

**Ристо Малчески
Алекса Малчески
Катерина Аневска**

ПО ПАТЕКИТЕ НА ШАМПИОНИТЕ ЗА МАТЕМАТИКА

**(избрани задачи за ученици од IV, V и VI одделение
деветтолетка)**



Скопје, 2019

Рецензенти

д-р Слаѓана Брсаќоска

доцент на Природно-математички факултет, Скопје

д-р Методи Главче

доцент на Педагошки факултет, Скопје

CIP - Каталогизација во публикација

Национална и универзитетска библиотека "Св. Климент Охридски", Скопје

51:373.3(079.1)

МАЛЧЕСКИ, Ристо

По патеките на шампионите за математика : (избрани задачи за ученици од IV, V и VI одделение деветтолетка) / Ристо Малчески, Алекса Малчески, Катерина Аневска. - Скопје : Армаганка, 2019. - 244 стр. ; 25 см

Библиографија: стр. 243-244

ISBN 978-608-4904-93-9

1. Малчески, Алекса [автор] 2. Аневска, Катерина [автор]

а) Математика - Основно образование - Задачи од натпревари

COBISS.MK-ID 111791882

Без дозвола на авторите се забранува умножување на оваа книга или на нејзини делови во било кој облик.

СОДРЖИНА

Предговор	5
1. МНОЖЕСТВА	
1.1. Задачи	7
1.2. Решенија на задачите	11
2. ПРИРОДНИ БРОЕВИ	
2.1. Бројни ребуси	17
2.2. Броеви и цифри	24
2.3. Деливост во множеството на природните броеви	34
2.4. Решенија на задачите	43
2.4.1. Бројни ребуси	43
2.4.2. Броеви и цифри	56
2.4.3. Деливост во множеството на природните броеви	73
3. ЛОГИЧКИ ГЛАВОБОЛКИ	
3.1. Задачи	93
3.2. Решенија на задачите	107
4. ТЕКСТУАЛНИ ЗАДАЧИ	
4.1. Брзина и движење	125
4.2. Работа и време	125
4.3. Годиците се важни	127
4.4. Маса, должини и волумени	132
4.5. Пари и трговија	135
4.6. Дополнителни задачи	139

4.7. Решенија на задачите	148
4.7.1. Брзина и движење	148
4.7.2. Работа и време	150
4.7.3. Годиците се важни	154
4.7.4. Маса, должини и волумени	156
4.7.5. Пари и трговија	160
4.7.6. Дополнителни задачи	167
5. ГЕОМЕТРИЈА	
5.1. Комплементни и суплементни агли	177
5.2. Задачи со отсечки	178
5.3. Квадрат и правоаголник	181
5.4. Коцка и квадар	192
5.5. Дополнителни задачи	198
5.6. Решенија на задачите	202
5.6.1 Комплементни и суплементни агли	202
5.6.2 Задачи со отсечки	204
5.6.3 Квадрат и правоаголник	209
5.6.4 Коцка и квадар	225
5.6.5 Дополнителни задачи	235
Литература	243

ПРЕДГОВОР

Ниедно истражување на човекот не може да се нарече вистинска наука, ако истото не е поткрепено со математички доказ.

Проблематична е веродостојноста на тврдењата во науките, каде што нема примена на ниту една математичка дисциплина, т.е. кои не се поврзани со математиката.

Леонардо да Винчи

Оваа книга е наменета на надарените учениците за математика од петто и шесто одделение во основното образование (деветолетка). Меѓутоа мислиме дека истата ќе биде интересна и за наставниците кои дел од своето слободно време го посветуваат на надарените ученици за математика.

Книгата всушност е збирка од 695 решени задачи, во која во пет глави се обработени пет занимливи математички области кои на младите вљубеници во математиката ќе им овозможат да ги утврдат и прошират своите знаења. Содржината на петте глави е значително променета во однос на второто издание, кое носеше наслов *За најмладите математичари*, меѓутоа начинот на обработка на материјалот е скоро идентичен како и во претходните две изданија. Затоа, на корисниците на оваа книга им препорачуваме прво да се обидат определена задача самостојно да ја решат, па ако тоа не им успее да го проучат понуденото решение.

Природата на задачите содржани во оваа книга е таква, што тие се посебно интересни за комисиите кои ги составуваат задачите за математичките натпревари. Имено, во првите пет делови на книгата се содржани голем број задачи од натпреварите кои се одржани на просторите на пора-

нешна Југославија, Република Бугарија и пошироко. Меѓутоа, задачите не се систематизирани според степенот на натпреварувањата на кои се зададени, туку истите се подредени содржински. Така, на пример, текстуралните задачи се поделени во шест делови и тоа: Брзина и движење; Работа и време; Годиците се важни; Маса, должини и волумени; Пари и трговија и Дополнителни задачи, а истото се однесува и на разработката на задачите поврзани со множеството природни броеви и на геометриските задачи.

Рецензентите доц. д-р Слаѓана Брсакоска и доц. д-р Методи Главче со своите сугестии и забелешки допринесоа да се подобри содржината на книгава, за што посебно им благодариме.

И покрај вложениот напор, не можеме да се ослободиме од впечатокот дека се можни значителни подобрувања на оваа збирка решени задачи, па затоа однапред сме благодарни на секоја добронамерна критика и сугестија.

Ќе ни биде особено задоволство ако оваа збирка допринесе да навлезете во тајните на математиката, да ја засакате истата и можеби таа да Ви стане и животен позив.

Февруари, 2016
Скопје

Авторите

1. МНОЖЕСТВА

1.1. ЗАДАЧИ

Задача 1. Во IV-б одделение имало 24 ученици. Секој ученик може да избира дали ќе ги изучува предметите информатика и германски јазик. 15 ученици учат информатика, 12 учат германски јазик, а 8 ученици не учат ниту информатика, ниту германски јазик. Колку ученици од IV-б одделение учат и информатика и германски јазик?

Задача 2. Одделението IV-3 има 32 ученици. 18 од нив го купуваат списанието “ПИТАГОРА”, а 13 списанието “РАЗВИГОР”. Колку ученици ги купуваат двете списанија, ако 8 ученици не се претплатени на ниту едно списание? Колку ученици го купуваат само списанието “ПИТАГОРА”, а колку само “РАЗВИГОР”?

Задача 3. Во IV-2 одделение има 35 ученици, од кои 20 членуваат во ликовната, 11 во музичката секција, а 10 ученици не членуваат во ниту една од овие две секции. Колку ученици членуваат и во двете секции едновременно, а колку само во една и во која?

Задача 4. Во училиштето има 50 наставници, од кои 29 пијат кафе, 28 пијат чај, а 16 не пијат ниту кафе, ниту чај. Колку наставници пијат само кафе, а колку само чај?

Задача 5. Во едно туристичко место престојуваат 100 туристи. Од нив 10 туристи не знаат ниту германски, ниту француски јазик, 75 знаат

германски и 83 знаат француски јазик. Колку туристи ги знаат двата јазици?

Задача 6. Во едно училиште од 120 ученици во IV одделение на натпреварот по математика учествувале 83 ученици, а на натпреварот по спорт 56 ученици. Колку ученици учествувале и на двата натпревари, ако се знае дека 13 ученици не учествувале на ниту еден од овие два натпревари?

Задача 7. Секој од членовите на една екипа игра фудбал или тенис. Колку луѓе има во екипата, ако е познато дека 18 од нив играат и фудбал и тенис, 23 играат фудбал, а 21 играат тенис.

Задача 8. Од 100 луѓе точно 10 не знаат ниту еден странски јазик, 75 знаат германски, а 85 знаат англиски јазик. Колку луѓе ги знаат и двата јазици (германски и англиски)?

Задача 9. Учениците од IV-1 одделение членуваат во играорна, математичка и спортска секција. Од вкупно 27 ученици, во играорната секција членуваат 14, 3 ученици се членови само на математичката секција, додека 5 ученици членуваат во сите три секции. Колку ученици има во секоја секција, ако само во спортската и играорната членуваат 6 ученици. Секој од учениците членува во некоја секција, но само во играорната и само во спортската секција не членува ниту еден ученик?

Задача 10. Во една туристичка организација работат 10 туристички водичи кои зборуваат руски, француски и англиски јазик. Секој јазик го зборуваат точно по 5 водичи, а само по еден јазик зборуваат по 2 водичи. Колку водичи зборуваат по два јазици, а колку сите три јазици?

Задача 11. На балканската математичка олимпијада констатирано е дека 2 учесника говорат германски, англиски и руски јазик, 9 учесници само германски и англиски, 13 учесници само германски и руски, 12 учесници само руски и англиски, 6 учесници само германски, 7 само руски и 8 само англиски. Колку учесници биле на балканијадата ако секој од нив говори најмалку еден од овие три јазици?

Задача 12. Осум пријатели A, B, C, D, E, F, G и H споредиле три свои одлики. Црна коса имаат 6 лица, сини очи имаат 4 лица, а повисоки од 170 см се 6 лица. Првите три лица A, B и C имаат само по една од овие одлики. Колку лица ги имаат сите три одлики? Кои одлики ги имаат останатите лица?

Задача 13. Во група од 100 туристи секој зборува по еден од следните три јазици: германски, англиски и руски. Руски зборуваат 57 туристи, англиски 58, руски и германски 28, а англиски и германски 34 туристи. Само по два јазика зборуваат 49 туристи, а сите три јазици ги зборуваат 11 туристи. Колку туристи зборуваат само германски, а колку само руски јазик?

Задача 14. На републичкиот натпревар по математика за освоено I, II и III место вкупно се доделени 46 дипломи. Од тоа, за второ и трето место се доделени 35 дипломи, а за прво и трето место 27 дипломи. Колку дипломи се доделени за секое место?

Задача 15. Во 5^a одделение секој ученик учи барем еден од следниве три јазици: англиски, германски и француски. Вкупно 18 ученици учат англиски, 15 ученици учат германски, а 9 учат француски. Притоа 10 ученици учат и англиски и германски, 7 ученици англиски и француски, 6 ученици француски и германски и 5 ученици ги учат сите три јазици. Колку ученици има во одделението. Колку учат само германски јазик, а колку англиски и француски, но не и германски?

Задача 16. Дадени се множествата $A = \{1, 2, x, 5, 9\}$ и $B = \{2, y, 3\}$. Најди ги броевите x и y така да множеството B има три елементи и $B \subseteq A$.

Задача 17. Ако е $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A \cap B \cap C = \{1, 2\}$, $B \setminus C = \{4, 5\}$ и $C \setminus A \neq \emptyset$, најди го множеството C !

Задача 18. Дадени се множествата $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ и $B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$. Најди го множеството X ако: $X \subseteq A \cup B$, $X \cap A = A \setminus B$, $X \cap B = B \setminus A$!

Задача 19. Дадено е множеството $S = \{1, 2, 3, \dots, 99\}$. Најди множества A и B такви да $A \cup B = S$, $A \cap B = \emptyset$ и збирот на броевите кои припаѓаат на множеството A да е еднаков на збирот на броевите кои припаѓаат на множеството B !

Задача 20. Дадени се множествата

$$A = \{n \in \mathbf{N}_0 \mid \frac{15}{2n+1} \text{ е природен број}\} \text{ и } B = \{m \in \mathbf{N} \mid m^2 < 16\}.$$

Најди ги множествата $A, B, A \cup B, A \cap B, A \setminus B, B \setminus A$!

Задача 21. Дадени се множествата

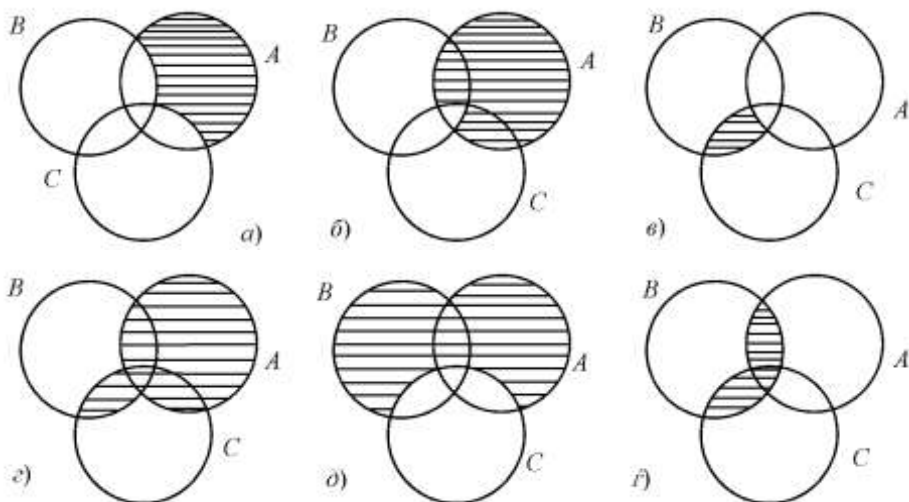
$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{1, 4, 6\}, C = \{2, 5, 6, 7\} \text{ и } D = \{1, 6, 7, 8\}.$$

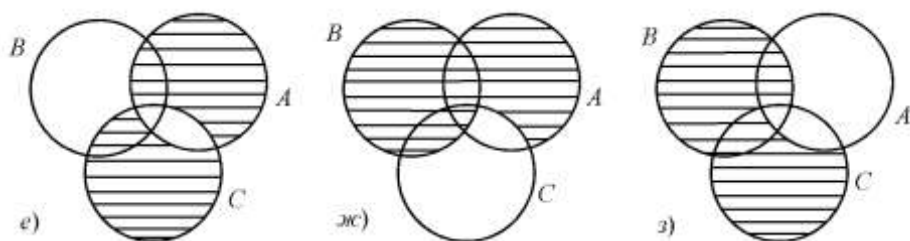
Најди го множеството S ако

$$S \subset A, S \cap (B \cup D) = \emptyset, (A \cap C) \setminus S = \emptyset, \{3\} \setminus S = \{3\}!$$

Задача 22. Нека n е природен број, $B = \{5n+8, 4n+1, 3n+10\}$ и $A = \{2n+3, 6n+1\}$. Најди ги сите вредности на бројот n за кои множеството $A \cap B$ има еден елемент. За секој од најдените броеви n определи ги множествата A, B и $A \cap B$!

Задача 23. На цртежите а, б, в, г, д, е, ж и з се прикажани множествата A, B и C . Со помош на операциите унија, пресек и разлика на множества запишете ги осенчените делови:



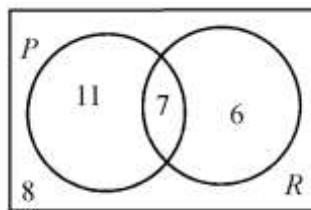


1.2. РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ

1. Од 24 ученици во одделението, 8 не одат ниту на информатика ниту на германски јазик. Значи, $24 - 8 = 16$ ученици избрале барем еден предмет.

Бидејќи 15 учат информатика, а 12 германски јазик, што е вкупно $15 + 12 = 27$, добиваме дека $27 - 16 = 11$ ученици ги учат и двата предмети.

2. Задачата ќе ја решиме со помош на Венов дијаграм. Со P да го означиме множеството на оние ученици кои го купуваат списанието “Питагора”, а со R на учениците кои го купуваат списанието “Развигор”. Списание купуваат $32 - 8 = 24$ ученици и истите се претплатени на $18 + 13 = 31$ број. Значи купени се $31 - 24 = 7$ списанија повеќе отколку што имаме претплатници (види цртеж). Според тоа, 7 ученици ги купуваат двете списанија. Само “ПИТАГОРА” купуваат $18 - 7 = 11$, а само “РАЗВИГОР” купуваат $13 - 7 = 6$ ученици.

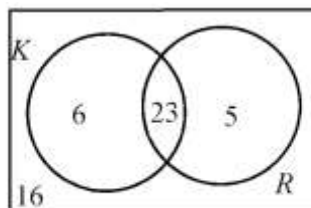


3. $35 - 10 = 25$ ученици членуваат во музичката и ликовната секција. Во двете секции членуваат $(20 + 11) - 25 = 31 - 25 = 6$ ученици. Само во ликовната секција членуваат $20 - 6 = 14$ ученици, а само во музичката секција $11 - 6 = 5$ ученици.

4. Бидејќи 16 наставници не пијат ниту кафе, ниту чај добиваме дека

$$50 - 16 = 34$$

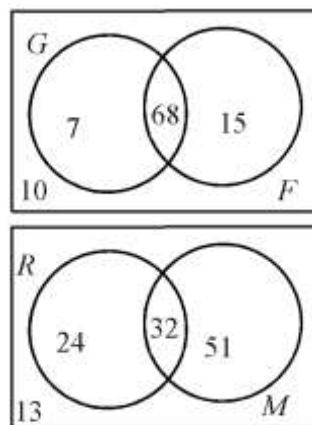
наставници пијат или кафе или чај. Но, чај пијат 28, а кафе 29 наставници, па затоа



$$(28+29)-34=57-34=23$$

наставници пијат и кафе и чај. Само кафе пијат $29-23=6$ наставници, а само чај пијат $28-23=5$ наставници.

5. Најмалку еден од наведените јазици говорат $100-10=90$ од туристите. Значи, $90-75=15$ туристи говорат само француски јазик, а $83-15=68$ туристи ги говорат и двата јазика.



6. Вкупниот број на натпреварувачи е $120-13=107$.

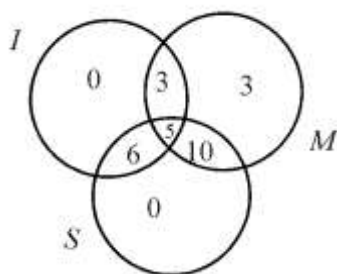
Само на натпреварот по спорт учествувале $107-83=24$ ученици, а на двата натпревари учествувале $56-24=32$ ученика.

7. Нека E е множеството од сите членови на екипата, F е множеството од членови на екипата кои играат фудбал, а T е множеството од членови на екипата кои играат тенис. Тогаш,

$$\delta F = 23, \delta T = 21, \delta(F \cap T) = 18, \delta E = 18 + (23 - 18) + (21 - 18) = 26.$$

8. Нека е x бројот на луѓето кои ги знаат и двата јазици. Тогаш $85 - x$ знаат само англиски јазик, па затоа $75 + 10 + 85 - x = 100$, од каде добиваме $x = 70$.

9. Ако ги внесеме податоците за учениците кои членуваат само во една секција, кои членуваат во сите три секции и кои членуваат само во играорната и само во спортската секција и искористиме дека играорната секција има 14 членови добиваме дека и во играорната и во математичката секција членуваат $14 - (6 + 5) = 3$ ученици.



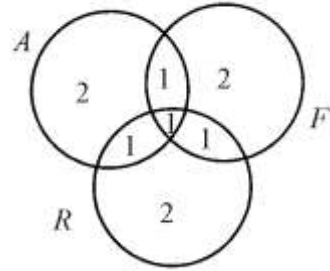
Останува да определиме колку ученици членуваат во спортската, а колку во математичката секција. Бидејќи сите ученици се опфатени во некоја од секциите добиваме дека и во спортската и во математичката секција едновременно членуваат

$$27-(6+5+3+3+0+0)=27-17=10 \text{ ученици.}$$

Значи, во спортската секција членуваат $6+5+10=21$ ученик, а во математичката секција членуваат

$$10+5+3+3=21 \text{ ученик.}$$

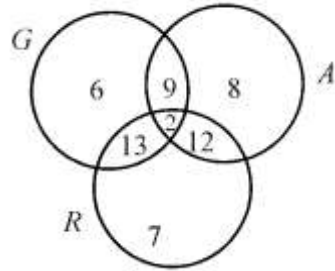
10. Очигледно два или три јазици говорат $10-(2+2+2)=4$ водичи. Но, бидејќи имаме $5+5+5=15$ познавачи на јазици, а само 10 водичи, четирите водичи со знаење на повеќе од еден јазик говорат уште $15-10=5$ јазици. Според тоа, три јазици говори еден од овие 4 водичи, а останатите тројца говорат точно по два јазици. Конечно, англиски и руски знае еден водич, англиски и француски знае еден водич и руски и француски знае еден водич.



11. Ако го искористиме Веновиот дијаграм добиваме дека на Балканијадата учествувале

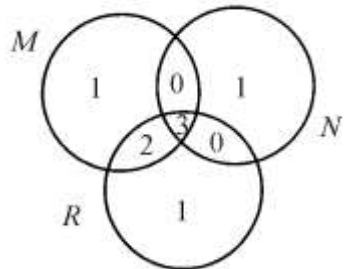
$$6+9+8+12+13+2+7=57$$

натпреварувачи.



12. Со M , N и R да ги означиме множествата на лицата кои имаат црна коса, сини очи и се повисоки од 170 cm, соодветно.

Имаме вкупно $6+6+4=16$ одлики, при што од осумте пријатели 3 имаат само по една одлика. Според тоа, $16-3=13$ одлики треба да се распределат на $8-3=5$ лица. Но, тоа значи дека 3 лица ги имаат сите три одлики, а две лица имаат само по две одлики. Бидејќи сини очи имаат вкупно 4 лица заклучуваме дека само сини очи и црна коса нема ниту едно лице, а исто така нем лица со само сини очи и повисоки од 170 cm. Значи, само со црна коса и повисоки од 170 cm се две лица.



13. Бидејќи 28 туристи зборуваат руски и германски, а 11 сите три јазици добиваме дека $28-11=17$ туристи зборуваат само германски и руски.

Слично, $34-11=23$ туристи зборуваат само германски и англиски. Бидејќи 49 туристи зборуваат само два јазика добиваме дека само англиски и руски зборуваат $49-(17+23)=9$ туристи.

Од досега изнесеното имаме дека само руски зборуваат

$$57-(17+11+9)=20$$

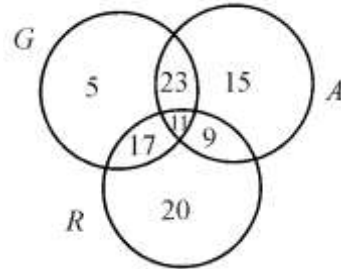
туристи, само англиски зборуваат

$$58-(23+11+9)=15$$

туристи, а само германски зборуваат

$$56-(17+11+23)=5$$

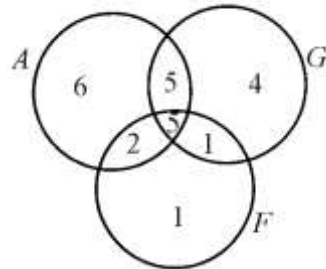
туристи.



14. Бидејќи ниту еден натпреварувач истовремено не може да освои две дипломи, добиваме дека:

- за прво место се доделени $46-35=11$ дипломи;
- за второ место се доделени $46-27=19$ дипломи; и
- за трето место се доделени $46-(11+19)=16$ дипломи.

15. Врз основа на дадените податоци го формираме Веновиот дијаграм, прикажан на цртежот десно. Сега согласно цртежот во одделението има $6+5+4+5+2+1+1=24$ ученици. Само германски јазик учат 4 ученици, а англиски и француски, но не и германски јазик учат 2 ученика.



16. Одговор. $x=3$ и $y=1$ или $y=5$ или $y=9$.

17. Од $A \cap B \cap C = \{1, 2\}$ следува дека $1, 2 \in C$, а од $B \setminus C = \{4, 5\}$ следува дека $4, 5 \notin C$. Понатаму, од $A \cap B \cap C = \{1, 2\}$ следува дека $1, 2 \in A$, па затоа $1, 2, 4, 5 \notin C$ и од тоа што $C \setminus A \neq \emptyset$ добиваме дека $3 \in C$. Конечно, $C = \{1, 2, 3\}$.

18. Имаме:

$$X \cap A = A \setminus B = \{1, 2, 3\}, X \cap B = B \setminus A = \{6, 7, 8\}.$$

Понатаму, $X \cap A \subseteq X$ и $X \cap B \subseteq X$, па затоа

$\{1, 2, 3, 6, 7, 8\} = \{1, 2, 3\} \cup \{6, 7, 8\} = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (X \cap A) \cup (X \cap B) \subseteq X$.
 Но, $X \subseteq A \cup B$ следува дека секој елемент на X припаѓа на $X \cap A$ или на $X \cap B$, па затоа
 $X \subseteq (X \cap A) \cup (X \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{1, 2, 3\} \cup \{6, 7, 8\} = \{1, 2, 3, 6, 7, 8\}$,
 Од што заклучуваме дека $X = \{1, 2, 3, 6, 7, 8\}$.

19. Ќе дадеме едно решение на задачата. Да ги разгледаме збирите $0+99; 1+98; 2+97; 3+96; \dots; 48+51; 49+50$. Вкупно има 50 зборови и секој од нив е еднаков на 99. Нека A ги содржи броевите од збирите кај кои првиот собирук е парен, т.е. $A = \{1, 98, 3, 96, 5, 94, \dots, 49, 50\}$, а B е множеството од сите елементи кои не припаѓаат во A . Јасно, множествата A и B ги задоволуваат условите на задачата.

20. Јасно, $B = \{1, 2, 3\}$. Понатаму, за да $\frac{15}{2n+1}$ е природен број потребно е $2n+1$ да е делител на 15, т.е. $2n+1 \in \{1, 3, 5, 15\}$. Но, n е природен број, па затоа $A = \{0, 1, 2, 7\}$. Конечно,

$$A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 7\}, A \cap B = \{1, 2\}, A \setminus B = \{0, 7\}, B \setminus A = \{3\}$$

21. Одговор. $S = \{2, 5\}$.

22. За да ја решиме задачата треба секој број од A да го изедначиме со секој број од B и притоа ги земаме само оние решенија за n кои се природни броеви. Лесно се проверува дека само равенките

$$2n+3=4n+1, \quad 6n+1=5n+8 \quad \text{и} \quad 6n+1=3n+10$$

имаат решенија во множеството природни броеви и тоа се броевите 1, 7 и 3, соодветно.

За $n=1$ имаме $A=\{5, 7\}$, $B=\{5, 13\}$ и $A \cap B = \{5\}$.

За $n=7$ имаме $A=\{17, 43\}$, $B=\{29, 30, 43\}$ и $A \cap B = \{43\}$.

За $n=3$ имаме $A=\{9, 19\}$, $B=\{13, 19, 23\}$ и $A \cap B = \{19\}$.

23. а) Осенчениот дел содржи точки од множеството A кои не се содржат во множествата B и C . Според тоа, точките од осенчениот дел се содржат во множеството A , но не се содржат во унијата на множествата B и C , т.е. во $B \cup C$. Конечно, осенчениот дел е $A \setminus (B \cup C)$.

б) Осенчениот дел содржи точки од множеството A кои не се содржат во пресекот на множествата B и C т.е. во $B \cap C$. Конечно, осенчениот дел е $A \setminus (B \cap C)$.

в) Осенчениот дел содржи точки кои се содржат во пресекот на множествата B и C , но не се содржат во множеството A , па затоа истиот можеме да го запишеме како $(B \cap C) \setminus A$.

г) Осенчениот дел ги содржи сите точки од множеството A и ги содржи точките од пресекот на множествата B и C , па затоа истиот можеме да го запишеме како $(B \cap C) \cup A$.

д) Осенчениот дел ги содржи точките од множествата A и B кои не ги содржи множеството C , па затоа истиот можеме да го запишеме како $(A \cup B) \setminus C$.

ѓ) Осенчениот дел ги содржи точките кои се наоѓаат во пресекот на множествата A и B и во пресекот на множествата B и C , па затоа за истиот имаме $(A \cap B) \cup (B \cap C)$.

е) Одговор: $(A \setminus C) \cup (C \setminus A)$.

ж) Одговор: $B \cup (A \setminus C)$.

з) Одговор: $(B \cup C) \setminus (A \cap C)$.

2. ПРИРОДНИ БРОЕВИ

2.1. БРОЈНИ РЕБУСИ

Задача 1. Цифрите на бројот 44444 меѓусебно поврзи ги со знаците на основните математички операции така да добиениот резултат е 19.

Задача 2. Дадени се броевите 1, 2, 3, 4, 5. Не менувајќи го редоследот, запиши броен израз чија вредност е:

а) 54,

б) 140,

в) 12.

Задача 3. Збирот на два природни броеви е 495. Едниот од броевите завршува на нула. Ако се прецрта таа нула кај првиот број се добива другиот број. Кои се тие два броја?

Задача 4. Цифрите од 1 до 5 стави ги на местата на ѕвездичките така да добиеш најголем можен производ. Секоја цифра може да ја користиш само еднаш:

* * * . * *

Задача 5. Во равенството $\overline{A} + \overline{AH} + \overline{ANA} = \overline{ШАН}$ на секоја буква соодветствува една иста цифра, а на различни букви соодветствуваат различни цифри. Замени ги буквите со цифри така да се добие точно равенство (дешифрирај го равенството).

Задача 6. Да се најде природниот број $\overline{abc}$ кој го исполнува условот

$$\overline{abc} + \overline{bc} + c = 687$$

Задача 7. Дешифрирај го собирањето

$$\overline{A} + \overline{AA} + \overline{ABC} = \overline{CBBA}.$$

така што на секоја различна буква и соодветствува различна цифра и на еднакви букви им соодветствуваат еднакви цифри.

Задача 8. Дешифрирај го собирањето

$$\overline{BANANI} + \overline{ANANI} + \overline{NANI} + \overline{ANI} + \overline{NI} + \overline{I} = \overline{5*0*42},$$

така што на секоја различна буква и соодветствува различна цифра и на еднакви букви им соодветствуваат еднакви цифри.

Задача 9. Дешифрирај ја разликата $***** - *** = 4$, ако секоја свездичка заменува една цифра. Најди ги сите решенија.

Задача 10. За еден број ќе велиме дека е “симетричен” ако се чита од лево на десно исто како од десно на лево, на пример 55, 272 и 234432. Дешифрирај го собирањето

$$**+9**=*****$$

ако собирците и збирот се симетрични броеви.

Задача 11. Дешифрирај го собирањето

$$\overline{ABCC} + \overline{CCBA} = \overline{ADCEB},$$

ако се знае дека на еднакви букви им соодветствуваат еднакви цифри, а на различни букви им соодветствуваат различни цифри.

Задача 12. Дешифрирај го збирот

$$\overline{B} + \overline{AAAA} + \overline{AAAA} = \overline{BAAAA}.$$

ако се знае дека на еднакви букви им соодветствуваат еднакви цифри, а на различни букви им соодветствуваат различни цифри.

Задача 13. Дешифрирај го собирањето

$$\overline{A} + \overline{AB} + \overline{ABC} + \overline{ABCD} = \overline{1CC3},$$

ако се знае дека на еднакви букви им соодветствуваат еднакви цифри, а на различни букви им соодветствуваат различни цифри.

Задача 14. Дешифрирај го собирањето

$$\overline{ALO} + \overline{ALO} = \overline{SLUH},$$

ако се знае дека на еднакви букви им соодветствуваат еднакви цифри, а на различни букви им соодветствуваат различни цифри и дека $\overline{ALO}$ е најмалиот можен трицифрен број.

Задача 15. Намаленикот и намалителот се броеви кои исто се

читаа и од лево и од десно. Запиши ги цифрите на местото на ѕвездичките:

$$**** - *** = 2007.$$

Задача 16. Дешифрирај го множењето $**.*. *9 = 2001$ така што на

местата на ѕвездичките ќе ставиш соодветни цифри. Колку различни решенија има задачата?

Задача 17. На местото на ѕвездичките во равенството $1*2*6:**$

$= 126$ запиши по една цифра, така да делењето (без остаток) биде точно.

Задача 18. Да се определи цифрата на која завршува производот

$$\underbrace{8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot \dots \cdot 8}_{2003 \text{ пати}}.$$

Задача 19. Пополни ги празните полиња во таблицата, така што

збирот на броевите во секои три соседни полиња да е 15.

6							4		
---	--	--	--	--	--	--	---	--	--

Задача 20. Пополни ги празните полиња во таблицата, така што

збирот на броевите во секои три соседни полиња е ист, а збирот на сите броеви во таблицата изнесува 200.

			17							20	
--	--	--	----	--	--	--	--	--	--	----	--

	5						
				1			
6							
			2				

Задача 21. Пополни ги празните

полиња во таблицата, така што збирот на броевите во секои три соседни полиња по хоризонтала и вертикала е 12:

		20
21		
14	19	

Задача 22. Магичен квадрат е квадрат во кој збирите на броевите во секој ред, колона и дијагонала се еднакви. Дополни го магичниот квадрат ако се знае дека бројот запишан во централното квадратче на 3×3 магичниот квадрат е еднаков на половина од збирот на броевите запишани во останатите две квадратчиња на секој ред, колона или дијагонала.

Задача 23. Во магичен квадрат збирот на сите броеви во секој ред, секоја колона и секоја дијагонала е еднаков. Десно е прикажан магичен квадрат во кој недостигаат 5 броеви на полињата A, B, C, D, E . Колку изнесува збирот на броевите на полињата A, B, C, E ?

16	3	A
C	1	D
	0	
B	E	4

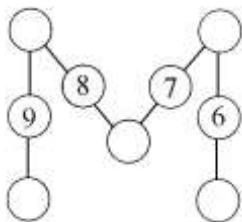
Задача 24. Во празните квадратчиња на таблицата дадена на цртежот десно запиши по еден од броевите 2 или 3 така што збиравите на броевите запишани во секој ред, во секоја колона и на секоја дијагонала да изнесува 6.

	1	
1		
		1

Задача 25. Во квадратна 3×3 таблица во секое квадратче е запишан по еден број. Дали може збирот на броевите во секоја колона да е еднаков на 15, а збиравите на броевите во редовите да се 13, 17 и 18?

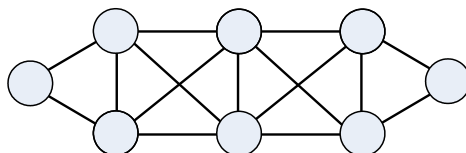
Задача 26. Во табелата десно најди го непознатиот број x . Одговорот да се образложи!

4	15	14	8
19	7	25	16
13	23	12	15
12	15	17	x

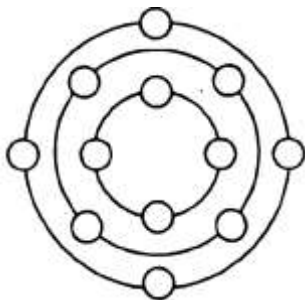
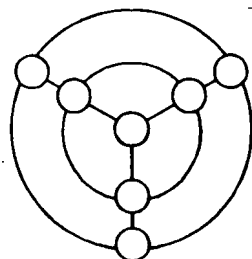


Задача 27. Во секој од петте различни кругови кои се наоѓаат на буквата М, (види цртеж), запиши по еден од броевите 1, 2, 3, 4, 5, употребувајќи го секој број само по еднаш, а на секоја од четирите отсечки збирот на броевите да е еднаков на 13.

Задача 28. Во крукчињата на цртежот запиши ги броевите 1,2,3,4, 5,6,7 и 8 така што два последователни броја не се наоѓаат во крукчиња поврзани со отсечка.

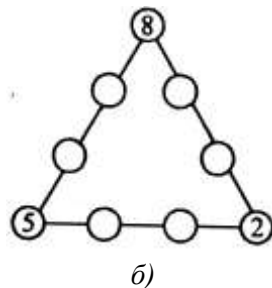
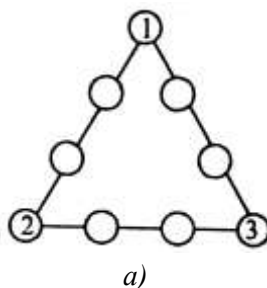


Задача 29. Во секое од крукчињата стави по еден од броевите од 1 до 7, во секое кругче по еден број, така што збирот на броевите на секој радиус и на секоја кружница е еднаков.

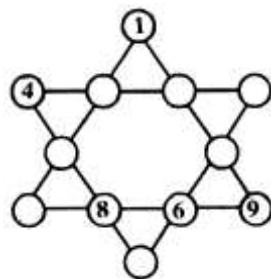


Задача 30. Во крукчињата на цртежот десно да се запишат броевите од 1 до 12, во секое кругче по еден број, така што збиравите на броевите запишани во крукчињата кои се наоѓаат на една иста кружница се еднакви.

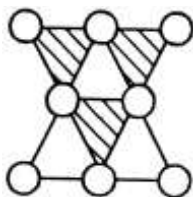
Задача 31. Во крукчињата запиши ги броевите од 1 до 9, во секое кругче по еден број, така што збирите на броевите запишани во крукчињата на секоја страна од триаголникот се еднакви.



Задача 32. Професорот Рампо подготвува магична фигура. Во крукчињата на фигурата зададена на цртеж 1 треба да ги размести броевите од 1 до 12, секој број во по едно кругче, така што збирите на секои четири броеви кои се наоѓаат на секоја од шесте прави е еднаков. Но професорот не ја завршил работата и фигурата ја оставил како на цртежот. Доврши ја работата на професорот Рампо, така што да бидат исполнети поставените услови.

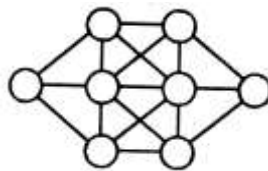


Цртеж 1

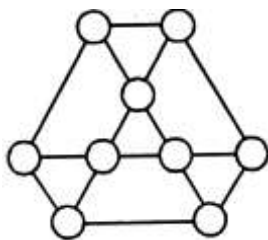
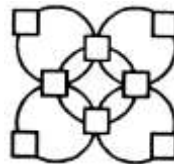


Задача 33. Во крукчињата на цртежот лево запиши ги броевите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и 8, така што збирот на броевите запишани во темињата на “црните” триаголници е 13, а збирот на броевите запишани во темињата на “белите” триаголници е 14.

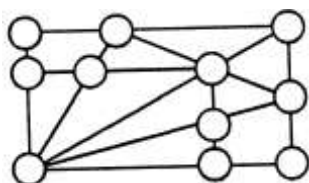
Задача 34. Во крукчињата на цртежот десно впишете ги броевите од 1 до 8, така што два последователни броја да не се наоѓаат во крукчиња кои се поврзани со отсечка.



Задача 35. Во квадратчињата на цртежот запиши ги броевите од 1 до 8, во секое квадратче по еден број, така што збирот на броевите на секоја кружница да е еднаков.

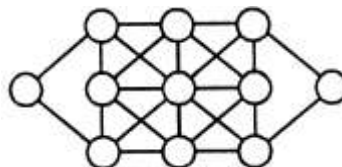


Задача 36. Во кругчињата на цртежот десно запиши ги броевите од 1 до 9, во секое кругче по еден број, така што збирот на броевите кои се наоѓаат во темињата на секој од седумте рамнострани триаголници е еднаков.

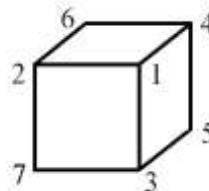


Задача 37. Во кругчињата на цртежот лево запиши ги броевите од 1 до 11, во секое кругче по еден број, така што збиравите на секои три броеви кои лежат на една иста права се еднакви.

Задача 38. Во кругчињата на цртежот десно запиши ги броевите од 1 до 11, во секое кругче по еден број, така што збиравите на броевите запишани во темињата на секој квадрат се еднакви.



Задача 39. Броевите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 се распоредени како на цртежот така да збирот на броевите во темињата на секој четириаголник изнесува 13. Распореди ги овие броеви така да збирот на броевите во темињата на секој од овие четириаголници изнесува 16.



Задача 40. Познато е дека $3+3-3=3$. Постапувајќи на сличен начин, т.е. ставајќи ги знаците $+$, $-$, $:$ и потребниот број на загради запиши го

бројот 3 со помош на 3 тројки, 4 четворки, 5 петки, 6 шестки, 7 седумки, 8 осумки и 9 деветки.

Задача 41. Наместо ѕвездичките стаиви ги соодветните цифри за да биде точно:

$$\begin{array}{r}
 * * 8 5 . * * \\
 \hline
 5 5 * 0 \\
 + \quad 4 * * 5 \\
 \hline
 * * * * *
 \end{array}$$

Задача 42. Дешифрирај го множењето така што на местото на ѕвездичките ќе ставиш цифри за да даденото множење е точно

$$\begin{array}{r}
 **, ** \\
 \hline
 ** \\
 97 \\
 \hline
 1*** \\
 \hline
 \end{array}$$

Задача 43. Дешифрирај го множењето

$$*** \cdot 346 = *****2,$$

ако се знае дека при множење на првиот множител со бројот 4 се добива производ 154*.

Задача 44. Дешифрирај го множењето така што на местото на ѕвездичките ќе ставиш цифри за да даденото множење е точно

$$\begin{array}{r}
 **4 \cdot 23* \\
 \hline
 **24 \\
 1*** \\
 1*** \\
 \hline
 *1****
 \end{array}$$

Задача 45. На местото на ѕвездичките запиши ги соодветните цифри така да множењето биде точно:

$$*4* \cdot 15 = 3*9*.$$

Задача 46. Дешифрирај го делењето така, што на место ѕвездичките ќе ставиш цифри за да даденото делење е точно

$$**** : *7 = **$$

$$\begin{array}{r} **5 \\ \hline ** \\ *1 \\ \hline 00 \end{array}$$

Задача 47. Најди го најмалиот природен број чиј производ со 123 завршува на 1994.

2.2. БРОЕВИ И ЦИФРИ

Задача 1. Со помош на цифрите 0, 2, 3, 5, 6, 7 и 8 напиши го најмалиот и најголемиот шестцифрен број користејќи ја секоја цифра:

- а) само по еднаш,
- б) најмногу три пати.

Задача 2. Напиши ги сите трицифрени броеви чиј збир на цифри е еднаков на 4.

Задача 3. Колку четирицифрени броеви чиј збир на цифрите е 3 постојат?

Задача 4. Одреди го бројот на сите петцифрени броеви, кај кои производот на цифрите е еднаков на 4.

Задача 5. Колку четирицифрени броеви чиј збир на цифри со кои се запишани е еднаков на 4 постојат?

