.1. * (a) There is a unique mod2-valued isotopy invariant arf of oriented 3-component links that assumes value 0 on the trivial link and for which

$$\text{arf}(K_+) - \text{arf}(K_-) = \begin{cases} \text{lk}_2 K_0 & \text{at the crossing point different components cross each other;} \\ 0 & \text{at the crossing point one component crosses itself.} \end{cases}$$

(Here $\text{lk}_2 K_0$ is defined because K_0 is a 2-component link.)⁸

(b) There is a unique mod2-valued isotopy invariant a_3 of oriented 2-component links that assumes value 0 on the trivial link and for which

$$a_3(K_+) - a_3(K_-) = \text{arf } K_0.$$

(Here $\text{arf } K_0$ is defined because K_0 is either a knot or a 3-component link.)

(c) There is a unique mod2-valued isotopy invariant a_3 of oriented 4-component links that assumes value 0 on the trivial link and for which

$$a_3(K_+) - a_3(K_-) = \begin{cases} \text{arf } K_0 & \text{at the crossing point different components cross each other;} \\ 0 & \text{at the crossing point one component crosses itself.} \end{cases}$$

(Here $\text{arf } K_0$ is defined because K_0 is a 3-component link.)

Proof of the existence in problems 2.3.1 and theorem 2.3.3 is outside the scope of this text. See an elementary proof in [Ka06', §2-§5], [Ka06]. You can earn a plus-mark (plus-sign) for proving the uniqueness, and solve other problems assuming the existence. For a relation to proper colorings see [Ka06', §6].

Problem 2.3.2. Calculate (for your choice of orientation on the components)

(a) the arf invariant of the Borromean rings;

(b,c,d*) the a_3 invariant of the Hopf link, of the Whitehead link, and of *4-Borromean rings*, i.e. of any link of your choice for which every 3-component sublinks are isotopic to the trivial link, but the entire link is not isotopic to the trivial link.

Theorem 2.3.3. * (a) *There is a unique infinite sequence $c_{-1} = 0, c_0, c_1, c_2, \dots$ of \mathbb{Z} -valued isotopy invariants of oriented non-ordered links that assume values $c_0 = 1$ and $c_1 = c_2 = \dots = 0$ on the trivial knot and for which*

$$c_n(K_+) - c_n(K_-) = c_{n-1}(K_0)$$

whenever $n \geq 0$.

⁸Theorem 1.4.3 is the analogue of problem 2.3.1 for 1-component links (knots). The definition of arf given in §1.4 applies to knots only and here the point is to extend it to 3-component links.

(b) There is a unique infinite sequence $c_{-1} = 0, c_0, c_1, c_2, \dots$ of \mathbb{Z} -valued isotopy invariants of oriented ordered links that assume values $c_0 = 1$ and $c_1 = c_2 = \dots = 0$ on the trivial knot and such that for any $n \geq 0$ we have

$$c_n(K_+) - c_n(K_-) = c_{n-1}(K_0),$$

where K_0 is K_0 from fig. 9 with some ordering of the components.

Actually two versions of theorem 2.3.3 are equivalent. You can use theorem 2.3.3.b without proof.⁹

The polynomial $C(K)(t) := c_0(K) + c_1(K)t + c_2(K)t^2 + \dots$ is called the *Conway polynomial*, see problem 2.3.5.e. Introduction of this polynomial allows to calculate all the invariants c_n as quickly as one of them. The formula in theorem 2.3.3 is equivalent to

$$C(K_+) - C(K_-) = tC(K_0).$$

The polynomial $C(K)(t) := c_0(K) + c_1(K)t + c_2(K)t^2 + \dots$ is called the *Conway polynomial*, see problem 2.3.5.e. Introduction of this polynomial allows to calculate all the invariants c_n as quickly as one of them. The formula in theorem 2.3.3 is equivalent to

$$C(K_+) - C(K_-) = tC(K_0).$$

Problem 2.3.4. Calculate the Conway polynomial of the following links (for your choice of orientation on the components).

- (a) the trivial link with 2 components; (b) the trivial link with n components;
- (c) the Hopf link; (d) the trefoil knot; (e) the figure eight knot;
- (f) the Whitehead link; (g) the Borromean rings; (h) the 5_1 knot.

Problem 2.3.5. (a) We have $c_0(K) = 1$ if K is a knot and $c_0(K) = 0$ otherwise (i.e. if K has more than one component).

- (b) For a knot K we have $c_{2j+1}(K) = 0$ and c_2 is the Casson invariant.
- (c) For a 2-component link K we have $c_{2j}(K) = 0$ and c_1 is the linking coefficient.
- (d) For a k -component link K we have $c_j(K) = 0$ if either $j \leq k - 2$ or $j - k$ is even.
- (e) For every knot or link all but a finitely many of the invariants c_n are zeroes.

Problem 2.3.6. (a) Change of the orientations of all components of a link (in particular, change of the orientation of a knot) preserves the Conway polynomial.

(b) There is a 2-component link such that change of the orientation of its one component changes the degree of the Conway polynomial (so this change neither preserves nor negates the Conway polynomial).

- (c) For any of the connected sums $K \# L$ of knots K, L we have $C(K \# L) = C(K)C(L)$.

A link is *split* if it is isotopic to a link whose components are contained in disjoint balls.

Problem 2.3.7. (a,b,c) No link of theorem 1.2.2 is split.

- (d) The Conway polynomial of a split link is trivial.

⁹It is not clear which of the two versions is stated in [CDM12, §2.3.1], so we present both versions and deduce the stronger version from the weaker version.

2.4 Vassiliev-Goussarov invariants (sketch) *

Denote by

- Σ the set of isotopy classes of singular knots [PS96, 4.1],
- δ_n the set of all chord diagrams that have n chords [PS96, 4.8];
- $\sigma(K)$ the *chord diagram* of a singular knot K [PS96, 4.8], [CDM12, 3.4.1] (not to be confused with *Gauss diagrams* for a non-singular knot K [CDM12, 1.8.4]).

Theorem 2.4.1 (Vassiliev-Kontsevich, [PS96], [CDM12]). *For any map $\lambda : \delta_n \rightarrow \mathbb{R}$ there exists a map $v : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ having properties (1)-(3) below if and only if λ satisfies to the 1-term and the 4-term relations [PS96, (4.5),(4.6)].*

(1) *For any singular knots K_+, K_- and K^0 from [PS96, (4.1)] (notice the difference with fig. 9) we have*

$$v(K_+) - v(K_-) = v(K^0),$$

(2 _{n}) *$v(K) = 0$ for each singular knot that has more than n double points, and*

(3) *$v(K) = \lambda(\sigma(K))$ for each singular knot that has exactly n double points.*

A map $v : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ such that (1) holds is called a *Vassiliev-Goussarov invariant*.

A map $v : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ such that (2 _{n}) holds is called a *map of order at most n* .

Problem 2.4.2. (a) The map v of theorem 2.4.1 is unique up to Vassiliev-Goussarov invariant of order at most $n - 1$. More precisely, the difference between maps $v, v' : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ satisfying to (1), (2 _{n}) and (3), satisfies to (1) and (2 _{$n-1$}).

(b) Prove the ‘only if’ part of theorem 2.4.1.

(0),(1),(2),(3)* Prove the ‘if’ part of theorem 2.4.1 for $n = 0, 1, 2, 3$.

Hint: for $n = 2$ use theorem 2.1.2, for $n = 3$ use the coefficient of h^3 in $J(e^h)$, where J is the Jones polynomial in t -parametrization [CDM12, 2.4.2, 2.4.3].

In the remaining problems theorem 2.4.1 can be used without proof. Assertion ‘ $v(K) = x$ for any singular knot K whose chord diagram is a ’ is shortened to ‘ $v(a) = x$ ’.

Problem 2.4.3. (a) There exists a unique Vassiliev-Goussarov invariant $v_2 : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ of order at most 2 such that

- $v_2(O) = 0$ for the trivial knot O , and
- $v_2(1212) = 1$ ((1212) is the ‘non-trivial diagram with 2 chords’ [PS96, Figure 4.4], 3rd diagram of the first line).

Warning: in this problem it is allowed to use theorem 2.4.1 but not theorem 2.1.2.

(b,b’,c,d) Calculate v_2 for the right trefoil, left trefoil, figure eight knot and the 5_1 knot.

Problem 2.4.4. (a) There exists a unique Vassiliev-Goussarov invariant $v_3 : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ of order at most 3 such that

- $v_3(O) = 0$ for the trivial knot O and for the left trefoil O , and
- $v_3(123123) = 1$ ((123123) is the ‘non-trivial most symmetric diagram with 3 chords’, [PS96, Figure 4.4], 5th diagram of the second line).

(b,c,d*) Calculate v_3 for the right trefoil, figure eight knot and the 5_1 knot.

Hints: Problems 2, 3, 4ab, Results/Theorems 11, 13, 14 from [PS96, §4].

Problem 2.4.5. (a) There exists a unique Vassiliev-Goussarov invariant $v_4 : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ of order at most 4 such that

- $v_4(O) = 0$ for the trivial knot O , for the left trefoil O , and for the right trefoil O ,
- $v_4(12341234) = 2$, $v_4(12341432) = 3$ and $v_4(12341423) = 5$ [PS96, Problem 4.4.b].

(c*,d*) Calculate v_4 for the figure eight knot and the 5_1 knot.

Hints and solutions for problems before the semifinal

1.1.1. (a,b,c,d) ‘Probably the best way of solving this problem is to make a model of the trefoil knot and the figure eight knot by using a shoelace and then move it around from one position to the other. Fig. 16 gives some hints concerning transformations of the figure eight knot.’ [Pr95, §2]

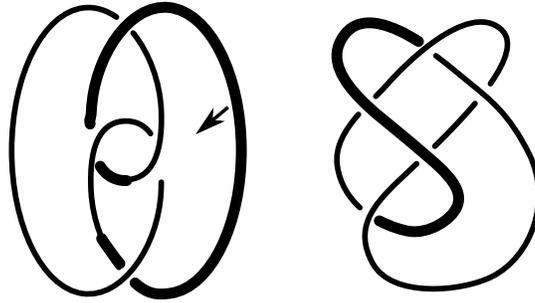


Figure 16: Isotopy of the figure eight knot

(e) Let us consider two knots with coinciding plane diagrams, in a horizontal plane π . For each point X in the space let $p(X)$ be the line containing X , perpendicular to π . Let $h(X)$ be the height of X , relative to π , which is positive ($h(X) > 0$) if X is in the upper half-space and negative ($h(X) < 0$) if X is in the lower half-space. To each point A of the first knot associate a point A' of the second knot by the following procedure. There are two cases:

Case 1: The projection of the point A on π is not a crossing point on the plane diagram. In this case $p(A)$ intersects the first knot only at the point A . Since the plane diagrams coincide, the line $p(A)$ intersects the second knot also at a single point. Define A' to be this point.

Case 2: The projection of the point A on π is a crossing point of the plane diagram. In this case the line $p(A)$ intersects the first knot in an additional point B . Since the plane diagrams coincide, the line $p(A)$ intersects the second knot in two points C and D , where we assume that $h(C) > h(D)$. If $h(A) > h(B)$, we define $A' = C$, and in the opposite case $A' = D$.

For each point A of the first knot and each number $t \in [0, 1]$ let $A(t)$ be the point on the line $p(A)$ with the height $h(A(t)) = (1 - t)h(A) + th(A')$. By construction $A(0) = A$, $A(1) = A'$ and the transformation of the first knot, which moves $A(0)$ in the direction of $A(1)$ with constant speed, so that at the time t it occupies the position $A(t)$, is the required isotopy.

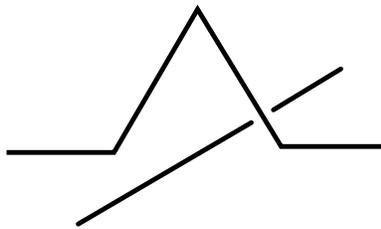


Figure 17: The bridge over some crossing point

1.1.2. See fig. 17. For each crossing point of the plane diagram, on the upper edge of the crossing, choose two points, close to the intersection and on the opposite sides of the intersection. Replace the line segment between the two chosen points by a ‘bridge’ rising above the plane diagram, which connects these two points. After replacing all crossing points by the corresponding bridges, we obtain the required knot.

1.1.3. (a) Use the results of problems 1.4.1, 2.1.1, or 2.2.1.

(b) Use the results of problems 1.4.1 or 2.1.1.

(c) Use the result of problem 2.2.1.

(d) Take any of the connected sums of n trefoil knots. By assertions 2.1.1.c,i the Casson invariant of this knot is n . It follows that for different values of n the corresponding knots are not isotopic.

1.1.4. Choose a knot projected to the given plane diagram in the same way as in assertion 1.1.2. Suppose that all ‘bridges’ lie in the upper half-space w.r.t. the projection plane. By the assumption there are points X and Y on the knot which divide the knot into two polygonal lines p and q such that

- q lies in the projection plane and passes only through undercrossings;
- p is projected to polygonal line p' which passes only through overcrossings.

Take a point Z in the upper half-space, and a point T in the lower half-space. Let us construct an isotopy between the given knot and the closed polygonal line $XZYT$, which is isotopic to the trivial knot. The isotopy consists of 3 steps, all of them keeping X, Y fixed.

Step 1. An isotopy between q and XTY . Suppose that $q = A_0A_1 \dots A_n$, where $A_0 = X$ and $A_n = Y$. Then the isotopy is given by

$$A_0A_1 \rightarrow A_0TA_1, \quad TA_1A_2 \rightarrow TA_2, \quad TA_2A_3 \rightarrow TA_3, \quad \dots TA_{n-1}A_n \rightarrow TA_n.$$

Step 2. An isotopy between p and p' . Remove all the ‘bridges’ by elementary moves.

Step 3. An isotopy between p' and XZY . This is done analogously to step 1.

1.1.5. Follows by assertion 1.1.4.

Another idea of the proof (cf. [PS96, Theorem 3.8]). Denote by π the horizontal plane containing the plane diagram. For each point X in the space, $p(X)$ and $h(X)$ are defined in the solution of the problem 1.1.1.e. Let l be a line in the plane, which passes through a vertex A_0 of the plane diagram, while the whole diagram is contained in one of the two half-planes determined by l . Let A_0, A_1, \dots, A_n be all vertices of the plane diagram, in the order of their appearance, while we move along the diagram in some direction. Choose points B_0, \dots, B_n so that $A_i \in p(B_i)$ for $i = 1, \dots, n$, and $h(B_i) < h(B_j)$ for $i < j$. Let B_{n+1} be a point, whose projection on π is close to A_0 and $h(B_{n+1}) > h(B_n)$. We claim that the knot $B_0 \dots B_n B_{n+1}$ is isotopic to the trivial knot. Indeed, by the choice of the line l , the projection of the knot onto any plane, perpendicular to the line l , is a closed polygonal line without self-intersections. It remains to modify crossing in the plane diagram so that they are in agreement with the projection of the constructed knot to the plane π .

1.1.6. See [PS96, §1.7].

Remark. Since [PS96, §1.6] does not contain as rigorous definition of Reidemeister moves as that of plane isotopies,¹⁰ the argument in [PS96, §1.7] does not constitute a rigorous proof. We believe that a rigorous proof can be recovered using rigorous definition of Reidemeister moves.

1.2.1. (a) This follows by (b) (or can be proved independently).

(d) This follows by (e) (or can be proved independently).

(e) See figure 18.

¹⁰This also shows that having plane isotopy in the statement [PS96, §1.7] does not make the statement rigorous, and thus should be avoided. On an intuitive level, plane isotopies should better be ignored. With the alternative rigorous definition below, plane isotopies can be expressed via Reidemeister moves and so should better be ignored in the statement.

Let us present an alternative rigorous definition of the first Reidemeister move. The other Reidemeister moves have analogous rigorous definitions. On the plane take a closed non-self-intersecting polygonal line L whose interior (see the Jordan Theorem in remark after theorem 1.1.3) intersects a knot diagram D by a non-self-intersecting polygonal line M joining two points on L . Let N be a closed non-self-intersecting polygonal line in the interior of L such that $N \cap L = \emptyset$, $N \cap M$ is one point and $M \cup N$ can be made a generic (self-intersecting) polygonal line. *The first Reidemeister move* is replacement of M to $M \cup N$ in D , with any ‘information’ at the appearing crossing.

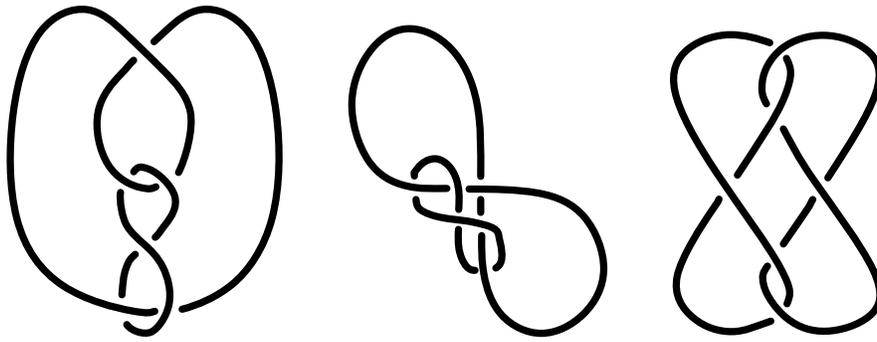


Figure 18: Isotopy of the Whitehead link

(f) Take three ellipses given by the following three systems of equations:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y^2 + 2z^2 = 1 \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ z^2 + 2x^2 = 1 \end{array} \right. \quad \text{and} \quad \left\{ \begin{array}{l} z = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{array} \right.$$

See figure 19. Take the quadrilaterals circumscribed around these ellipses and symmetric w.r.t. the coordinate axes. Then the straight line is given by $x = y = z$.

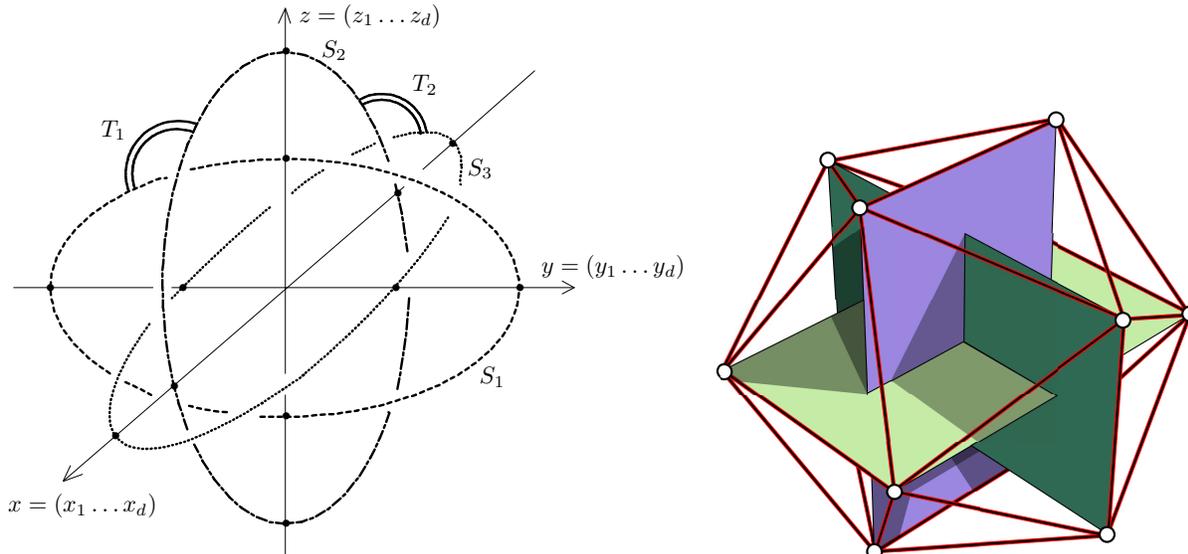


Figure 19: Borromean rings

1.2.2. (a,c) Use results of problem 1.3.2.

(b,d) Use, for example, results of problems 2.2.1 and 2.2.2.

1.3.1. In the plane passing through A, B, C denote by $\langle ABC \rangle$ the part bounded by the triangle ABC .

(i \Leftrightarrow ii) A segment XY passes above the segment BC as seen from A if and only if XY intersects $\langle ABC \rangle$.

The outline of DEF is the union of segments DE, EF and DF . Hence i \Leftrightarrow ii.

(i \Leftrightarrow iii) The outline of DEF is either disjoint from the surface of tetrahedron $OABC$ or intersects the surface at exactly two points. Hence the following three properties are equivalent:

- the outline of DEF intersects $\langle ABC \rangle$ at exactly one point;
- the outline of DEF intersects exactly one of the triangles $\langle OAB \rangle, \langle OBC \rangle$ and $\langle OAC \rangle$.
- the outline of ABC passes below exactly one side of DEF as seen from O .

1.3.2. (a) *Answers* (from left to right): 1, 0, 0, 0.

(b) Prove the statement separately for every Reidemeister move. For moves I and III the number of crossing points where the first component passes above the second one does not change. For move II this number changes by 0 or ± 2 .

1.3.3. (a) Take a plane diagram of a link. By the Parity lemma (stated before problem 1.3.3) the number of crossing points where the first component passes above the second one has the same parity as the number of crossing points where the second component passes above the first one. This completes the proof.

(b) An example is the fourth link in fig. 7. One can prove that this link is not isotopic to the trivial one using linking number, see §1.6.

1.3.4. Suppose that f is another invariant aside from lk_2 satisfying the assumptions. Then $f - lk_2$ is an isotopy invariant assuming zero value on the trivial link and invariant under crossing changes. By the analogue of lemma 1.1.5 for links any plane diagram of a link can be obtained from the diagram of a link isotopic to the trivial link by some crossing changes. Hence $f - lk_2 = 0$.

1.3.5. The proof should not be hard, and we encourage you to supply the details.

1.3.6. See [Sk14, §1, Theorem 1.1].

1.4.1. (a) If P is a point on the plane diagram as in problem 1.1.4, then there are no P -skew pairs of crossings. Hence the P -Arf invariant is zero.

(b) *Answer: 0.* The trivial knot has no crossings and no skew pairs of crossings. Therefore the Arf invariant of this knot is 0 for any choice of the basepoint.

(c) *Answer: 1.* The trefoil knot has 3 crossings. For any basepoint P exactly one pair of crossings is P -skew. Hence P -Arf invariant of the trefoil knot is 1.

(d) *Answer: 1.*

(e) It suffices to show that the Arf invariant remains unchanged when the basepoint moves through one crossing on the plane diagram. Let P_1 and P_2 be two basepoints such that the segment P_1P_2 contains exactly one crossing point X . Consider two cases.

Case 1: P_1P_2 passes through undercrossing. Then X does not form either P_1 -skew or P_2 -skew pair with any other crossing. Hence P_1 - and P_2 -Arf invariants of the diagram are equal.

Case 2: P_1P_2 passes through overcrossing. Then X divides the diagram into two closed polygonal lines q_1 and q_2 such that P_1 lies on q_1 and P_2 lies on q_2 . Denote by n_1 (respectively, n_2) the number of intersections of q_1 and q_2 for which q_1 passes above q_2 (respectively, q_2 passes above q_1). Denote by N_1 (respectively, N_2) the number of P_1 -skew (respectively, P_2 -skew) pairs formed by X and some intersection of q_1 and q_2 . Then

$$\text{arf}_{P_1} D - \text{arf}_{P_2} D = N_1 - N_2 = n_1 - n_2 \equiv n_1 + n_2 \equiv 0,$$

where D is the given plane diagram. Here

- the first equality holds because a pair of crossings is either P_1 -skew or P_2 -skew (but not both) if and only if the pair is formed by X and some intersection of q_1 and q_2 ;

- the second equality holds because $N_1 = n_1$ and $N_2 = n_2$; indeed, an intersection of q_1 and q_2 forms a P_1 -skew (respectively, P_2 -skew) pair with X if and only if at this intersection q_1 passes above (respectively, below) q_2 ;

- \equiv_2 is congruence modulo 2;

- the last congruence follows by Parity lemma for q_1 and q_2 .

(f) Prove the statement for each Reidemeister move separately. The common idea is to cleverly choose a basepoint.

Type I move. Take basepoints before and after the move as in fig. 20 (left). Check that the crossing A does not form a P -skew pair with any other crossing.

Type II move. Take basepoints before and after the move as in fig. 20 (middle). Check that neither of the crossings A and B forms a P -skew pair with any other crossing.

Type III move. Take basepoints before and after the move as in fig. 20 (right). Check that neither of the crossings A, B forms a P -skew pair with any other crossing and that neither of the crossings A', B' forms a P' -skew pair with any other crossing. Then check that a crossing X distinct from A, B, C forms P -skew pair with C if and only if X forms P' -skew pair with C' .

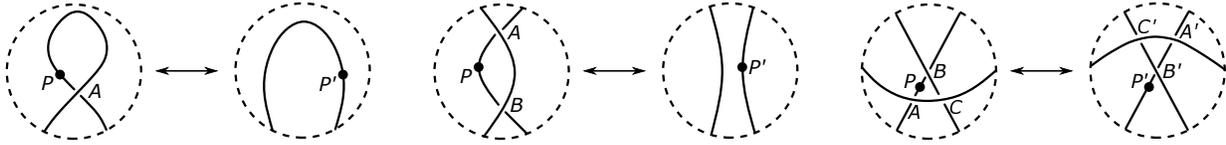


Figure 20: Arf-invariant does not change under Reidemeister moves

1.4.2. (a) Take basepoints P_+, P_- as in fig. 21. Check that the crossing A_- does not form a P_- -skew pair with any other crossing in K_- . Then check that the number of crossings which form a P_+ -skew pair with A_+ in K_+ equals $\text{lk}_2 K_0$ modulo 2.

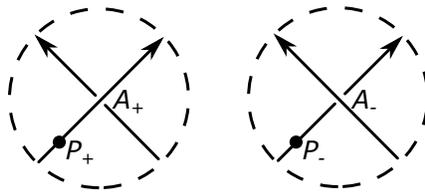


Figure 21: To the proof of skein relation for Arf invariant

(b) Take any of the connected sums of the two trefoil knots. By assertions 1.4.1.c and 1.5.4.d the Arf invariant of this knot is 0. However by assertions 2.1.1.c,i the Casson invariant of this knot is 2, hence this knot is not isotopic to the trivial knot.

1.4.3. Existence. Follows from assertions 1.4.1.b and 1.4.2.a.

Uniqueness. The proof goes along the lines of the proof of theorem 1.3.4. Use lemma 1.1.5 itself instead of its analogue for links.

1.4.4. See [Ka87, pp. 75–78].

1.4.5. See [CG83, Theorem 2].

1.5.1. (b) *First solution.* An oriented polygonal line is called *positive* if the bounded part of the plane is always on the right side of each of its oriented segments (see the Jordan theorem in remark after theorem 1.1.3). Prove that the positivity of an oriented polygonal line is preserved by elementary moves.

Hint to the second solution. The positivity can be equivalently defined as follows. We say that an oriented polygonal line $A_1 \dots A_n$ is *positive* if for each of its inner (interior) points O the sum of oriented angles $\angle A_1 O A_2 + \angle A_2 O A_3 + \dots + \angle A_{n-1} O A_n + \angle A_n O A_1$ is always positive (i.e. the *winding number* of the oriented polygonal line around any interior point is positive).

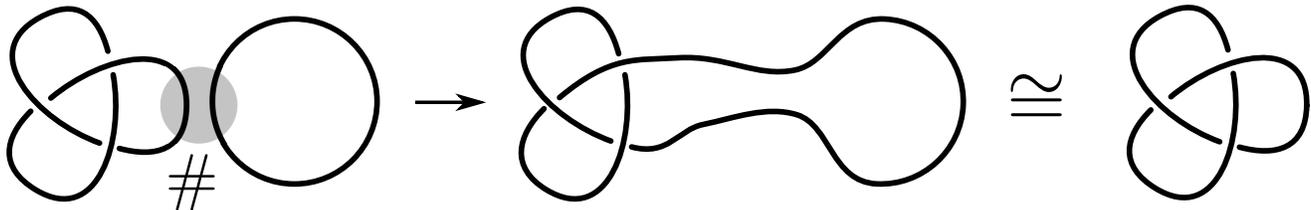


Figure 22: Proof of $K \# O = K$

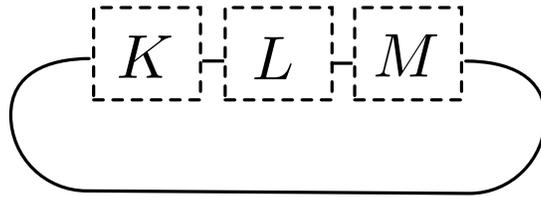


Figure 23: Proof of $(K\#L)\#M = K\#(L\#M)$

1.5.2. (a), (b), (c) Each of the three indicated oriented knots is transformed into the oriented knot with the opposite orientation by the rotation through the angle π around the ‘vertical’ axis passing through the ‘upper’ point of the knot (see the leftmost diagram in fig. 1, the first and the second row for the trefoil and the figure eight knot, respectively). This rotation is included into a continuous family of rotations through the angle πt , $t \in [0, 1]$, with respect to the same line. This is the required isotopy.

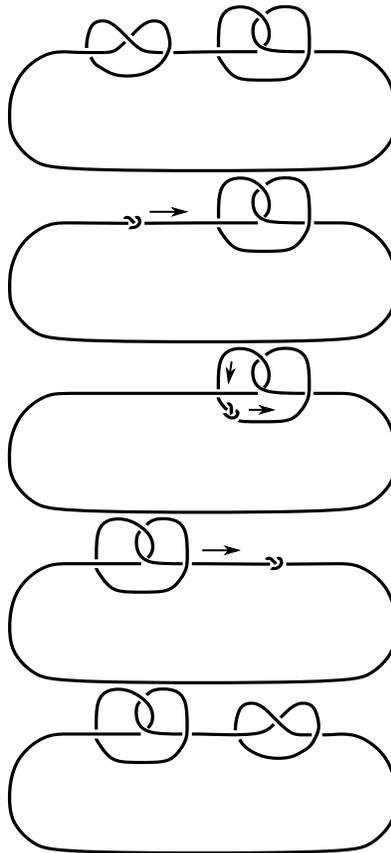


Figure 24: Proof of $K\#L = L\#K$

1.5.4. (a) See fig. 22.

(b) It is sufficient to take a small knot of the class L and push it through a knot from the class K , see fig. 24.

(c) Isotopic classes of both the left hand and the right hand side of the equality have a common representative exhibited in fig. 23.

(d) Choose basepoint close to the ‘place of connection’. Check that all skew pairs of crossings in $K\#L$ are obtained from the skew pairs of crossings in K and in L .

1.5.5. (d) Check that all crossings of different components in $K\#L$ are obtained from such crossings in K and in L .

1.5.6. (a) As an example we can take equal links consisting of a trefoil and an unknot in disjoint cubes. Cf. [PS96, Figure 3.16].

(b) See [As]. Fig. 25 presents an alternative example suggested by A. Ryabichev.

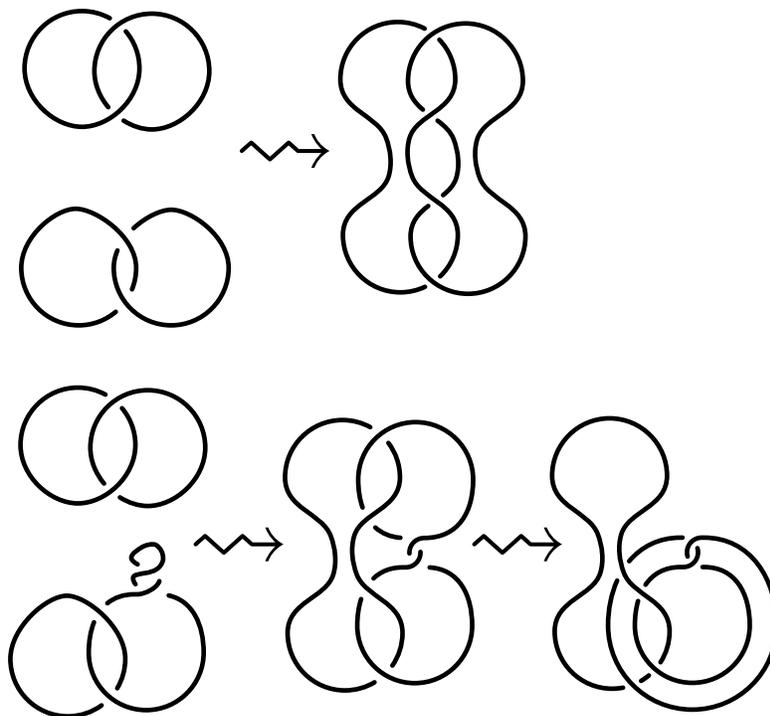


Figure 25: Connected sum of isotopy classes of ordered links is not well-defined

1.6.1. *Answers:* (a) 1; (b) 0.

(c) The proof is analogous to assertion 1.3.2. It suffices to check that the signs of all crossing points does not change.

1.6.2. (a) The proof is analogous to assertion 1.3.2.b. Take a plane diagram of a link. By the Triviality lemma (stated before problem 1.6.2) the sum of signs of crossing points where the first component passes above the second one has opposite sign to the sum of signs of crossing points where the second component passes above the first one. Switching the components negates the sign of every crossing point. This completes the proof.

(b) Reversing the orientation of either of the components negates the sign of every crossing point.

(c) Take the connected sum of 5 Hopf links oriented so that their linking numbers equal to -1 .

(d) The proof is analogous to assertion 1.5.4. The signed set of crossing points of plane diagram of $K \# L$ is the union of the signed sets of crossing points of plane diagrams of links K and L .

(e) An example is the Whitehead link. The Whitehead link is not isotopic to the trivial link by theorem 1.2.2.

1.6.3. The proof is analogous to theorem 1.3.4.

Hints and solutions for some problems after the semifinal

2.1.1. *Answers:* (b) 0; (c) 1; (d) -1 .

(a) Take any connected sum of five figure eight knots. By (d) and assertion 2.1.1.i below the Casson invariant of this knot is -5 .

(b) The trivial knot has no crossings, and so no skew pairs of crossings. Therefore the Casson invariant of this knot is 0.

(c) All three crossings of the trefoil knot have the same sign. Since the trefoil knot has exactly one linked pair of crossings (regardless the choice of the base-point), we obtain that the Casson invariant of this knot is 1.

(e) The proof is analogous to assertion 1.4.1.e. Use the Triviality lemma stated after problem 1.6.1. Here and below keep in mind the signs of intersection points!

(f) The proof is analogous to assertion 1.4.1.f.

(g) The proof is analogous to assertion 1.4.2.a.

(h) Take any connected sum of the trefoil knot and the figure eight knot. By assertions 2.1.1.c,d and 2.1.1.i the Casson invariant of this knot is 0. However, by assertions 2.3.4.d,e and 2.3.6.b the Conway polynomial of this knot is $(t^2 + 1)(t^2 - 1) \neq 1$. Hence this knot is not isotopic to the trivial knot.

(i) The proof is analogous to assertion 1.5.4.d.

2.1.2. The proof is analogous to theorem 1.4.3.

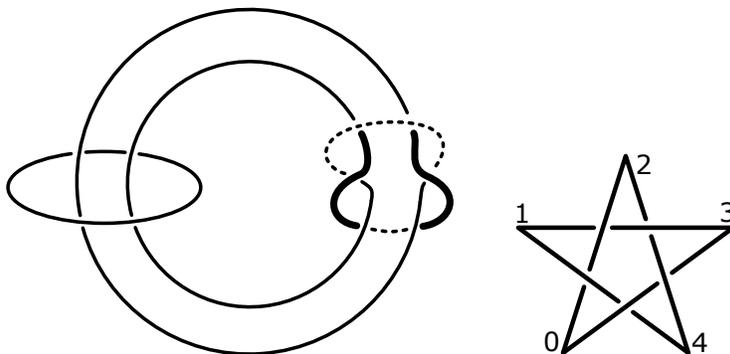


Figure 26: A 3-coloring of a link and 5-coloring of the 5_1 knot

2.2.1. *Answers:* b,e,h — 3-colorable, a,c,d,f,g,i,j — not 3-colorable. For a proper coloring of a diagram of trefoil knot see the attached copy of [Pr95, p. 30, figure 4.3]. For a proper coloring of the last diagram from fig. 7 see fig. 26 left. (This diagram was erroneously stated to be not 3-colorable in [Pr95, §4]. This minor mistake was found by L.M. Bannöhr, S. Zotova and L. Kravtsova.)

2.2.2. (a) See the attached copy of [Pr95, pp. 29-30, Theorem 4.1].

(b) Follows from (a) and assertions 2.2.1.d-j (see the attached copy of [Pr95, p. 30]). The last diagram from fig. 7 is distinguished from the trivial link by the number of proper colorings of a plane diagram. Prove that this number is preserved under the Reidemeister moves.

2.2.3. A plane diagram is *5-colorable* if there exists a coloring of its strands in five colors 0, 1, 2, 3, 4 so that

- at least two colors are used;
- at each crossing if the upper strand has color a and two lower strands have colors b and c , then $2a \equiv b + c \pmod{5}$.

Similarly to assertion 2.2.2.a one can prove that the 5-colorability of a plane diagram is preserved under Reidemeister moves. The 5_1 knot is 5-colorable, see fig. 26, right. The trivial knot is not. This completes the proof.

2.3.1. These are particular cases of mod2 version of theorem 2.3.3.

2.3.2. *Answers:* (a, b) 0; (c) 1 (independently of the choice of orientation).

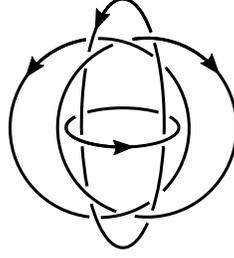


Figure 27: 4-Borromean rings

Remark. The invariants arf, a_3 for links may depend on the orientation on the components (for a_3 see the attached copy of [CDM12, 2.3.4]).

2.3.3. The uniqueness is analogous to theorems 2.1.2 and 1.4.3; solve first problem 2.3.4.

Deduction of (a) from (b). It suffices to show that all invariants c_n defined in (b) are preserved under changes of the order of the components.

Let D be a plane diagram of some link with two or more components and let D' be a plane diagram obtained from D by a change of the components' order. By $\text{cr } D$ denote the number of crossings in D . By $u(D)$ denote the minimal possible number of crossing changes needed to obtain a diagram of a link which is isotopic to the trivial one from D (such sequence of crossing changes exists by the analogue of lemma 1.1.5 for links).

The proof is by induction on $\text{cr } D$. If $\text{cr } D = 0$, then D is a diagram of a link which is isotopic to the trivial one and by assertion 2.3.4.b we have $C(D) = 0$ for any ordering of the components. Suppose that $\text{cr } D > 0$; then continue the proof by induction on $u(D)$. If $u(D) = 0$, then D is a diagram of a link which is isotopic to the trivial one; this case is considered above. Suppose that $u(D) > 0$ and let D_* be a link obtained from D by a crossing change and such that $u(D_*) < u(D)$. Suppose D'_* is a link obtained from D' by the change of the same crossing; then

$$\pm(C(D) - C(D_*)) = C(D_0) \text{ and } \pm(C(D') - C(D'_*)) = C(D'_0),$$

where

- D_0 is a diagram of a link K_0 (with some ordering of the components) from fig. 9 for D , D_* being D_+, D_- in some order;
- D'_0 is a diagram of a link K_0 (with some ordering of the components) from fig. 9 for D' , D'_* being D_+, D_- in some order.

Note that the diagrams D_* and D'_* coincide up to the order of the components. The same is true for the diagrams D_0 and D'_0 . Since $u(D_*) < u(D)$ and $\text{cr } D_0 < \text{cr } D$, by inductive hypotheses we have $C(D_*) = C(D'_*)$ and $C(D_0) = C(D'_0)$. Then $C(D) = C(D')$.

2.3.4. *Answers:* (a, b) 0; (c) $\pm t$; (d) $1 + t^2$; (e) $1 - t^2$; (f) $\pm t^3$; (g) $\pm t^4$; (h) $1 + 3t^2 + t^4$.

Remark. The signs in the answers to (c), (f), (g) depend on the orientation on the components.

Hint. For examples of such calculations for (a), (c), and (d) see the attached copy of [CDM12, 2.3.2].

2.3.5. Let D be a plane diagram of the given link K .

(a) For any diagram D_* obtained from D by a crossing change we have $c_0(D) - c_0(D_*) = 0$. I. e. c_0 is invariant of crossing changes. By the analogue of lemma 1.1.5 for links the diagram D can be obtained by crossing changes from a diagram of a link isotopic to the trivial one. The assertion follows from the definition of c_0 on the trivial knot and assertion 2.3.4.b.

(b) The first part follows from (d). The second part follows from the definition of c_2 and theorem 2.1.1.g.

(c) The first part follows from (d). The second part follows from the definitions of c_0, c_1 and theorem 1.6.3.

(d) The proof is by induction on $\text{cr } D$. If $\text{cr } D = 0$, then K is isotopic to the trivial link. If K is a knot, then $C(D) = 1$. Otherwise $C(D) = 0$ by assertion 2.3.4.b. Suppose that $\text{cr } D > 0$; then continue the proof by induction on $u(D)$. If $u(D) = 0$, then K is isotopic to the trivial link; this case is considered above. Suppose that $u(D) > 0$ and let D_* be a link obtained from D by a crossing change and such that $u(D_*) < u(D)$. Then we have

$$\pm(c_j(D) - c_j(D_*)) = c_{j-1}(D_0),$$

where D_0 is the diagram from fig. 9 corresponding to D , D_* being D_+, D_- in some order. Note that the link D_* consists of k components and the link D_0 consists of $k' = k \pm 1$ components. Therefore if $j \leq k - 2$, then $j - 1 \leq k'$ and if $j - k$ is even, then $(j - 1) - k'$ is even. Since $u(D_*) < u(D)$ and $\text{cr } D_0 < \text{cr } D$, by inductive hypothesis we have $c_j(D_*) = c_{j-1}(D_0) = 0$. Then $c_j(D) = 0$.

(e) Prove more general statement: *for a plane diagram D we have $\deg C(D) \leq \text{cr } D$* . The proof is analogous to problem 2.3.5.d.

2.3.6. (a) The proof is analogous to problem 2.3.5.d.

(b) See the attached copy of [CDM12, 2.3.4].

(c) The proof goes along the lines of problem 2.3.5.d. Let D and G be plane diagrams of K and L . Fix the diagram G and prove that $C(D\#G) = C(D)C(G)$ by induction on $\text{cr } D$.

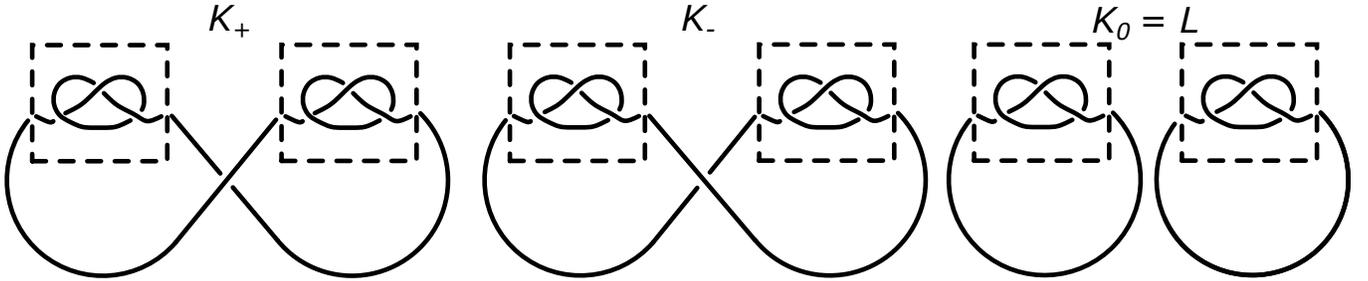


Figure 28: Proof that $C(\text{split link}) = 0$

2.3.7. (b,c,d) Follows from 2.3.4.c,f,g above and 2.3.7.e below.

(e) If L is a split link, then there exist links K_+, K_-, K_0 such that

- their plane diagrams differ like in fig. 9;
- the links K_+ and K_- are isotopic;
- the link K_0 is isotopic to L .

We have $C(L) = C(K_0) = \frac{1}{t}(C(K_+) - C(K_-)) = 0$.

References

- [As] *A. Asanau.* A simple proof that connected sum of ordered oriented links is not well-defined, Math. Notes, 2018.
- [Be07] * *M. Bestvina.* Knots: a handout for Summer Math Program. <http://www.math.utah.edu/~bestvina/HS07/knots-hs07.pdf>.
- [CDM12] * *S. Chmutov, S. Duzhin, J. Mostovoy.* Introduction to Vassiliev knot invariants, Cambridge Univ. Press, 2012. <http://www.pdmi.ras.ru/~duzhin/papers/cdbook>.
- [CG83] *J. H. Conway and C. M. A. Gordon,* Knots and links in spatial graphs, J. Graph Theory 7 (1983), 445–453.
- [Ka06] *L.H. Kauffman.* Formal Knot Theory, Dover Publications, 2006.
- [Ka06'] *L.H. Kauffman.* Remarks on Formal Knot Theory, arXiv:math/0605622 (note that the numbers and names of sections in table of contents i p. 1 are incorrect).
- [Ka87] *L.H. Kauffman.* On knots. Annals of Mathematics Studies. 115. Princeton University Press. 1987.
- [Pr95] * *V. V. Prasolov.* Intuitive topology. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1995.
- [PS96] * *V. V. Prasolov, A. B. Sossinsky* Knots, Links, Braids, and 3-manifolds. Amer. Math. Soc. Publ., Providence, R.I., 1996.
- [Sc] *M. Scharlemann.* Crossing changes, <http://web.math.ucsb.edu/~mgscharl/crossings.pdf>.
- [So89] * *A. Sossinsky.* Knots, links and their polynomials. Kvant, 1989, N4, http://kvant.mccme.ru/1989/04/uzly_zacepleniya_i_ih_polinomy.htm.
- [Sk15p] *A. Skopenkov.* Classification of knotted tori, Proc. A of the Royal Society of Edinburgh, to appear, arxiv: 1502.04470.
- [Sk16c] * *A. Skopenkov,* Embeddings in Euclidean space: an introduction to their classification, http://www.map.mpim-bonn.mpg.de/Embeddings_in_Euclidean_space:_an_introduction_to_their_classification, submitted to Boll. Man. Atl.
- [Sk16i] * *A. Skopenkov,* Isotopy, submitted to Boll. Man. Atl. <http://www.map.mpim-bonn.mpg.de/Isotopy>.
- [Sk18] * *A. Skopenkov.* Invariants of graph drawings in the plane, arXiv:1805.10237.
- [Sk14] * *A. Skopenkov.* Realizability of hypergraphs and Ramsey link theory, arxiv:1402.0658.
- [Sk] * *A. Skopenkov.* Algebraic Topology From Algorithmic Viewpoint, draft of a book, mostly in Russian, <http://www.mccme.ru/circles/oim/algor.pdf>.

Books, surveys and expository papers in this list are marked by the stars.

Уравнения Пелля для многочленов

Илья Иванов-Погодаев, Алексей Канель-Белов, Роман Крутовский, Игорь Мельников, Борис Френкин, Алексей Чиликов

А. ВВОДНАЯ СЕРИЯ. КЛАССИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ПЕЛЛЯ.

Вводная серия А относится к классическим фактам об уравнении Пелля $x^2 - Dy^2 = 1$ для целых чисел. Решение $(\pm 1, 0)$ называется *тривиальным*, а остальные – *нетривиальными*.

Задача А.1. Пусть (x_1, y_1) – решение уравнения Пелля, т.е. $x_1^2 - Dy_1^2 = 1$. Пусть $(x_1 + \sqrt{D}y_1)^n = x_n + \sqrt{D}y_n$. Докажите, что тогда (x_n, y_n) – тоже решение уравнения Пелля (отметим, что $x_{-n} = x_n, y_{-n} = -y_n$). Решение (x_n, y_n) называется *степенью решения* (x_1, y_1) . Введите понятие *произведения решений*.

Задача А.2. Докажите, что все нетривиальные решения (если существуют) являются степенью одного решения (x_1, y_1) (с точностью до знака при x).

Задача А.3. Докажите, что если D есть квадрат целого, то нетривиальных решений у уравнения Пелля нет.

В следующих пунктах серии считаем, что $D \neq t^2 \forall t \in \mathbb{Z}, D \in \mathbb{Z}$.

Задача А.4. Покажите, что существуют $M > 0$ и точка (x, y) с ненулевыми целыми координатами, что $|x^2 - Dy^2| \leq M$.

Задача А.5. С помощью леммы Минковского докажите, что существует $M > 0$, для которого таких точек бесконечно много.

Задача А.6. Докажите, что существует такое целое положительное число $k < M$, что уравнение $|x^2 - Dy^2| = k$ имеет бесконечно много решений.

Задача А.7. С помощью предыдущих пунктов докажите, что нетривиальное решение уравнения Пелля существует.

Задача А.8. Опишите все рациональные решения уравнения Пелля в общем виде.

В. УРАВНЕНИЯ ПЕЛЛЯ ДЛЯ МНОГОЧЛЕНОВ.

Задача В.1. Найдите все пары $(P(x), Q(x))$ многочленов над \mathbb{R} такие, что

$$P^2(x) - (x^2 - 1)Q^2(x) = 1.$$

Задача В.2. Решите уравнение Пелля для рациональных функций.

Задача В.3. Решите уравнения а) $P^2 + Q^2 = R^2$, б) $P^2 + Q^2 = 1$ для многочленов с комплексными коэффициентами.

Задача В.4. Докажите, что для $n > 2$ и для многочленов P, Q существуют комплексные числа ψ_1, ψ_2, ψ_3 , такие, что $\psi_i^n = -1$ и $P^n + Q^n$ делится на $(P - \psi_1 Q)(P - \psi_2 Q)(P - \psi_3 Q)$.

Задача В.5. Пусть $P^n + Q^n = R^n$. В условиях п. В4 докажите, что существуют такие многочлены R_1, R_2, R_3 , что $P - \psi_i Q = R_i^n$.

Задача В.6. Докажите, что для $n > 2$ уравнение Ферма $x^n + y^n = z^n$ для многочленов и для рациональных функций не имеет нетривиальных решений.

С. ПРИМЕНЕНИЯ ТЕОРЕМЫ КОЛЛАРА.

Под *нетривиальным решением* здесь понимается неконстантное решение.

Задача С.1. Решите уравнение Пелля, когда D есть квадрат многочлена.

Задача С.2. Рассмотрим уравнение над множеством многочленов из $\mathbb{Z}[x]$:

$$(1) \quad P^2(x) - (R^2(x) - 1)Q^2(x) = 1.$$

Здесь R – уже произвольный неконстантный многочлен, а не просто переменная.

Докажите, что множество решений состоит из степеней одного нетривиального: $(R, 1)$.

Задача С.3. Теорема Коллара *** Аналогичное утверждение верно для многочленов из $\mathbb{C}[x]$

Задача С.4. Решите уравнение (1) для случая, когда R – константа. Отдельно рассмотрите случай, когда $R^2 = 1$ и когда $R^2 \neq 1$.

Далее в серии С предполагается, что $R \neq \text{const}$. Кроме того, можно пользоваться теоремой Коллара.

Задача С.5. Докажите, что Q имеет вид $Q_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k+1} (R^2 - 1)^k R^{n-1-2k}$ для некоторого целого n . Выпишите аналогичную формулу для P .

Задача С.6. Докажите, что $Q_n \equiv n \pmod{R-1}$, то есть $Q_n - n = (R-1)S$, для некоторого многочлена S .

Задача С.7. Решите систему уравнений для многочленов из $\mathbb{C}[x]$

$$(2) \quad \begin{cases} X^2 - (R^2 - 1)Y^2 = 1 \\ Y - (R - 1)Z = V \\ V \cdot U = 1 \end{cases}$$

Задача С.8. Основная задача. Докажите, что для произвольного уравнения W в целых числах можно построить систему уравнений для многочленов из $\mathbb{C}[x]$, имеющую нетривиальное решение тогда и только тогда, когда имеет решение уравнение W .

D. АФФИННЫЕ МНОГОВБРАЗИЯ.

Задача D.1. Задайте следующие множества уравнениями или наборами уравнений:

- (1) эллипс;
- (2) пару прямых на плоскости;
- (3) окружность и эллипс;
- (4) окружность и параболу, проходящие через начало координат и касающиеся в этой точке, причем ось ординат – ось параболы;
- (5) экваториальную окружность на единичной сфере в трехмерном пространстве;
- (6) n -мерный тор (то есть декартово произведение n окружностей).