Задача 6. Напиши ги сите броеви кои се помали од 2014, при што производот на цифрите на секој од нив да е 42.

Задача 7. Дали меѓу броевите 11, 13, 17, 41, 43, 53, 67, 83, 15 и 21 постојат три броја чиј што збир е 120.

Задача 8. Колку цифри треба да се употребат за нумерирање на книга која има 421 страница?

Задача 9. За да се нумерираат страниците на една книга биле употребени 1224 цифри. Колку страници имала книгата?

Задача 10. За означување на страните на една книга биле употребени 129 цифри. Колку листови имала книгата?

Задача 11. Колку цифри се употребени за нумерирање на парните страни на книга која содржи 111 страници?

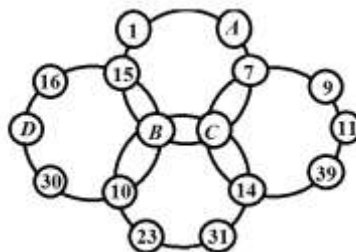
Задача 12. Парните страници на една книга се нумерирани со 1234 цифри. Колку листови има книгата, ако последната нумерирана страница е парна?

Задача 13. На една стара книга и неодстасуваат 142 страници, па таа започнува од 143-та страница. Книгата завршува со број запишан со истите цифри но во друг редослед. Ако книгата има цел број листови, кој е нивниот број?

Задача 14. Дактилографката Марионка отчукала еден по друг природни броеви без растојание: 1234567891011121314... . Отчукала вкупно 219 цифри. Колку пати притоа ја отчукала цифрата 1? А колку пати цифрата 2?

Задача 15. Службеничката Симеонка по ред запишала еден до друг природни броеви без растојание 12345678 9101112... . Која цифра е запишана на 1995-то место?

Задача 16. Збирот на броевите во секој од дадените четири прстени е 90. Кои броеви се кријат на местата означени со буквите A, B, C и D?



Задача 17. Тетратка има 100 страници нумерирани со броевите од 1 до 100. Од неа по случаен избор се искинати 30 листови и потоа е

пресметан збирот на нумерираните броеви од преостанатите страници. Дали е можно овој збир да изнесува 800?

Задача 18. Кој број ќе се добие ако разликата на најголемиот број од петтата стотка и најмалиот број запишан со цифрите 5,1 и 2 ја намалиме два пати.

Задача 19. Разликата на два броја е 3879. Колкава ќе биде разликата ако намаленикот се зголеми за 39, а намалителот за 49?

Задача 20. Збирот на два броја е 1348. Ако едниот се намали за 89, а другиот се зголеми за 67, се добиваат еднакви броеви. Одредете ги тие броеви!

Задача 21. За колку треба да се намали збирот на броевите 54863 и 30608 за да се добие нивната разлика?

Задача 22. Вредноста на изразот $a-b+c$ е 1995. Ако секој од броевите a, b и c го намалиме за 995, колкава ќе биде вредноста на изразот $a-b+c$?

Задача 23. Збирот на три броја е 230. Збирот на првиот и вториот број е 80, а збирот на првиот и третиот број е 180. Кои се тие броеви?

Задача 24. Збирот на три последователни непарни природни броеви е 105. Кои се тие броеви?

Задача 25. Вера собрала 4 последователни непарни природни броеви и добила збир 8040. Кои броеви ги собрала Вера?

Задача 26. Најди шест последователни природни броеви чиј збир е 1275.

Задача 27. Збирот на пет броја е 7730. Секој следен број е поголем од претходниот за 125. Кои се тие броеви?

Задача 28. Збирот на три броја од кои секој е за 3 пати поголем од претходниот изнесува 63635. Кои се тие броеви?

Задача 29. Збирот на 4 броеви е 100. Збирот на првиот, третиот и четвртиот е 65, а збирот на првиот вториот и третиот е 78. Одреди ги собироките, ако првиот собирок е за 10 помал од вториот.

Задача 30. Збирот на два броја е 12392. Ако на првиот број му додадеме 213, а од вториот одземеме 387, ќе добиеме еднакви броеви. За кои броеви станува збор?

Задача 31. За три броја a, b и c важи:

$$a + b = 332; a + c = 408; b + c = 466.$$

Одреди ги броевите a, b и c .

Задача 32. Збирот на два броја е 1994, а разликата е 680. Кои се тие броеви?

Задача 33. Збирот на два броја е 52. Ако првиот се зголеми 11 пати, се добива збир 152. Одреди ги тие броеви.

Задача 34. Половина од збирот на два броја е 2020. Кои се тие броеви, ако едниот од нив е четири пати помал од другиот?

Задача 35. Мила од цифрите 3, 7, 1, 9, 0 и 4 ги формирала најголемиот и најмалиот шестцифрен број употребувајќи ја секоја цифра точно еднаш, а потоа нивната разлика ја намалила 9 пати. Кој број го добила Мила?

Задача 36. Најди ја разликата меѓу најмалиот непарен четирицифрен број чиј збир на цифри е 4 и најголемиот парен трицифрен број чиј производ на цифри е 16.

Задача 37. Бројот 867 намали го за количникот на бројот 875 со бројот 7.

Задача 38. Разликата на два броја е 41. Ако намаленикот го зголемиме петпати, а намалителот остане непроменет, тогаш разликата е 1257. Одреди ги тие броеви!

Задача 39. Збирот на три природни броја е 880. Првиот од овие броеви е двапати помал од вториот, а седум пати поголем од третиот. Кои се тие броеви?

Задача 40. Дадени се два еднакви броја. Ако од првиот одземеме 1389, а од вториот 827, тогаш добиената разлика на вториот број ќе биде трипати поголема од добиената разлика на првиот број. Колкава е разликата на вториот број?

Задача 41. Разликата на два броја е 4176, а нивниот количник е 37. Кои се тие броеви?

Задача 42. При делење на 2011 со некој двоцифрен број, се добива остаток 16. Колку такви двоцифрени броеви има?

Задача 43. Одреди го оној двоцифрен број кој се зголемува 26 пати, ако од левата страна му се допише цифрата 7.

Задача 44. Множејќи два броја Мирко на местото на единиците, кај едниот од множителите, наместо цифрата 4 ја напишал цифрата 1. Затоа наместо 1190 како производ добил 1085. Кои броеви требало да ги помножи Мирко?

Задача 45. При множење на два броја, на првиот број ученикот му ја заменил цифрата на единиците 4 со 1. Така добил 525, наместо 600. Кои броеви ги множел?

Задача 46. Миросанда множела два броја и како производ го добила бројот 1986. Кога едниот од множителите го зголемила за 4, а другиот останал непроменет, добила производ 3310. Кои броеви ги множела Миросанда?

Задача 47. Ученикот Илија треба да го пресмета производот меѓу броевите 5267 и $*3*$. Меѓутоа, при запишување на вториот множител тој на местото на десетките наместо цифрата 3 ја запишал цифрата 8 и затоа ќе добие друг резултат. Најди ја разликата помеѓу вистинскиот и резултатот кој ќе го добие Илија!

Задача 48. Борјана множејќи два броја добила производ 1995. Кога едниот од множителите го зголемила за 8, а другиот го оставила непроменет, добила производ 3059. Кои броеви ги množела Борјана?

Задача 49. Производот на два броја е 2250. Ако едниот се намали за 6, а другиот остане непроменет, тогаш се добива производ 1800. Кои се тие броеви?

Задача 50. Ако на еден природен број од десната страна му допишеме 6, потоа го поделиме со 9, па на добиениот количник од десно му допишеме 7 и добиениот број го поделиме со 13 се добива бројот 19. Кој е тој број?

Задача 51. Производот на два броја е 2652. Ако првиот број го намалиме за 2, тогаш производот ќе биде 2244. Кои се тие броеви?

Задача 52. Производот на два броја е 2250. Ако првиот број се намали за 6, а вториот остане ист, тогаш новиот производ е еднаков на 1800. Кои се тие броеви?

Задача 53. Сашо замислил еден број и го помножил со 7 и со 16. Кога ги собрал добиените броеви, добил збир 230. Кој број го замислил Сашо?

Задача 54. Количникот на два броја е 11. Ако деленикот се зголеми за 1650, а делителот остане ист, тогаш количникот се зголемува 7 пати. Кои се тие броеви?

Задача 55. Ако од даден број се одземе 23, па добиената разлика се подели со 11 и добиениот количник се помножи со 5, ќе се добие број кој е за 5 поголем од најмалиот двоцифрен број. Кој е тој број?

Задача 56. Ана замислила некој број. Потоа на него му го додала бројот 21 и така добиениот збир го помножила со 35. Кога на тој резултат му додала 2834 го добила бројот 28769. Кој број го замислила Ана?

Задача 57. Збирот од намаленикот, намалителот и нивната разлика е еднаков на 76. Најди ги намаленикот и намалителот, ако разликата е за 6 поголема од намалителот.

Задача 58. Производот на два броја е 1998. Ако едниот се намали за 24, а другиот остане ист новиот производ изнесува 1110. Кои се тие броеви?

Задача 59. Збирот на четири природни броја е 1998. Ако на првиот му се додаде 2, од другиот се одземе 2, третиот се помножи со 2, а четвртиот се подели со 2, се добиваат еднакви броеви. Кои се тие броеви?

Задача 60. Колку пати треба на најголемиот двоцифрен број да му се додаде најголемиот едноцифрен број за да се добие најголемиот трицифрен број?

Задача 61. Ако на некој природен број му ја избришеме последната цифра 0, тогаш тој број ќе се намали за 1998. Кој е тој број?

Задача 62. Ако на некој природен број му ја избришеме последната цифра 0, тогаш тој број ќе се намали за 72504. Кој е тој број?

Задача 63. Кој трицифрен број ќе се зголеми 26 пати, ако од лево му се допише цифрата 3?

Задача 64. Колку различни четирицифрени броеви можат да се запишат ако на местото на ѕвездичките ставиме цифри:

а) $3^{**}4$

б) $**45$

Задача 65. Колку трицифрени броеви има такви што во нивниот декаден запис точно еднаш се користи цифрата 4?

Задача 66. Колку трицифрени броеви има такви што цифрата на стотките е еднаква на цифрата на единиците?

Задача 67. Да се определи бројот на трицифрените броеви кои при читање од десно на лево и обратно, од лево на десно имаат иста вредност.

Задача 68. Колку цифри се употребени за да се запишат сите двоцифрени и трицифрени броеви?

Задача 69. а) Колку петцифрени броеви завршуваат на цифрата 4?

б) Колку петцифрени броеви започнуваат и завршуваат на цифрата 6?

Задача 70. Колкав е бројот на трицифрените броеви кај кои првата цифра е парна, а последната непарна?

Задача 71. Колку трицифрени броеви чија прва цифра е делива со 2, втората цифра е делива со 3, а третата цифра е делива со 5 постојат?

Задача 72. Најди го најмалиот парен природен број чиј збир на цифри изнесува 60.

Задача 73. Пресметај $[(1+2+3+\dots+54):3]:(3\cdot 3:3\cdot 3)$.

Задача 74. За колку е поголем збирот на сите непарни двоцифрени броеви од збирот на сите парни двоцифрени броеви?

Задача 75. Пресметај го збирот на првите 2000 природни броеви.

Задача 76. Збирот на 40 последователни природни броеви е 1940. Кои се тие броеви?

Задача 77. Пресметај го збирот:

$$1+3+5+7+9+11+\dots+1991+1993+1995.$$

Задача 78. Татко му на Давор првиот ден му подарил 1 џамлија, вториот ден му подарил 3 џамлии, третиот ден му подарил 5 џамлии и секој нареден ден му подарувал по 2 џамлии повеќе од претходниот ден.

Колку џамлии добил Давор триесеттиот ден? Колку џамлии вкупно имал Давор триесеттиот ден?

Задача 79. Пресметајте го збирот:

$$2+4+6+8+10+12+\dots+1992+1994+1996.$$

Задача 80. Кој збир е поголем и за колку: збирот на парните трицифрени броеви или збирот на непарните трицифрени броеви?

Задача 81. Природните броеви од 1 до 2002 се запишани последователно еден по друг. Меѓу броевите 1 и 2 ставен е знакот “+”. Пред

бројот 3 запишан е знакот “-”, а исто така и пред бројот 4. Потоа пред броевите 5 и 6 запишан е по еден знак “+”. Така до крајот запишувани се наизменично по два “минуса” и два “плуса”. Колкава е вредноста на добиениот израз?

Задача 82. Дали може бројот 3478 да се запише како производ на два последователни природни броја?

Задача 83. На која цифра завршува производот на сите природни броеви од 101 до 119?

Задача 84. Без да множиш определи ги последните две цифри на производот на првите десет природни броеви.

Задача 85. Дали постојат три последователни природни броеви чиј производ е еднаков на $87^{*****}8$?

Задача 86. Кој природен број треба да се земе како множител пет пати за да се добие четирицифрен број чија цифра на единиците е 4?

Задача 87. На која цифра завршува производот на 43 осумки?

Задача 88. Со колку нули завршува производот на сите природни броеви од 1 до 126?

Задача 89. За четирицифрениот број ќе велиме дека е “убав” ако е запишан со две петки и две четворки. Најди ја најмалата позитивна и најголемата разлика на два “убави” четирицифрени броеви.

Задача 90. За петцифрениот број a ќе велиме дека е “двојно загадочен”, ако двата броја a и $b=a+a$, се запишуваат со помош на десетте цифри, од кои секоја во записите на a и b се јавува точно по еднаш. Најдете ги најголемиот и најмалиот “двојно загадочен” број.

Задача 91. Дадени се три различни ненулни цифри. Збирот од сите различни двоцифрени броеви со различни цифри, образувани од трите цифри е 528. Најди ги трите цифри!

Задача 92. Од цифрите на некој трицифрен број може да се состават 6 различни двоцифрени броеви. Најди ги сите трицифрени броеви кои се еднакви на половината од збирот на така добиените двоцифрени броеви.

Задача 93. Од два дадени природни броја се формираат нови броеви на следниов начин: на првиот му се додава вториот и се добива третиот, збирот на вториот и третиот е еднаков на четвртиот итн. Најди го збирот на првите шест така добиени броеви, ако петтиот број е еднаков на 7.

Задача 94. Третина од збирот на три броја е 2000. Ако вториот број е трипати поголем од првиот, а третиот е за 5 помал од првиот, најди ги овие броеви.

Задача 95. Ако од десната страна на даден двоцифрен број му се допише истиот тој број се добива четирицифрен број. Колку пати добиениот број е поголем од дадениот број?

Задача 96. Природниот број е *палиндрон* ако еднакво се чита и од лево и од десно. Најди го најмалиот четирицифрен палиндрон чиј збир со 11 исто така е палиндрон.

Задача 97. За својот нов велосипед Ивица набавил катанец кој се отвара со помош на шифра. Неговата шифра е четирицифрен број на кој сите цифри му се различни. Секој природен број без остаток може да се подели со цифрата на стотките, збирот на цифрите на цифрите на илјадите и десетките изнесува 7. Цифрата на единиците е помала од цифрата на десетките, а производот на овие две цифри завршува на цифрата 5. Која е шифрата на катанецот на Ивица?

Задача 98. Ако е

$$\overline{aa} \cdot \overline{ababa} = \overline{aaaaaa}$$

пресметај

$$\overline{ab} \cdot \overline{ababa}.$$

2.3. ДЕЛИВОСТ ВО МНОЖЕСТВОТО ПРИРОДНИ БРОЕВИ

Задача 1. Од цифрите 1, 2 и 3 образувај ги сите двоцифрените броеви запишани со различни цифри и докажи дека нивниот збир е делив со 132.

Задача 2. Нека m и n се природни броеви при што m е поголемиот од двата броеви. Докажи дека:

- а) ако разликата $m-n$ е делива со 2, тогаш и збирот $m+n$ е делив со 2.
- б) ако збирот $m+n$ е делив со 2, тогаш и разликата $m-n$ е делива со 2.

Задача 3. Докажи дека збирот на кои било три последователни броеви е делив со 3.

Задача 4. Докажи дека производот на два последователни парни броја е делив со 8.

Задача 5. Докажи дека збирот на првите 1000 природни броеви е делив со 77.

Задача 6. Докажи дека разликата на произволен четирицифрен број и бројот запишан со истите цифри, но во обратен редослед е делива со 9.

Задача 7. Најди ги сите природни броеви деливи со 8, чиј збир на цифрите е 7 и производ на цифрите е 6.

Задача 8. Докажи дека разликата на бројот $\overline{xabx}$ и бројот запишан со истите цифри, но во обратен редослед е делива со 90.

Задача 9. Докажи дека разликата на произволен трицифрен број и бројот напишан со истите цифри, но по обратен редослед е делива со 9 и 11.

Задача 10. Збирот на произволен двоцифрен број и бројот запишан со истите цифри, но во обратен редослед е делив со 11. Докажи!

Задача 11. Збирот на цифрите на трицифрен број е 7. Цифрата на единиците е еднаква со цифрата на десетките. Докажи дека бројот е делив со 7!

Задача 12. Да се одреди најмалиот природен број кој е запишан со помош на цифрите 0 и 4 и е делив со 15.

Задача 13. Најди го најмалиот природен број кој е делив со 15 и чиј збир на цифри е еднаков на 15.

Задача 14. Најди ги сите трицифрени природни броеви кои се деливи со 4 и чиј производ на цифрите е еднаков на 24.

Задача 15. Да се одреди цифрата x така што бројот $\overline{7438x}$ при делење со 5 да дава ист остаток како и при делење со 9.

Задача 16. Во четирицифрениот број $\overline{*11*}$ на местата на свездичките ставете ги соодветните цифри така што добиениот број е делив со 36. Најди ги сите можни решенија.

Задача 17. Нека x и y се природни броеви за кои изразот $3x+11y$ е делив со 13. Докажи дека и изразот $47x+103y$ е делив со 13.

Задача 18. Нека x и y се природни броеви за кои изразот $3x+7y$ е делив со 19. Докажи дека и изразот $43x+75y$ е делив со 19.

Задача 19. Докажи дека бројот $\underbrace{11\dots 11}_{1996 \text{ пати}}$ е делив со 11 и 101.

Задача 20. Најди двоцифрен природен број кој собран со бројот запишан со истите цифри но во обратен редослед дава збир кој е квадрат на природен број.

Задача 21. Одреди ги сите природни броеви поголеми од 25000, а помали од 30000, кои при делење со 131 и при делење со 1965 даваат остаток 125.

Задача 22. На местото на свездичката $\overline{199^*}$ стави цифра така што добиениот број е делив со 15?

Задача 23. Одреди ги цифрите x и y така што бројот $\overline{1995xy}$ истовремено е делив и со 8 и со 9.

Задача 24. Најди ги сите трицифрени броеви $\overline{abc}$ така да бројот $\overline{579abc}$ биде делив со 5, 7 и 9.

Задача 25. Одреди ги цифрите a и b така што бројот $\overline{4a1b}$ е делив со 12.

Задача 26. Која цифра треба да стои на местото од свездичката во бројот $\overline{2008^*}$ за да тој број е делив со 6?

Задача 27. Најди ги сите четирицифрени броеви кои започнуваат со цифрата 4, завршуваат со цифрата 2 и се деливи со 9.

Задача 28. Во бројот $x = \overline{a1999b}$ најди ги цифрите a и b така да тој биде делив со 24.

Задача 29. Да се определи бројот на природните броеви помали од 1000 кои не се деливи ниту со 4 ниту со 6.

Задача 30. Најди го најмалиот седумцифрен број кој е делив со 36 и кој има различни цифри.

Задача 31. Даден е збирот на броевите $\overline{7a85} + \overline{34a5} + \overline{1a21a}$. Најди ја цифрата a така да овој збир е делив со 9.

Задача 32. На табла е напишан бројот 147147147147. Кои цифри треба да се избришат за да бројот кој ќе остане биде делив со 9 и притоа да е:

а) најмал,

б) најголем.

Задача 33. Регистарската ознака на еден автомобил содржи трицифрен број кој е делив со 6. Кој е тој број, ако се знае дека производот на

цифрите на единиците и десетките е 12, а нивниот збир е за 1 помал од цифрата на стотките?

Задача 34. Најди ги цифрите a и b така да бројот $\overline{87a9b}$ биде делив со 18.

Задача 35. Првите три цифри на петцифрениот број A се четворки. Најди го бројот A ако тој е делив со 45.

Задача 36. На таблата е запишан бројот 1 и уште 10 последователни природни броеви. Мирко избришал еден од единаесетте броеви, а останатите ги собрал и добил збир 2003. Кој број го избришал Мирко?

Задача 37. Ивица купил среќка чиј број е трицифрен. Тој број е делив со 6. Кој е тој број ако се знае дека производот на последните две цифри е 12, а нивниот збир е за 1 помал од првата цифра?

Задача 38. Одреди ги сите природни броеви n за кои бројот $10^n - 1$ е делив со 81.

Задача 39. Најди ги сите природни броеви a и q за кои е исполнето равенството $100 = aq + 6$.

Задача 40. Определи го природниот број a таков да бројот $17 \cdot \overline{16a} + 2014 \cdot 2016$ биде делив со 12.

Задача 41. Дадени се четири различни едноцифрени броеви a, b, c и d . При соодветно подредување се добиваат еден најголем и еден најмал четирицифрен број. Докажи дека разликата на вака добиените четирицифрени броеви не е прост број.

Задача 42. Испиши ги сите петцифрени броеви деливи со 45 кои се од обликот $\overline{abcda}$, при што цифрата на десетките е најголемиот едноцифрен прост број, а цифрите a, b, c и d се меѓусебно различни.

Задача 43. Ако броевите p , $p+5$ и $p+9$ се прости, тогаш $p=2$. Докажи!

Задача 44. Ако p е прост број, тогаш $p+7$ е сложен број. Докажи!

Задача 45. Најди ги сите прости броеви p , такви што и бројот $p+5$ е прост.

Задача 46. Докажи дека ако p и $7p-1$ се прости броеви, тогаш $7p+1$ е сложен број.

Задача 47. Дали постои прост број p , таков што $3p+1$ и $5p+1$ се исто така прости броеви.

Задача 48. Најди ги простите броеви p и q за кои важи $2p + 3q = 100$.

Задача 49. а) Дали постојат четири природни броеви помали од 10, такви што збирот на било кои три од нив е прост број?

б) Дали постојат пет различни природни броеви, такви што збирот на било кои три од нив да е прост број?

Задача 50. Запиши ги броевите 6930 и 32340 како производ на прости множители

Задача 51. Производот на шест броја поголеми од 10, а помали од 20 е 7539840. Кои се тие броеви?

Задача 52. Производот на три последователни парни броеви е 2688. Најди ги тие броеви.

Задача 52. Најди го збирот на сите непарни трицифрени броеви чиј производ на цифри е еднаков на 140.

Задача 54. Производот на три последователни природни броеви е 336. Колку изнесува нивниот збир?

Задача 55. Најди го најмалиот четирицифрен број кој е делив со 9 и чиј производ на цифри е еднаков на 180.

Задача 56. Дали постои природен број чиј производ на цифри е еднаков на 528? Одговорот да се образложи.

Задача 57. Дали постои природен број чиј производ на цифри е еднаков на 462? Одговорот да се образложи.

Задача 58. Производот на два двоцифрени броја е 1008. Цифрите на вториот број се исти како цифрите на првиот број, но запишани во обратен редослед. Кои се тие броеви?

Задача 59. Најди природен број n и прост број p за кои е исполнето равенството $\frac{n}{1995} = \frac{1}{p}$.

Задача 60. Најди ги природниот број n и простиот број p така да важи $\frac{n}{2002} = \frac{1}{p}$.

Задача 61. Најди ги сите прости броеви p и природни броеви n за кои важи $\frac{1}{p} = \frac{n}{2010}$?

Задача 62. Одреди најмал природен број чиј производ со бројот 15400 е полн квадрат.

Задача 63. Одреди најмал природен број со кој треба да се помножи бројот 8316 за да се добие број кој е квадрат на природен број. На кој број?

Задача 64. Одреди го природниот број n , таков што

$$n(n+1)(2n+1)=84.$$

Задача 65. Најди го природниот број n така да

$$n(n+1)(2n+1)=180.$$

Задача 66. Ако бројот 1000 се подели со некој број се добива остаток 8. Ако пак бројот 900 се подели со истиот тој број се добива остаток 1. Со кој број сме ги поделиле броевите 1000 и 900?

Задача 67. Ако 4373 и 826 се поделат со еден ист број, ќе се добијат остатоци 8 и 7 соодветно. Кој е делителот?

Задача 68. Збирот на два броја е 825. Кога поголемиот ќе се подели со помалиот се добива количник 8 и остаток 15. Кои се тие броеви?

Задача 69. Со колку природни броеви е делив бројот 400? Колку негови делители се парни, а колку непарни?

Задача 70. Најди го количникот и остатокот при делењето на изразот

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 + 75$$

со бројот 35.

Задача 71. Природен број при делење со 2 има остаток 1, а при делење со 3 има остаток 2. Колкав е остатокот на тој број при делење со 6?

Задача 72. Одреди го најголемиот трицифрен број што при делење со 18 дава остаток 11.

Задача 73. Пресметај го збирот на сите природни броеви кои при делење со 7 даваат количник еднаков на остатокот.

Задача 74. Количникот на два броја m и n е 32 и остаток 30. Кои се тие броеви ако нивниот збир е 4287?

Задача 75. Бројот $n+100$ при делење со 23 дава остаток 17. Колкав е остатокот на делењето на бројот n со 23.

Задача 76. Збирот на два броја е 1181. Ако поголемиот број се подели со помалиот се добива количник 4 и остаток 1. Кои се тие броеви?

a) 3, б) 333.

Задача 81. Тераса во облик на правоаголник со должина $6m$ и ширина $225cm$ треба да се поплочи со еднакви камени плочи во облик на квадрат. Колку најмалку плочи се потребни за да се поплочи терасата?

Задача 82. Колку најмногу еднакви букети можат да се направат од 252 ружи, 288 лалиња и 972 каранфили и по колку вкупно цветови има во секој букет, ако сите цветови се употребени во букетите?

Задача 83. Жабата има скок долг 50 cm, зајакот 75 cm, а кенгурот 90 cm. Кое е најмалото растојание на кое сите ќе направат цел број на скокови? Колку скока тогаш направило секое од животните поединечно?

Задача 84. Жабата и скакулецот добиле задача да обележуваат една крос патека. Жабата правела скокови од 60 *cm* и закачувала црвено знаменце, а скакулецот правел скокови од 40 *cm* и закачувал сино знаменце.

41

Колкав дел од патеката ќе биде обележан, ако на 15 места има и црвено и сино знаменце?

Задача 85. Стадото на овчарот Дамјан има повеќе од 100, но нема повеќе од 500 овци. Кога овците ги брои по 2, по 3, по 4, по 5, по 6 или по 7 Дамјан забележал дека секогаш му преостанува по една овца. Колку овци брои стадото на Дамјан?

Задача 86. Најди го најмалиот природен број кој при делење со 2 дава остаток 1, при делење со 3 дава остаток 2, при делење со 4 дава остаток 3, при делење со 5 дава остаток 4, при делење со 6 дава остаток 5 и при делење со 7 дава остаток 6.

Задача 87. Најди природен број кој е делив со 17, а при делење со 5, 6, 8 и 9 дава остаток 1 и е поголем од 3000, а помал од 4000.

Задача 88. На бројот 13 допиши му од левата и десната страна по една цифра така што тој да биде делив со 45.

Задача 89. Најди го збирот на сите трицифрени броеви кои при делење со 3 даваат остаток 2, при делење со 4 остаток 3 и при делење со 5 остаток 4.

Задача 90. Самоил има повеќе од 3000, помалку од 4000 денари. Ако дневно троши по 200 или 240 денари, секогаш ќе му останат 50 денари. Колку пари има Самоил?

Задача 91. Еден извиднички одред има повеќе од 40, а помалку од 50 членови. Пред да тргнат на логорување забележале дека можат да се сместат или во четирикреветни или во шесткреветни шатори при што и во едниот и во другиот случај нема да остане празно место. Колку извидници брои одредот?

Задача 92. Најди два природни броја чиј збир е 168, а нивниот најголем заеднички делител е 24.

Задача 93. Одреди ги броевите a и b ако $\text{НЗД}(a,b)=14$, $\text{НЗС}(a,b)=770$ и броевите не се меѓусебно деливи.

Задача 94. Производот на два броја е 1350, а нивниот најголем заеднички делител е 15. Најди ги овие броеви.

Задача 95. Најди ги природните броеви a и b ако

$$\text{НЗД}(a,b)=8 \text{ и } a \cdot b=384.$$

Задача 96. Докажете дека бројот $\underbrace{666\dots 666}_{1995 \text{ пати}}$ е делив со 18.

Задача 97. Докажете дека бројот $\underbrace{111\dots 111}_{100 \text{ пати}} \underbrace{222\dots 222}_{100 \text{ пати}}$ е производ на два последователни природни броја.

Задача 98. Нека е $A = \overline{a55566b}$ и $B = \overline{555b8}$, каде a и b се цифри. Најди ги сите цифри a и b така што дропката $\frac{A}{B}$ може да се скрати со 36.

Задача 99. Во квадрат 4×4 да се распоредат прости броеви така што производот на броевите во секој ред, колона и дијагонала е 1989.

2.4. РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ

2.4.1. БРОЈНИ РЕБУСИ

1. Едно решение е: $4 \cdot 4 + 4 - 4 : 4 = 16 + 4 - 1 = 19$.

2. Едно од можните решенија е:

а) $(1 + 2) \cdot 3 + 45 = 54$,

б) $(1 + 23 + 4) \cdot 5 = 140$ и

в) $((12 + 3) \cdot 4) : 5 = 12$.

3. Не е тешко да се заклучи дека првиот број има три, а вториот две цифри. Нека првиот од броевите го означиме со $\overline{xy0}$. Тогаш вториот број е од вид $\overline{xu}$. Од условот на задачата $\overline{xy0} + \overline{xu} = 495$. Од тука е јасно

дека $y = 5$. Тогаш мора $x + y = 9$ од каде $x = 4$. Значи бараните броеви се 450 и 45.

4. За да се добие што е можно поголем множител, на местото со најголема месна вредност треба да е што е можно поголема цифра. Значи на местото на стотките на првиот број треба да се наоѓаат или цифрата 4 или цифрата 5. Цифрите 1 и 2 треба да се наоѓаат на местото на единиците. Затоа треба да се пресметаат производите: $531 \cdot 42$, $532 \cdot 41$, $431 \cdot 52$, $432 \cdot 51$.

Важи

$$531 \cdot 42 = 22302, 532 \cdot 41 = 21812, 431 \cdot 52 = 22412, 432 \cdot 51 = 22031.$$

Значи најголем производ е $431 \cdot 52$.

5. Бидејќи A не е 0, од собирањето на единиците добиваме $A + A = 10$, т.е. $A = 5$. Од собирањето на десетките заклучуваме дека H е цифра која собрана со 5 и со пренос 1 дава 5, па затоа $H = 9$. Конечно имаме $III = A + 1$, односно $III = 6$. Дешифрираното собирање гласи: $5 + 59 + 595 = 695$.

6. Цифрата на единиците на бројот $\overline{abc} + \overline{bc} + c$ е цифрата на единиците на $c + c + c$, односно $c + c + c$ завршува на 7. Единствена можност е $c = 9$. Оттука добиваме дека $100a + 20b + 27 = 687$ односно $5a + b = 33$. Последната равенка е исполнета ако $a = 5$ и $b = 8$ или $a = 6$ и $b = 3$. Значи бараните броеви се 589 и 639.

7. Цифрата C е 1, бидејќи збир на едноцифрен, двоцифрен и трицифрен број секогаш е помал од 2000. Слично, цифрата A мора да биде 9 бидејќи во спротивно збирот ќе биде помал од 1000 и нема да добиеме четирицифрен број. Од равенството

$$9 + 99 + \overline{9B1} = \overline{1BB9}, \text{ т.е. } 108 + \overline{9B1} = \overline{1BB9}$$

лесно се констатира дека $B = 0$, т.е. решението е $9 + 99 + 901 = 1009$.

8. Јасно $I \neq 0$ и како $6I$ треба да завршува на цифрата 2 наоѓаме дека $I = 2$ или $I = 7$. Но за $I = 2$ имаме пренос 1 и збирот на десетките е $5N + 1$, па истиот не може да завршува на 4. Останува $I = 7$. Тогаш N е парен број. Освен тоа, $(3N + \text{преносот})$ треба да завршува на нула. Ако преносот е 1, тогаш $N = 3$. Ако преносот е 2, тогаш $N = 6$. Ако преносот е 3, тогаш $N = 9$. Бидејќи N е парна цифра, добиваме $N = 6$. Од $4A + 3 > 20$ следува дека $A \geq 5$.

Аналогно, од $4A < 30$, следува $A \leq 6$. Но, $N=6$ па затоа $A=5$ и тогаш $B=4$. Конечно, дешифрираното собирање е

$$456567 + 56567 + 6567 + 567 + 67 + 7 = 520342.$$

9. Бидејќи намаленикот е четирицифрен, а намалителот трицифрен број, за да разликата е 4 намалителот мора да е поголем или еднаков на 996. Но, тој не може да е поголем од 999, па затоа можни вредности на намалителот се 996, 997, 998 и 999. Значи, задачата има 4 решенија:

$$1000-996=4; 1001-997=4; 1002-998=4 \text{ и } 1003-999=4.$$

10. Првата цифра во збирот мора да е 1, бидејќи збир на двоцифрен и трицифрен број е помал од 2000. Значи, имаме

$$**+9*9=1**1.$$

Бидејќи збирот на цифрите на единиците на собирците дава цифра на единици 1, а цифрата на единиците на едниот собирок е 9 заклучуваме дека цифрата на единиците на другиот собирок мора да е 2. Но, двоцифрениот број е симетричен, па затоа тој мора да е 22 т.е. имаме $22+9*9=1**1$.

Единствен симетричен број кој е поголем или еднаков на 1001, а е помал или еднаков на 1021 е бројот 1001, па затоа имаме

$$22+9*9=1001.$$

$$\text{Конечно, } 22+979=1001.$$

11. Збирот на два четирицифрени броја секогаш е помал од 20000, па затоа $A=1$. Но, од $A=1$ добиваме дека C мора да е 8 или 9, бидејќи само во тој случај добиваме збир поголем од 10000. Ако е $C=9$, тогаш $B=0$, ($1+9=10$). Притоа добиваме дека $E=0$, ($C+B+1=9+0+1=10$), што не е можно бидејќи според условот на задачата $B \neq E$. Значи, $C=8$, па $E=7$. Според тоа, собирањето е

$$1988+8891=10879.$$

12. Цифрата B може да биде 1 или 2 (зошто?). Ако е $B=2$, тогаш A мора да е 9, а $2+9999+9999=20000$, што противречи на условот на задачата. Ако е $B=1$, тогаш $A=9$, односно

$$1+9999+9999=19999.$$

13. Јасно е дека $A=1$. Бидејќи при собирање на цифрите на единиците се памти 1 или 2, добиваме дека

$$1+A+B+C=10+C \text{ или } 2+A+B+C=10+C,$$

па затоа $A+B=9$ или $A+B=8$. Случајот $A+B=9$ не е можен бидејќи притоа од собирањето на стотките ќе имаме $C=A+B+1=10$, а C е цифра. Значи, $A+B=8$, т.е. $B=7$, $C=9$ и $D=6$. Значи, собирањето е $1+17+179+1796=1993$.

14. Јасно $S=1$. Збирот е четирицифрен број, ако цифрата A е поголема или еднаква на 5. Бидејќи бараме најмал можен број земаме $A=5$:

$$\overline{5LO} + \overline{5LO} = \overline{1LUH}$$

Од условот на задачата имаме $L \neq 1$, па затоа собирањето на стотките $5+5$ мора да е без пренос, т.е. $L=0$. Бидејќи $U \neq 0$ и $U \neq 1$ заклучуваме дека $A=5$ не води кон решение на задачата.

Земаме $A=6$. Бидејќи бараме најмал број $\overline{ALO}$ и $L \neq 1=C$, земаме $L=2$ и добиваме $\overline{62O} + \overline{62O} = \overline{12UH}$.

Сега $O \neq 1$, $O \neq 2$ и $O \neq 6$. Ако $O=3$, тогаш $H=6$, што не е можно. Ако $O=4$, тогаш $U=4$, а ако $O=5$, тогаш $U=5$, што повторно не е можно. Конечно, за $O=7$ имаме $H=4$ и $U=5$ и бараното решение е $627+627=1254$.

15. Знаеме дека $2001 = 3 \cdot 667 = 3 \cdot 23 \cdot 29$. Но, $3 \cdot 23 = 69$, па затоа ги имаме следниве решенија $23 \cdot 3 \cdot 29 = 2001$, $69 \cdot 1 \cdot 29 = 2001$, $29 \cdot 1 \cdot 69 = 2001$.

16. Од условот на задачата следува

$$\overline{abba} - \overline{cdc} = 2007, \text{ т.е. } \overline{abba} = 2007 + \overline{cdc},$$

што може да се запише на следниов начин

$$\begin{array}{r} 2007 \\ + \overline{cdc} \\ \hline \overline{abba} \end{array}$$

Јасно, $a = 2$, па оттука следува дека $c = 5$, што значи

$$\begin{array}{r} 2007 \\ + \overline{5d5} \\ \hline \overline{2bb2} \end{array}$$

Оттука следува дека $d+1=b$ и $b=5$, па е $d=4$. Конечно, $2552 - 545 = 2007$.

17. Делењето е точно ако $126 \cdot ** = 1 \cdot 2 \cdot 6$. Втората цифра на вториот множител мора да биде 1 или 6. Ако неговата прва цифра е помала од

8, тогаш производот не е поголем од $126 \cdot 76 = 9576$, па резултатот не е петцифрен број. Од четирите можности $126 \cdot 96 = 12096$, $126 \cdot 86 = 10836$, $126 \cdot 91 = 11466$ и $126 \cdot 81 = 10206$ точна е само четвртата, па решението е $10206 : 81 = 126$.

18. Да го поделиме производот во 501 група цифри, од кои 500 групи се со по 4 цифри и една со три цифри. Бидејќи $8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8$ завршува на цифрата 6, а $8 \cdot 8 \cdot 8$ завршува на цифрата 2 и како производ на броеви кои завршуваат на цифрата 6 повторно завршува на цифрата 6, заклучуваме дека производот $\underbrace{8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot \dots \cdot 8}_{2003 \text{ пати}}$ завршува на цифрата 2.

19. Бидејќи збирот на првите три броеви е еднаков на збирот на вториот, третиот и четвртиот број заклучуваме дека првиот и четвртиот број се еднакви. На ист начин заклучуваме дека вториот и петтиот број се еднакви на осмиот број, а седмиот и десеттиот број се еднакви на четвртиот број, т.е. таблицата има облик:

6	4		6	4		6	4		6
---	---	--	---	---	--	---	---	--	---

Според условот на задачата збирот на броевите запишани во секои три соседни полиња треба да е 15, па затоа третиот шестиот и деветтиот број се еднакви на 5. Конечно, пополнетата таблица е:

6	4	5	6	4	5	6	4	5	6
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

20. Бидејќи збирот на првите три броеви е еднаков на збирот на вториот, третиот и четвртиот број заклучуваме дека првиот и четвртиот број се еднакви. На ист начин заклучуваме дека седмиот и десеттиот број се еднакви на четвртиот број, т.е. таблицата има облик:

17			17			17			17	20	
----	--	--	----	--	--	----	--	--	----	----	--

Слично добиваме дека вториот, петтиот, осмиот и единаесеттиот број се еднакви, па затоа таблицата има облик:

17	20		17	20		17	20		17	20	
----	----	--	----	----	--	----	----	--	----	----	--

Таблицата содржи дванаесет полиња, односно 4 групи од по три соседни полиња кај кои според условот на задачата збирот на броевите е ист. Бидејќи збирот на сите броеви е еднаков на 200 добиваме дека збирот

на броевите во секоја од овие 4 групи е $200:4=50$. Според тоа, во празните полиња треба да го запишеме бројот $50-(17+20)=13$. Конечно, пополнетата таблица е:

17	20	13	17	20	13	17	20	13	17	20	13
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

21. Првата, четвртата и седмата колона се еднакви, а истото важи и за втората, петтата и осмата колона, како и за третата и шестата колона (зошто?). Слично, првиот и четвртиот ред се еднакви. Ако се искористат претходните заклучоци ја добиваме табелата.

2	5	5	2	5	5	2	5
4	7	1	4	7	1	4	7
6	0	6	6	0	6	6	0
2	5	5	2	5	5	2	5

22. Ако го искористиме наведеното својство за бројот запишан во централното поле добиваме $(14+20):2=17$. Според тоа, збирот на броевите во секој ред, колона или дијагонала е $14+20+17=51$.

16	15	20
21	17	13
14	19	18

Сега лесно го дополнуваме дадениот магичен квадрат и го добиваме квадратот даден на цртежот десно.

23. Од условот на задачата следува дека збирот на броевите во секој ред, секоја колона и секоја дијагонала е

$$16+10+4=30.$$

Според тоа,

$$A = 30 - (16 + 3) = 11$$

$$E = 30 - (10 + 3) = 17$$

$$B = 30 - (11 + 10) = 9$$

$$C = 30 - (16 + 9) = 5$$

$$A + B + C + E = 11 + 9 + 5 + 17 = 42.$$

24. Јасно, секој ред и секоја колона мора да ги дополниме со броевите 2 и 3. Бидејќи во квадратчето на едната дијагонала е запишан бројот 1, останатите две квадратчиња треба да ги дополниме со броевите 2 и 3. На другата дијагонала не е пополнето ниту едно квадратче. Затоа во ниту едно од овие квадратчиња не можеме да го запишеме бројот 3, што значи во овие квадратчиња треба да го запишеме бројот 2. Сега лесно можеме да ја дополниме таблицата (види цртеж).

3	1	2
1	2	3
2	3	1

25. Не. Ако собираме по колони, тогаш добиваме дека збирот на сите запишани броеви во таблица е $3 \cdot 15 = 45$. Од друга страна, ако собираме по редици добиваме дека збирот на сите броеви запишани во таблицата е $13 + 17 + 18 = 48$, што не е можно.

26. Бидејќи

$$(4 + 19 + 13) : 3 = 12,$$

$$(15 + 7 + 23) : 3 = 15,$$

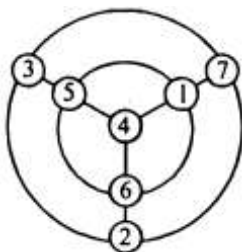
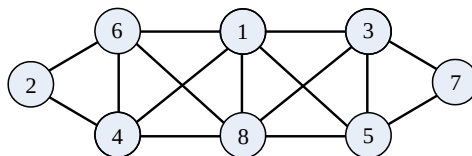
$$(14 + 25 + 12) : 3 = 17,$$

тоа мора да важи и во последната колона од табелата. Според тоа,

$$x = (8 + 16 + 15) : 3 = 13.$$

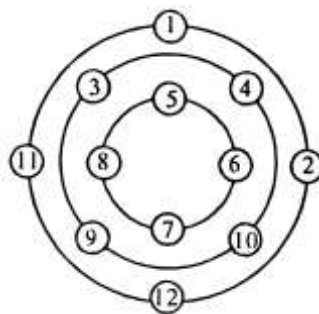
27. Последователно, по запишување на бараните броеви се добива низата броеви 3, 9, 1, 8, 4, 7, 2, 6 и 5.

28. Едно од можните решенија е дадено на цртежот.



29. Збирот на броевите од 1 до 7 е 28. Бидејќи збиравите на броевите запишани на кружниците мора да се еднакви, а имаме две кружници заклучуваме дека во централното кругче треба да запишеме парен број. Но, збиравите на броевите запишани на радиусите мора да се еднакви, па затоа мора да се еднакви и збиравите на радиусите без бројот запишан во централното кругче. Вакви збирови имаме три. Според тоа, кога од бројот 28 го извадиме бројот запишан во централното кругче добиениот број мора да се дели со 3. Меѓу броевите $28 - 2 = 26$, $28 - 4 = 24$ и $28 - 6 = 22$ единствено бројот 24 се дели со 3. Значи, во централното кругче треба да го запишеме бројот 4.

Според тоа, збирот на броевите запишани на кружниците и на радиусите е 12. Значи, на секој од радиусите треба да запишеме уште по два броја чиј збир е еднаков на 8. Јасно, броевите 1 и 7, 5 и 3, 2 и 6 се наоѓаат на



исти радиуси. Но, броевите 6 и 7 мора да се наоѓаат на различни кружници, што важи и за броевите 5 и 7. Конечно, на едната кружница се наоѓаат броевите 1, 5 и 6, а на другата броевите 2, 3 и 7, (види цртеж).

30. Збирот на сите запишани броеви е еднаков на

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12=78.$$

Значи, збирот на броевите запишани во кружчињата на секоја од кружниците е еднаков на $78:3=26$. Ако искористиме дека

$$1+12=2+11=3+10=4+9=5+8=6+7=13$$

и фактот дека на секоја кружница се наоѓаат по четири кружчиња, можеме да го добиеме едниот од можните распореди прикажан на цртежот десно.

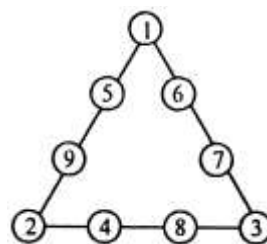
31. а) Од условот на задачата добиваме дека

во празните кружчиња на секоја од страните на триаголникот треба да запишеме по два од броевите 4, 5, 6, 7, 8 и 9 така што збиравите на страните се еднакви. Бидејќи броевите 1, 2 и 3 се наоѓаат во темињата на триаголникот тие во трите зборови на броевите на страните ќе се јават два пати. Значи, збирот на броевите запишани на секоја страна ќе биде

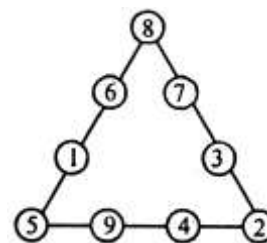
$$(1+2+3+4+5+6+7+8+9+1+2+3):3=17.$$

Според тоа, во празните кружчиња треба запишеме броеви чии зборови се еднакви на 12, 13 и 14. Еден можен распоред е даден на цртежот а). Дали постои и друг распоред кој се разликува од дадениот?

б) Со слични размислувања како во решението под а) можеме да го добиеме распоредот прикажан на цртежот б).



а)

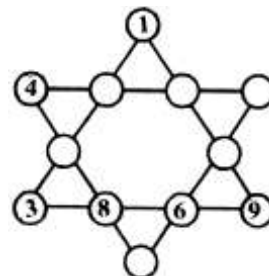


б)

32. Секој од броевите од 1 до 12 лежи на две прави. Имаме шест прави со еднакви зборови. Ако ги собереме овие зборови, тогаш ќе добиеме збир во кој секој од броевите од 1 до 12 се јавува двапати, т.е. добиениот збир е

$$2 \cdot (1+2+3+4+5+\dots+12)=156.$$

Значи, збирот на броевите на секоја права



Цртеж 2

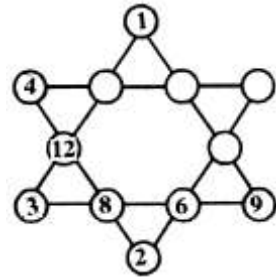
е $156:6=26$. Според тоа, четвртиот број на правата која ги содржи броевите 6, 8 и 9 е $26-(6+8+9)=3$ (цртеж 2).

Збирот на броевите на правата што ги содржи броевите 1 и 3 може да биде 26, ако на правата се разместат броевите 10 и 12 (само тие броеви даваат збир $26-(1+3)=22$). Ако бројот 10 се наоѓа на правата на која лежат броевите 4 и 8, тогаш четвртиот број на оваа права е

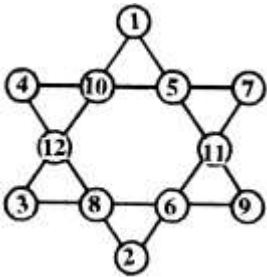
$$26-(4+8+10)=4,$$

што не е можно бидејќи овој број ќе се повтори. Значи, на оваа права се наоѓа бројот 12. Четвртиот број на оваа права е $26-(4+8+12)=2$, цртеж 3.

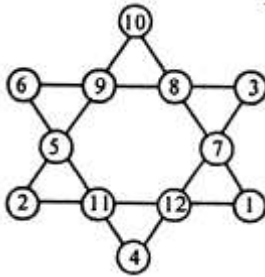
Досега не е разместен бројот 11. Ако тој лежи на правата што ги содржи броевите 4 и 10, тогаш четвртиот број на оваа права е бројот $26-(4+10+11)=1$, што не е можно. Значи, бројот 11 лежи на правата која што ги содржи броевите 1 и 9. Четвртиот број на оваа права е бројот $26-(1+9+11)=5$. Последниот неразместен број е $26-(2+6+11)=7$. Конечно, решението на задачата е дадено на цртеж 4.



Цртеж 3



Цртеж 4

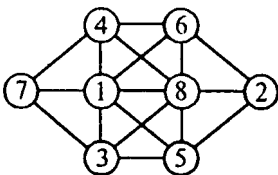
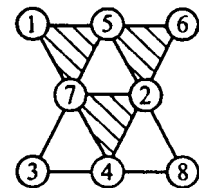


Цртеж 5

Забелешка. Сигурно се запрашавте дали ако професорот Рампо започнел поинаку може да се состави магична звезда која суштински ќе се разликува од веќе добиената. Одговорот на ова прашање е позитивен.

Имено, на цртеж 5 е дадена уште една звезда која суштински се разликува од дадената.

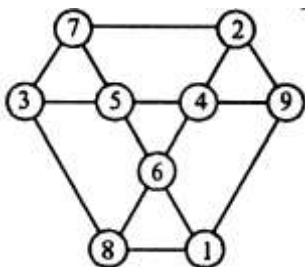
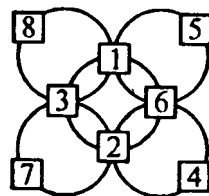
33. Едно од можните решенија е дадено на цртежот десно. Обидете се да ја откриете постапката според која е добиен дадениот распоред.



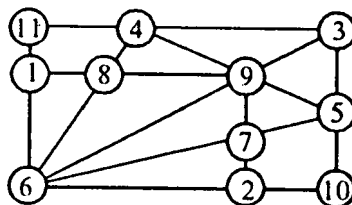
34. Едно од можните решенија е дадено на цртежот лево. Обидете се да најдете друго решение кое значително ќе се разликува од даденото. Дали навистина другите решенија значително се

разликуваат од даденото?

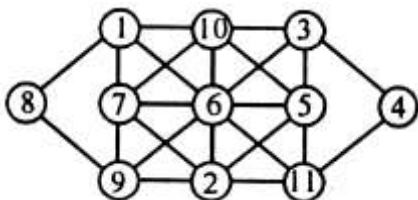
35. Јасно, збирот на секои два броја кои се запишани во квадратчињата на внатрешната кружница треба да е еднаков на бројот запишан наспроти нив во квадратчето на надворешна кружница. Затоа во квадратчињата кои се наоѓаат на внатрешната кружница не можат да се запишат броевите 7 и 8. Со слични размислувања го добиваме распоредот прикажан на цртежот десно.



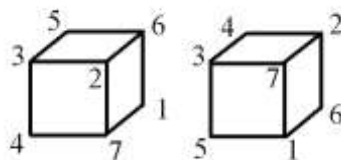
36. Бараниот распоред е даден на цртежот лево. Обидете се да ја откриете постапката според која е добиен овој распоред.



37. Бараниот распоред е даден на цртежот десно. Обидете се да ја откриете постапката според која е добиен овој распоред.



38. Бараниот распоред е даден на цртежот лево. Обидете се да ја откриете постапката според која е добиен овој распоред.



39. На централното место, каде во наведениот пример е бројот 1, можеме да го ставиме секој од дадените броеви освен бројот 4. Броевите кои два пати се сметаат (во наведениот пример броевите 2, 3, 4) треба да дадат збир 12. Тогаш останатите броеви лесно се распоредуваат. На цртежот се дадени решенија во случај кога централните броеви се 2 и 7. (Објаснете зошто е важен збирот 12 и зошто централниот број не може да биде 4.)

40. Едно од можните решенија е

$$\begin{array}{ll} 3+3-3=3, & (4+4+4):4=3, \\ (5-5-5):5=3 & 6:6+6:6+6:6=3, \\ (7+7+7+7):7-7:7=3 & (8+8+8):8+8-8-8=3 \\ (9+9+9+9):9-9:9+9-9=3. \end{array}$$

41. Цифрата на десетките на двоцифрениот множител е парна и може да биде 2 или 4. Понатаму, цифрата на единиците на двоцифрениот множител мора да биде непарна и може да биде 1 или 3. Во случај да е цифрата на десетките 2, следува дека четирицифрениот множител започнува со 27, што понатаму не е можно да се добие бараниот резултат (зошто?). Значи, цифрата на десетките на двоцифрениот множител е 4. Сега лесно се гледа дека четирицифрениот множител започнува со 13, а под цифрата 8 е цифрата 4. Тоа значи дека цифрата на единиците на двоцифрениот множител е 3. Следува дека под 4 е цифрата 1, а под 0 е цифрата 5. На крајот добиваме резултат 59555.

$$\begin{array}{r} 1385 \cdot 43 \\ \hline 5540 \\ + \quad 4155 \\ \hline 59555 \end{array}$$

42. Бидејќи 97 не се дели со 2,3,4,5,6,7,8 и 9 од

$$\begin{array}{r} **.* ** \\ \hline ** \\ 97 \\ \hline 1*** \end{array}$$

добиваме

$$\begin{array}{r} 97 \cdot 1* \\ \hline ** \\ 97 \\ \hline 1*** \end{array}$$

Но, бидејќи $2 \cdot 97 > 100$ добиваме

$$\begin{array}{r} 97 \cdot 11 \\ \hline 97 \\ 97 \\ \hline 1067 \end{array}$$

43. Кога првиот множител се помножи со 4 се добива производ 154^* , што значи дека првиот множител е:

$$\begin{array}{r} 154^* : 4 = 38_ \\ \underline{12} \\ 34 \\ \underline{32} \\ 2^* \end{array}$$

при што на местото на цртичката може да стои 5, 6 или 7, во зависност од тоа дали на местото на ѕвездичката стои цифрата 0, 4 или 8. Меѓутоа, бидејќи производот $38_ \cdot 346$ завршува на цифрата 2, на местотот на цртичката треба да стои цифрата 7 (имено $6 \cdot 7 = 42$, а $5 \cdot 6 = 30$ и $6 \cdot 6 = 36$).

Конечно, дешифрираното множење е: $387 \cdot 346 = 133902$.

44. Цифрата на единиците во множителот 23^* очигледно е 6, бидејќи само $1 \cdot 4 = 4$ и $6 \cdot 4 = 24$, но цифрата 1 не е можна бидејќи во тој случај производот $**4 \cdot 1$ не е четирицифрен број. Во множителот $**4$ цифрата на десетките тогаш е 0 или 5, бидејќи $6 \cdot 4 = 24$ или $6 \cdot 54 = 324$. Ако цифрата на десетките е 0, тогаш добиваме $*04 \cdot 2 = 1^*08$ и $*04 \cdot 3 = 1^*12$, па тогаш е

$$\begin{array}{r} *04 \cdot 23^* \\ \hline **24 \\ 1^*12 \\ \hline 1^*08 \\ \hline *1^**44 \end{array}$$

Очигледно, во собирокот 1^*08 непознатата цифра мора да биде парна (множиме со 2) и собрана со 1 и преносот мора да завршува на 1. Значи непознатата цифра е 0. Тогаш во множителот $*04$ непознатата цифра е 5, па конечно бараниот производ е $504 \cdot 236 = 118944$.

Во множителот $**4$ цифрата на десетките не може да биде 5, бидејќи тогаш го добиваме производот $954 \cdot 236$ кој не го задоволува условот на задачата, втората цифра во производот 225144 е 2, а мора да е 1.

45. Цифрата на стотките на трицифрениот број мора да биде цифрата 2. Бидејќи $240 \cdot 15 = 3600$, цифрата на стотките на четирицифрениот број може да биде 6 или 7. Единствен содржател на бројот 15 кој на местото на десетките има цифра 9 е $90 = 15 \cdot 6$. Затоа во трицифрениот број цифрата на единиците е 6, а во четирицифрениот број цифрата на

единиците е еднаква на 0. Тогаш цифрата на стотките во четирицифрениот број мора да е 6. Конечно, $246 \cdot 15 = 3690$.

46. Првата цифра на количникот е 5, бидејќи 7 помножен само со 5 дава број кој завршува со цифрата 5. Втората цифра на количникот е 3 бидејќи 7 помножен само со 3 дава број чија последна цифра е 1. Значи

$$**** \cdot 7 = 53$$

$$\begin{array}{r} **5 \\ \hline \end{array}$$

$$**$$

$$\begin{array}{r} *1 \\ \hline \end{array}$$

$$00$$

Бидејќи $*7 \cdot 5$ е трицифрен број, на местото на свездичката во делителот не може да стои цифра помала од 2, а бидејќи $*7 \cdot 3$ е двоцифрен број на местото на свездичката во делителот не може да стои цифра поголема од 2. Значи, делителот е 27, па за деленикот добиваме $**** = 27 \cdot 53 = 1431$. Конечно, имаме

$$1431 : 27 = 53$$

$$\begin{array}{r} 135 \\ \hline \end{array}$$

$$81$$

$$\begin{array}{r} 81 \\ \hline \end{array}$$

$$00$$

47. Цифрите на бараниот број ги бараме според шемата

****	***8	**78	*878	8878
<u>123</u>	<u>123</u>	<u>123</u>	<u>123</u>	<u>123</u>
.....****	***4	**34	*634	6634
.....***	**6	*56	756	756
.....**	*8	78	78	78
<u>1994</u>	<u>1994</u>	<u>1994</u>	<u>1994</u>	<u>1994</u>

во која цифрите на бараниот број се наоѓаат еднозначно. Според тоа секој број кој завршува на 8878 при множење со 123 завршува на 1994. Значи, бараниот број е 8878.

2.5.2. БРОЕВИ И ЦИФРИ

1. Одговор. а) 203567 и 876532,
 б) 20002 и 888777.

2. Трицифрени броеви чиј збир на цифри е еднаков на 4 се:
400, 310, 301, 130, 103, 220, 202, 211, 121 и 112.

3. Ако збирот на цифрите на четирицифрениот број е 3, тогаш тој мора да е запишан со една од следните групи цифри 3,0,0,0; 2,1,0,0 или 1,1,1,0. Според тоа, такви четирицифрени броеви се: 3000, 2001, 2010, 2100, 1002, 1020, 1200, 1011, 1101 и 1110.

Значи, постојат десет четирицифрени броеви чиј збир на цифри е 3.

4. Бидејќи

$$4=1\cdot1\cdot1\cdot1\cdot4=1\cdot1\cdot1\cdot2\cdot2$$

бараните броеви се

11114, 11141, 11411, 14111, 41111, 11122, 11212, 12112,
21112, 21121, 21211, 22111, 11221, 12211, 12121.

Значи, 15 броеви го задоволуваат бараното својство.

5. Ако збирот на цифрите на четирицифрениот број е еднаков на 4, тогаш тој може да биде запишан со една од следните групи цифри: 1,1,1,1; 1,1,2,0; 2,2,0,0; 1,3,0,0; 4,0,0,0. Четирицифрени броеви запишани со овие групи цифри се:

1111, 2110, 2101, 2011, 1201, 1210, 1120, 1021, 1102, 1012,
2200, 2020, 2002, 1300, 1030, 1003, 3100, 3010, 3001, 4000.

Значи, има вкупно 20 четирицифрени броеви чиј збир на цифри е еднаков на 4.

6. Важи $42 = 6 \cdot 7 = 2 \cdot 3 \cdot 7$. Затоа бројот 42 може да се добие како производ на најмногу четири едноцифрени броеви (цифри) на еден од следните начини:

$42 = 6 \cdot 7$ и во овој случај броевите 67 и 76 го задоволуваат условот на задачата,

$42 = 1 \cdot 6 \cdot 7$ и во овој случај броевите 167, 176, 617, 671, 716 и 761 го задоволуваат условот на задачата,

$42 = 1 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 7$ и во овој случај броевите 1167, 1176, 1617, 1671, 1716 и 1761 го задоволуваат условот на задачата,

$42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$ и во овој случај броевите 237, 273, 327, 372, 723 и 732 го задоволуваат условот на задачата, и

$42 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$ и во овој случај броевите 1237, 1273, 1327, 1372, 1723 и 1732 го задоволуваат условот на задачата.

7. Не, бидејќи дадените броеви се непарни. Имено, збир на три непарни броеви е непарен број, а бројот 120 е парен број.

8. За едноцифрените и двоцифрените броеви ќе употребиме

$$9 \cdot 1 + 90 \cdot 2 = 189$$

цифри. За трицифрените броеви ќе употребиме уште

$$(421 - 99) \cdot 3 = 966$$

цифри. Според тоа, за да ја нумерираме целата книга ќе употребиме

$$189 + 966 = 1155$$

цифри.

9. За нумерирање на страниците запишани со трицифрени броеви се искористени

$$1224 - (9 \cdot 1 + 90 \cdot 2) = 1035$$

цифри. Значи, бројот на страниците нумерирани со трицифрени броеви е

$$1035 : 3 = 345.$$

Според тоа, книгата има $9 + 90 + 345 = 444$ страници.

10. Од прва до деветта страна се употребени 9 цифри. Останатите $129 - 9$ цифри се употребени за означување на $120 : 2 = 60$ страни, а на секоја страна е запишан по еден двоцифрен број. Значи книгата имала $9 + 60 = 69$ страни. Според тоа, книгата имала 35 листа, а на последната страна нема број.

11. Едноцифрените парни броеви 2, 4, 6 и 8 ги нумерираме со 4 цифри. Двоцифрени парни броеви има 45 и нив ги нумерираме со 90 цифри. За трицифрените парни броеви 100, 102, 104, 106, 108 и 110 се искористени 18 цифри. Значи, за нумерирање на сите парни страници ни требаат $4 + 90 + 18 = 112$ цифри.

12. Едноцифрени и двоцифрени парни страници има $98:2=49$. За нив се искористени $4+2\cdot 45=94$ цифри. Останатите $1234-94=1140$ цифри се искористени за нумерирање на трицифрените броеви на страниците. Такви страници има $1140:3=380$. Бројот на листовите е еднаков на бројот на парните страници, што значи дека книгата имала $4+45+380=429$ листови.

13. Бројот 134 е помал од 142, а 143 е бројот со кој почнува книгата, па затоа книгата може да завршува со страна 314, 341, 413 или 431. Ако завршува на 431 страница, тогаш книгата има $431-142=289$ страници, што е непарен број. Но тоа не е можно.

Ако завршува на 413 страница, тогаш таа би имала $413-142=271$ страници, што не е можно. Исто, ако завршува на 341 страница, тогаш таа би имала $341-142=199$ страници, што исто така не е можно.

Ако завршува на 314 страница, тогаш има $314-142=172$ страници и $172:2=86$ листа. Значи книгата има 86 листа.

14. Марионка отчукала

$$219-(9\cdot 1+90\cdot 2)=30$$

цифри за трицифрените броеви. Според тоа, отчукала $30:3=10$ трицифрени броеви.

За трицифрените броеви употребила 11 единици, за двоцифрените броеви и требале 19 единици и една единица за едноцифрените броеви. Значи, употребила $11+19+1=31$ единици.

Слично, кај трицифрените броеви Марионка употребила една двојка, кај двоцифрените броеви употребила 19 двојки и една двојка за едноцифрените броеви. Значи, Марионка употребила вкупно $1+19+1=21$ двојки.

15. Бидејќи имаме девет едноцифрени природни броеви за запишување на истите се потрошени првите 9 цифри. За двоцифрените броеви Симеонка потрошила уште $90\cdot 2=180$ цифри. Досега се потрошени вкупно $180+9=189$ цифри. Останатите $1995-189=1806$ цифри се искористени за запишување на трицифрени природни броеви. Со овие цифри можат да се запишат $1806:3=602$ трицифрени броеви. Според тоа, цифрата која се наоѓа на 1995-то место е еднаква на цифрата на единиците на бројот $9+90+602=701$, т.е. тоа е цифрата 1.

16. Од десниот прстен добиваме дека

$$C = 90 - (7 + 9 + 11 + 39 + 14) = 10.$$

Од долниот прстен добиваме дека

$$B = 90 - (10 + 14 + 31 + 23 + 10) = 2$$

Од левиот прстен добиваме дека

$$D = 90 - (2 + 10 + 30 + 16 + 15) = 17.$$

Од горниот прстен добиваме дека

$$A = 90 - (1 + 7 + 10 + 2 + 15) = 55.$$

17. Најмалата можна вредност на сумата од нумерираните броеви на неискинатите страници е $1 + 2 + 3 + \dots + 40 = 820 > 800$. Следува, не е можно оваа сума да биде 800.

18. Најголемиот број од петтата стотка е бројот 499, а најмалиот број запишан со цифрите 5,1 и 2 е бројот 125. Нивната разлика изнесува $499 - 125 = 374$. Значи, бараниот број е $374 : 2 = 187$.

19. Кога намаленикот ќе се зголеми за 39, а намалителот за 49, тогаш разликата се намалува за 10. Значи, разликата ќе биде

$$3879 - 10 = 3869.$$

20. Ако едниот број се намали за 89, а другиот се зголеми за 67, тогаш нивниот збир се намалува за $89 - 67 = 22$ и тој ќе изнесува $1348 - 22 = 1326$. Но, тоа е збир на два еднакви броја, што значи после намалувањето на едниот и зголемувањето на другиот се добива бројот $1326 : 2 = 663$. Конечно, првиот број е еднаков на $663 + 89 = 752$, а вториот на $663 - 67 = 596$.

21. Збирот на дадените броеви е $54863 + 30608 = 85471$, а нивната разлика е $54863 - 30608 = 24255$. Значи, за да се добие разликата збирот треба да се намали за $85471 - 24255 = 61216$.

22. Ако намалителот b и намаленикот a ги намалиме за 995, разликата останува непроменета, а бидејќи c е намален за 995, вредноста на изразот $a - b + c$ ќе се намали за 995 и тој ќе има вредност $1995 - 995 = 1000$.

23. Третиот број го добиваме ако од збирот на трите броеви го одземе збирот на првиот и вториот број. Според тоа, третиот број е 230-

$80=150$. На ист начин за вториот број добиваме $230-180=50$. Конечно, првиот број е $230-(150+50)=30$.

24. I начин. Бидејќи средниот број на тие три непарни броеви е за 2 поголем од помалиот, а за 2 помал од поголемиот, збирот на броевите е еднаков на производот на бројот 3 и средниот број. Значи, средниот број е $105:3=35$. Конечно, првиот број е $35-2=33$, вториот број е 35 и третиот број е $35+2=37$.

II начин. Цифрите на единиците на три непарни последователни природни броеви можат да бидат: 1,3,5; 3,5,7; 5,7,9; 7,9,1 и 9,1,3, па затоа збирот на цифрите на единиците на три непарни природни броеви може да биде 9, 15, 21, 17 и 13, соодветно. Како што можеме да видиме цифрата на единиците на збирот на три непарни природни броеви може да биде 5 само ако цифрите на единиците на броевите се 3,5 и 7.

Од досега изнесеното добиваме дека збирот на десетките на непарните природни броеви е еднаков на $105-(3+5+7)=90$. Бидејќи се работи за три последователни непарни природни броеви заклучуваме дека цифрите на десетките на овие броеви се 3, 3 и 3.

Конечно, броевите се 33, 35 и 37.

25. Ако Вера собрала 4 последователни непарни броеви, тогаш вториот е за 2 поголем од првиот, третиот е за 4 поголем од првиот и четвртиот е за 6 поголем од првиот. Значи, четирикратната вредност на првиот број е $8040-(2+4+6)=8028$, а првиот број е $8028:4=2007$. Според тоа, Вера го собрала броевите 2007, 2009, 2011 и 2013.

Забелешка. Оваа задача не може едноставно да се реши како на вториот начин од претходната задача, (зошто?).

26. Ако со x го означиме најмалиот од бараните броеви, тогаш ја добиваме равенката $x+(x+1)+(x+2)+(x+3)+(x+4)+(x+5)=1275$, односно равенката $6x+15=1275$ или $6x=1260$, чие решение е $x=210$. Бараните броеви се 210, 211, 212, 213, 214 и 215.

27. Бидејќи секој следен број е поголем од претходниот за 125, вториот број е поголем од првиот за 125, третиот број е поголем од првиот за 250, четвртиот број е поголем од првиот за 375 и петтиот број е поголем од првиот за 500. Бројот

$$7730-(125+250+375+500)=7730-1250=6480$$

е петпати поголем од најмалиот број, па затоа најмалиот број е

$$6480:5=1296.$$

Значи, бараните броеви се 1296, 1421, 1546, 1671 и 1796.

28. Нека првиот број го означиме со x , вториот е $3x$ а третиот $9x$.

Од условот на задачата

$$x + 3x + 9x = 63635,$$

$$13x = 63635,$$

$$x = 4895.$$

Значи, првиот број е 4895, вториот 14685 а третиот 44055.

29. Ако a, b, c и d се првиот, вториот, третиот и четвртиот број соодветно, од условот на задачата имаме

$$a + b + c + d = 100.$$

Бидејќи $a + c + d = 65$, добиваме дека $b + 65 = 100$, односно $b = 35$. Од друга страна, од $a + b + c = 78$, добиваме $78 + d = 100$, односно $d = 22$. Бидејќи, $a + 10 = b$, добиваме $a = 35 - 10 = 25$. Сега е јасно дека $c = 18$.

30. Нека x е првиот број. Ако на првиот број му додадеме 213, го добиваме бројот $x + 213$. Тоа значи дека $x + 213$ е вториот број намален за 387, па значи вториот број $x + 213 + 387 = x + 600$. Според тоа,

$$x + x + 600 = 12392,$$

од каде наоѓаме $x = 5896$. Вториот број е $5896 + 600 = 6496$. Значи, бараните броеви се 5896 и 6496.

31. Ако ги собреме трите равенки добиваме $2(a + b + c) = 1206$, т.е. $a + b + c = 603$. Од равенствата $a + b = 332$ и $a + b + c = 603$ следува дека $332 + c = 603$ од каде наоѓаме $c = 271$. Понатаму, од равенствата $a + c = 408$ и $a + b + c = 603$ следува дека $408 + b = 603$ од каде добиваме $b = 195$ и од равенствата $b + c = 466$ и $a + b + c = 603$ следува дека $466 + a = 603$ од каде $a = 137$.

32. Поголемиот број е еднаков на половина од збирот

$$1994 + 680 = 2674,$$

т.е. на $2674:2=1337$, а помалиот број е еднаков на половина од разликата $1994-680=1314$, т.е. тој е еднаков на $1314:2=657$.

33. Разликата $152-52=100$ е десет пати поголема од првиот број, па затоа првиот број е еднаков на $100:10=10$. Вториот број е $52-10=42$.

34. Збирот на двата броја е $2\cdot 2020=4040$. Ако едниот број е четири пати поголем од другиот, тогаш нивниот збир е петпати поголем од помалиот број. Значи помалиот број е $4040:5=808$, а поголемиот број е $4\cdot 808=3232$.

35. Најголемиот шестцифрен број составен од дадените цифри, употребувајќи ја секоја цифра точно еднаш е бројот 974310, а најмалиот е бројот 103479. Кога нивната разлика

$$974310 - 103479 = 870831,$$

ќе ја намалиме 9 пати го добиваме бројот

$$870831:9 = 96759.$$

36. Најмалиот непарен четирицифрен број чиј збир на цифри е 4 е 1003, а најголемиот парен трицифрен број чиј производ на цифри е 16 е 812. Нивната разлика е 191.

37. Имаме:

$$867 - (875:7) = 867 - 125 = 742.$$

38. Ако намаленикот го зголемиме петпати, тогаш разликата се зголемува за четирикратната вредност на намаленикот. Значи, намаленикот е:

$$(1257-41):4=1216:4=304,$$

а намалителот е:

$$304-41=263.$$

39. Јасно, третиот број е најмал, првиот е седум пати поголем од него, а вториот е 14 пати поголем од третиот број. Значи, збирот е $1+7+14=22$ пати поголем од третиот број.

Според тоа, третиот број е $880:22=40$, првиот број е $7\cdot 40=280$ и вториот број е $14\cdot 40=560$.

40. Бројот 827 собран со остатокот на вториот број еднаков е на бројот 1389 собран со остатокот на првиот број. Бидејќи броевите се еднакви разликата на остатоците е еднаква на разликата на броевите 1389 и 827, т.е. на $1389-827=562$. Но, остатокот на вториот број е трипати поголем од остатокот на првиот број, па затоа остатокот на првиот број е $562:2=281$. Остатокот на вториот број е $3 \cdot 281=843$. Броевите се $843+827=1670=1389+281$.

41. Бидејќи количникот на двата броја е 37, првиот број е 37 пати поголем од вториот број, па затоа нивната разлика е 36 пати поголема од вториот број. Но, разликата е 4176, па затоа вториот број е $4176:36=116$, а првиот број е $37 \cdot 116=4292$.

42. Бидејќи остатокот е 16, делителот мора да е поголем од 16 и $2011-16=1995$ е делив со двоцифрениот број. Заради тоа што $1995=3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19$, бараните броеви се $3 \cdot 7=21$, $3 \cdot 19=57$, $5 \cdot 7=35$, $5 \cdot 19=95$ и 19. Значи постојат 5 двоцифрени броеви.

43. Ако на двоцифрениот број од левата страна му се допише цифрата 7, тој се зголемува за 700 и е 26 пати поголем од почениот број. Според тоа, 700 е 25 пати поголем од почетниот број. Значи, почетниот број е $700:25=28$.

44. Разликата меѓу добиениот производ и производот кој Мирко требало да го добие доколку не ја направел споменатата грешка е $1190-1085=105$ и таа е еднаква на трикратната вредност на множителот кај кој нема грешка во запишувањето. Значи, вториот множител е $105:3=35$. Првиот множител е $1190:35=34$.

45. Од условот имаме дека кога првиот број ќе се намали за $4-1=3$, тогаш производот се намалил за $600-525=75$. Значи, тој број е $75:3=25$. Вториот број ќе го добиеме како $600:25=24$. Значи, ученикот ги множел броевите 25 и 24.

46. Разликата меѓу двата производи е $3310-1986=1324$ и таа е еднаква на четирикратната вредност на множителот кој останал непроменет. Значи, непроменетиот множител е $1324:4=331$.

За множителот кој е зголемен за 4 добиваме $1986:331=6$.

47. При множењето Илија во вториот множител на местото на цифрата 3 ја запишува цифрата 8 и притоа ќе добие резултат кој од бараниот се разликува за $5267 \cdot (80-30) = 263350$.

48. Ако едниот множител се зголеми за 8, тогаш производот се зголемува за $3059-1995=1064$. Значи, првиот множител е $1064:8=133$, а вториот множител е $1995:133=15$.

49. Ако едниот множител се намали за 6, тогаш производот се намалува за $2250-1800=450$. Значи, едниот множител е $450:6=75$. Другиот множител е $2250:75=30$.

50. Задачата ќе ја решиме тргнувајќи од назад. Пред последното делење го имаме бројот $19 \cdot 13=247$. Сега од овој број ќе ја избришеме цифрата 7 и го добиваме бројот 24. Бројот 24 го помножиме со 9 при што го добиваме бројот $9 \cdot 24=216$, од кој ќе ја избришеме цифрата 6. Конечно бараниот број е 21.

51. Ако вториот број е b , тогаш со намалување на првиот број за 2 производот се намалува за $2b$. Според тоа,

$$2b = 2652 - 2244 = 408,$$

т.е. $b = 204$. Значи, првиот број е

$$a = 2652 : 204 = 13.$$

52. Нека броевите се a и b . Ако бројот a се намали за 6, тогаш производот ќе се намали за $6a$. Но производот се намалил за $2250-1800=450$, па затоа $6a=450$, т.е. $a=75$. Значи, $75b=2250$, т.е. $b=2250:75=30$.

53. Ако замислениот број е a , после множењето Сашо ги добил броевите $7a$ и $16a$. Според тоа, $7a+16a=230$, од каде наоѓаме $a=10$.

54. Ако x е делителот, тогаш деленикот е $11x$. Кога деленикот ќе се зголеми за 1650, количникот се зголемува седум пати и тој изнесува 77. Бидејќи делителот останува ист добиваме $11x+1650=77x$, т.е. $66x=1650$ или $x=1650:66=25$.

55. Задачата ќе ја решиме со враќање наназад. По извршените операции ќе добиеме $5+10=15$, по делење со 5 имаме $15 : 5 = 3$, по множење со 11 имаме $3 \cdot 11 = 33$ и по собирање со 23, го добиваме бројот $23+33=56$.

56. Ќе сметаме одназад. После множењето со 35 Ана го добила бројот $28769 - 2834 = 25935$. Понатаму, со 35 го помножила бројот $25935 : 35 = 741$. Конечно, Ана го замислила бројот $741 - 21 = 720$.

57. Збирот на намалителот и разликата е еднаков на намаленикот, па затоа збирот на намаелникот, намалителот и разликата е двапати поголем од намаленикот. Според тоа, намаленикот е $a = 76 : 2 = 38$. Ако намалителот е b и разликата е d , тогаш по услов $d = b + 6$ и како $b + d = a = 38$ добиваме $2b + 6 = 38$, т.е. $b = 16$.

58. **Одговор.** Броевите се 37 и 54.

59. **Одговор.** Првиот број е 442, вториот 446, третиот 222 и четвртиот 888.

60. Од $999 = 9 + 990 = 9 + 10 \cdot 99$ следува одговорот: 10 пати.

61. Со изоставување на нулата на местото на единиците добиваме број кој е десет пати помал од дадениот. Да го означиме со x . Според тоа, бројот x е за $9x$ помал од дадениот број, што според условот е еднакво на 1998. Од $1998 = 9x$ наоѓаме $x = 222$, т.е. дадениот број е 2220.

62. **Одговор.** Бараниот број е 80560.

63. Нека бараниот трицифрен број е x . Тогаш $\overline{3x} = 26 \cdot x$ и последователно добиваме

$$3000 + x = 26x$$

$$3000 = 26x - x$$

$$25x = 3000$$

$$x = 120,$$

т.е. бараниот трицифрен број е 120.

64. а) На местото на првата ѕвездичка можеме да ги ставиме сите 10 цифри, а на местото на втората ѕвездичка исто толку цифри. Бидејќи на

секоја запишана цифра на местото на првата ѕвездичка и соодветствуваат сите цифри запишани на местото на втората ѕвездичка заклучуваме дека во случајот можеме да запишеме $10 \cdot 10 = 100$ четирицифрени броеви.

б) На местото на првата ѕвездичка можеме да ги ставиме сите цифри освен 0, т.е. девет различни цифри. На местото на втората цифра можеме да ги ставиме сите десет цифри. Според тоа, можеме да запишеме $9 \cdot 10 = 90$ четирицифрени броеви.

65. Во секоја стотка, освен во петтата, трицифрени броеви кај кои цифрата 4 е на местото на цифрата на единиците има 9, а оние кои ја имаат цифрата 4 само на местото на десетките се 9. Во петтата стотка броеви кои двапати или трипати ја содржат цифрата 4 се 19, па затоа броеви со една цифра 4 во декадниот запис се $100 - 19 = 81$. Значи, вкупно трицифрени броеви кај кои во нивниот декаден запис цифрата 4 се среќава точно еднаш се $9 \cdot 8 + 9 \cdot 8 + 81 = 225$.

66. За иста цифра на десетките во секоја стотка постои по еден таков број, т.е. вкупно 9 такви трицифрени броеви. Бидејќи на местото на десетките можат да се стават 10 различни цифри заклучуваме дека постојат $9 \cdot 10 = 90$ броеви со бараното својство.

67. Трицифрените броеви со бараното својство имаат исти цифри на стотки и единици. Според задача 60 такви броеви има 90.

68. Двоцифрени броеви има 90, па за нивно запишување ни се потребни $90 \cdot 2 = 180$ цифри. Трицифрени броеви има 900, па за нивно запишување ни се потребни $900 \cdot 3 = 2700$ цифри. Значи, вкупно ќе се употребат $180 + 2700 = 2880$ цифри.

69. I начин. а) Во бројот $****4$ на местото ѕвездичките може да стои било кој четирицифрен број, па значи дека има точно 9000 четирицифрени броеви, т.е. постојат точно 9000 петцифрени броеви кои завршуваат на цифрата 4.

б) Во бројот $6***6$ на местото на ѕвездичките може да стои било кој број од 000 до 999, а такви броеви има 1000. Значи, постојат 1000 броеви кои започнуваат и завршуваат на цифрата 6.

II начин. а) Во бројот $****4$ на местото на првата ѕвездичка можеме да ставиме било која од цифрите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 или 9, т.е.

имаме 9 можности, а на местото на секоја од останатите три свездички можеме да ја ставиме било која од цифрите 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 или 9, т.е. имаме по десет можности. Според тоа, постојат $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000$ броеви кои завршуваат на цифрата 4.

б) Слично, како под а), постојат $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$ петцифрени броеви кои почнуваат и завршуваат на цифрата 6.

70. За цифрата на стотките имаме 4 можности, и тоа 2, 4, 6, 8. За секоја од овие можности за цифрата на десетките имаме 10 можности, и тоа 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и за цифрата на единиците имаме 5 можности, и тоа: 1, 3, 5, 7, 9.

Значи, такви броеви вкупно се: $4 \cdot 10 \cdot 5 = 200$.

71. Првата цифра може да биде 2, 4, 6 или 8, втората цифра може да биде 0, 3, 6 или 9, а четвртата цифра може да биде 0 или 5. Според тоа, постојат $4 \cdot 4 \cdot 2 = 32$ броеви кои ги задоволуваат условите на задачата.

72. Најмалиот број има најмал можен број цифри. Во нашиот случај, бидејќи $6 \cdot 9 = 54 < 60$ е најголемиот можен збир на цифри на шестцифрен број, заклучуваме дека бараниот број не може да има 6 или помалку од 6 цифри. Според тоа, бараниот број мора да има најмалку 7 цифри. Условите на задачата ги исполнува бројот 7999998.

73. Имаме

$$\begin{aligned} [(1+2+3+\dots+54):3]:(3 \cdot 3:3 \cdot 3) &= \{[(1+54)+\dots+(27+28)]:3\}:(3 \cdot 3:3 \cdot 3) \\ &= [(\underbrace{55+55+\dots+55}_{27 \text{ пати}}):3]:(3 \cdot 3:3 \cdot 3) \\ &= (1485:3):(9:3 \cdot 3) = 495:(3 \cdot 3) \\ &= 495:9 = 55. \end{aligned}$$

74. За секој пар соседни двоцифрени броеви: 10, 11; 12, 13; 14, 15; 16, 17; 18, 19; итн. непарниот број е поголем од парниот за 1. Такви парови има $90:2=45$. Затоа збирот на непарните броеви е за $45 \cdot 1=45$ поголем од збирот на парните двоцифрени броеви.