Определение 1. Идеалом в кольце R называется такое множество I , что

- (1) $I \cdot R \subset I$;
- (2) $I + I \subset I$.

Идеал называется главным, если он порождается одним элементом.

Определение 2. Пусть R некоторое кольцо. Будем называть аффинным многообразием над R множество X решений конечного числа алгебраических уравнений от нескольких переменных, то есть тех, которые можно записать в виде $P(x_1, \dots, x_n) = 0$, где P – многочлен.

Определение 3. Пусть X задано несколькими уравнениями в $R[x_1, \dots, x_n]$. Левые части этих уравнений порождают идеал в кольце $R[x_1, \dots, x_n]$, который мы будем обозначать $I(X)$. Кольцом функций $R[X]$ на X будем называть кольцо $R[x_1, \dots, x_n]/I(X)$.

Задача D.2. Убедитесь в том, что для каждого элемента из $R[X]$ в каждой точке многообразия X можно однозначно определить значение.

Задача D.3. Покажите, что кольцо функций полукубической параболы, заданной уравнением $y^2 = x^3$ в \mathbb{C}^2 , изоморфно кольцу $\mathbb{C}[t^2, t^3] \subset \mathbb{C}[t]$.

Задача D.4. Пусть X и Y аффинные многообразия и задано отображение $\varphi: R[Y] \rightarrow R[X]$. Постройте по φ отображение $f: X \rightarrow Y$, которое бы индуцировало φ .

Замечание 4. Нас будут интересовать только отображения между многообразиями, которые происходят из отображения соответствующих колец. Такие отображения будем называть алгебраическими.

Задача D.5. Рассмотрим на \mathbb{C}^2 действие группы $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ такое, что нетривиальный элемент группы переводит (x, y) в $(-x, -y)$. Это действие индуцирует автоморфизм кольца $\mathbb{C}[x, y]$. Покажите, что подкольцо, инвариантное относительно этого действия, изоморфно $\mathbb{C}[u, v, w]/(uv - w^2)$.

Постройте изоморфизм между аффинным многообразием, заданным этим кольцом, и фактором \mathbb{C}^2 по действию $\mathbb{Z}/2$ (как топологическими пространствами).

Пусть I некоторый идеал в кольце $R[x_1, \dots, x_n]$. Многообразие, соответствующее кольцу $R[x_1, \dots, x_n]/I$ будем обозначать $V(I)$. Радикалом идеала I будем называть множество $\text{rad}(I)$ всех таких элементов кольца $R[x_1, \dots, x_n]$, что некоторая их степень содержится в I .

Теорема 5 (Теорема Гильберта о нулях). Пусть k некоторое алгебраически замкнутое поле. Тогда для любого идеала $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$ выполнено

$$I(V(I)) = \text{rad}(I).$$

Задача D.6. Используя теорему, покажите, что точки аффинного многообразия X над \mathbb{C} взаимнооднозначно соответствуют максимальным идеалам кольца $\mathbb{C}[X]$.

Задача D.7. Пусть X и Y — аффинные многообразия над \mathbb{C} . Пусть задано отображение $\varphi: \mathbb{C}[Y] \rightarrow \mathbb{C}[X]$. Постройте по нему отображение из множества максимальных идеалов кольца $\mathbb{C}[X]$ в множество максимальных идеалов кольца $\mathbb{C}[Y]$, не используя теорему Гильберта о нулях. Убедитесь, что это отображение совпадает с отображением, построенным в задаче 4.

Определение 6. Отображение $\iota: X \rightarrow Y$ между аффинными многообразиями будем называть замкнутым вложением, если $R[X] = R[Y]/I$ и отображение колец функций, соответствующее ι является отображением факторизации $R[Y] \rightarrow R[Y]/I$.

Замечание 7. Легко заметить, что любое аффинное многообразие над \mathbb{C} канонически замкнуто вложено в некоторое \mathbb{C}^n .

Задача D.8. Задайте двукратную обмотку как замкнутое вложение окружности в тор.

Задача D.9. Рассмотрим естественное вложение $(\mathbb{C} \setminus 0)^n$ в \mathbb{C}^n . Покажите, что это вложение является алгебраическим отображением. Докажите, что оно не является замкнутым вложением.

Задача D.10. Покажите, что стандартное вложение $\varphi: \mathbb{C}[t^2, t^3] \hookrightarrow \mathbb{C}[t]$ не задает замкнутое вложение прямой в полукубическую параболу.

Е. ОТОБРАЖЕНИЯ АФФИННЫХ МНОГООБРАЗИЙ.

Не забывайте подходить с вопросами и за подсказками!

Определение 8. Множество R с двумя ассоциативными коммутативными бинарными операциями \cdot и $+$ (умножением и сложением) называется кольцом, если выполнены следующие свойства:

(1) $\exists 0 \in R: 0 + a = a + 0 = a \quad \forall a \in R;$

- (2) $\forall a \in R \exists b \in R: a + b = b + a = 0;$
 (3) $\exists 1 \in R: 1 \cdot a = a \cdot 1 = a \quad \forall a \in R;$
 (4) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c;$
 (5) $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c.$

Замечание 9. Основными кольцами (кроме множеств целых, рациональных, вещественных и комплексных чисел), которые нас интересуют, являются кольца многочленов, а так же кольца функций на аффинных многообразиях.

Замечание 10. Многочлены $P_1(x_1, \dots, x_n), \dots, P_k(x_1, \dots, x_n)$, которые задают аффинное многообразие X , порождают также некоторое подмножество $I = P_1 \cdot R[x_1, \dots, x_n] + \dots + P_k \cdot R[x_1, \dots, x_n] \subset R[x_1, \dots, x_n]$. Все элементы этого множества зануляются на точках многообразия.

Такое множество является идеалом в кольце функций на X .

Задача Е.1. Пусть I некоторый идеал в кольце многочленов $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$. Через X_I обозначим многообразие, соответствующее данному идеалу. Докажите следующие свойства:

- (1) $I \subseteq J \Rightarrow X_J \subseteq X_I;$
 (2) $X_I \cup X_J = X_{I \cdot J} = X_{I \cap J};$
 (3) если $I + J = R$, то $I \cdot J = I \cap J;$
 (4) идеалы $I_1 = \langle x \rangle$ и $I_2 = \langle x^2 \rangle$ в кольце $\mathcal{R}[x]$ задают одинаковые множества нулей.

Задача Е.2. (1) Докажите, что все идеалы кольца многочленов от одной переменной $\mathcal{R}[x]$ являются главными. Такие кольца называются кольцами главных идеалов (КГИ).

(2) Приведите пример кольца, не являющегося КГИ.

Определение 11. Дан идеал $I \subseteq R$. Факторкольцом R/I называется множество классов эквивалентности элементов кольца R по модулю I : $a \sim b \Leftrightarrow a - b \in I$. Умножение и сложение на факторкольце задаются следующим образом:

- (1) $(a + I) + (b + I) = (a + b) + I;$
 (2) $(a + I) \cdot (b + I) = (a \cdot b) + I.$

Задача Е.3. Проверьте корректность данного определения. Докажите, что факторкольцо является кольцом.

Замечание 12. В задаче 2 из листочка "Многообразия и уравнения" мы уже неявно работали с факторкольцом. А именно, мы показали, что для многообразия X_I над \mathbb{C} , заданного идеалом I (X_I — это множество общих нулей всех элементов из I), все значения полиномиальных функций на X_I определяются факторкольцом $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/I$.

Определение 13. Пусть многообразие X над R задано идеалом $I(X)$ (здесь мы подразумеваем, что набор уравнений порождает некоторый идеал). Тогда кольцом функций $R[X]$ многообразия X называется факторкольцо $R[x_1, \dots, x_n]/I(X)$.

Замечание 14. В задаче 5 из предыдущей серии было показано, что любой идеал $I \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ имеет конечный набор порождающих $\Gamma = \{g_1, \dots, g_k\}$.

Рассмотрим идеал G , порожденный наибольшими мономами всех элементов из I . В задаче 5 мы доказали, что старшие мономы элементов Γ также порождают идеал G . Такой набор образующих идеала I принято называть базисом Грёбнера.

Рассмотрим на \mathbb{C}^2 действие инволюции $\varphi: (x, y) \rightarrow (-x, -y)$ (т.е. $\varphi^2 = Id$). Эта инволюция задает отображение φ^* из кольца $\mathbb{C}[x, y]$ в себя. Покажите, что множество инвариантных элементов относительно φ^* образует подкольцо изоморфное $\mathbb{C}[u, v, w]/(uv - w^2)$.

Определение 15. Отображение $\iota: X \rightarrow Y$ между аффинными многообразиями будем называть замкнутым вложением, если $R[X] = R[Y]/I$ и отображение, соответствующее ι является отображением факторизации $R[Y] \rightarrow R[Y]/I$.

Замечание 16. Легко заметить, что любое аффинное многообразие над \mathbb{C} канонически замкнуто вложено в некоторое \mathbb{C}^n .

Задача Е.4. Рассмотрим естественное вложение $(\mathbb{C} \setminus 0)^n$ в \mathbb{C}^n . Покажите, что это вложение является алгебраическим отображением. Докажите, что оно не является замкнутым вложением.

Задача Е.5. Покажите, что стандартное вложение $\varphi: \mathbb{C}[t^2, t^3] \hookrightarrow \mathbb{C}[t]$ не задает замкнутое вложение прямой в полукубическую параболу.

Задача Е.6. В этой задаче мы построим нетривиальное алгебраическое вложение прямой \mathcal{R} в \mathcal{R}^3 . Для начала рассмотрим отображение

$$\varphi: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}^2: t \mapsto (t^3 - 3t, t^4 - 4t^2)$$

Убедитесь, что образ этого отображения в \mathcal{R}^2 является проекцией на плоскость узла трилистника, из которого выкинули одну точку (она лежит на бесконечности).

Придумайте такой многочлен $h(t)$, что отображение

$$t \mapsto (\varphi(t), h(t))$$

переводит прямую в трилистник в \mathcal{R}^3 , из которого выкинули одну точку (она так же будет лежать на бесконечности).

Замечание 17. Очевидно, что не у любой системы полиномиальных уравнений есть решение. Например, у системы $\{x-y=0, x-y+1=0\}$ нет решений. Заметим, что идеал, который порождают эти два многочлена совпадает со всем кольцом $R[x, y]$ так как $1 \in I$.

Таким образом, если идеал I порождается элементами g_1, \dots, g_k и существуют элементы $h_1, \dots, h_k \in R[x_1, \dots, x_n]$, такие, что

$$g_1 h_1 + \dots + g_k h_k = 1,$$

то I совпадает со всем $R[x_1, \dots, x_n]$. В следующей задаче мы доказываем, что если $1 \notin I$, то найдется общее решение для всех элементов I .

Задача Е.7 (Слабая теорема Гильберта о нулях). Любой собственный идеал $I \subsetneq \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ задает непустое множество решений.

Докажем эту теорему в несколько шагов. Введем отображение подстановки числа $a \in \mathbb{C}$ на место первой координаты:

$$ev_a: \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \rightarrow \mathbb{C}[x_2, \dots, x_n]: f(x_1, \dots, x_n) \mapsto f(a, x_2, \dots, x_n).$$

- (1) Пусть $I \cap \mathbb{C}[x_1] = \langle p(x_1) \rangle$, $\deg p > 0$. Тогда существует $a \in \mathbb{C}$ такое, что $ev_a(I) \subsetneq \mathbb{C}[x_2, \dots, x_n]$.
- (2) Предположим, что $I \cap \mathbb{C}[x_1] = \emptyset$. Докажите, что найдется такое $a \in \mathbb{C}$ что, выполнено $ev_a(I) \subsetneq \mathbb{C}[x_2]$.
- (3) Предположим, что $I \cap \mathbb{C}[x_1] = \emptyset$. Докажите, что найдется такое $a \in \mathbb{C}$, что выполнено $ev_a(I) \subsetneq \mathbb{C}[x_2, \dots, x_n]$.
- (4) Докажите теорему.

F. КОМПЛЕКСНЫЙ СЛУЧАЙ.

Нам потребуется следующая теорема, которой был посвящен проект <https://www.turgor.ru/lktg/2007/2/index.php>.

Теорема Матиясевича. Не существует алгоритма, позволяющего по набору коэффициентов многочлена от нескольких переменных $H(x_1, \dots, x_m)$ установить, имеет ли он целочисленное решение или нет.¹

Мы рассмотрим комплексный случай, из которого вытекает и случай произвольного поля.

Серия F1. Разложение многочленов и подстановки.

¹На самом деле можно положить $m = 11$

Задача F.1. Докажите, что $P(x + P(x))$ делится на $P(x)$.

Задача F.2. Дан квадратный трехчлен $P(x) \neq \text{const}$ с целыми коэффициентами. Докажите, что существует целое n такое, что все простые делители числа $P(n)$ меньше $n/2019$.

Замечание. Аналогичный факт даже для кубического многочлена нам неизвестно. Мы можем доказать это для двучленов $ax^n + b$.

Задача F.3. Пусть $P(x_1, \dots, x_n), Q(x_1, \dots, x_n)$ – произвольные полиномы от n переменных. Пусть

$$\hat{P}(x_1, \dots, x_n, u) = P(x_1 + uQ(x_1, \dots, x_n), \dots, x_n + uQ(x_1, \dots, x_n))$$

Тогда существует $R(x_1, \dots, x_n, u)$, такой, что

$$\hat{P}(x_1, \dots, x_n, u) = P(x_1, \dots, x_n) + Q(x_1, \dots, x_n)R(x_1, \dots, x_n, u).$$

Задача F.4. Существует многочлен $H(x_1, \dots, x_n)$ такой, что при всех целых k таких, что $1 \leq k \leq 2019$ все многочлены $H(x_1, \dots, x_n) - k$ имеют нетривиальное разложение на множители.

Задача F.5. В предыдущей задаче можно выбрать $H(x_1, \dots, x_n)$ в виде $P_k Q_k + k$, где Q_i алгебраически независимы (т.е. нет ненулевого многочлена R такого, что $R(Q_1, \dots, Q_{2019}) \equiv 0$).

Задача F.6. Существуют такие семейства полиномов $H_m(x_1, \dots, x_m), P_m(x_1, \dots, x_m)$ для которых одновременно выполняются условия делимости

$$H_k(x_1, \dots, x_k) \mid (P_m(x_1, \dots, x_m) - k)$$

при всех $k \in \{1, \dots, m\}$, причем H_m и P_m существенно зависят от x_m и при этом H_s при $s < m$ от x_m не зависят.

Серия F2. Конструкция систем.

Задача F.7. Зададим многообразие $\mathcal{B}_{(d,e)}$ при помощи системы образующих и соотношений.

$$(3) \quad \begin{cases} X_{ij}^2 - (T_j^2 - 1)Y_{ij}^2 = 1 \\ Y_{ij} - (T_j - 1)Z_{ij} = V_{ij} \\ V_{ij}U_{ij} = 1 \\ T_{j+1} = \prod_{k=1}^j ((T_k^2 - 1)W_k) W_{j+1}^{m_{j+1}} \\ T_1 = \hat{P}(W_1, \dots, W_n) \end{cases}$$

где $1 \leq i \leq d, 1 \leq j \leq e, \{m_j\}_{j=1}^e$ достаточно быстро растущая последовательность целых чисел. При этом полином \hat{P} выберем таким образом, чтобы W_i был делителем $\hat{P}(W_1, \dots, W_n) - 3i$. (Этот полином можно построить явно (см. п.6 предыдущей серии).

Последовательность $\{m_j\}_{j=1}^e$ выбирается так, что в случае, когда все переменные, входящие в T_1 , принимают различные значения, многочлены T_j алгебраически независимы.

Задача F.8. Пусть для некоторого N выполнено $T_N = C_N \neq 0$ (т.е. T_N – ненулевая константа). Тогда все W_k при $k \leq N$ и все T_k при $k \leq N - 1$ являются константами.

Задача F.9. Задача о вложимости произвольного алгебраического многообразия \mathcal{A} над \mathbb{C} в произвольное алгебраическое многообразие \mathcal{B} алгоритмически неразрешима.

Pell equations for polynomials

Alexey Chilikov, Boris Frenkin, Ilya Ivanov-Pogodayev, Alexey Kanel-Belov,
Roman Krutovsky, Igor Melnikov

A. INTRODUCTORY CYCLE. THE CLASSICAL PELL EQUATION.

The introductory cycle A deals with some classical facts regarding the *Pell equation* $x^2 - Dy^2 = 1$ for integers. The solution $(\pm 1, 0)$ is called *trivial*, and all the others *nontrivial*.

Problem A.1. Let (x_1, y_1) be a solution of a Pell equation: $x_1^2 - Dy_1^2 = 1$. Let $(x_1 + \sqrt{D}y_1)^n = x_n + \sqrt{D}y_n$. Prove that (x_n, y_n) also is a solution of the Pell equation (observe that $x_{-n} = x_n, y_{-n} = -y_n$). The solution (x_n, y_n) is called a *power of the solution* (x_1, y_1) . Define the notion of the *product of solutions*.

Problem A.2. Prove that all nontrivial solutions (if any) are powers of a single solution (x_1, y_1) (up to the sign of x).

Problem A.3. Prove that if D is a square of an integer then the Pell equation has no nontrivial solutions.

Up to the end of the cycle we suppose $D \neq m^2 \forall m \in \mathbb{Z}, D \in \mathbb{Z}$.

Problem A.4. Prove that there exist $M > 0$ and a point with integer nonzero coordinates (x, y) such that $|x^2 - Dy^2| \leq M$.

Problem A.5. Using Minkowski lemma, prove that there exists $M > 0$ such that there is an infinite number of such points.

Problem A.6. Prove that there exists a positive integer $k < M$ such that the equation $|x^2 - Dy^2| = k$ has infinitely many solutions.

Problem A.7. Using the above items, prove that there exists a nontrivial solution of the Pell equation.

Problem A.8. Describe all rational solutions of a Pell equation in a general way.

B. PELL EQUATIONS FOR POLYNOMIALS.

Problem B.1. Describe all pairs of polynomials $(P(x), Q(x))$ over \mathbb{R} , such that

$$P^2(x) - (x^2 - 1)Q^2(x) = 1.$$

Problem B.2. Solve the Pell equation for rational functions.

Problem B.3. Solve the equations a) $P^2 + Q^2 = R^2$, b) $P^2 + Q^2 = 1$ for polynomials with complex coefficients.

Problem B.4. Prove that for $n > 2$ and for polynomials P, Q there exist complex numbers ψ_1, ψ_2, ψ_3 such that $\psi_i^n = -1$ and $P^n + Q^n$ is a multiple of $(P - \psi_1 Q)(P - \psi_2 Q)(P - \psi_3 Q)$.

Problem B.5. Suppose $P^n + Q^n = R^n$. In the conditions of item B4, prove that there exist polynomials R_1, R_2, R_3 such that $P - \psi_i Q = R_i^n$.

Problem B.6. Prove that for $n > 2$ the Fermat equation for polynomials and for rational functions $x^n + y^n = z^n$ has no nontrivial solutions.

C. APPLICATIONS OF KOLLAR THEOREM

Here a *nontrivial solution* means a non-constant solution.

Problem C.1. Solve the Pell equation if D is the square of a polynomial.

Problem C.2. Consider the following equation over polynomials from $\mathbb{Z}[x]$:

$$(1) \quad P^2(x) - (R^2 - 1)Q^2(x) = 1.$$

Here R is an arbitrary non-constant polynomial, not necessarily a variable.

Prove that the set of the solutions consists of the powers of a single nontrivial solution $(R, 1)$.

Problem C.3. The theorem of J.Kollar*.** *The similar statement is valid for polynomials from $\mathbb{C}[x]$.*

Problem C.4. *Solve the equation (1) for a constant R . Consider cases $R^2 = 1$ and $R^2 \neq 1$ separately.*

Up to the end of cycle C we assume $R \neq \text{const}$. Furthermore Kollar theorem may be used.

Problem C.5. *Prove that Q is of the form $Q_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k+1} (T^2 - 1)^k T^{n-1-2k}$ for some integer n . Find the similar formula for P .*

Problem C.6. *Prove that $Q_n \equiv n$ modulo $R^2 - 1$, that is, $Q_n - n = (R^2 - 1)S$ for some polynomial S .*

Problem C.7. *Solve the following system of equations for polynomials from $\mathbb{C}[x]$:*

$$(2) \quad \begin{cases} X^2 - (R^2 - 1)Y^2 = 1 \\ Y - (R^2 - 1)Z = V \\ V \cdot U = 1. \end{cases}$$

Problem C.8. Main problem. *Prove that for an arbitrary equation W for integers there exists a system of equations for polynomials from $\mathbb{C}[x]$, which has a solution iff W has a solution.*

D. AFFINE VARIETIES

Problem D.1. *Define the following sets by equations or systems of equations:*

- (1) an ellipsis;
- (2) a pair of lines in the plane;
- (3) a circle and an ellipsis;
- (4) a circle and a parabola both containing the origin and touching in this point, Y -axis being the axis of the parabola;
- (5) the equatorial circle on the unit sphere in the space;
- (6) the n -dimensional torus (the Cartesian product of n circles).

Definition 1. Let S be a ring. An *affine variety* over R is a set X of the solutions of a finite system of algebraic equations in several variables, that is, the equations of the form $P(x_1, \dots, x_n) = 0$ for some polynomial P .

Definition 2. Let X be determined by some equations over $R[x_1, \dots, x_n]$. The left parts of these equations generate an ideal in $R[x_1, \dots, x_n]$, in the sequel denoted by $I(X)$. The ring of functions $R[X]$ on X will mean the ring $R[x_1, \dots, x_n]/I(X)$.

Problem D.2. *Ensure that in every point of X the value of every element from $R[X]$ can be uniquely determined.*

Problem D.3. *Show that the ring of functions on the semicubic parabola determined by the equation $y^2 = x^3$ over \mathbb{C} is isomorphic to $\mathbb{C}[t^2, t^3] \subset \mathbb{C}[t]$.*

Problem D.4. *Let X and Y be affine varieties, and let $\varphi: R[Y] \rightarrow R[X]$ be an arbitrary map. Construct the corresponding map $f: X \rightarrow Y$ that induces φ .*

Remark 1. *We are interested only in those maps between varieties that stem from maps of the corresponding rings. Such maps will be called algebraic. Investigation of these maps enables us to get information about varieties from the algebraic structure of rings of functions.*

Problem D.5. *Consider the action of $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ on \mathbb{C}^2 such that the nontrivial element of the group takes (x, y) to $(-x, -y)$. This action induces an automorphism of the ring $\mathbb{C}[x, y]$. Show that the subring invariant under this action is isomorphic to $\mathbb{C}[u, v, w]/(uv - w^2)$.*

Construct an isomorphism (of topological spaces) between the affine variety determined by this ring, and the quotient space of \mathbb{C}^2 modulo $\mathbb{Z}/2$.

Let I be an ideal in $R[x_1, \dots, x_n]$. The variety corresponding to $R[x_1, \dots, x_n]/I$ will be denoted by $V(I)$. The radical of I is the set $\text{rad}(I)$ consisting of all elements from $R[x_1, \dots, x_n]$ such that some their power belongs to I .

Theorem 2 (Hilbert Nullstellensatz). Let k be an algebraically closed field. Then for every ideal $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$ we have

$$I(V(I)) = \text{rad}(I).$$

Problem D.6. Using the above theorem, show that there is a bijection between the points of an affine variety X over \mathbb{C} and the maximal ideals of the ring $\mathbb{C}[X]$.

Problem D.7. Let X and Y be two affine varieties over \mathbb{C} . Given a map $\varphi: \mathbb{C}[Y] \rightarrow \mathbb{C}[X]$, construct a map from the set of maximal ideals of $\mathbb{C}[X]$ to the set of maximal ideals of $\mathbb{C}[Y]$ not using Nullstellensatz. Ensure that this map is identical to the map constructed in Problem 4.

Definition 3. A map $\iota: X \rightarrow Y$ between affine varieties will be called a closed embedding if $R[X] = R[Y]/I$ and the map of the rings of functions, corresponding to ι is the factorization map $R[Y] \rightarrow R[Y]/I$.

Remark 4. Clearly every affine variety over \mathbb{C} is canonically embedded into some \mathbb{C}^n .

Problem D.8. Define a twofold cable as a closed embedding of a circle into a torus.

Problem D.9. Consider the natural embedding $(\mathbb{C} \setminus 0)^n \hookrightarrow \mathbb{C}^n$. Show that this is an algebraic map. Prove that it is not a closed embedding.

Problem D.10. Show that the standard embedding $\varphi: \mathbb{C}[t^2, t^3] \hookrightarrow \mathbb{C}[t]$ does not determine a closed embedding of a line into a semicubic parabola.

E. MAPS OF AFFINE VARIETIES

Don't forget to apply with questions and for hints!

Definition 5. A set R with two associative commutative binary operations \cdot and $+$ (multiplication and addition) is called a (commutative associative) ring if the following conditions are fulfilled:

- (1) $\exists 0 \in R: 0 + a = a + 0 = a \quad \forall a \in R;$
- (2) $\forall a \in R \exists b \in R: a + b = b + a = 0;$
- (3) $\exists 1 \in R: 1 \cdot a = a \cdot 1 = a \quad \forall a \in R;$
- (4) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c;$
- (5) $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c.$

Remark 6. We will be interested mainly (except the rings of integers, rational, real and complex numbers) in rings of polynomials as well as rings of functions on affine varieties.

Remark 7. Polynomials $P_1(x_1, \dots, x_n), \dots, P_k(x_1, \dots, x_n)$ that determine an affine variety X , also generate the set of functions $I = P_1 \cdot R[x_1, \dots, x_n] + \dots + P_k \cdot R[x_1, \dots, x_n] \subset R[x_1, \dots, x_n]$. All these functions vanish at the points of the variety.

Such a subset is an ideal in the ring of functions on X .

Definition 8. An ideal of a ring R is a set I such that

- (1) $I \cdot R \subset I;$
- (2) $I + I \subset I.$

An ideal is called principal if it is generated by a single element.

Problem E.1. Let I be an ideal of the polynomial ring $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$. Let X_I be the variety corresponding to this ideal. Prove the following properties:

- (1) $I \subseteq J \Rightarrow X_J \subseteq X_I;$
- (2) $X_I \cup X_J = X_{I \cdot J} = X_{I \cap J};$
- (3) if $I + J = R$ then $I \cdot J = I \cap J;$
- (4) the ideals $I_1 = \langle x \rangle$ and $I_2 = \langle x^2 \rangle$ of the ring $\mathcal{R}[x]$ determine the same set of zeroes.

Problem E.2. (1) Prove that in the ring $\mathcal{R}[x]$ of polynomials in a single variable, all ideals are principal. Such rings are called rings of principal ideals (RPI).

(2) Give an example of a ring which is not a RPI.

Definition 9. Given an ideal $I \subseteq R$. The quotient ring R/I is the set of equivalence classes of elements from R modulo I : $a \sim b \Leftrightarrow a - b \in I$. Multiplication and addition in the quotient ring are defined by the following formulas:

$$(1) (a + I) + (b + I) = (a + b) + I;$$

$$(2) (a + I) \cdot (b + I) = (a \cdot b + I).$$

Problem E.3. Check correctness of the above definition. Prove that the quotient ring is a ring.

Remark 10. In Problem 2 from the cycle “Varieties and equations” we already did implicitly use a quotient ring. Namely we have shown that for a variety X_I over \mathbb{C} determined by the ideal I (X_I is the set of common zeroes for all elements from I) the values of the polynomial functions over X_I are determined by the quotient ring $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/I$.

Definition 11. Let a variety X over R be determined by an ideal $I(X)$ (here we assume that a set of equations determines an ideal). Then the ring of (polynomial) functions $R[X]$ over X is the quotient ring $R[x_1, \dots, x_n]/I(X)$.

Remark 12. In Problem 5 of the preceding cycle it was shown that any ideal $I \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ is generated by some finite set of elements $\Gamma = \{g_1, \dots, g_k\}$.

Consider the ideal G generated by the leading monomials of all elements from I . In Problem 5 we have proved that the leading monomials of the elements from Γ also generate G . Such a set of generators for I is called a Groebner basis.

Definition 13. A map $\iota: X \rightarrow Y$ between affine varieties is called a closed embedding if $R[X] = R[Y]/I$ and the map corresponding to ι is the map of factorization $R[Y] \rightarrow R[Y]/I$.

Remark 14. Clearly any affine variety over \mathbb{C} has a canonical closed embedding to some \mathbb{C}^n .

Problem E.4. Here we construct a nontrivial algebraic embedding of a line \mathcal{R} into \mathcal{R}^3 . To begin with, consider the map

$$\varphi: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}^2: t \mapsto (t^3 - 3t, t^4 - 4t^2).$$

Ensure that its image in \mathcal{R}^2 is the projection to the plane from a trefoil with a single point removed (to infinity).

Find a polynomial $h(t)$ such that the map

$$t \mapsto (\varphi(t), h(t))$$

transforms a line to a trefoil in \mathcal{R}^3 with a single point removed (also to infinity).

Remark 15. Obviously not every system of polynomial equations has a solution. For instance, the system $\{x - y = 0, x - y + 1 = 0\}$ has no solution. Observe that the ideal generated by these two polynomials coincides with the whole ring $R[x, y]$ because $1 \in I$.

So if an ideal I is generated by elements g_1, \dots, g_k and for some $h_1, \dots, h_k \in R[x_1, \dots, x_n]$ we have

$$g_1 h_1 + \dots + g_k h_k = 1$$

then I coincides with $R[x_1, \dots, x_n]$. In the next problem we prove that if $1 \notin I$ then there exists a solution common for all elements of I .

Problem E.5 (Weak Hilbert Nullstellensatz). Every proper ideal $I \subsetneq \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ determines a nonempty set of solutions.

The proof consists of several steps. Consider the map which replaces the first coordinate by some number $a \in \mathbb{C}$:

$$ev_a: \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \rightarrow \mathbb{C}[x_2, \dots, x_n]: f(x_1, \dots, x_n) \mapsto f(a, x_2, \dots, x_n).$$

- (1) Suppose $I \cap \mathbb{C}[x_1] = \langle p(x_1) \rangle$, $\deg p > 0$. Then there exists $a \in \mathbb{C}$ such that $ev_a(I) \subsetneq \mathbb{C}[x_2, \dots, x_n]$.
- (2) Suppose $I \cap \mathbb{C}[x_1] = \emptyset$. Prove that for some $a \in \mathbb{C}$ we have $ev_a(I) \subsetneq \mathbb{C}[x_2]$.
- (3) Suppose $I \cap \mathbb{C}[x_1] = \emptyset$. Prove that for some $a \in \mathbb{C}$ we have $ev_a(I) \subsetneq \mathbb{C}[x_2, \dots, x_n]$
- (4) Prove the theorem.

F. THE COMPLEX CASE.

We require the following theorem that was the subject of the project
<https://www.turgor.ru/lktg/2007/2/index.php> .

Matiyasevich theorem. *There is no algorithm to check existence of an integer root for a polynomial $H(x_1, \dots, x_m)$ in several variables, using the set of its coefficients.*¹

We will consider the complex case which implies the case of an arbitrary field.

Cycle F1. Decomposition of polynomials, and substitutions.

Problem F.1. *Prove that $P(x + P(x))$ is a multiple of $P(x)$.*

Problem F.2. *Given a square trinomial $P(x) \neq \text{const}$ with integer coefficients. Prove that there exists an integer n such that all prime divisors of $P(n)$ are less than $n/2019$.*

Remark. *The similar fact is unknown even for cubic polynomials. We can prove it for binomials $ax^n + b$.*

Problem F.3.

Let $P(x_1, \dots, x_n)$, $Q(x_1, \dots, x_n)$ be arbitrary polynomials in n variables. Suppose

$$\widehat{P}(x_1, \dots, x_n, u) = P(x_1 + uQ(x_1, \dots, x_n), \dots, x_n + uQ(x_1, \dots, x_n))$$

Then there exists $R(x_1, \dots, x_n, u)$ such that

$$\widehat{P}(x_1, \dots, x_n, u) = P(x_1, \dots, x_n) + Q(x_1, \dots, x_n)R(x_1, \dots, x_n, u).$$

Problem F.4. *There exists a polynomial $H(x_1, \dots, x_n)$ such that for all integer k with $1 \leq k \leq 2019$ all polynomials $H(x_1, \dots, x_n) - k$ have a nontrivial factor decomposition.*

Problem F.5. *In the above problem we can choose $H(x_1, \dots, x_n)$ in the form $P_k Q_k + k$ where Q_i are algebraically independent (there is no nonzero polynomial R such that $R(Q_1, \dots, Q_{2019}) \equiv 0$).*

Problem F.6.

There exist families of polynomials $H_m(x_1, \dots, x_m)$, $P_m(x_1, \dots, x_m)$ which both fulfil the conditions of divisibility

$$H_k(x_1, \dots, x_k) \mid (P_m(x_1, \dots, x_m) - k)$$

for all $k \in \{1, \dots, m\}$, and furthermore H_m and P_m essentially depend on x_m but H_s for $s < m$ don't depend on x_m .

Cycle F2. Construction of systems.

Problem F.7. *Let us determine the variety $\mathcal{B}_{(d,e)}$ by the system of generators and relations:*

$$(3) \quad \begin{cases} X_{ij}^2 - (T_j^2 - 1)Y_{ij}^2 = 1 \\ Y_{ij} - (T_j - 1)Z_{ij} = V_{ij} \\ V_{ij}U_{ij} = 1 \\ T_{j+1} = \prod_{k=1}^j ((T_k^2 - 1)W_k) W_{j+1}^{m_j+1} \\ T_1 = \widehat{P}(W_1, \dots, W_n) \end{cases}$$

where $1 \leq i \leq d$, $1 \leq j \leq e$, $\{m_j\}_{j=1}^e$ is a sequence of integers with rather fast growth. The polynomial \widehat{P} is to be chosen so that W_i is a divisor of $\widehat{P}(W_1, \dots, W_n) - 3i$. (This polynomial can be constructed explicitly, see item 6 of the preceding cycle.)

¹In fact it suffices to take $m = 11$.

The sequence $\{m_j\}_{j=1}^e$ is to be chosen so that if all variables in T_1 are different then the polynomials T_j are algebraically independent.

Problem F.8. Suppose we have $T_N = C_N \neq 0$ for some N (so T_N is a nonzero constant). Then all W_k for $k \leq N$ and all T_k for $k \leq N - 1$ are constant.

Problem F.9. The problem of embeddability of an arbitrary algebraic variety \mathcal{A} over \mathbb{C} into an arbitrary algebraic variety \mathcal{B} is algorithmically unsolvable.

Об алгоритмической неразрешимости проблемы вложимости алгебраических многообразий над полем нулевой характеристики

А. Я. Канель-Белов, А. А. Чиликов^{*†‡§¶}

1 июля 2019 г.

Аннотация

Мы показываем, что для двух аффинных многообразий над произвольным полем характеристики ноль не существует в общем виде алгоритма проверки наличия вложения одного алгебраического многообразия в другое. Более того, мы устанавливаем это для аффинных многообразий, чьи координатные кольца заданы образующими и определяющими соотношениями. Более того, одно из этих многообразий можно взять аффинным пространством, а в случае поля вещественных чисел – аффинной прямой.

1 Введение

Задача классификации алгебраических многообразий с точностью до изоморфизма представляется одной из центральных задач алгебраической геометрии. Чрезвычайно интересной и фундаментальной является

^{*}College of Mathematics and Statistics, Shenzhen University, Shenzhen, 518061, China

[†]BIU

[‡]Московский Физико-Технический Институт, факультет инноваций и высоких технологий, лаборатория продвинутой комбинаторики и сетевых приложений

[§]Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана, факультет Информатика и системы управления, кафедра ИУ-8 Информационная безопасность,

[¶]Passware, Research Department, chilikov@passware.com

задача об алгоритмической разрешимости проверки наличия изоморфизма.

Близкой задачей является задача о вложимости многообразий. В общем виде эта задача формулируется так:

Пусть \mathcal{A} и \mathcal{B} – два алгебраических многообразия. Определить, существует ли вложение \mathcal{A} в \mathcal{B} .

В случае, когда многообразия заданы каким-либо конструктивным способом (например, системами уравнений и образующими), эта задача естественным образом приводит к следующей – придумать алгоритм, позволяющий по заданным многообразиям установить существование вложения (даже без его явного построения) или же отсутствие такового. Иными словами, к вопросу об алгоритмической разрешимости проблемы вложимости.

Вопросы об алгоритмической разрешимости различных классов задач в неявной форме ставились еще в XIX веке (например, Десятая проблема Гильберта о диофантовых уравнениях). Формализация понятия алгоритма, проведенная в работах Тьюринга, Черча, Геделя и иных авторов в 30-е годы XX века, дала толчок к активному исследованию данных вопросов, но к сожалению это не отразилось в должной мере на алгебраической геометрии. Одним из наиболее примечательных результатов, достигнутых в этой области, стало полученное Ю. В. Матиясевичем отрицательное решение Десятой проблемы Гильберта ([1]). Исследования в этой области активно продолжаются и в наши дни (см. например [2], [4], [5], [6], [7], [8], [9]).

В данной работе мы рассмотрим вопрос об алгоритмической разрешимости задачи вложимости многообразий над полями \mathbb{R} и \mathbb{C} .

Иными словами, о существовании алгоритма, позволяющего определить по уравнениям, задающим \mathcal{A} и \mathcal{B} , существует ли искомое вложение.

Полученные результаты естественным образом обобщаются на многие другие поля нулевой характеристики.

Мы показываем, что для двух аффинных многообразий над произвольным полем характеристики ноль не существует в общем виде алгоритма проверки наличия вложения.

Мы это проверяем для аффинных многообразий, чьи координатные кольца заданы образующими и определяющими соотношениями.

В частном случае, когда $\mathcal{A} = A$ – аффинная прямая, соответствующее вложение задается полиномами от одной переменной. Эти полиномы

должны удовлетворять уравнениям, задающим \mathcal{B} . При этом отображения не должны быть константными (иначе все \mathcal{A} отображается в одну точку \mathcal{B} , что не является вложением). Соответственно, вопрос о существовании вложения эквивалентен вопросу о существовании у системы уравнений, задающих \mathcal{B} , неконстантных решений в кольце многочленов $\mathbb{F}[t]$ над основным полем \mathbb{F} .

В более общем случае, когда $\mathcal{A} = A^m$ – m -мерная аффинная плоскость, отображение задается полиномами от m переменных. Для того, чтобы оно было вложением, необходимо чтобы эти полиномы были алгебраически независимыми (т.е. соответствующее расширение имело степень трансцендентности m).

В нашей работе установлено, что проблема вложимости алгоритмически неразрешима для случая, когда основным полем является поле вещественных чисел \mathbb{R} или поле комплексных чисел \mathbb{C} .

Авторы выражают благодарность J. Kollar за предоставленные им новые результаты об уравнениях Пелля и ценные замечания.

Данная работа была проведена с помощью Российского Научного Фонда Грант N 17-11-01377.

2 Предварительные сведения

2.1 Уравнения Пелля для многочленов

Уравнением Пелля над кольцом \mathcal{R} называется уравнение вида

$$X^2 - \lambda Y^2 = 1 \tag{1}$$

где $\lambda \in \mathcal{R}$ – параметр, а X и Y – неизвестные. Решения также ищутся в кольце \mathcal{R} .

Описание множества решений уравнения Пелля над различными кольцами является интересной и сложной задачей. В данном разделе мы приведем некоторые сведения об уравнениях Пелля, поскольку они будут играть центральную роль в наших дальнейших конструкциях. Для наших целей будут интересны уравнения Пелля над кольцом многочленов от одной или нескольких переменных над полем \mathbb{F} , а также один из частных случаев уравнения Пелля – уравнение

$$X^2 - (T^2 - 1)Y^2 = 1 \tag{2}$$

где $T \in \mathcal{R}$ – некоторый заданный параметр.

Решения уравнения $X^2 - \lambda Y^2 = 1$ для произвольного λ образуют абелеву группу относительно операции

$$\circ : (X, Y) \circ (X', Y') = (XX' + \lambda YY', XY' + X'Y)$$

В любом решении можно поменять знак как при X , так и при Y . Смена знака при Y приводит к получению обратного элемента (относительно операции \circ), а одновременная смена знака при X и Y – к умножению на решение $(-1, 0)$, которое само является элементом порядка 2 в этой группе. Единичным элементом в этой группе является $(1, 0)$.

Для случая $\lambda = T^2 - 1$, где T – многочлен над \mathbb{F} , существует также очевидное решение $(T, 1)$. Применяя к нему операцию \circ , получаем целую серию решений. Если T – многочлен, отличный от константы, то все эти решения будут различными.

Значительно менее тривиальным является вопрос о точной структуре группы решений. Оказывается, что в интересных нам случаях вся она (с точностью до упомянутой выше замены знаков) порождается одним единственным элементом («примитивным» решением).

Похожие утверждения для различных случаев доказаны в [2], [3]. Окончательное решение для важного нам случая $\mathcal{R} = \mathbb{F}[t]$ и $\lambda = T^2 - 1$, где $T \in \mathbb{F}[t] \setminus \mathbb{F}$ было получено J. Kollar и сообщено авторам в частной переписке (результат готовится к публикации).

Имеет место весьма нетривиальная

Теорема 1 (J. Kollar) *Если T – многочлен над F , не являющийся константой, то группа (относительно операции \circ решений (2) (как и в классическом целочисленном случае) порождена элементом $(T, 1)$.*

Иными словами, множество решений уравнения (2) представимо в виде $\{\pm 1, 0\} \cup \{(\pm X_N, \pm Y_N)\}$, где $X_N = \sum_{k=0}^{\lfloor N/2 \rfloor} \binom{N}{2k} (T^2 - 1)^k T^{N-2k}$, $Y_N = \sum_{k=0}^{\lfloor N/2 \rfloor} \binom{N}{2k+1} (T^2 - 1)^k T^{N-1-2k}$ для некоторого целого положительного N .

2.2 Многочлены и делимость

Нам потребуется еще несколько вспомогательных утверждений, связанных с делимостью многочленов от многих переменных.

Основным результатом данного раздела будет построение полинома \hat{P} и семейства полиномов W_k от нескольких переменных, удовлетворяющих условиям делимости $W_k \mid (\hat{P} - 3k)$. Эти полиномы будут существенно использованы в построениях из раздела 4 (и не требуются для случая вещественных чисел).

Приводимые здесь рассуждения в целом основаны на идеях, обсуждавшихся в [10], задача 2. Проект на конференции школьников был основан на задаче, поставленной С. В. Конягиным: *Дан многочлен $P(x)$ с целочисленными коэффициентами. верно ли что найдется такое n , что все простые делители $P(n)$ меньше n .* С. В. Конягин решил задачу для многочлена вида $ax^n + b$. Идея, изложенная ниже позволяет решить ее для квадратного трехчлена. Общее решение нам не известно.

Начнем с наблюдения:

Лемма 1 Пусть $P(x_1, \dots, x_n), Q(x_1, \dots, x_n)$ – произвольные полиномы от n переменных над полем \mathbb{F} . Пусть

$$P^{[1]}(x_1, \dots, x_n, u) = P(x_1 + uQ(x_1, \dots, x_n), \dots, x_n + uQ(x_1, \dots, x_n))$$

Тогда существует $R(x_1, \dots, x_n, u)$, такой, что

$$P^{[1]}(x_1, \dots, x_n, u) = P(x_1, \dots, x_n) + Q(x_1, \dots, x_n)R(x_1, \dots, x_n, u)$$

Из данной леммы вытекает

Теорема 2 Пусть C_1, \dots, C_m – некоторые константы из произвольного поля \mathbb{F} . Тогда существуют такие семейства полиномов $H_m(x_1, \dots, x_m), P_m(x_1, \dots, x_m)$ с коэффициентами из \mathbb{F} , для которых одновременно выполняются условия делимости $H_k(x_1, \dots, x_k) \mid (P_m(x_1, \dots, x_m) - C_k)$ при всех $k \in \{1, \dots, m\}$, причем H_m и P_m существенно зависят от x_m и при этом H_s при $s < m$ от x_m не зависят. Оба эти семейства могут быть эффективно построены.

▷ Индукция по m – числу переменных, \vec{x} обозначает набор (x_1, \dots, x_m) .

База индукции. Для $m = 1$ утверждение очевидно. Например, можно положить $H_1(x_1) = x_1, P_1(x_1) = x_1 + 1$.

Индуктивный переход. Пусть для некоторого m соответствующие семейства уже построены. Положим $P_{mk}^{[1]} = P_m - C_k$ и

$$Q_m(\vec{x}) = \prod_{k=1}^m P_{mk}^{[1]}(\vec{x}) = \prod_{k=1}^m (P_m(\vec{x}) - C_k) \quad (3)$$

Рассмотрим полином

$$\tilde{P}_m(x_1, \dots, x_m, u) = P(x_1 + uQ_m(\vec{x}), \dots, x_m + uQ_m(\vec{x})) \quad (4)$$

В силу леммы 1 $\tilde{P}_m(\vec{x}, u)$ представляется в виде

$$P_m(\vec{x}) + Q_m(\vec{x})R_m(\vec{x}, u) \quad (5)$$

Обозначая $\tilde{P}_{mk}^{[1]} = \tilde{P}_m - C_k$, получаем для него аналогичное представление

$$\tilde{P}_{mk}^{[1]}(\vec{x}, u) = P_{mk}^{[1]}(\vec{x}) + Q_m(\vec{x})R_m(\vec{x}, u) \quad (6)$$

По предположению индукции для P_m выполнены условия делимости: $H_k \mid P_{mk}^{[1]}$. Поскольку Q_m также делится на $P_{mk}^{[1]}$, имеем

$$\tilde{P}_{mk}^{[1]}(\vec{x}, u) = P_{mk}^{[1]}(\vec{x})R'_{mk}(x_1, \dots, x_m, u) \quad (7)$$

где

$$R'_{mk}(\vec{x}, u) = 1 + R_m(\vec{x}, u) \cdot \frac{Q_m(\vec{x})}{P_{mk}^{[1]}(\vec{x})} \quad (8)$$

Это означает, что полином $\tilde{P}_m(\vec{x}, u)$ делится на $P_{mk}^{[1]}$, а следовательно, и на H_k (при всех $k \in \{1, \dots, m\}$).

Таким образом, сконструированный нами полином \tilde{P}_m (от $m + 1$ переменной) выглядит подходящим кандидатом в качестве нового P_{m+1} . Осталось лишь выбрать подходящий H_{m+1} , и добиться для выполнения условия делимости для $k = m + 1$.

Запишем искомое условие делимости: $H_{m+1} \mid \tilde{P}_{m,m+1}^{[1]}$. В силу формул (7) и (8) получаем

$$\tilde{P}_{m,m+1}^{[1]}(\vec{x}, u) = P_{m,m+1}^{[1]}(\vec{x})R'_{m,m+1}(\vec{x}, u) \quad (9)$$

где

$$R'_{m,m+1}(\vec{x}, u) = 1 + R_m(\vec{x}, u) \cdot \frac{Q_m(\vec{x})}{P_{m,m+1}^{[1]}(\vec{x})} \quad (10)$$

Для выполнения условий делимости достаточно положить

$$\begin{cases} H_{m+1}(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}) = R'_{m,m+1}(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}) \\ P_{m+1}(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}) = \tilde{P}_m(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}) \end{cases} \quad (11)$$

Из построения ясно, что H_{m+1} и P_{m+1} (в отличие от H_s при $s < m + 1$) существенно зависят от переменной x_{m+1} .

Дополненные семейства полиномов будут удовлетворять условиям делимости при всех $k \in \{1, \dots, m + 1\}$, что и доказывает утверждение леммы. \square

Теперь мы можем легко построить искомые полиномы \hat{P} и W_k , удовлетворяющие условию $W_k \mid (\hat{P} - 3k)$ при всех $k \in \{1, \dots, n\}$. Действительно, для этого достаточно положить $C_k = 3k$, построить по теореме 2 семейства P_k, H_k длины n , и положить $W_k(x_1, \dots, x_n) = H_k(x_1, \dots, x_n)$ и $\hat{P}(x_1, \dots, x_n) = P_n(x_1, \dots, x_n)$.

3 Случай вещественных чисел

Нашей ближайшей целью будет установление алгоритмической неразрешимости задачи о вложимости многообразий над полем \mathbb{R} . Для этого мы рассмотрим более частный вопрос о вложимости аффинной прямой в заданное многообразие, и сконструируем специальный класс многообразий, для представителей которого невозможно установить существование вложения по определяющим соотношениям.

Результаты данного параграфа сформулированы для случая основного поля \mathbb{R} , но естественным образом обобщаются на случай произвольного упорядоченного поля нулевой характеристики.

Здесь и далее мы будем существенно опираться на классические результаты о неразрешимости диофантовых уравнений [1]. Назовем *семейством полиномов Матиясевича* семейство полиномов $Q(\sigma_1, \dots, \sigma_\tau, x_1, \dots, x_s)$ для которого задача о существовании решения при данном наборе параметров полинома алгоритмически неразрешима. Как установлено в [1], такое семейство полиномов существует.

Теперь перейдем непосредственно к построению искомого класса многообразий. Для этого нам потребуется несколько вспомогательных конструкций.

Рассмотрим аффинное пространство размерности $5d + 1$. Координаты в этом пространстве назовем X_i, Y_i, Z_i, U_i, W_i ($1 \leq i \leq d$) и T . Зададим многообразие $B_{(d)}$ при помощи системы образующих и соотношений.

$$\begin{cases} X_i^2 - (T^2 - 1)Y_i^2 = 1 \\ Y_i - (T - 1)Z_i = V_i \\ V_i U_i = 1 \end{cases} \quad (12)$$

где $1 \leq i \leq d$.

Исследуем решения этой системы.

Очевидно, что при фиксированном значении i допустимые значения координат X_i, Y_i, Z_i, U_i, W_i определяются одним и тем же значением T . Таким образом, многообразие представляет собой объединение «слоев», соответствующих различным значениям T . При этом каждый из этих слоев является прямой суммой d одинаковых многообразий, а именно, допустимых решений «короткой» системы:

$$\begin{cases} X^2 - (T^2 - 1)Y^2 = 1 \\ Y - (T - 1)Z = V \\ VU = 1 \end{cases} \quad (13)$$

Решения же системы (13) полностью описываются следующим утверждением:

Лемма 2 *Для любого решения системы (13) выполняется:*

1. U и V – ненулевые константы в $\mathbb{F}[t]$ ($\deg U = \deg V = 0$);
2. Для T, X и Y возможны три случая:
 - (a) $T = \pm 1$, при этом $X = \pm 1$ и Y – любое;
 - (b) T – константа, отличная от ± 1 , при этом X и Y – также некоторые подходящие константы из \mathbb{F} (при этом значение X определяет значение Y с точностью до знака, и наоборот);
 - (c) T – полином, отличный от константы, и при этом $X = \pm 1$, $Y = 0$ или $X = \pm \hat{X}_N$, $Y = \pm \hat{Y}_N$, где

$$\begin{cases} \hat{X}_N(T) = \sum_{k=0}^{[N/2]} \binom{N}{2k} (T^2 - 1)^k T^{N-2k} \\ \hat{Y}_N(T) = \sum_{k=0}^{[N/2]} \binom{N}{2k+1} (T^2 - 1)^k T^{N-1-2k} \end{cases}$$

для некоторого целого положительного N .

▷ Первая часть очевидна.

Вторая часть утверждения в случае 2с непосредственно следует из теоремы 1.

В случае $T = \pm 1$ первое уравнение системы не накладывает вообще никаких ограничений на Y . Второе уравнение, в свою очередь, влечет $Y = (T - 1)Z + V$. При любом выборе $V \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ и $Z \in \mathbb{F}[t]$ соответствующее решение существует и единственно.

Если же T – константа, отличная от ± 1 то прямое вычисление показывает, что Y и $Z = (Y - V)/(T - 1)$ также являются константами.

Более того, допустимое множество значений X и Y в этом случае описывается ранее найденной последовательностью. Однако теперь значения будут уже не полиномами, а константами.

□

Таким образом, структура полученного множества существенно зависит от T .

Для случая $2c$ заметим еще один важный факт.

Лемма 3 *Если $\deg T > 0$, то $V = Y \bmod (T - 1) = N$ для некоторого целого N и $Z = (Y - N)/(T - 1)$.*

▷ При $\deg T > 0$ уравнение $Y - (T - 1)Z = V$ в совокупности с ранее показанным условием $\deg V = 0$ означает, что остаток от деления многочлена Y на многочлен T есть в точности константа $V \in \mathbb{F}$. Легко видеть, что в выражении для Y все слагаемые делятся на $T - 1$ без остатка, за исключением слагаемого, отвечающего $k = 0$. Оно равно $\binom{N}{1}T^{N-1} = N \bmod (T - 1)$. Таким образом, значение V в любом решении исходной системы должно быть целым числом N . Прямой подсчет показывает, что $Z = (Y - N)/(T - 1)$. □

Таким образом, слои построенного множества $\mathcal{B}_{(d)}$ обладают понятной структурой. Возможны три случая.