75. Имаме

$$\begin{aligned} 1+2+3+\dots+1999+2000 &= (1+2000)+(2+1999)+(3+1998)+\dots+(1000+1001) \\ &= 1000 \cdot 2001 = 2001000. \end{aligned}$$

76. Нека најмалиот број е n . Тогаш последователните броеви може да ги запишеме како $n, n+1, n+2, \dots, n+39$. Нивниот збир е

$$n + n+1 + n+2 + \dots + n+38 + n+39 = 1940,$$

т.е. $40n + \frac{39 \cdot 40}{2} = 1940$, односно $n = 29$. Значи бараните броеви се 29, 30, 31, ..., 67, 68.

77. Ги формираме зборовите

$$1+1995; 3+1993; 5+1991; 7+1989; 9+1987; \dots; 997+999.$$

Вакви зборови имаме 499 и секој од нив е еднаков на 1996, па затоа вкупниот збир е еднаков на $499 \cdot 1996 = 996004$.

78. Првиот ден Давор добил $2 \cdot 0 + 1 = 1$ џамлија, вториот ден добил $2 \cdot 1 + 1 = 3$ џамлии, третиот ден добил $2 \cdot 2 + 1 = 5$ итн. Значи триесеттиот ден добил $2 \cdot 29 + 1 = 59$ џамлии.

Триесеттиот ден тој имал

$$1 + 3 + 5 + \dots + 57 + 59 = (1 + 59) + (3 + 57) + \dots + (29 + 31) = 15 \cdot 60 = 900 \text{ џамлии.}$$

79. Ги формираме зборовите

$$2+1996; 4+1994; 6+1992; 8+1990; 10+1988; \dots; 998+1000.$$

Вакви зборови имаме 499 и секој од нив е еднаков на 1998, па затоа вкупниот збир е еднаков на $499 \cdot 1998 = 997002$.

80. Трицифрени броеви се броевите 100, 101, 102, 103, ..., 998, 999. Има вкупно 900 трицифрени броеви. Нив можеме да ги запишеме на следниов начин:

$$\begin{array}{cccccccc} 100 & 102 & 104 & 106 & \dots & 996 & 998 \\ 101 & 103 & 105 & 107 & \dots & 997 & 999 \end{array}$$

Разликата меѓу збирот на непарните и парните броеви може да се запише на следниот начин:

$$\begin{aligned} & (101 + 103 + 105 + 107 + \dots + 997 + 999) - (100 + 102 + 104 + \dots + 996 + 998) = \\ & = (101 - 100) + (103 - 102) + (105 - 104) + (107 - 106) + \dots + (999 - 998) = \\ & = \underbrace{1 + 1 + 1 + \dots + 1}_{450\text{-пати}} = 450 \end{aligned}$$

што значи дека збирот на непарните трицифрени броеви е поголем за 450.

81. Добиениот израз е еднаков на

$1 + (2 - 3 - 4 + 5) + (6 - 7 - 8 + 9) + \dots + (1998 - 1999 - 2000 + 2001) + 2002 = 2003$,
бидејќи изразите во заградите се еднакви на нула.

82. Ќе искористиме дека производот на цифрите на единиците на множителите ја дава цифрата на единиците на производот.

Два последователни природни броја можат да завршуваат на цифрите 0 и 1, 1 и 2, 2 и 3, 3 и 4, 4 и 5, 5 и 6, 6 и 7, 7 и 8, 8 и 9, 9 и 0, па затоа нивниот производ може да завршува на една од цифрите 0, 2 или 6. Бидејќи бројот 3478 завршува на цифрата 8 заклучуваме дека тој не може да се запише како производ на два последователни природни броја.

83. Во овој производ имаме природен број кој завршува на нула, тоа е бројот 110. Затоа, според решението на претходната задача, производот на природните броеви од 101 до 119 завршува на цифрата 0.

84. Да го разгледаме производот $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10$. Бидејќи $2 \cdot 5 = 10$ и производот го содржи бројот 10 тој е еднаков на $1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 100$. Според тоа, последните две цифри на разгледуваниот производ се нули.

85. Последните цифри на три последователни броеви можат да бидат 0,1,2; 1,2,3; 2,3,4; 3,4,5; 4,5,6; 5,6,7; 6,7,8; 7,8,9; 8,9,0 или 9,0,1. Според тоа, цифрата на единиците на производот на три последователни природни броеви може да биде: 0, 6, 4, 0, 0, 0, 6, 4, 0 или 0. Бидејќи цифрата на единиците на производот на три последователни природни броеви не може да е 8, заклучуваме дека производот на три последователни природни броеви не може да биде $87*****8$.

86. Прво заклучуваме дека бараниот број е помал од 10, бидејќи број кој е поголем или еднаков на 10 кога пет пати ќе се помножи самиот со себе дава резултат поголем или еднаков на 100000, а тоа значи најмалку шестцифрен број. Од друга страна бараниот број е парен број, бидејќи производ на непарни броеви е непарен број и не може да има цифра на единици 4.

Значи, можни решенија се 2, 4, 6 или 8. Имаме,

- $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$, не е решение;

- $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 1024$, е решение;

- $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 7776$, не е решение;

- $8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 32768$, не е решение.

Конечно, бараниот број е 4.

87. Последователно имаме

$$8=8$$

$$8 \cdot 8=64$$

$$8 \cdot 8 \cdot 8=512$$

$$8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8=4096$$

$$8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8=31768$$

$$8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8=262144$$

.....

што значи дека последните цифри на производите се 8, 4, 2, 6, 8, 4, 2, Бидејќи цифрата на единиците на производот на два броја е еднаква на цифрата на единиците добиена со множење на цифрите на единиците кај множителите заклучуваме дека групата од четири цифри 8, 4, 2 и 6 се повторува при множењето на осумки. Но, $43=4 \cdot 10+3$, па затоа производот на 43 осумки завршува на иста цифра како и производот на 3 осумки, т.е. на цифрата 2.

88. Кога ќе го разложиме на прости множителни производот $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 126$, меѓу простите множителни ќе се појават определен број двојки и петки. Бидејќи секој втор број во производот е делив со 2, а секој петти е делив со 5, бројот на двојките ќе биде поголем од бројот на петките. Меѓутоа, секој пар од 2 и 5 во производот дава нула, па затоа бараниот број на нули ќе биде еднаков на бројот на петките во производот. Секој петти број е делив со 5, а такви броеви од 1 до 126 има точно 25. Понатаму, секој дваесет и петти број меѓу множителите има уште една петка и такви броеви има точно 5. Освен тоа, $125=5 \cdot 5 \cdot 5$ што значи дека бројот 125 има уште една петка. Конечно, во разложувањето на прости множителни има $25+5+1=31$ петки, од што следува дека производот $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 126$ завршува на 31 нула.

89. Најголемата разлика на два “убави” броеви е $5544-4455=1089$, а најмалата позитивна разлика, на пример, во случајот $4554-4545=9$.

90. За да биде бројот a најголем, неговите цифри ќе ги избираме од лево на десно така што тие да бидат најголемо можни. Очигледно првата

цифра (од лево на десно) на најголемиот “двојно загадочен” број не е поголема од 4. Ако таа е 4, втората цифра не може да е 9, бидејќи во спротивно првата цифра на бројот b ќе биде 9. Останува втората цифра на бројот a да е 8. Нека таа е 8. Тогаш првата цифра на b е 9, а втората цифра на b може да е најмногу 7. Ако таа е 7, за третата цифра на a останува да е најмногу 6, а за четвртата цифра на a останува да е најмногу 5. Ако тоа е така, тогаш третата цифра на b ќе биде 3 и за a добиваме 48651. Навистина овој број е “двојно загадочен”, бидејќи $a+a=97302$ и истовремено тој е најголем.

Првата цифра на најмалиот “двојно загадочен” број е 1 (цифрите ги избираме од лево на десно така што да бидат најмали можни). Во записот на a не може да учествува нулата бидејќи тогаш во записот на b ќе има 0 или 1, ако има пренос. На второто место во записот на a не може да стои 2 бидејќи 2 е прва цифра на b . Според тоа, втора најмала можна цифра во записот на a е 3, а третата е 4. Ако тоа е така, тогаш b ќе почнува со цифрите 2, 6, 9 (бидејќи сигурно ќе има пренос за a остануваат цифрите 5, 7, 8, 9). За останатите цифри 0, 5, 7, 8 само кај цифрата 5 имаме дека $5+5$ завршува на некоја од претходните цифри, па затоа последната цифра на a е 5. За a единствена можност останува $a=13485$ и тогаш $b=26970$ и тоа е најмалиот “двојно загадочен” број.

91. Нека бараните цифри се a , b и c . Од нив може да составиме шест различни двоцифрени броеви со различни цифри: $\overline{ab}, \overline{ba}, \overline{ac}, \overline{ca}, \overline{bc}, \overline{cb}$. Од условот на задачата следува $\overline{ab} + \overline{ba} + \overline{ac} + \overline{ca} + \overline{bc} + \overline{cb} = 528$. Односно $22(a+b+c) = 528$. Од тука $a+b+c = 24$. Бидејќи $7+8+9=24$ и за било кои други цифри збирот е помал од 24, добиваме дека бараните цифри се 7, 8 и 9.

92. Нека $\overline{abc}$ е бараниот број. Од

$$\overline{abc} = \frac{1}{2}(\overline{ab} + \overline{ac} + \overline{bc} + \overline{ba} + \overline{cb} + \overline{ca})$$

добиваме $100a + 10b + c = \frac{1}{2}(22a + 22b + 22c)$ или $89a = b + 10c$. Но, a, b и c се цифри, па последното равенство е можно само ако $a=1$, $b=9$ и $c=8$. Бараниот број е 198.

93. Нека се a и b првите два броја. Следните четири броја се $a+b$, $a+2b$, $2a+3b$ и $3a+5b$. Бидејќи a и b се природни броеви,

петтиот број може да биде еднаков на 7 само ако $b=1$, па затоа $a=2$. Конечно, бараниот збир е $8a+12b=28$.

94. Со x да го означиме првиот број. Тогаш вториот број е $3x$, а третиот е $x-5$. Од условот на задачата имаме $x+3x+x-5=6000$, од каде наоѓаме $x=1201$. Значи бараните броеви се 1201, $3 \cdot 1201$ и $1201-5$, т.е. 1201, 3603 и 1196.

95. Ако $\overline{ab}$ е дадениот број, тогаш добиениот четирицифрен број е $\overline{abab}$. Имаме,

$$\overline{abab} = \overline{ab00} + \overline{ab} = 100\overline{ab} + \overline{ab} = 101\overline{ab},$$

што значи дека добиениот број е 101 пати поголем од почетниот.

96. Нека $\overline{abba}$ е бараниот палиндрон. За да бројот $\overline{abba}+11$ биде палиндрон, првата цифра мора да биде $a+1$ (еднаква на последната). Тоа е можно само ако $b=9$, бидејќи само тогаш имаме пренос на единица од втораа цифра. Најмалиот баран палиндрон се добива за $a=1$ и имаме $1991+11=2002$.

97. Нека е $\overline{abcd}$ шифрата на катанецот. Секој природен број се дели со b , па затоа $b=1$. Понатаму, бидејќи $d < c$, dc завршува на 5 и сите цифри се различни добиваме дека шифрата е еден од броевите $\overline{a153}$, $\overline{a175}$ или $\overline{a195}$. Сега од $a+c=7$ следува дека случаите $\overline{a175}$ и $\overline{a195}$ не се можни, па затоа шифрата на катанецот на Ивица е бројот 2153.

98. Имаме

$$\overline{aa} = 10a + a = 11a \text{ и}$$

$$\overline{aaaaaa} = 100000a + 10000a + 1000a + 100a + 10a + a = 111111a,$$

па затоа од $\overline{aa} \cdot \overline{ababa} = \overline{aaaaaa}$ следува

$$11a \cdot \overline{ababa} = 111111a$$

$$11\overline{ababa} = 111111$$

$$\overline{ababa} = 111111:11$$

$$\overline{ababa} = 10101,$$

од каде добиваме дека $a=1$, $b=0$. Според тоа,

$$\overline{ab} \cdot \overline{ababa} = 10 \cdot 10101 = 101010.$$

2.5.3. ДЕЛИВОСТ ВО МНОЖЕСТВОТО ПРИРОДНИ БРОЕВИ

1. Бараните двоцифрени броеви се 12, 13, 23, 21, 31 и 32. Нивниот збир е $12+13+23+21+31+32=132$ и тој е делив со 132.

2. а) Нека разликата $m-n$ е делива со 2. Тогаш или двата броеви m и n се деливи со 2, или двата броеви m и n не се деливи со 2. Во првиот случај добиваме дека $m+n$ е збир од парни броеви, па збирот мора да е парен. Во вториот случај $m+n$ е збир од два непарни броеви, па збирот мора да е парен број. Во двата случаи $m+n$ е делив со 2.

б) Доказот е аналоген како под а).

3. Ако со n го означиме најмалиот од овие броеви, тогаш нивниот збир ќе биде $n+(n+1)+(n+2)=3(n+1)$, што значи дека збирот е делив со 3.

4. Нека $2k$ и $2k+2$ се два последователни парни броја. Тогаш нивниот производ е

$$2k(2k+2)=4k(k+1).$$

Бидејќи k и $k+1$ се два последователни природни броја едниот од нив е парен, а другиот е непарен. Според тоа, нивниот производ е парен број, т.е. $k(k+1)=2p$. Конечно

$$2k(2k+2)=4k(k+1)=4 \cdot 2p=8p,$$

што значи производот на два последователни парни броја е делив со 8.

5. Од

$$\begin{aligned} 1+2+3+\dots+998+999+1000 &= (1+1000)+(2+999)+(3+998)+\dots+(500+501) \\ &= 1001 \cdot 500 = 13 \cdot 77 \cdot 500 \end{aligned}$$

заклучуваме дека збирот на првите 1000 природни броеви е делив со 77.

6. Нека четирицифрениот број е

$$\overline{xyzt} = 1000x + 100y + 10z + t.$$

Бројот напишан со истите цифри, но во обратен редослед е

$$\overline{tzyx} = 1000t + 100z + 10y + x.$$

За нивната разлика имаме:

$$\begin{aligned}\overline{xyzt} - \overline{tzyx} &= 1000x + 100y + 10z + t - 1000t - 100z - 10y - x \\ &= 999x + 90y - 90z - 999t = 9(111x + 10y - 10z - 111t)\end{aligned}$$

односно $9 \mid (\overline{xyzt} - \overline{tzyx})$.

7. Бараниот број е или двоцифрен број со цифри 1 и 6, или четирицифрен број со цифри 1, 1, 2 и 3 и е парен број (делив со 8). Значи имаме четири можности: 16, 1132, 1312 и 3112. Меѓу овие броеви деливи со 8 се броевите 16, 1312 и 3112.

8. Имаме

$$\begin{aligned}\overline{xabx} - \overline{xba x} &= 1000x + 100a + 10b + x - 1000x - 100b - 10a - x \\ &= 90a - 90b = 90(a - b),\end{aligned}$$

односно $90 \mid (\overline{xabx} - \overline{xba x})$, што и требаше да докажеме.

9. Нека трицифрениот број е $\overline{xyz} = 100x + 10y + z$. Бројот напишан со истите цифри, но по обратен ред е $\overline{zyx} = 100z + 10y + x$. Добиваме

$$\begin{aligned}\overline{xyz} - \overline{zyx} &= 100x + 10y + z - 100z - 10y - x \\ &= 99x - 99z = 99(x - z).\end{aligned}$$

Од $9 \mid 99$ и $11 \mid 99$ следува $9 \mid (\overline{xyz} - \overline{zyx})$ и $11 \mid (\overline{xyz} - \overline{zyx})$.

10. Ако $\overline{xy} = 10x + y$ е произволен двоцифрен природен број, тогаш од условот на задачата имаме

$$\overline{xy} + \overline{yx} = 10x + y + 10y + x = 11(x + y)$$

од што следува $11 \mid (\overline{xy} + \overline{yx})$.

11. Нека трицифрениот број е $\overline{abc}$. Од условот на задачата $b = c$. Значи $\overline{abc} = \overline{abb} = \overline{a00} + \overline{bb} = 100a + 11b$, $a + b + c = 7$ или $a + 2b = 7$. Имаме

$$\begin{aligned}\overline{abc} &= 100a + 11b = 100(a + 2b) - 200b + 11b \\ &= 100(a + 2b) - 189b = 100 \cdot 7 + 189b.\end{aligned}$$

Бидејќи 189 е делив со 7, добиваме дека десната страна на равенството е делива со 7, од каде бројот $\overline{abc}$ е делив со 7.

12. Еден природен број е делив со 15 ако е делив со 3 и 5. За да биде делив со 5 последната цифра на бројот мора да биде 0. За да бројот биде делив со 3, збирот на неговите цифри треба да биде делив со 3. За да добиеме најмал број, бројот на четворки мора да биде три, па бараниот број е 4440.

13. Број е делив со 15 ако е делив со 3 (збирот на цифрите му е делив со 3) и е делив со 5 (цифрата на единиците е еднаква на 0 или 5). Најмалиот таков број чиј збир на цифри е еднаков на 15 е 195.

14. Одговор. Бараните броеви се 164, 416, 324 и 432.

15. Ако бројот $\overline{7438x}$ е делив со 5 тогаш x мора да биде 0 или 5. Ако бројот $\overline{7438x}$ е делив со 9, тогаш збирот на неговите цифри, $22 + x$, мора да биде делив со 9, од каде се добива $x = 5$. Па, за да бројот $\overline{7438x}$ биде делив со 5 и 9 истовремено, тогаш мора $x = 5$. Бројот 74386 е за еден поголем од 74385, па при делење со 5 и 9 дава остаток 1. Бројот 74387 е за два поголем од 74385, па при делење со 5 и 9 дава остаток 2. Аналогно се заклучува дека и броевите 74388 и 74389 при делење со 5 и 9 даваат ист остаток. Значи, цифрата x може да биде 5, 6, 7, 8 и 9.

16. За да бараниот број $\overline{*11*}$ биде делив со 36, треба да биде делив со 4 и со 9. Бидејќи бројот е делив со 9, треба збирот на цифрите со кои е запишан да биде делив со 9. Но, две од цифрите се единици, па затоа збирот на цифрите може да биде или 9 или 18. Според тоа, збирот на непознатите цифри може да биде 7 или 16.

Ако се искористи фактот дека еден број е делив со 4, ако и само ако бројот формиран од последните две цифри е делив со 4, добиваме дека можни решенија се $\overline{*112}$ и $\overline{*116}$.

Од досега изнесеното следува дека бараните броеви се 5112 и 1116.

17. Имаме

$$47x + 103y = 26x + 26y + 21x + 77y = 26(x+y) + 7(3x+11y).$$

Од $13 \mid 26$ следува $13 \mid 26(x+y)$, а од $13 \mid (3x+11y)$ следува $13 \mid 7(3x+11y)$.

Според тоа, $13 \mid 26(x+y)+7(3x+11y)=47x+103y$, што и требаше да се докаже.

18. Имаме:

$$43x+75y=19x+19y+24x+56y=19(x+y)+8(3x+7y).$$

Од $19 \mid 19$ следува $19 \mid 19(x+y)$, а од $19 \mid (3x+7y)$ следува $19 \mid 8(3x+7y)$.

Според тоа, $19 \mid 19(x+y)+8(3x+7y)=43x+75y$ што и требаше да се докаже.

19. Бидејќи $11 \cdot 101 = 1111$ доволно е да докажеме дека дадениот број е делив со 1111. Од

$$\underbrace{11\dots11}_{1996 \text{ единици}} = 1111 \cdot \underbrace{10001\dots0001}_{498 \text{ групи}}$$

е јасно дека $1111 \mid \underbrace{11\dots11}_{1996 \text{ единици}}$.

20. Ако $\overline{xy} = 10x + y$ е произволен двоцифрен природен број, тогаш од условот на задачата имаме

$$n^2 = \overline{xy} + \overline{yx} = (10x + y) + (10y + x) = 11(x + y).$$

Бидејќи 11 е прост број добиваме $11 \mid n$, т.е. $n=11k$. Ако замениме во претходното равенство добиваме

$$11(x + y) = n \cdot n = 11k \cdot 11k = 121k \cdot k.$$

Значи, $11k \cdot k = x + y$. Бидејќи $x, y \leq 9$ последното равенство е можно само ако $k=1$, т.е. ако $x+y=11$. Притоа добиваме

$$(x, y) \in \{(2, 9), (3, 8), (4, 7), (5, 6), (6, 5), (7, 4), (8, 3), (9, 2)\},$$

т.е. бараните двоцифрени броеви се 29, 38, 47, 56, 65, 74, 83 и 92.

21. Бидејќи $1965 = 131 \cdot 15$, доволно е да ги одредиме сите природни броеви меѓу 25000 и 30000 кои кога ќе се поделат со 1965 даваат остаток 125.

Од $16 \cdot 1965 = 30440 > 30000$ добиваме дека најголемиот број со бараното својство е бројот $15 \cdot 1965 + 125 = 29600$. Условите на задачата ги исполнуваат само уште броевите 27635 и 25670 (зошто?).

22. Од $\text{НЗД}(3, 5) = 1$ заклучуваме дека еден број е делив со $15 = 3 \cdot 5$ ако истовремено е делив и со 3 и со 5.

Бројот $\overline{199^*}$ е делив со 5 ако неговата последна цифра е 0 или 5. Ако на местото на * ставиме 0, тогаш добиениот број 1990 не е делив со 3, бидејќи збирот на неговите цифри е 19, а овој број не е делив со 3. Ако на место на * ставиме 5, тогаш го добиваме бројот 1995, кој е делив со 3 бидејќи збирот на неговите цифри е 24 и овој број е делив со 3.

Според тоа, бараниот број е 1995.

23. Еден природен број е делив со 9 ако збирот на цифрите со кои е запишан е делив со 9. Според тоа, $\overline{1995xy}$ е делив со 9 ако бројот

$$1+9+9+5+x+y=24+x+y$$

е делив со 9.

Бидејќи $0 \leq x, y \leq 9$ имаме

$$24 \leq 24+x+y \leq 42.$$

Единствени броеви кои се деливи со 9, а се истовремено поголеми од 24 и помали од 42 се 27 и 36. Затоа

$$24+x+y=27 \text{ или } 24+x+y=36,$$

т.е.

$$x+y=3 \text{ или } x+y=12.$$

Од $x+y=3$ имаме $(x,y) \in \{(0,3), (1,2), (2,1), (3,0)\}$, а од $x+y=12$ имаме $(x,y) \in \{(3,9), (4,8), (5,7), (6,6), (7,5), (8,4), (9,3)\}$. Значи,

$$(x,y) \in B = \{(0,3), (1,2), (2,1), (3,0), (3,9), (4,8), (5,7), (6,6), (7,5), (8,4), (9,3)\}.$$

Бројот $\overline{1995xy}$ е делив со 8 ако трицифрениот завршеток $\overline{5xy}$ е делив со 8, т.е. ако

$$(x,y) \in A = \{(0,4), (1,2), (2,0), (2,8), (3,6), (4,4), (5,2), (6,0), (6,8), (7,6), (8,4), (9,2)\}.$$

Но, бројот $\overline{1995xy}$ треба истовремено да е делив и со 8 и со 9, па затоа $(x,y) \in A \cap B = \{(1,2)\}$, т.е. единствен број со бараното својство е бројот 199512.

24. Броевите 5, 7 и 9 немаат заеднички делител поголем од 1, па затоа број кој е делив со 5, 7 и 9 е делив со нивниот производ $5 \cdot 7 \cdot 9 = 315$. Имаме $\overline{579abc} = 579000 + \overline{abc}$ и како при делење на бројот 579000 со 315 се добива остаток 30, заклучуваме дека бројот $579000 + (315 - 30) = 579285$ е делив со 315. Тоа е најмалиот баран број од видот $\overline{579abc}$. Ословите ги задоволуваат и броевите $579285 + 315 = 579600$ и $579600 + 315 = 579915$. Значи, задачата има три решенија: 285, 600 и 915.

25. Бидејќи $HЗД(3,4)=1$ бројот $\overline{4a1b}$ е делив со $3 \cdot 4 = 12$ ако е делив со 3 и 4. Бројот $\overline{4a1b}$ е делив со 4 ако двоцифрениот завршеток $\overline{1b}$ е делив со 4, па затоа $b=2$ или $b=6$.

Бројот $\overline{4a1b}$ е делив со 3 ако збирот $4+a+1+b=5+a+b$ е делив со 3.

За $b=2$ треба $7+a$ да е делив со 3, од што следува $a \in \{2, 5, 8\}$.

За $b=6$ треба $11+a$ да е делив со 3, од што следува $a \in \{1, 4, 7\}$.

26. За да бројот $2008*$ биде делив со 6, треба да е делив со 2 и со 3. За да бројот биде делив со 2 треба да завршува на 0, 2, 4, 6 или 8. Од броевите 20080, 20082, 20084, 20086 и 20088, деливи со 3 се само броевите 20082 и 20088. Значи, на местото од ѕвездичката може да стои било која од цифрите 2 или 8.

27. Треба да ги најдеме броевите од видот $\overline{4ab2}$. Од $4+2=6$ и фактот дека броевите треба да се деливи со 9, заклучуваме дека $a+b=3$ или $a+b=12$. Конечно, бараните броеви се: 4032, 4302, 4122, 4212, 4392, 4932, 4482, 4842, 4572, 4752 и 4662.

28. Број е делив со 24 ако е делив со 3 и со 8. Бараниот број ќе биде делив со 8 само ако бројот формиран од последните три цифри е делив со 8, т.е. само ако $b=2$ бидејќи $992:8=124$. За да бројот $\overline{a19992}$ биде делив со 3, потребно е збирот на неговите цифри да е делив со 3, а тоа е можно само ако $a=3$ или $a=6$ или $a=9$.

29. Секој четврт елемент е делив со 4, па затоа со 4 се деливи 249 броеви ($4 \cdot 249 = 996 < 999 < 4 \cdot 250 = 1000$). Со 6 се деливи 166 бројеви. Од збирот $249+166=415$ треба да одземеме 83 броеви, кои се сметани двапати, бидејќи се деливи и со 6 и со 4, т.е. со 12. Значи, вкупно има $415-83=332$ броја деливи со 6 и со 4. Конечно, броеви кои не се деливи ниту со 6 ниту со 4 има $999-332=667$.

30. Бараниот број е од видот $\overline{1023***}$. Трите непознати цифри треба да ги избереме така да збирот на цифрите биде делив со 9 и двете последни цифри да формираат број делив со 4. Тогаш нашиот број ќе биде делив со 9 и со 4, па затоа ќе биде делив со 36. Од три можни трицифрени комбинации: 876, 948 и 984, ја избираме најмалата. Бараниот број е 1023876.

31. Дадениот збир можеме да го запишеме во видот

$$\overline{7a85} + \overline{34a5} + \overline{1a21a} = 7085 + 100a + 3405 + 10a + 10210 + 1001a \\ = 20700 + \overline{aaaa}.$$

Бројот 20700 се дели со 9, а за да целиот збир се дели со 9 треба и бројот $\overline{aaaa}$ да се дели со 9, што е можно само ако збирот на неговите цифри 4a се дели со 9. Но, тоа е можно само ако $a = 0$ или $a = 9$.

32. а) Одговор. Најмалиот таков број е 117.

б) Збирот на цифрите на дадениот број е 48, па бараниот број може да има збир на цифри: 45, 36, 27, 18 или 9. Збирот на цифрите може да остане 45 ако избришеме три единици, па во случајот најголемиот број кој може да се добие е 474747147. Збирот на цифрите ќе биде 36 ако избришеме три цифри 4 или ако ги избришеме цифрите 1, 4 и 7. Во првиот случај најголемиот број кој се добива е 171717147, а во вториот 714714714. Со бришење на само три цифри може да се добие број кој е делив со 9 само ако избришеме три цифри 7 и тогаш најголемиот број кој може да се добие е бројот 147141414. Конечно, бараниот број е 714714714.

33. Нека регистерскиот број е $\overline{abc}$. Тогаш $bc = 12$. Цифрата c е парна, па можни се следниве случаи: $b = 3, c = 4$ или $b = 2, c = 6$ или $b = 6, c = 2$. Но, $b + c = a - 1$, па ги добиваме трицифрените броеви 834, 926 и 962, од кои само првиот е делив со 6. Бараниот број е 834.

34. Бројот $\overline{87a9b}$ е делив со 18 ако е делив со 2 и со 9. Значи, дадениот број треба да е парен и збирот на цифрите да му е делив со 9. Збирот на цифрите на бројот $\overline{87a9b}$ е $a + b + 24$. Но, b е парен број, т.е. $b = 0, 2, 4, 6, 8$, па затоа збирот на цифрите ќе биде $a + 24, a + 26, a + 28, a + 30$ и $a + 32$ и бидејќи треба да биде делив со 9 добиваме дека соодветните вредности за цифрата a се: 3, 1, 8, 6 и 4, т.е. броевите 87390, 87192, 87894, 87696 и 87498 се решение на задачата.

35. За да биде делив со 45, бројот A треба истовремено да е делив и со 5 и со 9. Заради деливоста со 5, тој завршува на 0 или 5. Можните облици на бројот A тогаш се $444c0$ или $444c5$. Изборот на цифрата c зависи од деливоста со 9. Збирот на цифрите на бројот $444c0$ е $12 + c$, каде c може да биде само 6, односно бараниот број е 44460. Во вториот случај,

збирот на цифрите на бројот $444c5$ е $17+c$, па c може да биде само 1. Конечно бараните броеви се 44460 и 44415.

36. Нека на таблата се запишани броевите $1, n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5, n+6, n+7, n+8$ и $n+9$. Ако е избришан бројот 1, тогаш збирот на останатите броеви е $10n+45$. Од $10n+45=2003$ следува $10n=1958$, што не е можно. Ако Мирко го избришал бројот $n+x$, тогаш збирот на останатите десет броја е $9n+46-x$. Од $9n+46-x=2003$ следува $9x=1957+x$. Бројот $1957+x$ е делив со 9 само ако $x=5$. Тогаш $n=1962:9=218$, па избришаниот број е $n+x=223$.

37. Ако е $\overline{abc}$ бараниот број, тогаш $ab=12$ и $a=b+c+1$. Но, $12=2\cdot 6=6\cdot 2=3\cdot 4=4\cdot 3$, па затоа бараниот број може да биде: 926 или 962 или 834 или 843. Бројот $\overline{abc}$ е делив со 6, а од можните четири броја само 834 е делив со 6. Значи, Ивица ја купил среќката со број 834.

38. Од $10^n - 1 = \underbrace{10\dots 00}_{n \text{ нули}} - 1 = \underbrace{99\dots 99}_{n \text{ деветки}} = 9 \cdot \underbrace{11\dots 11}_{n \text{ единици}}$ следува дека бројот $10^n - 1$ е делив со $81=9\cdot 9$ ако бројот $\underbrace{11\dots 11}_{n \text{ единици}}$ е делив со 9. Бројот

$\underbrace{11\dots 11}_{n \text{ единици}}$ е делив со 9 ако збирот на цифрите n е делив со 9, т.е. ако $n=9k$,

каде k е природен број.

Значи, $n \in \{9, 18, 27, 36, 45, \dots\}$.

39. За дадениот број биде делив со 12 потребно е тој да се делив со 3 и 4. Во собирокот $2014 \cdot 2016$, 2016 е делив и со 3 и со 4, па $2014 \cdot 2016$ е делив со 12. Останува да провериме за собирокот $17 \cdot \overline{16a}$. Бидејќи 17 е прост број, потребно е $\overline{16a}$ да е делив со 3 и со 4. $\overline{16a}$ е делив со 4 ако $a \in \{0, 4, 8\}$.

За $a=0$, $1+6+0=7$ не е делив со 3.

За $a=4$, $1+6+4=11$ не е делив со 3.

За $a=8$, $1+6+8=15$ е делив со 3.

Од горната дискусија заклучуваме дека $a=8$.

40. Од $100=aq+6$ следува $aq=94=1\cdot 94=2\cdot 47$, односно

$$(a,q) \in \{(1,94), (2,47), (94,1), (47,2)\}.$$

41. Да претпоставиме дека е $a < b < c < d$. Тогаш најголемиот четири-цифрен број е $\overline{dcba}$, а најмалиот $\overline{abcd}$. Нивната разлика е

$$\begin{aligned}\overline{dcba} - \overline{abcd} &= 1000d + 100c + 10b + a - 1000a - 100b - 10c - d \\ &= 9(111d + 10c - 10b - 111a).\end{aligned}$$

Бидејќи изразот во заградата е поголем од 1, добиваме

$$9 | (\overline{dcba} - \overline{abcd}),$$

што значи дека разгледуваниот број има најмалку три делители па значи истиот е сложен број, што и требаше да докажеме.

42. Природен број е делив со 45 ако е делив со 9 и со 5. Број е делив со 5 ако има цифран на единици 0 или 5. Но, бидејќи бројот $\overline{abcd}$ започнува и завршува на иста цифра, заклучуваме дека цифрата на единиците мора да биде 5. Според условот на задачата цифрата на десетките е 7, па затоа збирот на цифрите на бројот е еднаков на $5 + b + c + 7 + 5 = 17 + b + c$. За да бројот $\overline{abcd}$ се дели со 9, неговиот збир треба да се дели со 9, т.е. да е содржател на бројот 9. Но, b и c се цифри, па затоа $b + c = 1$ или $b + c = 10$, т.е. можни се следниве комбинации:

b	0	1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
c	1	0	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Но, цифрите a, b, c и d се меѓусебно различни па од досега изнесеното следува дека бараните броеви се: 50175, 51075, 51975, 59175, 52875, 58275, 54675 и 56475.

43. Ако $p=2$, тогаш $p+5=7$ и $p+9=11$ т.е. p , $p+5$ и $p+9$ се прости броеви. Ако е $p>2$, тогаш p е непарен број, па значи $p+5$ и $p+9$ се парни броеви поголеми од 2, т.е. се сложени броеви.

44. Ако $p=2$, тогаш $p+7=9$, а тоа е сложен број. Ако $p>2$, тогаш бројот p е непарен број, па затоа бројот $p+7$ е парен број поголем од 2, што значи тој е сложен број.

45. Ако $p=2$, тогаш $p+5=7$ и тој е прост број. Ако $p>2$, тогаш бројот p е непарен број, па затоа бројот $p+5$ е парен број поголем од 2, што значи тој е сложен број. Конечно, единствено решение е бројот 2.

46. Ако $p > 2$, тогаш бројот p е непарен број, па затоа бројот $7p-1$ е парен број поголем од 2, што значи тој е сложен број. Ако $p=2$, тогаш $7p-1=13$ и тој е прост број. Но, тогаш $7p+1=15=5 \cdot 3$ е сложен број, што и требаше да се докаже.

47. Ако $p=2$, тогаш $3p+1=7$ и $5p+1=11$ и тие се прости броеви. Ако $p > 2$, тогаш p е непарен број, па затоа $3p+1$ и $5p+1$ се парни природни броеви поголеми од 2, што значи тои се сложени. Конечно, единствен број со бараното својство е бројот 2.

48. Бројот q не може да биде непарен, бидејќи тогаш левата страна на равенството $2p+3q=100$ ќе биде непарна. Значи, q е парен број и како q е прост број следува дека $q=2$. Сега, со замена во $2p+3q=100$ наоѓаме $2p+6=100$, т.е. $p=47$ и тоа е прост број.

49. а) Да. На пример, тоа се броевите 1, 3, 7 и 9.

б) Не. Ќе докажеме дека меѓу пет природни броеви секогаш постојат три чиј збир се дели со 3. Можни се следните два случаи:

-Меѓу петте броеви постојат три кои при делење со бројот 3 даваат еден ист остаток. Во овој случај нивниот збир се дели со 3 и не е прост број.

-Меѓу петте броеви не постојат три кои при делење со бројот 3 даваат еден ист остаток. При делење на даден природен број со бројот 3 можни се следните остатоци: 0, 1 или 2. Нека претпоставиме дека ниту еден од броевите при делење со бројот 3 не дава остаток 0. Тогаш, остатоците од делењето на петте броеви со бројот 3 се еднакви на 1 или 2. Бидејќи имаме пет броеви ќе имаме и пет остатоци, што значи три еднакви остатоци. Последното не е можно, па затоа барем еден од броевите при делење со бројот 3 дава остаток 0. Со слични размислувања заклучуваме дека барем еден од броевите при делење со бројот 3 дава остаток 1 и барем еден од броевите при делење со бројот 3 дава остаток 2. Конечно, збирот на овие три броеви е делив со бројот 3, па затоа не е прост број.

50. Имаме,

$$6930 = 2 \cdot 3465 = 2 \cdot 3 \cdot 1155 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 385 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 77 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11,$$

и

$$32340 = 2 \cdot 16170 = 2 \cdot 2 \cdot 8085 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2695 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 539$$

$$= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 77 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11.$$

51. Бројот 7539840 го разложуваме на прости множители и добиваме

$$7539840 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 17.$$

Од разложувањето на прости множители и од условот на задачата следува дека два од бараните броеви се 11 и 17. Според условот на задачата еден од множителите е производ на броевите 2 и 7, што значи дека третиот од бараните множители е бројот 14. Бидејќи $2 \cdot 5 = 10$ и $2 \cdot 2 \cdot 5 = 20$, од условот на задачата и од разложувањето на прости множители следува дека четвртиот множител е бројот $3 \cdot 5 = 15$. Останува уште да определиме два од множителите, при што бројот 3 мора да го помножимо со две двојки за да се добие број поголем од 10, а помал од 20, па затоа петтиот множител $2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$. Во разложувањето на прости множители ни останаа уште четири двојки, па затоа шестиот множител е $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$.

Конечно, бараните броеви се 11, 12, 14, 15, 16 и 17, при што важи

$$7539840 = 11 \cdot 12 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17.$$

52. Од $2688 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 7 = 12 \cdot 14 \cdot 16$, добиваме дека бараните броеви се 12, 14 и 16.

53. Од разложувањето $140 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7 = 4 \cdot 5 \cdot 7$, следува дека трицифрените броеви се составени од цифрите 4, 5 и 7. Непарните трицифрени броеви составени од тие цифри се 457, 475, 547 и 745. Па, нивниот збир е еднаков на $457 + 475 + 547 + 745 = 2224$.

54. Од $366 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 7 = 8 \cdot 7 \cdot 6$, добиваме дека броевите се 6, 7 и 8. Нивниот збир е $6 + 7 + 8 = 21$.

55. Бидејќи $180 = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$, се добива дека четирите цифри кои може да дадат производ 180, можат да бидат 1,4,5,9 или 1,5,6,6 или 2,2,5,9 или 3,3,4,5 или 2,3,5,6. Бараниот број треба да биде делив со 9, односно неговиот збир на цифри треба да е делив со 9, а тоа е можно само во случаите 1,5,6,6 и 2,2,5,9. Значи, бараниот број е 1566.

56. Бидејќи $528 = 6 \cdot 8 \cdot 11$, а 11 не е цифра, таков природен број не постои.

57. Имаме $462 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$ и како 11 не е цифра, заклучуваме дека не постои природен број чиј производ на цифри е 462.

58. Од $\overline{ab} \cdot \overline{ba} = 1008 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$ заклучуваме дека и двата множители се деливи со 3, бидејќи ако $a + b$ се дели со 3, тогаш и $b + a$ се дели со 3. Исто така, еден од броевите, на пример $\overline{ab}$, е делив со 7, па затоа $\overline{ab} \in \{21, 42, 48, 84\}$. Со непосредна проверка добиваме дека $42 \cdot 24 = 1008$, а останатите три броја не го задоволуваат условот на задачата.

59. Од даденото равенство имаме $n \cdot p = 1995$. Бидејќи $1995 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19$ и p е прост број ги добиваме следните решенија на задачата: за $p = 3$ имаме $n = 5 \cdot 7 \cdot 19 = 665$, за $p = 5$ имаме $n = 3 \cdot 7 \cdot 19 = 399$, за $p = 7$ имаме $n = 3 \cdot 5 \cdot 19 = 285$, за $p = 19$ имаме $n = 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$.

60. Од условот на задачата имаме $n = \frac{2002}{p} = \frac{2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13}{p}$, добиваме дека n е природен број ако $p \in \{2, 7, 11, 13\}$. За $p = 2, n = 7 \cdot 11 \cdot 13 = 1001$; за $p = 7, n = 286$; за $p = 11, n = 182$ и за $p = 13, n = 154$.

61. Од условот на задачата имаме дека $np = 2010 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67$. Од овде вредноста на бројот p може да биде 2, 3, 5, 67. Па, конечно за $p = 2$ имаме $n = 1005$, за $p = 3$ имаме $n = 670$, за $p = 5$ имаме $n = 402$ и за $p = 67$ имаме $n = 30$.

62. Од $15400 = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11$ и фактот дека еден природен број е полн квадрат ако во разложувањето на прости множители истите се на парен степен следува дека бараниот природен број е $2 \cdot 7 \cdot 11 = 154$.

63. Бидејќи $8316 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 11$, најмал природен број со кој треба да се помножи дадениот број за да се добие квадрат на природен број е $3 \cdot 7 \cdot 11 = 231$. Така ќе се добие

$$8316 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 7^2 \cdot 11^2 = (2 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 11)^2 = 1386^2.$$

64. Бројот 84 го разложуваме на прости множители $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = 84$, односно $3 \cdot (2 \cdot 2) \cdot 7 = 84$. Имаме: $3(3+1)(2 \cdot 3+1) = 84$, т.е. $n = 3$.

65. Од $n(n+1)(2n+1)=180=4\cdot 5\cdot 9=4(4+1)(2\cdot 4+1)$ следува дека бројот 4 го задоволува условот на задачата. За $n > 4$, важи

$$n(n+1)(2n+1) > 4\cdot 5\cdot 9 = 180,$$

а за $n < 4$ важи

$$n(n+1)(2n+1) < 4\cdot 5\cdot 9 = 180,$$

што значи дека $n = 4$ е единствено решение.

66. Ако при делењето на 1000 со бараниот број се добива остаток 8, тоа значи дека $1000-8=992$ се дели со бараниот број. Слични, $900-1=899$ се дели со бараниот број. Но, $992=2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 31$ и како 899 е непарен број, мора 899 да се дели со 31. Навистина $899:31=29$, што значи дека броевите 1000 и 900 сме ги делеле со бројот 31.

67. Ако од 4373 одземеме 8, а од 826 одземеме 7, ќе ги добиеме броевите 4365 и 819. Со разложување на прости множители добиваме $4365=5\cdot 9\cdot 97$ и $819=7\cdot 9\cdot 13$. Значи, единствени заеднички делители на броевите 4365 и 819 се 3 и 9. Бараниот број е 9, бидејќи само тој е поголем од остатоците при делењето.

68. Ако x е помалиот број, тогаш поголемиот е $8x+15$, па нивниот збир е $x+8x+15=9x+15$. Од условот на задачата имаме $9x+15=825$, од каде добиваме $x=90$. Конечно, помалиот број е 90, а поголемиот број е $825-90=735$.

69. Бројот 400 го разложуваме на прости множители и добиваме $400=2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 5\cdot 5$. Негови делители се:

$$1, 2, 5, 2\cdot 2, 2\cdot 5, 5\cdot 5, 2\cdot 2\cdot 2, 2\cdot 2\cdot 5, 2\cdot 5\cdot 5, 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2, \\ 2\cdot 2\cdot 2\cdot 5, 2\cdot 2\cdot 5\cdot 5, 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 5, 2\cdot 2\cdot 2\cdot 5\cdot 5, 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 5\cdot 5.$$

Овие делители се меѓусебно различни, а непарни се 1, 5, $5\cdot 5$. Значи, бројот на делителите е 15, од кои 3 се непарни и 12 се парни.

70. Изразот $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12+75$ можеме да го запишеме во следниот облик:

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12+35\cdot 2+5=35\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12+35\cdot 2+5 \\ =35\cdot (1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12+2)+5$$

Според тоа, бараниот количник е

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 + 2 = 13685762,$$

а остатокот е 5.

71. Да го означиме бараниот природен број со a . Од условот a има остаток 1 при делење со 2 што значи дека бројот е непарен. Според тоа остатокот што го има a при делење со 6 може да биде 1, 3 или 5. Ако a има остаток 3 при делење со 6 тогаш бројот е делив со 3, што е спротивно со условот на задачата. Ако a има остаток 1 при делење со 6, тогаш a има остаток 1 и при делење со 3. Тоа е спротивно со условот од задачата. Останува дека единствен можен остаток е 5.

72. Бараниот број има вид $18k+11$ и е трицифрен. Имајќи во предвид дека $999=18 \cdot 55+9$, тогаш $990=18 \cdot 55$. Па $18 \cdot 54+11=983$ е најголемиот трицифрен број кој при делење со 18 дава остаток 11.

73. Нека е x количникот и остатокот при делење со 7. Деленикот е $7x+x=8x$ и како при делење со 7 можни остатоци се 0, 1, 2, 3, 4, 5 и 6 добиваме дека бараниот збир е $8 \cdot 0 + 8 \cdot 1 + 8 \cdot 2 + 8 \cdot 3 + 8 \cdot 4 + 8 \cdot 5 + 8 \cdot 6 = 168$.

74. Имаме $m=32n+30$, па затоа $32n+30+n=4287$, од каде наоѓаме $n=129$. Според тоа, бараните броеви се 129 и $32 \cdot 129+30=4158$.

75. Од условот на задачата имаме $n+100=23k+17$, каде k е природен број. Сега имаме

$$n=23k+17-100=23k-83=23k-83+9=23(k-4)+9,$$

што значи дека при делење на бројот n со 23 се добива остаток 9.

76. Ако збирот се намали за 1, т.е. поголемиот број се намали за 1, тогаш поголемиот број ќе биде делив со помалиот, и тогаш тој ќе биде 4 пати поголем од помалиот. Следува дека помалиот број е $(1181-1):5=236$, а поголемиот е $1181-236=945$.

77. Нека бараниот број го означиме со x . Од условот на задачата имаме $x+12=7a+5$, т.е. $x=7(a-1)$. Според тоа, бараниот број се дели со 7. На ист начин заклучуваме дека бројот x се дели и со 9 и 13.

Од досега изнесеното следува $x=7 \cdot 9 \cdot 13k=819k$, за некој природен број k . Но, бројот x е трицифрен па затоа $k=1$, т.е. бараниот број е 819.

78. а) Нека бараниот број е запишан со помош на n единици, т.е. бројот е $\underbrace{11\dots11}_n$. Збирот на неговите цифри е еднаков на n , па затоа бројот е делив со 3 ако и само ако $3 \mid n$. Најмалиот природен број n со ова својство е бројот 3, па затоа бараниот број е 111.

б) Бидејќи $333=9 \cdot 37$ и $\text{НЗД}(9,37)=1$ бараниот број треба да е делив со 9 и 37. Слично како и под а) бројот $\underbrace{11\dots11}_n$ е делив со 9 ако и само ако $9 \mid n$. Најмал природен број n со ова својство е бројот 9, па затоа најмал број од облик $\underbrace{11\dots11}_n$ кој е делив со 9 е бројот $x=11111111$. Останува да провериме дали $37 \mid x$, што е јасно ако се има предвид дека $11111111=37 \cdot 3003003$.

Конечно бараниот број е 11111111.

79. Нека бараниот број е x . Од условот на задачата следува дека $x=3k+2$ т.е. $x-2=3k$, што значи дека $3 \mid (x-2)$. Слично заклучуваме дека $5 \mid (x-2)$ и $7 \mid (x-2)$.

Броевите 3, 5 и 7 се прости, па затоа $3 \cdot 5 \cdot 7 \mid (x-2)$ т.е. $x=3 \cdot 5 \cdot 7a+2$. Најмал природен број со бараното својство добиваме за $a=1$, т.е. бараниот број е $x=3 \cdot 5 \cdot 7+2=107$.

80. Од остатоците 11, 12 и 13 следува дека бараниот делител е поголем од 13 и дека тој е заеднички делител на броевите $1901-11$, $2892-12$, $1723-13$, т.е. на броевите 1890, 2880 и 1710. Најмал таков делител е 15 и тоа е бараниот број.

81. За да го определиме најмалиот број плочки потребни за поплочување на терасата, треба да ја најдеме најголемата можна големина на плочката во облик на квадрат која може да се користи за тоа поплочување. Тоа значи дека треба да се најде $\text{НЗД}(600,225)$. Имаме $\text{НЗД}(600,225)=75$. Бидејќи $600:75=8$ и $225:75=3$, заклучуваме дека ќе имаме 8 редови по 3 плочки. Според тоа, најмалиот број плочки за тоа поплочување е 24 плочки.

82. Бидејќи $\text{НЗД}(252,288,972)=36$, можат да се направат 36 еднакви букети во кои ќе има $252:36=7$ ружи, $288:36=8$ лалиња и $972:36=27$ каранфили.

83. Доволно е да се најде најмалиот заеднички содржател на броевите 50, 75 и 90. Бидејќи $\text{НЗС}(50, 75, 90) = 450$, најмалото растојание на кое тие ќе направат цел број на скокови е 450 cm. Притоа, жабата ќе направи 9 скока, зајакот 6, а кенгурот 5 скока.

84. Најмалиот заеднички содржател на броевите 40 и 60 е 120. Значи, за првпат (не сметајќи го стартот) на 120 cm ќе има знаменца во двете бои. Ако на 15 места има знаменца во двете бои, а првото преклопување е на стартот, тогаш биле обележани $14 \cdot 120 = 1680$ cm, односно 16 m и 80 cm.

85. Ако ја извадиме овцата која преостанува при броењето по 2, по 3, по 4, по 5, по 6 или по 7 овци ќе забележиме дека бројот на овците што остануваат е делив со 2, 3, 4, 5, 6 и 7.

Бидејќи $\text{НЗС}(2, 3, 4, 5, 6, 7) = 420$ заклучуваме дека бројот на овците во стадото на Дамјан е $420k + 1$, каде k е природен број. Дамјан има помалку од 500 овци, па затоа $k = 1$ т.е. стадото брои 421 овца.

86. Нека бараниот број е x и да го разгледаме бројот $x + 1$. Овој број е делив со 2, 3, 4, 5, 6 и 7. Од $\text{НЗС}(2, 3, 4, 5, 6, 7) = 420$ добиваме дека $x + 1 = 420k$, каде k е природен број. Но, x е најмалиот број со бараното својство па затоа $k = 1$, т.е. $x + 1 = 420$ односно $x = 419$.

87. Важи $\text{НЗС}(5, 6, 8, 9) = 360$. Од

$$3000 = 8 \cdot 360 + 120 \text{ и } 4000 = 11 \cdot 360 + 40$$

следува дека содржатели на бројот 360 кои се поголеми од 3000 и помали од 4000 се $9 \cdot 360, 10 \cdot 360, 11 \cdot 360$. Понатаму, броевите

$$9 \cdot 360 + 1 = 3241, 10 \cdot 360 + 1 = 3601, 11 \cdot 360 + 1 = 3961$$

при делење со 5, 6, 8 и 9 даваат остаток 1 и се поголеми од 3000, а помали од 4000. Но,

$$3241 = 190 \cdot 17 + 11, 3601 = 211 \cdot 17 + 14, 3961 = 233 \cdot 17,$$

па затоа бараниот број е 3961.

88. Бидејќи $\text{НЗД}(5, 9) = 1$ бројот $\overline{x13y}$ е делив со $45 = 5 \cdot 9$ ако и само ако истовремено е делив и со 5 и со 9. Бројот $\overline{x13y}$ е делив со 5 ако и само ако $y = 0$ или 5.

За $y=0$ бројот $\overline{x130}$ е делив со 9 ако и само ако $x=5$.

За $y=5$ бројот $\overline{x135}$ е делив со 9 ако и само ако $x=9$.

Значи бараните броеви се 5130 и 9135.

89. Ако бараните броеви се зголемат за 1, тогаш тие ќе бидат деливи со 3, 4 и 5. Значи бараните броеви ќе бидат од видот $60k-1$, каде k е природен број. Притоа бидејќи броевите се трицифрени потребно е $k=2,3,\dots,16$. Според тоа, бараниот збир е

$$119+179+239+\dots+899+959=(119+959)+(179+899)+\dots+(479+599)+539 \\ =7\cdot 1078+539=8085.$$

90. Број кој при делење со 200 и 240 дава остаток 50 е од видот $ab+50$, каде $b=\text{НЗС}(200,240)=1200$. Значи, бараниот број е од видот $1200a+50$, каде $a\in\mathbf{N}$ и како тој се наоѓа меѓу 3000 и 4000 добиваме дека тоа е бројот 3650.

91. Од условот на задачата заклучуваме дека бројот на извидници-те во одредот се дели со 4 и со 6. Бидејќи $\text{НЗС}(4,6)=12$ добиваме дека тој број е $12k$, каде k е природен број. Во одредот има повеќе од 40, а помалку од 50 членови па затоа $40<12k<50$. Ова е можно за $k=4$, т.е. бројот на извидниците е $12\cdot 4=48$.

92. Нека бараните броеви се a и b . Од $\text{НЗД}(a,b)=24$ имаме $a=24m$ и $b=24n$. Сега $a+b=168$, па затоа $24m+24n=168$. Според тоа $24(m+n)=168$, односно $m+n=7$. Од $m+n=7$ добиваме $m=1, n=6$, или $m=2, n=5$, или $m=3, n=4$, или $m=4, n=3$, или $m=5, n=2$, или $m=6, n=1$. Конечно, бараните броеви се 24 и 144, 48 и 120, 72 и 96.

93. Од $\text{НЗД}(a,b)=14$ следува $a=14m$ и $b=14n$. Сега имаме

$$14m\cdot 14n=\text{НЗС}(a,b)\cdot \text{НЗД}(a,b)=14\cdot 770,$$

т.е. $m\cdot n=55$. Од $55=1\cdot 55=5\cdot 11$ и фактот дека броевите a и b не се меѓусебно деливи добиваме $(m,n)\in\{(5,11), (11,5)\}$.

Конечно, бараните броеви се $5\cdot 14=70$ и $11\cdot 14=154$.

94. I начин. Нека бараните броеви се a и b . Бидејќи

$$1350=15\cdot 15\cdot 6=15\cdot 15\cdot 2\cdot 3,$$

можни се следните комбинации:

$$a=15, b=15 \cdot 6=90; a=15 \cdot 2=30, b=15 \cdot 3=45$$

и обратно.

II начин. Нека бараните броеви се a и b . Но,

$$ab = \text{НЗД}(a, b) \cdot \text{НЗС}(a, b),$$

па затоа $1350 = 15 \cdot \text{НЗС}(a, b)$, т.е. $\text{НЗС}(a, b) = 90$. Делители на бројот 90 кои се деливи со 15 се: 15, 30, 45 и 90. Очигледно, условите на задачата ги задоволуваат само 15 и 90, односно 30 и 45.

95. Од $\text{НЗД}(a, b) = 8$ добиваме $a = 8m$ и $b = 8n$ за некои природни броеви m и n . Значи, $384 = a \cdot b = 8n \cdot 8m$ т.е. $m \cdot n = 384 : 64 = 6$. Од $6 = 1 \cdot 6 = 2 \cdot 3$ добиваме $m = 1$ и $n = 6$ или $m = 2$ и $n = 3$ и обратно. Според тоа, бараните броеви се 8 и 48 или 16 и 24.

96. Бидејќи $18 = 2 \cdot 9$ и $\text{НЗД}(2, 9) = 1$ доволно е докажеме дека разгледуваниот број е делив со 2 и со 9. Бројот $\underbrace{666 \dots 666}_{1995 \text{ пати}}$ е парен, па затоа е делив со 2. Но, тој е делив и со 9 бидејќи збирот на неговите цифри е $1995 \cdot 6 = 11970$ е делив со 9.

97. За дадениот број имаме

$$\begin{aligned} \underbrace{111 \dots 111}_{100 \text{ пати}} \underbrace{222 \dots 222}_{100 \text{ пати}} &= \underbrace{111 \dots 111}_{100 \text{ пати}} \underbrace{000 \dots 000}_{100 \text{ пати}} + \underbrace{222 \dots 222}_{100 \text{ пати}} \\ &= \underbrace{111 \dots 111}_{100 \text{ пати}} (\underbrace{999 \dots 999}_{100 \text{ пати}} + 1) + 2 \cdot \underbrace{111 \dots 111}_{100 \text{ пати}} \\ &= \underbrace{111 \dots 111}_{100 \text{ пати}} (9 \cdot \underbrace{111 \dots 111}_{100 \text{ пати}} + 1) + 2 \cdot \underbrace{111 \dots 111}_{100 \text{ пати}}. \end{aligned}$$

Ако ставиме $\underbrace{111 \dots 111}_{100 \text{ пати}} = x$, тогаш добиваме

$$\underbrace{111 \dots 111}_{100 \text{ пати}} \underbrace{222 \dots 222}_{100 \text{ пати}} = x(9x + 1) + 2x = 9x^2 + 3x = 3x(3x + 1).$$

Броевите $3x$ и $3x + 1$ се последователни природни броеви, што значи $\underbrace{111 \dots 111}_{100 \text{ пати}} \underbrace{222 \dots 222}_{100 \text{ пати}}$ е производ на два последователни природни броеви.

98. Дропката $\frac{A}{B}$ може да се скрати со 36 ако броителот и именителот се деливи со 4 и со 9. Цифрата b ја определува деливоста на броевите A и B со 4. Јасно, A е делив со 4 ако е $b = 0$ или $b = 4$ или $b = 8$, а

истовремено и бројот B е делив со 4. Но, за $b=0$ и $b=8$ бројот B не се дели со 9, па затоа единствена можност е $b=4$, за која $B=55548$ се дели со 9. Треба да ја определиме цифрата a за да бројот $A=\overline{a555664}$ се дели со 9, т.е. збирот $a+3\cdot 5+2\cdot 6+4=a+31$ да се дели со 9. Јасно, тоа е можно за $a=5$. Конечно, единствено решение е $b=4$ и $a=5$.

99. Бидејќи $1989=3\cdot 3\cdot 13\cdot 17$ следува:

17	13	3	3
3	3	13	17
13	17	3	3
3	3	17	13

РЕКОА ЗА МАТЕМАТИКАТА

Суштината на математиката е во нејзината слобода.

Г. Кантор

Најдобриот начин нешто да се научи е - самостојно да се открие.

Д. Полја

Суштината на математиката е - во нејзината вечна младост.

Е. Бел

3. ЛОГИЧКИ ГЛАВОБОЛКИ

3.1. ЗАДАЧИ

Задача 1. Располагаме со два часовници, од кои едниот доцни 1 час во текот на едно деноноќие, а другиот воопшто не работи. Кој часовник повеќе пати ќе покаже точно време?

Задача 2. Коста, Јане и Владимир засадиле дрвца: круша, јаболка и вишна. Секој засадил по едно дрво, чие име не започнува на иста буква како неговото име. Кој кое дрво го засадил, ако се знае дека Владимир не засадил круша?

Задача 3. Еден столб е висок $20m$. Полжав се качува по него така, што дење се качува $5m$ нагоре, а ноќе се лизга $4m$ надолу. За колку дена полжавот ќе се качи на врвот на столбот?

Задача 4. Во трка на $100m$ се натпреварувале два атлетичари. Ацо победил оставајќи го Боро $10m$ зад себе. Потоа го повториле натпреварот, така што Ацо својата патека ја продолжил за $10m$ (толку го поместил својот старт наназад). Ако и двајцата трчале со иста брзина, како и првиот пат, најди го победникот во новата трка.

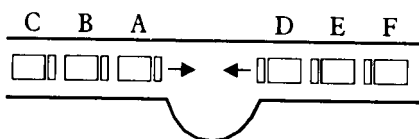
Задача 5. Мирко во забавен парк купил 5 жетони и почнал да игра против компјутерот. Во секоја партија која ја победувал Мирко како награда добивал по 5 наградни жетони. По завршувањето на играта Мирко се пофалил дека одиграл 50 партии и 8 пати го победил компјутерот.

Неговиот другар Горазд тврдел дека тоа не е можно. Кој бил во право, Мирко или Горазд?

Задача 6. Природните броеви од 1 до 1998 се запишани еден по друг: 1, 2, 3, 4, ..., 1998. Дозволено е да избришеме неколку последователни броеви и наместо нив да го запишеме бројот на избришаните броеви. На пример, ако сме ги избришале броевите 3, 4, 5 и 6, ја добиваме низата 1, 2, 4, 7, ..., 1998. Дали може бришењето да се направи така што на крајот во низата да останат само броевите 999 и 1000 (не мора во овој редослед).

Задача 7. Група од 64 момчиња треба да поделат 2012 цамлии. Докажете дека без разлика на тоа како ќе се изврши поделбата секогаш ќе има две момчиња кои добиле ист број цамлии.

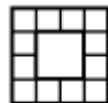
Задача 8. Во рибникот се наоѓаат 25 гладни штуки. Една штука, за да се засити, треба да изеде 3 штуки (гладни или сити). Колку штуки можат најмногу да останат во рибникот, така да сите штуки кои ќе останат се сити?



Задача 9. Шест камиони се сретнале на селски пат во непријатна ситуација. Камионите A, B и C возат во една насока, камионите D, E и F возат во спротивната насока, а патот е таков, што два камиони не можат да се разминат. Непријатната средба се случила на оној дел од патот каде постои паркинг на кој може да застане еден камион.

Дали можат камионите, користејќи го паркингот, да изведат маневар после кој секој камион ќе го продолжи патот во својата насока?

Задача 10. Тврдината на цртежот десно е заштитена со 12 бункери. Во овие бункери треба да се распоредат 18 војници, така да секоја од четирите страни ја бранат точно по 7 војници и во секој бункер да има барем по еден војник. Решението прикажи го со цртеж.



Задача 11. Седум монети од по еден денар се распоредени на стол, едена до друга, со “писмото” свртени нагоре. Во еден потег е дозволено да се свртат кои било 5 монети.

а) Дали може, после неколку потези, сите монети да бидат свртени со “грбот” нагоре.

б) Дали може истото да се постигне ако во еден потег се вртат 4 монети?

Задача 12. На ковачот му се потребни 5 минути да поткова една нога на коњот. За да се поткова, коњот го подигнува копитото. Коњот може да стои на три нозе, но не може на помалку од три. За колку минути најмалку може 5 ковачи да потковаат 6 коњи? (Една нога потковува само еден ковач.)

Задача 13. За прицврстување на една коњска потковица ковачот троши 5 минути. Колку најмалку време треба 48 ковачи да потковаат 60 коњи, ако при потковувањето коњот треба да стои на три нозе?

Задача 14. На еден круг се напишани по ред броевите од 1 до 12, како броевите на часовникот. Во еден чекор можеме да ги замениме местата на два произволно одбрани броја.

а) Со колку најмалку чекори можеме запишаните броеви да ги распоредиме во обратна насока?

б) Колкав е најмалиот број чекори ако во круг се запишани броевите од 1 до 13.

Задача 15. Двајца возрасни луѓе и две деца треба да се превезат од еден на друг брег на една река. Како ќе го направат тоа, ако се знае дека сите умеат да веслаат и дека на располагање имаат чамец во кој можат да се сместат две деца или само еден возрасен човек?

Задача 16. Семејството Цветкоски, во кое има татко тежок 90kg, син 48kg, мајка 67kg и ќерка 45kg, треба да премине река со чамец чија носивост е 100kg. Како ќе го направат тоа, ако се знае дека сите знаат да веслаат?

Задача 17. Тарзан треба да премине преку висечки мост кој има носивост до 70kg и истовремено да пренесе два кокосови орева. Тежината

на Тарзан е 69kg и 500g , а секој кокосов орех тежи 400g . Како Тарзан може да премине преку мостот?

Задача 18. Деспина му вели на Дамјан:

- Еве ти еден кибрит. Во него има 50 чкорчиња. Извади определен број чкорчиња, најмалку едно, а најмногу 10 и стави ги во десниот џеб. Потоа земи онолку дрвца колку што изнесува збирот на цифрите на десетките и единиците на бројот на чкорчињата во кибритот и нив стави ги во левиот џеб.

Откако Дамјан постапи според упатствата Деспина го праша:

- Дали знаеш колку чкорчиња ти останаа во кибритот?

- Но, јас заборавив колку чкорчиња ставив во десниот џеб воздивна Дамјан.

Помогни му на заборавниот Дамјан и кажете колку чкорчиња останаа во кибритот.

Задача 19. Пред да ги земе клучевите од заспаниот затворски чувар Васил пресметал дека, во најлош случај, му се потребни 21 обид за да открие кој клуч која келија ја отклучува. Колку келии има затворот?

Задача 20. На едно купче има 81 орех. Андон, Ана и Зорица ги разграбале орехите. Андон зел 31, Ана 26 и Зорица 24 ореви. Девојките се побуниле, бидејќи зеле помалку ореви од Андон. На тоа Андон предложил: “Може да ја исправиме грешката, така што еден од нас тројцата ќе ги изброи своите ореви и од еден од останатите двајца ќе земе половина од бројот на своите ореви. Потоа истото ќе го направи еден од останатите двајца и на крај истото ќе го направи третиот, со што сите ќе добиеме еднаков број ореви.” Ана и Зорица се согласиле со предлогот и после кратко размислување направиле како што предложил Андон, со што сите имале ист број ореви. Како го направиле тоа?

Задача 21. Ефтим тргнал на пазар и со себе понел зелка и повел коза и волк. Кога дошол до реката, затекнал чамец во кој со себе можел да ја понесе само зелката, или само козата, или само волкот. Но во негово отсуство козата ќе ја изеде зелката, а волкот ќе ја изеде козата. Како може Ефтим на другиот брег на реката да ги превезе и зелката и козата и волкот?

Задача 22. Тројца истражувачи имаат тројца водичи со човекојадни особини, кои се манифестираат кога водичите се во мнозинство. Истражувачите и водичите треба да преминат преку река, при што на располагање им е чамец во кој можат да се превезат само двајца од нив. Како можат истражувачите безбедно да ја поминат реката?

Задача 23. Кнезот Ростислав имал два сина, подеднакво умни, па затоа не можел да се одлучи кој да го наследи. После долго размислување ги повикал и им рекол:

- Секој нека го земе својот коњ и да оди во летната резиденција. Оној чиј коњ ќе стигне втор, ќе биде наследникот.

Синовите го послушале и заедно се упатиле кон летната резиденција. Но, кога наближиле почнале да се вртат во круг околу резиденцијата. Ги здогледал еден старец и ги прашал каков проблем имаат. Откако му објасниле, тој ги повикал да слезат и им кажал само една реченица, после која синовите се натпреварувале кој прв ќе стигне на целта. Што им рекол старецот?

Задача 24. На фигурата (цртеж десно) направена од кибритни чкорчиња преместете две чкорчиња така што да добиете четири квадратчиња.



Задача 25. Од фигурата (цртеж десно) направена од кибритни чкорчиња извадете четири чкорчиња, така што да останат точно пет квадратчиња.



Задача 27. Од четирите квадратчиња на фигурата (цртеж десно) направена од кибритни чкорчиња направете три квадрати со преместување на само три чкорчиња.



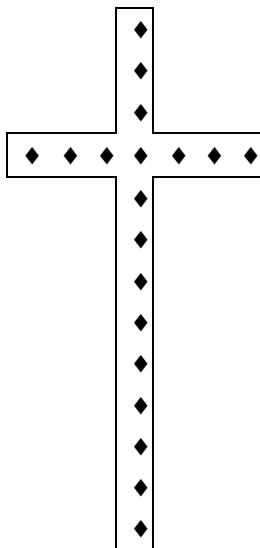
Задача 27. Од фигурата (цртеж десно) направена од кибритни чкорчиња, отстранете четири чкорчиња така што да добиете три квадратчиња.



Задача 28. Од четири чкорчиња може да се направи еден квадрат. Од 12 чкорчиња може да се направи поголем 2×2 квадрат, кој се состои од четири мали квадрати, цртеж десно. Колку чкорчиња се потребни за да се направи 20×20



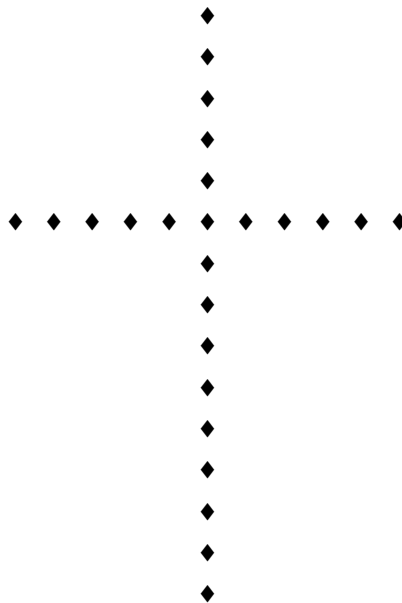
квадрат, кој се состои од 400 мали квадрати?



Задача 29. Калуѓерот Методи имал крст украсен со дијаманти (види цртеж). После секоја утринска молитва тој ги броел дијамантите трипати: оддолу нагоре по права линија, оддолу нагоре и надесно и оддолу нагоре и налево. Но, еднаш крстот му се скршил и Методи го однесол кај златарот Бранко да го поправи. Бранко, знаејќи како Методи ги брои дијамантите украде два дијаманти, но така ги подредил што Методи тоа не го забележал. Како златарот Бранко ги подредил дијамантите?

Задача 30. Господинот Павле Надуенкоски имал 25 дијаманти, а знаел да брои само до 15. Затоа дијамантите ги подредил во облик на крст како на цртежот деснопри што кога брои оддолу нагоре и оддолу нагоре па лево или десно секогаш има по 15 дијаманти. Антонио, неговиот слуга, му украде 4 дијаманти, а другите ги подредил така што Павле не ја забележал кражбата.

Како Антонио ги подредил дијамантите за да Павле не ја забележи кражбата?



Задача 31. Премести само едно чкорче за да добиеш точно равенство: $V + II = IV$

Задача 32. Харалампие има на располагање вага, еден тег од 200g и 9kg брашно. Кога мери 2kg брашно тој тоа го прави со десет мерења. Помогнете му на Харалампие тоа да го направи само со три мерења.

Задача 33. Димитрија има на располагање вага, еден тег од $250g$ и $9kg$ брашно. Кога мери $2kg$ брашно тој тоа го прави со осум мерења. Помогнете му на Димитрија тоа да го направи само со три мерења.

Задача 34. Од 3 топчиња, на изглед еднакви, едно е полесно од останатите. Колку најмалку мерења треба да извршите на вага со два таса (без тегови) за да го одделите полесното топче?

Задача 35. Од 8 топчиња, на изглед еднакви, едно е полесно од останатите. Колку најмалку мерења треба да извршите на вага со два таса (без тегови) за да го одделите полесното топче?

Задача 36. Располагаме со 9 наизглед еднакви топчиња, од кои едното е нешто полесно. Колку најмалку мерења треба да извршиме, на вага без тегови, за да констатираме кое топче е полесно?

Задача 37. Во кутија се наоѓаат 27 топчиња кои се на изглед еднакви, но едно е нешто полесно од останатите. Колку најмалку мерења треба да се извршат, на вага без тегови, за да се одреди кое топче е полесно?

Задача 38. Од 24 топчиња, на изглед сите еднакви, едно е полесно. Колку најмалку мерења ни се потребни, на вага без тегови за да констатираме кое топче е полесно?

Задача 39. Имаме 32 наизглед еднакви топчиња, но сите се со различни тежини. Располагаме со вага без тегови. Опишете како со 46 мерења може да се најде најлесното и најтешкото топче.

Задача 40. Во 10 пакети се наоѓаат затворени пакувања со кафе. Знаеме дека 9 пакети се наполнети со пакувања од $100g$, а еден пакет со пакувања од $90g$ кафе. Колку најмалку мерења, со вага која мери тежини, се потребни за да констатираме во кој пакет се пакувањата од $90g$, ако можеме да ги вадиме поединечните пакувања од пакетите? (Притоа измерените тежини се во бруто износ, т.е. пакувањата се мерени заедно со кесата за пакување.)

Задача 41. Златарата испорачала 11 пакети сребрени шипки во пакувања од по 17 парчиња, при што секоја шипка е тешка по 13kg. Констатирано е дека во еден од пакетите се испорачани шипки од по 12kg. Како со помош на само едно мерење на избаждарена вага ќе констатирате за кое пакување станува збор?

Задача 42. Кои маси можеме да ги измериме ако располагаме само со тегови со маси 1kg, 3kg, 9kg ?

Задача 43. Како со помош на садови од 3 и 5 литри од чешма во канта од 20 литри да туриме:

- а) 1 литар вода,
- б) 7 литри вода.

Задача 44. Симон продавал вино. На пазар понел полна канта од 8 литри и две празни канти од по 5 и 3 литри. Првиот купувач побарал 4 литри вино. Помогнете му на Симон да измери 4 литри со помош на кантите кои ги понел на пазар?

Задача 45. Лозарот Крсте има во бурето 15 литри вино. Како на својот пријател Трајко да му измери 8 литри, ако на располагање има само два сада од 5 и 9 литри?

Задача 46. Овчарот Пејо има само 3 ведро. Едното собира 12 литри, другото 7 литри, а третото 5 литри. Најголемото ведро е полно со млеко. Помогнете му на Пејо да го раздели млекото на два еднакви дела?

Задача 47. Богдан и Толе имаат еднаков број овци, кои заедно ги чуваат. Откако ги измолзиле наполниле едно ведро од 10 литри. На бачилото имале уште две ведро од по 3 и 7 литри. Како постапиле Богдан и Толе за да го поделат млекото

Задача 48. Располагаме со три сада. Првиот е од 10 литри, вториот од 7 литри, а третиот од 4 литри. Првиот сад е полн со вино. Користејќи ги само овие три сада, подели го виното од првиот сад на два еднакви дела.

Задача 49. Од еден сад во кој се наоѓаат 20 литри вода Марко треба во друг, ист таков сад, да одлие 5 литри вода. Како ќе го направи тоа со помош на два празни сада од 3 и 7 литри.

Задача 50. Дедо Доротеј му раскажува на својот внук Кирил:

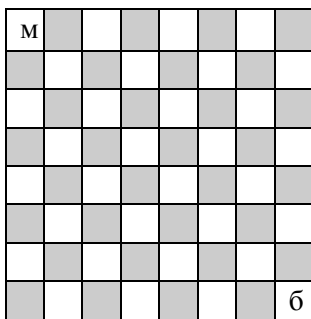
- Во една соба имало само пет столици. На нив седеле четири мајки, четири ќерки, три баби, две прабаби и една прапрабаба. Притоа секоја од нив седела на посебна столица.

- Тоа е невозможно- извика Кирил.

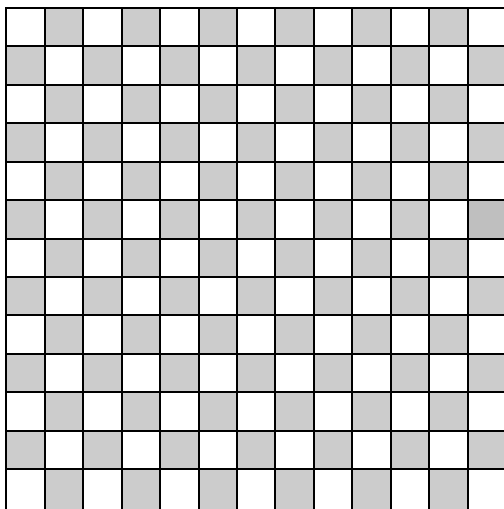
- Јас со свои очи видов- одговори дедо Доротеј.

Дали е можно дедо Доротеј да ја зборува вистината?

Задача 51. Колку правоаголници кои се состојат од 12 полиња може да се избројат на шаховска 8×8 табла?

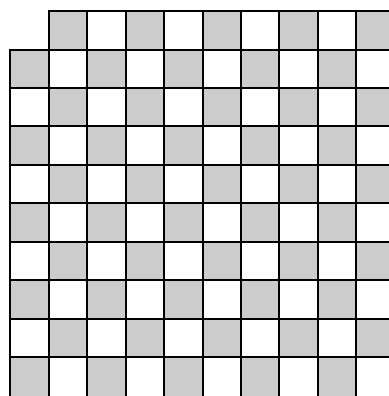
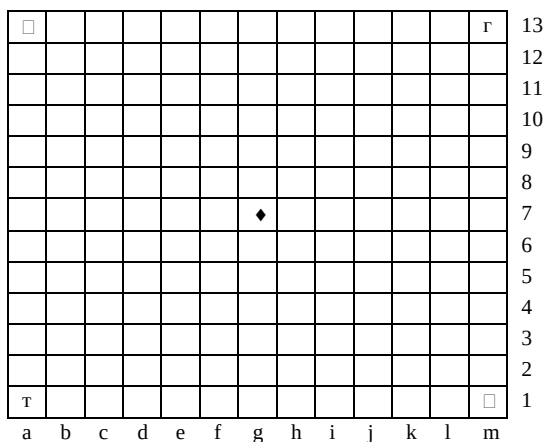


Задача 52. Во левиот горен агол на шаховска 8×8 табла се наоѓа мајмун, а во долниот десен агол се наоѓа банана. Дали може мајмунот да стигне до бананата така што претходно да стапне само по еднаш на секое поле, ако се движи по едно поле преминувајќи само на соседни полиња? За соседни полиња ги сметаме само полињата кои имаат заедничка страна.



Задача 53. Дали може шаховска табла со димензии 13×13 да се покрие со плочки од домино со димензии 2×1 , така што плочките нема да се преклопуваат и нема да излегуваат надвор од таблата.

Задача 54. Во левиот долен агол на 13×13 плоча се наоѓа штрумфот Текнувало, а во десниот горен агол се наоѓа страшниот Гаргамел. И Текнувало и Гаргамел можат да се движат по едно поле вертикално, хоризонтално или косо (дијагонално). На средината на плочата има дупка и на тоа поле не може да дојде ниту едниот ниту другиот. Гаргамел и Текнувало се движат наизменично, т.е. ако едниот се придвижи за едно поле, тогаш другиот се придвижува за едно поле итн. Дали може Текнувало да се скрие во една од куќичките кои се наоѓаат во другите два агли на плочата?



Задача 55. Дали може шаховска плоча со димензии 10×10 , од која се отстранети две полиња на спротивните темиња (види цртеж десно горе), да се покрие со домино 2×1 плочки, така што плочките нема да се преклопуваат и нема да излегуваат надвор од плочата.

Задача 56. Правоаголна табла е поделена на еднакви квадрати со страни 1cm . Располагаме со повеќе од 100 плочки како на цртежот десно, кои се состојат од три квадрати со страна 1cm . Дали може со овие плочки да се покрие правоаголна табла, ако плочките на се поклопуваат и не излегуваат надвор од таблата, ако димензиите на таблата се:



а) 3cm и 100cm ,

б) 3cm и 101cm .

Задача 57. Синот бара од таткото едно евро. Таткото рекол: “Добро, но треба да го заработиш. Преброј колку различни квадрати 2×2 и 3×3 има на квадратна 8×8 табла. За секој квадрат 2×2 ќе ти дадам по

2 евро центи, а за секој квадрат 3×3 ќе ти дадам по 3 евро центи.” Кој од овие два вида квадрати треба да го избере синот за да заработи едно евро. (Еврот има 100 евро центи.)

Задача 58. Полињата на квадратна 8×8 табла ги боиме последователно во црвено, така да, после боењето на секое поле, фигурата која се состои од обоените полиња е осно симетрична. Покажете како е можно при наведениот услов да се обојат 28 полиња.

Задача 59. Билјана и Деспина ја играат следната игра. Билјана кажува еден природен број кој не е поголем од 10. Деспина на овој број му додава природен број, кој не е поголем од 10 и го кажува добиениот збир. Така наизменично додаваат на претходниот број броеви кои не се поголеми од 10. Победник е таа која ќе каже 100.

Дали постои начин Билјана постојано да победува?

Задача 60. На масата имаме 15 монети. Првиот играч зема 1, 2 или 3 монети. Потоа вториот играч зема 1, 2 или 3 монети и т.н. додека се земат сите монети. Играта ја губи оној играч, кој треба да земе последен.

Кој играч може да ја добие играта и на каков начин?

Задача 61. На масата има две купчиња со еднаков број камчиња, при што во секое купче има повеќе од едно камче. Рампо избира едно од купчињата и зема од избраното купче едно или повеќе камчиња. Методија исто така избира едно од купчињата и зема едно или неколку камчиња итн. Играта ја губи оној играч кој треба да земе последен.

Дали постои начин со кој Методија секогаш ја добива играта?

Задача 62. На масата имаме две купчиња со различен број камчиња, при што во секое купче имаме повеќе од две камчиња. Илија избира едно од купчињата и зема од избраното купче едно или повеќе камчиња. Костадин исто така избира едно од купчињата и зема едно или неколку камчиња и т.н. Играта ја губи оној играч кој треба да земе последен.

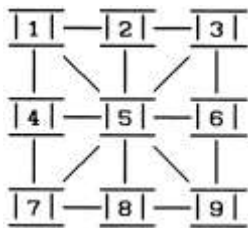
Дали постои стратегија (начин) со која Илија секогаш ја добива играта?

Задача 63. Јасна и Маја ја играат следната игра: од две купчиња со камчиња Јасна го зема едното, а другото произволно го разделува на две купчиња. Маја зема едно од двете нови купчиња, а другото произволно го разделува на две нови купчиња итн. Играта ја губи онаа која не може да го подели преостанатото купче.

Во кој случај со вистинска стратегија играта ја добива Јасна, а во кој случај Маја? Која е стратегијата?

Задача 64. Нацртан е квадрат и истиот е поделен на 9 еднакви квадратни полиња. Потоа двајца играчи, наизменично, обележуваат со свој знак (на пример со икс и крукче) по едно од деветте полиња, а победник е оној што прв ќе успее три негови знаци да се најдат на иста права (хоризонтално, вертикално или дијагонално).

Покажете како треба да постапи секој од играчите, за оваа игра, без разлика како ќе постапи неговиот противник, да заврши ако не со негова победа, тогаш барем нерешено.



Задача 65. Оваа игра ја играат двајца играчи со по три истобојни жетони, да кажеме сини и бели, и истите по слободен избор наизменично ги поставуваат на слободните квадрати. Притоа секој од нив се труди да направи “дама”, т.е. три свои жетони да постави во еден ред (хоризонтално, вертикално или дијагонално), бидејќи победник е играчот што прв тоа ќе го постигне. Ако ниту еден играч при самото поставување на жетоните не успее да направи “дама”, тогаш играчите наизменично повлекуваат по еден од своите жетони на едно од соседните полиња, се додека еден од нив не направи “дама”. Дали може еден од играчите да игра така што секогаш да победува.

Задача 66. Во круг на еднакви растојанија трчаат еден зад друг: Ангел, Бранко, Цветан, Димко, Елим, Филип и Горан. Меѓу нив сум и јас. Следбеникот на мојот следбеник е претходник на оној кој е еднакво оддалечен од Елим колку и оној чиј следбеник е претходник на мојот претходник.

Презимето ми е Јакопетревски, а името?

Задача 67. При традиционалниот избор за спортист на годината во најтесен избор влегле Јанкоски, Маркоски и Петрески.

Секој член на жирито на ливче ги испишал презимињата на тројцата спортисти. Третото место на гласачкото ливче се вреднува одреден број бодови, второто место вреди повеќе бодови, а првото место најмногу бодови.

После прегледувањето на сите гласачки ливчиња констатирано е дека победил Јанкоски со 17 бодови, второто место го освоил Петрески со 10 бодови, а третото Маркоски со 8 бодови.

Исто така е констатирано дека Петрески и Јанкоски не биле рангирани ист број пати пред Маркоски.