1. При $\deg T > 0$ каждому набору целых чисел N_i соответствуют решения Y_i и X_i , являющиеся многочленами, и определенные с точностью до знака, а также константы $V_i = N_i$ и $U_i = 1/V_i$ и $Z_i = (Y_i - V_i)/(T - 1)$.
2. При $\deg T = 0$ и $T \neq \pm 1$ имеем константные решения для Y_i , выбираемые из заданной последовательности. Значения X_i , Z_i , V_i и U_i также являются константами и определяются выбранными значениями Y_i .

3. При $T = \pm 1$ получаем $X_i = \pm 1$, для произвольно выбранных констант V_i и полиномов Z_i определяем $U_i = 1/V_i$ и $Y_i = (T - 1)Z_i + V_i$.

Все вышеприведенные рассуждения справедливы для произвольного основного поля \mathbb{F} . Теперь используем специфику случая $\mathbb{F} = \mathbb{R}$.

Перейдем к пространству размерности $5d + 2$, обозначим новую координату через S , и дополним основную систему (12) уравнением

$$T = S^2 + 2 \quad (14)$$

Далее заметим, что из $T = S^2 + 2$ следует, что случай $T = \pm 1$ невозможен. Таким образом, все общие решения систем (12) и (14) либо являются константами (случай $\deg T = 0$, $T \neq \pm 1$), либо отвечают некоторому целочисленному набору параметров (N_1, \dots, N_d) . Назовем первые решения «плохими», а вторые – «хорошими».

Рассмотрим семейство полиномов Матиясевица $Q(\sigma_1, \dots, \sigma_\tau, x_1, \dots, x_s)$. Пусть $d \leq s$. Тогда, добавив новое уравнение

$$Q_\sigma(V_1, \dots, V_s) = 0 \quad (15)$$

к системам (12) и (14), мы получаем систему, задающую новое многообразие. Обозначим его $\mathcal{B}'_{(d),\sigma}$.

Если $Q_\sigma = 0$ не имеет целочисленных решений, то у исходной системы нет «хороших» решений. Тогда многообразие $\mathcal{B}'_{(d),\sigma}$ нульмерно, и вложений из A в $\mathcal{B}'_{(d)}$ не существует.

В противном случае для каждого решения N_1, \dots, N_s строятся явно неконстантные полиномы $S(t)$, $T(t)$, $Y_i(t)$, $X_i(t)$ и $Z_i(t)$, являющиеся решениями. Например, можно положить $S(t) = t$, $T(t) = t^2 + 2$, и определить X_i , Y_i и Z_i по формулам для случая 2с из леммы 2. Также однозначно определяются константы $V_i = N_i$ и $U_i = 1/N_i$. В совокупности эти функции задают вложение прямой в многообразие $\mathcal{B}'_{(d),\sigma}$.

Поскольку задача о существовании целочисленных решений для Q_σ алгоритмически неразрешима, то алгоритмически неразрешима и задача о вложимости A в $\mathcal{B}'_{(d),\sigma}$ (в частности, в $\mathcal{B}'_{(s),\sigma}$). Входом при этом являются уравнения, задающие $\mathcal{B}'_{(d),\sigma}$.

Таким образом, нами доказана

Теорема 3 *Задача о вложимости аффинной прямой над \mathbb{R} в произвольное алгебраическое многообразие \mathcal{B} (заданное образующими и соотношениями) алгоритмически неразрешима.*

Отсюда сразу следует:

Теорема 4 *Задача о вложимости произвольного алгебраического многообразия \mathcal{A} над \mathbb{R} в произвольное алгебраические многообразие \mathcal{B} алгоритмически неразрешима.*

4 Случай комплексных чисел

В комплексном случае ситуация сложнее, чем в вещественном. В самом деле, рассуждение для \mathbb{R} существенно опирается на тот факт, что уравнение $S^2 + a$ не имеет решений при $a > 0$ (отсюда следует, что $T = S^2 + 2 \neq \pm 1$). Однако в поле комплексных чисел это неверно. Таким образом, мы не можем исключить случай $T = \pm 1$ и $X_i = \pm 1$. В этом случае Y_i может быть задано, вообще говоря, произвольным образом.

Поэтому в случае основного поля \mathbb{C} мы немного усложним рассуждение. А именно, рассмотрим вопрос о вложимости аффинного пространства A^m в заданное многообразие \mathcal{B} . Нашей целью будет, как и раньше, сконструировать такой класс многообразий, для представителей которого (при некотором подходящем m) невозможно установить существование искомого вложения по определяющим соотношениям.

Результаты данного параграфа сформулированы для случая основного поля \mathbb{C} , но проходят и для произвольного поля нулевой характеристики, поскольку все коэффициенты у наших полиномов целые.

Зададим алгебраическое многообразие $\mathcal{B}_{(d,e)}$ при помощи системы образующих и соотношений.

$$\left\{ \begin{array}{l} X_{ij}^2 - (T_j^2 - 1)Y_{ij}^2 = 1 \\ Y_{ij} - (T_j - 1)Z_{ij} = V_{ij} \\ V_{ij}U_{ij} = 1 \\ T_{j+1} = \prod_{k=1}^j ((T_k^2 - 1)W_k) W_{j+1} \\ T_1 = \hat{P}(W_1, \dots, W_n) \end{array} \right. \quad (16)$$

где $1 \leq i \leq d$, $1 \leq j \leq e$. При этом полином \hat{P} выберем таким образом, чтобы W_j был делителем $\hat{P}(W_1, \dots, W_n) - 3j$. Полиномы с нужными свойствами были построены в разделе 2.2 (см. лемму 2).

Иными словами, мы «клонировем» основную систему (12) из предыдущего параграфа в большом числе экземпляров, и дополняем ее «свя-

зующими» соотношениями между параметрами T_j . Исследуем решения этой системы в $\mathbb{C}[t_1, \dots, t_m]$.

Совершенно очевидно, что соотношения для $X_{ij}, Y_{ij}, Z_{ij}, U_{ij}, V_{ij}$ при фиксированном T_j аналогичны ранее рассмотренным. Иными словами, при фиксированном наборе T_j множество решений есть прямая сумма слоев $\mathcal{B}_{(d)}$, ранее уже изученных. Однако при различных T_j соответствующие слои ведут себя по-разному. При этом наличие связей между T_j говорит о том, что возможно, не все варианты допустимы.

Как показывают результаты предыдущего раздела, для каждого j имеют место следующие важные случаи:

1. $T_j = \pm 1$;
2. $\deg T_j = 0, T_j \neq \pm 1$;
3. $\deg T_j > 0$.

Далее в тексте мы будем обозначать через C_i константы из основного поля \mathbb{C} (в частности, полиномы степени 0).

Для дальнейших рассуждений удобно сформулировать и доказать еще одно вспомогательное утверждение:

Лемма 4 Пусть для некоторого N выполнено $T_N = C_N \neq 0$. Тогда все W_k при $k \leq N$ и все T_k при $k \leq N - 1$ являются константами.

▷ Заметим, что произведение нескольких многочленов из $\mathbb{F}[t]$ является ненулевой константой в том и только в том случае, когда все сомножители являются также ненулевыми константами. Теперь докажем утверждение по индукции.

База индукции. При $N = 0$ имеем $T_1 = W_1 = C_1 \neq 0$ и утверждение очевидно.

Индуктивный переход. Пусть для $N - 1$ утверждение верно, и пусть $T_N = C_N \neq 0$. Поскольку $T_N = \prod_{k=1}^{N-1} ((T_k^2 - 1)W_k) W_N = C_N \neq 0$, сразу получаем что W_N – ненулевая константа. Также все $(T_k^2 - 1)$ являются ненулевыми константами. Следовательно, и все T_k – тоже константы. В частности, T_{N-1} – константа. Если при этом $T_{N-1} \neq 0$, то утверждение леммы для N следует из утверждения леммы для $N - 1$. Таким образом, осталось показать, что $T_{N-1} \neq 0$.

Но если $T_{N-1} = 0$, то поскольку $T_N = T_{N-1}(T_{N-1}^2 - 1)W_N$, то и $T_N = 0$, что невозможно. Таким образом, лемма 4 доказана. \square

Теперь необходимо рассмотреть несколько случаев.

Первый случай: среди T_j нет констант. В этом случае, все компоненты слоя соответствуют ранее изученным множествам $\mathcal{B}_{(d)}$ (для первого случая из предыдущего параграфа). Они параметризуются целочисленными наборами N_{ij} независимо друг от друга. Слой является прямой суммой соответствующих компонент.

Второй случай: среди T_j есть ненулевые константы, ни одна из которых не равна ± 1 . Пусть \hat{j} – максимальный из индексов этих констант. Тогда в силу леммы 4 при $j < \hat{j}$ мы имеем $T_j = C_j$. Иными словами, все предыдущие T_j – также константы. Одновременно с этим и W_j при $j \leq \hat{j}$ также будут константами.

В частности, $T_1 = \hat{P}(W_1, \dots, W_n)$ также будет ненулевой константой C_1 . Поскольку при этом все W_k являются делителями $\hat{P}(W_1, \dots, W_n) - 3k = C_1 - 3k$, то все они, за исключением, возможно, одного значения, также являются ненулевыми константами.

Этим единственным значением, очевидно, должно быть $\hat{j} + 1$ (разумеется, при $\hat{j} < e$). Действительно, если $\hat{j} < e$ и $W_{\hat{j}+1}$ – ненулевая константа, то и $T_{\hat{j}+1} = T_{\hat{j}}(T_{\hat{j}}^2 - 1)W_{\hat{j}+1}$ также будет ненулевой константой ($T_{\hat{j}} \neq \pm 1$), что противоречит выбору \hat{j} . Далее возможны еще два случая: $W_{\hat{j}+1} = 0$ или же $W_{\hat{j}+1}$ – неконстантный полином. В первом случае все последующие T_j будут нулями, а во втором они будут однозначно определяться значениями констант W_j и полиномом $W_{\hat{j}+1}$.

Третий случай: среди T_j есть константы, хотя бы одна из которых равна ± 1 . Обозначим соответствующий индекс через \hat{j} . В этом случае $T_{\hat{j}}^2 - 1 = 0$ и при всех $j > \hat{j}$ получаем $T_j = \prod_{k=1}^{j-1} ((T_k^2 - 1)W_k) W_j = 0$.

В силу леммы 4 при $j < \hat{j}$ мы имеем $T_j = C_j$. При этом $C_j \neq \pm 1$ (иначе $C_{j+1} = 0$). Аналогично и все W_j , за исключением, возможно, одного значения, также являются ненулевыми константами.

Рассмотрим семейство полиномов Матияевича $Q(\sigma, x_1, \dots, x_s)$. Проблема существования решения диофантова уравнения $Q(\sigma, V_{1j}, \dots, V_{sj}) = 0$ алгоритмически неразрешима. Пусть $d \leq s$. Тогда, добавив новые уравнения $Q(\sigma, V_{i1}, \dots, V_{is}) = 0$ к системе (16), мы получаем систему, задаю-

щую новое многообразие. Обозначим его $\mathcal{B}'_{(d,e),\sigma}$.

Лемма 5 *Если $Q_\sigma = 0$ не имеет целочисленных решений, то при $m \geq d + 2$ не существует вложения $\mathcal{A} = A^m$ в $\mathcal{B}'_{(d,e),\sigma}$.*

▷ Пусть искомое вложение существует. Тогда оно задается некоторой системой полиномов от m переменных. Соответствующие полиномы будут решениями системы (16). Значения координат U_{ij}, V_{ij} будут константами.

Поскольку $Q_\sigma = 0$ не имеет целочисленных решений, то у исходной системы нет решений для которых $\deg T_1 > 0$. Тогда возможные решения соответствуют второму либо третьему из рассмотренных выше случаев. Далее рассмотрим их отдельно.

Если имеет место второй случай, то все W_i , за исключением, быть может, одного, являются константами. Значения W_i однозначно параметризуют все значения T_j . Значения T_j в этом случае однозначно определяют все остальные координаты. Таким образом, образ соответствующего отображения имеет размерность 1. Следовательно, при $m \geq 2$ оно не может быть вложением.

В третьем случае также все W_i , за исключением, быть может, одного, являются константами. Значения W_i снова однозначно параметризуют все значения T_j . Однако при $T_{\hat{j}} = \pm 1$ для компоненты с номером \hat{j} мы находимся в условиях третьего случая из раздела 3. В этом случае $Z_{i\hat{j}}$ могут быть выбраны любыми, остальные же переменные однозначно ими определяются. Еще одна свободная переменная $W_{\hat{j}+1}$ может возникнуть по тем же соображениям, что и в предыдущем случае. Таким образом, образ соответствующего отображения имеет размерность $\leq d + 1$. Следовательно, при $m \geq d + 2$ оно не может быть вложением. □

Лемма 6 *Если Q_σ имеет целочисленные решения, то существует вложение аффинного пространства $\mathcal{A} = A^s$ в многообразие $\mathcal{B}'_{(d,s),\sigma}$.*

▷ Поскольку Q_σ имеет целочисленные решения, то для каждого такого решения N_1, \dots, N_s по любому заданному набору $T_j, 1 \leq j \leq s$, могут быть построены явно функции $U_{ij}(T_j), V_{ij}(T_j), Y_{ij}(T_j), X_{ij}(T_j)$ и $Z_{ij}(T_j)$, являющиеся решениями. Для окончания построения нужно осталось показать, что можно подобрать подходящие T_j (и W_j), чтобы выполнялись связывающие их уравнения.

Заметим, что T_j однозначно определяются по W_j . Сами же W_j нами уже построены при помощи полиномов H_j из теоремы 2. При этом каждый из H_j зависит от переменных x_1, \dots, x_j . Таким образом, задавая произвольную параметризацию для x_j мы получим подходящий полином H_j (а значит и W_j). Таким образом, W_j алгебраически независимы. Следовательно, в совокупности с остальными координатными функциями, они задают некоторое вложение аффинного пространства $\mathcal{A} = A^s$ в многообразие $\mathcal{B}'_{(d,s),\sigma}$. \square

Заметим, что при доказательстве отсутствия вложения в лемме 5 мы наложили некоторое дополнительное условие на d , но не на e . Напротив, для существования вложения (при наличии решений у Q_σ) в лемме 6 ограничения накладываются на e , но не на d . Это дает нам возможность согласовать параметры. Для этого достаточно положить $t = e = s$ и $d = s - 2$. В этом случае A^s вложимо в $\mathcal{B}'_{(s-2,s),\sigma}$, если Q_σ имеет целочисленные решения, и не вложимо в противном случае.

Поскольку задача о существовании целочисленных решений для Q_σ алгоритмически неразрешима, то алгоритмически неразрешима и задача о вложимости A^s в $\mathcal{B}'_{(s-2,s),\sigma}$ (входом при этом являются уравнения, задающие $\mathcal{B}'_{(s-2,s),\sigma}$).

Таким образом, нами доказана

Теорема 5 *Существует целое положительное s , для которого задача о вложимости аффинного пространства A^s над \mathbb{C} в алгебраические многообразия $\mathcal{B}'_{(s-2,s),\sigma}$ алгоритмически неразрешима.*

Отсюда сразу следуют:

Теорема 6 *Существует целое положительное s , для которого задача о вложимости аффинного пространства A^s над \mathbb{C} в произвольное алгебраические многообразия \mathcal{B} (заданное образующими и соотношениями) алгоритмически неразрешима.*

и

Теорема 7 *Задача о вложимости произвольного алгебраического многообразия \mathcal{A} над \mathbb{C} в произвольное алгебраические многообразия \mathcal{B} алгоритмически неразрешима.*

5 Заключение

В работе показана алгоритмическая неразрешимость проблемы вложимости двух алгебраических многообразий над полями вещественных чисел \mathbb{R} и комплексных чисел \mathbb{C} . Построен класс многообразий, для представителей которого алгоритмически неразрешима проблема существования вложения аффинной прямой над \mathbb{R} . Построен класс многообразий, для представителей которого алгоритмически неразрешима проблема существования вложения аффинного пространства размерности m над \mathbb{C} для достаточно большого m .

Результаты для \mathbb{C} обобщены на случай произвольного поля нулевой характеристики, а для \mathbb{R} – на случай произвольного упорядоченного поля нулевой характеристики.

Список литературы

- [1] *Матиясевич Ю. В.* Десятая проблема Гильберта. Москва, “Наука”, 1993.
- [2] *Denef J.* The diophantine problem for polynomial rings and fields of rational functions. Trans. Amer. Math. Soc. 242 (1978), p. 391-399
- [3] *Nazama F.* Pell equations for polynomials. Inquad. Mathem. N.S. 8 (3) (1997), p. 387-397
- [4] *Белов А. Я., Чиликов А. А.* Об алгоритмической разрешимости экспоненциально-диофантовых уравнений в кольцах положительной характеристики, Математические методы и приложения. Четвертый математический Симпозиум. М.:1997, с. 78–84.
- [5] *Белов А. Я., Чиликов А. А.* Об алгоритмической разрешимости экспоненциально-диофантовых уравнений в кольцах положительной характеристики, Курошевская Алгебраическая Конференция-98. Тезисы докладов. Под редакцией Ю. А. Бахтурина, А. И. Кострикина, А. Ю. Ольшанского — М.:1998, с. 144-145.
- [6] *Белов А. Я., Чиликов А. А.* Экспоненциальные диофантовы уравнения в кольцах положительной характеристики, Фундаментальная и Прикладная Математика, с.649-668, Т.6, Выпуск 3, 2000.

- [7] *Чиликов А. А. Ряды Тейлора алгебраических функций над полями положительной характеристики.*, *Фундаментальная и Прикладная Математика*, с.235-256, Т.7, Выпуск 1, 2001.
- [8] *Чиликов А. А. Ряды Тейлора алгебраических функций над полями положительной характеристики.*, *Международный алгебраический семинар, посвященный 70-летию научно-исследовательского семинара МГУ по алгебре, основанного О. Ю. Шмидтом.* 2000. Тезисы докладов. М.:2000, с. 56-58.
- [9] *A. Ya. Kanel-Belov., A. A. Chilikov Normal bases of algebras and Exponential Diophantine equations in rings of positive characteristic,* <https://arxiv.org/pdf/1712.00508.pdf>
- [10] *Шестая Летняя Конференция Турнира Городов,* <https://olympiads.mccme.ru/lktg/1994/all.htm>

Метод перераспределения зарядов*

Егор Бакаев, Вера Буланкина,
Александр Полянский, Андрей Рябичев, Григорий Челноков

Вместо введения

Данный проект посвящён одному методу, применяющемуся в теории графов. В частности, он используется для доказательства многих «структурных» результатов о графах, изображённых на плоскости, но не обязательно планарных. Своей популярностью он обязан тому факту, что применялся в доказательстве теоремы о четырёх красках¹. Речь идёт о так называемом *методе перераспределения зарядов*. По сути это обобщение подсчёта двумя способами для элементов графов, изображённых на плоскости, основанная на формуле Эйлера.

Наш проект достаточно непростой: вам предстоит самостоятельно понять, как работает данный подход. Ниже для ознакомления приведены три интересные задачи, которые позже встретятся в проекте — они довольно сложные и их решение мы рекомендуем отложить на потом.

1. Конечная конфигурация точек на плоскости называется *магической*, если выполняется следующее условие: точкам можно так приписать положительные числа, что сумма чисел на точках любой прямой, проходящей через хотя бы две из точек конфигурации, равна 1. Опишите все магические конфигурации.
2. Граф, изображённый на плоскости, называется *квазипланарным*², если у него не найдется *трёх* рёбер, попарно пересекающихся во внутренних точках. Докажите, что число рёбер в квазипланарном графе на n вершинах не превосходит $8n - 20$.
3. Граф называется *спичечным*, если он может быть изображён на плоскости так, чтобы все его рёбра являлись непересекающимися друг с другом отрезками длины 1. Докажите, что не существует спичечного графа, степень каждой вершины которого равна 5.

Наконец, стоит отметить, что в заключительном разделе проекта, который будет выдан после промежуточного финиша, можно найти открытые исследовательские задачи, которые, вероятно, решаются с помощью данного метода. Решение любой из них является результатом, достойным публикации.

*Здесь вы можете найти текущие результаты: <https://clck.ru/HMnm8>

¹Одна из сложных задач проекта будет связана с раскраской плоских графов, но саму теорему о четырёх красках мы не будем доказывать.

²Отметим, что если в этом определении заменить “трёх рёбер” на “двух рёбер” — получится обычное определение планарного графа, что и объясняет выбор термина “квазипланарный”.

Часто используемые обозначения

Через Γ обозначим граф³. Через $V(\Gamma)$ и $E(\Gamma)$ обозначим, соответственно, *множества вершин* и *ребер* графа Γ . Кроме того, если задано вложение Γ в плоскость, то $F(\Gamma)$ обозначает *множество граней* этого вложения Γ . Также напомним, что для связного плоского графа Γ выполняется *формула Эйлера*

$$|V(\Gamma)| - |E(\Gamma)| + |F(\Gamma)| = 2.$$

Обозначим *степень* вершины $v \in V(\Gamma)$ через $\deg(v)$, а через $\delta(\Gamma)$ и $\Delta(\Gamma)$ *минимальную* и *максимальную* степень вершины в $V(\Gamma)$ соответственно. Граф называется *n -регулярным*, если степень каждой вершины равна n . *Весом* ребра назовем сумму степеней его концов. Назовем *степенью грани* $\deg(f)$ длину цикла, образующего грань (таким образом, ребро считается дважды, если грань проходит по нему два раза).

Будем говорить, что граф правильно *раскрашен в k цветов*, если каждой вершине поставлено в соответствие одно из чисел от 1 до k (называемых цветами) так, что соседние вершины имеют разные цвета. Минимальное такое k , что граф Γ можно правильно покрасить в k цветов, называется *хроматическим числом* и обозначается через $\chi(\Gamma)$.

Подграф Γ' графа Γ называется *индуцированным*, если он содержит все ребра графа Γ , соединяющие вершины $V(\Gamma')$.

1 Подсчёт двумя способами

1.1. В некоторых клетках прямоугольной таблицы нарисованы звездочки. Известно, что для любой отмеченной клетки количество звездочек в её столбце совпадает с количеством звездочек в её строке. Докажите, что число строк в таблице, в которых есть хоть одна звездочка, равно числу столбцов таблицы, в которых есть хоть одна звездочка.

1.2. На фестиваль Зиланткон приехало E эльфов и D гномов. После фестиваля каждый гном подрался по крайней мере с одним эльфом, а каждый эльф — не более чем с десятью гномами. Также известно, что у каждого гнома соперников-эльфов было больше, чем у любого из них — соперников-гномов. Докажите, что $D \leq \frac{10}{11}E$.

1.3. В прямоугольной таблице m строк и n столбцов, где $m < n$. В некоторых клетках таблицы стоят звёздочки, так что в каждом столбце стоит хотя бы одна звёздочка. Докажите, что существует хотя бы одна такая звёздочка, что в одной строке с нею находится больше звёздочек, чем с нею в одном столбце.

1.4. В библиотеке на полках стоят книги, ровно k полок пусты. Книги переставили так, что теперь пустых полок нет. Докажите, что найдётся хотя бы $k + 1$ книга, которая теперь стоит на полке с меньшим числом книг, чем стояла раньше.

³Здесь и далее, если не оговаривается обратное, мы будем рассматривать графы без петель и кратных рёбер.

1.5. Таблица $n \times n$ заполнена **а)** нулями и единицами **б)** целыми неотрицательными числами так, что если число в какой-то клетке таблицы равно 0, то сумма всех чисел в ее кресте⁴ не меньше 1000. Найдите наименьшую возможную сумму чисел в таблице.

1.6. Пусть есть выпуклый n -угольник и выбрано m красных точек, отличных от вершин, таких, что любой отрезок между двумя вершинами многоугольника содержит по крайней мере одну красную точку. Тогда

$$m \geq n \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \right).$$

1.7. На плоскости дано n окружностей радиуса 1, причем известно, что каждая пересекается хотя бы с одной другой окружностью, и никакая пара не касается. Докажите, что все вместе окружности образуют не меньше n точек пересечения (в одной точке могут пересекаться более двух окружностей).

1.8. Квадрат разрезали на несколько треугольников. Докажите, что среди них найдётся два с общей стороной.

1.9*. На плоскости нарисовано n прямых в общем положении (любые две пересекаются и никакие три не проходят через одну точку). Докажите, что среди частей, на которые эти прямые разбивают плоскость, найдётся не менее $n - 2$ треугольников.

2 Задачи о графах

Планарные графы

В этом подразделе собраны задачи, исторически доказанные обсуждаемым методом. Как правило, это леммы из вполне серьезных статей. Однако по сложности эти задачи не превосходят тяжелые олимпиадные, так что мы сочли возможным дать их без дополнительных подсказок.

2.1. Дан выпуклый многогранник, у которого нет четырехугольных и пятиугольных граней. Докажите, что у него по крайней мере 4 треугольные грани.

2.2. Дан планарный граф с $\delta(\Gamma) \geq 2$, все циклы в котором длины по крайней мере 7. Докажите, что найдется ребро веса не больше 5.

2.3. Дан планарный граф Γ с $\delta(\Gamma) \geq 5$, все грани которого — треугольники, а также нет двух соседних вершин степени 5. Докажите, что найдётся грань, степени вершин которой равны 5, 6 и 6 соответственно.

2.4. Дан планарный граф Γ с $\delta(\Gamma) \geq 5$. Докажите, что найдется ребро веса не больше 11.

2.5. Дан планарный граф Γ с $\delta(\Gamma) \geq 3$. Докажите, что найдется такая пара из грани f и вершины v в ней, что $\deg(v) = 3$ и $\deg(f) \leq 5$ или $\deg(v) \leq 5$ и $\deg(f) = 3$.

2.6. Дан планарный граф Γ с $\delta(\Gamma) \geq 3$. Докажите, что у Γ есть не более чем 5-угольная грань, в которой степени всех вершин, кроме возможно одной, не превосходят 11.

⁴Крестом клетки называется объединение её столбца и её строки

Легкие раскраски

В предыдущих задачах этого раздела мы выводили локальные свойства графов из их глобальных свойств. Например, из информации о наименьшей степени вершины в графе мы делали вывод о наличии у него некоторых подграфов. Такого рода утверждения бывают полезны для доказательства оценки сверху хроматического числа графа.

2.7. а) Докажите, что любой планарный граф можно раскрасить в 6 цветов правильным образом.

б) Пусть для любого подграфа некоторого графа найдётся вершина графа степени не превосходящей $d - 1$ или индуцированный чётный цикл, степень каждой вершины которого не превосходит d . Докажите, что граф можно правильно раскрасить в d цветов.

Определение. У графа существует *очень легкая раскраска* в d цветов, если из графа можно получить пустой граф, последовательно удаляя вершины степени не больше $d - 1$. Также такое свойство графа называется d -разбиваемостью.

Комментарий. Например, в задаче 2.7а как раз нужно показать, что у графа есть очень легкая раскраска.

Определение. Граф называется *вершинно k -выбираемым*, если для любого способа приписать каждой вершине список из k цветов (списки у разных вершины не обязаны совпадать), найдётся способ выбрать для каждой вершины по одному цвету из списка, так что соседние вершины имеют разные цвета.

Аналогично определяется *реберная k -выбираемость*.

Вершинную k -выбираемость, как наиболее часто используемую, иногда называют просто k -выбираемостью. Минимальное такое k , что граф Γ является k -выбираемым называется *списочным хроматическим числом* и обозначается через $\text{ch}(\Gamma)$.

Как легко видеть, из вершинной k -выбираемости графа следует его раскрашиваемость в k цветов. В самом деле, могло так случиться, что каждой вершине достался список из одних и тех же цветов. Оказывается, что обратное утверждение неверно, то есть существует не k -выбираемый граф, который можно покрасить в k цветов.

2.8. а) Докажите, что для любого заданного k найдётся такое n , что полный двудольный граф $K_{n,n}$ не будет k -выбираемым. Хотя и является 2-раскрашиваемым, как любой двудольный граф.

б) Докажите, что цикл четной длины не только 2-раскрашиваем, но и 2-выбираем.

2.9. а) Дан планарный граф, внешняя грань которого это цикл $v_1 \dots v_k v_1$, остальные грани треугольные. Вершинам v_1 и v_2 соответствуют списки из двух цветов, каждой другой вершине внешней грани приписан список из трех цветов, а каждой внутренней вершине приписан список из 5 цветов. Докажите, что существует правильная списочная раскраска, соответствующая этим спискам.

б) Докажите, что для планарного графа Γ выполняется $\text{ch}(\Gamma) \leq 5$.

Определение. Будем говорить, что у графа Γ существует *легкая d -выбираемость* по отношению к индуцированным подграфам $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$, если из Γ можно получить пустой граф, последовательно удаляя эти индуцированные подграфы так, чтобы на момент удаления подграфа Γ_i из каждой из его вершин шло не более $d - \text{ch}(\Gamma_i)$ ребер в вершины, не входящие в Γ_i .

Обратите внимание, что у графа из задачи 2.8б есть легкая d -выбираемость.

Приём, обобщающий легкую выбираемость, можно применить и для доказательства тотальной раскраски.

Определение. Припишем каждой вершине и каждому ребру графа Γ список из нескольких цветов (списки могут быть разной длины). Теперь присвоим каждой вершине и каждому ребру цвет из соответствующего списка так, чтобы любые два соседних элемента⁵ имели разные цвета. Такую раскраску назовем *тотальной списочной раскраской графа*, соответствующей этим спискам.

2.10. Пусть Γ — планарный граф с $\Delta(\Gamma) \geq 11$. Каждой вершине назначен список из $\Delta(\Gamma)$, а каждому ребру — из $(\Delta(\Gamma) + 2)$. Тогда можно так выбрать цвета из списков, чтобы получить тотальную списочную раскраску.

3 Серьезные задачи

В этой главе собраны четыре задачи, решённые методом перераспределения зарядов и ставшие основными результатами опубликованных статей. К ним мы считаем уместным наметить несколько промежуточных шагов.

3.1 Спичечные графы

Определение. Граф называется *спичечным*, если его вершины — это точки на плоскости, а ребра могут соединять только пары вершин на расстоянии 1, и никакие два ребра не пересекаются (у них может быть общая вершина). (Заметим, что две вершины на расстоянии 1 могут быть и не соединены ребром.)

Ключевая задача 1. Докажите, что не существует 5-регулярного спичечного графа.

Замечание. На самом деле, в любом спичечном графе найдётся вершина степени меньше чем 5.

Определение. Граф называется *графом минимальных расстояний*, если его вершины — это точки на плоскости, среди которых нет двух на расстоянии меньше 1, а ребра — пары вершин на расстоянии 1.

⁵Две вершины называются соседними, если у них есть общее ребро; два ребра — если у них общая вершина; вершина и ребро — если это ребро выходит из этой вершины.

3.1.1. Дан граф минимальных расстояний на n вершинах, все вершины которого находятся в общем положении⁶. Докажите, что а) число рёбер меньше $5n/2$; б) найдётся постоянная c меньшая $5/2$ такая, что число рёбер не больше cn .

в) Граф называется *интересным*, если он является графом минимальных расстояний и для любой вершины графа она и все её соседи находятся в общем положении⁷. Докажите, что для любого $c < 5/2$ найдётся интересный граф с не менее чем $c|V(\Gamma)|$ ребрами.

3.1.2. Решите ключевую задачу 1.

3.1.3*. Докажите, что в 4-регулярном спичечном графе не менее 20 вершин.

3.2 Квазипланарные графы

Определение. Будем говорить, что граф *нарисован на плоскости* если его вершинам поставлены в соответствие различные точки плоскости, а ребрам — (Жордановы) кривые, соединяющие вершины (концы ребра), и не проходящие через остальные вершины.

Это определение носит вспомогательный характер, с его помощью определяют разные типы графов. Например, планарные графы — те, которые можно нарисовать на плоскости вообще без пересечения ребер. Можно по-разному ослаблять требование отсутствия пересечений⁸. Каждое из этих ослаблений условия дает свое расширение класса планарных графов.

Определение. Граф называется *квазипланарным*, если его можно нарисовать на плоскости так, чтобы любые два ребра пересекались не более чем в одной точке, и не было трех попарно пересекающихся ребер.

Ключевая задача 2. а) Квазипланарный граф на n вершинах содержит не более $8n - 20$ ребер.

б) Попробуйте усилить утверждение предыдущей задачи. Интересуют как улучшения оценки, так и обобщения для других классов графов.

3.2.1. Пусть граф удовлетворяет дополнительному условию: не существует тройки ребер e_1, e_2, e_3 такой, что e_1 и e_2 выходят из одной вершины A , а ребро e_3 пересекает их во внутренних точках B и C , причем нет других точек пересечения на участках AB и AC . Докажите, что число ребер не больше $4n - 8$.

3.2.2. Без дополнительного условия из прошлой задачи докажите оценку на число ребер $10n - 20$. Скорее всего, при решении предыдущего пункта вы использовали такую систему зарядов, которая работает и здесь.

3.2.3. Решите ключевую задачу 2а. Скорее всего, при решении предыдущего пункта вы использовали такую систему зарядов, которая работает и здесь.

⁶То есть никакие три не лежат на одной прямой.

⁷при этом все вершины графа не обязаны быть в общем положении

⁸Например, требование, чтобы каждое ребро имело не более чем t пересечений, или чтобы среди ребер было не более d попарно пересекающихся и так далее.

3.3 Списочные покраски ребер

В этом разделе мы вновь затронем понятие легких раскрасок. Напомним, в чем состоит ключевая идея: мы доказываем, что найдется нужный подграф, который можно удалить из заданного графа, сводя вопрос раскраски данного графа к раскраске меньшего.

Треугольником в этом разделе будем называть цикл длины 3. Определим Γ как планарный граф с дополнительным условием: никакие два треугольника не имеют общего ребра.

Основная цель данного раздела — решить следующую задачу.

Ключевая задача 3. Докажите, что Γ является реберно $(\Delta(\Gamma) + 1)$ -выбираемым, если $\Delta(\Gamma) \geq 6$.

Замечание. Ключевая задача 3 верна и при $\Delta(\Gamma)$, равном 3 или 4, причем и не для планарных графов. При $\Delta(\Gamma) = 5$ граф является реберно $(\Delta(\Gamma) + 2)$ -выбираемым.

3.3.1. Докажите, что при $\Delta(\Gamma) \geq 7$ граф Γ является реберно $(\Delta(\Gamma) + 1)$ -выбираемым.

Таким образом, вами решена ключевая задача 3 в случае $\Delta(\Gamma) \geq 7$. Случай $\Delta(\Gamma) = 6$ требует дополнительных усилий.

3.3.2. В случае $\Delta(\Gamma) = 6$ нас интересует еще одна конфигурация: вершина степени 6, входящая в три треугольника, два из которых с набором степеней $(6, 6, 3)$, а третий — $(6, 6, 3)$, $(6, 5, 4)$ или $(6, 6, 4)$. Докажите, что при наличии такой конфигурации, можно свести вопрос раскраски Γ к вопросу раскраски его подграфа.

3.3.3. Наконец, докажите, что при $\Delta(\Gamma) = 6$ граф Γ содержит хотя бы один из трех типов подграфов⁹, позволяющих свести вопрос раскраски графа к раскраске меньшего графа.

3.4 Магические конфигурации

Определение. Конечная конфигурация точек на плоскости называется *магической*, если выполняется следующее условие: каждой точке можно так приписать положительное число, что любая прямая, проходящая через хотя бы две точки конфигурации, проходит через точки с суммой приписанных чисел равной в точности 1.

Ключевая задача 4. Описать все магические конфигурации.

Постановка этой задачи отчасти мотивирована теоремой Сильвестра.

Теорема Сильвестра. Пусть дано конечное множество точек на плоскости. Тогда или все точки лежат на одной прямой, или найдётся такая пара точек A и B из множества, что на прямой AB не лежат точки множества, отличные от A и B .

Нам потребуется следующая интересная конфигурация.

⁹Один из них вы нашли при решении задачи 3.3.1, другой подсказан в задаче 3.3.2, до третьего типа догадайтесь самостоятельно.

Определение. *Конфигурацией недоФано* называется следующая конфигурация из семи точек: A_1, A_2, A_3, A_4 в общем положении, оставшиеся три — это точки пересечения пар прямых: $B_1 = A_1A_2 \cap A_3A_4$, $B_2 = A_1A_3 \cap A_2A_4$ и $B_3 = A_1A_4 \cap A_2A_3$.

Оказывается, что нам будет удобнее рассуждать на двойственном языке.

3.4.0. а) *Опциональная задача, для тех, кто работает с проективной плоскостью.* Переведите задачу на двойственный язык. Во что переходит конфигурация недоФано?

б) *Опциональная задача для тех, кто не использует проективную плоскость.* Пусть на плоскости нарисованы точки и прямые. Придумайте отображение π , ставящее в соответствие картинке на плоскости картинку на сфере так, чтобы точке на плоскости соответствовал экватор¹⁰ на сфере, прямой на плоскости соответствовала пара противоположных точек на сфере (обратите внимание: образ прямой это не образ всех ее точек!), и отображение сохраняло бы инцидентность: если точка A лежит на прямой ℓ , то образ $\pi(\ell)$ лежит на экваторе $\pi(A)$. Выведите отсюда остальные естественные свойства отображения (образ прямой AB это пара точек, по которым пересекаются экваторы $\pi(A)$ и $\pi(B)$; образ пересечения прямых ℓ_1 и ℓ_2 — это экватор, содержащий пары противоположных точек $\pi(\ell_1)$ и $\pi(\ell_2)$). Во что переходит конфигурация недоФано?

3.4.1. Докажите теорему Сильвестра, используя формулу Эйлера и двойственный язык.

Конфигурация прямых называется *магической конфигурацией*, если она дуальна магической конфигурации точек. Теперь мы будем рассматривать только магические конфигурации прямых.

3.4.2. Пусть в магической конфигурации некоторой прямой (некоторому экватору) приписано число большее $\frac{1}{2}$. Докажите, что все остальные прямые (экваторы) пересекаются в одной точке (двух антиподальных точках).

Теперь рассматриваем только те конфигурации, в которых нет точки, протыкающей все прямые кроме, возможно, одной. Прямые, которым приписаны числа $\frac{1}{2}$, будем называть *красными*, остальные *синими*.

3.4.3. Докажите, что есть точка, в которой пересекаются ровно две синие и одна красная прямая (экватор). Напомним, что конфигурация состоит из прямых (экваторов), а не из точек.

3.4.4. Докажите, что в конфигурации есть синий четырехугольник разбиения с красными диагоналями.

Далее будем называть такой четырехугольнич *плохим*.

3.4.5. Докажите, что найдется синий треугольник разбиения, имеющий общую сторону с плохим четырехугольником.

Далее будем называть такой треугольник *плохим*.

¹⁰ *Экватором* на сфере называется окружность, получающаяся как пересечение сферы с плоскостью, проходящей через центр сферы

3.4.6. Докажите, что если плохой треугольник имеет общие стороны сразу с двумя плохими четырехугольниками, то наша конфигурация является двойственной конфигурацией недоФано.

Далее будем полагать, что каждый плохой треугольник имеет общую сторону с ровно одним плохим четырехугольником.

3.4.7. Докажите, что найдутся плохой треугольник t , его плохой четырехугольник d и их общая вершина A такие, что кусок разбиения, вертикальный¹¹ t относительно A , является четырехугольником.

3.4.8. Рассмотрим разбиение проективной плоскости (сферы) синими прямыми (экваторами). Докажите, что найдётся такая прямая (экватор), что среди частей разбиения, примыкающих к этой прямой (экватору), ровно две (четыре) являются треугольными.

3.4.9. Покажите, что случай, описанный в предыдущей задаче, тоже невозможен.

¹¹ Два куска разбиения с общей вершиной A называются *вертикальными относительно A* , если их углы при A вертикальны

4 Открытые исследовательские задачи

1. Графы минимальных расстояний.

Про графы минимальных расстояний на n вершинах известно, что число рёбер не превосходит $(2 + \frac{3}{7})n$, а также что существуют графы минимальных расстояний с по крайней мере $(2 + \frac{5}{16})n - 10\sqrt{n}$ рёбрами. Уточнение константы перед n в оценке сверху будет результатом, который можно опубликовать в виде научной статьи.

2. 4-регулярные спичечные графы.

Уточните оценку снизу на число вершин в 4-регулярном спичечном графе. На сегодняшний день наилучшая оценка снизу равна 34. Известен пример 4-регулярного спичечного графа на 52 вершинах. Улучшение оценки снизу будет очень интересно.

3. Линейность числа рёбер в графах с определёнными пересечениями.

Назовем граф H -свободным, если он не содержит H в качестве подграфа. На плоскости изображён граф Γ на n вершинах так, что никакие два его ребра не пересекаются в более чем одной точке. Рассмотрим граф Γ' , построенный на множестве его рёбер следующим образом: два ребра графа Γ соединим ребром тогда и только тогда, когда они пересекаются.

Гипотеза состоит в том, что для любого H найдётся такая константа c , что если граф Γ' является H -свободным, то выполняется неравенство $|E(\Gamma)| = |V(\Gamma')| \leq c|V(\Gamma)|$.

(Например, когда H — ребро, то Γ это планарный граф, а когда H — треугольник, Γ — квазипланарный.) Эта гипотеза доказана для полных графов K_n , где $n \leq 4$, циклов C_m , где $m \leq 6$, и полного двудольного графа $K_{2,3}$. Очень интересно получить результат про $K_{3,3}$, C_7 или любого другого графа не из данного списка.

4. Гипотеза Сильвестра.

Пусть на плоскости отмечено несколько точек, не лежащих на одной прямой. Прямую назовём *обычной*, если она содержит в точности две отмеченные точки. Точку назовём *обычной*, если через неё проходит обычная прямая.

Рассмотрим граф на множестве обычных точек. Две обычные точки соединим ребром, если через них проходит обычная прямая. Гипотеза состоит в том, что этот граф является полным тогда и только тогда, когда отмеченные точки образуют конфигурацию недоФано или лежат в общем положении.

Наиболее интересной и важной из указанных выше задач является задача 3.

Метод перераспределения зарядов*

Егор Бакаев, Вера Буланкина,
Александр Полянский, Андрей Рябичев, Григорий Челноков

1 Подсчёт двумя способами

1.1. В некоторых клетках прямоугольной таблицы нарисованы звездочки. Известно, что для любой отмеченной клетки количество звездочек в её столбце совпадает с количеством звездочек в её строке. Докажите, что число строк в таблице, в которых есть хоть одна звездочка, равно числу столбцов таблицы, в которых есть хоть одна звездочка.

Решение. Заменяем каждую звёздочку числом $1/k$, где k — количество звёздочек в её строке (столбце). Тогда сумма чисел в каждой непустой строке равна 1, следовательно, сумма всех чисел в таблице равна числу непустых строк. Но, аналогично, она равна и числу непустых столбцов.

1.2. На фестиваль Зиланткон приехало E эльфов и D гномов. После фестиваля каждый гном подрался по крайней мере с одним эльфом, а каждый эльф — не более чем с десятью гномами. Также известно, что у каждого гнома соперников-эльфов было больше, чем у любого из них — соперников-гномов. Докажите, что $D \leq \frac{10}{11}E$.

Решение. Дадим каждому эльфу заряд 1, тогда суммарный заряд равен E . Если эльф подрался с k гномами, то пусть отдаст каждому из них заряд $\frac{1}{k}$.

Если гном подрался с m эльфами, то каждый из них подрался не больше чем с $m - 1$ гномами ($m \leq 11$), а значит отдаст ему заряд не меньше $\frac{1}{m-1}$. Значит каждый гном получит заряд не меньше $\frac{m}{m-1}$, что не меньше $\frac{11}{10}$.

Тогда суммарный заряд гномов не меньше $\frac{11}{10}D$, при этом он равен E . Отсюда получаем неравенство $\frac{11}{10}D \leq E$, которое легко преобразуется к требуемому виду.

1.3. В прямоугольной таблице m строк и n столбцов, где $m < n$. В некоторых клетках таблицы стоят звёздочки, так что в каждом столбце стоит хотя бы одна звёздочка. Докажите, что существует хотя бы одна такая звёздочка, что в одной строке с ней находится больше звёздочек, чем с ней в одном столбце.

Решение. Дадим каждому непустому столбцу заряд -1 , а каждой непустой строке заряд 1. Тогда сумма зарядов отрицательна. Теперь пусть каждый ряд (столбец или строка) раздаст свой заряд поровну всем звездочкам, которые в нем стоят. Так как суммарный заряд отрицательный, то найдется звездочка с отрицательным зарядом. Она и является искомой, ведь ее столбец дал ей больший по модулю заряд, чем дала ее строка, а значит, в столбце меньше звездочек чем в строке.

1.4. В библиотеке на полках стоят книги, ровно k полок пусты. Книги переставили так, что теперь пустых полок нет. Докажите, что найдётся хотя бы $k + 1$ книга, которая теперь стоит на полке с меньшим числом книг, чем стояла раньше.

Решение. В этом решении будем следить только за изменением заряда книг. Пусть если книга сначала стоит на полке с n книгами, то она забирает у этой полки заряд $\frac{1}{n}$, и если в конце стоит на полке с m книгами, то она отдает полке заряд $\frac{1}{m}$. Тогда суммарный заряд книг уменьшился на k . Но заряд книги не может измениться больше чем на 1.

*Вопросы и замечания пишите на alexander.polyanskii@yandex.ru

Значит, есть по крайней мере $k + 1$ книг, которые отдали больше чем получили. Это как раз те книги, количество которых требовалось оценить.

1.5. Таблица $n \times n$ заполнена а) нулями и единицами б) целыми неотрицательными числами так, что если число в какой-то клетке таблицы равно 0, то сумма всех чисел в её кресте¹ не меньше 1000. Найдите наименьшую возможную сумму чисел в таблице.

Решение. а) Пусть в таблице стоит x единиц. Поместим в каждую клетку c с 1 заряд, равный $2n$. Раздадим заряд n поровну между нулями столбца клетки c , а другой заряд n — между нулями строки клетки c . Отметим, что суммарный заряд равен $2nx$.

Нулей всего $n^2 - x$. Пусть столбце с нулевой клеткой c' стоит s единиц, а в строке — t единиц. Тогда $s + t \geq 1000$. Итоговый заряд, который получит клетка c' , равен $sN/(N - s) + tN/(N - t)$. Докажите самостоятельно, что он не меньше $1000n/(n - 500)$. Значит,

$$2nx \geq \frac{1000n(n^2 - x)}{n - 500}.$$

Из последнего неравенства следует, что $x \geq 500n$.

1.6. Пусть есть выпуклый n -угольник и выбрано m красных точек, отличных от вершин, таких, что любой отрезок между двумя вершинами многоугольника содержит по крайней мере одну красную точку. Тогда

$$m \geq n \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \right).$$

Решение. В этом решении будем следить только за изменением заряда книг. Пусть если книга сначала стоит на полке с n книгами, то она забирает у этой полки заряд $\frac{1}{n}$, и если в конце стоит на полке с m книгами, то она отдаёт полке заряд $\frac{1}{m}$. Тогда суммарный заряд книг уменьшился на k . Но заряд книги не может измениться больше чем на 1. Значит, есть по крайней мере $k + 1$ книг, которые отдали больше чем получили. Это как раз те книги, количество которых требовалось оценить.

1.7. На плоскости дано n окружностей радиуса 1, причем известно, что каждая пересекается хотя бы с одной другой окружностью, и никакая пара не касается. Докажите, что все вместе окружности образуют не меньше n точек пересечения (в одной точке могут пересекаться более двух окружностей).

Решение. Дадим каждой точке пересечения заряд 1. Если она в пересечении k окружностей, то пусть отдаст им по $1/k$. Покажем, что теперь у каждой окружности заряд не менее 1.

Выберем на произвольной окружности s точку P , которая отдала этой окружности не больше, чем другие точки, пусть $1/m$. Тогда через P проходит $m - 1$ окружностей, пересекающихся с s в каких-то $m - 1$ различных точках, отличных от P . Таким образом, на s не менее m точек пересечения, и все они отдали ей хотя бы по $1/m$. Значит, каждая окружность получила заряд не менее 1. Следовательно, количество окружностей не превышает количество точек пересечения.

1.8. Квадрат разрезали на несколько треугольников. Докажите, что среди них найдётся два с общей стороной.

Решение. Предположим, нашлось разбиение, в котором никакие два треугольника не имеют общей стороны. Присвоим каждой вершине разрезания заряд, равный сумме сходящихся в ней углов треугольников. Таким образом, вершины бывают трех видов:

1. вершины квадрата — с зарядом $\frac{\pi}{2}$;
2. вершины, лежащие на стороне квадрата или на стороне одного из треугольников — с зарядом π ;

¹Крестом клетки называется объединение её столбца и её строки.

3. вершины, не лежащие на стороне квадрата или треугольника – с зарядом 2π .

Пусть есть a вершин второго типа и b вершин третьего типа. Тогда заряды в сумме дают $(a + 2b + 2)\pi$, следовательно, число треугольников равно $a + 2b + 2$.

Построим следующий плоский граф. Возьмём все вершины треугольников в качестве вершин. Проведём в каждом треугольнике по три ребра (см. рис. 1) и посадим на получившуюся треугольную грань заряд π . Остальные грани имеют не менее 3 вершин, разобьём их диагоналями на треугольники и посадим на каждый из них заряд 0.

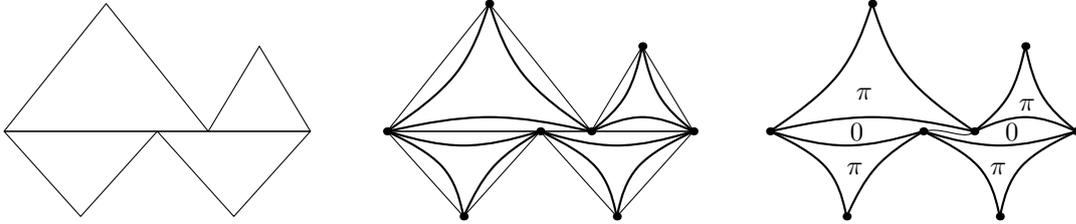


Рис. 1: Построение графа по разрезанию квадрата на треугольники.

Итак, в полученном плоском графе Γ все грани треугольные и имеют заряд 0 или π . По построению сумма зарядов равна $(a + 2b + 2)\pi$ и никакие две грани с зарядами π не граничат по ребру. Из равенства $2E(\Gamma) = 3F(\Gamma)$ и формулы Эйлера получаем соотношение

$$E(\Gamma) = 3V(\Gamma) - 6 = 3(a + b + 4) - 6.$$

Теперь пусть каждая грань отдаст по трети своего заряда смежным с ней рёбрам. Средний заряд рёбер будет равен $\frac{(a+2b+2)\pi}{3a+3b+12-6} \geq \frac{1}{3}\pi$. Но как минимум одно ребро имеет заряд 0. Именно, хотя бы одно ребро было проведено за пределами квадрата, его-то заряд точно нулевой. Следовательно, найдётся ребро, по которому граничат два треугольника с зарядом π , противоречие.

1.9*. На плоскости нарисовано n прямых в общем положении (любые две пересекаются и никакие три не проходят через одну точку). Докажите, что среди частей, на которые эти прямые разбивают плоскость, найдётся не менее $n - 2$ треугольников.

Решение. Нетрудно убедиться в том, что на этих прямых будет образовано $n(n - 2)$ отрезков, а на плоскости будет $m = \frac{n^2 - 3n + 2}{2}$ конечных граней. Пусть среди них t треугольников.

Рассмотрим отрезок AB . Пусть две другие данные прямые, кроме AB , проходящие через A и B , пересекаются в точке C . Назовем ту полуплоскость относительно AB , в которой лежит точка C , *верхней* для отрезка AB .

Дадим каждому отрезку AB заряд 1 и передадим этот заряд в ту смежную с ним грань, которая лежит в верхней для AB полуплоскости. Каждый треугольник получит заряд 3. Докажем, что остальные грани получают не больше 2. Если грань получает заряд от стороны AB , то внешние углы A и B этой грани в сумме больше 180° . Сумма внешних углов многоугольника равна 360° , так что получить заряд от трех ребер можно, только когда все эти три ребра попарно соседние, то есть только в случае треугольника.