Колку членови имало жирито и каков бил распоредот на спортистите на секое ливче?

Задача 68. Учениците A, B, V, G, D, E учествувале на математички натпревар. Два ученика ги решиле сите задачи. На прашањето ”Кој ги реши сите задачи?” добиени се одговорите:

1) A и D ; 2) B и E ; 3) E и A ; 4) B и G ; 5) B и A .

Се знае дека во еден од одговорите не е наведен ниту еден ученик кој ги решил сите задачи, а дека во останатите четири одговори е наведен точно по еден ученик кој ги решил сите задачи. Кои ученици ги решиле сите задачи? Најди ги сите решенија.

Задача 69. Драган, Марко и Лимбе навиваат, секој за по еден од следниве три клуба: Барселона, Реал и Челзи. На прашањето за кој клуб навиваат ги дале следниве одговори: Драган: “Јас не навивам за Реал.”, Марко: “Јас навивам за Реал” и Лимбе: “Јас не навивам за Барселона”. Ако знаеме дека само еден од нив ја говори вистината, најдете кој за кој клуб навива.

Задача 70. Располагаме со 14 бели и 13 црни коцки, секоја со раб 1cm. Од нив составуваме коцка со раб 3cm. Под столб ќе ги подразбираме секои три коцки во еден ред по должина, висина и ширина на големата коцка. Дали може да ги наредиме малите коцки така што во секој столб да има непарен број:

- а) бели коцки,
- б) црни коцки.

Задача 71. Двајца татковци и двајца синови играле шах по системот секој со секого по една партија. Колку притоа најмалку партии се одиграни, а колку најмногу?

Задача 72. На еден турнир учествувале 8 екипи поделени во две групи од по 4 екипи. Во првиот круг секоја екипа играла со секоја од својата група по еден натпревар. Победниците во групите играле уште еден натпревар за победник на турнирот. Колку натпревари се вкупно одиграни?

Задача 73. На колку начини може да се состави букет од четири ружички ако имаме 1 црвена, 1 жолта, 1 бела, 1 портокалова, 1 лилјакова и 1 розева ружичка?

Задача 74. На еден натпревар учествувале пет кошаркарски екипи: A, B, C, D и E . На колку начини овие екипи може да се подредат на крајот од натпреварот?

Задача 75. На еден натпревар учествувале 30 ученици. Од нив 25 ја решиле првата задача, 24 ја решиле втората, 23 третата и 22 четврта задача. Дали може да се заклучи дека најмалку четири ученици ги решиле сите четири задачи?

Задача 76. Користејќи се само со парните цифри, колку може да се напишат:

- а) двоцифрени броеви,
- б) трицифрени броеви.

Задача 77. Најди го збирот на сите четирицифрени броеви чији цифри се од множеството $\{2, 3, 4, 6\}$, (Цифрите можат да се повторуваат, на пример: 6263, 4444).

Задача 78. Во текот на еден месец една игра на интернет ја играле 510015 луѓе. Играта се состои од 10 нивоа, но ниту еден од учесниците не стигнал до највисокото ниво. Правилата на игра бараат да се игра 4 пати, при што секој од учесниците го исполнил условот и секогаш играта ја завршувал на различни нивоа. Колку најмалку учесници имаат остварено

ист успех во игрите односно во првата игра стигнале до исто ниво, во втората игра стигнале до исто ниво, во третата игра стигнале до исто ниво и во четвртата игра стигнале до исто ниво.

3.2. РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ

1. Повеќе пати ќе покаже точно време часовникот кој воопшто не работи. Имено, тој во текот на секое деноноќие двапати ќе покажува точно време.

2. Со пополнување на табелата се добива дека Коста засадил вишна, Јован круша и Владимир јаболка.

	круша	јаболки	вишна
Коста	*	*	+
Јане	+	*	*
Владимир	*	+	*

3. Во секое од првите 15 деноноќија полжавот се искачува по 1m нагоре. Значи, за првите 15 деноноќија полжавот ќе се искачи 15m. Но, шеснаесеттиот ден полжавот ќе се качи уште 5m и ќе се најде на врвот на столбот.

Според тоа, полжавот ќе се качи на врвот на столбот за 16 дена.

4. **Одговор.** Ако повторно го победил Боро.

5. Ако Мирко го победил компјутерот 8 пати, тој ќе добиел 40 наградни жетони, па заедно со купените 5 ќе одиграл вкупно 45 игри. Значи, Горазд бил во право.

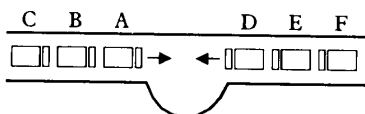
6. Такво бришење не е можно. На пример, ако прво останал бројот 999, после него нема доволно броеви (нема повеќе од 999) за да таа група броеви се замени со 1000. Од слични причини не е можно прво да остане и бројот 1000.

7. Ако претпоставиме дека сите момчиња добиле различен број џамлии, тогаш треба да има најмалку

$$0+1+2+\dots+63=(0+63)+(1+62)+\dots+(31+32)=32\cdot 63=2016 \text{ џамлии.}$$

Но, момчињата треба да поделат 2012 џамлии, па затоа мора да има барем двајца кои добиле ист број џамлии.

8. Во рибникот не може да останат 7 или повеќе сити штуки, бидејќи за да се заситат тие треба да изедат 21 или повеќе штуки, што значи дека во рибникот на почетокот треба да има најмалку 28 штуки, а не 25. Во рибникот ќе останат 6 штуки ако некоја штука изеде една штука, а потоа други 6 штуки ги изедат останатите $6\cdot 3=18$ штуки, вклучувајќи ја и штуката која прва изела една штука.



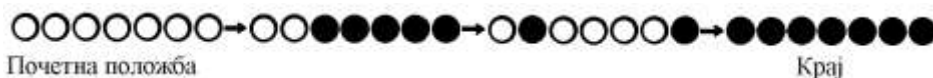
9. Најпрво камионот A ќе влезе во паркингот, камионите B и C ќе се повлечат назад. Камионите D , E и F ќе се разминат со камионот A , а потоа камионот A слободно го продолжува патот. Камионите D , E и F се повлекуваат пред паркингот. На аналоген начин како и камионот A , така и камионите B и C поединечно ќе се разминат со камионите D , E и F .

10. Можни се повеќе решенија на задачата, од кои две се прикажани на цртежот десно.

3	1	1	2
1			1
1			1
2	1	1	3

1	1	1	4
1			1
1			1
4	1	1	1

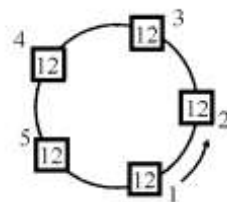
11. Нека “писмото” е празниот круг, а “грбот” е исполнетиот круг. Решението под а) го добиваме во три потези, види цртеж долу.



Одговорот под б) е дека не може. Имено, на почетокот бројот на монетите со “грб” нагоре е еднаков на нула. Со вртење на кои било 4 монети бројот на монетите свртени со “грб” нагоре се менува за парен број, па во другиот случај секогаш ќе имаме парен број монети свртени со “грб” нагоре. Според тоа никогаш не може да добиеме 7 (непарен број) монети свртени со “грб” нагоре.

12. За потковување на 6 коњи треба да се потрошат $24 \cdot 5$ минути. Пет ковачи не може работата да ја завршат за помалку од $(24 \cdot 5) : 5 = 24$ минути. Бидејќи 24 не може да се подели со 5, заклучуваме дека потковувањето на може да заврши за помалку од 25 минути. Ќе покажеме дека тоа е можно да заврши за 25 минути. Да замислиме дека коњите се означени со броевите 1, 2, 3, 4, 5 и 6 и дека се наредени во круг. За првите 5 минути 5 ковачи ќе потковаат по една нога на коњите 1, 2, 3, 4 и 5. Во следните 5 минути ќе потковаат по една нога на коњите 2, 3, 4, 5 и 6. Потоа за 5 минути ќе потковаат по една нога на коњите 3, 4, 5, 6, 1, па следните 5 минути ќе потковаат по една нога на коњите 4, 5, 6, 1, 2. До сега потрошиле $4 \cdot 5 = 20$ минути. Во следните 5 минути четири ковачи ќе потковаат по една нога на коњите 6, 1, 2 и 3.

13. Ги делиме коњите во 5 групи од по 12 коњи и ги подредуваме онака како што е прикажано на цртежот десно. За првите 5 минути 48 ковачи ќе потковаат по една нога на коњите од групите 1, 2, 3 и 4. Ковачите се поместуваат во правецот на стрелката на часовникот и во следните 5 минути ќе потковаат по една нога на коњите од групите 2, 3, 4 и 5. Потоа по една нога на коњите од групите 3, 4, 5 и 1, па по една нога на коњите од групите 4, 5, 1 и 2 и конечно по една нога на коњите од групите 5, 1, 2 и 3. Според тоа, потребното време е 25 минути.



14. а) Потребни се најмалку пет чекори. На пример, без да ги поместуваме броевите 12 и 6, ги заменуваме местата на броевите во паровите: 1 и 11, 2 и 10, 3 и 9, 4 и 8, 5 и 7.

б) Најмалиот број чекори е 6. Се решава аналогно на претходниот случај, со тоа што не поместуваме еден број.

15. Најпрво на другиот брег ќе се префрлат двете деца, а едното ќе го врати чамецот назад. Потоа со чамецот ќе се превезе еден од возрасните, а другото дете ќе го врати чамецот назад. Сега повторно децата ќе се превезат на другиот брег и едно од нив ќе го врати чамецот назад, со кој ќе се превезе вториот возрасен човек. Конечно другото дете се враќа назад по својот другар и го превезува на другиот брег. Да забележиме дека, вкупно имаме девет преминувања на реката во обете насоки.

16. Најпрво на другиот брег ќе се префрлат синот и ќерката, а синот ќе го врати чамецот назад. Потоа со чамецот ќе се превезе мајката, а ќерката ќе го врати чамецот назад. Сега повторно ќе се превезат синот и ќерката и синот ќе го врати чамецот назад, со кој се превезува таткото. Конечно, ќерката се враќа назад по братот и го превезува на другиот брег.

17. Тарзан ќе жонглира со кокосовите ореви, при што едниот орех секогаш ќе биде во воздух и така најголемата тежина на мостот ќе биде $69kg\ 500g + 400g = 69kg\ 900g$, се што нема да ја надмине носивоста на мостот, која изнесува $70kg$.

18. Дамјан можел да земе било кој број дрвца од 1 до 10. Во кибритот останале: 49, 48, 47, 46, 45, 44, 43, 42, 41 или 40 чкорчиња. Кога од било кој од овие броеви го одземеме збирот на цифрите на десетки и единиците секогаш добиваме 36. Според тоа, на Дамјан му останале 36 чкорчиња.

19. Јасно, ако во затворот има една ќелија, тогаш проби не се потребни. Ако има две ќелии, тогаш со една проба може да определиме кој клуч која ќелија ја отклучува. Ако ќелиите се 3, тогаш потребни се најмногу 2 проби за да го најдеме клучот кој ја отклучува првата ќелија и уште една проба за да ги најдеме клучевите на другите две ќелии, што значи вкупно $2+1=3$ проби. Ако имаме 4 ќелии, тогаш за првата се доволни 3 проби и уште 3 проби за останатите или вкупно $3+3=6$ проби. Ако имаме 5 ќелии, доволни се $4+6=10$ проби. Ако ќелиите се 6, доволни се $5+10=15$ проби. Ако ќелиите се 7, доволни се $6+15=21$ проба. Според тоа, во затворот имаме 7 ќелии.

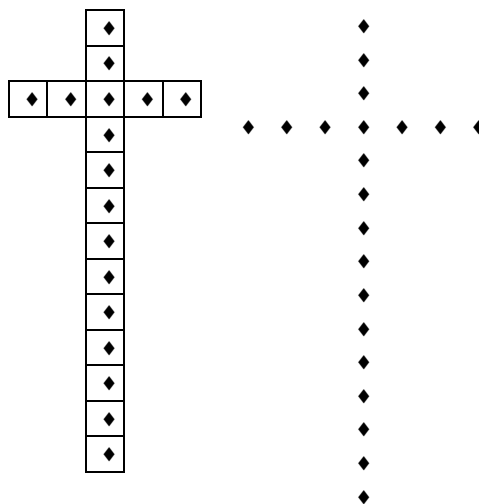
20. Прво Ана зела 13 ореви од Андон, после што имала 39 ореви, а Андон имал 18 ореви. Потоа Зорица зела од Ана 12 ореви, после што имала 36 ореви, а на Ана и останале 27 ореви. На крајот, Андон зел од Зорица 9 ореви, после што сите имале по 27 ореви.

21. Очигледно Ефтим смее заедно да ги остави само волкот и зелката, па затоа треба да постапи на следниот начин. Прво ќе ја пренесе козата и ќе се врати по волкот. Кога ќе го пренесе волкот ќе ја врати козата. Потоа ќе ја остави козата и ќе ја пренесе зелката. На крајот ќе се врати по козата.

23. Старецот им рекол: “Сменете ги коњите!”. Навистина, во условот што го поставил кнезот Ростислав стои: секој да го земе својот коњ, а наследник е оној чиј коњ ќе стигне втор на целта. Значи, не е потребно синот да стигне втор на целта, туку коњот. Така, после зборовите на старецот, секој од браќата го зел коњот на другиот брат и се трудел прв да стигне на целта, со што неговиот коњ стигнува втор и тој е наследникот.

111

29. Подредувањето кое Бранко го направил после кражбата е дадено на првиот цртеж десно.



30. Подредувањето кое Антонио го направил после кражбата е дадено на цртежот крајно десно.

31. Одговорот е даден на цртежот десно:

$$VI - II = IV$$

32. Харалампие треба да ја спроведе следната постапка:

- во првото мерење го става тегот од 200g на едниот тас и го дели брашното така што вагата да е во рамнотежа и ќе добие еден дел со тежина 4kg 400g и друг дел со тежина 4kg 600g.
- со второто мерење, без да користи тегови, делот со тежина од 4kg 400g ќе го подели на два дела со тежини 2kg и 200g;
- со третото мерење, со помош на тегот од 200g, од 2kg и 200g ќе извади 200g и ќе добие точно 2kg.

33. Димитрија треба да ја спроведе следната постапка:

- со првото мерење, без користење на тегови, брашното ќе го подели на два еднакви дела со тежини 4kg и 500g;
- со второто мерење, повторно без користење на тегови, едниот дел од 4kg и 500g ќе го подели на два дела од со тежини 2kg и 250g;
- со третото мерење, со помош на тегот од 250g, од еден дел од 2kg и 250g ќе извади 250g и ќе добие точно 2kg.

34. Доволно е само едно мерење. Имено, ставајќи на тасовите по едно топче, во случај на рамнотежа ќе констатираме дека преостанатото топче е полесното. Ако нема рамнотежа, тогаш ќе се виде кое топче е полесно (тоа ќе биде на издигнатиот тас).

35. Бидејќи имаме 8 топчиња, ќе ги поделиме на групи од по 3, 3 и 2 топчиња. На тасовите од вагата ќе ставиме по три топчиња и така ќе констатираме во која група се наоѓа полесното топче-I мерење. Со уште едно мерење ќе констатираме кое е полесното топче во определената група- II мерење. Според тоа, полесното топче можеме да го одделиме со најмалку две мерења.

36. Треба да извршиме најмалку две мерења. Имено, топчињата ги поделиме на три групи од по три топчиња. Тогаш:

I мерење. Ставаме по три топчиња на секој тас од вагата и констатираме во која група припаѓа полесното топче. Ако на вагата има рамнотежа, тогаш полесното топче е во третата група.

II мерење. Од најдената група топчиња ставаме по едно топче на секој тас. Полесно е она топче на чија страна е подигнат тасот. Ако на вагата е во рамнотежа, тогаш третото топче од групата е полесното топче.

37. Треба да се извршат најмалку три мерења. Најпрво топчињата треба да ги распределиме во три групи од по девет топчиња и со едно мерење да констатираме во која група се наоѓа полесното топче. Потоа со останатите две мерења постапката е иста како и во претходната задача.

38. Потребни се најмалку три мерења. Постапката е следната: ги делиме топчињата во три групи од по 8 топчиња и со првото мерење, на две од групите на вагата, констатираме во која група се наоѓа полесното топче. Потоа, со уште две мерења одредуваме кое од осумте топчиња е полесно.

39. Топчињата ги делиме на 16 групи, по две во група. За секоја група го определуваме полесното и потешкото топче и формираме две нови групи од “лесни” и “тешки” топчиња. Така, со 16 мерења можеме со сигурност да кажеме дека најтешкото топче е во групата “тешки” топчиња, а најлесното топче е во групата “лесни” топчиња.

За да го определиме најтешкото топче ја разделуваме групата “тешки” топчиња на 8 групи, по две во група. За секоја група го определуваме полесното и потешкото топче и со помош на 8 мерења формираме нова група од 8 “тешки” топчиња во која, со сигурност можеме да тврдиме, се наоѓа најтешкото топче. Сега постапката ја повторуваме за оваа група “тешки” топчиња и со помош на 4 мерења добиваме нова група

од 4 “тешки” топчиња во која се наоѓа најтешкото топче. Постапувајќи аналогно, со две мерења добиваме нова група од две “тешки” топчиња во која се наоѓа најтешкото топче. Конечно, со едно мерење го добиваме најтешкото топче. Значи, со 15 мерења од групата “тешки” топчиња го одделивме најтешкото топче.

За да го определиме најлесното топче на групата од 16 “лесни” топчиња ќе ја повториме постапката која ја применивме на групата од 16 “тешки” топчиња, при што во секој чекор ќе формираме група од “лесни” топчиња. Така со 15 мерења од групата “лесни” топчиња ќе го одделиме најлесното топче.

Според тоа, за одделување на најлесното и најтешкото од 32 топчиња со различни тежини искористивме точно $16+15+15=46$ мерења.

40. Пакетите ќе ги означиме со броевите од 1 до 10. Потоа, на вагата ќе ставиме едно пакување од првиот пакет, две пакувања од вториот пакет, три пакувања од третиот пакет итн. десет пакувања од десеттиот пакет. Според тоа на вагата ќе имаме

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=55$$

пакувања. Ако пакувањата содржеа сите по $100g$, тогаш вкупната тежина ќе беше $5500g$. Врз база на измерената количина лесно можеме да констатираме во кој пакет се помалите пакувања. Имено, ако на пример сме измериле $5460g$, тогаш недостасуваат $40g$ кафе, па значи полесните пакувања се од четвртиот пакет. Значи потребно е најмалку едно мерење.

41. Пакетите ќе ги нумерираме со броевите од 1 до 11. Од првиот пакет ќе земеме 1 шипка, од вториот пакет ќе земеме 2 шипки,..., од десеттиот пакет ќе земеме 10 шипки, а од единаесеттиот пакет нема да земеме ниту една шипка. Вкупниот број на земени шипки е $1+2+...+10=55$ и ако се сите од по $13kg$ нивната тежина треба да биде $55 \cdot 13=715kg$. Ако е оваа тежина измерена, тогаш неисправни се шипките од единаесеттиот пакет.

Во спротивно неисправното пакување го наоѓаме како во зад. 39.

42. Одговор. Можеме да ги измериме сите маси изразени со природни броеви од $1kg$ до $13kg$.

43. а) Прво двапати ќе туриме по 3 литри вода, а потоа ќе одлееме 5 литри вода и ќе добиеме $2 \cdot 3 - 5 = 1$ литар вода.

б) Прво двапати ќе туриме по 5 литри вода и ќе одлееме 3 литри вода и ќе добиеме $2 \cdot 5 - 3 = 7$ литри вода.

44. Решението е дадено во следната табела

канта	прелевања							
8	8	3	3	6	6	1	1	4
5	0	5	2	2	0	5	4	4
3	0	0	3	0	2	2	3	0

Друго решение на проблемот е дадено во следната табела

канта	прелевања							
8	8	5	5	2	2	7	7	4
5	0	0	3	3	5	0	1	4
3	0	3	0	3	1	1	0	3

45. Решението е дадено во следнава табела:

сад	прелевања							
15	15	6	6	11	11	2	2	7
9	0	9	4	4	0	9	8	8
5	0	0	5	0	4	4	5	0

46. Пејо треба да ги изврши следните прелевања

ведро	прелевања											
12	12	5	5	10	10	3	3	8	8	1	1	6
7	0	7	2	2	0	7	4	4	0	7	6	6
5	0	0	5	0	2	2	5	0	4	4	5	0

47. Богдан и Толе ги извршиле следните прелевања

сад	прелевање								
10	10	6	6	2	2	9	9	5	5
7	0	0	4	4	7	0	1	1	5
4	0	4	0	4	1	1	0	4	0

48. Треба да ги извршиме следните прелевања

ведро	прелевање										
10	10	7	7	4	4	1	1	8	8	5	5
3	0	3	0	3	0	3	2	2	0	3	0
7	0	0	3	3	6	6	7	0	2	2	5

49. Прво ќе го наполни садот од 7 литри, а потоа двапати ќе го наполни садот од 3 литри и водата ќе ја врати во полниот сад. Преостанатиот 1 литар ќе го истури во новиот сад. Постапката ќе ја повтори уште еднаш и на таков начин во големиот сад ќе има 2 литри вода. Сега ќе го наполни садот од 3 литри и водата ќе ја истури во големиот сад, со што во него ќе има 5 литри вода.

50. Да, бидејќи во собата можат да бидат: ќерка, мајка, баба, прабаба и прапрабаба. Притоа се исполнети условите кои дедо Доротеј му ги кажал на внукот Кирил.

51. Упатство. Правоаголник со 12 полиња можеме да добиеме во комбинација $2 \cdot 6$, $3 \cdot 4$, $4 \cdot 3$ и $6 \cdot 2$. Вкупно има 102 правоаголници.

м											
											б

52. Ако мајмунот се наоѓа на бело поле, тогаш и бананата се наоѓа на бело поле. Пред да дојде до бананата мајмунот мора да згазне на 62 полиња, од кои 32 се црни и 30 се бели. Бидејќи за соседни ги сметаме полињата кои имаат заедничка страна, добиваме дека соседните полиња се спротивно обоени, па затоа после секој чекор мајмунот се наоѓа на поле со спротивна боја. Но, мајмунот не може двапати да се најде на поле со црна боја, па затоа тој не може да стаса до бананата.

53. Секоја плочка покрива две полиња, па затоа без разлика колку плочки ќе искористиме ќе покриеме парен број на полиња. Но, од друга страна таблата има $13 \cdot 13 = 169$ полиња, т.е. непарен број на полиња, па затоа покривањето не е можно.

54. Ако Текнувало тргне прв, тогаш Гаргамел не може да го стигне.

На пример, Текнувало може да оди од a1 до m1 по првиот ред или од a1 до a13 по првата колона.

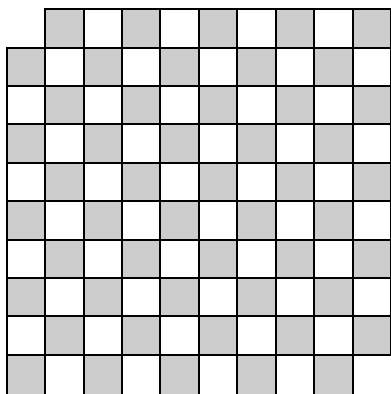
Ако Гаргамел тргне прв тогаш можни се следните случаи:

- Гаргамел тргнува по m-та колона. Во овој случај Текнувало ќе тргне по a-та колона и ако продолжи да се движи по оваа колона ќе се скрие во куќичката која се наоѓа во a13, без разлика како ќе се движи Гаргамел во следните чекори.

- Гаргамел тргнува по 13-та редица. Во овој случај Текнувало ќе тргне по 1-та редица и ако продолжи да се движи по оваа редица ќе се скрие во куќичката која се наоѓа во m1, без разлика како ќе се движи Гаргамел во следните чекори.

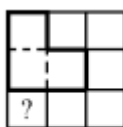
□													г	13
														12
														11
														10
														9
														8
						♦								7
														6
														5
														4
														3
														2
т													□	1
a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m		

- Гаргамел тргнува дијагонално. Во овој случај Текнувало ќе тргне дијагонално во пресрет на Гаргамел. Кога Гаргамел ќе го промени правецот на движењето истото ќе го направи и Текнувало тргнувајќи во спротивна насока. На пример, ако Гаргамел се наоѓа на полето h8, тогаш Текнувало ќе се наоѓа на полето f6. Ако Гаргамел отиде на полето g8, тогаш Текнувало ќе се помести на полето g6. Гаргамел ќе мора да дојде на h7, па Текнувало ќе оди на h5 и потоа без разлика како Гаргамел ќе се движи тој ќе се скрие во куќичката m1 следејќи го патот i4-j3-k2-l1-m1.

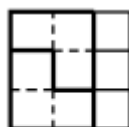


55. Плочата содржи 50 црни и 48 бели полиња. Бидејќи секое домино покрива точно едно бело и едно црно поле заклучуваме дека бараното покривање не е можно.

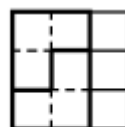
56. Плочките не можеме да ги поставиме како на цртежот а), бидејќи во тој случај не може да се покрие долниот ред.



а)



б)



в)

а) Може! На цртежите б) и в) е показано како две од дадените плочки на таблата покриваат дел од неа кој има ширина 2cm. Според тоа, покривањето може да се постигне со 50 вакви парови плочки, т.е. со 100 плочки.

б) Не може! Според а) може да се покријат само оние табли чии должини се парни броеви.

57. Ги броиме 2×2 квадратите. На секој 2×2 квадрат го боиме долното лево квадратче, види цртеж. Јасно, за различните квадрати боиме различни квадратчиња. Според тоа, 2×2 квадрати има колку што има обоени квадратчиња. Но, обоени квадратчиња не може да има во првата хоризонтала, а нема ниту во осмата колона. Значи, обоени се $7 \cdot 7 = 49$ квадратчиња. Слично, ги пребројуваме 3×3 квадратите и нив ги има $6 \cdot 6 = 36$. За 49 квадрати 2×2 синот ќе добие $49 \cdot 2 = 98$ евро центи, а за 36 квадрати 3×3 ќе добие $36 \cdot 3 = 108$ евро центи. Значи, синот треба да брои 3×3 квадрати.



58. Постапката на боене со која можат да се обојат 28 полиња на квадратна 8×8 табла, при што после боенето на секое поле, фигурата која се состои од обоените полиња е осно симетрична е дадена на цртежот десно.

1			20			13	
	2		21		12		
		3	22	11			
14	15	16	4	17	18	19	27
		10	23	5			
	9		24		6		
8			25			7	
			26				28

59. Јасно, дека победник е оној кој ќе го каже бројот 89, бидејќи противникот може на овој број да му додаде најмалку 1, а најмногу 10. Така се добива збир помеѓу 90 и 99. Сега оној кој кажал 89 додавајќи соодветен број добива збир 100. Враќајќи се наназад, гледаме дека збирот 89 ќе го соопшти оној играч кој претходно соопшти 78, итн. Значи, оној кој игра прв може да ја добие секоја партија ако прво го соопшти бројот 1, а после додавање на број од страна на противникот, го дополнува збирот до 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78 и 89. Според тоа, ако Билјана игра прва, тогаш постои начин таа да ја добие секоја партија.

60. Играта ја добива оној играч кој на противникот ќе му остави 1, 5, 9, 13 монети на масата. Очигледно тоа е првиот играч кој во првиот потег треба да земе две монети, а потоа во секој следен потег треба да зема 1, 2 или 3 монети во зависност од тоа дали вториот играч зел 3, 2 или 1 монета.

61. Да, таков начин постои. Имено, ако при првото земање Рампо ги земе сите камчиња од избраното купче, тогаш Методија од другото купче остава само едно камче и така ја добива играта. Ако пак при првото земање Рампо остави само едно камче, тогаш Методија од другото купче ги зема сите камчиња и така ја добива играта. Во случај кога Рампо во избраното купче остава повеќе од едно камче, Методија го избира купчето од кое не зел Рампо и зема онолку камчиња колку што зел Рампо од другото купче, така што во двете купчиња повторно има еднаков број на камчиња. На ваков начин Методија продолжува да игра до крај.

62. Да, таква стратегија постои. Истата се состои во следното. При првото земање Илија го избира поголемото купче и зема камчиња така што, во двете купчиња остане ист број камчиња. Понатаму ја спроведува стратегијата од задача 60.

63. Ако барем едно купче е “парно”, тогаш тоа купче Јасна ќе го раздели на две “непарни” купчиња. Маја избирајќи го едното од тие купчиња, другото купче ќе го раздели на “парно” и “непарно”. Сега, одново Јасна ќе го избере “непарното” купче, а “парното” ќе го раздели на две непарни итн. се до последниот потег на Маја, на која ќе и останат две купчиња со по едно камче, кои се разбира не може да се поделат, па затоа Маја ја губи играта.

Кога и двете купчиња имаат непарен број камчиња, тогаш после првиот потег на Јасна, Маја е во позиција да има на располагање “парно” и “непарно” купче, па затоа во овој случај Маја ја добива играта.

Значи, стратегијата во оваа игра е: на противникот да му оставите на располагање две “непарни” купчиња.

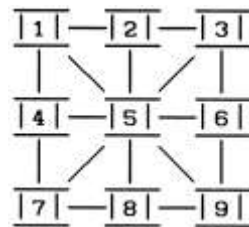
64. Разгледај како ќе се одвива играта ако првиот играч го стави својот знак во:

- а) централното поле,
- б) во едно аголно поле, и
- в) во едно средно рабно поле.

На пример, ако првиот играч во првото обележување го ставил својот знак во централното поле, тогаш вториот играч треба со свој знак да означат едно од аголните полиња итн. Ако пак, првиот играч во првото обележување не го ставил својот знак во централното поле, тогаш вториот играч во првото обележување треба да го стави својот знак во ова поле итн. Така, за двата играчи постои можност, доколку не грешат, да обезбедат нерешен резултат за себе.

65. Во оваа игра секогаш може да победува првиот играч, ако својот прв жетон го стави во централното поле 5. Имено, ако потоа вториот играч го стави својот жетон во еден од аголните квадрати (на пример 1), првиот играч треба да го постави својот жетон во еден од двата средни рабни квадрати што не се соседни на квадратот во кој се наоѓа жетонот на вториот играч (во наведениот случај во 6 или 8), за потоа, освен ако не направи некој очигледно погрешен потег, да постигне победа.

Ако вториот играч својот прв жетон го постави во некое средно рабно поле (на пример 2), тогаш првиот играч треба својот втор жетон да го постави во едно од двете аголни полиња што не се соседни на полето во кое се наоѓа првиот жетон на вториот играч (во наведениот случај 7 или 9), па повторно со сигурност ја добива играта (зошто?).



66. Да претпоставиме дека Јакопетревски е на местото x и дека тркачите трчаат во насока на стрелката на часовникот (направи цртеж).

Тркачот чиј претходник воедно е следбеник на Јакопетревски се наоѓа на местото p , а тркачот чиј следбеник воедно е претходник на претходникот на Јакопетревски се наоѓа на местото w .

Бидејќи двата тркачи се еднакво оддалечени од Елим, добиваме дека Елим се наоѓа на местото x , т.е. името на Јакопетревски е Елим.

Истото решение се добива и кога натпреварувачите трчаат во обратна насока.

67. Вкупниот број бодови кои ги добиле тројцата спортисти е $17+10+8=35=5\cdot 7$. Бидејќи бројот 5 не може да се запише како збир на три различни природни броеви заклучуваме дека на секое ливче збирот на бодовите е 7. Според тоа, жирито имало 5 членови.

Бројот 7 може на единствен начин да се запише како збир на три различни природни броеви: $7=4+2+1$, од што заклучуваме дека првото место носи 4, второто 2 и третото 1 бод.

При ваков распоред на бодовите за првото, второто и третото место имаме две можности кои го задоволуваат условот дека Јанкоски освоил 17, Петрески 10, а Маркоски 8 бодови.

а) Јанкоски 4 4 4 4 1

Петрески 2 2 2 2 2

Маркоски 1 1 1 1 4

б) Јанкоски 4 4 4 4 1

Петрески 1 2 2 1 4

Маркоски 2 1 1 2 2

Од податокот дека Јанкоски и Петрески не биле еднаков број пати пред Маркоски заклучуваме дека на сите услови на задачата соодветствува втората можност. Според тоа, распоредот на ливчињата бил:

1. Јанкоски	1. Јанкоски	1. Јанкоски	1. Јанкоски	1. Петрески
2. Маркоски	2. Петрески	2. Петрески	2. Маркоски	2. Маркоски
3. Петрески	3. Маркоски	3. Маркоски	3. Петрески	3. Јанкоски

68. Да го најдеме одговорот во кој не е наведен ниту еден ученик кој ги решил сите задачи. Ако бараниот одговор е 1), тогаш од 3) и 5) следува дека E и B ги решиле сите задачи, што противречи на 2). Ако бараниот одговор е 2), тогаш од 3) и 5) следува дека A ги решил сите задачи, па од 1) и 4) следува дека G ги решил сите задачи. Ако бараниот одговор е 3), тогаш од 2) и 5) следува дека B ги решил сите задачи, па од 1) и 4) следува дека D ги решил сите задачи. Ако бараниот одговор е 4), тогаш од 2) и 5) следува дека E и A ги решиле сите задачи, а тоа противречи на 3). Ако бараниот одговор е 5), тогаш од 1), 2), 3) и 4)

следува дека D, E, G ги решиле сите задачи, што не е можно. Конечно, задачата има две решенија: A, G или B, D .

69. Одговор. Драган навива за Реал, Марко навива за Барселона и Лимбе навива за Челзи.

70. а) Не може. Вертикални столбови имаме вкупно 9 и ако во секој од нив има непарен број бели коцки, тогаш вкупниот број бели коцки ќе биде непарен, а тие се вкупно 14.

б) Може. Решението најдете го сами.

71. Бројот на играчите може да биде 4 или 3 (ако еден од татковците е дедо на помладиот син). Во првиот случај се одиграни 6 партии, а во вториот 3 партии шах.

72. Во секоја група победникот одиграл 3 натпревари, второпласираниот два (не сметајќи го натпреварот со победникот), а третопласираниот одиграл еден натпревар. Според тоа, на турнирот се одиграни вкупно $2(3 + 2 + 1) + 1 = 13$ натпревари.

73. Од множество од 6 ружи $\{C, Z, B, P, L, R\}$ со отстранување на две ружи добиваме букет од 4 ружи. Двете ружи кои нема да бидат во букетот можат да се:

$CZ, CB, CP, CL, CR, ZB, ZP, ZL, ZR, BP, BL, BR, PL, PR, LR,$

па затоа букетот од 4 ружи може да се состави на 15 начини. Два букета се сметаат дека се различни ако не се составени од исти ружи, а два букета, кои содржат исти ружи, само различно аранжирани ги сметаме за исти.

74. За освојување на првото место имаме 5 можности. Понатаму, откако една екипа ќе го заземе првото место, за освојување на второто место имаме 4 можности итн. Конечно, на крајот од натпреварот екипите може да се пласираат на $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ начини.

75. Првата задача не ја решиле 5 ученици, втората 6, третата 7 и четвртата 8. Значи, во најлош случај $5 + 6 + 7 + 8 = 26$ не ги решиле сите задачи. Преостанатите 4 ученици ги решиле сите задачи.

76. Одговор. а) Двоцифрени броеви има 20,

б) Трицифрени броево има 100.

77. Четирицифрени броеви, чии цифри се од множеството $\{2,3,4,6\}$ има $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 256$. Секоја цифра на местото на илјадите се наоѓа во $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ броја. Исто така на местото на стотките, десетките и единиците се наоѓа во 64 броја. Во збирот од сите 256 броеви секоја цифра x на местото на илјадите ќе учествува со $64 \cdot 1000x$, на местото на стотките со $64 \cdot 100x$, на местото на десетките со $64 \cdot 10x$ и на местото на единиците со $64x$. Четирите избрани цифри го даваат вкупниот збир:

$$(64 \cdot 1000 + 64 \cdot 100 + 64 \cdot 10 + 64) \cdot (2 + 3 + 4 + 6) = 71104 \cdot 15 = 1066560.$$

78. Имајќи предвид дека никој од учесниците не го достигнал највисокото ниво постојат 9 можни исходи од игрите. Бидејќи секој натпреварувач игрите ги завршувал на различни нивоа, постојат $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$ односно 3024 можни остварувања во четирите игри. Бидејќи

$$510015 = 168 \cdot 3024 + 1983,$$

следува дека најмалку 169 натпреварувачи оствариле ист успех во играта.

РЕКОА ЗА МАТЕМАТИКАТА

Инспирацијата е потребна во поезијата како и во геометријата.

Александар Пушкин

Помеѓу луѓе со еднакви умствени способности, кои работат под исти услови, во предност се оние кои знаат геометрија.

Б. Паскал

Учи се на решавање на проблеми, а не на читање на учебникот.

Е. Ким Неубетс

4. ТЕКСТУАЛНИ ЗАДАЧИ

4.1. БРЗИНА И ДВИЖЕЊЕ

Задача 1. Два автомобили се движат во пресрет еден кон друг. Едниот поминува 76km/h , а другиот 12km/h повеќе. Колку ќе бидат оддалечени автомобилите еден од друг 3 часа после средбата?

Задача 2. Од две пристаништа истовремено еден кон друг тргнале два брода. Првиот брод се движел со брзина 22km/h , а вториот со брзина 28km/h . Колкаво е растојанието меѓу пристаништата ако бродовите се сретнале после 40 часови патување?

Задача 3. Пилотот за три дена прелетал 9014km . Првиот ден прелетал 3154km , а вториот ден 278km помалку. Колку километри пилотот прелетал третиот ден?

Задача 4. Драгана, Мира и Сања чекорат по улица. Должините на нивните чекори се 75cm , 45cm и 60cm , соодветно. Ако започнале да одат со десна нога и се движат со иста брзина, колку чекори ќе направи секој од нив до првиот момент кога повторно ќе зачекорат со десна нога?

Задача 5. Од два града еден кон друг тргнале два автомобили. Едниот на секои 4 часа поминувал 280km , а другиот на секои 3 часа поминувал 330km . Колкаво е растојанието меѓу градовите ако автомобилите се сретнале после 7 часа?

Задача 6. Двајца моторциклисти истовремено тргнале од местата А и В еден кон друг во пресрет. Првиот се движел со брзина од 1km во

минута, а вториот со брзина од $800m$ во минута. Кога се сретнале првиот моторциклист поминал $66km$ повеќе од другиот. Колкаво е растојанието меѓу местата A и B ?

Задача 7. Киро и Рампо возат велосипеди. Киро секоја минута поминува $120m$, а Рампо $150m$. Киро тргнал една минута пред Рампо.

Колку минути му се потребни на Рампо за да го стаса Киро?

Задача 8. Воз со должина $500m$ се движи со брзина од $60km$ на час. Колку време е потребно да помине низ тунел долг $500m$?

Задача 9. Рампо со својот автомобил поминал пат од $200000km$ и притоа ги менувал тркалата така што секое од петте тркала (четирите погонски и резервното) поминало ист број километри. Колку километри изминало секое тркало?

Задача 10. Поминувајќи растојание од $30km$ Невена се движела пешки и со автобус. Со автобус поминала пет пати подолг пат отколку пешки. Колку километри Невена поминала пешки, а колку со автобус?

Задача 11. Петар пешки поминал пат од $28km$ за неколку часа. Колку километри поминал Михаил возејќи се со велосипед, ако потрошил двапати повеќе време и ако секој час минувал трипати подолг пат?

Задача 12. Трактор минува пат од $1m$ ако предното тркало направи едно завртување, а $4m$ ако задното тркало направи едно завртување. Колку пат поминал тракторот, ако на тој пат предното тркало направило 3900 завртувања повеќе од задното?

Задача 13. Должината на патот меѓу местата A и B е $185km$. Во 8 часот наутро од овие две места тргнале еден на друг во пресрет велосипедист и моторциклист. Секој час велосипедистот поминува $15km$, а моторциклистот $32km$. После 3 часа возење тие застанале 30 минути да се одморат, а потоа со иста брзина го продолжиле патот. Колку биле оддалечени еден од друг велосипедистот и моторциклистот во 12 часот и 30 минути?

Задача 14. Од местата A и B меѓусебно оддалечени $462km$, истовремено тргнуваат два автомобили во пресрет еден кон друг. Автомобилот

од местото А се движи со брзина од 86km на час, а автомобилот од местото В со брзина од 68km на час. Колку време поминало до нивното среќавање? На колкаво растојание од местото В ќе се сретнат автомобилите?

Задача 15. Кога автомобилист поминал четвртина од патот и уште 50km , му останало да помине уште половина од патот и 6km . Колкава е должината на патот што требало да го помине автомобилистот?

Задача 16. Во првиот час од своето патување еден патник поминал $25\frac{1}{2}\text{ km}$, во вториот $1\frac{3}{4}\text{ km}$ повеќе отколку во првиот час, а во третиот час поминал $12\frac{1}{8}\text{ km}$ помалку отколку во вториот час. Колку километри му остануваат на патникот до целта ако должината на планираниот пат е 100 km ?

4.2. РАБОТА И ВРЕМЕ

Задача 1. Во три камиони натоварени 195 кутии, така да во секој камион има ист број кутии. Работниците растовариле еден камион. Уште колку кутии останале за растоварање?

Задача 2. За еден ден столарот изработува 6 столици и 3 маси. Пресметај колку парчиња мебел тој ќе изработи за 5 работни дена.

Задача 3. Во еден рудник работат рудари во три смени. Во првата смена работа 126 рудари, во втората 42 рудари повеќе отколку во првата, а во третата смена работата половина од збирот на рударите во првите две смени. Колку рудари работат во третата смена?

Задача 4. Иван почнал да гледа некој филм во 20 часот и 20 минути. За време на филмот два пати имало прекин заради прикажување на реклами. Првиот прекин траел 3 минути, а вториот 4 минути. Прикажувањето на филмот завршило во 22 часот и 37 минути. Колку време би траел филмот без реклами?

Задача 5. Неколку работници, работејќи заедно цело време, можат да завршат една работа за 24 дена. Меѓутоа, работата ја започнал еден

работник, а останатите започнувале со работа еден по друг, и тоа во еднакви временски интервали. Секој од нив работел цел број денови се до завршувањето на работата. За колку време ја завршиле работата ако работникот кој прв почнал да работи работел пет пати подолго од работникот кој последен почнал да работи, а претпоследниот работел два пати подолго од последниот.

Задача 6. После определен број работни денови сидарите одлучиле да го забрзаат градењето па секои 3 дена работа ја скратиле на 2 дена. Ако целата работа е завршена за 55 дена наместо за 70 дена, колку дена се работело пред забрзување на работата.

Задача 7. Три пекари со рамномерна работа за време од два часа измесиале 67 векни леб. Колку векни леб ќе измесат четири пекари за три часа? За колку часа пет пекари ќе измесат 335 векни леб?

Задача 8. Павле за една работа требало да добие 1300 денари и влезница за спортски натпревар. Меѓутоа, тој завршил само третина од работата, за што добил 300 денари и влезницата. Колку денари чини влезницата за натпревар?

Задача 9. Марко прочитал половина книга и уште 15 страници, со што му останало да прочита уште третина од книгата. Колку страници имала книгата?

Задача 10. Еден трактор може да изора една нива за 15 часа, а друг истата нива може да ја изора за 20 часа. Откако првиот трактор орал сам 2 часа, му се придружил и вториот. На првиот трактор настанал дефект, па додека дефектот бил отстранет, вториот трактор орал сам 1 час. За колку часа по отстранувањето на дефектот двата трактори заедно ја изорале нивата?

Задача 11. Земјоделецот Крсте треба да ја изора својата нива. Тој планира да почне рано наутро и да заврши до 10 часот пред пладне и секој час да ора по 10 ари. Меѓутоа кога ја завршил првата половина од планираната работа, му се случил дефект, така што за втората половина можел да ора само 5 ари на час. Крсте го завршил орањето во 12 часот. Колку

била голема нивата? Кога почнал да ора? Колку часа ја орал првата, а колку втората половина од нивата?

Задача 12. Еден работник сам може да заврши некоја работа за 10 дена, а друг работник истата таа работа може да ја заврши за 15 дена. Ако им се придружи трет работник, тогаш сите тројца заедно работата ќе ја завршат за 5 дена. За колку дена третиот работник може сам да ја заврши работата?

Задача 13. Нивата е подготвена за сеидба за 3 дена. Првиот ден се подготвени $\frac{3}{10}$ од нивата, вториот $\frac{3}{5}$ од остатокот, а третиот ден останатата површина. Колкава е плоштината на нивата, ако третиот ден се обработени 11,2 хектари помалку отколку вториот ден? Колку е обработено секој ден?

Задача 14. Една бригада може да заврши некоја работа за 10 дена, а друга за 15. На оваа работа е ангажирана третина од првата и дел од втората бригада, така што работата е завршена за 12 дена. Колкав дел од втората бригада е ангажиран?

Задача 15. Бригадата A може да заврши една работа за 5 дена, а бригадата B за 4 дена. За колку дена ќе се заврши работата, ако се ангажирани $\frac{1}{4}$ од работниците на бригадата A и $\frac{1}{3}$ од работниците на бригадата B ?

Задача 16. Киро 8 часови саати дневно во текот на 3 години и тоа 300 дена во секоја година, на хартија повлекувал 5 цртички секоја минута. Колку цртички вкупно повлекол Киро?

Задача 17. Рампо може да отчука одреден број на страни за 5 часа и 20 минути, а Киро истата работа ќе ја заврши за само 4 часа и 40 минути. Кога чукале еден текст заедно, Киро отчукал три страници повеќе од Рампо. Колку страници има текстот?

Задача 18. Два часовника покажуваат точно време во 12 часот на пладне. Првиот часовник оди побрзо 8 минути во текот на едно деноноќие (за 24 часа), а вториот задоцнува 4 минути во текот на едно деноноќие.

После колку време двата часовника повторно во исто време ќе покажат 12 часот на пладне?

Задача 19. Ако во некој месец три вторници се на парни датуми, на кој датум е последниот петок во тој месец?

Задача 20. Мал и голем полжав заедно можат да изедат јагода за 6 минути. Големиот полжав јаде три пати повеќе јагоди отколку малиот полжав за исто време. За колку време големиот полжав сам ќе ја изеде јагодата?

4.3. ГОДИНИТЕ СЕ ВАЖНИ

Задача 1. На прашањето колку години има Стојан одговорил: “Ако од бројот на моите години го одземете 5, добиениот број го поделите со 5, па од тој резултат повторно одземете 5, ќе добиете 5”. Колку години има Стојан?

Задача 2. Таткото е постар од синот 24 години. Колку години има синот, ако пред 5 години тој бил 4 пати помлад од таткото?

Задача 3. Брат и сестра пред 8 години заедно имале 8 години. Колку години ќе имаат заедно после 8 години?

Задача 4. Пред 16 години Киро бил три пати постар од Рампо. Колку години има Киро, а колку Рампо, ако Киро е 12 години постар од Рампо.

Задача 5. Дедото и внукот заедно имаат 65 години. Колку години има дедото, а колку внукот ако се знае дека внукот има онолку месеци колку што дедото има години?

Задача 6. Кога Митре се родил неговата мајка имала 25 години. Во 1992 година мајката била 6 пати постара од него. Колку години имал Митре во 1998 година?

Задача 7. Милан е трипати помлад од својот татко, а трипати постар од својата сестра. Таткото и сестрата заедно имаат 50 години.

Колку години има секој од нив?

Задача 8. Баба Илинка шета со внукот Наум. Во пресрет им доаѓа Костадинка и ја прашува: “Бабо Илинке, колку години има Наум?”. “Тој има онолку месеци, колку што јас имам години, а заедно имаме 65 години.”- одговара баба Илинка. Колку години има Наум, а колку баба Илинка?

Задача 9. Баба Каранфила има двајца внуци Ефтим и Пано. Возрастата на бабата е двоцифрен број, чија прва цифра се годините на Ефтим, а втората цифра се годините на Пано. Колку години има секој од нив, ако збирот на нивните години е еднаков на 69?

Задача 10. Трена е 4 години постара од Леонид, а Гаврил има онолку години колку што имаат Трена и Леонид заедно. Третиот од збирот на нивните години е 16. Колку години има секој од нив?

Задача 11. Филип за роденден од баба му и дедо му добил 405 денари. Од баба му добил 3 пати повеќе пари од бројот на нејзините години, а од дедо му четири пати повеќе пари од бројот на неговите години. По колку години имаат баба му и дедо му на Филип ако се знае дека дедо му е 5 години постар од баба му?

Задача 12. Мајката на Борче е три пати постара од Борче, а неговиот татко е четири години постар од мајката. Колку години има секој од нив, ако заедно имаат 88 години?

Задача 13. Ласте има 7 години и оди во прво одделение, а неговата сестра Косара е 2 години помлада. Тие имаа невообичаено хоби: Ласте собира видео игри, а Косара запишува вицови. Се договориле за секоја нова игра Косара да треба да запише 4 нови вицови. Ако Косара месечно запичува 5 нови вицови, колку видео игри ќе има Ласте после една година, ако колку кога ќе заврши осмо одделение? Колку вицови ќе запише Косара до својата осумнаесетта година?

Задача 14. На денот на моето раѓање мојата мајка и мојот заедно имале 50 години, а денес сите тројца имаме 100 години. После колку месеци ќе биде мојот роденден?

4.4. МАСИ, ДОЛЖИНИ И ВОЛУМЕНИ

Задача 1. Во една фабрика дневно се произведуваат 3562l сок од боровинки, сок од малини за 9568l повеќе од сок од боровинки, а сок од јагоди за 536l помалку од сок од малини. Колку литри сок се произведуваат дневно во фабриката?

Задача 2. Продавач продавал јагне, јаре и теле. Кога го прашале колку килограми има секое од нив, продавачот одговорил: „Јагнето и јарето заедно имаат 32 kg, јагнето и телето 102 kg, а јарето и телето 100 kg. Колку килограми има секое од нив?

Задача 3. Пет момчиња се мерат на вага по двајца во сите можни комбинации. Вагата ги покажала следните маси: 72 kg, 75 kg, 76 kg, 77 kg, 78 kg, 80 kg, 81 kg, 82 kg, 85 kg и 86 kg. Колкава е вкупната маса на сите пет момчиња?

Задача 4. Јане го прашал Филип колку тежела рибата што ја уловил татко му. Филип одговорил: *Главата заедно со опашката има 3kg, главата заедно со трупот има 7kg, а трупот заедно со опашката има 8kg.* Колку тежела рибата?

Задача 5. На една полица има три книги. Првата има 90, втората 110, третата 150 страници. Кориците на книгите се со еднаква дебелина и секоја од нив е дебела 2 mm. Колку милиметри се дебелите книги заедно ако се знае дека 10 страници имаат дебелина 1mm?

Задача 6. Риболовецот уловил сом чија опашка била тешка 2kg, главата била тешка колку што заедно тежеле опашката и половина од трупот, а трупот бил тежок колку што тежеле главата и опашката заедно. Колку бил тежок уловениот сом?

Задача 7. Во една продавница имало 6 сандаци со јаболка, со маса 15 kg, 16 kg, 18 kg, 19 kg, 20 kg, 31 kg. Двајца купувачи купиле 5 сандаци, така што едниот купил двапати повеќе килограми од другиот.

Кој сандак останал непродаден? Кои сандаци ги купил едниот а кои другиот купувач?

Задача 8. Колку тони сено ќе се добие од ливада со должина $750m$ и ширина $200m$, ако од секој ар просечно се добива $240kg$ трева и ако се знае дека масата на сеното е еднаква на четвртина од масата на тревата.

Задача 9. Од бунар длабок $6m$ се црпе вода со кофа од $10l$. Со едно вртење на чекрекот кофата се подига за $50cm$. Колку пати треба да се заврти чекрекот за да се наполни буре од $200l$?

Задача 10. Во првото буре има $5hl$ и $25l$ вино, во второто буре има 3 пати повеќе вино отколку во првото, а во третото буре има $1hl$ и $75l$ помалку вино отколку во првото. Колку вино има во сите три буриња заедно?

Задача 11. Продавачот Киро во магацинот има $1080kg$ шеќер повеќе отколку продавачот Стојан во својот магацин. Колку шеќер има Киро, а колку Стојан во својот магацин ако се знае дека во магацинот на Стојан има четири пати помалку шеќер отколку во магацинот на Киро?

Задача 12. Во три сада има вкупно $30l$ млеко. Откако од првиот сад во вториот се претурени $4l$, потоа од вториот во третиот се претурени $2l$, и на крајот од третиот во првиот се претурени $3l$, во трите сада има подеднакво количество млеко. Колку литри млеко има во секој сад пред првото претурање?

Задача 13. Три килограми банани чинат колку и пет килограми портокали. За Божиќните празници Стефан купил $6kg$ банани и $9kg$ портокали и платил 684 денари. Колку чини еден килограм банани, а колку еден килограм портокали?

Задача 14. Ако со $120kg$ сено 5 овци можат да се хранат 8 дена, колку килограми сено е потребно за стадо од 125 овци да се храни 90 дена?

Задача 15. Дебелината на еден лист хартија изнесува $\frac{1}{4}mm$. Листот се превиткува на половина, потоа добиеното повторно се превиткува на половина и превиткувањето се продолжува на истиот начин дванаесет пати. Колку ќе изнесува дебелината после последното превиткување?

Задача 16. Во три продавници пристигнало исто количество од една стока. Кога секоја продавница ќе продаде по 14kg од таа стока, тогаш во сите три продавници останува толку стока колку што е донесено во една од продавниците. Колку стока е донесено во секоја продавница?

Задача 17. Во два сада има 60 литри вода. Ако од првиот сад се претуриме 5 литри во вториот сад, тогаш во првиот сад ќе има три пати повеќе вода отколку во вториот сад. Колку вода имало во секој од садовите пред претурањето?

Задача 18. Пано на пазар однел 258 kg јаболка. Од тоа продал еден дел. Ако продал уште 15 kg ќе му останале само шестина од вкупната количина. Од продадените јаболка $\frac{3}{8}$ и уште 5 kg продал по цена $3,5$ денари. За остатокот од јаболката добил $1\frac{5}{7}$ пати повеќе пари отколку за овие јаболка. По колку денари по килограм го продал остатокот од јаболката?

Задача 19. Ако на едниот тас на вагата се стави цигла, а на другиот тас се стави тричетвртина цигла и тричетвртини килограм, вагата е во рамнотежа. Колку тежи циглата?

Задача 20. 30 литри сок се наполнети во 39 шишиња, и тоа во шишиња од $\frac{4}{5}$ литри и $\frac{3}{4}$ литри. Колкав е бројот на шишињата од $\frac{4}{5}$ литри, а колкав на оние од $\frac{3}{4}$ литри?

Задача 21. Во два сада имаме млеко. Ако од првиот сад во вториот се претури $5\frac{5}{6}$ литри млеко, тогаш во вториот сад ќе има 8 литри млеко помалку отколку во првиот сад. Колку млеко има во првиот сад, ако во двата сада има $78\frac{2}{3}$ литри млеко?

Задача 22. Еден тон обична вода содржи 40g сол, а во еден тон морска вода има 35kg сол. Кое количество обична вода содржи толку сол колку што се добива со испарување на 200g морска вода?

Задача 23. Еден конец пресечен е на два дела така да едниот негов дел е еднаков на половина од конечот зголемена за $0,5m$. Потоа помалиот дел повторно е поделен така да е измерена неговата половина и уште $0,5m$, а остатокот од конечот изнесува $1,5m$. Колкава е вкупната должина на конечот?

4.5. ПАРИ И ТРГОВИЈА

Задача 1. Монета (банкнота) од 10 денари треба да се размени во монети од 1 денар, 2 денари и 5 денари. Колку монети и од која вредност ќе има? Најди ги сите решенија.

Задача 2. Драган, Боби и Мартин заедно имаат 12000 денари. Драган половината од своите пари ја поделил на два еднакви дела и им ги дал на Боби и Мартин, а другата половина ја задржал за себе. Исто така постапил и Боби, а потоа и Мартин, после што сите три пријатели имале ист износ денари кај себе. Колку пари има секој од нив на почетокот?

Задача 3. Жарко сакал да купи велосипед, па почнал да штеди. Во март заштедил 387 денари. Во април заштедил 269 денари повеќе отколку што заштедил во март, а во мај 55 денари помалку од заштеденото во март и април заедно. Во јуни, Жарко заштедил една третина од вкупната заштеда од март, април и мај. Дали Жарко има заштедено доволно пари за да си купи велосипед, ако еден велосипед чини 2950 денари?

Задача 4. Семејството Петрески сакало да купи автомобил. Четвртина од сумата ја уплатило во готово, а останатата сума од 418500 денари треба да ја отплати на кредит за време од точно 5 години.

Колкава е месечната отплата што треба да ја плаќа семејството Петрески ако месечните рати се еднакви? Колку е цената на автомобилот?

Задача 5. Маријана одлучила за роденденот да ги почести учениците од своето одделение. Купила 12 чоколади, 8 кесички со бонбони и 9 лижавчиња, за што платила 2160 денари. Колкава е цената на 1 чоколада, колкава е на 1 кесичка бонбони, а колкава на 1 лижавче, ако 2 кесички бонбони чинат колку 3 лижавчиња, а 4 чоколади чинат 80 денари повеќе од 2 кесички бонбони и 6 лижавчиња заедно?

Задача 6. За 4 тетратки и 5 пенкала Мики платил 21 денар, а за 8 тетратки и 11 пенкала платил 43 денари. Колку платил Мики за 10 тетратки и 10 пенкала?

Задача 7. Петар има 500 денари во банка. Банката може да му исполни два вида барања: може да подигне 300 денари или да вложи 198 денари. Која е најголемата сума која Петар може да ја подигне повторувајќи ги повеќе пати дозволените операции?

Задача 8. За денот на словенската писменост учениците направиле овошен пазар. На пазарот менувале 11 јагоди за 14 малини, 22 цреши за 21 малина, 10 цреши за 3 банани и 5 портокали за 2 банани. Колку портокали ќе даде Марија за да добие 7 јагоди?

Задача 9. Ако Милан купи 5 тетратки му остануваат 7 денари. Ако сака да купи 6 тетратки, тогаш му недостасува 1 денар. Колку пари има Милан?

Задача 10. Ако Марко купи 5 тетратки, ќе му останат 20 денари, а ако купи 8 тетратки, ќе му недостигаат 16 денари. Колку денари има Марко?

Задача 11. Ана сака да купи неколку моливи. Ако купи 6 моливи, ќе и останат 7 денари, а ако купи 10 моливи ќе и недостигаат 5 денари. Колку чини секој молив и колку денари имала Ана?

Задача 12. Марија отишла во продавница и смета дека со парите кои ги има кај себе може да купи 60 јајца. Но, јајцата поскапеле за 3 денари по парче, па таа сега со парите кои ги има може да купи 50 јајца. Која е новата цена на едно јајце?

Задача 13. Тројца рибари уловиле неколку риби и ги ставиле во канта за чување. Пред поаѓањето еден од нив зел третина од рибите и си заминал. Вториот, не знаел дека првиот рибар го зел својот дел, па зел третина од преостанатите риби и си заминал, а истото го направил и третиот рибар. Во кантата останале 8 риби. По колку риби зел секој од рибарите?

Задача 14. На еден пазар за 1 кожа на слон се добиваат 2 кожи на тигар, а престилка со паунови перја за 3 копја. На друг пазар, кој од првиот е оддалечен на ден одење, 1 кожа од слон се менува за 3 престилки паунови перја, а една кожа од тигар за 4 копја. Ловецот има 1 кожа од слон и за неа сака да добие 4 кожи од тигар. За колку дена ловецот може да ја оствари планираната размена ако се наоѓа на првиот пазар?

Задача 15. Влатко ја отворил својата каса во која имало само монети од 1, 2 и 5 денари. Избројал вкупно 324 денари. Забележал дека половина од вкупниот број монети биле од 2 денари. Кога на масата, покрај секоја монета од 1 денар ставил по две монети од 2 денари, во раката му останале монети од 2 денари, чија вредност е еднаква на вредноста на монетите од 1 денар. Колку монети од секој вид имало во касата?

Задача 16. Горазд и Доротеј решиле да купат по една збирка задачи. На Горазд му недостасувале 160 денари, а на Доротеј 40 денари за да ја купи збирката. Затоа одлучиле заеднички да ја купат збирката. Меѓутоа, се покажало дека и тогаш им недостасувале 20 денари. Колку пари е збирката? Колку пари имал секој од нив?

Задача 17. Александар, Фросина и Филип биле во продавница. Фросина и Филип потрошиле 1995 денари, Александар и Филип потрошиле 2797 денари, а Александар и Фросина потрошиле 3246 денари. Колку денари потрошил секој од нив?

Задача 18. Слаткарот Јане сите колачи ги продава по 16 денари. На денот на пролетта тој решил на секое дете кое што ќе влезе во неговата слаткарница да му ги удвои парите за да може да купува колачи за двапати повеќе пари, отколку што има кај себе. Тој ден Цветан влегол четири пати во слаткарницата, при секое влегување јадел по еден колач, и на крајот останал без пари. Колку денари имал Цветан при првото влегување во слаткарницата?

Задача 19. Јордан, Рајна, Трпана и Севда треба да поделат 10000 денари. Јордан парите ги поделил така што на секој од останатите им дал 100 денари повеќе од парите кои ги зел за себе. Колку пари добил секој?

Задача 20. Климент, Методија и Милан треба да поделат 3774 денари, така што Милан да добие 111 денари помалку од Климент, а Методија да добие колку Климент и Милан заедно. Колку денари добил секој?

Задача 21. Тројца другари имале по иста сума денари. Откако секој од нив платил по 140 денари за влезница за кино, вкупно им останале онолку денари колку што секој од нив имал на почетокот.

По колку денари секој од нив имал на почетокот?

Задача 22. Горјан и Дамјан заедно имаат 30 денари. Ако Горјан му даде на Дамјан онолку денари колку што има Дамјан, тогаш Дамјан ќе има двапати помалку од Горјан. Колку денари има секој од нив?

Задача 23. Јане има повеќе пари од Ѓорче. Ако Јане му даде 10 денари на Ѓорче, тогаш ќе имаат еднакви суми пари. Ако пак Ѓорче му даде 15 денари на Јане, тогаш Јане ќе има двапати повеќе пари од Ѓорче. Колку пари има Јане, а колку Ѓорче?

Задача 24. Мојсо и Данчо пред една недела имале еднакви суми пари. До денес Мојсо заработил 1994 денари, а Данчо потрошил 2606 денари. Сега Мојсо има трипати повеќе пари од Данчо. Колку пари во моментот има секој од нив?

Задача 25. Ристе, Самоил и Марија на пазар потрошиле 8948 денари. Марија потрошила 350 денари повеќе од Самоил, а трипати помалку од вкупната сума која ја потрошиле Ристе и Самоил заедно. Колку пари потрошил секој од нив?

Задача 26. Моливот чини 8 денари. Шестарот чини колку половина тетратка и еден молив, а тетратката колку што чинат моливот и шестарот заедно. Колку чини тетратката, а колку шестарот?

Задача 27. За 4 моливи и 6 гуми платени се 78 денари. Еден молив е поскап два денари од една гума. Колку е цената на еден молив, а колку е цената на една гума?

Задача 28. Банкнота од 100 денари треба да се размени за монети од 2 и 5 денари, така што вкупно имаме 35 монети. По колку монети од 2 и 5 денари ќе имаме?

Задача 29. Вера и Фросина на излет понеле 250 денари. Од таа сума Вера потрошила три петтини, а Фросина девет десеттини од остатокот. Колку пари им останале?

Задача 30. Трговецот Васил измешал определена количина грав по цена од 100 денари за килограм и 100kg грав по цена од 60 денари за килограм. Колкаво количество грав по цена од 100 денари за килограм измешал, ако 1kg од измешаниот грав го продавал за 75 денари и притоа заработил исто пари?

Задача 31. Владо, Бобан и Кате имаат вкупно 600 денари. Ако Владо потроши половина од своите пари, Бобан две третини од своите пари и Кате потроши четири петтини од своите пари, тогаш секому од нив ќе му остане еднаква сума пари. По колку пари имал секој од нив?

Задача 32. Александар им позајмил 540 денари на своите пријатели. На Марко му позајмил 100 денари повеќе отколку на Иван, а на Горан му позајмил двапати повеќе отколку на Марко. По колку пари Александар му позајмил на секој пријател?

4.6. ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ

Задача 1. На ливадата израснале 53 жолти, 58 црвени и 89 плави цветови, а на секој цвет има по 11 листови. Секој жолт цвет има 8, секој црвен 9, а секој плав 12 венечни ливчиња. Колку листови имало вкупно, а колку венечни ливчиња на сите цветови?

Задача 2. Во една продавница имало 6 полици. На 2 полици имало по 5 кутии чоколади, а на 4 полици имало по 3 кутии со колачи. Симона дошла со својот дедо во продавницата и тој и купил 1 кутија чоколади и 1 кутија колачи. Колку вкупно кутии со колачи и чоколади останале на полиците во продавницата?

Задача 3. Цвета имала кокошки. Осум кокошки неселе за една недела 32 јајца. Колку јајца ќе снесат за една недела девет кокошки?

Задача 4. На еколошка акција за пошумување учениците од четврто одделение од едно училиште саделе садници: ела, бор, даб и бука. Засадило 38 ели, трипати повеќе дабови отколку ели, борови колку што засадило ели и дабови заедно, а буки засадило 4 пати помалку отколку што засадило борови.

По колку садници се засадени од секој вид? Колку вкупно садници се засадени? Колку ученици биле на пошумувањето, ако секој ученик засадил по 6 садници?

Задача 5. Никола ја бојадисувал оградата на својата кука од по-неделник до сабота. Тој бојадисал вкупно 246 летвички од оградата на тој начин што секој нагеден ден, тој бојадисувал 4 летвички повеќе од претходниот. Колку летвички бојадисал во среда?

Задача 6. Прадедо има 4 деца, секое од нив има 4 деца, и секое од тие деца има четири деца. Колку потомци има прадедото?

Задача 7. Во кафезот има зајаци и фазани, и тоа вкупно 35 глави и 94 нозе. Колку зајаци и колку фазани има во кафезот?

Задача 8. Во еден автосервис во еден месец се поправени 44 возила и тоа моторцикли и автомобили. На сите овие возила имало вкупно 144 тркала. Колку биле моторцикли, а колку автомобили?

Задача 9. Столарот изработувал столици. Некои имале 3, а некои 4 ногарки. Вкупно изработил 45 столици. Неговата ќерка избројала дека столиците имаат 159 ногарки. Колку столици имале 3, а колку 4 ногарки?

Задача 10. Во книжарницата биле донесени 8450 тетратки. Првиот ден продале половина од нив, а вториот ден 437 тетратки помалку. Колку тетратки останале непродадени?

Задача 11. Во едно училиште во четврто одделение и петто одделение има вкупно 62 ученика, во петто и шесто одделение заедно има

61 ученик, а во четврто, петто и шесто одделение има вкупно 90 ученици. По колку ученици има во секое одделение?

Задача 12. На пет полици се наоѓаат 300 книги. На првата и втората полица има 120 книги, на втората и третата има 115 книги, на третата и четвртата има 95 книги и на четвртата и петтата има 130 книги. Колку книги има на секоја полица?

Задача 13. Во две корпи имало еднаков број на јаболка. Ако од двете корпи земеме 88 јаболка, тогаш во првата ќе останат 57, а во втората ќе останат 49 јаболка. Колку јаболка се земени од секоја корпа?

Задача 14. Одбојкарска екипа игра натпревар со шест играчи на теренот и девет резерви. Замените во одбојката не се ограничени. По колку минути играл секој играч, ако натпреварот траел 1 час и сите играчи играле еднаков број минути?

Задача 15. Иван и Марија живеат во иста зграда. На секој кат има по 10 апартмани, коишто се нумерирани последователно: на првиот кат од 1 до 10, на вториот кат од 11 до 20, на третиот од 21 до 30 итн. Познато е дека бројот на катот на кој живее Иван е еднаков на бројот на апартманот во кој живе Марија. Освен тоа, збирот на броевите на нивните апартмани е 239. Најди го бројот на апартманот во кој живее Иван.

Задача 16. Во одделението има 35 ученици. Ако се отселат 5 момчиња, тогаш во одделението ќе има двапати помалку момчиња отколку девојчиња. Колку момчиња, а колку девојчиња имало во одделението пред споменатото селење?

Задача 17. Илија и Темјана имаат определен број значки. Ако Илија и поклони на Темјана 10 значки, тогаш ќе имаат ист број значки. Ако Темјана му поклони на Илија 20 значки, тогаш тој ќе има четири пати повеќе значки од Темјана. Колку значки има секој од нив?

Задача 18. Марко има 36 цамлии: бели, жолти и сини. Бели има двапати повеќе од жолти, а сини колку бели и жолти заедно. Колку цамлии има Марко од секоја боја?

Задача 19. Јован има двапати помалку разгледници од Милан, а Нестор има двапати помалку разгледници од Јован. Сите тројца заедно имаат 112 разгледници. Колку разгледници има секој од нив?

Задача 20. На две гранки стојат 25 врапчиња. Ако од првата гранка прелетаат 5 врапчиња на втората, а потоа од втората одлетаат 7 врапчиња, тогаш на првата гранка остануваат двапати повеќе врапчиња отколку на втората. Колку врапчиња има на почетокот на секоја гранка?

Задача 21. Девет патници носеле храна за 5 дена. Кон нив се придружиле уште неколку патници кои немале храна. Ја поделиле храната на еднакви делови и секој добил храна за 3 дена. Колку патници се придружиле на деветте патници?

Задача 22. На еден натпревар по математика имало 63 натпреварувачи. Момчињата се сместени во трикреветни соби, а девојчињата во двокреветни соби. Колку биле момчиња, а колку девојчиња, ако за сместувањето на натпреварувачите е искористена една трикреветна соба повеќе?

Задача 23. Туристичката агенција “Охридска легенда” во пристаништето има 12 глисери. Поголемите имаат по 8 седишта, а помалите по 5 седишта. Колку биле поголеми, а колку помали глисери, ако вкупниот број седишта е 75?

Задача 24. Загорка планирала во текот на неколку дена секој ден да решава по 15 задачи. Меѓутоа, таа секој ден решавала по 3 задачи повеќе, така што и останало последните три дена да решава по 4 задачи. Колку задачи планирала да реши Загорка?

Задача 25. Во телефонски разговор туристичкиот работник Анание на својот партнер Методи му соопштил дека во неговиот хотел ќе престојуваат три групи од по 187, 221 и 272 туристи, соодветно и дека гостите ќе бидат превезени со спортски авиони кои имаат ист број седишта. Во тој момент врската се прекинала. Колку слетувања треба да организира Методи?

Задача 26. Една цевка за 3 часа полни $\frac{1}{5}$ од еден базен, а друга за 4 часа $\frac{1}{4}$ од истиот базен, а трета цевка за 6 часа полни $\frac{1}{3}$ од истиот базен. Која цевка го полни базенот најбрзо?

Задача 27. Како е можно од жица со должина $\frac{2}{3}$ метри да се исече $\frac{1}{2}$ метар без користење на метро?

Задача 28. Самоил прочитал една книга за 3 дена. Првиот ден прочитал $\frac{3}{8}$ од книгата, вториот $\frac{5}{12}$, а третиот ден $\frac{1}{6}$ од книгата и уште 10 страници, со што ја прочитал целата книга. Колку страници имала книгата?

Задача 29. Во училиштето има 240 девојчиња и момчиња. Ако половината од учениците на училиштето се $\frac{3}{5}$ од девојчињата и $\frac{3}{7}$ од момчињата, колку девојчиња, а колку момчиња има во училиштето?

Задача 30. На прашањето колку ученици се на зимување наставникот Харалампие одговорил: “Знам само тоа дека половина од нив носат опрема за скијање, $\frac{4}{5}$ од преостанатиот дел се снабдени со санки, а само 10 од нив немаат обезбедено ниту скии, ниту санки”. Колку ученици биле на зимување?

Задача 31. Наставникот Стојко довел 40 ученици на натпревар по математика. Еден до членовите на комисијата го запрашал: “Колку вкупно ученици имаш на кои им предаваш, кога толку ученици си довел на натпреварот?”, Стојко одговорил: “Доведов $\frac{2}{3}$ од третина од вкупниот број на ученици на кои им предавам. Пресметајте.”

Задача 32. Во една златара има 400 златни шипки. Од секоја шипка се излиени 10 златници и останува злато така што од остатокот на 20 шипки може да се излие една нова шипка. Колку вкупно златници се излиени од дадените шипки?

Задача 33. Мачка и пол, за два и пол дена јаде три и пол глувци. Колку глувци ќе изедат 100 мачки за 45 дена?

Задача 34. Бисера направила колачи за своите деца Катерина, Марија и Велко. Требало секое дете да добие ист број на слатки. Меѓутоа, Катерина дошла дома прва, зела третина од слатките и отишла да си игра. Потоа дошла Марија и мислејќи дека дошла прва, зела третина од преостанатите колачи и отишла да си игра. На крајот дошол Велко и зел третина од преостанатите слатки. Кога Бисера се вратила дома нашла само 8 слатки. Колку колачи вкупно направила Бисера?

Задача 35. На роденден имало вкупно 20 гости, момчиња и девојчиња. Ана од претходно познава седум момчиња, Весна осум, Тања девет и така натаму се до последната Лидија, која ги познава сите момчиња. Колку момчиња биле на роденденот?

Задача 36. Во едно одделение на секои 3 момчиња има по 2 девојчиња. Ако во тоа одделение се приклучат шест момчиња, тогаш бројот на момчињата ќе биде двапати поголем од бројот на девојчињата. Колку момчиња, а колку девојчиња има во тоа одделение?

Задача 37. На едно острово живееле само ежови, лисици и змии. Секое животно се храни еднаш дневно. Секој еж за појадок изедува една змија, секоја лисица за ручек изедува еден еж, а секоја змија за вечера изедува една лисица. Во четврток навечер на островот останала само една змија. Колку животни имало во понеделникот наутро, ако од понеделникот до четвртокот не се окотило ниту едно животно, но ниту едно и не умрело?

Задача 38. Петар, Ана, Марко, Бојан и Гордана сакале да поделат бонбони. Секој последователно земал по една бонбона се додека не останале бонбони помалку од нив, а толку бонбони колку што добил секој нив. Колку бонбони можело да има? Најди ги сите решенија.

Задача 39. На еден конгрес имало 2000 учесници, од кои секој бил филозоф или математичар, а еден број од учесниците се занимавал и со филозофија и со математика. Колку учесници имало во секоја од трите

категории ако меѓу филозофите секој осми е математичар, а меѓу математичарите секој тринаесетти е филозоф?

Задача 40. Должините на страните на некој триаголник се три последователни непарни природни броеви, при што збирот на должините на двете подолги страни е за 7cm помал од трикратната должина на најмалата страна. Колкав е периметарот на триаголникот?

Задача 41. На прашањето на наставникот: “Колку ученици се отсутни?”, еден ученик одговорил: “Една деветтина.”. Во тој момент влегол еден ученик, па друг ученик прокоментирал: “Сега се отсутни една дванесеттина од вкупниот број ученици”. Колку ученици има во тоа одделение?

Задача 42. Еден ден во одделението биле отсутни една дванесеттина од учениците. Утредента дошол еден од отсутните ученици, па така биле отсутни една осумнаесеттина од учениците. Колку ученици имало во одделението?

Задача 43. Петар, Васко и Огнен заедно имаат 160 џамлии. Ако Петар му даде на Огнен 17 џамлии, а Васко му поклати на Огнен 12 џамлии, тогаш Петар и Васко ќе имаат еднаков број џамлии, а Огнен ќе има колку Петар и Васко заедно. Колку џамлии на почетокот имало секое од момчињата?

Задача 44. Книгата што ја чита Марко има 242 страници. Првиот ден тој прочитал 22 страници, а вториот и третиот ден прочитал по 4 страници повеќе од првиот ден. Колку вкупно денови Марко ќе ја чита книгата, ако од четвртиот ден па натаму тој планира на чита по 2 страници повеќе од третиот ден?

Задача 45. Во едно училиште има 32 паралелки. Од нив 6 паралелки имаат по 29 ученика, 8 паралелки имаат по 30 ученика, 2 паралелки по 31 ученик, а останатите паралелки имаат по 32 ученика. Колку изнесува вкупниот број на ученици во училиштето?

Задача 46. Четири момчиња Андреј, Бојан, Васко и Гоце се колекционери на поштенски марки. Андреј има толку марки колку што имаат Бојан и Васко заедно, Гоце има пет пати помалку марки од Андреј, а Бојан

четири пати повеќе од Васко. По колку марки има секое од момчињата, ако заедно тие имаат 5016 поштенски марки?

Задача 47. На еден тренинг имало 225 деца и 105 топки. Децата се поделени на групи со еднаков број на деца и на секоја група тренерите им поделиле топки, така што секоја група добила по еднаков број на топки. Колку групи се формирани и по колку топки им се поделени? Колку решенија има задачата?

Задача 48. Пријателките Елена, Марија и Татјана прават колекции марки. Заедно имаат 12000 марки. Половина од својата колекција Марија ја поделила на еднакви делови и ја дала на своите пријателки, а другата половина ја задржала за себе. Потоа истата постапка ја повторила Татјана со марките кои ги има во моментот, а потоа на иста начин постапила Елена, после што сите три имаат ист број марки. Колку марки имало секое девојче на почетокот?

Задача 49. На една забава на која учествувале 33 момчиња и девојчиња, секое девојче играла со различен број момчиња. Првото девојче играло со 4 момчиња, второто со 5, третото со 6, итн. Последното девојче играло со сите момчиња. Колку момчиња и колку девојчиња имало на забавата?

Задача 50. Група ученици отишла во паркот да се одмори. Ако на секоја клупа седат по 6 ученици, тогаш за 2 ученика нема место, а ако на секоја клупа седат по 7 ученици, тогаш три места остануваат празни. Колку клупи има во паркот и колку ученици се во групата?

Задача 51. На секое од трите деца мајката им дала ист број портокали. Кога децата изеле по 4 портокали им останале онолку портокали колку што добило секое дете. Колку портокали добило секое дете?

Задача 52. Иван, Марија и Златко имаат вкупно 360 сликички. Иван и Марија заедно имаат 40 сликички повеќе од Златко, а Иван има три пати повеќе од Марија. Колку сликички има секој од нив?

Задача 53. Есента е еден ден подолга од зимата, 4 дена пократка од летото и 2 дена пократка од пролетта. Колку трае секое годишно време, ако годината не е престапна?

Задача 54. Во првата кошница има 1999 цреши повеќе отколку во втората. Во која кошница ќе има повеќе цреши, ако од првата во втората пренесеме 1000?

Задача 55. Во еден овоштарник во секој ред се засадени по 30 овошки. Ако се засадени три реда помалку и ако во секој ред има по 35 овошки, тогаш во овоштарникот ќе има 50 овошки повеќе. Колку овошки има во овоштарникот?

Задача 56. Лимбе има три пати повеќе пари од Жарко. Ако двајцата потрошат по 10 денари тогаш Лимбе ќе има четири пати повеќе пари отколку Жарко. Колку пари има секој од нив.

Задача 57. Чаша е наполнета со какао. Отпиваме шестина од какаото, па ја дополнуваме чашата со млеко, потоа отпиваме третина од содржината на чашата и ја дополнуваме чашата со млеко. Потоа, отпиваме половина од содржината на чашата и ја дополнуваме чашата со млеко. На крајот ја испиваме целата содржина на чашата. Што испивме повеќе, какао или млеко?

Задача 58. Наташа од својата баба добила кошница во која имало јаболка и круши. Од вкупниот број овошки $\frac{3}{7}$ биле јаболка, а останатите круши. Кога добила уште 4 јаболка и изела 2 круши, во кошницата имало ист број јаболка и круши.

Колку круши и колку јаболка имала Наташа на почетокот во кошницата?

Задача 59. Мајка, татко, брат и сестра вкупно купиле 10 чоколади. На колку различни начини можат меѓусебно да ги поделат чоколадите, под услов секој да добие барем две чоколади?

4.7. РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ

4.7.1. БРЗИНА И ДВИЖЕЊЕ

1. Три часа после среќавањето првиот автомобил ќе измине $76 \cdot 3 = 228km$, а вториот $(76 + 12) \cdot 3 = 88 \cdot 3 = 264km$. Значи автомобилите еден од друг ќе бидат оддалечени $228 + 264 = 492km$.

2. После секој час возење растојанието меѓу бродовите се намалува за $22 + 28 = 50km$. После 40 часови тие вкупно поминале $40 \cdot 50 = 2000km$ и тоа е растојанието меѓу пристаништата.

3. Вториот ден прелетал $3154 - 278 = 2876km$, а третиот ден прелетал $9014 - 3154 - 2876 = 2984km$.

4. Имаме $H3C(75, 45, 60) = 900$, што значи дека после $900cm$ Драгана ќе направи 12 чекори, Мира ќе направи 20 чекори и Сања ќе направи 15 чекори и 16 ќе го започне со лева нога. Меѓутоа, откако ќе поминат уште $900cm$, односно после $18m$ тие повторно ќе отпочнат заедно да чекорат со десна нога. Значи, до првото заедничко зачекорување со десна нога Драгана, Мира и Сања ќе исчекорат 24, 40 и 30 чекори, соодветно.

5. Првиот автомобил за еден час поминувал $280 : 4 = 70km$, а вториот $330 : 3 = 110km$. Според тоа, за 7 часа тие заедно поминале $7(70 + 110) = 1260km$ и тоа е растојанието меѓу градовите.

6. Првиот секоја минута поминувал $200m$ повеќе, па бидејќи поминал $66km = 66000m$ повеќе заклучуваме дека до средбата поминале $66000 : 200 = 330$ минути. Според тоа, првиот моторциклист поминал $330 \cdot 1 = 330km$, а вториот поминал $330 \cdot 800 = 264000m = 264km$. Значи, растојанието меѓу местата А и В изнесува $330 + 264 = 594km$.

7. Јасно, Киро на почетокот има $120m$ предност пред Рампо. Но, после секоја минута Рампо го намалува меѓусебното растојание $(150 - 120)m = 30m$. Според тоа, за да го надомести растојанието од $120m$ на Рампо му се потребни $120 : 30 = 4$ минути.

8. Кога локомотивата влегува во тунелот и возот влегува во тунелот, а дури кога и последниот вагон излегува од тунелот и возот излегува од тунелот. Од моментот кога локомотивата влегува во тунелот, па до излегувањето на последниот вагон од тунелот, локомотивата (а и секој вагон, и последниот) поминува $1000m$ и тоа: $500m$ низ тунелот и уште $500m$ додека и последниот вагон не излезе од тунелот, бидејќи должината на возот е $500m$. Од овде јасно е дека за поминување на возот при брзина од $60km$ на час потребното време е една шеесеттина од часот, т.е. 1 минута.

9. Јасно се движеле само 4 тркала и тие заедно изминале

$$4 \cdot 200000 = 800000$$

километри. Бидејќи тркалата биле менувани овие $800000km$ ги изминале сите 5 тркала, па затоа секое тркало изминало $800000:5 = 160000 km$.