Исходная сумма зарядов отрезков равна получившейся сумме зарядов граней, откуда получаем неравенство: $n(n - 2) \leq 3t + 2(m - t) = 2m + t$. Преобразовав, получим $n^2 - 2n \leq n^2 - 3n + 2 + t$. Отсюда $n - 2 \leq t$.

Другое решение см. статье [1].

2 Задачи о графах

Планарные графы

Выделим общую идею решения задач этого раздела.

Напомним формулу Эйлера для плоского графа Γ : $|V(\Gamma)| - |E(\Gamma)| + |F(\Gamma)| = 2$. Домножив обе части на (-2) и учитывая, что

$$2|E(\Gamma)| = \sum_{v \in V(\Gamma)} \deg v = \sum_{f \in F(\Gamma)} \deg f,$$

представим ее в виде

$$\sum_{v \in V(\Gamma)} (\alpha \deg v - 2) + \sum_{f \in F(\Gamma)} ((1 - \alpha) \deg f - 2) = -4. \quad (1)$$

Теперь, выбирая каждый раз подходящее α , будем получать различные тождества. Назначаем вершинам и граням заряды согласно тождеству, при этом суммарный заряд будет отрицательным. Решаем задачу от противного. Исходя из заданных на граф ограничений, указываем правила перераспределения зарядов так, чтобы в итоге заряд каждой вершины и каждой грани стал неотрицательным. Таким образом мы будем получать противоречие.

2.1. Дан выпуклый многогранник, у которого нет четырехугольных и пятиугольных граней. Докажите, что у него по крайней мере 4 треугольные грани.

Решение. Спроектируем многогранник на плоскость так, чтобы получился плоский граф. Умножив (1) при $\alpha = \frac{2}{3}$ на 3, получаем:

$$\sum_{v \in V(\Gamma)} (2 \deg v - 6) + \sum_{f \in F(\Gamma)} (\deg f - 6) = -12.$$

Дадим вершинам и граням заряды согласно получившемуся тождеству: назначим каждой вершине v заряд $(2 \deg v - 6)$, а каждой грани f заряд $(\deg f - 6)$. Так как у любой вершины степень не менее 3, то заряд у нее неотрицательный. Если $\deg f = 3$, то ее заряд -3 , а при $\deg f \geq 6$ ее заряд неотрицательный. Так как суммарный заряд равен -12 , то найдется хотя бы 4 грани с зарядом -3 , то есть 4 треугольные грани.

Заметим, что достаточно было назначить заряды и провести подсчет, а их перераспределение не понадобилось.

2.2. Дан планарный граф с $\delta(\Gamma) \geq 2$, все циклы в котором длины по крайней мере 7. Докажите, что найдется ребро веса не больше 5.

Решение. Умножая на 3 равенство (1) при $\alpha = \frac{1}{3}$, получаем

$$\sum_{v \in V(\Gamma)} (\deg v - 6) + \sum_{f \in F(\Gamma)} (2 \deg f - 6) = -12.$$

Так как все грани треугольные, то второе слагаемое равно нулю:

$$\sum_{v \in V(\Gamma)} (\deg v - 6) = -12.$$

Дадим каждой вершине v заряд $\deg v - 6$. Пусть каждая вершина степени по крайней мере 7 отдаст заряд равный $\frac{1}{3}$ в каждую соседнюю с ней вершину степени 5.

Предположим, что нет грани $(5, 6, 6)$. Тогда у вершины степени 5 не более двух соседей имеют степень 6; т.е. у нее по крайней мере три соседа степени не меньше 7. При $n \geq 7$ вершина степени n инцидентна не более $\frac{n}{2}$ вершинам степени 5, т.к. все грани треугольные и нет ребёр вида 5-5.

Тогда заряд каждой вершины степени 5 станет не менее $-1 + 3 \cdot \frac{1}{3} = 0$. Заряд вершины степени 6 останется 0. Заряд вершины степени 7 останется не менее $1 - 3 \cdot \frac{1}{3} = 0$. При $n \geq 8$ заряд вершины степени n останется не менее $n - 6 - \frac{n}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{6}n - 6 \geq \frac{5}{6} \cdot 8 - 6 > 0$.

2.3. Дан планарный граф Γ с $\delta(\Gamma) \geq 5$, все грани которого — треугольники, а также нет двух соседних вершин степени 5. Докажите, что найдётся грань, степени вершин которой равны 5, 6 и 6 соответственно.

Решение.

Подставим $\alpha = \frac{1}{3}$ в равенство (1) и умножим на 3, получим

$$\sum_{v \in V} (\deg v - 6) + \sum_{f \in F} (2 \deg f - 6) = -12.$$

Т.к. все грани треугольные, то второе слагаемое равно нулю:

$$\sum_{v \in V} (\deg v - 6) = -12.$$

Дадим каждой вершине v заряд $\deg v - 6$. Пусть каждая вершина степени по крайней мере 7 отдаст заряд равный $\frac{1}{3}$ в каждую соседнюю с ней вершину степени 5.

Предположим, что нет грани $(5, 6, 6)$. Тогда у вершины степени 5 не более двух соседей имеют степень 6; т.е. у нее по крайней мере три соседа степени не меньше 7. При $n \geq 7$ вершина степени n инцидентна не более $\frac{n}{2}$ вершинам степени 5, т.к. все грани треугольные и нет ребёр вида 5-5.

Тогда заряд каждой вершины степени 5 станет не менее $-1 + 3 \cdot \frac{1}{3} = 0$. Заряд вершины степени 6 останется 0. Заряд вершины степени 7 останется не менее $1 - 3 \cdot \frac{1}{3} = 0$. При $n \geq 8$ заряд вершины степени n останется не менее $n - 6 - \frac{n}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{6}n - 6 \geq \frac{5}{6} \cdot 8 - 6 > 0$.

2.4. Дан планарный граф Γ с $\delta(\Gamma) \geq 5$. Докажите, что найдется ребро веса не больше 11.

Решение. Умножая на 2 равенство (1) при $\alpha = \frac{1}{2}$, получаем

$$\sum_{v \in V(\Gamma)} (\deg v - 4) + \sum_{f \in F(\Gamma)} (\deg f - 4) = -8.$$

Дадим каждой вершине v заряд $(\deg v - 4)$, а каждой грани f заряд $(\deg f - 4)$.

Пусть каждая вершина степени 5 отдаст всем граням, которым принадлежит, по $\frac{1}{5}$, степени 6 — по $\frac{1}{3}$, степени не меньше 7 — по $\frac{2}{5}$.

У вершин степени 5 и 6 заряд станет равным 0. При $n \geq 7$ у вершины степени n заряд станет равным $n - 4 - \frac{2}{5}n = \frac{3}{5}n - 4 \geq \frac{3}{5} \cdot 7 - 4 > 0$.

У всех граней степени больше 3 заряд изначально неотрицательный и при перераспределении не уменьшается. Теперь рассмотрим треугольную грань. Предположим, что у каждого ребра вес не меньше 12. Тогда набор степеней вершин треугольной грани имеет вид либо $(5, 7+, 7+)$, либо $(6+, 6+, 6+)^2$. В первом случае грань получает от вершин заряд $\frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} = 1$, во втором $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$, что делает ее заряд равным 0.

2.5.

Дан планарный граф Γ с $\delta(\Gamma) \geq 3$. Докажите, что найдется такая пара из грани f и вершины v в ней, что $\deg(v) = 3$ и $\deg(f) \leq 5$ или $\deg(v) \leq 5$ и $\deg(f) = 3$.

Решение. Умножая на 3 равенство (1) при $\alpha = \frac{1}{2}$, получаем

$$\sum_{v \in V(\Gamma)} (\deg v - 4) + \sum_{f \in F(\Gamma)} (\deg f - 4) = -8.$$

Дадим каждой вершине v заряд $(\deg v - 4)$, а каждой грани f заряд $(\deg f - 4)$.

Предположим, что у каждой грани степени 3 все вершины имеют степень не меньше 6, и вершины степени 3 есть только у граней степени не меньше 6.

Пусть каждая вершина степени не меньше 6 отдаст, граням в которых она лежит, по $\frac{1}{3}$. Заряд таких вершин останется неотрицательным, а у треугольных граней станет равным 0. Также пусть каждая грань, у которой не менее 6 вершин, отдаст своим вершинам по $\frac{1}{3}$. У таких граней заряд останется неотрицательным, а у вершин степени 3 он станет равным 0. У остальных вершин и граней заряд неотрицательный изначально и он не уменьшится.

²Под $k+$ подразумеваем число, не меньшее k .

2.6. Дан планарный граф Γ с $\delta(\Gamma) \geq 3$. Докажите, что у Γ есть не более чем 5-угольная грань, в которой степени всех вершин, кроме возможно одной, не превосходят 11.

Решение. Умножая на 3 равенство (1) при $\alpha = \frac{2}{3}$, получаем

$$\sum_{v \in V(\Gamma)} (2 \deg v - 6) + \sum_{f \in F(\Gamma)} (\deg f - 6) = -12.$$

Дадим вершине v заряд, равный $2 \deg v - 6$, а грена f заряд, равный $\deg f - 6$.

Предположим противное, то есть у каждой грани степени по крайней мере 5 найдётся хотя бы 2 вершины степени не менее 12.

Пусть каждая вершина степени $n \geq 12$ отдаст заряд $\frac{3}{2}$ каждой грена, в которую она входит. Тогда её заряд становится равным $2n - 6 - \frac{3}{2}n = \frac{1}{2}n - 6 \geq 0$. Каждая грань степени не более 5 тогда получит заряд от по крайней мере двух вершин. Поэтому её заряд будет не менее $-3 + \frac{3}{2} \cdot 2 = 0$. Все остальные вершины и грани изначально имели неотрицательный вес, а в процессе перераспределения зарядов их заряд не уменьшился. Противоречие.

Легкие раскраски

2.7. а) Докажите, что любой планарный граф можно раскрасить в 6 цветов правильным образом.

б) Пусть для любого подграфа некоторого графа найдётся вершина графа степени не превосходящей $d - 1$ или индуцированный чётный цикл, степень каждой вершины которого не превосходит d . Докажите, что граф можно правильно раскрасить в d цветов.

Решение. а) В каждой грани не менее трех ребер, значит, $3F \leq 2E$. Подставив это неравенство в формулу Эйлера, получим: $6 = 3V - 3E + 3F \leq 3V - 3E + 2E = 3V - E$. Отсюда $0 < 3V - E$ и $2E < 6V$. Таким образом, сумма степеней вершин меньше чем $6V$. Значит, в любом планарном графе найдется вершина со степенью меньше 6.

Докажем по индукции, что любой планарный граф на n вершинах можно правильным образом раскрасить в 6 цветов. База очевидна. Докажем переход: пусть это верно для всех графов на k вершинах. Рассмотрим произвольный граф Γ на $k + 1$ вершине, пусть v — его вершина степени меньше 6. Раскрасим граф $\Gamma \setminus v$ в 6 цветов, после чего покрасим вершину v — для нее найдется доступный цвет.

б) Докажем это утверждение для всех подграфов Γ по индукции по количеству вершин n . База очевидна. Докажем переход: пусть это верно для всех графов на не более чем k вершинах. Рассмотрим произвольный подграф Γ на $k + 1$ вершине графа Γ .

Если в Γ найдётся вершина v степени не превосходящей $d - 1$, то раскрасим граф $\Gamma \setminus v$, затем раскрасим вершину v .

Иначе в Γ найдётся чётный цикл $v_1 v_2 \dots v_k$, степень каждой вершины которого не превосходит d . Обозначим как C множество его вершин. Правильно раскрасим граф $\Gamma \setminus C$. Теперь покажем, как покрасить C . Из каждой вершины множества C выходит не более $d - 2$ ребер в множество $\Gamma \setminus C$, значит для этих вершин остается хотя бы по 2 варианта, в какие цвета их можно покрасить.

Докажем следующую лемму.

Лемма. Если каждой вершине четного цикла назначен список из 2 цветов, в которые ее возможно покрасить, то этот цикл можно раскрасить правильным образом согласно спискам.

Предположим, это сделать нельзя. Если у всех вершин списки одинаковые, то цикл можно раскрасить, чередуя цвета. В противном случае найдутся две соседние вершины с разными списками, пусть это v_1 и v_k . Покрасим v_1 в цвет, которого нет в списке v_k . Для вершины v_2 останется хотя бы один доступный цвет, покрасим ее. Потом покрасим v_3, v_4 и так далее до v_k . Таким образом, любые две соседние вершины покрашены в разные цвета, включая пару v_1 и v_k .

2.8. а) Докажите, что для любого заданного k найдется такое n , что полный двудольный граф $K_{n,n}$ не будет k -выбираемым. Хотя и является 2-раскрашиваемым, как любой двудольный граф.

б) Докажите, что цикл четной длины не только 2-раскрашиваем, но и 2-выбираем.

Решение. а) Пусть в первой доле будут вершины с номерами от 1 до k , у вершины номер i список $(c_{i1}, c_{i2}, \dots, c_{ik})$ для всех i , и пусть все эти k^2 цветов различны. А во второй доле — k^k вершин со всеми возможными списками вида $(c_{1x_1}, c_{2x_2}, \dots, c_{kx_k})$, где x_i это число от 1 до k для всех i .

Тогда для любой раскраски вершин первой доли найдется вершина второй доли, список которой состоит как раз из этих цветов, и ее не получится раскрасить. По условию требовалось, чтобы в долях было поровну вершин, но этого легко достичь, добавляя вершины с произвольными списками в меньшую долю.

б) См. лемму из решения задачи 2.7б.

2.9. а) Дан планарный граф, внешняя грань которого это цикл $v_1 \dots v_k v_1$, остальные грани треугольные. Вершинам v_1 и v_2 соответствуют списки из двух цветов, каждой другой вершине внешней грани приписан список из трех цветов, а каждой внутренней вершине приписан список из 5 цветов. Докажите, что существует правильная списочная раскраска, соответствующая этим спискам.

б) Докажите, что для планарного графа Γ выполняется $\text{ch}(\Gamma) \leq 5$.

Решение. См. теорему 5.4.2 книгу Дистеля [2]

2.10. Пусть Γ — планарный граф с $\Delta(\Gamma) \geq 11$. Каждой вершине назначен список из $\Delta(\Gamma)$, а каждому ребру — из $(\Delta(\Gamma) + 2)$. Тогда можно так выбрать цвета из списков, чтобы получить тотальную списочную покраску.

Решение. Сперва докажем следующую лемму:

Лемма. В планарном графе Γ , у которого степени всех вершин не менее 3, есть ребро с весом не больше 11 или цикл из 4 вершин, проходящий через 2 вершины степени 3 и соседнюю с ними вершину степени не больше 10.

Доказательство леммы. Назовем ребро лёгким, если его вес не больше 11. Пусть в Γ нет лёгких рёбер и специальных 4-циклов, описанных в условии.

Если у какой-то грани больше 3 ребер, в ней можно провести нелёгкую диагональ. Действительно, средний вес диагоналей в грани равен среднему весу рёбер её периметра, следовательно найдётся диагональ с весом хотя бы 12.

Заметим, что после добавления ребра специальные 4-циклы из условия леммы появиться не могут. Добавляя нелегкие рёбра, получим граф Γ' (возможно, имеющий кратные рёбра), у которого все грани треугольные. Из формулы Эйлера получаем

$$\sum_{v \in V(\Gamma')} (\deg v - 6) + \sum_{f \in F(\Gamma')} (2 \deg f - 6) = -12.$$

Назначим каждой вершине v вес $(\deg v - 6)$, а грани f вес $(2 \deg f - 6)$.

Пусть каждая вершина v степени не больше 5 забирает вес $\frac{6 - \deg v}{\deg v}$ от каждой соседней вершины степени не меньше 7, после чего вес v становится равным нулю. Покажем, что после перераспределения остальные веса останутся неотрицательными, и, поскольку суммарный вес отрицателен, получим противоречие.

Γ' — это триангуляция без легких ребер, то каждая вершина степени k имеет не более $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ соседей, которым она отдаёт вес. Вершина степени 7 отдает вес только вершинам степени 5, поэтому она отдает веса не больше $3 \cdot \frac{1}{5}$ и ее вес остается положительным. Вершина степени 8 отдает вес только вершинам степени не меньше 4, поэтому всего отдает веса не больше $4 \cdot \frac{1}{2}$ и ее вес остается неотрицательным. Если у вершины w степень не меньше 11, то не более чем $\lfloor \frac{\deg w}{2} \rfloor$ её соседей забирают не больше чем по 1, и вес w остается не менее $\lfloor \frac{\deg w}{2} \rfloor - 6$, то есть остается неотрицательным.

Осталось рассмотреть случай, когда степень вершины w равна 9 или 10. Так как все грани треугольные, то соседи w образуют замкнутый маршрут длины $\deg w$. Ни одна вершина степени 3 не встречается в таком маршруте дважды, поскольку кратные рёбра не могут выходить из вершины степени 3. Так как нет легких ребер и запрещены некоторые специальные 4-циклы, то в этом маршруте между двумя вершинами степени 3 должно быть хотя бы три ребра.

Итак, у вершины w степени 9 не более трёх соседей степени 3, и когда их ровно 3, то у w остается вес 0, т.к. больше никакие вершины не отдают ей вес. Если у неё 2 соседа степени 3, то не больше двух соседей степени 4 или 5, и снова вес останется неотрицательным. Если у неё 1 сосед степени 3, то не больше 3 соседей степени 4 или 5, и снова вес останется положительным. Случаи для вершины степени 10 рассматриваются аналогично.

Лемма доказана.

Вернемся к решению задачи. Предположим, что есть графы, не удовлетворяющие условию задачи, рассмотрим минимальный (по количеству ребер) такой граф Γ и соответствующие списки вершин.

Либо у Γ есть вершина степени не больше 2, либо к нему применима лемма. Рассматривая степени вершин у лёгких рёбер, имеем три возможных случая:

1. В Γ есть ребро uv с $\deg u \leq 2$.
2. В Γ есть ребро uv с $\deg u = 3$ и $\deg v \leq 10$.
3. В Γ есть ребро uv с $\deg u \leq 5$ и $\deg(u) \leq 7$.

Так как Γ минимальный граф, для которого нет раскраски, то для графа $\Gamma - uv$ раскраска есть. Временно удалим цвет вершины u , мы вновь раскрасим ее после того, как выберем цвет ребра uv .

Рассмотрим, в каждом из случаев во сколько цветов могут быть покрашены элементы, смежные с ребром uv (считая, что u не имеет цвета). В первом случае оно не больше $\Delta(\Gamma) + 1$, во втором — не больше $2 + 1 + 9$, в третьем — $4 + 1 + 6$. Длина списка цветов у ребра $\Delta(\Gamma) + 2 \geq 13$, так что для ребра uv останется свободный цвет.

Осталось покрасить вершину u . Так как $\deg u \leq 5$, то недоступно не более 10 цветов, а количество цветов в списке $\Delta(\Gamma) \geq 11$, так что и для u найдется свободный цвет.

3 Серьезные задачи

3.1 Спичечные графы

Ключевая задача 1. Докажите, что не существует 5-регулярного спичечного графа.

3.1.1. Дан граф минимальных расстояний на n вершинах, все вершины которого находятся в общем положении³. Докажите, что а) число рёбер меньше $5n/2$; б) найдётся постоянная c меньшая $5/2$ такая, что число рёбер не больше cn .

в) Граф называется *интересным*, если он является графом минимальных расстояний и для любой вершины графа она и все её соседи находятся в общем положении⁴. Докажите, что для любого $c < 5/2$ найдется интересный граф с не менее чем $c|V(\Gamma)|$ ребрами.

Решение. б) На протяжении этого доказательства Γ всегда обозначает какой-либо граф минимальных расстояний. Поместим по единичному заряду в каждую вершину и каждую грань. Теперь заряд каждой грани поровну раздадим ее вершинам.

Т.к. Γ это граф минимальных расстояний, то степень каждой вершины не больше 5. Кроме того, в таком графе треугольная грань не может граничить с двумя другими треугольными гранями (в этой конструкции три вершины лежат на одной прямой).

³То есть никакие три не лежат на одной прямой.

⁴при этом все вершины графа не обязаны быть в общем положении

Таким образом, никакая вершина не может иметь заряд больше $1 + \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{5}{2}$, и заряд $\frac{5}{2}$ может быть только у вершины степени 5, смежной с гранями, степени которых это 3, 3, 4+, 3, 4+ с точностью до перестановки по циклу. Назовем такую вершину *регулярной*.

Максимальный из зарядов нерегулярных вершин обозначим $\frac{5}{2} - \varepsilon$. Как уже доказано, $\varepsilon > 0$. Дальнейшее решение будет заключаться в том, что мы применим следующую лемму (докажите ее).

Лемма 1. Если для некоторого $\delta > 0$ в Γ есть хотя бы $\delta V(\Gamma)$ нерегулярных вершин, то $E(\Gamma) \leq (\frac{5}{2} - \delta\varepsilon)V(\Gamma)$.

Теперь докажем, что Γ удовлетворяет условиям леммы 1 для некоторого $\delta > 0$. Для этого понадобятся еще некоторые определения.

Назовем *k-окрестностью* вершины O такое множество вершин графа Γ , что до каждой из них есть путь из O не более чем из k ребер. Количество вершин в этом множестве обозначим $s(\Gamma, O, k)$. Назовем такую окрестность *достаточно большой*, если в ней есть нерегулярная вершина.

Лемма 2. Докажите, что существует оценка сверху количества вершин в k -окрестности, не зависящая от выбора вершины O графа Γ . Иными словами, есть функция $S(k)$ такая, что $s(\Gamma, O, k) \leq S(k)$ для любых Γ и O .

Докажите эту лемму самостоятельно. Подсказка: степени вершин ограничены сверху.

Теперь возьмем такое k , что для каждой регулярной вершины ее k -окрестность является достаточно большой. В каждой из них есть нерегулярная вершина. Таким образом, каждой регулярной вершине X сопоставлена нерегулярная вершина Y такая, что путь XY содержит не более k ребер. Тогда каждая нерегулярная вершина Y сопоставлена не более чем $S(k)$ регулярным вершинам. Таким образом, отношение количества регулярных вершин к количеству нерегулярных не больше $S(k)$, и можно применить лемму 1 для $\delta = \frac{1}{S(k)+1}$.

Осталось доказать, что такое k , не зависящее от графа, действительно можно рассмотреть:

Лемма 3. Докажите, что существует такое k , что любая k -окрестность любого графа минимальных расстояний является достаточно большой.

в) Указание: Соберите граф из конструкций из 3.

3.1.2. Решите ключевую задачу 1.

Решение. Данное решение взято из статьи [3].

Предположим противное, пусть такой граф Γ существует.

Умножая на 3 равенство (1) при $\alpha = \frac{1}{3}$, получаем

$$-12 = \sum_{v \in V(\Gamma)} (\deg v - 6) + \sum_{f \in F(\Gamma)} (2 \deg f - 6) = \sum_{v \in V(\Gamma)} (-1) + \sum_{f \in F(\Gamma)} (2 \deg f - 6). \quad (2)$$

Раздадим каждой вершине заряд (-1) , а каждой грани f — заряд, равный $(2 \deg f - 6)$. Из (2) следует, что суммарный заряд по всем вершинам и граням отрицательный.

Перераспределение зарядов будет следующим. Рассмотрим грань $f \in F$ и вершину $x \in V$, принадлежащую этой грани. Пусть α — мера внутреннего угла грани f при вершине x . Если $\alpha > \frac{\pi}{3}$ мы забираем у грани f заряд, равный $\min\{1, \frac{3}{\pi}\alpha - 1\}$ и отдаем его вершине x . Покажем, что после такого перераспределения заряды каждой грани и каждой вершины будут неотрицательны.

Рассмотрим вершину $x \in V$. Обозначим через ℓ количество внутренних углов граней при этой вершине, которые больше, чем $\frac{\pi}{3}$, обозначим их величины через $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\ell$. Так как $\deg x = 5$, то $\ell > 0$. Если через какой-то из этих углов от грани его содержащей вершине x передается заряд 1, то заряд в x уже будет неотрицателен. С другой стороны, если через каждый из этих углов вершине x передался заряд $\frac{3}{\pi}\alpha_i - 1$, где $i = 1, \dots, \ell$, то

общий заряд вершины увеличился на $\frac{3}{\pi} \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i - \ell$. При этом сумма углов при вершине x равна $2\pi \leq \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i + (5 - \ell) \frac{\pi}{3}$, откуда следует, что

$$\sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i \geq 2\pi - (5 - \ell) \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}(\ell + 1).$$

Но тогда заряд, полученный вершиной x по крайней мере $\frac{3}{\pi} \frac{\pi}{3}(\ell + 1) - \ell = 1$. Таким образом заряд в вершине x после перераспределения неотрицательный.

Теперь докажем неотрицательность зарядов граней. Сначала рассмотрим случаи ограниченных граней. Начальный заряд грани $f \in F$ был равен $2 \deg f - 3 \geq 0$. Тогда, если после перераспределения, заряд грани стал отрицательным, то значит по крайней мере один из ее внутренних углов больше, чем $\frac{\pi}{3}$.

Если $\deg f = 3$, то грань f — равносторонний треугольником (в силу спичечности графа), все углы в котором равны $\frac{\pi}{3}$. Но тогда ее заряд остается неотрицательным.

Если $\deg f = 4$, то грань f — ромб. Если только два его внутренних угла больше, чем $\frac{\pi}{3}$, то тогда отданный этой гранью заряд не больше 2, что оставляет общий заряд грани неотрицательным. Если все четыре угла больше $\frac{\pi}{3}$, то заряд, отданный гранью, опять же не больше, чем $\frac{3}{\pi} 2\pi - 4 = 2$. Тогда заряд снова остается неотрицательным.

Случай $\deg f = 5$ разбивается на два. Если не более четырех углов больше, чем $\frac{\pi}{3}$, то отдаваемый заряд не больше 4, то есть суммарный остается неотрицательным. Если же все углы больше, чем $\frac{\pi}{3}$, то, так как сумма углов в пятиугольнике равна 3π , отданный заряд не более $\frac{3}{\pi} 3\pi - 5 = 4$. Опять же заряд грани остается неотрицательным.

Наконец, если $\deg f \geq 6$, то отдаваемый заряд не более, чем $\deg f$ и оставшийся заряд неотрицателен: $2 \deg f - 3 - \deg f \geq 0$.

Осталось рассмотреть случай внешней грани $f \in \Gamma$. Если $\deg f \geq 6$, то он аналогичен случаю ограниченной грани. Случаи, когда $\deg f \leq 5$, также легко исключаются. С другой стороны, даже не рассматривая их подробно, можно заметить, что для таких случаев общий отданный заряд не превосходит 5, то есть, оставшийся заряд не менее -5 (а на самом деле не менее -3), что со всеми остальными неотрицательными зарядами граней и вершин, никак не даст в сумме изначально посчитанный общий заряд равный -12 . Получаем противоречие. Следовательно, такого спичечного графа не существует.

3.1.3*. Докажите, что в 4-регулярном спичечном графе не менее 20 вершин.

Решение. См. раздел 3 и теорему 3.6 в статье [3].

3.2 Квазипланарные графы

Ключевая задача 2. а) Квазипланарный граф на n вершинах содержит не более $8n - 20$ ребер.

б) Попробуйте усилить утверждение предыдущей задачи. Интересуют как улучшения оценки, так и обобщения для других классов графов.

Решение. С полным решение задачи можно познакомиться в статье [4].

Основная идея в том, чтобы свести задачу к рассмотрению плоского графа, и применить к нему метод перераспределения зарядов.

Рассмотрим следующий плоский граф Γ' . Его множество вершин состоит из вершин квазипланарного графа Γ , а также точек пересечения рёбер Γ . Рёбрами Γ' будут пары вершин, являющиеся концами участков кривых, определявших рёбра Γ . Обозначим через V, E, F, V', E', F' количества вершин, ребер и граней в графах Γ и Γ' соответственно. Вершины $V(\Gamma)$ будем называть *старыми*, а остальные — *новыми*. Под степенями вершин и граней будем понимать их степени в новом графе Γ' .

Нетрудно убедиться (докажите это самостоятельно), что $E' - E = 2(V' - V)$, т.е. что количество ребер увеличилось на удвоенное количество новых вершин. Итак,

$$2E' = 2E + 4(V' - V). \quad (3)$$

Именно последнее равенство является ключевым новым моментом решения.

Теперь запишем формулу Эйлера для графа Γ' , домноженную на (-2) :

$$-2V' + 2E' - 2F' = -4. \quad (4)$$

Тогда, используя равенства $2E' = \sum_{v \in V(\Gamma')} \deg v$, $2E' = \sum_{f \in F(\Gamma')} \deg f$, а также (3) и (4), получим (поймите самостоятельно, как это делается):

$$2\gamma E + \sum_{v \in V(\Gamma') \setminus V(\Gamma)} (\alpha \deg v - 2 + 4\gamma) + \sum_{v \in V(\Gamma)} (\alpha \deg v - 2) + \sum_{f \in F(\Gamma')} (\beta \deg f - 2) = -4, \quad (5)$$

где $\alpha + \beta + \gamma = 1$.

Далее в каждом конкретном случае будем по-своему подбирать коэффициенты α , β и γ . Во всех трёх задачах новым вершинам мы будем давать нулевой заряд (и они вообще не будут участвовать в перераспределении зарядов). Для этого нам потребуется выполнение равенства $4\alpha - 2 + 4\gamma = 0$, т.к. степень каждой новой вершины равна 4. Тогда $\beta = 0.5$ и (5) преобразуется в

$$2\gamma E + \sum_{v \in V(\Gamma)} ((0.5 - \gamma) \deg v - 2) + \sum_{f \in F(\Gamma')} (0.5 \deg f - 2) = -4. \quad (6)$$

3.2.1. Пусть граф удовлетворяет дополнительному условию: не существует тройки ребер e_1, e_2, e_3 такой, что e_1 и e_2 выходят из одной вершины A , а ребро e_3 пересекает их во внутренних точках B и C , причем нет других точек пересечения на участках AB и AC . Докажите, что число ребер не больше $4n - 8$.

Решение. В этом случае возьмём⁵ $\gamma = 0.25$. Учитывая, что нам нужно доказать, что $E \leq 4V - 8$, преобразуем (6) в

$$-E + 4V - 8 = \sum_{v \in V(\Gamma)} 0.5 \deg v + \sum_{f \in F(\Gamma')} (\deg f - 4).$$

Покажем, что правая часть неотрицательна. Дадим каждой старой вершине v заряд, равный $0.5 \deg v$, а каждой грани Γ' — заряд, равный $(\deg f - 4)$. Покажем, как перераспределить заряды, чтобы у каждого элемента он стал неотрицательным. От каждой вершины дадим заряд, равный 0.5 , в каждую из граней, в которых она лежит.

Отрицательный заряд мог остаться только у треугольников с двумя или тремя новыми вершинами. Но, как несложно убедиться, вспомнив условие задачи, таких граней в графе Γ' нет.

3.2.2. Без дополнительного условия из прошлой задачи докажите оценку на число ребер $10n - 20$.

Решение. В этом случае возьмём⁶ $\gamma = 0.1$. Учитывая, что нам нужно доказать, что $E \leq 10V - 20$, преобразуем (6) в

$$-E + 10V - 20 = \sum_{v \in V(\Gamma)} 2 \deg v + \sum_{f \in F(\Gamma')} (2.5 \deg f - 10).$$

Покажем, что правая часть неотрицательна. Дадим каждой старой вершине v заряд, равный $2 \deg v$, а каждой грани Γ' — заряд, равный $(2.5 \deg f - 10)$. Перераспределение зарядов будет следующим. От каждой вершины дадим заряд, равный 2 , в каждую из граней, в которых она лежит. Таким образом, заряд всех вершин станет равным 0 . От каждой грани $f \in F(\Gamma')$ с $\deg f \geq 5$ отдадим заряд, равный 0.5 , в каждую из смежных по ребру граней. Если соседняя по ребру грань является четырехугольником без старых вершин (такие четырехугольные грани будем называть *новыми*, а другие — *старыми*), то передадим от неё заряд через противоположное ребро в следующую грань (рис. 2), если следующая вновь новый четырехугольник, то будем передавать заряд дальше до тех пор, пока не встретим грань, отличную от нового четырехугольника (убедитесь в том, что этот процесс закончится).

⁵Обратите внимание, что в искомой оценке свободный член равен -8 .

⁶Обратите внимание, что в искомой оценке свободный член равен -20 .

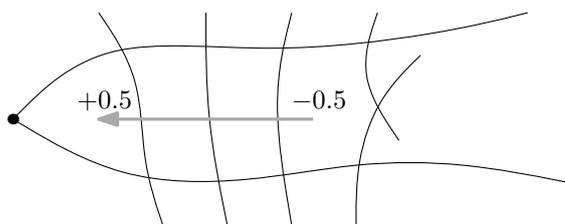


Рис. 2: Передача заряда по цепочке новых четырехугольников.

После этого мы совершим вторую фазу перераспределения зарядов. Заметим, что старые четырехугольники будут иметь заряды по крайней мере 2, которые они получили от инцидентных им вершин. Тогда раздадим их заряды поровну (по 0.5) во соседние по стороне грани. Если соседняя по ребру грань является новым четырехугольником, то передадим от неё заряд через противоположное ребро в следующую грань, а если следующая грань вновь новый четырехугольник, то передадим заряд дальше аналогичным образом до тех пор, пока вновь не встретится грань, отличная от нового четырехугольника.

У граней степени не меньше 4 заряд окажется неотрицательным. Рассмотрим треугольную грань. Если у нее две старые вершины, то в итоге у них положительный заряд. Треугольников без старых вершин возникнуть не могло по определению квазипланарных графов. Убедитесь самостоятельно, что у треугольников с одной старой вершиной будет в итоге тоже неотрицательный заряд.

3.2.3. Решите ключевую задачу 2а. Скорее всего, при решении предыдущего пункта вы использовали такую систему зарядов, которая сработает и здесь.

Решение. Попробуйте самостоятельно решить эту задачу. Для этого воспользуйтесь решением предыдущей задачи. Ключевой момент, за счёт которого удаётся решить задачу: среди граней, примыкающих к старым вершинам, имеется по крайней мере две грани, не являющиеся треугольниками с в точности одной старой вершиной.

3.3 Списочные покраски ребер

Ключевая задача 3. Докажите, что Γ является реберно $(\Delta(\Gamma) + 1)$ -выбираемым, если $\Delta(\Gamma) \geq 6$.

Решение. С полным доказательством можно познакомиться в статье [5].

3.3.1.

Докажите, что при $\Delta(\Gamma) \geq 7$ граф Γ является реберно $(\Delta(\Gamma) + 1)$ -выбираемым.

Решение. Достаточно доказать что найдется ребро с весом не больше $\Delta(\Gamma) + 2$ (такие ребра будем называть легкими), это позволит сделать легкую раскраску ребер.

Если в графе есть вершины степени 1 или 2, то ребра из них автоматически легкие, значит достаточно рассмотреть случай $\delta(\Gamma) \geq 3$. Присвоим каждой вершине v и каждой грани f заряды $(\deg(v) - 4)$ и $(\deg(f) - 4)$ соответственно. Тогда по формуле Эйлера сумма всех зарядов равна -8 . Наш план — придумать такое правило перераспределения зарядов, чтобы из отсутствия легкого ребра следовала неотрицательность зарядов у всех элементов, что привело бы к противоречию.

Правило следующее. Пусть каждая вершина степени не менее 5 отдаст $\frac{1}{2}$ каждой треугольной грани, в которой находится. Кроме того, каждая вершина степени $\Delta(\Gamma)$ отдаст по $\frac{1}{3}$ заряда всем вершинам степени 3, с которыми соединена.

Докажем, что все заряды неотрицательны. Для граней это очевидно: заряд был отрицателен только у треугольных, но в каждой треугольной грани находятся хотя бы две вершины степени не меньшей, чем 5, иначе рядом стоят две вершины степени не больше 4 — ребро между ними легкое.

Теперь разберемся с вершинами.

- вершина степени 3 должна быть соединена только с вершинами степени $\Delta(\Gamma)$, иначе соответствующее ребро легкое. Значит, эта вершина получила трижды по $\frac{1}{3}$ – заряд стал нулевым.
- Вершина степени 4 изначально имела заряд 0 и никому ничего не отдавала.
- Вершина степени t от 5 до $\Delta(\Gamma) - 1$ отдает что-то только треугольным граням, которых у нее не больше чем $\lfloor \frac{t}{2} \rfloor$, легко проверить что при $t \geq 5$ выполняется $t - 4 - \frac{1}{2} \lfloor \frac{t}{2} \rfloor \geq 0$.
- Вершина степени $\Delta(\Gamma)$ отдает заряд соседним вершинам степени 3 и треугольникам, но в каждом треугольнике вершин степени 3 не больше одной. Итого, вершины этого типа отдают максимум $\frac{5}{6}$ заряда за каждую пару своих ребер, входящих в треугольник, и максимум $\frac{1}{3}$ за каждое не входящее в треугольник ребро. Также легко проверяется, что оставшийся заряд положителен. Кстати, это единственное место в доказательстве, где нужна строгость неравенства $\Delta(\Gamma) > 6$.

Таким образом, получили противоречие.

3.3.2. В случае $\Delta(\Gamma) = 6$ нас интересует еще одна конфигурация: вершина степени 6, входящая в три треугольника, два из которых с набором степеней $(6, 6, 3)$, а третий – $(6, 6, 3)$, $(6, 5, 4)$ или $(6, 6, 4)$. Докажите, что при наличии такой конфигурации, можно свести вопрос раскраски Γ к вопросу раскраски его подграфа.

Решение. Пусть описанная в условии конфигурация нашлась (можно считать, что нашлась вершина, принадлежащая треугольникам с набором степеней $(6, 6, 3)$, $(6, 6, 3)$ и $(6, 6, 4)$, остальные являются ее подмножествами). Выбросим ребра этой конфигурации, покрасим остальные по предположению индукции и попробуем докрасить выброшенные.

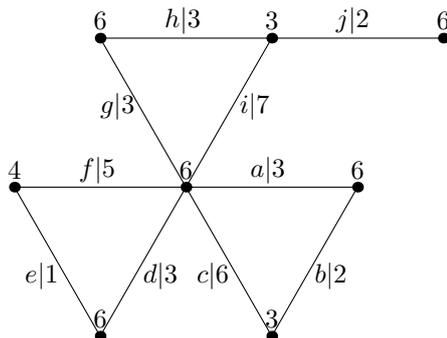


Рис. 3: Конфигурация.

На рисунке ребра конфигурации пронумерованы латинскими буквами, и к каждому ребру приписано минимальное число доступных для него цветов. Если у какого-то ребра доступных цветов на самом деле больше – запретим лишний (любой). Будем красить ребра, при этом каждый раз на 1 уменьшая число доступных цветов у соседей, кроме специально оговоренных случаев. Если ни разу не опустились до нуля – все сработало.

Ребрам g и j доступно 3 и 2 цвета соответственно, а ребру h – только 3. Значит или есть цвет, доступный обоим ребрам g и j , или есть цвет, доступный одному из g и j но недоступный h .

В первом случае покрасим в этот общий цвет ребра g и j , и дальше красим ребра в порядке $ebdafcih$.

Во втором случае в тот цвет, который не доступен для h , красим то из ребер g и j для которого он доступен, потом оставшееся из двух – в любой (после этого для h все еще доступно минимум 2 цвета), дальше то же самое – красим ребра в порядке $ebdafcih$.

3.3.3. Наконец, докажите, что при $\Delta(\Gamma) = 6$ граф Γ содержит хотя бы один из трех типов подграфов⁷, позволяющих свести вопрос раскраски графа к раскраске меньшего графа.

⁷Один из них вы нашли при решении задачи 3.3.1, другой подсказан в задаче 3.3.2, до третьего типа догадайтесь самостоятельно.

Решение. Докажем, что планарный граф Γ с $\Delta(\Gamma) = 6$ и без треугольников с общим ребром имеет одну из трех конфигураций:

- (i) ребро веса не больше 8;
- (ii) индуцированный 4-цикл $uvwx$, такой что $\deg(u) = \deg(w) = 3$;
- (iii) 6-вершину A входящую в три треугольника с наборами степеней вершин $(6, 6, 3)$, $(6, 6, 3)$ и $(6, 6^-, 4^-)$ ⁸.

Доказательство. Если в графе есть вершины степени 1 или 2, то ребра из них автоматически не тяжелее 8, далее рассматриваем случай $\delta(\Gamma) \geq 3$. Наш дальнейший план действий – раздать заряды с отрицательной суммой вершинам и граням и показать, что если запрещенных конфигураций нет, то есть способ пререспределить заряды так, что каждый заряд станет неотрицательным. Это противоречие докажет, что запрещенные конфигурации есть. В дальнейшем следует помнить, что вершина степени 3 смежна только с вершинами степени 6, иначе, опять же, появляется легкое ребро.

Раздадим в вершины v и грани f заряды $\deg(v) - 4$ и $\deg(f) - 4$ соответственно. Теперь перераспределим их по следующим правилам:

- 5- и 6-грани отдают по $\frac{1}{2}$ каждой 3-вершине, которая в них лежит;
- 5-вершина отдает $\frac{1}{2}$ каждому треугольнику, в котором лежит;
- 6-вершина, во-первых, отдает смежной с ней 3-вершине $\frac{1}{6}$, если эта 3-вершина лежит в 5- или 6-грани, иначе отдает $\frac{1}{3}$, во-вторых, отдает каждому треугольнику, в котором лежит, $\frac{1}{3}$ если этот треугольник не содержит 3- или 4-вершин, иначе отдает $\frac{1}{2}$.

Докажем что все получилось.

- В треугольнике не может быть двух 4^- -вершин, ребро между ними было бы легким. Треугольник в котором есть одна 4^- -вершина с каждой из двух других получает по $\frac{1}{2}$. Треугольник, в котором только 5^+ -вершины с каждой из них получает минимум по $\frac{1}{3}$.
- Четырехугольник имеет изначально неотрицательный заряд и никому ничего не отдает.
- t -грань при $t \geq 5$ содержит не больше $\lfloor \frac{t}{2} \rfloor$ 3-вершин, легко проверить что

$$t - 4 - \frac{1}{2} \cdot \lfloor \frac{t}{2} \rfloor \geq 0$$

- 3-вершина или лежит в 5^+ -грани, и тогда получает $\frac{1}{2}$ от нее и по $\frac{1}{6}$ от трех соседних 6-вершин, или не лежит, и тогда получает по $\frac{1}{3}$ от трех соседних 6-вершин.
- 4-вершина имеет изначально ненулевой заряд и никому ничего не отдает.
- 5-вершина отдает по $\frac{1}{2}$ максимум двум треугольникам, в которых лежит.
- Чтобы убедиться, что некоторая вершина B степени 6 имеет положительный заряд, придется отдельно рассмотреть четыре случая чему может быть равно число k треугольников, которым принадлежит B . Во всех случаях полезно помнить, что B может быть смежна не более чем с $6 - k$ вершинами степени 3 (потому что в треугольнике максимум одна).

– $k = 0$ – B отдает максимум шести 3-вершинам по не более чем $\frac{1}{3}$ – остается неотрицательный заряд⁹.

⁸Запись k^- обозначает «число, меньшее либо равное k »

⁹На самом деле можно показать, что в этом случае заряд строго положителен, но это не нужно.

- $k = 1$. Если B соединена не более чем с четырьмя 3-вершинами, то она отдает $\frac{1}{2}$ треугольнику и максимум $4 \cdot \frac{1}{3}$ вершинам степени 3 – остается положительный заряд. Если B соединена ровно с пятью, то какие-то два ребра в 3-вершины идут подряд по часовой стрелке (на самом деле, минимум 4 пары ребер идущих подряд). Пусть это ребра AB и BC . Тогда они в одной грани, и, чтобы это не был случай (ii), надо, чтобы грань, содержащая A , B и C , (вида $\dots ABC \dots$) содержала еще как минимум две вершины. Но тогда вершинам A и B положено отдавать только $\frac{1}{6}$ – снова остался положительный заряд.
- $k = 2$ разбирается аналогично предыдущему случаю.
- $k = 3$ Если из трех треугольников не более чем два имеют 4^- вершину – то B отдает не более чем $2 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ треугольникам, и максимум двум 3-вершинам (третьей нет, потому что тогда был бы третий треугольник с 4^- -вершиной) по $\frac{1}{3}$ – сумма неотрицательна. Итого, если заряд отрицательный, то в каждом из трех треугольников есть 4^- -вершина – треугольники утянули $\frac{3}{2}$ заряда. Значит, чтобы оставшийся стал отрицательным, минимум две из 4^- -вершин должны быть ровно 3-вершинами. Это в точности конфигурация (iii).

3.4 Магические конфигурации

Ключевая задача 4. Описать все магические конфигурации.

Решение. Очень непросто записать кратко решение данной задачи (даже разбитой на большое количество вспомогательных шагов), поэтому ниже предлагаются, скорее, подсказки к решению, чем само решение.

Доказательство опирается на ряд важных (но в тоже время несложных) свойств набора прямых на плоскости (теорема Сильвестра, её усиление, теорема Леви). Некоторые из них мы оставим читателю для самостоятельного изучения.

Полное доказательство можно найти в статье [6].

3.4.1. Докажите теорему Сильвестра, используя формулу Эйлера и двойственный язык.

Решение. Предположим, что для любых двух экваторов найдётся третий, проходящий через их точку пересечения. Рассмотрим плоский граф, с вершинами в точках пересечения экваторов, а рёбрами будут участки дуг между соседними точками на какой-то экваторе. Тогда у этого плоского графа степень каждой вершины будет по крайней мере 6, что возможно по формуле Эйлера только, если в графе есть кратные рёбра. Это означает, что все экваторы проходят через две диаметрально противоположные точки на сфере.

3.4.2. Пусть в магической конфигурации некоторой прямой (некоторому экватору) приписано число большее $\frac{1}{2}$. Докажите, что все остальные прямые (экваторы) пересекаются в одной точке (двух антиподальных точках).

Решение. Через e обозначим экватор с приписанным числом большим $\frac{1}{2}$. Заметим, что другим экваторам приписаны числа меньшие $\frac{1}{2}$, так как иначе в точке пересечения другого экватора с e сумма чисел была бы больше 1.

Чтобы завершить доказательство, нужно показать, что найдётся два экватора, отличных от e , таких, что через одну из их точек пересечения не проходят другие экваторы (включая e). Это можно сделать, например, следующим образом. Рассматриваем рисунок на плоскости, соответствующий рисунку из экваторов на сфере, у которого образ e был бы бесконечно удалённой прямой. Далее применяется доказательство теоремы Сильвестра через минимальные расстояния между точкой пересечения и прямой, не проходящей через эту точку. Попробуйте самостоятельно восстановить доказательство. Например, можно посмотреть, как это делается в доказательстве леммы 5.6 в книге [7].

3.4.3. Докажите, что есть точка, в которой пересекаются ровно две синие и одна красная прямая (экватор). Напомним, что конфигурация состоит из прямых (экваторов), а не из точек.

Решение. Как мы знаем, по теореме Сильвестра для синих экваторов найдётся две синих экватора, через точку пересечения которых не проходит больше синих экваторов. Следовательно через их точку пересечения должна проходить красный экватор, так как сумма весов для каждой точки пересечения должна равняться 1.

3.4.4. Докажите, что в конфигурации есть синий четырехугольник разбиения с красными диагоналями.

Решение. Рассмотрим плоский граф, образованный точками пересечений синих экваторы, рёбрами которого будут пары вершин, лежащих на одном синем экваторе, между которыми на экваторе нет других вершин. Воспользуемся формулой (1) при $\alpha = \frac{1}{3}$. Дадим каждой вершине заряд равный $(\deg v - 6)$, а каждой грани заряд равный $(2 \deg f - 6)$. Заметим, что для каждой вершины степени 4 (через которую проходят две синие прямые), найдётся красная прямая, проходящая через неё, так как суммарный заряд должен равняться 1.

Начнём перераспределять заряды (это процесс мы продолжим в последующих задачах). От каждой грани, для которой какой-то красный экватор является диагональю, передадим по заряду, равному 1, в концы этой диагонали.

Убедитесь самостоятельно, что если не найдётся синего четырёхугольника с красными диагоналями, то заряд каждой грани и каждой вершины будет неотрицательным. Таким образом, мы получаем противоречие.

3.4.5. Докажите, что найдется синий треугольник разбиения, имеющий общую сторону с плохим четырехугольником.

Решение. На текущий момент единственный граней с отрицательным зарядом — плохой четырехугольник (напомним, что у вершин заряды получаются неотрицательными). Точнее у плохого четырехугольника будет заряд равный (-2) .

Далее передадим от каждой грани смежной с плохим четырехугольником по заряду равному $\frac{1}{2}$. Так как суммарный заряд отрицательный, то обязательно найдётся плохой треугольник.

3.4.6. Докажите, что если плохой треугольник имеет общие стороны сразу с двумя плохими четырехугольниками, то наша конфигурация является двойственной конфигурацией недоФано.

Решение. Убедитесь в этом самостоятельно. Это нетрудно следует из того, что один из красных экваторов будет пересекать синий экватор в двух точках (вершины двух плохих четырехугольников).

3.4.7. Докажите, что найдутся плохой треугольник t , его плохой четырехугольник d и их общая вершина A такие, что кусок разбиения, вертикальный¹⁰ t относительно A , является четырехугольником.

Решение. На данный момент единственный тип граней с отрицательным зарядом — плохие треугольники. Заряд в каждом из них будет равен $-\frac{1}{2}$, так как мы предположили, что плохой треугольник соседствует всего с одним плохим четырехугольником.

Теперь от каждой грани степени по крайней мере 5, которая вертикальна плохому треугольнику и смежна его плохому четырехугольнику передадим по заряду равный $\frac{1}{2}$ в плохой треугольник. Убедитесь самостоятельно, что в этом случае каждая из граней степени по крайней мере 5 будет с положительным зарядом.

Из этого будет следовать наличие требуемая конструкция. На самом деле всегда можно найти плохой треугольник t смежный плохому четырехугольнику d , который либо будет смежен обычным четырехугольником, вертикальным t , либо будет смежен плохому треугольнику и обычному четырехугольнику, которые вертикальны t . Только у таких треугольников t будут отрицательные заряды, равные $-\frac{1}{2}$. Плохие треугольники в последней конструкции будем называть *очень плохими*, смежные им плохие четырехугольник будем

¹⁰ Два куска разбиения с общей вершиной A называются *вертикальными относительно A* , если их углы при A вертикальны

называть *очень плохими*, а хорошим четырехугольником будет называться четырехугольник вертикальный очень плохому треугольнику.

3.4.8. Рассмотрим разбиение проективной плоскости (сферы) синими прямыми (экваторами). Докажите, что найдётся такая прямая (экватор), что среди частей разбиения, примыкающих к этой прямой (экватору), ровно две (четыре) являются треугольными.

Решение. Итак, на текущий момент гранями с отрицательным зарядом являются очень плохие треугольники. Заряд каждого такого треугольника всё ещё $-\frac{1}{2}$. Далее мы хотим показать, что заряда в хороших четырехугольниках достаточно, чтобы компенсировать заряд во всех очень плохих треугольниках.

Теперь рассмотрим двудольный граф. Вершинами первой доли этого двудольного графа будут пары (b, e) , где b — это очень плохой четырехугольник, а e — экватор, образующий смежную сторону с его очень плохим треугольником t . Вершины другой доли будут пары (g, e) , где g — хороший четырехугольник, а e — экватор, который образует сторону g и сторону очень плохого четырехугольника (соответствующего g), при этом g и его очень плохой четырехугольник лежат по одну сторону относительно e . Пары вершин (из разных долей) вида (b, e) и (g, e) соединим ребром, если b и g смежные и лежат по одну сторону относительно e . Степень каждой вершины в получившемся графе равна 1 или 2.

Если в получившемся графе рёбер больше, количества вершин в первой доле, то несложно убедиться (это предлагается сделать самостоятельно), что суммарный заряд неотрицательный.

Если же суммарный заряд отрицательный, то обязательно найдётся следующая конструкция: индуцированный путь $(b_1, e), (g_1, e), \dots, (g_k, e), (b_{k+1}, e)$, где $b_1, g_1, \dots, g_k, b_{k+1}$ — смежные четырехугольники, лежащие от ограничивающего их экватора e с одной стороны, а также четырехугольники b_1 и b_{k+1} смежны с треугольниками.

Теперь докажите самостоятельно, что найдется искомая прямая

3.4.9. Покажите, что случай, описанный в предыдущей задаче, тоже невозможен.

Решение. Докажите самостоятельно теорему Леви, утверждающую, что если есть семейство экваторов на сфере, то к каждому из них примыкает по крайней мере шесть треугольников (исключение состоит в случае, когда все прямые кроме возможно одной проходят через одну точку). См. предложение 5.13 в [7].

Список литературы

- [1] А.Канель and А.Ковальджи. Треугольники и катастрофы. *Квант*, (11), 1992.
- [2] Р Дистель. *Теория графов*. Изд-во Ин-та математики Новосибирск, 2002.
- [3] Sascha Kurz and Rom Pinchasi. Regular matchstick graphs. *arXiv preprint arXiv:1401.4372*, 2014.
- [4] Eyal Ackerman and Gábor Tardos. On the maximum number of edges in quasi-planar graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 114(3):563–571, 2007.
- [5] Daniel W Cranston. Edge-choosability and total-choosability of planar graphs with no adjacent 3-cycles. *arXiv preprint math/0512518*, 2005.
- [6] Eyal Ackerman, Kevin Buchin, Christian Knauer, Rom Pinchasi, and Günter Rote. There are not too many magic configurations. *Twentieth Anniversary Volume: Discrete & Computational Geometry*, page 1, 2009.
- [7] Stefan Felsner. *Geometric graphs and arrangements: some chapters from combinatorial geometry*. Springer Science & Business Media, 2012.

Discharging method*

Egor Bakaev, Vera Bulankina,
Grigory Chelnokov, [Alexandr Polyanskii](#), Andrey Ryabichev

Introduction

This project is devoted to a certain classical idea in graph theory. It plays a crucial role in the proofs of many “structural” results on graphs drawn in the plane that are not necessarily planar. This idea became well-known because of its application in the proof of the celebrated four color theorem. This idea is the so-called *discharging method*: it is a certain form of *double counting* based on Euler’s Formula for a planar graph.

Our project is aimed at an experienced problem solver. We do not plan to show step-by-step instructions and explain how considered method works. Instead, we are going to provide sufficient amount of problems of gradually increasing difficulty, which will form a ladder both to understanding the method and to the valued results achieved through it. Below you can find three interesting problems of the project, which are very difficult, and so we recommend you to postpone solving them for now and to return to them only after the semifinal.

1. Let P be a finite set of points in the plane. P is called a *magical configuration* if there is an assignment of positive weights to the points of P such that, for every line ℓ containing at least two points of P , the sum of the weights of all points of P on ℓ equals 1. Describe all magical configurations.
2. We say that a graph Γ is *drawn in the plane* if the vertices $V(\Gamma)$ are represented by distinct points and the edges $E(\Gamma)$ are represented by (Jordan) arcs, each connecting two vertices and containing no other vertex. We say a graph is *quasi-planar* if it can be drawn in the plane in such a way that no 3 of its edges are pairwise crossing in their inner points¹. Prove that, for a quasi-planar graph Γ , the inequality $|E(\Gamma)| \leq 8|V(\Gamma)| - 20$ holds.
3. A graph Γ is called a *matchstick graph* if Γ can be drawn in the plane in such a way that edges are represented by segments of length 1, and no two edges cross. Prove that a matchstick graph must have a vertex of degree different from 5.

Also, it is worth mentioning that in the last section of our project (that will be given to you after the semifinal) you can find some open research problems that probably could be solved using this method. A solution of any of them is a publishable result.

*Here you can find the current results: <https://clck.ru/HMnm8>

¹Note that if one replaces 3 with 2 in the above definition, one gets the definition of a planar graph. This explains the choice of the term “quasi-planar”.

Useful notations

Denote by $V(\Gamma)$ and $E(\Gamma)$, respectively, the sets of the vertices and the edges of a graph² Γ . Moreover, if an embedding of Γ in the plane is given, then $F(\Gamma)$ denotes the set of the faces of the drawing of Γ . Famous *Euler's Formula* states that, for a connected planar graph Γ ,

$$|V(\Gamma)| - |E(\Gamma)| + |F(\Gamma)| = 2.$$

Denote the *degree* of the vertex $v \in V(\Gamma)$ by $\deg(v)$. Also, denote by $\delta(\Gamma)$ and $\Delta(\Gamma)$ the *minimum* and *maximum* degree of a vertex in $V(\Gamma)$, respectively. A graph is called *n-regular* if the degree of any vertex is n . The *weight* of an edge uv is $\deg(u) + \deg(v)$. Call the *degree* $\deg(f)$ of a face f the number of edges along the boundary of f (that is a cut-edge is counted twice).

Definition. We say that a graph has a *proper coloring* in k colors (or it is *k-colorable*) if for each vertex one can assign one of the numbers $1, \dots, k$ (called *colors*) in such a way that adjacent vertices are colored differently. The chromatic *number* $\chi(\Gamma)$ is the least k such that a graph G has a proper coloring in k colors.

A subgraph Γ' of a graph Γ is *induced* if $E(\Gamma')$ contains all edges of $E(\Gamma)$, that connect vertices of $V(\Gamma')$.

1 Double counting

1.1. Some cells of a given table are marked. For every marked cell, the number of marked cells in its column equals to the number of the marked cells in its row. Prove that the number of rows with at least one marked cell is equal to the number of columns with at least one marked cell.

1.2. E elves and D dwarfs arrived to the Zilantkon convention. It turns out that during the convention every dwarf got into a fight with at least one elf and every elf got into a fight with at most ten dwarfs. Also, it is known that every dwarf has more opponents-elves than any of his opponents-elves has opponents-dwarfs. Prove that $D \leq \frac{10}{11}E$.

1.3. A table has m rows and n columns, where $m < n$. Some cells are marked in such a way that every column contains at least one marked cell. Prove that there is a marked cell such that the number of marked cells in its row is larger than the number of marked cells in its column.

1.4. In a school library there were exactly k empty bookshelves yesterday. Today in the morning, some books were rearranged in such a way that every shelf is not empty anymore. A book is called *boring* if the number of books on its current shelf is less than the number of books on its shelf before the rearrangement. Prove that there are at least $k + 1$ boring books.

1.5. Suppose that an $n \times n$ table is filled **a)** with numbers 0 and 1 **b)** with non-negative integers in such a way that if some cell of the table contains 0, then the sum of all numbers in its cross³ is at least 1000. Find the least possible sum of numbers in the table.

²From now on, we consider graphs without loops and multiple edges unless otherwise stated.

³A cross of a cell is the union of cells lying with it in the same row or the same column

1.6. Suppose that a convex n -gon and m red points distinct from the vertices of the polygon are drawn on a blackboard. It turns out that each segment between two vertices of the polygon contains at least one red point. Prove the inequality

$$m \geq n \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \right).$$

1.7. Consider n unit circles drawn in the plane. It is known that each of them intersects with at least one another circle and also there are no two touching circles. It is possible that more than two circles pass through one point. Prove that there are at least n intersection points.

1.8. A square is cut into several triangles. Prove that there are two triangles sharing a common edge.

1.9*. There are n lines in general position in the plane, that is, no three of them share a common point and no two are parallel. These lines split the plane into several parts. Prove that there are at least $n - 2$ triangles among them.

2 Problems about graphs

Planar graphs

This subsection contains problems that historically were proven by the discharging method. Most of them are lemmas in serious articles. However, these problems are not harder than difficult olympiad ones. Thus, we find it reasonable to present them without extra hints.

2.1. Let V be a convex polyhedron without 4-gonal and 5-gonal faces. Prove that V has at least 4 triangular faces.

2.2. Let Γ be a planar graph with $\delta(\Gamma) \geq 2$ and all cycles of length at least 7. Prove that there is an edge of Γ of weight at most 5.

2.3. Let Γ be a planar graph with $\delta(\Gamma) \geq 5$ such that all its faces are triangles, and there is no two adjacent vertices of degree 5. Prove that there is a face with degrees of vertices 5, 6 and 6, respectively.

2.4. Let Γ be a planar graph with $\delta(\Gamma) \geq 5$. Prove that there is an edge of weight at most 11.

2.5. Let Γ be a planar graph such that $\delta(\Gamma) \geq 3$. Prove that there are a face f and a vertex $v \in f$ such that either $\deg(v) = 3$ and $\deg(f) \leq 5$ or $\deg(v) \leq 5$ and $\deg(f) = 3$.

2.6. Let Γ be a connected planar graph such that $\delta(\Gamma) \geq 3$. Prove that there is a face of length at most 5 with the degrees of all its vertices but one do not exceed 11.

Light colorings

Every problem of the previous subsection states that a graph with some global property satisfies some local property. For instance, an information about the minimal degree of

a graph implies that it contains a given subgraph. Analogous statements can be useful for proving of upper bounds on the chromatic number of a graph.

2.7. a) Prove that any planar graph is 6-colorable.

b) Suppose that, for any subgraph of a given graph Γ , one of the following conditions holds: 1) there is a vertex of degree at most $d - 1$; 2) there is an even induced cycle such that the degree of every its vertex does not exceed d . Prove that the induced graph Γ is d -colorable.

Definition. We say that a graph has a *very light coloring* in d colors if one can consequently delete all the vertices in such a way that, at each step one deletes a vertex of degree at most $d - 1$.

Note. For instance, Problem 2.7a is about a very light coloring.

Definition. A graph is called *k-choosable* if for any assignment of sets (called *lists*) of k colors to vertices (the lists are not necessary the same), there exists a proper coloring according to the lists, that is, for each vertex one can choose a color from its list in such a way that the colors of adjacent vertices are different.

Analogously we can define *k-edge-choosability*.

The *list chromatic number* of Γ , written (Γ) , is the least k such that Γ is k -choosable.

It is obvious that k -choosability of a graph implies its k -colorability. Indeed, it is possible that all the lists assigned to the vertices are the same. It turns out that the converse is false, that is, a graph can be k -colorable but not k -choosable.

2.8. a) Prove that for a given k there exists an integer n such that the complete bipartite graph $K_{n,n}$ is not k -choosable. Although it is 2-colorable as any bipartite graph.

b) Prove that any even cycle is not only 2-colorable but also 2-choosable.

2.9. a) Suppose that every inner face of a planar graph Γ is a triangle and its outer face is bounded by a cycle $v_1 \dots v_k v_1$. Suppose further that with v_1 and v_2 lists of 2 colors are associated, with every other vertex of the outer face a list of 3 colours, and with every inner vertex a list of 5 colours. Then there exists a proper list coloring of Γ for the given lists.

b) Every planar graph is 5-choosable.

Definition. We say that a graph is *lightly d-choosable* with respect to its induced subgraphs $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ if one can consequently delete these induced subgraphs to get the empty graph in such a way that, at i -th step the number of edges of every vertex of Γ_i connecting it with the remaining vertices but $V(\Gamma_i)$ is at most $d - (\Gamma_i)$.

Notice that the graph in Problem 2.8b is lightly d -choosable.

It is possible to use the idea generalizing light choosability for proving the existence of total coloring.

Definition. Given an assignment of lists of colors to vertices and edges of a given graph Γ (the sizes of lists are not necessary the same), we say that Γ has a *proper total list coloring* if for every vertex and every edge, one can choose a color from its list in such a way that any two neighboring elements⁴ receive different colors.

⁴Two vertices are called *neighboring* if they are connected by an edge, two edges are *neighboring* if they share a common vertex, a vertex and an edge are *neighboring* if the vertex belongs to the edge.

Consider a planar graph Γ with $\Delta(\Gamma) \geq 11$. Assign lists of size $\Delta(\Gamma)$ to the vertices of Γ and lists of size $\Delta(\Gamma) + 2$ to the edges. Prove that Γ has a proper total list coloring for this set of lists.

3 Main problems

In this section, we present four problems proved by the discharging method that were results of mathematical articles. We reveal a few intermediate steps of the solution.

3.1 Matchstick graphs

Definition. A *matchstick graph* is such a graph whose vertices are points in the plane, edges are represented by segments of length 1, and no two edges cross. (Note that a pair of vertices at distance 1 is not necessarily an edge.)

Key Problem 1. Prove that a 5-regular matchstick graph does not exist.

Note. Actually, in any matchstick graph there is a vertex with degree less than 5.

Definition. A graph Γ is called a *graph of minimal distances*, if Γ can be drawn in the plane in such a way that edges are pairs of points at distance 1, and no pair of vertices are at distance less than 1.

3.1.1. Let Γ be a graph of minimal distances on n vertices that are in general position⁵. Prove that **a)** $E(\Gamma) < 5n/2$, **b)** there exists a constant $c < 5/2$ such that $E(\Gamma) \leq cn$.

c) An *interesting graph* is a graph of minimal distances such that, for every vertex, it and its neighbors are in general position⁶. Prove that, for every $c < 5/2$, there is an interesting graph Γ with at least $c|V(\Gamma)|$ edges.

3.1.2. Solve Key Problem 1.

3.1.3*. Prove that a 4-regular matchstick graph contains at least 20 vertices.

3.2 Quasi-planar graphs

Definition. We say that a graph Γ is *drawn in the plane* if the vertices $V(\Gamma)$ are represented by distinct points and the edges $E(\Gamma)$ are represented by (Jordan) arcs, each connecting two vertices and containing no other vertex.

This definition is auxiliary, it is needed to define different classes of graphs. For instance, prohibiting edge crossings, we obtain the definition of planar graphs. Considering different relaxations of the crossing condition⁷ we obtain different extensions of the class of planar graphs.

⁵that is, no three of them are on the same line

⁶all vertices are not necessary in general position

⁷For example, the condition that each edge has at most t inner crossings, or that there are at most d edges pairwise crossing in inner points

Definition. A graph is called *quasi-planar* if it can be drawn in the plane in such a way that each two edges intersect in at most one inner point and no three edges are pairwise crossing in their inner points.

Key Problem 2. a) Prove that $|E(\Gamma)| \leq 8n - 20$ for a quasi-planar graph Γ on n vertices.

b) Try to improve the statement of the previous problem. Both sharpening of the inequality and its generalizations for other classes of graphs are interesting.

3.2.1. Suppose that the graph satisfies the following additional condition: There are no three edges e_1, e_2, e_3 such that e_1 and e_2 has the same end A , the edge e_3 intersects them at interior points B and C , and there are no other intersections on the sections of the arcs AB and AC . Prove that the number of edges is at most $4n - 8$.

3.2.2. (Исправить бы формулировку) Without the additional condition in the last problem, prove the bound for the number of edges $10n - 20$. In the solution of the previous problem you have found the initial distribution of charges that very likely also works here.

3.2.3. Finally, solve Key Problem 2a. In the solution of the previous problem you have found the initial distribution of charges that very likely also works here.

3.3 List edge coloring

Here, we use the concept of light coloring in a new setting. Recall that the idea is to show that it is possible to delete a part of a given graph, and thus to reduce the question of coloring of the graph to the same question for the remaining subgraph.

In this section, by *triangle* we denote a 3-cycle. Denote by Γ a planar graph with an extra condition: There are no two triangles sharing an edge.

The main goal of this section is to solve the following problem.

Key Problem 3. Prove that if $\Delta(\Gamma) \geq 6$, then Γ is $(\Delta(\Gamma) + 1)$ -edge-choosable.

Note. The statement of Key Problem 3 holds in the case $3 \leq \Delta(\Gamma) \leq 4$, even for non-planar graphs. If $\Delta(\Gamma) = 5$, then Γ is $(\Delta(\Gamma) + 2)$ -edge-choosable.

3.3.1. Prove that if $\Delta(\Gamma) \geq 7$, then Γ is $(\Delta(\Gamma) + 1)$ -edge-choosable.

You solved Key Problem 3.3.1 in the case $\Delta(\Gamma) \geq 7$. To solve the case $\Delta(\Gamma) = 6$, additional efforts are required.

3.3.2. There is an extra configuration that is special for the case $\Delta(\Gamma) = 6$: A 6-vertex that is incident to three triangles, two of these triangles are of type $(6, 6, 3)$ and the third one is of type $(6, 6, 3)$, $(6, 5, 4)$, or $(6, 6, 4)$. Prove that if Γ contains such a configuration, then it is possible to reduce the question on coloring of Γ to the same question for its subgraph.

3.3.3. Finally, prove that if $\Delta(\Gamma) = 6$, then Γ contains one of some three configurations⁸ each of those allows to reduce the question on coloring of Γ to the same question for its subgraph.

⁸Solving problem 3.3.1, you found the first configuration, another one is defined in problem 3.3.2. Try to figure out what is the third one.

3.4 Magical configurations

Definition. A finite planar point set P is called a *magical configuration* if there is an assignment of positive weights to the points of P such that, for every line ℓ containing at least two points of P , the sum of the weights of all points of P on ℓ equals 1.

Key Problem 4. Describe all magical configurations.

This problem is partially motivated by famous Sylvester's Theorem.

Sylvester's Theorem. *If P is a finite set of points in the plane, then either P is a subset of a line, or there exist two points $A, B \in P$, such that the line AB contains no other points of P .*

We need the following interesting configuration.

Definition. A *Failed Fano* configuration is the following configuration of 7 points in the plane: Points A_1, A_2, A_3, A_4 that are in general position, and the other three are intersections of lines: $B_1 = A_1A_2 \cap A_3A_4$, $B_2 = A_1A_3 \cap A_2A_4$, and $B_3 = A_1A_4 \cap A_2A_3$.

It turns out that the dual language is more convenient to solve Key Problem 4.

3.4.0. a) *Optional problem for those who use the language of projective geometry.* Consider a dual configuration to a magical configuration of points in the projective plane (that is a configuration of lines). Describe a configuration dual to a Failed Fano configuration.

b) *Optional problem for those who do not use the language of projective geometry.* Suppose that points and lines are drawn in the plane. Find a correspondence π that associate a drawing in the plane with a drawing on a unit sphere such that the image of a point is an equator⁹ of the sphere, the image of a line in the plane is a pair of antipodal points on the sphere (note that the image of a line is not the union of the images of its points!), and the correspondence preserves the incidence relation, that is, if a point A lies on a line ℓ , then $\pi(\ell)$ belongs to the equator $\pi(A)$. Prove other natural properties of the correspondence:

- The image of a line AB is a pair of the intersections of equators $\pi(A)$ and $\pi(B)$.
- The image of the intersection of lines ℓ_1 and ℓ_2 is an equator containing pairs of antipodal points $\pi(\ell_1)$ and $\pi(\ell_2)$.

Also, find the image of a Failed Fano configuration.

3.4.1. Using dual terms and Euler's Formula, prove Sylvester's Theorem.

A configuration of lines (equators) is *magical* if it is dual to a magical configuration of points. From now on, we consider only magical configurations of lines.

3.4.2. Suppose that, in a magical configuration P , the assigned weight to a line (equator) is greater than $\frac{1}{2}$. Prove that all the rest lines (equators) of P share a common point (pair of antipodal points).

From now on, we suppose that there is no point A belonging to all lines but, maybe, one. A *red line* is a line with assigned number $\frac{1}{2}$. All the rest lines are called *blue*.

⁹An *equator* is the intersection of a sphere with a plane passing through its center.

3.4.3. Prove that there exists a point A that belongs to exactly two blue and one red lines (equators). Recall that the configuration consists of lines (equators).

3.4.4. Prove that there is a blue quadrilateral with red diagonals.

From now on, we call such a quadrilateral *bad*.

3.4.5. Prove that there is a blue triangle sharing a common edge with a bad quadrilateral.

From now on, we call such a triangle *bad*.

3.4.6. Prove that if a bad triangle shares two edges with bad quadrilaterals, then the configuration is the configuration dual to a failed Fano configuration.

From now on, we suppose that each bad triangle shares an edge with exactly one bad quadrilateral.

3.4.7. Prove that there are a bad triangle t , its bad quadrilateral d , and one of their common vertices denoted A such that the cell, vertical¹⁰ to t with respect to A , is a quadrilateral.

3.4.8. Consider the partition of the projective plane (the sphere) by the blue lines (equators). Prove that there is a blue line (a blue equator) bounding exactly two (four) triangles.

3.4.9. Prove that the case described in the previous problem is also impossible.

¹⁰Two cells containing a vertex A are *vertical with respect to A* if their angles A are vertical.

Discharging method*

Egor Bakaev, Vera Bulankina,
Grigory Chelnokov, [Alexandr Polyanskii](#), Andrey Ryabichev

1 Double counting

1.1. Some cells of a given table are marked. For every marked cell, the number of marked cells in its column equals to the number of the marked cells in its row. Prove that the number of rows with at least one marked cell is equal to the number of columns with at least one marked cell.

Solution. Let us put in every marked cell c the number $\frac{1}{k}$, where k is the number of marked cells in the column (the row) of c . Clearly, the sum of numbers in each non-empty row is 1, and so the total sum of all numbers in the table equals the number of non-empty rows. Analogously the total sum of all numbers in the table equals the number of non-empty columns.

1.2. E elves and D dwarfs arrived to the Zilantkon convention. It turns out that during the convention every dwarf got into a fight with at least one elf and every elf got into a fight with at most ten dwarfs. Also, it is known that every dwarf has more opponents-elves than any of his opponents-elves has opponents-dwarfs. Prove that $D \leq \frac{10}{11}E$.

Solution. Let us assign charge 1 to every elf, then the total charge is equal to E . If an elf has k opponents-dwarfs, then he gives the charge $\frac{1}{k}$ to each of those.

If a dwarf Duda has m opponents-elves, then each of those has at most $m-1$ opponents-dwarf, where $m \leq 11$, and thus give Duda a charge at least $\frac{1}{m-1}$. Therefore, each dwarf obtains charge at least $\frac{m}{m-1} \geq \frac{11}{10}$.

Thus, the final charge of dwarfs is at least $\frac{11}{10}D$. Hence, $\frac{11}{10}D \leq E$.

1.3. A table has m rows and n columns, where $m < n$. Some cells are marked in such a way that every column contains at least one marked cell. Prove that there is a marked cell such that the number of marked cells in its row is larger than the number of marked cells in its column.

Solution. Let us give to every column a charge (-1) and to every row a charge 1. Clearly, the total charge is negative. Let every row or column distribute its charge evenly to each of its marked cells. Since the total charge is negative there is a cell with a negative charge. It is easy to see that this is a desired cell.

1.4. In a school library there were exactly k empty bookshelves yesterday. Today in the morning, some books were rearranged in such a way that every shelf is not empty anymore. A book is called *boring* if the number of books on its current shelf is less than

*Here you can find the current results: <https://clck.ru/HMmm8>

the number of books on its shelf before the rearrangement. Prove that there are at least $k + 1$ boring books.

Solution. In the solution of this problem we are interested only in the change of charges of books.

First, if a book initially lied on a shelf with n other books, then it take a charge $\frac{1}{n}$ from its shelf. If a book after rearrangement lies on a shelf with m other books, then it gives a charge $\frac{1}{m}$ to its shelf.

Then the total change of charges of books decreases by k . But the change of a charge of one book is less than 1. Therefore, there are $k + 1$ desired books.

1.5. Suppose that an $n \times n$ table is filled **a)** with numbers 0 and 1 **b)** with non-negative integers in such a way that if some cell of the table contains 0, then the sum of all numbers in its cross¹ is at least 1000. Find the least possible sum of numbers in the table.

Solution.

1.6. Suppose that a convex n -gon and m red points distinct from the vertices of the polygon are drawn on a blackboard. It turns out that each segment between two vertices of the polygon contains at least one red point. Prove the inequality

$$m \geq n \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \right).$$

Solution. See the proof of Theorem 3 in [Mat09].

1.7. Consider n unit circles drawn in the plane. It is known that each of them intersects with at least one another circle and also there are no two touching circles. It is possible that more than two circles pass through one point. Prove that there are at least n intersection points.

Solution. See the proof of Theorem 1 in [LP07].

1.8. A square is cut into several triangles. Prove that there are two triangles sharing a common edge.

Solution. See the proof of Theorem 6 in [KPT17].

1.9*. There are n lines in general position in the plane, that is, no three of them share a common point and no two are parallel. These lines split the plane into several parts. Prove that there are at least $n - 2$ triangles among them.

Solution. See the proof of Theorem 5.15 in [Fel12].

2 Problems about graphs

Planar graphs

Here, we present the common idea of the proofs given in this subsection.

For a connected planar graph Γ , consider Euler's Formula

$$V(\Gamma) - E(\Gamma) + F(\Gamma) = 2.$$

¹A cross of a cell is the union of cells lying with it in the same row or the same column

Multiplying the equality by (-2) and using $2E(\Gamma) = \sum_{v \in V} \deg v = \sum_{f \in F} \deg f$, we can rewrite Euler's Formula in the following way

$$\sum_{v \in V(\Gamma)} (\alpha \deg v - 2) + \sum_{f \in F(\Gamma)} ((1 - \alpha) \deg f - 2) = -4. \quad (1)$$

Choosing different values of α , we obtain different equalities. Let us assign charges to the vertices and the faces of Γ according to the left-hand side of (1). Of course, the total charge is negative. Then we suppose the contrary to the desired statement of the problem. Using that and the properties of the graph given in a problem, we rearrange the charges in a way that the final charge of every element (a vertex or a face) becomes non-negative. Usually, this contradiction finishes the proof.

2.1. Let V be a convex polyhedron without 4-gonal and 5-gonal faces. Prove that V has at least 4 triangular faces.

Solution. Let us project the polyhedron on the plane in a way we obtain a plane graph. Choosing $\alpha = \frac{2}{3}$ in (1) and multiplying it by 3, we have

$$\sum_{v \in V} (2 \deg v - 6) + \sum_{f \in F} (\deg f - 6) = -12.$$

Let us assign charges in the following way: a vertex v obtains a charge $(2 \deg v - 6)$ and a face f gets a charge $(\deg f - 6)$. Since every vertex has degree at least 3, its charge is non-negative. If $\deg f = 3$, then its charge is (-3) ; if $\deg f \geq 6$, then its charge is non-negative. Since the total charge equals (-12) , then there are at least 4 faces with the charge (-3) , that is, 4 triangular faces.

Note that in this proof we did not rearrange the charges between faces and vertices.

2.2. Let Γ be a planar graph with $\delta(\Gamma) \geq 2$ and all cycles of length at least 7. Prove that there is an edge of Γ of weight at most 5.

Solution. See the proof of Lemma 6.11 in [CW13].

2.3. Let Γ be a planar graph with $\delta(\Gamma) \geq 5$ such that all its faces are triangles, and there is no two adjacent vertices of degree 5. Prove that there is a face with degrees of vertices 5, 6 and 6, respectively.

Solution. Consider (1) for $\alpha = \frac{1}{2}$ and multiply by 2. Thus, we obtain

$$\sum_{v \in V} (\deg v - 4) + \sum_{f \in F} (\deg f - 4) = -8.$$

Assign to a vertex v the charge $\deg v - 4$ and to a face f a charge $\deg f - 4$.

Then every vertex of degree 5 gives to each of its faces a charge $\frac{1}{5}$, every vertex 6 gives charge $\frac{1}{3}$ and every vertex of degree at least gives charge $\frac{2}{5}$.

Then the charges of vertices of degree 5 or 6 became equal to 0. For vertices of degree n , where $n \geq 7$, the charge becomes equal to $n - 4 - \frac{2}{5}n = \frac{3}{5}n - 4 \geq \frac{3}{5} \cdot 7 - 4 > 0$.

Initially every vertex of degree at least 4 was non-negative and after rearrangement of charges it is still non-negative. Now consider a triangular face. Suppose the contrary the charge of every edge is at least 12. Then the set of degrees of every face must be

$(5, 7+, 7+)$ or $(6+, 6+, 6+)^2$. It is easy to see in both cases the charge of every face is non-negative.

2.4. Let Γ be a planar graph with $\delta(\Gamma) \geq 5$. Prove that there is an edge of weight at most 11.

Solution. See the subsection 'An easy example' on the webpage [https://en.wikipedia.org/wiki/Discharging_method_\(discrete_mathematics\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Discharging_method_(discrete_mathematics))

2.5. Let Γ be a planar graph such that $\delta(\Gamma) \geq 3$. Prove that there are a face f and a vertex $v \in f$ such that either $\deg(v) = 3$ and $\deg(f) \leq 5$ or $\deg(v) \leq 5$ and $\deg(f) = 3$.

Solution.

Multiplying the equality (1) for $\alpha = \frac{1}{2}$ and multiply, we have

$$\sum_{v \in V} (\deg v - 4) + \sum_{f \in F} (\deg f - 4) = -8.$$

Assign to a vertex v a charge $\deg v - 4$ and to a face f a charge $\deg f - 4$.

Suppose the contrary that every face of degree 3 does not have vertices of degree less than 6 and every vertex of degree 3 is not incident to a face of degree at less than 6.

Then every vertex of degree at least 6 gives to every incident face a charge $\frac{1}{3}$. Therefore, the charge of such a vertex is non-negative and every triangular face has charge equal to 0.

Also, every face of degree at least 6 gives to its vertices the charge $\frac{1}{3}$. Therefore, the charges of such faces are non-negative and every triangular face has a charge equal to 0. A contradiction.

2.6. Let Γ be a connected planar graph such that $\delta(\Gamma) \geq 3$. Prove that there is a face of length at most 5 with the degrees of all its vertices but one do not exceed 11.

Solution. Multiplying the equality (1) for $\alpha = \frac{2}{3}$ by 3, we have

$$\sum_{v \in V(\Gamma)} (2 \deg v - 6) + \sum_{f \in F(\Gamma)} (\deg f - 6) = -12.$$

Assign to a vertex v a charge $2 \deg v - 6$ and to a face f charge $\deg f - 6$.

Suppose the contrary, that is, every face of degree at most 5 has at least two vertices of degree at least 12.

Let every vertex of degree n , where $n \geq 12$, give to every incident face a charge $\frac{3}{2}$. Then its charge becomes equal to $2n - 6 - \frac{3}{2}n = \frac{1}{2}n - 6 \geq 0$. Every face of degree at most 5 will obtain charge from at least two vertices, and so its charge is at least $-3 + \frac{3}{2} \cdot 2 = 0$. All the rest vertices and faces initially had non-negative charges and these charges do not decrease.

Light colorings

2.7. a) Prove that any planar graph is 6-colorable.

b) Suppose that, for any subgraph of a given graph Γ , one of the following conditions holds: 1) there is a vertex of degree at most $d - 1$; 2) there is an even induced cycle such

²Here, we denote by $k+$ a number that is at least k .

that the degree of every its vertex does not exceed d . Prove that the induced graph Γ is d -colorable.

Solution. **a)** Every face of a planar graph Γ has at least 3 edges, thus, $3|F(\Gamma)| \leq 2|E(\Gamma)|$. Substituting this inequality in Euler's Formula, we obtain

$$6 = 3|V(\Gamma)| - 3|E(\Gamma)| + 3|F(\Gamma)| \leq 3|V(\Gamma)| - |E(\Gamma)|.$$

It means $3V > E$, and so there is a vertex of degree at less than 6.

Now, it is easy to finish the proof using induction. We leave it as an exercise for the reader.

b) Prove this statement for all subgraphs of Γ by induction on the number n of vertices.

If in Γ there is a vertex v of degree at most $d - 1$, then color $\Gamma \setminus \{v\}$ in d colors (by induction) and then choose the proper color for v .

Otherwise, in Γ there is an even induced cycle $v_1 \dots v_k$ such that the degree of each vertex is at most d . Denote by C the set of its vertices. By the induction hypothesis, we color $\Gamma \setminus C$ in a proper way. Now, let us show how we can color vertices of C . For every vertex in C , there is at most $d - 2$ edges connecting it with vertices in $\Gamma \setminus C$, and thus for each vertex in C there are at least 2 possible colors.

Let us show the following Lemma.

Lemma. If, to every vertex of an even cycle, a list of 2 colors is assigned, then it is possible to color it in proper way choosing colors from the corresponding list.

If lists of the vertices of the cycle are the same, then, clearly, it is possible to color it alternatively. Otherwise, there are two neighbouring vertices with distinct lists, say, the vertices v_1 и v_k . Color v_1 in a color that is not in the list of v_k . Then there is a choice for coloring v_2 , and so we can color it. Analogously, we can color v_3, \dots, v_k . Thus, all vertices are colored in the proper way, including v_1 and v_k .

2.8. a) Prove that for a given k there exists an integer n such that the complete bipartite graph $K_{n,n}$ is not k -choosable. Although it is 2-colorable as any bipartite graph.

b) Prove that any even cycle is not only 2-colorable but also 2-choosable.

Solution. **a)** Let the first part of the graph has vertices, indexed by numbers $1, \dots, k$. Also, assume that the vertex i has list $(c_{i1}, c_{i2}, \dots, c_{ik})$, here we assume that all these k^2 colors are distinct. In the second part there are k^k vertices with all possible lists of the form $(c_{1x_1}, c_{2x_2}, \dots, c_{kx_k})$, where $x_i \in \{1, \dots, k\}$ for all i .

Then for any coloring of the first part there is a vertex of the second part, whose list coincide with the coloring of the first part, and therefore it is impossible to color it properly. Since we are going to construct an example with the same number of vertices in both parts, we add extra vertices to the first part (with arbitrary lists).

b) See the lemma in the proof of Problem 2.7b.

2.9. a) Suppose that every inner face of a planar graph Γ is a triangle and its outer face is bounded by a cycle $v_1 \dots v_k v_1$. Suppose further that with v_1 and v_2 lists of 2 colors are associated, with every other vertex of the outer face a list of 3 colours, and with every inner vertex a list of 5 colours. Then there exists a proper list coloring of Γ for the given lists.

b) Every planar graph is 5-choosable.

Solution. See the proof of Theorem 5.4.2 in [Die12].

2.10. Consider a planar graph Γ with $\Delta(\Gamma) \geq 11$. Assign lists of size $\Delta(\Gamma)$ to the vertices of Γ and lists of size $\Delta(\Gamma) + 2$ to the edges. Prove that Γ has a proper total list coloring for this set of lists.

Solution. See the proof of Theorem 6.3 (and the proof of Lemma 6.1) in [CW13].

3 Main problems

3.1 Matchstick graphs

Key Problem 1. Prove that a 5-regular matchstick graph does not exist.

Note. Actually, in any matchstick graph, there is a vertex with degree less than 5.

3.1.1. Let Γ be a graph of minimal distances on n vertices that are in general position³. Prove that **a)** $E(\Gamma) < 5n/2$, **b)** there exists a constant $c < 5/2$ such that $E(\Gamma) \leq cn$.

c) An *interesting graph* is a graph of minimal distances such that, for every vertex, it and its neighbors are in general position⁴. Prove that, for every $c < 5/2$, there is an interesting graph Γ with at least $c|V(\Gamma)|$ edges.

Solution. See [Tóth97].

3.1.2. Solve Key Problem 1.

Solution. See [KP11].

3.1.3*. Prove that a 4-regular matchstick graph contains at least 20 vertices.

Solution. See Section 3 and Theorem 3.6 in [KP14].

3.2 Quasi-planar graphs

Key Problem 2. **a)** Prove that $|E(\Gamma)| \leq 8n - 20$ for a quasi-planar graph Γ on n vertices.

b) Try to improve the statement of the previous problem. Both sharpening of the inequality and its generalizations for other classes of graphs are interesting.

Solution. See [AT07].

3.3 List edge coloring

Key Problem 3.

Solution. See the proof of Theorem 12 in [Cra05].

3.4 Magical configurations

Key Problem 4. Describe all magical configurations.

Solution. See [ABK⁺09].

³that is, no three of them are on the same line

⁴all vertices are not necessary in general position

Список литературы

- [ABK⁺09] Eyal Ackerman, Kevin Buchin, Christian Knauer, Rom Pinchasi, and Günter Rote. There are not too many magic configurations. *Twentieth Anniversary Volume: Discrete & Computational Geometry*, page 1, 2009.
- [AT07] Eyal Ackerman and Gábor Tardos. On the maximum number of edges in quasi-planar graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 114(3):563–571, 2007.
- [Cra05] Daniel W Cranston. Edge-choosability and total-choosability of planar graphs with no adjacent 3-cycles. *arXiv preprint math/0512518*, 2005.
- [CW13] Daniel W. Cranston and Douglas B. West. An introduction to the discharging method via graph coloring. 2013.
- [Die12] Reinhard Diestel. Graph theory, volume 173 of. *Graduate texts in mathematics*, page 7, 2012.
- [Fel12] Stefan Felsner. *Geometric graphs and arrangements: some chapters from combinatorial geometry*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [KP11] Sascha Kurz and Rom Pinchasi. Regular matchstick graphs. *The American Mathematical Monthly*, 118(3):264–267, 2011.
- [KP14] Sascha Kurz and Rom Pinchasi. Regular matchstick graphs. *arXiv preprint arXiv:1401.4372*, 2014.
- [KPT17] Andrey Kupavskii, János Pach, and Gábor Tardos. Tilings with noncongruent triangles, 2017.
- [LP07] Hagit Last and Rom Pinchasi. At least $n-1$ intersection points in a connected family of n unit circles in the plane. *Discrete & Computational Geometry*, 38(2):321–354, 2007.
- [Mat09] Jiří Matoušek. Blocking visibility for points in general position. *Discrete & Computational Geometry*, 42(2):219–223, 2009.
- [Tót97] Géza Tóth. The shortest distance among points in general position. *Computational Geometry*, 8(1):33–38, 1997.

Об инверсных образах точки Фейербаха, полюсах треугольника и теореме Куланина

П. В. Бибииков, М. И. Бидва, В. Д. Попов, А. А. Шевцов

Проект представляют А. А. Заславский, О. А. Заславский, П. А. Кожевников,
И. И. Фролов

Введение

Точка Фейербаха является одной из наиболее известных замечательных точек треугольника. Она определяется как точка касания вписанной окружности и окружности Эйлера. Соответствующую теорему доказал Карл Вильгельм Фейербах в 1822 году. С тех пор было придумано свыше 300 других доказательств этой теоремы, причем многие из них используют инверсию. Многочисленность таких доказательств свидетельствует о том, что при изучении геометрических свойств точки Фейербаха инверсия является довольно полезным инструментом. В первой части проекта мы предлагаем новый способ изучения точки Фейербаха, основанный на рассмотрении ее инверсных образов относительно некоторых окружностей. Этот подход позволит нам не только получить ряд новых красивых результатов, но и значительно упростить доказательства некоторых уже известных фактов.

Во второй части проекта будет предложен способ обобщить многие утверждения, полученные в первой части, на более общие конфигурации. Грубо говоря, мы утверждаем, что многие свойства точки Фейербаха являются лишь *частными случаями* значительно более общих теорем, связанных с совершенно иными конструкциями, ранее особо не привлекавшимися для ее исследования. Стартуя с одного красивого утверждения (так называемой теоремы Куланина), мы последовательно построим теорию, обобщающую различные свойства точки Фейербаха.

Техника, требующаяся для решения задач данного проекта, весьма разнообразна, поэтому от решателей предполагается знакомство со следующими методами и конструкциями:

- инверсия и ее свойства;
- полюсы и поляры, гармонические четверки;
- линейные движения точек;
- сведения о кривых второго порядка (необязательно);
- комплексные числа (необязательно).

Также зафиксируем обозначения, которые будут использоваться на протяжении всего проекта.

- A, B, C — вершины треугольника;
- M_a, M_b, M_c — середины сторон BC, AC, AB соответственно;
- H_a, H_b, H_c — основания высот треугольника ABC , опущенных из вершин A, B, C соответственно;
- L_a, L_b, L_c — основания биссектрис треугольника ABC , проведенных из вершин A, B, C соответственно;

- ω — вписанная окружность треугольника ABC с центром I ;
- G_a, G_b, G_c — точки касания вписанной окружности треугольника ABC со сторонами BC, AC, AB ;
- G'_a, G'_b, G'_c — точки касания внеписанных окружностей треугольника ABC со сторонами BC, AC, AB ;
- K_a, K_b, K_c — точки, симметричные точкам G_a, G_b, G_c относительно прямых AI, BI, CI соответственно;
- λ_a — окружность, построенная на стороне BC как на диаметре;
- S_{ab}, S_{ac} — точки Шарыгина, т.е. точки пересечения окружности λ_a со средними линиями M_aM_b и M_aM_c соответственно;
- $\varepsilon, \varepsilon_a$ — окружности девяти точек треугольника ABC и треугольника IBC соответственно;
- F — точка касания вписанной окружности и окружности девяти точек треугольника ABC (точка Фейербаха).

0. Вспомогательные факты

Задачи этого раздела содержат достаточно известные факты, и сдавать их необязательно. Тем не менее, если какие-то из задач вам неизвестны, рекомендуем их решить. Это поможет вам при решении последующих задач проекта.

0.1 (Окружность Эйлера) Докажите, что середины сторон треугольника, основания его высот и середины отрезков, соединяющих вершины с ортоцентром, лежат на одной окружности.

0.2 (Прямая Эйлера) Докажите, что центр E этой окружности, точки O, H и M лежат на одной прямой, причем $HE : EM : MO = 3 : 1 : 2$.

0.3 (Точка Микеля) Рассмотрим четыре прямые общего положения, которые образуют четыре треугольника. Докажите, что описанные окружности этих треугольников проходят через одну точку.

0.4 Докажите, что прямая Эйлера треугольника $G_aG_bG_c$ проходит через точку O .

0.5 (Прямая Симсона) Докажите, что основания перпендикуляров, опущенных из точки, лежащей на описанной окружности Ω треугольника ABC , на его стороны (или их продолжения), лежат на одной прямой.

0.6 Докажите, что прямая Симсона точки P делит отрезок PH пополам.

0.7 (Изогональное сопряжение) Рассмотрим треугольник ABC и точку P , отличную от его вершин. Докажите, что прямые, симметричные прямым AP, BP и CP относительно биссектрис AI, BI, CI соответственно, пересекаются в одной точке P' .

0.8 Докажите, следующие свойства изогонального сопряжения:

- точки O и H изогонально сопряжены;

- педальные окружности (т.е. окружности, проходящие через основания перпендикуляров, опущенных из данных точек на стороны треугольника) изогонально сопряженных точек P и P' совпадают, причем центр этой окружности лежит в середине отрезка PP' ;
- точки, изогонально сопряженные точкам описанной окружности, являются бесконечно удаленными, причем они лежат в направлениях, перпендикулярных прямой Симсона данной точки;
- точка A изогонально сопряжена точкам прямой BC , отличным от B и C .

0.9 Докажите, что если точки P и Q изогонально сопряжены, а точки P_b, P_c, Q_b, Q_c — их проекции на стороны AC и AB соответственно, то прямые P_bQ_c, P_cQ_b и PQ пересекаются в одной точке.

0.10 Докажите, что коника, проходящая через точки A, B, C и H , является равнобокой гиперболой.

0.11 Докажите, что изогональный образ прямой является коникой.

1. Теорема Фейербаха

1.1 (Задача 255) Докажите, что тройки прямых (G_bG_c, BI, M_aM_b) и (G_bG_c, CI, M_aM_c) пересекаются в точках S_{ab} и S_{ac} . Эти точки лежат на окружности λ_a , построенной на стороне BC как на диаметре

1.2 Докажите, что угол между прямой BC и окружностью Эйлера ε равен $|\angle B - \angle C|$.

1.3 Докажите, что четверка точек (H_a, L_a, G_a, G'_a) образует гармоническую четверку.

1.4 Докажите теорему Фейербаха, т.е. факт касания вписанной окружности ω и окружности Эйлера ε

1.5 Обобщите доказательство из предыдущей задачи на случай вневписанных окружностей. Докажите, что треугольник с вершинами в точках касания окружности Эйлера с вневписанными окружностями перспективен треугольнику $L_aL_bL_c$ с центром в точке F .

1.6 (*) Найдите другие замечательные окружности, касающиеся окружности Эйлера. Какими интересными свойствами обладают точки касания?

1.7 Докажите, что прямая FG_a является биссектрисой угла $\angle H_aFM_a$.

1.8 Докажите, что для произвольного четырехвершинника (т.е. четверки точек общего положения, соединенными прямыми) окружности Эйлера возникающих треугольников с вершинами в вершинах четырехсторонника пересекаются в одной точке (точке Понселе).

1.9 Пусть P — произвольная точка, отличная от O и H . Докажите, что педальная окружность точки P проходит через точку Понселе четырехсторонника $ABCP$.

1.10 Докажите, что треугольник $K_aK_bK_c$ гомотетичен треугольнику $M_aM_bM_c$ с центром в точке F

1.11 Докажите, что точка F лежит на окружности Эйлера ε_a треугольника BIC

1.12 Пусть \tilde{G}_a — точка, диаметрально противоположная точке G_a относительно вписанной окружности ω . Докажите, что прямая $F\tilde{G}_a$ пересекает отрезок AI в его середине

2. Инверсные образы точки Фейербаха

Теперь перейдем к содержательной части программы, которая, наконец, будет использовать инверсию. Рассмотрим уже знакомую нам окружность λ_a , построенную на отрезке BC как на диаметре. Рассмотрим точку F'_a — образ точки F при инверсии относительно окружности λ_a . Точка F'_a будет основным объектом наших дальнейших рассуждений в этом разделе.

Также в этой серии задач будут активно использоваться точки K_a, K_b и K_c , симметричные точкам G_a, G_b и G_c относительно биссектрис соответствующих углов.

2.1 Докажите, что точка F'_a является радикальным центром окружностей λ_a, ε и ε_a

2.2 Пусть K'_b и K'_c — точки пересечения лучей K_aK_b и K_aK_c с прямой H_bH_c . Докажите, что пятетки точек $(F, F'_a, K_b, K'_b, S_{ab})$ и $(F, F'_a, K_c, K'_c, S_{ac})$ лежат на окружностях ψ_{ab} и ψ_{ac}

2.3 Докажите, что прямая M_aS_{ab} касается окружности ψ_{ab} .

2.4 Докажите, что прямая $S_{ab}S_{ac}$ является биссектрисой угла $\angle K_bF'_aH_b$.

2.5 Точка F'_a лежит на прямых K_bK_c, L_bL_c и $G'_bG'_c$.

2.6 Пусть T_a — точка пересечения прямых FG_a и $S_{ab}S_{ac}$. Тогда четверки точек (F, T_a, M_b, S_{ab}) и (F, T_a, M_c, S_{ac}) лежат на окружностях ψ'_{ab} и ψ'_{ac}

2.7 Докажите, что F является точкой Микеля для треугольника $M_aM_bM_c$ и прямой $S_{ab}S_{ac}$.

2.8 Докажите, что точки T_a, T_b и T_c лежат на средних линиях M_bM_c, M_cM_a и M_aM_b соответственно

2.9 Рассмотрим произвольный треугольник $\Delta = P_aP_bP_c$, гомотетичный серединному треугольнику $M_aM_bM_c$ с центром в точке Фейербаха F . Рассмотрим окружности ψ_{ab}^Δ и ψ_{ac}^Δ , проходящие через тройки точек (F, P_b, S_{ab}) и (F, P_c, S_{ac}) соответственно. Докажите, что точка их пересечения, отличная от F , совпадает с точкой пересечения A^Δ прямых P_bP_c и $S_{ab}S_{ac}$

2.10 Докажите, что в случае, когда точка A^Δ совпадает с точкой G_b , окружность ψ_{ac}^Δ проходит через точки $F, H_b, G_b, S_{ac}, S_{ca}$ и точку, симметричную I относительно $S_{ac}S_{ca}$.

2.11 (*) Докажите, что перпендикуляры, восстановленные к прямым BC, CA и AB в точках их пересечения с прямыми $FA^\Delta, FB^\Delta, FC^\Delta$, соответственно, пересекаются в одной точке, причем эта точка лежит на прямой OI . Более того, окружность, проходящая через эти точки пересечения, проходит через точку Фейербаха F .

При каком положении треугольника Δ конфигурация из задачи **2.9** переходит в конфигурации из задач **2.2** и **2.6** ?

Последняя задача является очень сложной. Следующий раздел будет посвящен конструкции, позволяющей не только решить ее, но и обобщить на другие аналогичные конфигурации.

3. Обобщенные полюсы треугольника и теорема Куланина

Целью этого раздела является обобщение понятия точки Фейербаха и доказательство представленных выше утверждений (в частности, задачи **2.11**) в более общем случае. Мы будем дополнительно использовать следующие обозначения.

- O — центр описанной окружности Ω треугольника ABC ;
- ℓ — произвольная прямая, проходящая через точку O ;
- A_ℓ, B_ℓ, C_ℓ — точки пересечения прямой ℓ с прямыми BC, CA и AB соответственно;
- $P_a P_b P_c$ — педальный треугольник точки P относительно треугольника ABC , а Ω_P — его педальная окружность;
- F_ℓ — обобщенная точка Фейербаха (см. теорему Куланина).

Для того, чтобы сформулировать необходимые понятия, нам потребуется следующая теорема. В дальнейшем ее можно использовать без доказательства.

Теорема 1 (Куланин). Пусть P — произвольная точка прямой ℓ , проходящей через точку O . Тогда все педальные окружности Ω_P проходят через одну точку.

3.1 (*) Докажите эту теорему.

Общую точку всех педальных окружностей Ω_P точек прямой ℓ мы будем обозначать через F_ℓ и называть *обобщенной точкой Фейербаха*. Эта точка зависит от прямой ℓ , проходящей через центр описанной окружности O треугольника ABC . В случае $\ell = OI$ точка F_ℓ совпадает с обычной точкой Фейербаха F . Отметим также, что все точки F_ℓ лежат на окружности Эйлера ε треугольника ABC (поскольку окружность Эйлера является педальной окружностью точки O).

3.2 Рассмотрим произвольный треугольник ABC , прямую ℓ , проходящую через O , и точку P на ней. Обозначим через A_{pp} точку пересечения прямых $P_b P_c$ и $M_b M_c$. Тогда точки P_a, A_{pp} и F_ℓ лежат на одной прямой.

3.3 (*) (Основная теорема) Рассмотрим произвольную прямую ℓ , проходящую через центр O описанной окружности треугольника ABC . Пусть P и Q — произвольные точки на этой прямой. Обозначим через A_{pq} точку пересечения прямых $P_b P_c$ и $F_\ell Q_a$. Аналогично определим точки B_{pq} и C_{pq} . Возьмем произвольную точку R на прямой ℓ и проведем через точки A_{pq}, B_{pq}, C_{pq} прямые, параллельные $R_b R_c, R_c R_a, R_a R_b$ соответственно. Тогда получившийся треугольник будет гомотетичен треугольнику $R_a R_b R_c$ с центром в точке F_ℓ .

3.4 Выведите из основной теоремы результаты задач **2.5**, **2.8**, **2.11**.

3.5 Докажите, что описанная окружность треугольника, образованного прямыми $A_{pq} A_{qr}, B_{pq} B_{qr}, C_{pq} C_{qr}$, проходит через точку F_ℓ .

3.6 Докажите, что прямые, симметричные прямой ℓ относительно средних линий треугольника ABC , пересекаются в точке F_ℓ .

3.7 Пусть A_ℓ , B_ℓ и C_ℓ точки пересечения прямой ℓ с прямыми BC , CA и AB соответственно. Докажите, что окружности, построенные на отрезках AA_ℓ , BB_ℓ , CC_ℓ как на диаметрах, пересекаются в двух точках: F_ℓ и F'_ℓ , причем точка F'_ℓ лежит на описанной окружности Ω треугольника ABC , а ортоцентр H этого треугольника принадлежит прямой $F_\ell F'_\ell$.

3.8 Пусть OH — прямая Эйлера треугольника ABC . Докажите, что полюсы A_{hh} , B_{hh} , C_{hh} образуют автополярный треугольник относительно окружности Эйлера ε , причем вершины треугольника ABC лежат на сторонах треугольника $A_{hh}B_{hh}C_{hh}$.

3.9 Пусть треугольники $P_aP_bP_c$ и $Q_aQ_bQ_c$ перспективны треугольнику ABC , а их вершины лежат на соответствующих сторонах треугольника ABC . Пусть A_{pq} , B_{pq} , C_{pq} — точки пересечения соответствующих сторон треугольников $P_aP_bP_c$ и $Q_aQ_bQ_c$. Тогда:

- Вершины треугольника ABC лежат на сторонах треугольника $A_{pq}B_{pq}C_{pq}$;
- Треугольник $A_{pq}B_{pq}C_{pq}$ автополярен относительно коники Ω , проходящей через точки P_a , P_b , P_c , Q_a , Q_b , Q_c ;
- Треугольник $A_{pq}B_{pq}C_{pq}$ перспективен треугольникам $P_aP_bP_c$ и $Q_aQ_bQ_c$, причем центры перспективы лежат на конике Ω .

3.10 Пусть X_a — произвольная точка на прямой BC . Обозначим через X_b точку пересечения прямых X_aB_{hh} и AC , а через X_c — точку пересечения прямых X_aC_{hh} и AB . Докажите, что

- прямая X_bX_c проходит через точку A_{hh} ;
- прямые AX_a , BX_b и CX_c пересекаются в одной точке X ;
- описанная окружность треугольника $X_aX_bX_c$ проходит через точку F_{OL} , где L — точка Лемуана треугольника ABC .

В заключение сформулируем ряд вопросов, ответы на которые получить пока не удалось.

3.11 Определение полюсов A_{pq} , B_{pq} , C_{pq} зависит от порядка выбора точек P и Q на прямой ℓ . Возникает вопрос: как связаны полюсы A_{pq} и A_{qp} , т.е. полюсы, соответствующие одним и тем же точкам, взятым в разном порядке? Имеет место следующая гипотеза. Точки пересечения Z_a , Z_b , Z_c соответствующих сторон треугольников $A_{pq}B_{pq}C_{pq}$ и $A_{qp}B_{qp}C_{qp}$ образуют треугольник, гомотетичный треугольнику ABC с центром в точке F_ℓ .

3.12 Существенный интерес представляет такой выбор точек P и Q на прямой ℓ , при котором вершины треугольника ABC лежат на сторонах треугольника $A_{pq}B_{pq}C_{pq}$. Всегда ли на прямой ℓ можно выбрать такую пару точек? Эксперименты показывают, что такие точки существуют всегда, однако они не могут располагаться слишком далеко от точки O . Как можно точно описать положения точек P и Q , при которых вершины треугольника ABC лежат на сторонах треугольника $A_{pq}B_{pq}C_{pq}$?

**Об инверсных образах точки Фейербаха,
полюсах треугольника и теореме Куланина
Решения**

0. Вспомогательные факты

0.1 Поскольку $\angle BHC = 180^\circ - \angle BAC$, то точки, симметричные H относительно BC и середины BC , лежат на описанной окружности треугольника. При гомотетии с центром H и коэффициентом $1/2$ описанная окружность переходит в окружность Эйлера.

0.2 Серединные перпендикуляры исходного треугольника являются высотами серединного, а значит O — ортоцентр серединного треугольника. Гомотетия с центром M и коэффициентом $-1/2$ переводит исходный треугольник в серединный, и H переходит в O . Отсюда M лежит на отрезке HO и $HM : MO = 2$. Из решения предыдущей задачи E лежит на отрезке HO и $HE : EO = 1 : 1$. Равенство $HE : EM : MO = 3 : 1 : 2$ следует из двух доказанных.

0.3 Пусть три из прямых образуют треугольник ABC и пусть прямые AB, AC, BC пересекают четвертую прямую в точках D, E, F соответственно. Обозначим через P точку пересечения описанных окружностей треугольников ABC и CEF , отличную от точки C . Докажем, что P принадлежит описанной окружности треугольника BDF . Для этого достаточно проверить, что $\angle(BP, PF) = \angle(BD, DF)$. Ясно, что $\angle(BP, PF) = \angle(BP, PC) + \angle(PC, PF) = \angle(BA, AC) + \angle(EC, EF) = \angle(BD, AC) + \angle(AC, DF) = \angle(BD, DF)$. Аналогично доказывается, что P принадлежит описанной окружности треугольника ADE .

0.4 Пусть I_a, I_b, I_c — центры вневписанных окружностей треугольника ABC . Заметим, что I_aA, I_bB, I_cC — высоты треугольника $I_aI_bI_c$. Стороны треугольников $I_aI_bI_c$ и $G_aG_bG_c$ параллельны, т.е. эти треугольники гомотетичны. Поэтому их прямые Эйлера параллельны. Точка I является центром описанной окружности треугольника $G_aG_bG_c$ и ортоцентром треугольника $I_aI_bI_c$. Поэтому прямые Эйлера этих треугольников проходят через I и параллельны, т.е. совпадают. Точка O является центром окружности Эйлера треугольника $I_aI_bI_c$, а значит лежит на его прямой Эйлера.

0.5 Следует из решения следующей задачи (или из легкого счета углов).

0.6 Сделаем гомотетию с центром P и коэффициентом 2 . Пусть P'_a, P'_b, P'_c и H'_a, H'_b, H'_c — точки, симметричные P и H относительно соответствующих сторон треугольника. Достаточно доказать, что P'_b, H, P'_c лежат на одной прямой (доказательство того, что P'_a, H, P'_c лежат на одной прямой, аналогично). Из симметрии относительно AB имеем $\angle(P'_cH, HB) = \angle(BH'_c, H'_cP)$ и $\angle(CH, HP'_b) = \angle(PH'_b, H'_bC)$. Используя то, что P, H'_b, H'_c лежат на описанной окружности, получаем $\angle(P'_cH, HP'_b) = \angle(P'_cH, HB) + \angle(HB, CH) + \angle(CH, HP'_b) = \angle(BH'_c, H'_cP) + \angle(HB, CH) + \angle(PH'_b, H'_bC) = \angle(BA, AP) + \angle(HB, CH) + \angle(PA, AC) = \angle(BA, AC) + \angle(HB, CH) = 0$, т.е. P'_b, H, P'_c лежат на одной прямой.

0.7 Пусть P'_a, P'_b, P'_c — точки, симметричные P относительно соответствующих сторон треугольника. Несложно проверить, что прямая, симметричная AP относительно AI — серединный перпендикуляр к $P'_bP'_c$. Поэтому искомая точка P' — центр описанной окружности треугольника $P'_aP'_bP'_c$.

0.8 Докажем свойства изогонального сопряжения:

- Следует из решения предыдущей задачи и того, что точки, симметричные H относительно сторон треугольника, лежат на описанной окружности.
- Применяя к гомотегию с центром P и коэффициентом $1/2$ к утверждению из решения предыдущей задачи, получим, что середина PP' является центром pedalной окружности точки P . Поскольку расстояния от середины PP' до проекций P и P' на любую прямую равны, то pedalная окружность точки P' совпадает с pedalной окружностью точки P .
- Из предыдущей задачи точка, изогонально сопряженная P , должна быть пересечением серединных перпендикуляров к $P'_aP'_b$, $P'_bP'_c$, $P'_cP'_a$. Но все эти серединные перпендикуляры перпендикулярны прямой Симсона точки P .
- Ясно

0.9 По предыдущей задаче точки P_b, P_c, Q_b, Q_c лежат на окружности с центром в середине PQ . Пусть точки X и Y симметричны P_b и P_c соответственно относительно центра окружности. Тогда X лежит на QQ_b , а Y лежит на QQ_c . По теореме Паскаля для шестиугольника $P_bQ_cYP_cQ_bX$ середина PQ , точка Q и точка пересечения P_bQ_c с P_cQ_b лежат на одной прямой. Значит, прямые P_bQ_c, P_cQ_b, PQ пересекаются в одной точке.

0.10 Поскольку $ABCH$ — невыпуклый четырехугольник, то коника, проходящая через его вершины является гиперболой. Пусть P, Q — ее бесконечно удаленные точки. Нужно показать, что направления на P и Q перпендикулярны. Запишем теорему Паскаля для шестиугольника $ABCHPQ$. Пусть X — точка пересечения AB и HP , а Y — точка пересечения CH и QA . Тогда XY проходит через точку пересечения BC и PQ , т.е. $XY \parallel BC$, т.е. $XY \perp AH$. Значит, Y — ортоцентр треугольника AHX , откуда $AY \perp HX$. Т.е. $AQ \perp HP$, что и требовалось.

0.11 Пусть дана прямая ℓ . Выберем на ней три точки P, Q, R . Проведем через их изогональные образы P', Q', R' и вершины B, C конику. Рассмотрим два преобразования прямой ℓ на конику, сохраняющих двойные отношения. Первое сопоставляет точке X прямой ℓ прямую BX , затем отражает эту прямую относительно биссектрисы угла B , и пересекает полученную прямую с коникой. Второе преобразование аналогично, только вершина B заменена на C . Эти преобразования совпадают в трех точках P, Q, R , а значит, совпадают всюду. Поэтому изогональный образ ℓ — коника, проходящая через вершины B и C . Ясно, что она также проходит через A .

1. Теорема Фейербаха

1.1 Т.к. S_{ab} — точка пересечения λ_a со средней линией M_aM_b , то треугольник BM_aS_{ab} равнобедренный, и $\angle S_{ab}BM_a = \frac{1}{2}\angle S_{ab}M_aC = \frac{1}{2}\angle ABC = \angle IBC$. Значит, S_{ab} лежит на BI .

Поскольку $BS_{ab}C$ прямой, то точки I, G_b, S_{ab}, C лежат на одной окружности (с диаметром CI). Значит, $\angle S_{ab}G_bC = \angle S_{ab}IC = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle BAC = \angle AG_bC$. Поэтому S_{ab} лежит на прямой G_bG_c (см. рис. 1).

1.2 Искомый угол между прямой H_aM_a и окружностью ε равен половине дуги H_aM_a окружности ε , т.е. равен $\angle H_aM_bM_a = |\angle CM_aM_b - \angle CH_aM_b| = |\angle CBA - \angle H_aCM_b| = |\angle B - \angle C|$.

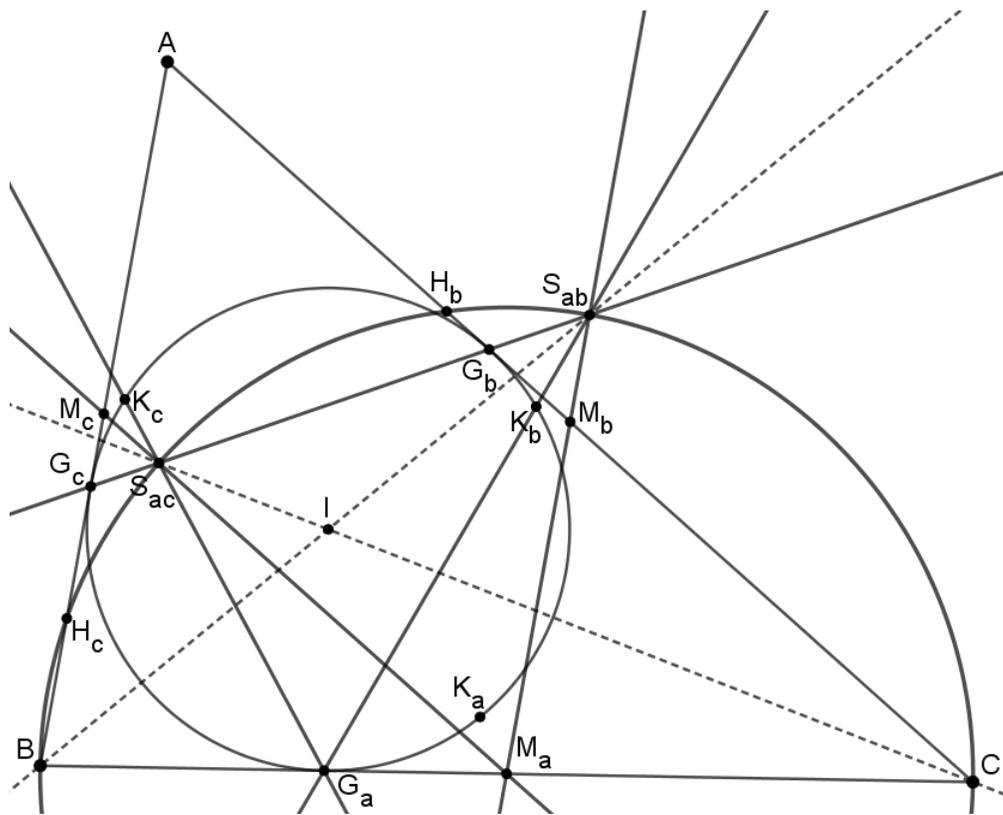


Рис. 1.

1.3 Пусть I_a — центр вневписанной окружности, касающейся отрезка BC . Тогда BI и BI_a — биссектрисы внутреннего и внешнего угла ABL_a . Поэтому четверка точек A, I, L_a, I_a — гармоническая. Ортогонально проектируя на BC , получаем утверждение задачи.

1.4 Из предыдущей задачи следует, что при инверсии относительно окружности с диаметром $G_aG'_a$ окружность девяти точек ε переходит в прямую ℓ , проходящую через L_a . С другой стороны, эта инверсия оставляет вписанную и вневписанную окружности ω и ω_a на месте, т.к. обе они ортогональны окружности инверсии. Так как инверсия — конформное преобразование, угол между прямыми ℓ и BC равен углу между окружностью ω и BC , т.е. $|\angle B - \angle C|$. Прямая, симметрична прямой BC относительно биссектрисы AI образует такой же угол с BC . Поэтому ℓ симметрична прямой BC относительно биссектрисы AI , а значит, ℓ касается окружностей ω и ω_a (см. рис. 2).

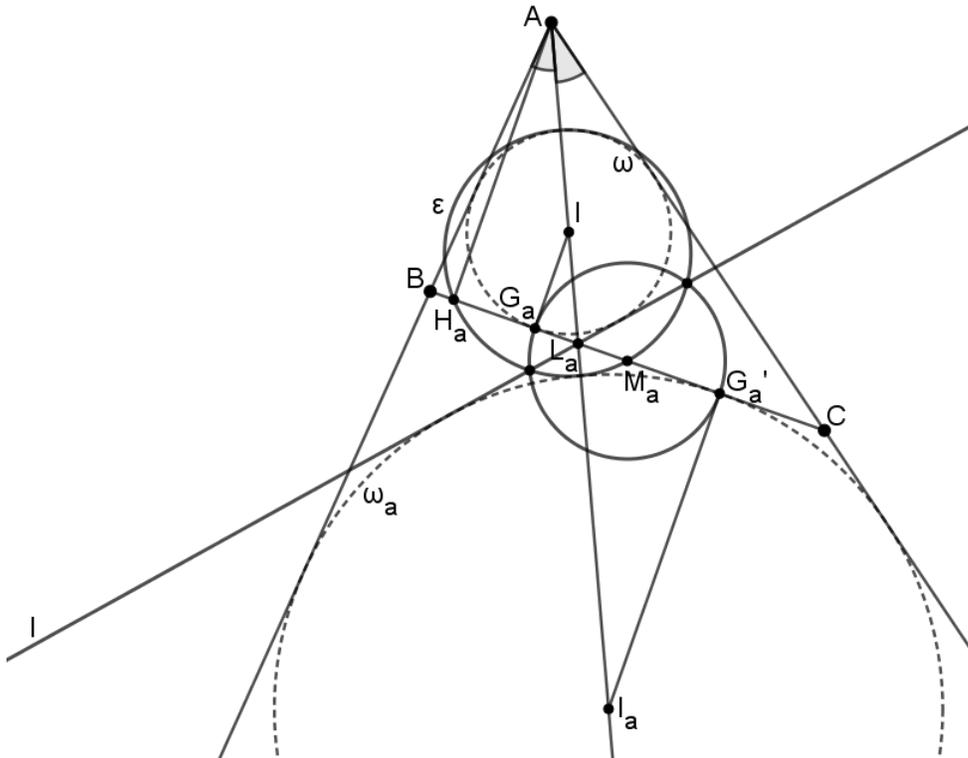


Рис. 2.

1.5 Касание окружности Эйлера и вневписанной окружности ω_a в некоторой точке F_a следует из решения предыдущей задачи. Точка L_a — центр отрицательной гомотетии окружностей ω и ω_a . Поэтому перспективность следует из теоремы о трех центрах гомотетии для вписанной, вневписанной окружностей и окружности Эйлера.

1.7 Сделаем гомотетию с центром F , переводящую вписанную окружность в окружность Эйлера. Прямая H_aM_a перейдет в прямую, параллельную H_aM_a и касающуюся окружности Эйлера в некоторой точке X . Из симметрии относительно серединного перпендикуляра к H_aM_a точка X — середина дуги H_aM_a окружности Эйлера. Значит, FX является биссектрисой угла $\angle H_aFM_a$. Утверждение задачи следует из того, что при гомотетии G_a переходит в X .

1.8 Будем обозначать середину отрезка XU через M_{XU} . Пусть даны точки A, B, C, P . Пусть X — точка пересечения окружностей Эйлера треугольников ABP и BSP , отличная от M_{BP} .

Тогда $\angle(M_{AP}X, XM_{CP}) = \angle(M_{AP}X, XM_{BP}) + \angle(M_{BP}X, XM_{CP}) = \angle(M_{AP}M_{AB}, M_{AB}M_{BP}) + \angle(M_{BP}M_{BC}, M_{BC}M_{CP}) = \angle(BP, AP) + \angle(CP, BP) = \angle(CP, AP) = \angle(M_{AP}M_{AC}, M_{AC}M_{CP})$.
 Т.е. X лежит на окружности Эйлера треугольника ACP . Аналогично, X лежит на окружности Эйлера треугольника ABC см. рис. 3).

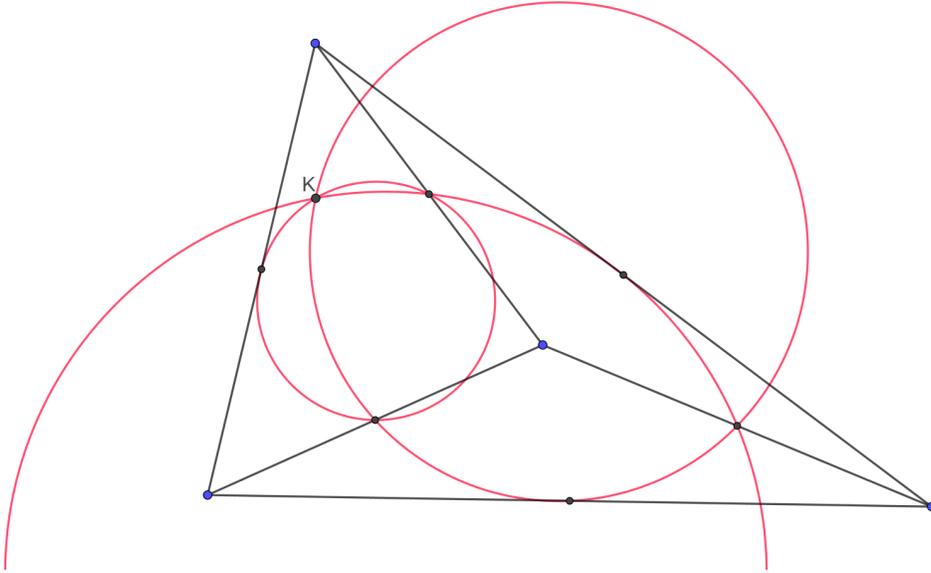


Рис. 3.

1.9 Пусть P_a, P_b, P_c — проекции P на соответствующие стороны треугольника ABC . В обозначениях из решения предыдущей задачи
 $\angle(P_cX, XP_a) = \angle(P_cX, XM_{BP}) + \angle(M_{BP}X, XP_a) = \angle(P_cM_{AB}, M_{AB}M_{BP}) + \angle(M_{BP}M_{BC}, M_{BC}P_a) = \angle(P_cA, AP) + \angle(PC, CP_a) = \angle(P_cP_b, P_bP) + \angle(PP_b, P_bP_a) = \angle(P_cP_b, P_bP_a)$.

1.10 Сначала докажем, что соответствующие стороны треугольников $K_aK_bK_c$ и $M_aM_bM_c$ параллельны. Хорды G_aK_b и G_bG_c симметричны относительно BI , поэтому они равны. Аналогично, хорды G_bG_c и G_aK_c симметричны относительно CI и потому также равны. Тогда треугольник $K_cG_aK_b$ равнобедренный, откуда следует, что $\angle G_aK_cK_b = \angle G_aK_bK_c = \angle CG_aK_b$. Отсюда очевидна параллельность прямых BC и K_bK_c . Для двух оставшихся пар сторон рассуждения аналогичны. По теореме Дезарга треугольники $K_aK_bK_c$ и $M_aM_bM_c$ гомотетичны. Точка пересечения прямых M_aK_a, M_bK_b и M_cK_c является центром этой гомотетии, а значит и центром гомотетии вписанной окружности и окружности Эйлера, то есть точкой Фейербаха F (см. рис. 4).

1.11 Следует из теоремы Фейербаха и задач **1.8, 1.9** для четырехугольника $ABCI$ (см. рис. 5).

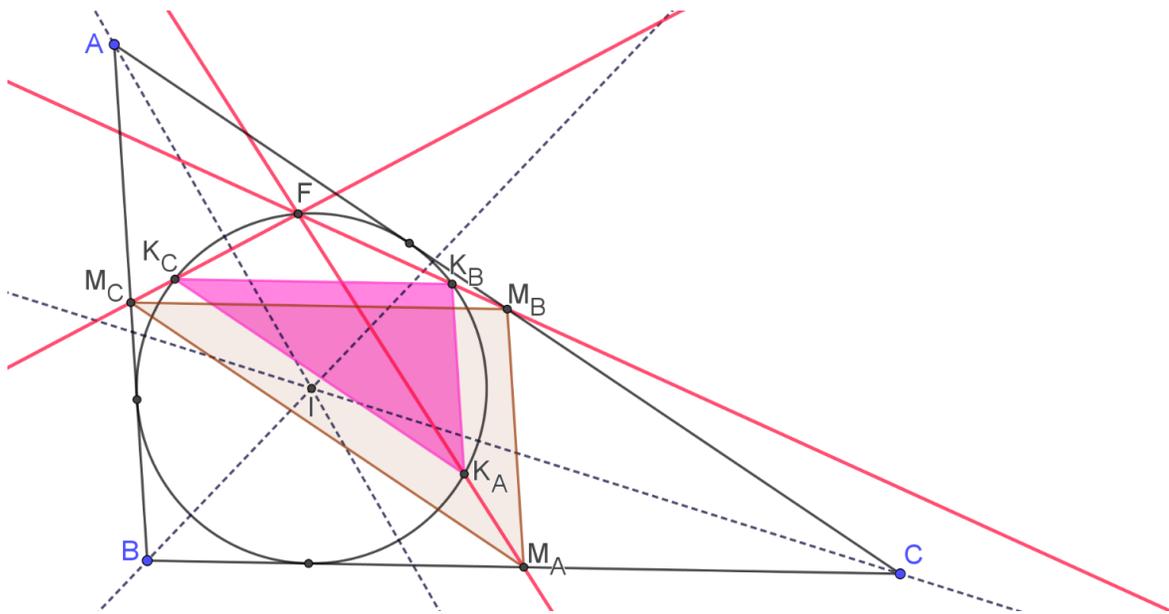


Рис. 4.

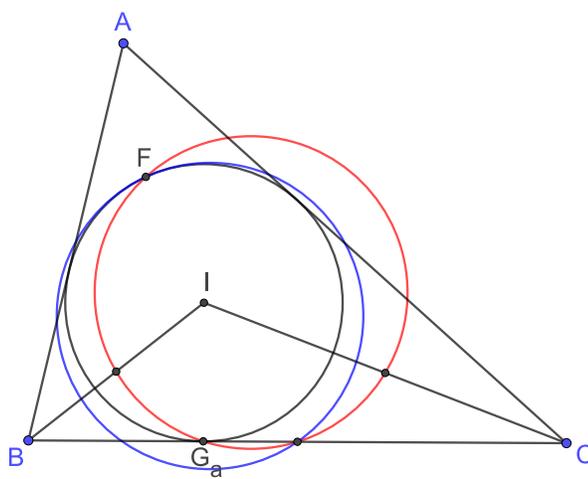


Рис. 5.

1.12 Из предыдущей задачи точка Фейербаха F лежит на окружности Эйлера треугольника AIC . Середина X отрезка AI там тоже лежит. Достаточно доказать, что $\angle(G_bF, FX) = \angle(G_bF, F\tilde{G}_a)$. Имеем

$\angle(G_bF, FX) = \angle(G_bM_b, M_bX) = \angle(G_bC, CI) = \angle(G_bG_a, G_aI) = \angle(G_bG_a, G_a\tilde{G}_a) = \angle(G_bF, F\tilde{G}_a)$
 (см. рис. 6).

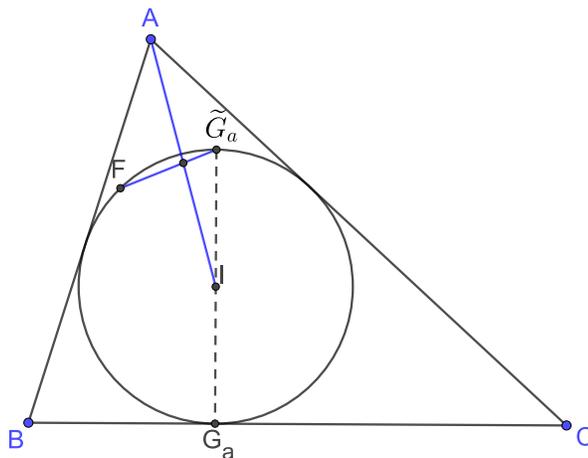


Рис. 6.

2. Инверсные образы точки Фейербаха

2.1 При инверсии относительно λ_a окружность Эйлера ε перейдет в прямую H_bH_c , окружность ε_a перейдет в прямую $S_{ab}S_{ac}$. Поскольку точка F является точкой пересечения окружностей ε и ε_a , то точка F'_a является точкой пересечения прямых H_bH_c и $S_{ab}S_{ac}$, которые являются радикальными осями λ_a и ε , λ_a и ε_a (см. рис. 7).

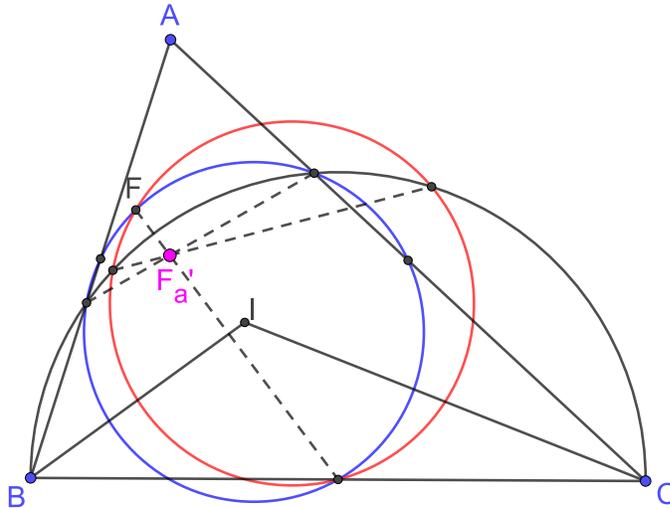


Рис. 7.

2.2 Сначала докажем, что четыре точки F, F'_a, K_b, K'_b лежат на одной окружности (рассуждения для четверки точек F, F'_a, K_c, K'_c аналогичны). Рассмотрим инверсию Inv_{K_a} с центром в точке K_a , переводящую точку F'_a в точку F . Тогда композиция инверсий $\text{Inv}_{K_a} \circ \text{Inv}_{\lambda_a}$ переводит окружность Эйлера ε в некоторую окружность ω' , проходящую через точки F и K_a . В силу того, что инверсия — конформное преобразование, эта композиция сохраняет углы между прямыми и окружностями. Раз центры обеих инверсий лежат на прямой FF'_a , то окружности ε и ω' образуют с прямой FF'_a равные углы. Но это означает, что окружности ε и ω' касаются в точке F . Отсюда следует, что окружности ω и ω' совпадают, поскольку существует единственная окружность, проходящая через точку K_a и касающаяся окружности ε в точке F .

Далее, заметим, что точка K'_b пересечения луча K_aK_b с прямой H_bH_c — это образ точки K_b при инверсии Inv_{K_a} . Значит, точки F, F'_a, K_b и K'_b лежат на одной окружности.

Осталось загнать на окружности точки S_{ab} и S_{ac} . Для этого используем вписанные углы. Во-первых, $\angle K_aFK_b = \angle K_aK_cK_b$. Во-вторых, пусть прямая FK_b вторично пересекает окружность ε_a в точке R . Тогда $\angle M_aS_{ac}R = \angle M_aFR$. Прямые M_aS_{ac} и K_aK_c параллельны, поэтому вторые лучи равных углов $\angle M_aS_{ac}R$ и $\angle M_aFR$ также параллельны, т.е. $S_{ac}R \parallel K_bK_c \parallel BC$. Отсюда сразу следует равенство углов $\angle M_aFR$ и $\angle S_{ac}S_{ab}G_a$. Значит, точки F, F'_a, K_b, K'_b и S_{ab} лежат на одной окружности. Для точки S_{ac} рассуждения аналогичны (см. рис. 8).

2.3 Из решения предыдущей задачи окружности ψ_{ab} и λ_a ортогональны. Поэтому прямая M_aS_{ab} касается окружности ψ_{ab} .

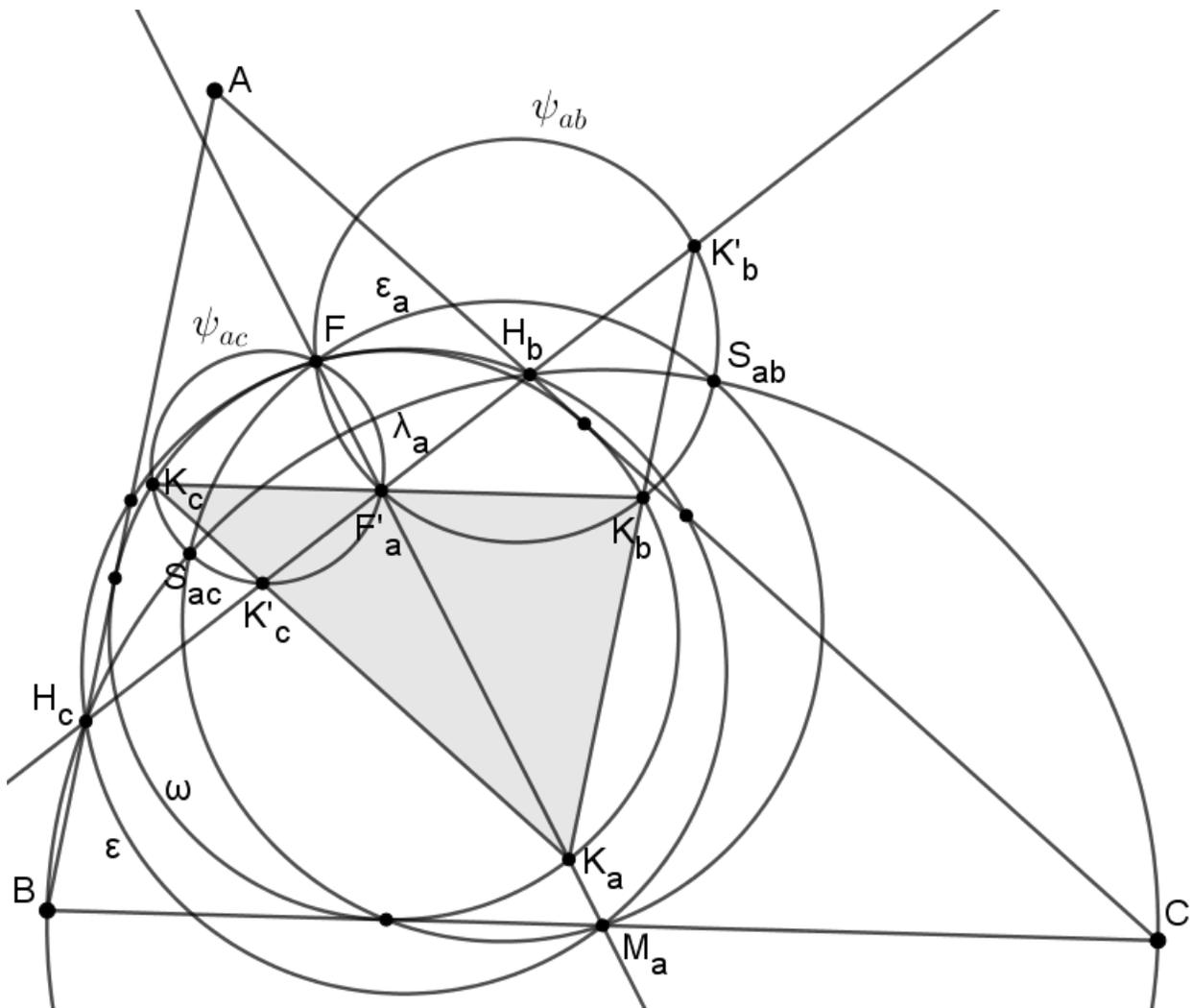


Рис. 8.

2.4 Поскольку прямые M_aS_{ab} и M_aS_{ac} касаются окружностей ψ_{ab} и ψ_{ac} соответственно, и пары прямых (M_aS_{ab}, K_aK_b) и (M_aS_{ac}, K_aK_c) параллельны, то $K_bS_{ab} = K'_bS_{ab}$ и $K_cS_{ac} = K'_cS_{ac}$ (параллельные прямые высекают на окружности равные хорды). Тогда $\angle K_bF'_aS_{ab} = \angle K'_bF'_aS_{ab}$, что и требовалось.

2.5 Точка F'_a лежит на K_bK_c следует из предыдущей задачи.

Заметим, что прямые L_bK_b и L_cK_c касаются вписанной окружности в точках K_b и K_c соответственно. Следующее утверждение является вырожденным случаем теоремы Брианшона:

Пусть четырехугольник $K_cG_bK_bG_c$ вписан в окружность, касательные к которой в вершинах четырехугольника образуют другой четырехугольник. Тогда у этих двух четырехугольников точки пересечения диагоналей совпадают.

Применяя его, получаем, что прямые K_bK_c , G_bG_c , L_bL_c пересекаются в одной точке.

Прямая $G'_bG'_c$ проходит через эту точку из задачи **1.3**.

2.6 Приведем доказательство для окружности ψ'_{ab} , для окружности ψ'_{ac} рассуждения аналогичны. $\angle M_aFM_b = \angle M_aM_cM_b = \angle ACB = \angle G_aS_{ab}T_a$ (последнее равенство следует из того, что точки C, G_a, G_b, S_{ab} лежат на окружности с диаметром CI). По задаче **1.11** $\angle G_aFM_a = \angle G_aS_{ab}M_a$. Тогда $\angle T_aFM_b = \angle M_aFM_b + \angle G_aFM_a = \angle G_aS_{ab}T_a + \angle G_aS_{ab}M_a = \angle T_aS_{ab}M_b$ (см. рис. 9).

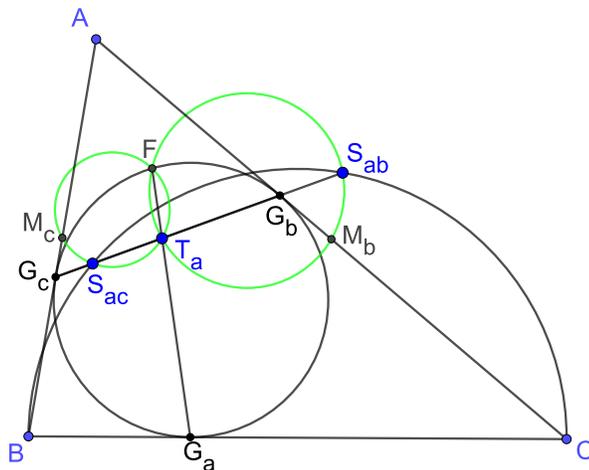


Рис. 9.

2.7 Точка F лежит на описанной окружности треугольников $M_aM_bM_c$ и $S_{ab}M_aS_{ac}$.

2.8 Следует из предыдущих двух задач (см. рис. 10).

2.9 Используя окружность ψ'_{ab} из задачи **2.6** имеем: $\angle A^\Delta P_b F = \angle T_a M_b F = \angle T_a S_{ab} F = \angle A^\Delta S_{ab} F$. Отсюда следует, что точка A^Δ лежит на окружности ψ_{ab}^Δ . Аналогично доказывается, что точка A^Δ лежит на окружности ψ_{ac}^Δ (см. рис. 11).

2.10 Вначале докажем, что четверка точек $(H_b, G_b, S_{ac}, S_{ca})$ лежит на одной окружности. Заметим, что прямые BS_{ca} и $H_b S_{ac}$ параллельны, т.к. обе они перпендикулярны биссектрисе угла $\angle BAC$. Аналогично, прямые BS_{ac} и $G_b S_{ca}$. Поэтому четырехугольник $BS_{ac}H_b S_{ca}$ является параллелограммом и $H_b S_{ac} = BS_{ca} = G_b S_{ca}$. Значит, $S_{ac}H_b G_b S_{ca}$ — равнобокая трапеция, и потому вокруг нее можно описать окружность (см. рис. 8).

Теперь докажем, что точка Фейербаха также лежит на этой окружности. По лемме Архимеда следует, что $\angle H_b F G_b = \frac{1}{2} \angle H_b F M_b = \frac{1}{2} |\angle A - \angle C|$. Далее, $\angle H_b S_{ac} S_{ca} = \angle S_{ca} G_b C = \frac{\pi}{2} - \frac{\angle C}{2}$ и $\angle G_b S_{ac} S_{ca} = \angle A G_b S_{ac} = \frac{\pi}{2} - \frac{\angle A}{2}$, поэтому

$$\angle H_b S_{ac} G_b = |\angle H_b S_{ac} S_{ca} - \angle G_b S_{ac} S_{ca}| = \frac{1}{2} |\angle A - \angle C| = \angle H_b F G_b,$$

откуда следует, что точка F лежит на описанной окружности трапеции $H_b G_b S_{ca} S_{ac}$.

Несложно видеть, что точка I является ортоцентром треугольника $S_{ac} S_{ca} G_b$. Значит, точка, симметричная I относительно $S_{ac} S_{ca}$ лежит на описанной окружности треугольника $S_{ac} S_{ca} G_b$.

2.11 Будем двигать треугольник $P_a P_b P_c$ линейно. Точки $A^\Delta, B^\Delta, C^\Delta$ двигаются дробно-линейно. Точка X_a пересечения FA^Δ с BC (и аналогично определяемые точки X_b, X_c) двигаются дробно-линейно. Точки пересечения перпендикуляров к сторонам треугольника в точках $A^\Delta, B^\Delta, C^\Delta$ с OI будет двигаться дробно-линейно. Чтобы доказать, что они все совпадают, достаточно 3 положений. Два положения $P_a P_b P_c = K_a K_b K_c$ и $P_a P_b P_c = M_a M_b M_c$ следуют из предыдущих задач. Третье положение — когда треугольник $P_a P_b P_c$ вырождается в 3 прямые, проходящие через F параллельно сторонам исходного треугольника. В этом положении все перпендикуляры уходят на бесконечность. Утверждение про окружность будет следовать из задачи **3.1**.

Или же можно вывести все сразу из основной теоремы (см. задачу **3.4**).

3. Обобщенные полюсы треугольника и теорема Куланина

3.1 Из задач **0.11** и **0.10** (и первого пункта **0.8**) точка P' , изогонально сопряженная точке P , движется по равнобокой гиперболе, проходящей через вершины треугольника ABC . По второму пункту задачи **0.8** достаточно доказать, что pedalные окружности точки P' проходят через центр этой гиперболы. Используя задачи **1.9** и **1.8**, сводим к следующему хорошо известному утверждению: если треугольник вписан в равнобокую гиперболу, то его окружность Эйлера проходит через центр гиперболы (см. рис. 12).

3.2 Пусть точка P двигается линейно по прямой ℓ . Тогда точки P_a, P_b, P_c движутся линейно по сторонам треугольника. Значит, точка A_{op} пересечения $F_\ell P_a$ со средней линией $M_b M_c$, двигается линейно по $M_b M_c$. Нужно доказать, что точки P_b, P_c, A_{op} лежат на одной прямой. Достаточно проверить три положения точки P . Случай $P = O$ очевиден. Два случая, когда P лежит на описанной окружности, следуют из теоремы Куланина (pedальная окружность точки P вырождается в прямую Симсона) (см. рис. 13).

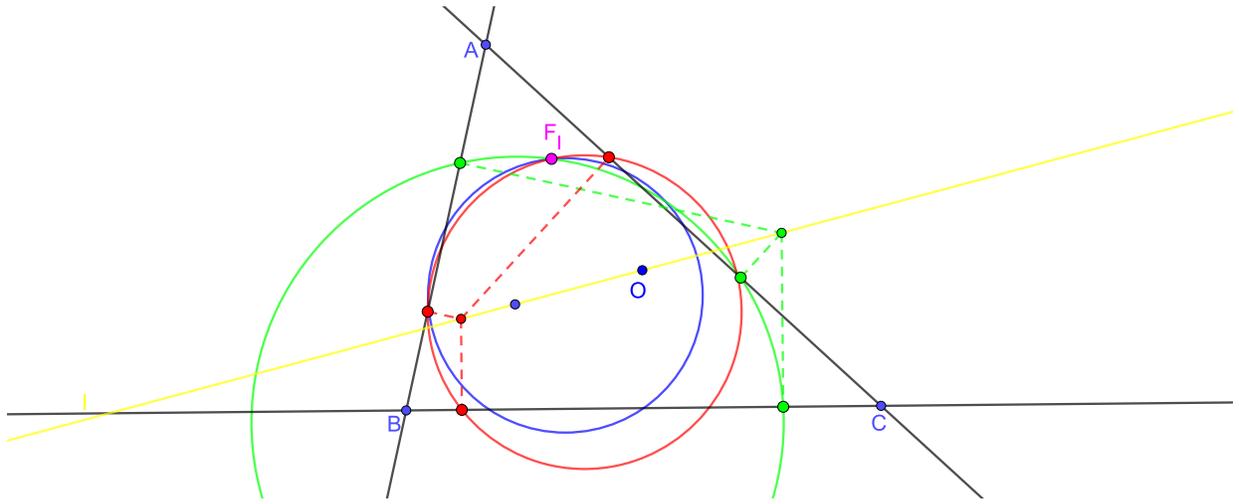


Рис. 12.

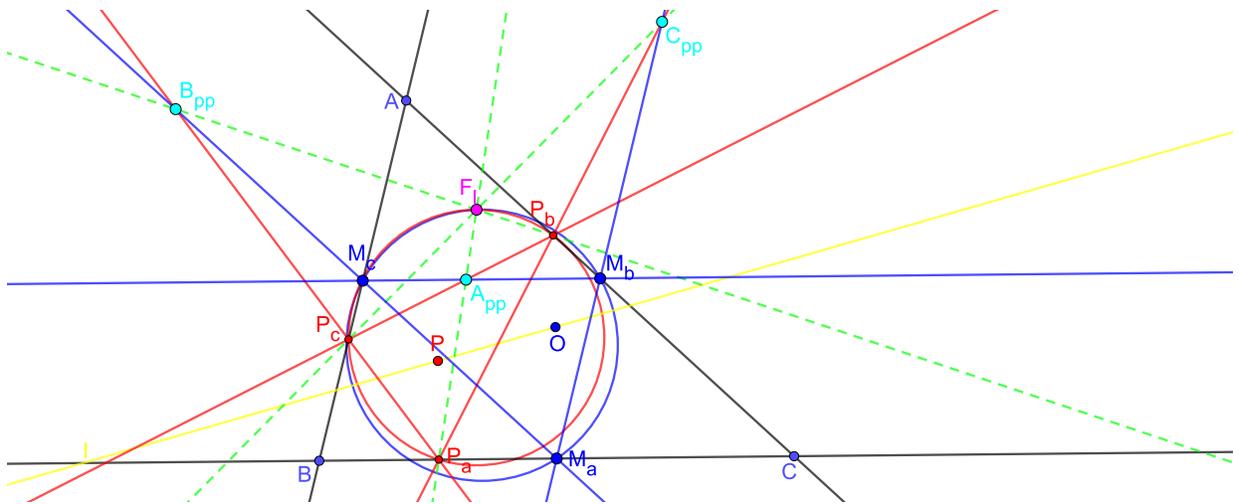


Рис. 13.

3.3 Будем линейно двигать точку P по прямой ℓ . Обозначим через t ориентированную длину отрезка OP (т.е. выберем положительное направление на прямой ℓ и будем считать длину t отрезка OP положительной, если точка P находится на положительном луче, и отрицательной в противном случае). Введем декартову систему координат с началом в точке F_ℓ и обозначим через $(X_a(t), Y_a(t))$, $(X_b(t), Y_b(t))$, $(X_c(t), Y_c(t))$ координаты точек A_{pq} , B_{pq} , C_{pq} соответственно. Докажем, что каждая из этих координатных функций является рациональной по переменной t , причем степень числителей равна 2, а степень знаменателей равна 1.

Для определенности рассмотрим точку A_{pq} (рассуждения для точек B_{pq} и C_{pq} аналогичны). Ясно, что точки P_b , P_c будут двигаться линейно, поэтому их координаты являются линейными функциями от переменной t . Далее, запишем явный вид уравнения прямой, проходящей через точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) :

$$(y - y_1)(x_2 - x_1) = (x - x_1)(y_2 - y_1).$$

Отсюда следует, что коэффициенты при x и y уравнения прямой P_bP_c также линейно зависят от t , а свободный член этого уравнения является квадратичным по t . Наконец, пересекая прямую P_bP_c с неподвижной прямой $F_\ell Q_a$, получаем искомые координаты точки A_{pq} пересечения этих прямых. Аналогично доказывается, что координаты точек B_{pq} и C_{pq} имеют аналогичный вид.

Теперь докажем, что при линейном движении точки P прямые $A_{pq}B_{pq}$, $B_{pq}C_{pq}$, $C_{pq}A_{pq}$ будут двигаться параллельно (но не линейно). Это условие равносильно равенствам

$$F_\ell A_{pq} = \alpha \cdot F_\ell C_{pq} \quad \text{и} \quad F_\ell B_{pq} = \beta \cdot F_\ell C_{pq},$$

где α и β — некоторые константы, не зависящие от t (например, можно вычислить их для некоторого конкретного момента времени t_0 , а затем доказать, что они остаются неизменными в любой другой момент времени).

Будем доказывать только первое равенство, поскольку второе доказывается абсолютно аналогично. Чтобы доказать истинность первого равенства, перепишем его в координатном виде:

$$X_a(t) = \alpha_1 \cdot X_c(t) \quad \text{и} \quad Y_a(t) = \alpha_2 \cdot Y_c(t)$$

(здесь α_1 и α_2 — фиксированные константы). Вспомним, что каждая из функций, фигурирующих в этих соотношениях, является отношением многочленов степеней 2 и 1. Поэтому, домножая каждое из равенств на знаменатели соответствующих функций, получаем, что данные равенства равносильны обращению в 0 двух кубических многочленов, зависящих от t . Ясно, что для проверки этого условия необходимо найти четыре различных значения t , или, что то же самое, четыре различных положения точки P , при которых утверждение теоремы (равносильное занулению этих кубических многочленов) верно (поскольку если у многочлена степени не выше 3 есть 4 различных корня, то этот многочлен тождественно равен 0). Укажем эти положения.

Во-первых, рассмотрим два момента времени, в которые точка P совпадает с O (этот случай соответствует $t = 0$) и с Q . Из предыдущей задачи следует, что точки $\{A_{pq}, C_{pq}\}$ совпадают в эти два момента времени, причем они отличны от начала координат F_ℓ . Поэтому, если определить константы α_1 и α_2 по формулам $\alpha_1 = X_a(0)/X_c(0)$ и $\alpha_2 = Y_a(0)/Y_c(0)$, то равенства

$$X_a(t) = \alpha_1 \cdot X_c(t) \quad \text{и} \quad Y_a(t) = \alpha_2 \cdot Y_c(t)$$

верны при двух моментах времени t .

Во-вторых, рассмотрим два положения точки P , являющихся концами диаметра описанной окружности Ω треугольника ABC , содержащегося на прямой ℓ . В это случае точки A_{pq} и C_{pq} совпадают с F_ℓ , а потому их координаты равны 0 и требуемые равенства также верны.

Таким образом, мы нашли четыре момента времени, при которых соотношения между координатами точек A_{pq} и C_{pq} верны. Значит, эти соотношения верны в любой момент времени

t , откуда следует параллельность прямых вида $A_{pq}C_{pq}$. Аналогично доказывается параллельность прямых $A_{pq}B_{pq}$ и $B_{pq}C_{pq}$. Таким образом, все треугольнички вида $A_{pq}B_{pq}C_{pq}$ гомотетичны с центром в точке F_ℓ при всевозможных положениях точки P .

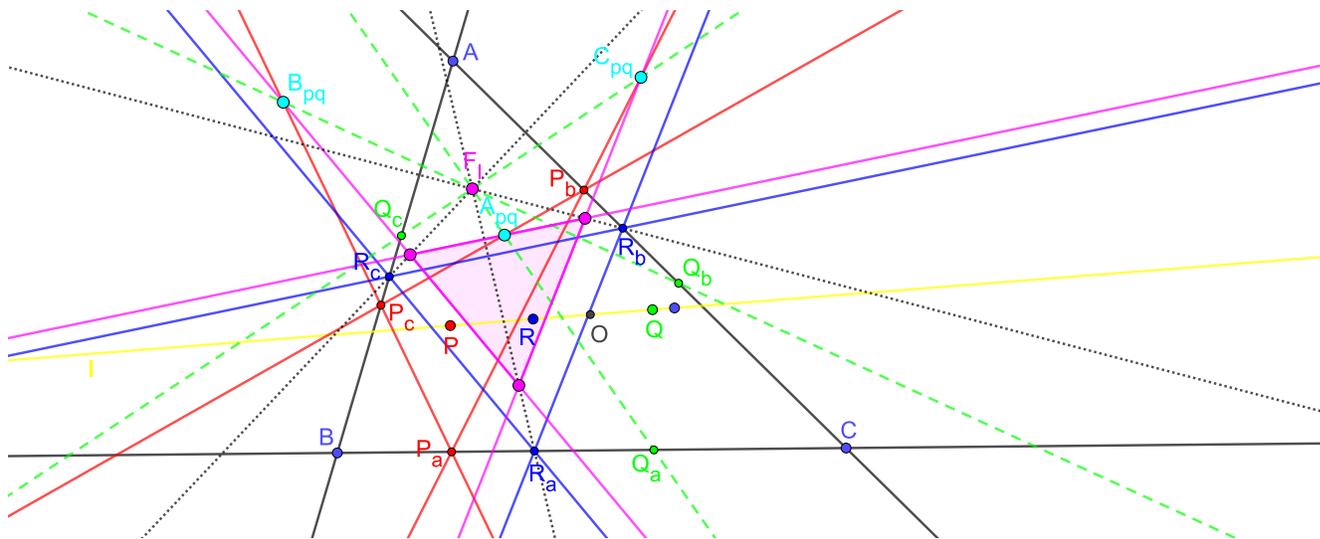


Рис. 14.

Осталось понять, почему при проведении через точки A_{pq} , B_{pq} , C_{pq} прямых, параллельных R_bR_c , R_cR_a , R_aR_b соответственно, треугольник, образованный этими прямыми, будет гомотетичен треугольнику $R_aR_bR_c$ с центром в точке F_ℓ . Для этого рассмотрим момент времени, в который точка P совпадает с R . Тогда точки $A_{pq} = A_{rq}$, $B_{pq} = B_{rq}$ и $C_{pq} = C_{rq}$ будут лежать на прямых R_bR_c , R_cR_a и R_aR_b соответственно. Для произвольного положения точки P рассмотрим гомотетию с центром в F_ℓ , которая переведет A_{rq} в A_{pq} . Тогда по доказанному выше эта же гомотетия переведет B_{rq} в B_{pq} и C_{rq} в C_{pq} . Поэтому прямая R_bR_c перейдет в прямую, проходящую через A_{pq} параллельно ей. Аналогичное произойдет с двумя оставшимися прямыми R_cR_a и R_aR_b (см. рис. 14).

3.4 Задачи **2.5** и **2.8** несложно доказываются и без использования основной теоремы, поэтому мы только упомянем, что конструкция задачи **2.5** — случай $P = I$, $Q = O$ в основной теореме, а конструкция задачи **2.8** — случай $P = Q = I$, $R = O$. Выведем задачу **2.11**. Пусть перпендикуляр к прямой BC в точке ее пересечения с FA^Δ пересекает OI в точке Q . Прямая P_bP_c проходит через точку $A^\Delta = A_{iq}$. Применим основную теорему к I , Q , $R = O$. Получим, что прямые P_aP_b и P_aP_c проходят через точки C_{iq} и B_{iq} соответственно. Следовательно, $B^\Delta = B_{iq}$ и $C^\Delta = C_{iq}$. Поэтому основание перпендикуляров из Q на AB и AC — точки пересечения AB и AC с FC^Δ и FB^Δ соответственно. Утверждение про окружность следует из теоремы Куланина. (см. рис. 15, 16, 17).

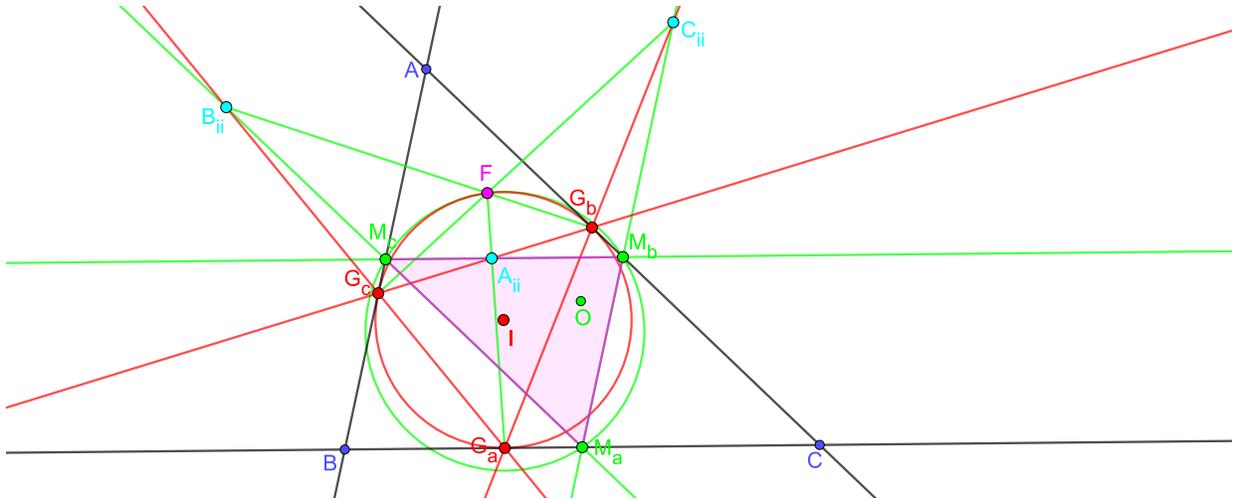


Рис. 15. Случай $P = Q = I$, $R = O$

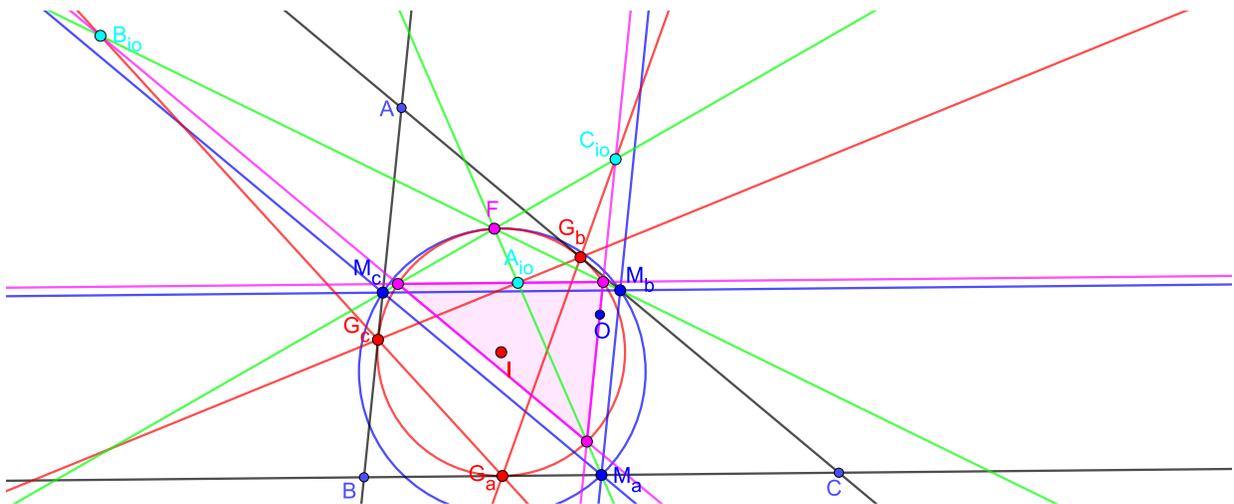


Рис. 16. Случай $P = I$, $Q = R = O$

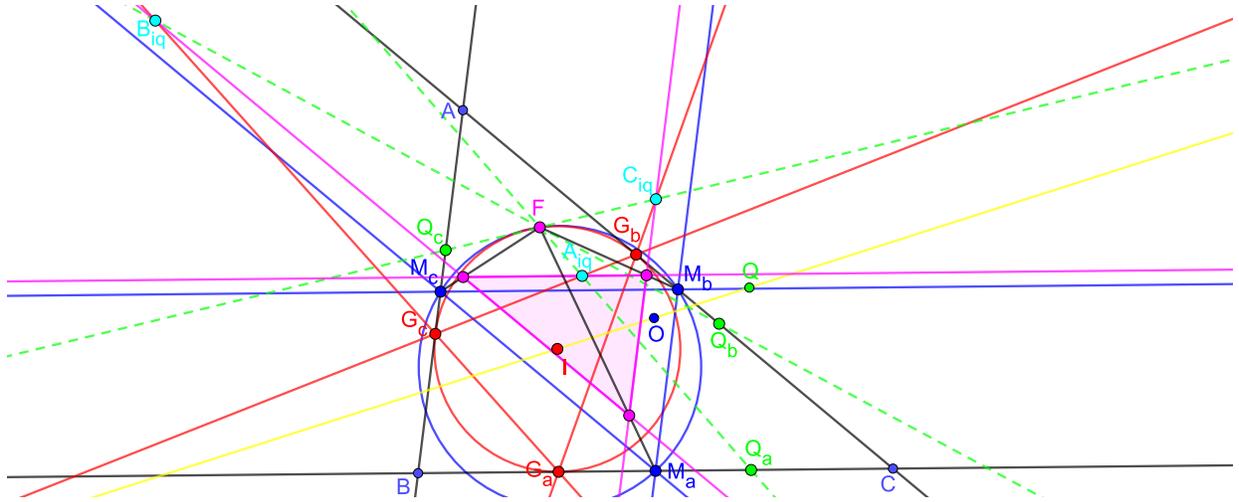


Рис. 17. Случай $P = I, R = O$

3.5 Основная теорема равносильно равенству $FA_{rq}/FA_{pq} = FB_{rq}/FB_{pq} = FC_{rq}/FC_{pq}$. Аналогично, выполнено равенство $FA_{rp}/FA_{qp} = FB_{rp}/FB_{qp} = FC_{rp}/FC_{qp}$. Пусть точка R такова, что $R_bR_c \parallel A_{pq}A_{qp}$. Тогда существует гомотетия с центром F , переводящая R_bR_c в $A_{pq}A_{qp}$. Эта гомотетия переводит A_{rq} в A_{pq} и A_{rp} в A_{qp} . Из приведенных выше равенств следует, что эта гомотетия переводит треугольник $R_aR_bR_c$ в треугольник, образованный прямыми $A_{pq}A_{qp}, B_{pq}B_{qp}, C_{pq}C_{qp}$, откуда следует утверждение задачи.

3.6 Хорошо известно, что прямые, симметричные ℓ относительно средних линий треугольника пересекаются в некоторой точке X . При этом точка P , симметричная X относительно M_bM_c , лежит на прямой ℓ и на окружности (AM_bM_c) . (Если прямая проходит через ортоцентр треугольника, то прямые, симметричные ей относительно сторон, пересекаются на описанной окружности). Используя задачу **3.2** и прямую Симсона точки P относительно треугольника AM_bM_c , получаем $PF_\ell \perp BC$. Ясно, что $PX \perp BC$. Аналогичные утверждения верны для точек, симметричных X относительно других средних линий. Значит, F_ℓ совпадает с X (см.рис. 18).

3.7 Точка F_ℓ лежит на этих окружностях по теореме Куланина для случая, когда P совпадает с A_ℓ, B_ℓ, C_ℓ . Пусть A', B', C' — точки, симметричные A, B, C относительно O . По теореме Паскаля точка пересечения $A'A_\ell$ и $B'B_\ell$ лежит на описанной окружности треугольника ABC . Значит, прямые $A'A_\ell, B'B_\ell, C'C_\ell$ пересекаются в некоторой точке F'_ℓ на описанной окружности. Т.к. $\angle A_\ell F'_\ell A = \angle A' F'_\ell A = 90^\circ$, то точка F'_ℓ лежит на нужных окружностях. Точка H лежит на $F_\ell F'_\ell$, поскольку степени H относительно окружностей равны $HN_a \cdot HA = HN_b \cdot HB = HN_c \cdot HC$ (см. рис. 19).

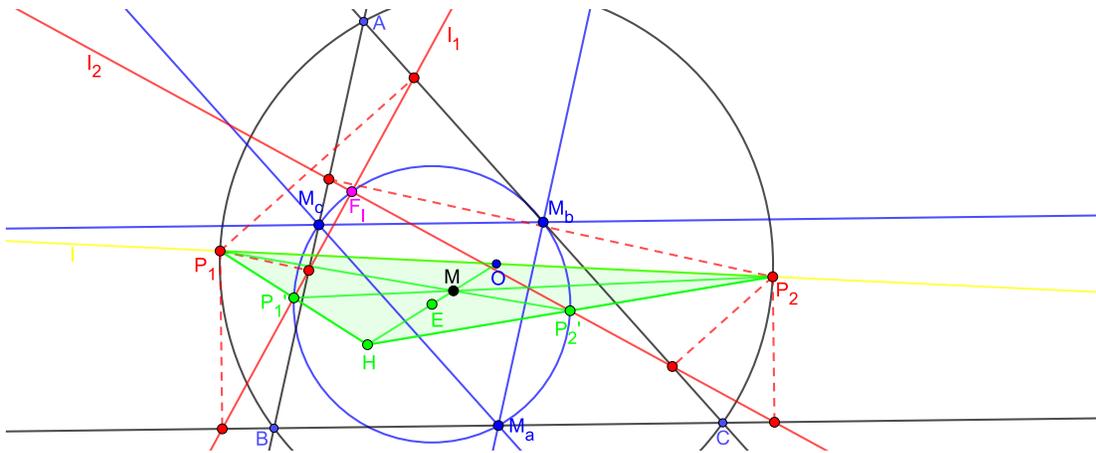


Рис. 18.

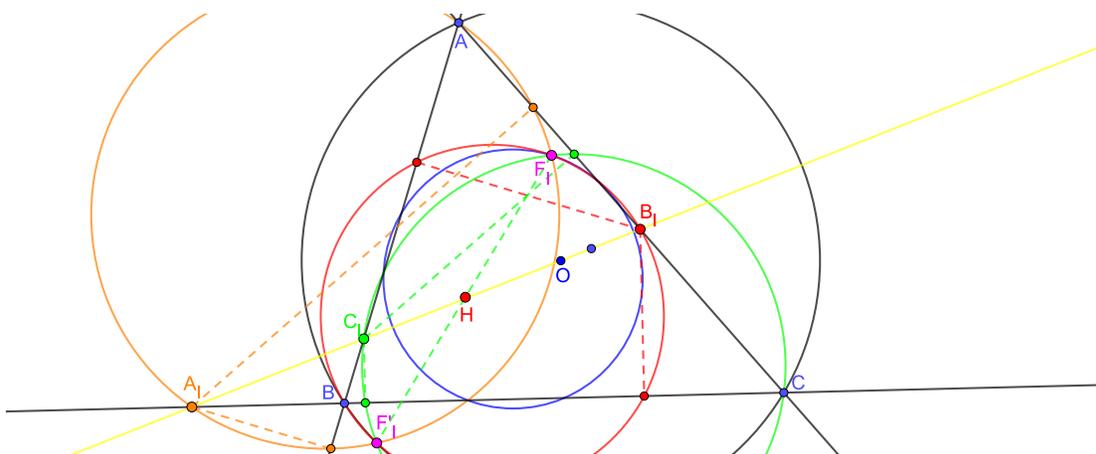


Рис. 19.

3.8 Рассмотрим четырехугольник $H_aH_bH_cF_\ell$, вписанный в окружность Эйлера ε . Его противоположные стороны H_aH_c и $F_\ell H_b$ пересекаются в точке B_{hh} , а стороны H_aH_b и $F_\ell H_c$ — в точке C_{hh} , в то время как диагонали H_aF_ℓ и H_bH_c пересекаются в точке A_{hh} . Отсюда следует, что треугольник $A_{hh}B_{hh}C_{hh}$ является автополярным относительно окружности Эйлера ε .

Теперь докажем, что стороны этого треугольника содержат вершины треугольника ABC . В самом деле, рассмотрим четырехугольник $H_cM_cH_bM_b$, также вписанный в окружность ε . Его диагонали пересекаются в точке A_{hh} , а боковые стороны — в точке A , поэтому точка A лежит на поляре точки A_{hh} . Но полярной точки A_{hh} является прямая $B_{hh}C_{hh}$, поэтому точка A лежит на $B_{hh}C_{hh}$. Рассуждения для остальных вершин абсолютно аналогичны (см. рис. 20).

Кроме того, эта задача является частным случаем следующей.

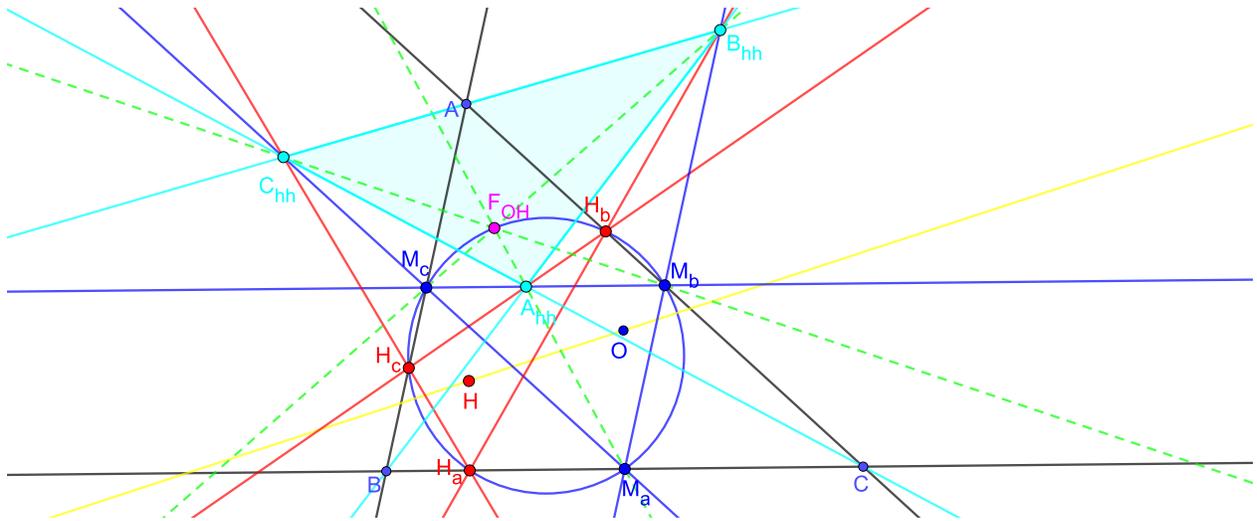


Рис. 20.

3.9 а) Двойное отношение прямых $P_aB, P_aP_c, P_aA, P_aP_b$ равно -1 . Пересекая с прямой AB_{pq} получаем, что точки $AB_{pq} \cap BC, B_{pq}, A, AB_{pq} \cap P_aP_b$ образуют гармоническую четверку. Аналогично, точки $AB_{pq} \cap BC, B_{pq}, A, AB_{pq} \cap Q_aQ_b$ образуют гармоническую четверку. Поэтому AB_{pq}, P_aP_b, Q_aQ_b пересекаются в одной точке, т.е. A лежит на прямой $B_{pq}C_{pq}$.

б,с) По теореме Паппа точка пересечения P_bQ_c с P_cQ_b лежит на PQ . Аналогично для точек пересечения P_aQ_c с P_cQ_a и P_aQ_b с P_bQ_a . По теореме Паскаля шестиугольник $P_aQ_bP_cQ_aP_bQ_c$ вписан в конику Ω . Пусть F — точка пересечения $B_{pq}P_b$ с $C_{pq}P_c$. По теореме Паскаля и пункту а) шестиугольник $FP_bQ_bQ_aQ_cP_c$ вписан в конику Ω . Аналогичное утверждение верно для точки пересечения $A_{pq}P_a$ с $C_{pq}P_c$, откуда прямые $A_{pq}P_a, B_{pq}P_b, C_{pq}P_c$ пересекаются на конике Ω . Это доказывает пункт с). Теперь пункт б) доказывается аналогично предыдущей задаче.

3.10 Пусть точка X_a движется дробно-линейно по BC . Тогда X_b и X_c тоже двигаются дробно-линейно по AC и AB соответственно.

- достаточно доказать для трех положений точки X_a . Случаи $X_a = B, C, M_a$ следуют из предыдущей задачи;
- Точка X пересечения BX_b и CX_c движется дробно-линейно по некоторой конике, проходящей через B и C (доказательство аналогично решению задачи **0.11**). Эта коника проходит через A , т.к. X совпадает с A , когда X_a — точка пересечения BC с $B_{hh}C_{hh}$.

Поэтому достаточно доказывать, что AH проходит через X_a для трех положений точки X_a . Одно положение — $X_a = X = B$, второе — $X_a = X = C$, третье — $X_a = M_a$, $X = M$ (и четвертое — $X_a = H_a$, $X = H$).

- Точка X движется по равнобокой гиперболе $ABCHM$. Известно, что описанная окружность треугольника $X_aX_bX_c$ проходит через центр этой гиперболы (простого доказательства этого факта нам не известно; см. книгу А.Акопян, А.Заславский "Геометрические свойства кривых второго порядка", Теорема 4.3). Центр этой гиперболы совпадает с обобщенной точкой Фейербаха для прямой, изогонально сопряженной данной гиперболе, т.е. с точкой F_{OL} (см. рис. 21).

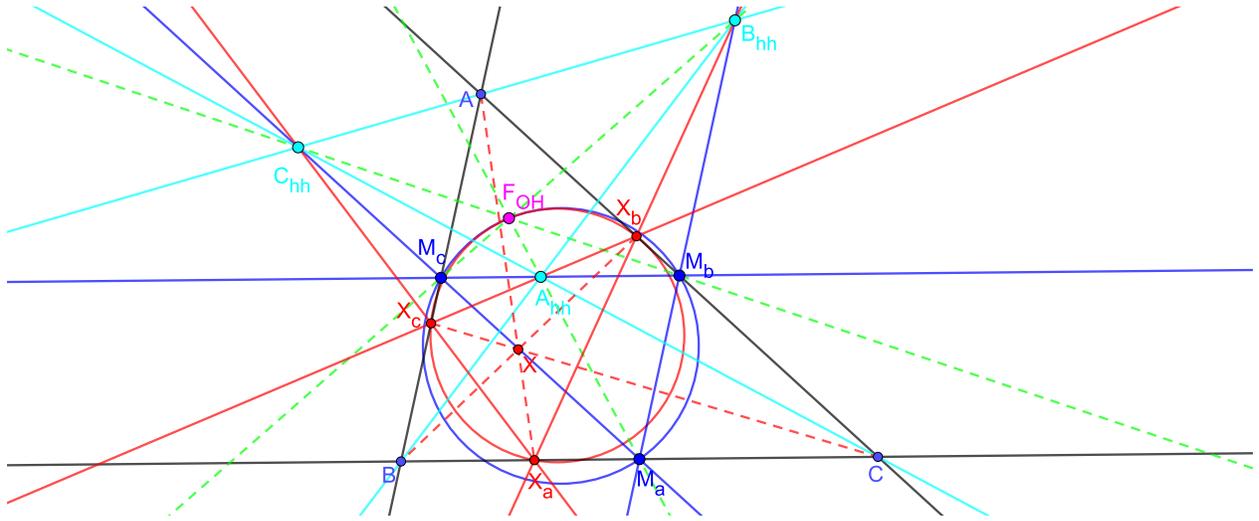


Рис. 21.

3.11 Приведем план доказательства того, что треугольники $Z_aZ_bZ_c$ гомотетичны (информации про центр гомотетии не будет).

Нужно доказать, что BC , Z_bZ_c , $A_{pp}A_{qq}$ параллельны (используем задачу 3.2: $A_{pp}A_{qq}$ — средняя линия). Сводим к проективному утверждению:

Даны треугольники $P_aP_bP_c$ и $Q_aQ_bQ_c$ и точка F . Пусть A_{pp} — точка пересечения P_bP_c с FP_a , точки A_{pq}, B_{pq}, \dots определяются аналогично (как в задаче 3.3). Пусть Z_b и Z_c — точки пересечения $A_{pq}C_{pq}$ с $A_{qr}C_{qr}$ и $A_{pq}B_{pq}$ с $A_{qr}B_{qr}$. Тогда прямые P_aP_b , $A_{pp}A_{qq}$ и Z_bZ_c пересекаются в одной точке.

Двойные отношения прямых $A_{qr}Q_c$, $A_{qr}B_{qr}$, $A_{qr}F$, $A_{qr}Q_a$ и прямых $A_{pq}P_b$, $A_{pq}C_{pq}$, $A_{pq}F$, $A_{pq}P_a$ равны — проецируем из A_{qr} на прямую Q_cQ_a , потом из F на прямую P_bP_a , потом из A_{pq} (и меняем порядок, не меняя двойное отношение). Аналогично, двойные отношения прямых $A_{qr}Q_c$, $A_{qr}C_{qr}$, $A_{qr}F$, $A_{qr}Q_a$ и прямых $A_{pq}P_b$, $A_{pq}B_{pq}$, $A_{pq}F$, $A_{pq}P_a$ равны. Поэтому можно применить следующий факт:

Пусть f — сохраняющее двойные отношения преобразование, сопоставляющее каждой прямой l через точку A_{qr} прямую $f(l)$ через точку A_{pq} . Пусть m и n — любые две прямые через A_{qr} . Рассмотрим прямую, соединяющую точку пересечения m и $f(n)$ с точкой пересечения n и $f(m)$. Тогда эта прямая проходит через фиксированную точку, не зависящую от выбора прямых m и n .

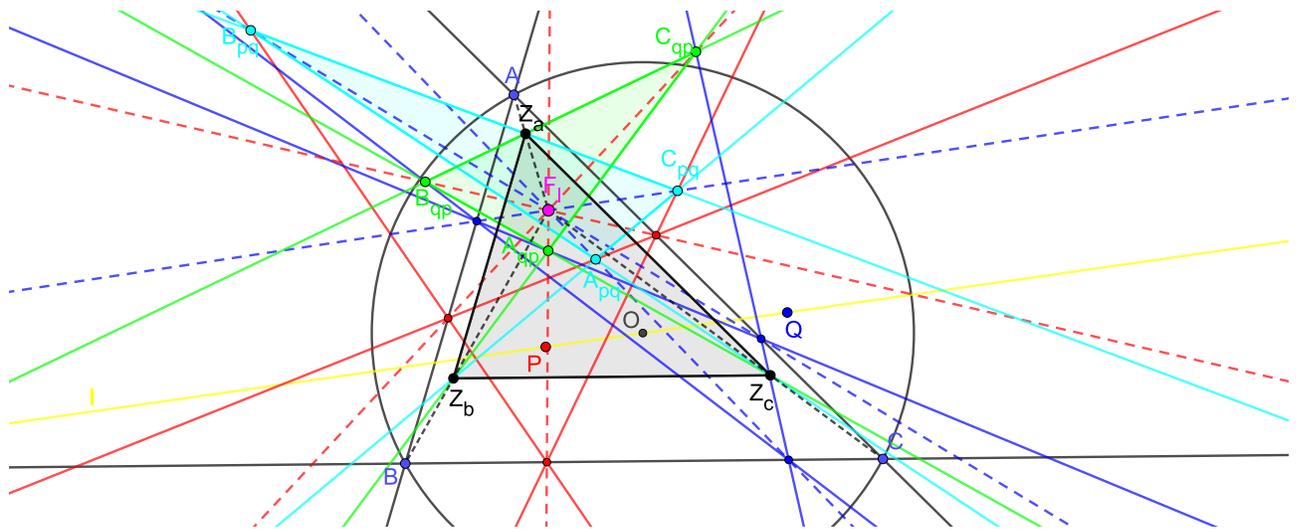


Рис. 22.

Inversions of the Feuerbach point, the poles of triangle and the Kulanin theorem

P. V. Bibikov, M. I. Bidva, V. D. Popov, A. A. Shevtsov

The project is presented by P. A. Kozhevnikov, I. I. Frolov, A. A. Zaslavsky, O. A. Zaslavsky

Introduction

The Feuerbach point is one of well known triangle centers. It is defined as a tangency point of the incircle of triangle and its nine-points circle. The corresponding theorem was proved by Karl Wilhelm Feuerbach in 1822. After this more than 300 another proofs of this theorem were found, many of them use the inversion. The plurality of such proofs shows that the inversion is very useful instrument for analysis of properties of the Feuerbach point. In the first part of the project we propose new method of analysis of the Feuerbach point based on the considering of its reflections about several circles. This approach allows us to obtain several new nice results and to simplify the proofs of some known facts.

In the second part of the project we propose a method extending the obtaining results to more general configurations. We can say that several properties of the Feuerbach point are *partial cases* of general theorems, concerning absolutely distinct constructions which were not be used for its study. Starting from one nice assertion (the Kulanin theorem) we construct a theory generalizing different properties of the Feuerbach point.

The technic for solving the problems of the project is very manifold, thus we suppose that the following methods and constructions are known to the participants:

- inversion and its properties;
- poles and polars, harmonic quadruples;
- linear moving of points;
- properties of conics (not necessary);
- complex numbers (not necessary).

Fix the notations which will be used in all problems of the project.

- A, B, C — the vertices of triangle;
- M_a, M_b, M_c — the midpoints of segments BC, AC, AB respectively;
- H_a, H_b, H_c — the feet of altitudes of triangle ABC from A, B, C respectively;
- L_a, L_b, L_c — the feet of bisectors of triangle ABC from A, B, C respectively;
- ω — the incircle of triangle ABC centered at I ;
- G_a, G_b, G_c — the tangency points of the incircle of triangle ABC with sides BC, AC, AB respectively;
- G'_a, G'_b, G'_c — the tangency points of the excircles of triangle ABC with sides BC, AC, AB respectively;

- K_a, K_b, K_c — the reflections of G_a, G_b, G_c about lines AI, BI, CI respectively;
- λ_a — the circle with diameter BC ;
- S_{ab}, S_{ac} — the Sharygin points, i.e. the common points of λ_a with medial lines M_aM_b and M_aM_c respectively;
- $\varepsilon, \varepsilon_a$ — the nine-points circles of triangles ABC and IBC respectively;
- F — the tangency point of the incircle and the nine-points circle of triangle ABC (the Feuerbach point).

0. Auxiliary facts

The problems of this section contain known facts and it is not necessary to present their solutions. But we recommend to solve the problems unknown to you. This will help to solve the remaining problems of the project.

0.1 (The nine-points circle) Prove that the midpoints of sides of triangle, the feet of its altitudes, and the midpoints of segments joining its vertices with the orthocenter are concyclic.

0.2 (The Euler line) Prove that the center E of the nine-points circle, the circumcenter O , the orthocenter H , and the centroid M are collinear, and $HE : EM : MO = 3 : 1 : 2$.

0.3 (The Miquel point) Consider four lines in general position forming four triangles. Prove that the circumcircles of these triangles have a common point.

0.4 Prove that the Euler line of triangle $G_aG_bG_c$ passes through O .

0.5 (The Simson line) Prove that the projections of a point lying on the circumcircle Ω of triangle ABC to its sidelines are collinear.

0.6 Prove that the Simson line of point P bisects segment PH .

0.7 (Isogonal conjugation) Consider a triangle ABC and a point P distinct from its vertices. Prove that the reflections of lines $AP, BP,$ and CP about the bisectors AI, BI, CI respectively concur at a point P' .

0.8 Prove the following properties of isogonal conjugation:

- the points O and H are isogonally conjugated;
- the pedal circles (i.e. the circles passing through the projections of the given points to the sidelines of triangle) of isogonally conjugated points P and P' coincide, and this circle is centered at the midpoint of segment PP' ;
- the point isogonally conjugated to a point P of the circumcircle is the infinite point of the perpendicular to the Simson line of P ;
- the point A is isogonally conjugate to points of line BC distinct from B and C .

0.9 Let P and Q be isogonally conjugated, and P_b, P_c, Q_b, Q_c be their projections to AC and AB respectively. Prove that P_bQ_c, P_cQ_b , and PQ concur.

0.10 Prove that any conic passing through A, B, C , and H is an equilateral hyperbola.

0.11 Prove that the isogonal image of a line is a conic.

1. The Feuerbach theorem

1.1 Prove that the triplets of lines (G_bG_c, BI, M_aM_b) and (G_bG_c, CI, M_aM_c) concur at points S_{ab} and S_{ac} respectively. These points lie on the circle λ_a with diameter BC .

1.2 Prove that the angle between the line BC and the nine-points circle ε equals to $|\angle B - \angle C|$.

1.3 Prove that the quadruple (H_a, L_a, G_a, G'_a) is harmonic.

1.4 Prove the Feuerbach theorem, i.e. the tangency of the incircle ω and the nine-points circle ε

1.5 Generalize the proof from the previous problem to the case of the excircles. Prove that the triangle formed by the tangency points of the nine-points circle with the excircles is perspective to the triangle $L_aL_bL_c$ with center at F .

1.6 (*) Find another remarkable circles tangent to the nine-points circle. Which interesting properties of tangency points can be noted?

1.7 Prove that the line FG_a bisects angle H_aFM_a .

1.8 Prove that the nine-points circles of four triangles formed by arbitrary four points in general position have a common point (the Poncelet point).

1.9 Let P be an arbitrary point distinct from O and H . Prove that the pedal circle of P passes through the Poncelet point of $ABCP$.

1.10 Prove that the triangles $K_aK_bK_c$ and $M_aM_bM_c$ are homothetic with center F .

1.11 Prove that F lies on the nine-points circle ε_a of triangle BIC .

1.12 Let \tilde{G}_a be the point of ω opposite to G_a . Prove that the line $F\tilde{G}_a$ bisects segment AI .

2. Inversion images of the Feuerbach point

Now pass to the substantial part using the inversion. Consider again the circle λ_a with diameter BC . Let F'_a be the reflection of F about λ_a . The point F'_a will be the main object of studying in this section.

Also we will actively use in the problems of this part the points K_a, K_b , and K_c symmetric to G_a, G_b , and G_c with respect to the bisectors of the corresponding angles.

2.1 Prove that F'_a is the radical center of circles λ_a, ε , and ε_a .

2.2 Let K'_b and K'_c be the common points of rays K_aK_b and K_aK_c respectively with the line H_bH_c . Prove that the fives of points $(F, F'_a, K_b, K'_b, S_{ab})$ and $(F, F'_a, K_c, K'_c, S_{ac})$ are concyclic on circles ψ_{ab} and ψ_{ac} respectively.

2.3 Prove that the line M_aS_{ab} touches the circle ψ_{ab} .

2.4 Prove that the line $S_{ab}S_{ac}$ bisects the angle $K_bF'_aH_b$.

2.5 Prove that F'_a is the common point of lines K_bK_c , L_bL_c , and $G'_bG'_c$.

2.6 Let T_a be the common point of lines FG_a and $S_{ab}S_{ac}$. Then the quadruples (F, T_a, M_b, S_{ab}) and (F, T_a, M_c, S_{ac}) are concyclic on circles ψ'_{ab} and ψ'_{ac} respectively.

2.7 Prove that F is the Mickel point for the triangle $M_aM_bM_c$ and the line $S_{ab}S_{ac}$.

2.8 Prove that T_a , T_b , and T_c lie on medial lines M_bM_c , M_cM_a , and M_aM_b respectively.

2.9 Consider an arbitrary triangle $\Delta = P_aP_bP_c$ homothetic to the triangle $M_aM_bM_c$ with center at F . Consider circles ψ_{ab}^Δ and ψ_{ac}^Δ passing through (F, P_b, S_{ab}) and (F, P_c, S_{ac}) respectively. Prove that their common point distinct from F coincides with the common point A^Δ of lines P_bP_c and $S_{ab}S_{ac}$.

2.10 Prove that when A^Δ coincides with G_b the circle ψ_{ac}^Δ passes through F , H_b , G_b , S_{ac} , S_{ca} , and the reflection of I about $S_{ac}S_{ca}$.

2.11 (*) Prove that the perpendiculars to lines BC , CA , and AB from their common points with FA^Δ , FB^Δ , FC^Δ respectively concur at point lying on OI . Also the circle passing through these common points passes through F .

For which triangle Δ the configuration of problem **2.9** passes to the configurations of problems **2.2** and **2.6** ?

The last problem is very difficult. The following section is dedicated to the construction allowing not only to solve this problem but to generalize it to similar configurations.

3. General poles of triangle and the Kulanin theorem

In this section we generalize the notion of Feuerbach point and prove the assertions presented above (partially in problem **2.11**) for general cases. We will use next additional notations.

- O — the center of circumcircle Ω of triangle ABC ;
- ℓ — an arbitrary line passing through O ;
- A_ℓ, B_ℓ, C_ℓ — the common points of ℓ with $BC, CA,$ and AB respectively;
- $P_aP_bP_c$ — the pedal triangle of P with respect to triangle ABC , and Ω_P — its pedal circle;
- F_ℓ — general Feuerbach point (see. the Kulanin theorem).

To formulate the necessary notions we use the following theorem. Now it can be used without proof.

Theorem 1 (Kulanin). Let P be an arbitrary point of line ℓ passing through O . Then all pedal circles Ω_P have a common point.

3.1 (*) Prove this theorem.

Denote by F_ℓ the common point of pedal circles Ω_P of points lying on ℓ . We will call F_ℓ the *general Feuerbach point*. This point depends on line ℓ passing through the circumcenter O of triangle ABC . In the case $\ell = OI$ the point F_ℓ coincides with the Feuerbach point F . Note also that all points F_ℓ lie on the nine-points circle ε of triangle ABC (because the nine-points circle is the pedal circle of O).

3.2 Consider a triangle ABC , a line ℓ passing through O , and a point P on it. Denote by A_{pp} the common point of lines P_bP_c and M_bM_c . Prove that P_a, A_{pp} , and F_ℓ are collinear.

3.3 (*) (Main theorem) Consider an arbitrary line ℓ passing through the circumcenter O of triangle ABC . Let P and Q be arbitrary points of this line. Note as A_{pq} the common point of lines P_bP_c and $F_\ell Q_a$. Define points B_{pq} and C_{pq} similarly. Take an arbitrary point R on ℓ and draw the lines through A_{pq}, B_{pq}, C_{pq} parallel to R_bR_c, R_cR_a, R_aR_b respectively. Then the obtained triangle is homothetic to triangle $R_aR_bR_c$ with homothety center F_ℓ .

3.4 Using the main theorem prove the results of problems **2.5** , **2.8** , **2.11** .

3.5 Prove that the circumcircle of triangle formed by the lines $A_{pq}A_{qp}, B_{pq}B_{qp}, C_{pq}C_{qp}$ passes through F_ℓ .

3.6 Prove that the reflections of ℓ about the medial lines of triangle ABC concur at point F_ℓ .

3.7 Let $A_\ell, B_\ell,$ and C_ℓ be the common points of ℓ with $BC, CA,$ and AB respectively. Prove that the circles with diameters $AA_\ell, BB_\ell, CC_\ell$ have two common points F_ℓ and F'_ℓ , F'_ℓ lies on the circumcircle Ω of triangle ABC , and the orthocenter H of this triangle lies on the line $F_\ell F'_\ell$.

3.8 Let OH be the Euler line of triangle ABC . Prove that the triangle formed by the poles A_{hh}, B_{hh}, C_{hh} is autopolar with respect to the nine-points circle ε , in such a way that the vertices of ABC lie on the sidelines of $A_{hh}B_{hh}C_{hh}$.

3.9 Let triangles $P_aP_bP_c$ and $Q_aQ_bQ_c$ be perspective to ABC and their vertices lie on the corresponding sidelines of ABC . Let A_{pq}, B_{pq}, C_{pq} be the common points of the corresponding sidelines of triangles $P_aP_bP_c$ and $Q_aQ_bQ_c$. Prove that:

- a) The vertices of ABC lie on the sidelines of triangle $A_{pq}B_{pq}C_{pq}$;
- b) Triangle $A_{pq}B_{pq}C_{pq}$ is autopolar with respect to conic Ω passing through $P_a, P_b, P_c, Q_a, Q_b, Q_c$;
- c) Triangle $A_{pq}B_{pq}C_{pq}$ is perspective to triangles $P_aP_bP_c$ and $Q_aQ_bQ_c$ and the corresponding perspective centers lie on the conic Ω .

3.10 Let X_a be an arbitrary point of line BC . Denote by X_b the common point of lines X_aB_{hh} and AC , note as X_c the common point of lines X_aC_{hh} and AB . Prove that

- the line X_bX_c passes through A_{hh} ;
- the lines $AX_a, BX_b,$ and CX_c concur at point X ;
- the circumcircle $X_aX_bX_c$ passes through F_{OL} , where L is the Lemoine point of ABC .

Finally formulate several open problems.

3.11 The definition of poles A_{pq}, B_{pq}, C_{pq} depends on the order of choosing of points P and Q lying on ℓ . The question: how the poles A_{pq} and A_{qp} , i.e. the points of the same points taken in different order are correlated? We have the following hypothesis. *The common points Z_a, Z_b, Z_c of the corresponding sidelines of triangles $A_{pq}B_{pq}C_{pq}$ and $A_{qp}B_{qp}C_{qp}$ form a triangle homothetic to ABC with center F_ℓ .*

3.12 It is interesting to find such pair of points P and Q of line ℓ that the vertices of ABC lie on the sidelines of triangle $A_{pq}B_{pq}C_{pq}$. Is always possible to choose such pair of points of ℓ ? Experiments show that such points always exist, but they can not lie too far from O . How can we describe such positions of P and Q that the vertices of ABC lie on the sidelines of triangle $A_{pq}B_{pq}C_{pq}$?

On inverse images of the Feuerbach point, poles of a triangle, and Kulanin's theorem Solutions

0. Auxiliary facts

0.1 Since $\angle BHC = 180^\circ - \angle BAC$, points symmetric to H in BC and in the midpoint of BC , lie on the circumcircle. Homothety with center H and ratio $1/2$ maps the circumcircle to Euler circle.

0.2 Perpendicular bisectors of the original triangle are the altitudes for the medial triangle, hence O is its orthocenter. Homothety with center M and ratio $-1/2$ maps the original triangle to the medial one, hence it maps H to O . Hence M belongs to the segment HO and $HM : MO = 2$. By the previous problem, E belongs to the segment HO and $HE : EO = 1 : 1$. The equality $HE : EM : MO = 3 : 1 : 2$ follows.

0.3 Let these lines form a triangle ABC , while the fourth line intersects AB, AC, BC at D, E, F , respectively. Let the circles (ABC) and (CEF) intersect at $\neq C$. Further, we prove that P lies on the circle (BDF) . It is sufficient to prove that $\angle(BP, PF) = \angle(BD, DF)$. It is clear that $\angle(BP, PF) = \angle(BP, PC) + \angle(PC, PF) = \angle(BA, AC) + \angle(EC, EF) = \angle(BD, AC) + \angle(AC, DF) = \angle(BD, DF)$. Similarly, P lies on the circle (ADE) .

0.4 Let I_a, I_b, I_c be the centers of the excircles of ABC . Note that I_aA, I_bB, I_cC are the altitudes in $I_aI_bI_c$. The corresponding sides of $I_aI_bI_c$ and $G_aG_bG_c$ are parallel, i.e. these triangles are homothetic. Hence, their Euler lines are parallel. Note that I is the circumcenter of $G_aG_bG_c$ and the orthocenter of $I_aI_bI_c$. Hence both Euler lines pass through I , and therefore, coincide. O is the center of Euler circle in triangle $I_aI_bI_c$, hence O belongs to its Euler line.

0.5 By angle chasing, follows from the solution of the next problem.

0.6 Consider the homothety with center P and ratio 2. Let $P'_a, P'_b, P'_c, H'_a, H'_b, H'_c$ be points symmetric to P and H in the corresponding sidelines. It suffices to prove that P'_b, H, P'_c are collinear (the proof of collinearity of P'_a, H, P'_c is analogous). By symmetry in AB , $\angle(P'_cH, HB) = \angle(BH'_c, H'_cP)$ $\angle(CH, HP'_b) = \angle(PH'_b, H'_bC)$. Since P, H'_b, H'_c are concyclic, we have $\angle(P'_cH, HP'_b) = \angle(P'_cH, HB) + \angle(HB, CH) + \angle(CH, HP'_b) = \angle(BH'_c, H'_cP) + \angle(HB, CH) + \angle(PH'_b, H'_bC) = \angle(BA, AP) + \angle(HB, CH) + \angle(PA, AC) = \angle(BA, AC) + \angle(HB, CH) = 0$, therefore, P'_b, H, P'_c are collinear.

0.7 Let P'_a, P'_b, P'_c be points symmetric to P in the corresponding sidelines. It is easy to check that the line symmetric to AP in AI is the perpendicular bisector of $P'_bP'_c$. Therefore, P' is the circumcenter of $P'_aP'_bP'_c$.

0.8 We prove the following properties of isogonal conjugacy:

- Follows from the previous problem and the fact that the reflections of H in the sidelines lie on the circumcircle.
- Using the previous and applying homothety with center P and ratio $1/2$, we obtain that the midpoint of PP' is the center of the pedal circle of P . The midpoint of PP' is equidistant from the projections of P and P' onto any sideline. It follows that the pedal circles of P' and P coincide.

- By the previous problem, the isogonal conjugate of P is the intersection of the perpendicular bisectors of $P'_aP'_b$, $P'_bP'_c$, $P'_cP'_a$. Note that each perpendicular bisector is perpendicular to Simson line of P .
- Clear.

0.9 By the previous problem, P_b, P_c, Q_b, Q_c lie on a circle centered at the midpoint of PQ . Let X and Y be reflections of P_b and P_c in the center, respectively. Hence X lies on QQ_b , while Y lies on Q_c . By Pascal theorem for $P_bQ_cYP_cQ_bX$, the midpoint of PQ , the point Q , and the point $P_bQ_c \cap P_cQ_b$ are collinear. This means that P_bQ_c, P_cQ_b, PQ are concurrent.

0.10 Since $ABCH$ is non-convex, each its circumconic is a hyperbola. Let P, Q be its points at infinity. It suffices to prove that the directions defined by P and Q are perpendicular. Use pascal theorem for $ABCHPQ$. Let $X = AB \cap HP$, $Y = CH \cap QA$. XY passes through $BC \cap PQ$, i.e. $XY \parallel BC$, or, equivalently, $XY \perp AH$. Hence Y is the orthocenter of AHX , and it follows $AY \perp HX$. Thus $AQ \perp HP$, QED.

0.11 Choose points P, Q, R on a line ℓ . Take a conic c through its isogonal conjugates P', Q', R' and through B, C . Consider two maps $\ell \rightarrow c$ keeping cross-ratios. The first map to each $X \in \ell$ assigns the intersection of c with the reflection of BX in the bisector of the angle B . The second map is the same with B replaced by C . These two maps coincide at P, Q, R , hence in fact they coincide. Therefore, the image of ℓ under isogonal conjugacy is a conic through B and C . It is clear that this conic also passes through A .

1. Feuerbach theorem

1.1 Since S_{ab} is the intersection point of λ_a and the midline M_aM_b , triangle BM_aS_{ab} is isosceles. We have $\angle S_{ab}BM_a = \frac{1}{2}\angle S_{ab}M_aC = \frac{1}{2}\angle ABC = \angle IBC$. Hence S_{ab} lies on BI .

Since $\angle BS_{ab}C = 90^\circ$, I, G_b, S_{ab}, C are concyclic (lie on the circle with diameter CI). Hence $\angle S_{ab}G_bC = \angle S_{ab}IC = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle BAC = \angle AG_bC$. Therefore, S_{ab} lies on the line G_bG_c (see fig. 1).

1.2 The angle between H_aM_a and ε is equal to the half of arc H_aM_a in ε , hence it is equal to $\angle H_aM_bM_a = |\angle CM_aM_b - \angle CH_aM_b| = |\angle CBA - \angle H_aCM_b| = |\angle B - \angle C|$.

1.3 Note that BI and BI_a are internal and external bisectors of the angle ABL_a . Hence A, I, L_a, I_a is a harmonic quadruple. The required statement follows from projection onto BC .

1.4 By the previous problem, the inversion in the circle with diameter $G_aG'_a$ takes the nine-point circle ε to the line ℓ passing through L_a . On the other hand, ω and ω_a are invariant under this inversion, since each of them is orthogonal to circle of inversion. Therefore, the angle between ℓ and BC equals $|\angle B - \angle C|$, that is the angle between ω and BC . The line symmetric to BC in AI forms the same angle with BC . Therefore, ℓ is symmetric to BC in AI , hence ℓ is tangent to ω and ω_a (see fig. 2).

1.5 The fact of tangency of Euler circle with the excircle ω_a at some point F_a follows from the solution of the previous problem. L_a is the center of homothety with a negative ratio. The required perspectivity follows from Monge theorem for the incircle, the excircle, and Euler circle.

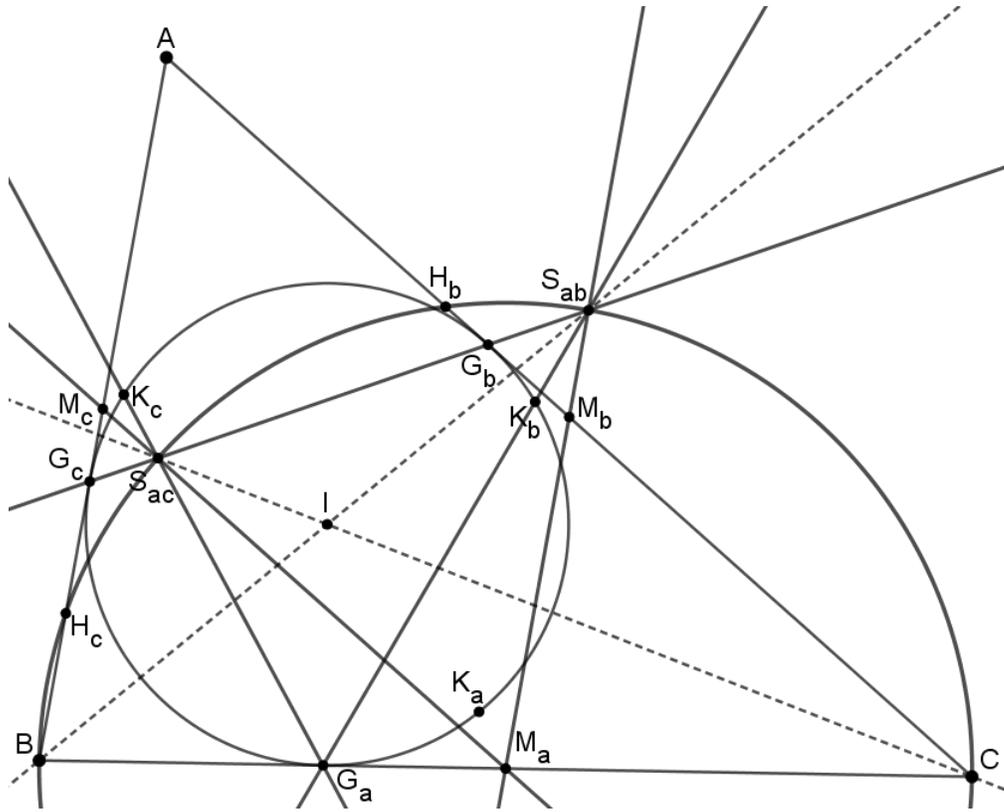


Figure 1.

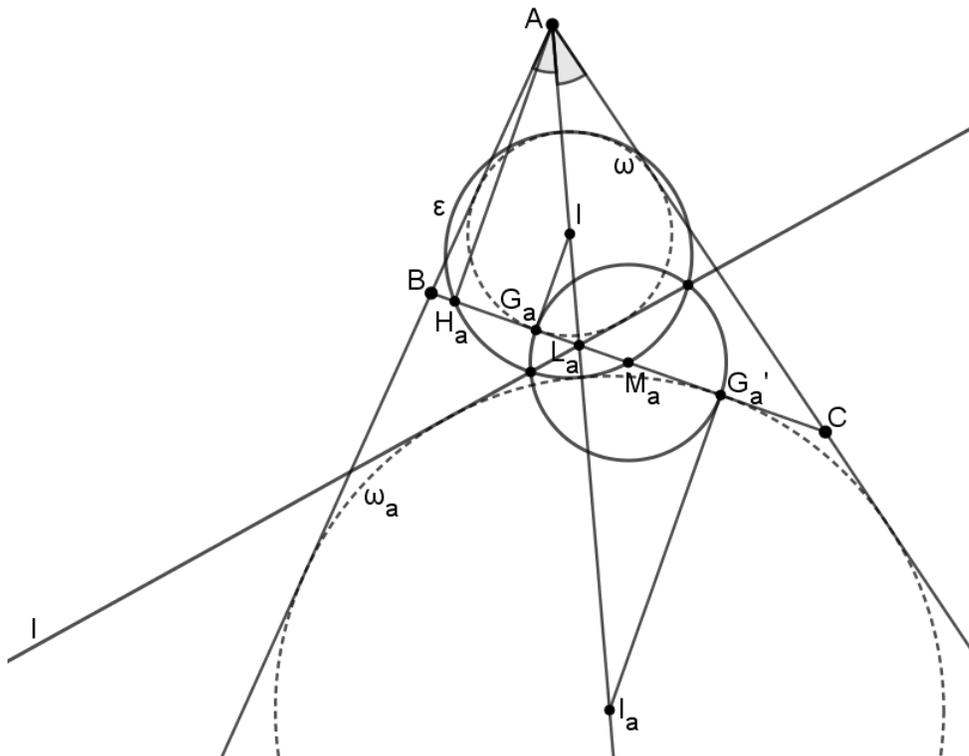


Figure 2.

1.7 Consider the homothety with center F taking the incircle to the Euler circle. The line H_aM_a maps to the line parallel to H_aM_a and touching the Euler circle at X . By symmetry in the perpendicular bisector of H_aM_a , X is the midpoint of the arc H_aM_a of Euler circle. Hence FX is the bisector of $\angle H_aFM_a$. Now the statement follows, since the homothety maps G_a to X .

1.8 By M_{XY} denote the midpoint of XY . Let A, B, C, P be points, and let $X \neq M_{BP}$ be the common point of the Euler circles of ABP and BCP . We have $\angle(M_{AP}X, XM_{CP}) = \angle(M_{AP}X, XM_{BP}) + \angle(M_{BP}X, XM_{CP}) = \angle(M_{AP}M_{AB}, M_{AB}M_{BP}) + \angle(M_{BP}M_{BC}, M_{BC}M_{CP}) = \angle(BP, AP) + \angle(CP, BP) = \angle(CP, AP) = \angle(M_{AP}M_{AC}, M_{AC}M_{CP})$.

This means that X lies on the Euler circle of ACP . Similarly, X lies on the Euler circle of ABC (see fig. 3).

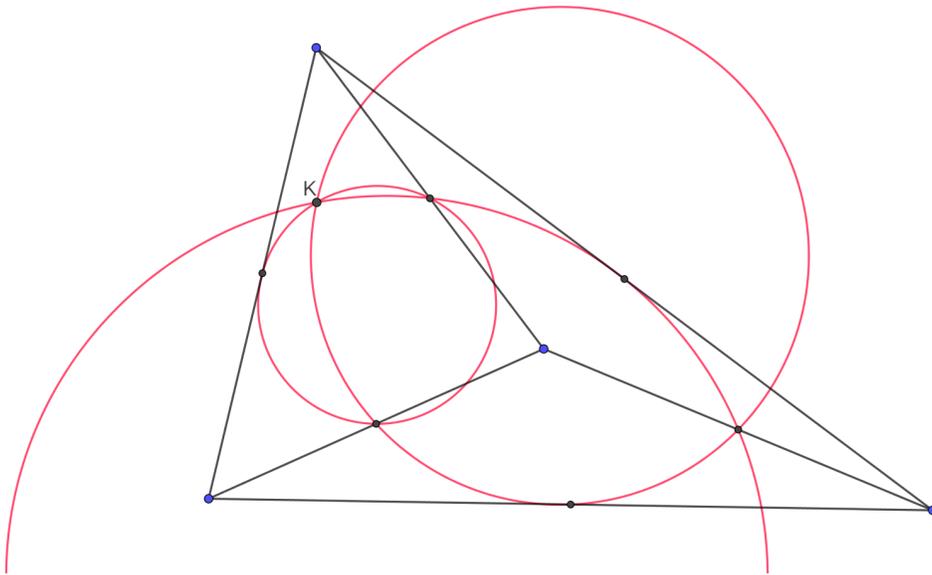


Figure 3.

1.9 Let P_a, P_b, P_c be P projections of P to the sides of the triangle ABC . We use notation from the solution to the previous problem.

$$\angle(P_cX, XP_a) = \angle(P_cX, XM_{BP}) + \angle(M_{BP}X, XP_a) = \angle(P_cM_{AB}, M_{AB}M_{BP}) + \angle(M_{BP}M_{BC}, M_{BC}P_a) = \angle(P_cA, AP) + \angle(PC, CP_a) = \angle(P_cP_b, P_bP) + \angle(P_pP_b, P_bP_a) = \angle(P_cP_b, P_bP_a).$$

1.10 First, let us prove that the corresponding sides of $K_aK_bK_c$ and $M_aM_bM_c$ are parallel. Chords G_aK_b and G_bG_c are symmetric in BI , hence they are equal. The similar is true for chords G_bG_c and G_aK_c . Therefore, $K_cG_aK_b$ is isosceles, which implies $\angle G_aK_cK_b = \angle G_aK_bK_c = \angle CG_aK_b$. Hence $BC \parallel K_bK_c$. For the other pairs the proof is similar. Now by Desargues, $K_aK_bK_c$ and $M_aM_bM_c$ are homothetic. The common point of lines M_aK_a , M_bK_b , and M_cK_c is the center of this homothety, and moreover, the center of homothety taking the incircle to the Euler circle, that is the Feuerbach point F (see fig. 4).

1.11 Follows from the Feuerbach theorem and problems **1.8**, **1.9** for quadrilateral $ABCI$ (see fig. 5).

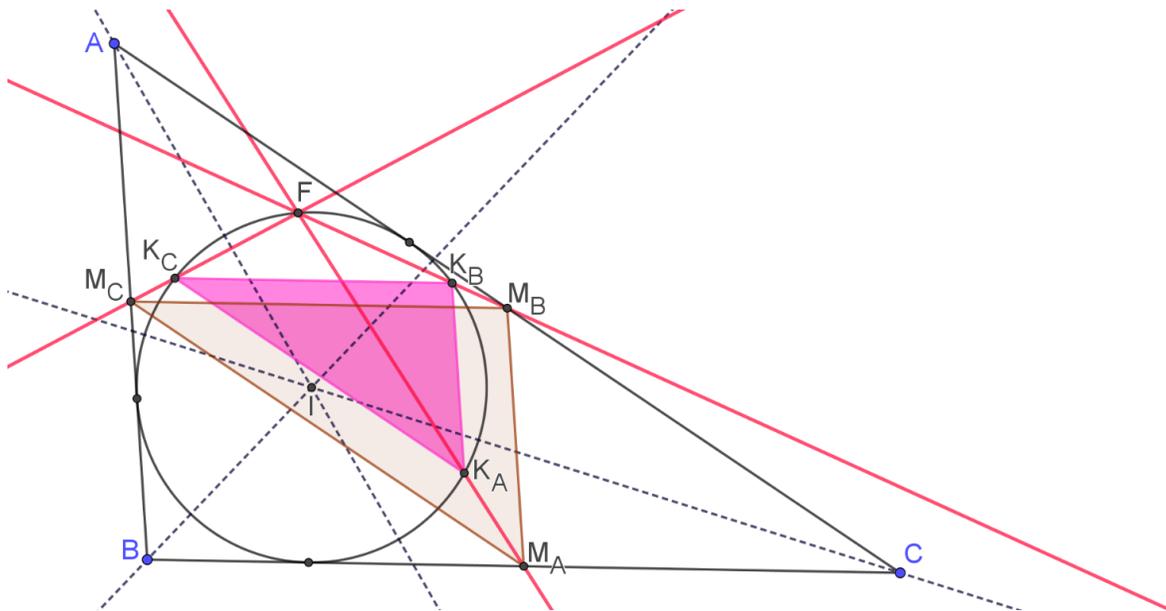


Figure 4.

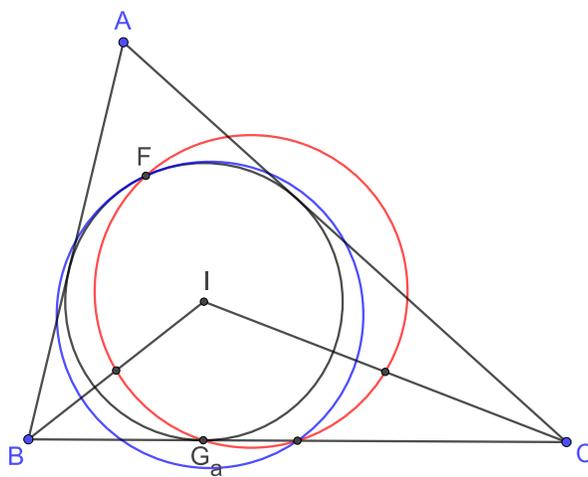


Figure 5.

1.12 By the previous problem, the point F lies on the Euler circle of AIC . The midpoint X of AI also lies on this circle. It suffices to prove that $\angle(G_bF, FX) = \angle(G_bF, F\tilde{G}_a)$. We have $\angle(G_bF, FX) = \angle(G_bM_b, M_bX) = \angle(G_bC, CI) = \angle(G_bG_a, G_aI) = \angle(G_bG_a, G_a\tilde{G}_a) = \angle(G_bF, F\tilde{G}_a)$ (see fig. 6).

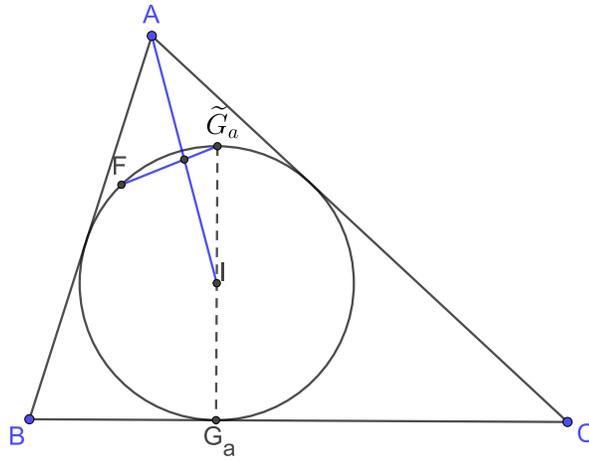


Figure 6.

2. The inverse images of the Feuerbach points

2.1 The inversion in λ_a takes the Euler circle ε to H_bH_c , while takes ε_a to $S_{ab}S_{ac}$. Since F is a common point of ε and ε_a , F'_a is the common point of lines H_bH_c and $S_{ab}S_{ac}$, which are radical axis of λ_a and ε , λ_a and ε_a (see fig. 7).

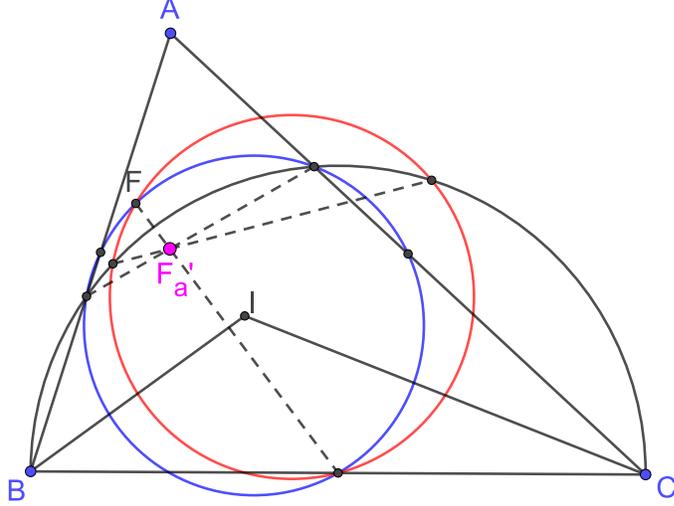


Figure 7.

2.2 First, we prove that F, F'_a, K_b, K'_b are concyclic (similarly, for F, F'_a, K_c, K'_c). Consider the inversion Inv_{K_a} with center K_a taking F'_a to F . Hence $\text{Inv}_{K_a} \circ \text{Inv}_{\lambda_a}$ takes ε to a circle ω' passing through F and K_a . This transformation preserves angles between lines and circles. Note that the centers of both inversions lie on FF'_a . Therefore, circles ε and ω' form equal angles with FF'_a . This means that ε and ω' touch at F . It follows that ω and ω' coincide, since there exists a unique circle passing through K_a and touching ε at F .

Further, note that K'_b that is the point of intersection of ray K_aK_b with H_bH_c is the image of K_b under Inv_{K_a} . Hence $F, F'_a, K_b,$ and K'_b are concyclic.

To complete with S_{ab} and S_{ac} use inscribed angles. First, $\angle K_aFK_b = \angle K_aK_cK_b$. Further, let FK_b meet ε_a again at R . We have $\angle M_aS_{ac}R = \angle M_aFR$. Lines M_aS_{ac} and K_aK_c are parallel. Since $\angle M_aS_{ac}R = \angle M_aFR$, we have $S_{ac}R \parallel K_bK_c \parallel BC$. It follows $\angle M_aFR = \angle S_{ac}S_{ab}G_a$, which means that $F, F'_a, K_b, K'_b, S_{ab}$ are concyclic. For S_{ac} the proof is analogous (see fig. 8).

2.3 From the solution of the previous problem ψ_{ab} and λ_a are orthogonal. Therefore, M_aS_{ab} touches ψ_{ab} .

2.4 Since M_aS_{ab} and M_aS_{ac} touch ψ_{ab} and ψ_{ac} , respectively, and $M_aS_{ab} \parallel K_aK_b$ $M_aS_{ac} \parallel K_aK_c$, we have $K_bS_{ab} = K'_bS_{ab}$ and $K_cS_{ac} = K'_cS_{ac}$ (equal chords between parallel lines). Hence $\angle K_bF'_aS_{ab} = \angle K'_bF'_aS_{ab}$, QED.

2.5 F'_a lies on K_bK_c , by the previous problem.

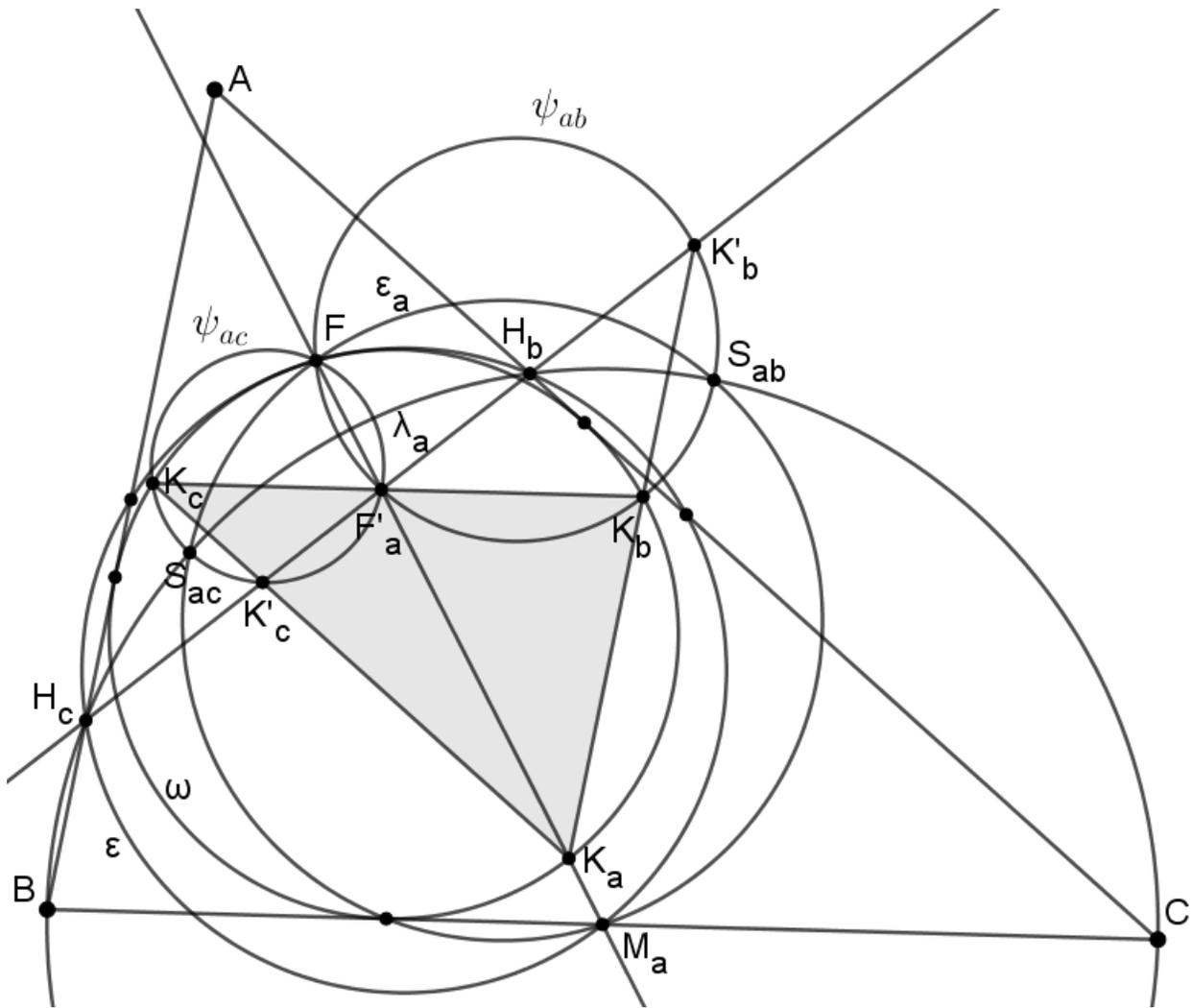


Figure 8.

Note that L_bK_b and L_cK_c are tangent to the incircle at points K_b and K_c respectively. We use the following claim, which is a degenerate case of Brianchon's theorem:

Let $K_cG_bK_bG_c$ be a cyclic quadrilateral. Tangents to its circumcircle through its vertices form another quadrilateral. Then the diagonals of these quadrilaterals have a common point.

So the lines K_bK_c , G_bG_c , L_bL_c are concurrent.

By problem **1.3** the line $G'_bG'_c$ passes through their common point.

2.6 Let us prove for ψ'_{ab} ; for ψ'_{ac} the proof is similar. $\angle M_aFM_b = \angle M_aM_cM_b = \angle ACB = \angle G_aS_{ab}T_a$ (the last equality follows since C, G_a, G_b, S_{ab} lie on the circle with diameter CI). By the problem **1.11**, $\angle G_aFM_a = \angle G_aS_{ab}M_a$. Hence $\angle T_aFM_b = \angle M_aFM_b + \angle G_aFM_a = \angle G_aS_{ab}T_a + \angle G_aS_{ab}M_a = \angle T_aS_{ab}M_b$ (see fig. 9).

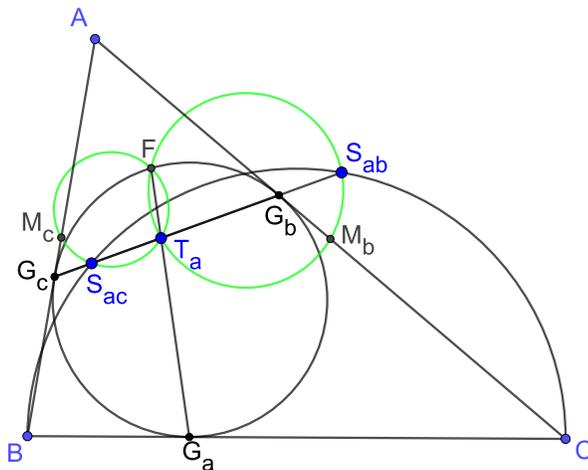


Figure 9.

2.7 F lies on circles $(M_aM_bM_c)$ and $(S_{ab}M_aS_{ac})$.

2.8 Follows from two previous problems (see fig. 10).

2.9 Using the circle ψ'_{ab} from the problem **2.6** we have: $\angle A^\Delta P_bF = \angle T_aM_bF = \angle T_aS_{ab}F = \angle A^\Delta S_{ab}F$. It follows that A^Δ lies on the circle ψ'_{ab} . Similarly, prove that A^Δ lies on ψ'_{ac} (see fig. 11).

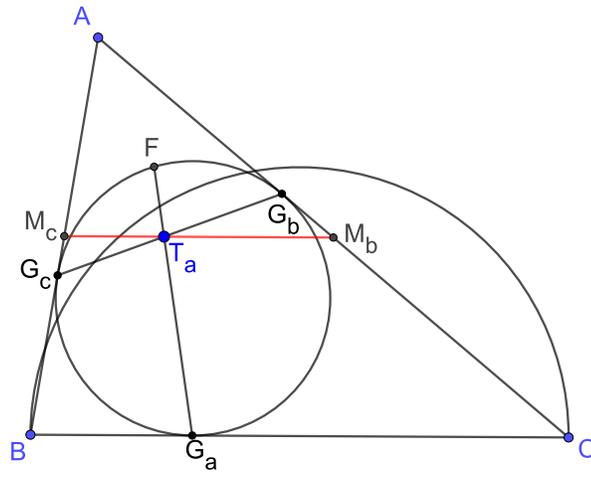


Figure 10.

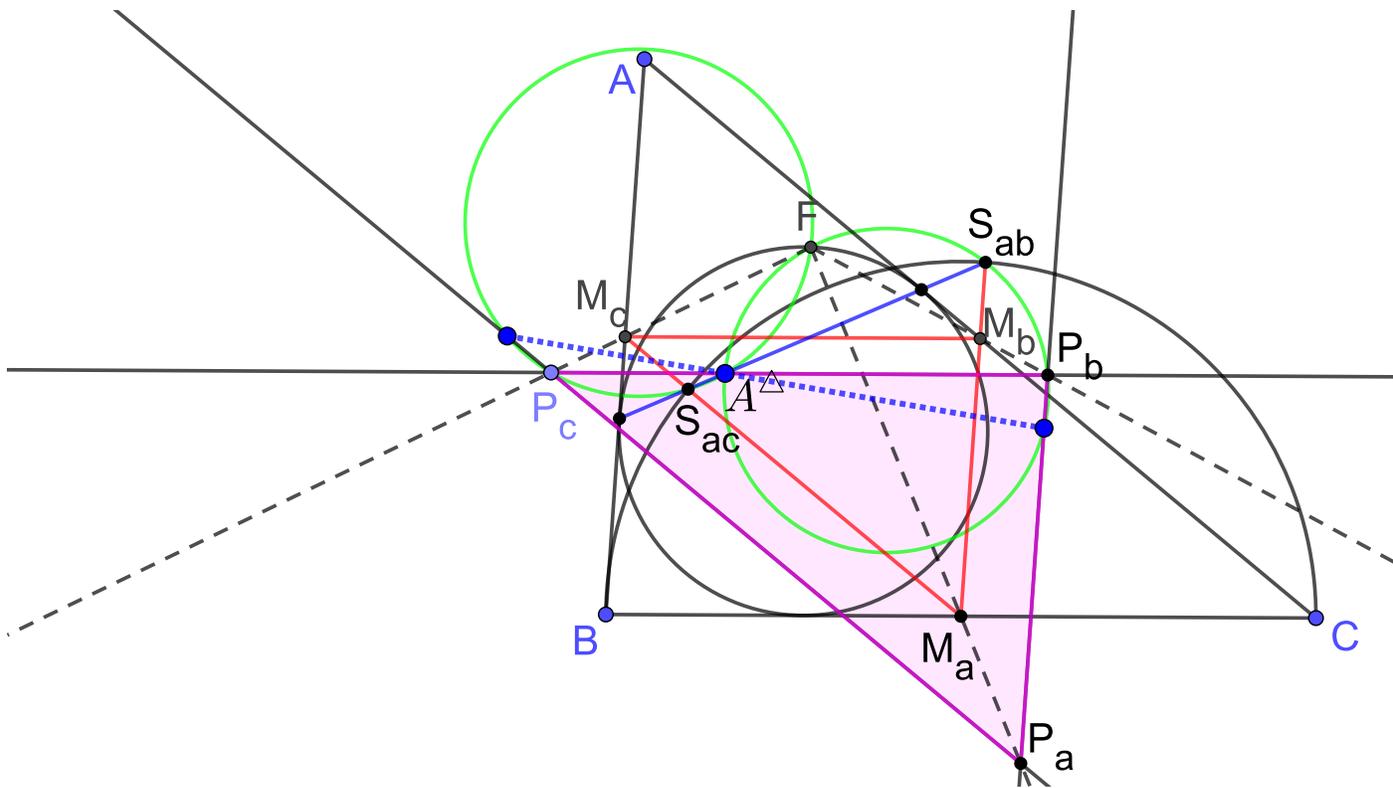


Figure 11.

2.10 First, we prove that H_b, G_b, S_{ac}, S_{ca} are concyclic. Note that BS_{ca} and H_bS_{ac} are parallel, since both these lines are perpendicular to the bisector of $\angle BAC$. Similarly, $BS_{ac} \parallel G_bS_{ca}$. Hence $BS_{ac}H_bS_{ca}$ is a parallelogram, and $H_bS_{ac} = BS_{ca} = G_bS_{ca}$. Hence $S_{ac}H_bG_bS_{ca}$ is an isosceles trapezoid, thus it is inscribed (see fig. 8).

Now let us prove that the Feuerbach point also lies on this circle. By Archimedes lemma, $\angle H_bFG_b = \frac{1}{2}\angle H_bFM_b = \frac{1}{2}|\angle A - \angle C|$. Further, $\angle H_bS_{ac}S_{ca} = \angle S_{ca}G_bC = \frac{\pi}{2} - \frac{\angle C}{2}$, and $\angle G_bS_{ac}S_{ca} = \angle AG_bS_{ac} = \frac{\pi}{2} - \frac{\angle A}{2}$, hence

$$\angle H_bS_{ac}G_b = |\angle H_bS_{ac}S_{ca} - \angle G_bS_{ac}S_{ca}| = \frac{1}{2}|\angle A - \angle C| = \angle H_bFG_b,$$

which implies that F lies on the circumcircle of the trapezoid $H_bG_bS_{ca}S_{ac}$

It is easy to see that the point I is the orthocenter of the triangle $S_{ac}S_{ca}G_b$. It follows that the reflection of I in the line $S_{ac}S_{ca}$ lies on the circle $(S_{ac}S_{ca}G_b)$, QED.

2.11 Let us move $P_aP_bP_c$ linearly. Points $A^\Delta, B^\Delta, C^\Delta$ move keeping cross-ratio. $X_a = FA^\Delta \cap BC$ (and similarly, X_b, X_c) move keeping cross-ratio. The intersection points of perpendiculars to the sidelines through $A^\Delta, B^\Delta, C^\Delta$ with OI also move keeping cross-ratio. To prove that they coincide, it suffices to find 3 particular positions. Two positions: $P_aP_bP_c = K_aK_bK_c$ and $P_aP_bP_c = M_aM_bM_c$ follow from the previous problems. The third position is a case, where $P_aP_bP_c$ degenerates to 3 lines passing through F parallel to the sidelines. In this position all perpendiculars are lines at infinity. The statement on a circle follows from the problem **3.1**.

Alternatively, one could derive all the statements from the main theorem (see problem **3.4**).

3. Generalized poles of a triangle and Kulanin's theorem

3.1 From problems **0.11**, **0.10**, and the first statement of the problem **0.8**, it follows that the isogonal conjugate P' of P traces along a rectangular hyperbola passing through the vertices of ABC . By the second statement of the problem **0.8**, it suffices to prove that the pedal circles of P' pass through the center of this hyperbola. Using problems **1.9** and **1.8**, reduce to the known statement: the Euler circle of a triangle inscribed into a rectangular hyperbola passes through the center of this hyperbola (see fig. 12).

3.2 Let P move linearly along the line ℓ . Then P_a, P_b, P_c move linearly along the sidelines. Hence $A_{op} = F_\ell P_a \cap M_bM_c$ moves linearly along M_bM_c . It suffices to prove that P_b, P_c, A_{op} are collinear. For this purpose we check 3 positions of P . The case $P = O$ is trivial. Two cases, where P lie on the circumcircle, follow from Kulanon's theorem (the pedal circle of P degenerates to the Simson line) (see fig. 13).

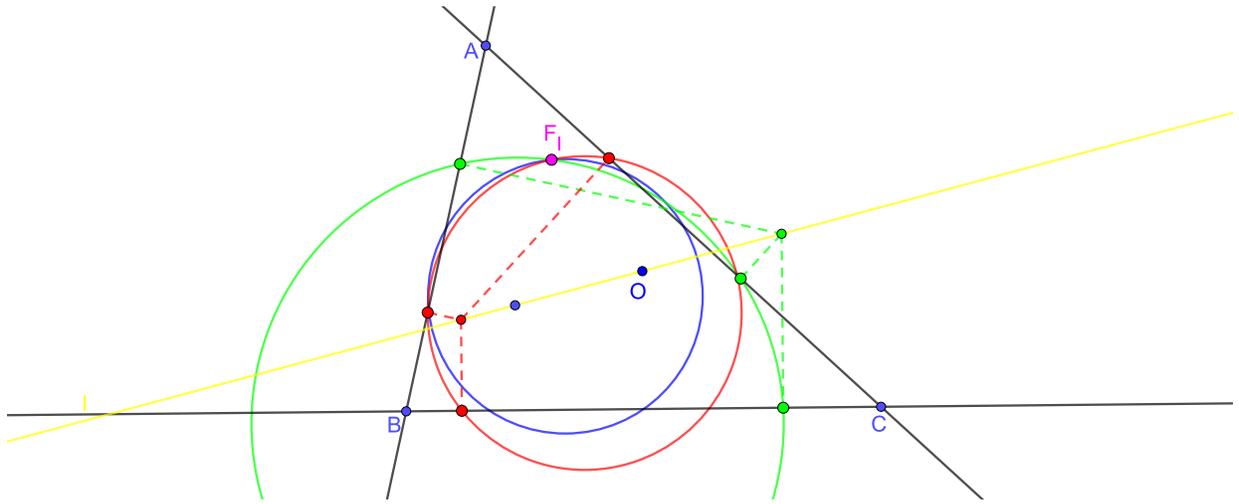


Figure 12.

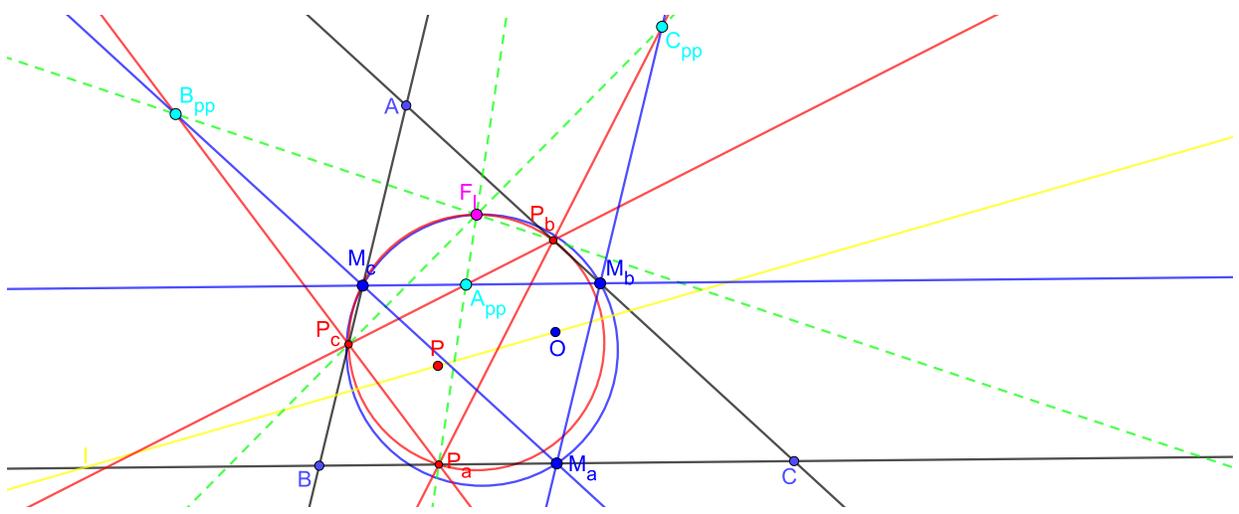


Figure 13.

3.3 Let P move linearly along the line ℓ . Let t be the length of the oriented segment OP . Introduce the Cartesian coordinates with origin F_ℓ , and by $(X_a(t), Y_a(t))$, $(X_b(t), Y_b(t))$, $(X_c(t), Y_c(t))$ denote coordinates of A_{pq} , B_{pq} , C_{pq} , respectively. We show that each of coordinate functions is a rational function of the form $f(t)/g(t)$ with $degf = 2$, and $degg = 1$.

For instance, consider A_{pq} (similar reasoning for points B_{pq} and C_{pq}). It is clear that P_b and P_c move linearly, i.e. its coordinates are linear functions of t . The line through the points $P_b(x_1, y_1)$ and $P_c(x_2, y_2)$ is $(y - y_1)(x_2 - x_1) = (x - x_1)(y_2 - y_1)$. It is of the form $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$, where α and β are linear in t , while γ is quadratic in t . Finally, intersect P_bP_c with the constant line $F_\ell Q_a$, find the coordinates of A_{pq} .

Now let us prove that the directions of $A_{pq}B_{pq}$, $B_{pq}C_{pq}$, $C_{pq}A_{pq}$ are constant (though these lines do not move linearly). This condition is equivalent to equalities

$$F_\ell A_{pq} = \alpha \cdot F_\ell C_{pq} \quad \text{and} \quad F_\ell B_{pq} = \beta \cdot F_\ell C_{pq},$$

where α and β are some constants.

Let us prove the first equality (similarly, for the second one) in coordinates:

$$X_a(t) = \alpha_1 \cdot X_c(t) \quad Y_a(t) = \alpha_2 \cdot Y_c(t)$$

(where α_1 and α_2 are constants). Recall that each function in these relation has the form $f(t)/g(t)$ with $degf = 2$, and $degg = 1$. Multiplying by denominators, we obtain cubic equations in t . Thus it suffices to find 4 different values of t , or, equivalently, 4 different positions of P , for which the condition holds

First, consider cases $P = O$ and $P = Q$. the previous problem implies that $\{A_{pq}, C_{pq}\}$ coincide, and do not coincide with F_ℓ . Defining constants α_1 and α_2 by $\alpha_1 = X_a(0)/X_c(0)$ and $\alpha_2 = Y_a(0)/Y_c(0)$, we have equalities

$$X_a(t) = \alpha_1 \cdot X_c(t) \quad \text{and} \quad Y_a(t) = \alpha_2 \cdot Y_c(t)$$

which are true for two distinct values of t .

Secondly, consider two positions of P that are antipodal points of the the circumcircle Ω of ABC , lying on ℓ . In this case $A_{pq} = C_{pq} = F_\ell$, i.e. their coordinates are 0, and required equalities hold.

Thus we have proved that all lines $A_{pq}C_{pq}$ are parallel, and the same is true for lines $A_{pq}B_{pq}$ and $B_{pq}C_{pq}$. Hence, while P is moving, $A_{pq}B_{pq}C_{pq}$ traces a family of triangles homothetic with center F_ℓ .

Now it remains to show that the triangles formed by lines through A_{pq} , B_{pq} , C_{pq} parallel to R_bR_c , R_cR_a , R_aR_b , respectively, is homothetic to $R_aR_bR_c$ with homothety center F_ℓ . For this purpose, consider the case $P = R$. We have $A_{pq} = A_{rq}$, $B_{pq} = B_{rq}$, and $C_{pq} = C_{rq}$ lying on the lines R_bR_c , R_cR_a , and R_aR_b , respectively. For an arbitrary position of P consider the homothety with center F_ℓ taking A_{rq} to A_{pq} . By the arguments above, this homothety takes B_{rq} to B_{pq} , and it takes C_{rq} to C_{pq} . Hence R_bR_c maps to the line through A_{pq} parallel to R_bR_c . Similarly, for the lines R_cR_a and R_aR_b (see fig. 14).

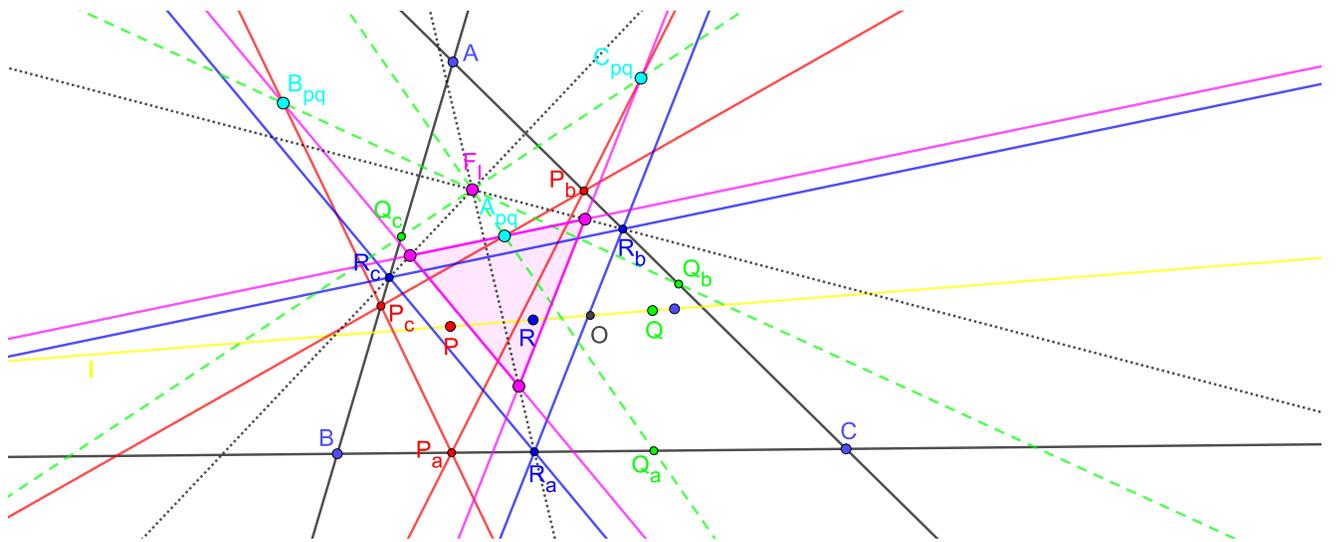


Figure 14.

3.4 The problems **2.5** and **2.8** could be proved without using the main theorem, thus we just mention that the construction in the problem **2.5** is the case $P = I, Q = O$ of the main theorem, while the construction in the problem **2.8** is the case $P = Q = I, R = O$. Now derive the problem **2.11**. Let the perpendicular to BC through its intersection point with FA^Δ meets OI at Q . The line P_bP_c passes through $A^\Delta = A_{iq}$. Applying the main theorem to $I, Q, R = O$. obtain that P_aP_b and P_aP_c pass through C_{iq} and B_{iq} , respectively. Therefore, $B^\Delta = B_{iq}$ and $C^\Delta = C_{iq}$. Hence the feet of perpendiculars from Q onto AB and AC are the intersection points of AB and AC with FC^Δ and FB^Δ , respectively. The statement about the circle follows from Kulanin's theorem. (see fig. 15, 16, 17).

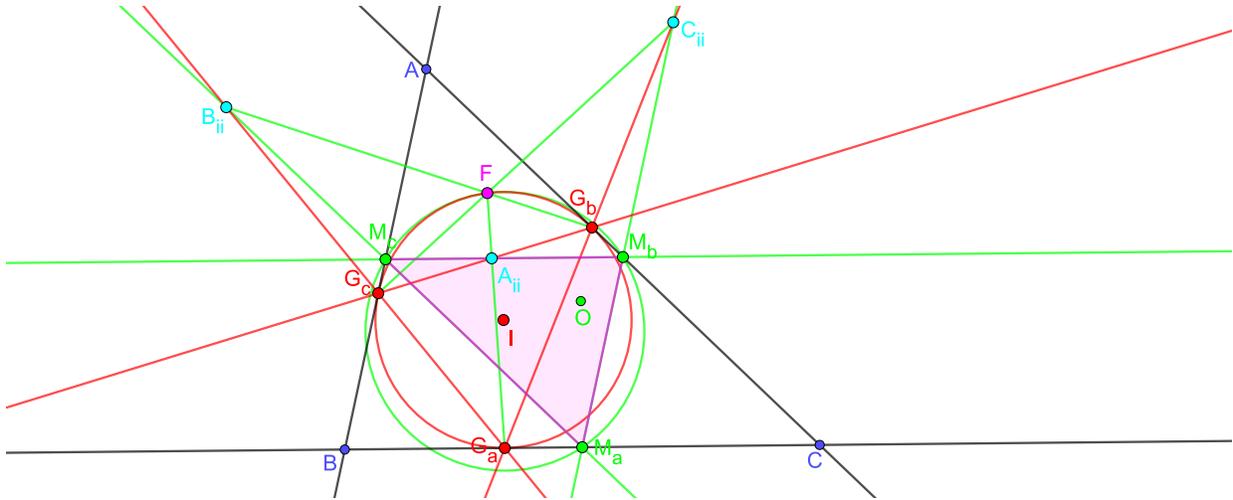


Figure 15. $P = Q = I, R = O$

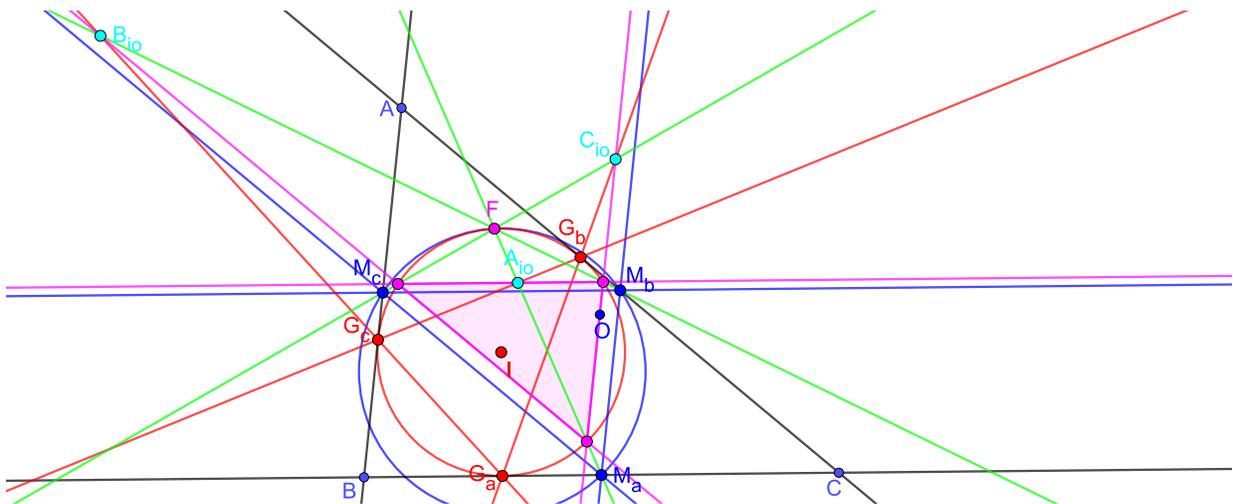


Figure 16. $P = I, Q = R = O$

Let A', B', C' be reflections of A, B, C in O . By Pascal theorem, $A'A_\ell \cap B'B_\ell$ lies on the circle (ABC) . Hence, lines $A'A_\ell, B'B_\ell, C'C_\ell$ meet at some point F'_ℓ of the circumcircle. As $\angle A_\ell F'_\ell A = \angle A' F'_\ell A = 90^\circ$, the point F'_ℓ lies on the required circles. H lies on $F_\ell F'_\ell$, since the powers of H with respect to these circles are equal to $HH_a \cdot HA = HH_b \cdot HB = HH_c \cdot HC$ (see fig. 19).

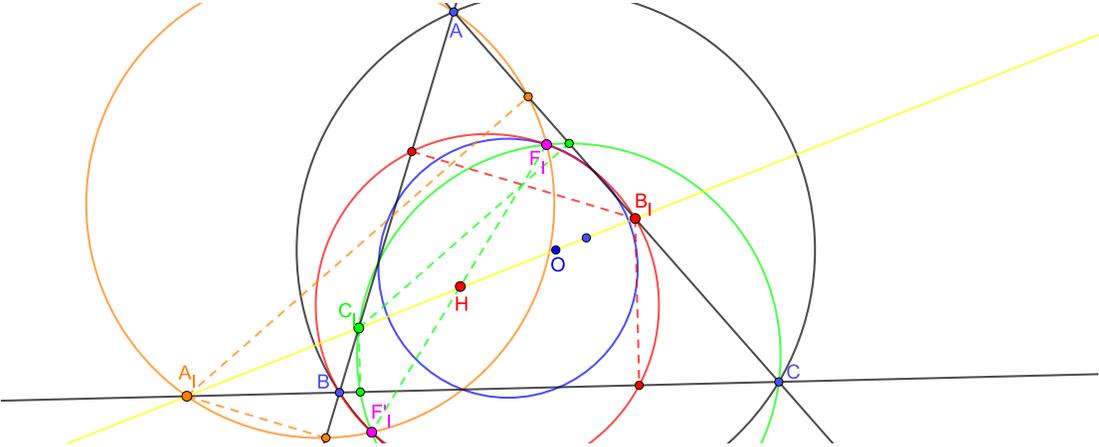


Figure 19.

3.8 Consider the quadrilateral $H_aH_bH_cF_\ell$ inscribed in the Euler circle ε . We set $H_aH_c \cap F_\ell H_b = B_{hh}$, $H_aH_b \cap F_\ell H_c = C_{hh}$, $H_aF_\ell \cap H_bH_c = A_{hh}$. It follows that $A_{hh}B_{hh}C_{hh}$ is an autopolar triangle for ε .

Now let us show that the sidelines of $A_{hh}B_{hh}C_{hh}$ contain A, B, C . Indeed, consider $H_cM_cH_bM_b$ that is a quadrilateral inscribed in ε . By the construction, A lies on the polar line of A_{hh} . But the polar line of A_{hh} is $B_{hh}C_{hh}$, hence A lies on $B_{hh}C_{hh}$. Similarly, for the other vertices (see fig. 20).

Moreover, this problem is a particular case of the next one.

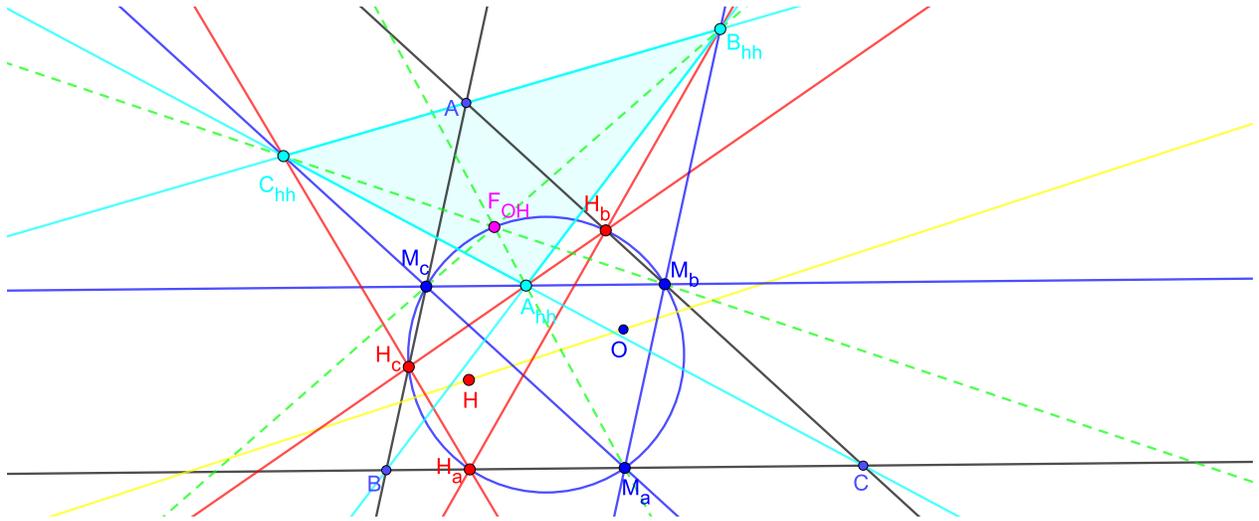


Figure 20.

3.9 a) the cross-ratio of the lines $P_aB, P_aP_c, P_aA, P_aP_b$ equals -1 . Projecting onto the line AB_{pq} , we get the harmonic quadruple $AB_{pq} \cap BC, B_{pq}, A, AB_{pq} \cap P_aP_b$. Similarly, $AB_{pq} \cap BC, B_{pq}, A, AB_{pq} \cap Q_aQ_b$ is a harmonic quadruple. Hence AB_{pq}, P_aP_b, Q_aQ_b are collinear, i.e. A lies on $B_{pq}C_{pq}$.

b,c) By Pappus theorem, $P_bQ_c \cap P_cQ_b$ lies on PQ . Similarly, for $P_aQ_c \cap P_cQ_a$ and $P_aQ_b \cap P_bQ_a$. By Pascal theorem, $P_aQ_bP_cQ_aP_bQ_c$ is inscribed into a conic Ω . Let $F = B_{pq}P_b \cap C_{pq}P_c$. by Pascal theorem and the item a), $FP_bQ_bQ_aQ_cP_c$ is inscribed into Ω . Analogous statement is true for $A_{pq}P_a \cap C_{pq}P_c$. it follows that $A_{pq}P_a, B_{pq}P_b, C_{pq}P_c$ meet on Ω , and c) follows. Now be could be proved similarly to the previous problem.

3.10 Let X_a move along BC linearly. Then X_b and X_c move along AC and AB , respectively, preserving cross-ratio.

- It suffices to prove for 3 positions of X_a . Cases $X_a = B, C, M_a$ follow from the previous problem;
- $X = BX_b \cap CX_c$ moves along some conic passing through B and C preserving cross-ratio (the proof is analogous to one for the problem **0.11**). This conic also passes through A , since $X = A$, for $X_a = BC \cap B_{hh}C_{hh}$. Thus it suffices to prove that AX passes through X_a , for some 3 positions of X_a . The first position is $X_a = X = B$, the second is $X_a = X = C$, the third is $X_a = M_a, X = M$ (and the fourth is $X_a = H_a, X = H$).
- X moves along a rectangular hyperbola $ABCHM$. It is known that the circle $(X_aX_bX_c)$ passes through the center of this hyperbola (we do not know an easy proof of this fact; see A. Akopyan, A.Zaslavsky "Geometrical properties of conics", Theorem 4.3). The center of this hyperbola is

F_{OL} , that is the generalized Feuerbach point for the isogonal conjugate on this hyperbola (see fig. 21).

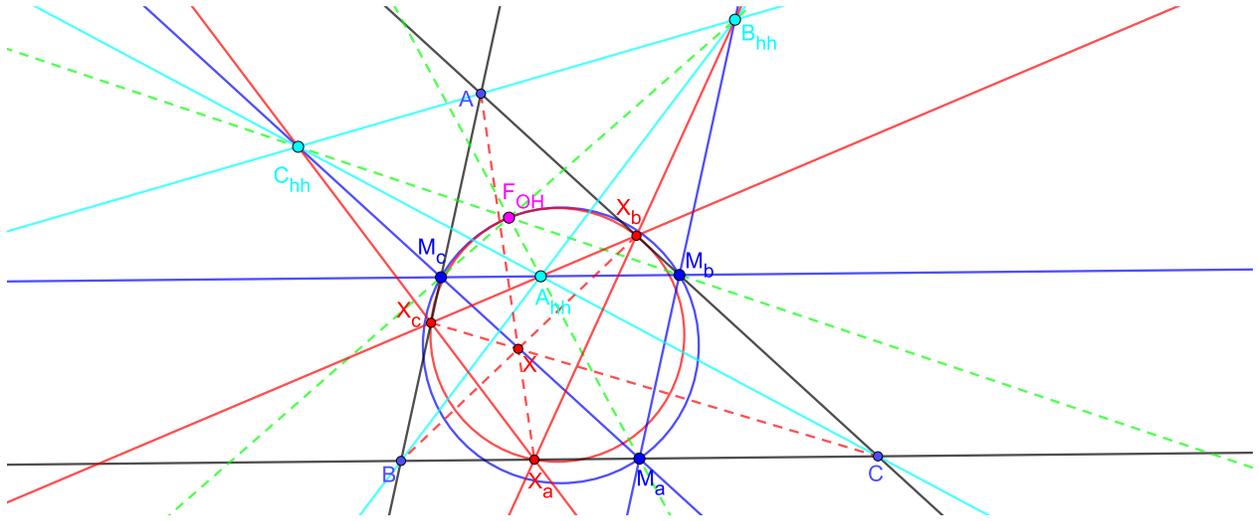


Figure 21.

3.11 We present a sketch of the proof that all triangles $Z_aZ_bZ_c$ are homothetic (though we do not specify the center of homothety).

We need to prove that $BC \parallel Z_bZ_c \parallel A_{pp}A_{qq}$ (here we use the problem 3.2: $A_{pp}A_{qq}$ is the midline). Reduce it to a statement of projective geometry:

Assume that triangles $P_aP_bP_c$ and $Q_aQ_bQ_c$ are given, and let F be an arbitrary point. Let $A_{pp} = P_bP_c \cap FP_a$, while A_{pq}, B_{qp}, \dots are defined similarly, like in the problem 3.3. Let $Z_b = A_{pq}C_{pq} \cap A_{qp}C_{qp}$ and $Z_c = A_{pq}B_{pq} \cap A_{qp}B_{qp}$. Hence P_aP_b , $A_{pp}A_{qq}$, and Z_bZ_c are concurrent.

Note that cross-ratios of quadruples $A_{qp}Q_c, A_{qp}B_{qp}, A_{qp}F, A_{qp}Q_a$ and $A_{pq}P_b, A_{pq}C_{pq}, A_{pq}F, A_{pq}P_a$ are equal (project with center A_{qp} onto Q_cQ_a , then project with center F onto P_bP_a , then with center A_{pq}). Similarly, cross-ratios of quadruples $A_{qp}Q_c, A_{qp}C_{qp}, A_{qp}F, A_{qp}Q_a$ and $A_{pq}P_b, A_{pq}B_{pq}, A_{pq}F, A_{pq}P_a$ are equal. Now one can apply the following fact:

Let f be a map $l \mapsto f(l)$ from the band of lines through A_{qp} to the band of lines through A_{pq} that preserves cross-ratio. Let m and n be arbitrary lines through A_{qp} . Consider the line through $m \cap f(n)$ and $n \cap f(m)$. Then this line passes through a fixed point, regardless of a choice of m and n .

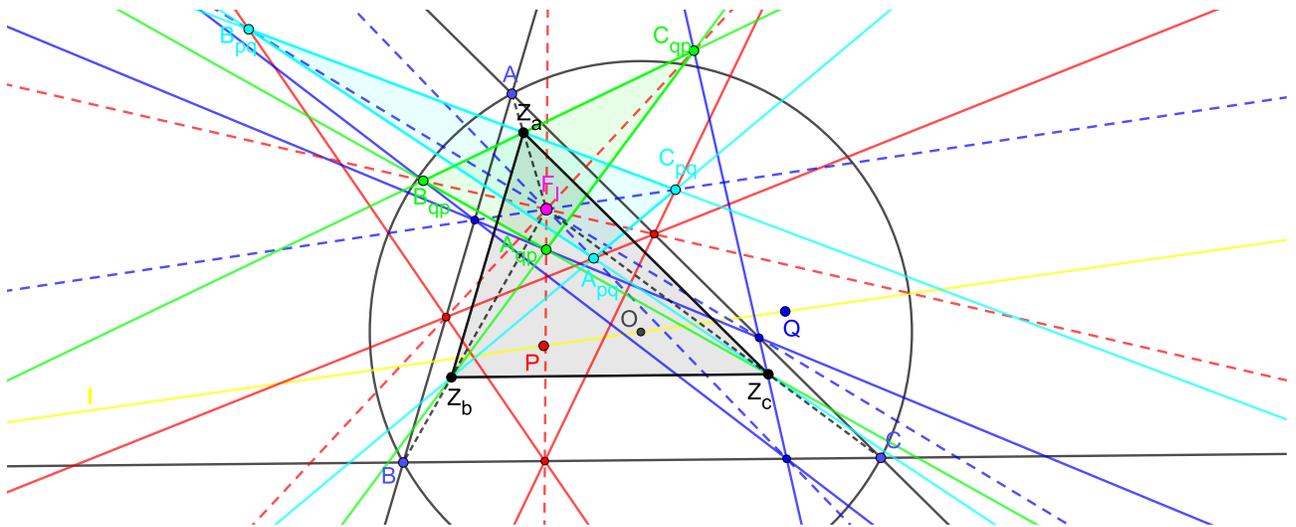


Figure 22.