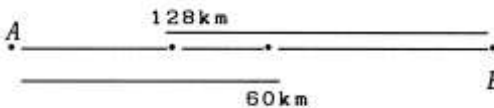
10. Невена со автобус поминала пет дела од патот, а пешки само еден дел. Целиот пат е $30km$, што значи дека таа пешки поминала $30:6 = 5km$, а со автобус $30 - 5 = 25km$.

11. Михаил бил трипати побрз од Петар, па затоа за истото време поминал $3 \cdot 28 = 84km$. Но, бидејќи возел двапати подолго време, тој вкупно минал $2 \cdot 84 = 168km$.

12. На секое завртување на задното тркало имаме 4 завртувања на предното тркало. Според тоа, на ист пат на бројот на завртувањата на задното тркало предното тркало го прави истиот број завртувања и уште трипати повеќе завртувања од задното тркало. Значи, задното тркало направило

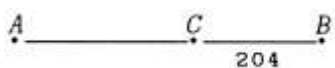
$$3900:3 = 1300$$

завртувања и изминатиот пат е $1300 \cdot 4 = 5200m$.



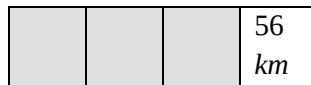
13. Бидејќи се одмарале 30 минути, тие патувале $12 - 8 = 4$ часа. За тоа време велосипедистот поминал $4 \cdot 15 = 60 km$, а моторциклистот поминал $4 \cdot 32 = 128 km$. Конечно во 12 часот и 30 минути тие биле оддалечени еден од друг

$$(128 + 60) - 185 = 188 - 185 = 3 km.$$



14. Двата автомобили за еден час поминаат $86+68=154km$. Бидејќи растојанието меѓу местата A и B е $462km$, тие ќе се сретнат после $462:154=3$ часа. Местото на среќавање C (види цртеж) ќе биде оддалечено од B точно $3 \cdot 68=204km$.

15. Целиот пат изнесува половина и четвртина од патот и уште $(50+6)km$. Бидејќи една половина има две четвртини (види цртеж десно)



добиваме дека целиот пат изнесува три четвртини од патот и уште $56km$. Но, во едно цело има четири четвртини, па затоа една четвртина од патот изнесува $56 km$. Целиот пат е долг $56 \cdot 4km=224km$.

16. Првиот час од своето патување патникот поминал $25\frac{1}{2} km$, во вториот час поминал $25\frac{1}{2} + 1\frac{3}{4} = \frac{51}{2} + \frac{7}{4} = \frac{109}{4} km$, додека во третиот час поминал $\frac{109}{4} - 12\frac{1}{8} = \frac{218}{8} - \frac{97}{8} = \frac{121}{8} km$. Значи, на патникот му остануваат

$$100 - 25\frac{1}{2} - \frac{109}{4} - \frac{121}{8} = \frac{800-204-218-121}{8} = \frac{257}{8} km.$$

4.7.2. РАБОТА И ВРЕМЕ

1. Во секој камион има по $195:3=65$ кутии. Работниците растовариле еден камион, односно 65 кутии, па им останале уште $195-65=130$ кутии за растоварање.

2. Прв начин. Столарот за еден ден ќе изработи $6+3=9$ парчиња мебел, а за 5 дена $5 \cdot 9 = 45$ парчиња мебел.

Втор начин. За 5 дена столарот ќе изработи $5 \cdot 6 = 30$ столици и $5 \cdot 3 = 15$ маси, односно $30+15=45$ парчиња мебел.

3. Во втората смена работат $126 + 42 = 168$ рудари, што значи дека во третата смена работат $(126 + 168) : 2 = 294 : 2 = 147$ рудари.

4. Од 22 ч и 37 мин. одземаме 20 ч и 20 мин, и добиваме 2 часа и 17 минути. Потоа од нив ќе ги одземеме $3+4=7$ минути кои се пауза за реклами, од што добиваме дека филмот трае 2 часа и 10 минути.

5. Нека последниот работел x денови. Првиот работник работел $5x$ денови, претпоследниот $2x$ денови. Но работниците започнувале со работа во еднакви временски интервали, па затоа на работата работеле уште двајца работници кои биле ангажирани $3x$ и $4x$ денови соодветно. Значи, имало 5 работници и за завршување на работата се потребни $5 \cdot 24 = 120$ денови. Имаме, $120 = x + 2x + 3x + 4x + 5x = 15x$, од каде $x = 8$. Конечно, првиот работник работел цело време и тоа е времето за кое работа ќе биде завршена, т.е. $5 \cdot 8 = 40$ денови.

6. Целата работа сидарите ја завршиле 15 дена пред рокот. Притоа секој пат, наместо за три дена предвидениот дел од работата го завршувале за два дена. Значи, со забрзано темпо работеле $15 \cdot 2 = 30$ дена. Бидејќи целата работа е завршена за 55 дена, следува дека пред забрзување на работата сидарите работеле 25 дена.

7. Еден пекар за шест часа ќе измеси исто количество леб колку и три пекари за два часа, а тоа е 67 векни леб. Четири пекари за три часа ќе измесат колку и два пекари за шест часа, а тоа е $2 \cdot 67 = 134$ векни леб. Бидејќи $335 : 5 = 67$, заклучуваме дека секој од петте пекари треба да измеси 67 векни леб, за што му се потребни шест часа.

8. Незавршениот дел од работата е две третини од целата работа и тој чини 1000 денари. Според тоа, третина од работата чини 500 денари. Бидејќи Павле добил 300 денари и влезница, заклучуваме дека влезницата чини $500 - 300 = 200$ денари.

9. Од условот на задачата заклучуваме дека половината од книгата е за 15 страници поголема од третината. Но, $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$, што значи дека шестина од книгата има 15 страници, па затоа книгата има $6 \cdot 15 = 90$ страници.

10. Првиот трактот до доаѓањето на вториот изорал $\frac{2}{15}$ од нивата, а вториот до отстранувањето на дефектот изорал $\frac{1}{20}$ од нивата. Значи, останале неизорани

$$1 - \frac{2}{15} - \frac{1}{20} = \frac{60 - 8 - 3}{60} = \frac{49}{60}$$

од нивата кои треба заедно да ги изораат. За 1 час заедничка работа тракторите можат да изораат $\frac{1}{15} + \frac{1}{20} = \frac{4+3}{60} = \frac{7}{60}$ од нивата, па значи останатиот дел од нивата ќе го завршат за $\frac{49}{60} : \frac{7}{60} = 7$ часа.

11. Да не бил дефектот, втората половина од нивата Крсте ќе ја изорал до 10 часот. Бидејќи после настанувањето на дефектот тој работел два пати поспоро, тој до 10 часот ја завршил половина од остатокот на нивата, односно четвртина од нивата. Преостанатата четвртина ја орал од 10 до 12 часот, и тоа по 5 ари на час. Значи четвртина од нивата се 10 ари, а целата нива е 40 ари. Крсте почнал да ора во 6 часот наутро, првата половина ја изорал за 2 часа, а втората половина за 4 часа.

12. За еден ден првиот работник ќе изврши $\frac{1}{10}$ од работата, вториот $\frac{1}{15}$, а сите тројца заедно ќе завршат $\frac{1}{5}$ од работата. Според тоа, третиот работник за еден ден може да заврши

$$\frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{15} = \frac{1}{30}$$

од работата. Затоа, третиот работник за 30 дена може сам да ја заврши работата.

13. Првиот ден се подготвени $\frac{3}{10}$ од нивата, а вториот ден $\frac{3}{5} \cdot \frac{7}{10} = \frac{21}{50}$. Остатокот е

$$1 - \left(\frac{3}{10} + \frac{21}{50} \right) = \frac{14}{50}.$$

Разликата на површината обработена третиот ден и површината обработена вториот ден е $\frac{7}{50}$, што според условот е 11,2 хектари. Значи, заклучуваме дека педесетти дел од нивата е $11,2 : 7 = 1,6$ хектари, па целата површина е $1,6 \cdot 50 = 80$ хектари. Според тоа, првиот ден се подготвени 24 хектари, вториот ден 33,6 хектари и третиот ден 22,4 хектари.

14. За еден ден првата бригада завршува $\frac{1}{10}$ од работата, а втората $\frac{1}{15}$ од работата. Третиот ден од првата бригада за еден ден ќе заврши $\frac{1}{30}$ од работата а заедно со делот од втората бригада ќе заврши $\frac{1}{12}$ од работата. Според тоа, делот од втората бригада за еден ден треба да заврши

$$\frac{1}{12} - \frac{1}{30} = \frac{3}{60} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{15}$$

од работата. Бидејќи втората бригада завршува $\frac{1}{15}$ од работата, $\frac{3}{4}$ од втората бригада ќе завршат $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{15}$ од работата. Значи ангажирани се $\frac{3}{4}$ од втората бригада.

15. Една четвртина од бригадата А ќе ја заврши работата за $5 \cdot 4 = 20$ дена, па значи тие за еден ден ќе завршат $\frac{1}{20}$ од работата. Една третина од бригадата В ќе ја заврши работата за $3 \cdot 4 = 12$ дена, па значи тие за 1 ден ќе завршат $\frac{1}{12}$ од работата. За еден ден $\frac{1}{4}$ од бригадата А и $\frac{1}{3}$ од бригадата В ќе завршат

$$\frac{1}{20} + \frac{1}{12} = \frac{3+5}{60} = \frac{8}{60} = \frac{2}{15}$$

делови од работата, па затоа целата работа ќе ја завршат за 7,5 дена.

16. За еден час Киро повлекувал $5 \cdot 60 = 300$ цртички, што значи дневно Киро повлекувал $8 \cdot 300 = 2400$ цртички. Според тоа, за една година Киро повлекол $300 \cdot 2400 = 720000$ цртички, па затоа вкупно тој повлекол $3 \cdot 720000 = 2160000$ цртички.

17. Рампо текстот го чукал за 320 минути, а Киро за 280 минути. Брзините на чукање се однесуваат како $\frac{1}{320} : \frac{1}{280} = 7:8$, што значи дека на секои 15 страници Рампо чука 7, а Киро 8 страници. Според тоа, ако Киро отчукал три страници повеќе, тоа значи дека тој ќе отчука $3 \cdot 8 = 24$ страници, а за тоа време Рампо отчукал $3 \cdot 7 = 21$ страница. Вкупниот број на страници е 45.

18. Во текот на едно деноноќие времето кое ќе го покажат двата часовника ќе се разликува за $8+4=12$ минути. Затоа, тие за првпат ќе покажат исто време после $24 \cdot 60 : 12 = 120$ деноноќија. Значи, часовниците ќе покажуваат исто време после секои $120n$ деноноќија, каде n е природен број. За $120n$ деноноќија првиот часовник ќе побрза $8 \cdot 120n$ минути т.е. $16n$ часови во однос на точното време. За да покаже точно 12 часот на пладне треба $16n$ да се дели со 24. Најмалиот природен број n со ова својство е бројот 3. Значи, после $120 \cdot 3 = 360$ деноноќија двата часовника за првпат истовремено ќе покажат 12 часот на пладне.

19. Нека првиот вторник е во a – тиот ден во месецот. Датумите на останатите вторници се $a+7, a+14, a+21$ и евентуално $a+28$. Бидејќи три вторници се на парни датуми, заклучуваме дека тоа се броевите $a, a+14, a+28$, па затоа $a=2$. Последниот вторник во месецот е на 30 – ти, а последниот петок е на 26 – ти.

20. За една минута малиот и големиот полжав ќе изедат $\frac{1}{6}$ од јагодата. Нека x е времето потребно на малиот полжав да ја изеде јагодата сам. Тогаш малиот полжав за една минута ќе изеде $\frac{1}{x}$ од јагодата, а големиот полжав ќе изеде три пати повеќе, односно $\frac{3}{x}$ од јагодата. Од условот на задачата важи $\frac{1}{x} + \frac{3}{x} = \frac{1}{6}$, од каде со решавање се добива $x=24$ минути. Оттука, времето кое му е потребно на големиот полжав сам да ја изеде јагодата е 8 минути.

4.7.3. ГОДИНИТЕ СЕ ВАЖНИ

1. Ќе тргнеме со решавање во обратна насока. На бројот 5 што е добиен како резултат му додадеме 5, потоа го множиме со 5, па пак му додадеме 5 и ќе ги добиеме годините на Стојан. Имено, Стојан има $(5+5) \cdot 5 + 5 = 55$ год.

2. Ако синот пред 5 години имал x години, тогаш таткото имал $x+24$ години. Но пред 5 години таткото имал $4x$ години, па затоа $4x = x+24$, т.е. $x=8$. Синот има 13 години, а таткото има 37 години.

3. Денеска секој од братот и сестрата е по 8 години постар, па затоа тие заедно ќе имаат $8+16=24$ години. После 8 години секој од нив ќе биде постар по 8 години, па затоа заедно ќе имаат $24+16=40$ години.

4. Пред 16 години Рампо имал x години, а Киро имал $3x$ години. Денеска Рампо има $x+16$, а Киро има $3x+16$ години. Од условот следува дека $3x+16 = x+16+12$, па затоа $x=6$. Денес Рампо има $6+16=22$ години, а Киро има $22+12=34$ години.

5. Одговор. Дедото има 60, а внукот 5 годни.

6. Одговор. Во 1998 година Митре имал 11 години, а мајка му 36 години.

7. Бидејќи Милан е трипати помлад од својот татко, а сестрата е трипати помлада од Милан, таа е девет пати помлада од таткото. Значи, збирот на годините на таткото и сестрата е десет пати поголем од годините на сестрата. Според тоа, сестрата има $50:10=5$ години. Сега, лесно се пресметува дека Милан има 15 години, а таткото има 45 години.

8. Бидејќи во една година има 12 месеци, а бројот на месеците на внукот е еднаков со бројот на годините на бабата добиваме дека таа е 12 пати постара од внукот. Затоа 65 години треба да се поделат на 13 еднакви делови, од кои 12 делови и припаѓаат на бабата, а еден на внукот. Од $65:13=5$ добиваме дека Наум има 5 години, а баба Илинка има $65-5=60$ години.

9. Нека Ефтим има a години, а Пано има b години. Тогаш возраста на баба Каранфила е $10a+b$ години. Според условот на задачата имаме

$$10a+b+a+b=69,$$

па затоа

$$11a+2b=69.$$

Од последното равенство следува дека a е непарен број помал од 6. Значи $a=1, 3$ или 5 . Но, b е цифра, па затоа $1 \leq b \leq 9$. Ова е можно ако $a=5$ и тогаш $b=7$. Конечно, Ефтим има 5, Пано 7, а баба Каранфила 57 години.

10. Бидејќи третина од збирот на нивните години е 16 целиот збир е 48. Значи, Гаврил има 24 години, а Трена и Леонид заедно имаат 24 години. Бидејќи Трена има 4 години повеќе од Леонид, тој има $(24-4):2=10$ години. Конечно, Трена има $24-10=14$ години.

11. Ако баба му на Филип има x години, дедо му има $x+5$ години. За роденденот баба му му дала $3x$ денари а дедо му му дал $4x+20$ денари. Заедно му дале $7x+20$ денари. Според тоа

$$7x+20=405$$

$$7x=385$$

$$x=385:7=55.$$

Значи, баба му имала 55 години, а дедо му 60 години.

12. Бројот на годините на Борче ќе го означиме со x . Тогаш мајката на Борче има три пати повеќе години, односно $3x$ години, а таткото има четири години повеќе од мајката, односно има $3x + 4$ години. Бидејќи вкупно имаат 88 години, добиваме $x + 3x + (3x + 4) = 88$, односно $7x + 4 = 88$. Од тука $7x = 84$, а $x = 12$. Значи, Борче има 12 години, неговата мајка 36, а неговиот татко 40 години.

13. Имаме

Косара

1 месец	1 година = 12 месеци	$18 - 5 = 13$ години
5 вицови	$5 \cdot 12 = 60$ вицови	$13 \cdot 60 = 780$ вицови

Ласте

1 година = 60 вицови	8 години
$60 : 4 = 15$ видео игри	$15 \cdot 8 = 120$ видео игри

14. Од раѓањето до денешен ден сите тројца стареем ист број години, па затоа јас имам $(100 - 50) : 3 = \frac{50}{3} = 16\frac{2}{3}$ години. Значи, мојот 17. роденден е после $\frac{1}{3}$ од годината, односно после 4 месеци.

4.7.4. МАСИ, ДОЛЖИНИ И ВОЛУМЕНИ

1. Во фабриката дневно се произведуваат $3562 + 9568 = 13130$ l сок од малини, а $13130 - 536 = 12594$ l сок од јагоди или, вкупно, во фабриката, дневно се произведуваат

$$3562 + 13130 + 12594 = 29286 \text{ l сок.}$$

2. Јагнето, јарето и телето заедно имале $(32 + 102 + 100) : 2 = 117$ kg. Оттука телето имало $117 - 32 = 85$ kg, јарето $117 - 102 = 15$ kg и јагнето имало $117 - 100 = 17$ kg.

3. Прв начин. Секое момче се мерело по еднаш со останатите четири момчиња, што значи дека во дадените десет маси масата на секое момче се јавува четири пати. Ако ги собереме дадените маси, тогаш во

збирот четири пати ќе учествуваат масите на петте момчиња. Според тоа, масата на петте момчиња е четвртина од пресметаниот збир.

Значи, ако x е масата на петте момчиња, тогаш

$$x = (72 + 75 + 76 + 77 + 78 + 80 + 81 + 82 + 85 + 86) : 4 = 792 : 4 = 198 \text{ kg}.$$

Втор начин. Нека со x, y, z, u, v ги означиме масите соодветно на првото, второто, третото, четвртото и петтото момче. Тогаш, имаме

$$x + y = 72, y + z = 75, z + u = 76, u + v = 77, v + x = 78,$$

$$x + z = 80, y + u = 81, z + v = 82, u + x = 85, v + y = 86.$$

Ако ги собереме овие 10 равенки ќе добиеме $4(x + y + z + u + v) = 792$. Па, петте момчиња имаат вкупно $x + y + z + u + v = 198 \text{ kg}$.

4. Ако ги собереме дадените маси, тогаш во збирот двапати ќе учествуваат масите и на главата и на опашката и на трупот. Според тоа, масата на ребата е половина од пресметаниот збир.

Значи, ако x е масата на ребата, тогаш $x = 18 : 2 = 9 \text{ kg}$.

5. Секоја книга има по две корици, па вкупниот број на корици е шест, а нивната вкупна дебелина е 12 mm . Вкупниот број на страници е

$$90 + 110 + 150 = 350,$$

па вкупната дебелина на сите страници е $350 : 10 = 35 \text{ mm}$. Конечно, дебелината на сите три книги заедно е $12 + 35 = 47 \text{ mm}$.

6. Нека половина од трупот тежел x килограми. Тогаш трупот тежел $2x$ килограми, а главата тежела $2 + x$ килограми. Од условот имаме $2x = 2 + 2 + x$. Решение на последната равенка е $x = 4$, што значи дека сомот бил тежок $2 + 2x + 2 + x = 4 + 3x = 16 \text{ kg}$.

7. Вкупниот збир на масите на јаболката е 119 kg . Двајцата купувачи купиле една од масите $104 \text{ kg}, 103 \text{ kg}, 101 \text{ kg}, 100 \text{ kg}, 99 \text{ kg}$ или 88 kg .

Ако едниот купувач купил $x \text{ kg}$, тогаш другиот купил $2x \text{ kg}$ или заедно купиле $3x \text{ kg}$. Според тоа, купената количина е делива со 3. Единствената таква количина е 99 kg . Значи, непродаден е сандакот со 20 kg .

Едниот купувач купил 33 kg а другиот купувач купил 66 kg . Односно едниот ги купил сандаците со 15 kg и 18 kg јаболка, а другиот сандаците со $16 \text{ kg}, 19 \text{ kg}$ и 31 kg .

8. Плоштината на ливадата е $75 \cdot 20 = 1500$ ари, па значи масата на искосената трева е $1500 \cdot 240 = 360000 \text{ kg} = 360 \text{ t}$. Четвртина од оваа маса е масата на сеното, што значи дека масата на сеното е 90 t .

9. За кофата од горе да се спушти до дното на бунарот, чекрекот треба да се заврти 12 пати. За да се врати повторно горе потребни се уште 12 завртувања. Со тоа се извадени 10 l вода. За да се извадат 200 l вода ова треба да се повтори 20 пати. Според тоа, чекрекот треба да се заврти $2 \cdot 12 \cdot 20 = 24 \cdot 20 = 480$ пати.

10. Во првото буре има $5 \text{ hl } 25 \text{ l} = 525 \text{ l}$ вино. Значи, во второто буре има $3 \cdot 525 \text{ l} = 1575 \text{ l}$ вино, а во третото буре има $525 \text{ l} - 175 \text{ l} = 350 \text{ l}$ вино. Во трите буриња заедно има $525 \text{ l} + 1575 \text{ l} + 350 \text{ l} = 2450 \text{ l} = 24 \text{ hl } 50 \text{ l}$ вино.

11. Бидејќи во магацинот на Стојан има четири пати помалку шеќер отколку во магацинот на Киро, јасно е дека во магацинот на Киро има шеќер колку што има во магацинот на Стојан и уште трипати по толку. Но, од друга страна во магацинот на Киро има 1080 kg шеќер повеќе отколку во магацинот на Стојан, па затоа количеството шеќер во магацинот на Стојан е $1080:3=360 \text{ kg}$.

Во магацинот на Киро има $4 \cdot 360 = 1440 \text{ kg}$ шеќер.

12. После трите претурања во секој сад имаме еднакво количество млеко и тоа $30:3=10 \text{ l}$. Од првиот сад се одтурени 4 l и се дотурени 3 l , што значи млекото се намалило за 1 l и затоа во него пред првото претурање имало 11 l млеко. Од вториот сад се одтурени 2 l и се дотурени 4 l , па значи во него количеството млеко се зголемило за 2 l и затоа во вториот сад на почетокот имало 8 l . Слично, во третиот сад се дотурени 2 l , а се одтурени 3 l , односно почетното количество млеко се намалило за 1 l , т.е. пред првото претурање во овој сад имало 11 l млеко.

13. Бидејќи три килограми банани чинат колку пет килограми портокали добиваме дека 6 kg банани чинат колку 10 kg портокали. Значи, можеме да земеме дека се купени $10+9=19 \text{ kg}$ портокали и за нив се платени 684 денари. Според тоа, еден килограм портокали чини $684:19=36$ денари. Оттука 5 kg портокали чинат $36 \cdot 5=180$ денари, а тоа е цената на 3 kg банани. Конечно, еден килограм банани чини $180:3=60$ денари.

14. Пет овци за 8 дена изедуваат 40 “порции”. Значи, една “порција” изнесува $120:40=3kg$. Според тоа, стадо од 125 овци за 90 дена ќе изеде $125 \cdot 90 \cdot 3=33750kg$ сено.

15. Ако лист хартија чија дебелина е $\frac{1}{4} mm$ се превитка на половина се добива лист хартија со дебелина е $\frac{1}{2} mm$. После второто превиткување се добива лист хартија со дебелина 1 mm, после третото дебелината е 2 mm, после четвртото 4 mm, после петтото 8 mm, после шестото 16 mm, после седмото 32 mm, после осмото 64 mm, после деветтото 128 mm, после десеттото 256 mm, после единаесеттото 512 mm и после дванаесеттото 1024 mm.

16. Бидејќи после продажбата во сите три продавници останало онолку стока колку што е донесено во една продавница, непродадената стока изнесува една третина од стоката која стигнала во продавницата. Значи продадено е две третини од стоката, што изнесува 14kg. Конечно, една третина од стоката е 7kg, а целата стока која пристигнала во продавницата е $7 \cdot 3 kg = 21 kg$.

17. Бидејќи после претурањето во првиот сад имаме трипати повеќе вода отколку во вториот сад заклучуваме дека вкупното количество вода е четирипати поголемо отколку водата која после претурањето ја имаме во вториот сад. Значи, во вториот сад после претурањето имаме $60:4=15$ литри вода.

Според тоа, во вториот сад пред претурањето имаме $15 \cdot 5=75$ литри вода. Во првиот сад пред претурањето имаме $60-75=15$ литри вода.

18. Пано не продал $\frac{1}{6}$ и уште 15 kg, што значи му останале $\frac{1}{6} \cdot 258+15=58 kg$, а продал 200 kg. Од овие 200 kg, тој $\frac{3}{8}$ и уште 5 kg, т.е. 80 kg продал по 3,5 денари и за нив добил $80 \cdot 3,5=280$ денари. За остатокот добил $1\frac{5}{7} \cdot 280=480$ денари, па значи преостанатите 120 kg ги продавал за $480:120=4$ денари по kg.

19. Три четвртини од целата цигла тежат колку тричетвртини цигла на другиот тас. Значи една четвртина цигла тежи три четвртини килограм. Бидејќи во цела цигла има 4 четвртини, таа тежи 12 четвртини килограми, а тоа е 3 kg.

20. Ако сите шишиња се од $\frac{4}{5}$ литри, тогаш ќе има $39 \cdot \frac{4}{5} = 31\frac{1}{5}$ литри сок. Заменувајќи поголемо шише со помало, количеството сок ќе го намалиме за $\frac{4}{5} - \frac{3}{4} = \frac{16-15}{20} = \frac{1}{20}$ литри. Според тоа, мали шишиња од $\frac{3}{4}$ литри има $(31\frac{1}{5} - 30) : \frac{1}{20} = 24$, а големи шишиња од $\frac{4}{5}$ литри има 15.

21. Во вториот сад пред претурањето имало

$$(78\frac{2}{3} - (5\frac{5}{6} + 5\frac{5}{6} + 8)) : 2 = 29\frac{1}{2} \text{ литри млеко, итн.}$$

22. Во еден тон морска вода има $35kg = 35000g$ сол, па затоа во еден килограм морска вода има $35000 : 1000 = 35g$ сол. Во $200g$ морска вода има 5 пати помалку сол, што значи дека има $7g$ сол. Ќе пресметаме колку килограми обична вода содржи $1g$ сол. Ако во еден тон обична вода има $40g$ сол, тогаш $1000 : 40 = 25kg$ обична вода содржи $1g$ сол. Значи, $7 \cdot 25 = 175kg$ обична вода има $7g$ сол, колку што има и во $200g$ морска вода.

23. Ако на остатокот од $1,5m$ додадеме $0,5m$, добиваме конец со должина $2m$, кој според условот на задачата е еднаков на половина од помалиот дел од конечот кој се добива после првото делење. Значи, овој помал дел изнесува $4m$. Според тоа, $4m + 0,5m = 4,5m$ е половина од должината на целиот конец. Конечно, на почетокот сме имале конец со должина $9m$.

4.7.5. ПАРИ И ТРГОВИЈА

1. Имаме

$$10 \text{ ден.} = 2 \cdot 5 \text{ ден.}$$

$$= 1 \cdot 5 \text{ ден.} + 5 \cdot 1 \text{ ден.}$$

$$= 1 \cdot 5 \text{ ден.} + 2 \cdot 2 \text{ ден.} + 1 \cdot 1 \text{ ден.}$$

$$= 1 \cdot 5 \text{ ден.} + 1 \cdot 2 \text{ ден.} + 3 \cdot 1 \text{ ден.}$$

$$= 5 \cdot 2 \text{ ден.}$$

$$\begin{aligned}
 &= 4 \cdot 2 \text{ ден.} + 2 \cdot 1 \text{ ден.} \\
 &= 3 \cdot 2 \text{ ден.} + 4 \cdot 1 \text{ ден.} \\
 &= 2 \cdot 2 \text{ ден.} + 6 \cdot 1 \text{ ден.} \\
 &= 1 \cdot 2 \text{ ден.} + 8 \cdot 1 \text{ ден.} \\
 &= 10 \cdot 1 \text{ ден.}
 \end{aligned}$$

2. Ќе тргнеме со решавање на задачата во обратна насока. На крајот од поделбите на парите сите имале ист износ, односно 4000 денари. Пред поделбата на парите Мартин имал $4000 \cdot 2 = 8000$ денари, а Драган и Боби $4000 - 4000 : 2 = 2000$ денари. Пред Боби да го подели својот дел на начин како во задачата тој имал $2000 \cdot 2 = 4000$, а Драган и Мартин имале $2000 - 2000 : 2 = 1000$ и $8000 - 2000 : 2 = 7000$ денари, соодветно. Конечно на почетокот Драган имал $1000 \cdot 2 = 2000$ денари, Боби имал $4000 - 1000 : 2 = 3500$ денари и Мартин имал $7000 - 1000 : 2 = 6500$ денари.

3. Жарко во април заштедил $387 + 269 = 656$ денари. Во мај заштедил $(387 + 656) - 55 = 988$ денари, додека во јуни заштедил

$$(387 + 656 + 988) : 3 = 2031 : 3 = 677 \text{ денари.}$$

Значи Жарко имал вкупно заштедено $387 + 656 + 988 + 677 = 2708$ денари, но $2708 < 2950$, па тој сеуште нема заштедено доволно за да си купи велосипед.

4. Семејството Петрески треба сумата од 418500 денари да ја плати на $5 \times 12 = 60$ еднакви месечни рати. Значи, месечната рата ќе биде

$$418500 : 60 = 6975 \text{ денари.}$$

Ако е платена една четвртина од цената на автомобилот, тогаш сумата од 418500 е три четвртини од вкупната сума. Сега, една четвртина од цената на автомобилот е $418500 : 3 = 139500$ денари. Вкупната цена на автомобилот е

$$418500 + 139500 = 558000 \text{ денари.}$$

5. Нека цената на лижавчето е $4x$ денари. Две кесички бонбони чинат $3 \cdot 4x = 12x$ денари, а една $6x$ денари. Од условот на задачата следува дека четири чоколади чинат $80 + 12x + 6 \cdot 4x = 80 + 36x$ денари, а една $20 + 9x$ денари. Марија за 12 чоколади, 8 кесички бонбони и 9 лижавчиња платила

$$12(20 + x) + 8 \cdot 6x + 9 \cdot 4x = 240 + 192x = 2160 \text{ денари.}$$

Од последната равенка наоѓаме $x=10$, па затоа цената на чоколадото е 110 денари, на кесичка бонбони 60 денари и на лижавче 40 денари.

6. Ако за 4 тетратки и 5 пенкала Мики платил 21 денар, за 8 тетратки и 10 пенкала би платил 42 денари. Бидејќи за 8 тетратки и 11 пенкала Мики платил 43 денари, добиваме дека едно пенкало чини 1 денар. Но тогаш за 4 тетратки платил $21-5\cdot 1=16$ денари, а за една тетратка платил $16:4=4$ денари. Сега, за 10 тетратки и 10 пенкала платил $10\cdot 4+10\cdot 1=50$ денари.

7. Бидејќи 300 и 198 се деливи со 6, Петар може да подигне само сума која е делива со 6. Ќе покажеме дека со дозволените операции Петар може да подигне најмногу 498 денари. Прво ќе подигне 300 денари, па ќе уплати 198 и истото ќе го повтори. Во банката прво ќе останат 200 денари, па 398 денари, па 98 денари и конечно $98+198=296$ денари. Сега Петра ќе вложи 198 денари и во банката ќе има 494 денари, а кај себе ќе има подигнато 6 денари. Ако целата претходна постапка ја повтори уште 15 пати, тогаш кај себе ќе има точно $6\cdot 16=96$ денари. Сега ќе подигне 300 денари и ќе вложи 198 денари, со што ќе има подигнато 198 денари. Конечно, ако подигне 300 денари, тогаш вкупно ќе има подигнато 498 денари.

8. Од првиот услов заклучуваме дека за 33 јагоди се добиваат 42 малини, а од другиот дека за 42 малини се добиваат 44 цреши. Значи, за 33 јагоди се добиваат 44 цреши, односно за 3 јагоди се добиваат 4 цреши. Според тоа, за 15 јагоди добиваме 20 цреши. Меѓутоа, за 10 цреши се добиваат 3 банани, а за 20 цреши ќе се добијат 6 банани. Според тоа, 15 јагоди вредат колку 6 банани, па за 5 јагоди добиваме 2 банани, точно колку и за 5 портокали. Следува дека јагодата и портокалот се со еднаква вредност, па Марија за 7 јагоди ќе даде 7 портокали.

9. Кога Милан ќе ги плати петте тетратки му остануваат 7 денари. Толку може да даде за шестата тетратка, за која му недостасува 1 денар. Значи една тетратка чини 8 денари и Милан има $5\cdot 8+7=47$ денари.

10. Од условот на задачата следува дека за $8-5=3$ тетратки Марко треба да плати $20+16=36$ денари. Според тоа, една тетратка чини $36:3=12$ денари. Значи, Марко има $5\cdot 12+20=80$ денари.

11. Одговор. Моливот чини 3 денари, а Ана имала 25 денари.

12. За 50 јајца по новата цена се платени $50 \cdot 3 = 150$ денари повеќе отколку да се купени по стара цена. За тој износ по старата цена може да се купат уште $60 - 50 = 10$ јајца. Значи, $150 : 10 = 15$ денари е старата цена на едно јајце. Според тоа, новата цена на едно јајце е $15 + 3 = 18$ денари.

13. Секој пат кога некој рибар ќе земе третина од рибите во кантата остануваат двапати повеќе риби. Според тоа, третиот рибар зел 4 риби (третина од 12) и останале 8 риби. Значи, после вториот рибар во кантата останале 12 риби, па тој зел 6 риби (третина од 18). Конечно, првиот рибар зел 9 риби (третина од 27). Според тоа, рибарите последователно земале: првиот 9 риби, вториот 6 риби и третиот 4 риби.

14. Нека С е кожата на слонот, Т кожата на тигарот, К е копјето и П е престилката со паунови пердуви. Според условот за замена, на првиот пазар имаме $C=2T$ и $P=3K$, а на вториот пазар имаме $C=3P$ и $T=4K$. Во првите четири дена ловецот може да ги изврши следниве размени:

1. ден: од првиот пазар оди на вториот и заменува С за 3П,
2. ден: се враќа на првиот пазар и заменува 3П за 9К,
3. ден: оди на вториот пазар и заменува 8К за 2Т,
4. ден: доаѓа на првиот пазар и заменува 2Т за С.

Така, после 4 дена ловецот располага со една кожа на слон и едно копје. За уште 6 пати по 4 дена, т.е. за вкупно 28 дена, ловецот ќе има една кожа на слон и 7 копја и ќе биде на првиот пазар. Следниот 29-тиот ден, на вториот пазар заменува $C=3P$ и има уште 7 копја. Триесеттиот ден, на првиот пазар, заменува $3P=9K$, па има вкупно 16К. Конечно, 31-виот ден на вториот пазар за 16К добива 4Т.

15. Очигледно вредноста на сите монети од 2 денари е пет пати поголема од вредноста на монетите од 1 денар. Тоа значи дека на секои две монети од 1 денар имаме пет монети од 2 денари, па според условот на задачата и три монети од 5 денари. Вредноста на секоја ваква група монети е $2 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 3 \cdot 5 = 27$ денари. Такви групи монети има $324 : 27 = 12$. Конечно, има $2 \cdot 12 = 24$ монети од 1 денар, $5 \cdot 12 = 60$ монети од 2 денара и $3 \cdot 12 = 36$ монети од 5 денари.

16. На почетокот на Доротеј му недостасувале 40 денари. Кога се здружил со Горазд нему му недостасувале само 20 денари. Според тоа,

Горазд имал $40-20=20$ денари. Бидејќи на Горазд му недостасувале 160 денари за да ја купи збирката, таа чинела $160+20=180$ денари. Според тоа, Доротеј имал $180-40=140$ денари.

17. Збирот $1995+2797+3246=8038$ е двапати поголем од сумата која заедно ја потрошиле. Значи, сите заедно потрошиле $8038:2=4019$ денари. Александар потрошил $4019-1995=2024$ денари, Фросина потрошила

$$4019-2797=1222 \text{ денари,}$$

и Филип потрошил

$$4019-3246=773 \text{ денари.}$$

18. Размислувањата при решението на оваа задача можеме да ги запишеме во следната табела, која се потполнува по редици од десно на лево почнувајќи од првата редица:

Влегување по ред	Пари при влегувањето	Пари после удвојувањето	Потрошени пари	Останати пари
IV	8	16	16	0
III	12	$8+16=24$	16	8
II	14	$12+16=28$	16	12
I	15	$14+16=30$	16	14

Според тоа, при првото влегување во слаткарницата Цветан имал 15 денари.

19. Јордан прво на Рајна, Трпана и Севда им дал по 100 денари, што значи вкупно $3 \cdot 100=300$ денари. Потоа, преостанатите $10000-300=9700$ денари ги поделил на четири еднакви делови: $9700:4=2425$ денари. Значи, Јордан добил 2425 денари, а Рајна, Трпана и Севда добиле секоја по 2525 денари.

20. I начин. Бидејќи Методија добил колку Климент и Милан заедно, тој ја добил половината од сумата. Значи, Методија добил $3774:2=1887$ денари, колку што добиле Климент и Милан заедно. Бидејќи Климент добил 111 денари повеќе од Милан, заклучуваме дека Милан добил

$$(1887-111):2=888$$

денари. Конечно, Климент добил $888+111=999$ денари.

II начин. Ако Милан добил x денари, тогаш Климент добил $x+111$ денари, а Методија $2x+111$ денари. Според тоа,

$$4x+222=3774$$

$$4x=3774-222$$

$$4x=3552$$

$$x=888.$$

Значи, Милан добил 888 денари, Климент добил $888+111=999$ денари и Методија добил $888+999=1887$ денари.

21. Ако секој од тројцата другари имал на почетокот x денари, тогаш заедно имале $3x$ денари, а платиле $3 \cdot 140 = 420$ денари. Според тоа нив заедно им останале $3x - 420$ денари. Од условот на задачата имаме

$$3x - 420 = x$$

$$2x = 420$$

$$x = 210$$

Значи, на почетокот секој од нив имал по 210 денари.

22. Кога Горјан му дава на Дамјан онолку денари колку што има Дамјан, тогаш Горјан има двапати повеќе пари од Дамјан, па затоа Дамјан има $30:3=10$ денари. Значи, пред тоа Дамјан имал $10:2=5$ денари, а Горјан имал $30-5=25$ денари.

23. Ако Јане му даде на Ѓорче 10 денари тие имаат еднакви суми пари, а тоа значи дека Јане има $10+10=20$ денари повеќе од Ѓорче. Но, ако Ѓорче му даде на Јане 15 денари, тогаш Јане има $15+15+20=50$ денари повеќе од Ѓорче и тогаш Јане има двапати повеќе пари од Ѓорче, па затоа 50 денари е третина од парите кои заедно ги имаат. Според тоа, Јане има $2 \cdot 50 - 15 = 85$ денари, а Ѓорче има $1 \cdot 50 + 15 = 65$ денари.

24. Бидејќи Мојсо заработил 1994 денари, а Данчо потрошил 2606 денари, сега Мојсо има $2606+1994=4600$ денари повеќе од Данчо. Но, Мојсо сега има трипати повеќе пари од Данчо, па затоа парите кои Мојсо ги има повеќе од Данчо се еднакви на двојната сума која Данчо ја има во моментот, т.е. Данчо има $4600:2=2300$ денари.

Конечно, Мојсо има $4600+2300=6900$ денари.

25. Марија потрошила еден дел, а Ристе и Самоил потрошиле трипати повеќе. Значи, Марија потрошила $8948:4=2237$ денари. Самоил

потрошил 350 денари помалку од Марија, па значи тој потрошил $2237 - 350 = 1887$ денари. Ристе потрошил

$$8948 - (2237 + 1887) = 4824 \text{ денари.}$$

26. Шестарот чини колку половина тетратка и еден молив, па значи колку половина тетратка и 8 денари. Тетратката чини колку шестарот и моливот заедно, па значи колку половина тетратка и 8 денари и уште 8 денари. Според тоа, тетратката чини колку половина тетратка и 16 денари. Значи, половина тетратка чини 16 денари, па цела тетратка чини 32 денари. Конечно, шестарот чини $32 : 2 + 8 = 24$ денари.

27. Ако купуваме само гуми, тогаш треба да платиме $4 \cdot 2 = 8$ денари помалку. Според тоа, една гума чини $(78 - 8) : 10 = 7$ денари, а еден молив чини $7 + 2 = 9$ денари.

28. Ако сите монети се по 2 денари, тогаш ќе имаме $2 \cdot 35 = 70$ денари. Разликата $100 - 70 = 30$ денари се појавува бидејќи имаме $30 : (5 - 2) = 10$ монети од 5 денари. Значи, 25 монети се од 2 денари и 10 монети се од 5 денари.

29. Една петтина од 250 денари е 50 денари. Значи три петтини од 250 денари се 150 денари. Според тоа, Вера потрошила 150 денари, па останале уште 100 денари. Но, од овие 100 денари Фросина потрошила девет десеттини. Бидејќи една десеттина од 100 денари е 10 денари, добиваме дека Фросина потрошила 90 денари.

Значи, им останале $250 - (150 + 90) = 10$ денари.

30. Од 100kg грав по цена од 60 денари Васил заработил

$$100 \cdot (75 - 60) = 1500 \text{ денари.}$$

Но, Васил има загуба од 25 денари на секој килограм грав кој го продавал по 100 денари за килограм, па за да заработи иста сума пари тој треба да измеша $1500 : 25 = 60\text{kg}$ грав кој чини 100 денари за килограм.

31. Нека x е сумата која им останала на секој од нив по трошењето. Владо потрошил половина, значи на почеток имал $2x$. Бобан потрошил две третини, му останала една третина, па на почеток имал $3x$. На Кате и останале една петтина од парите, значи на почеток имала $5x$. Сите заедно имале 600 денари, односно $2x + 3x + 5x = 600$, од каде $x = 60$ денари. Значи Владо имал 120 денари, Бобан 180 денари, а Кате 300 денари.

32. Ако на Иван му позајмил x денари, тогаш на Марко му позајмил $x+100$, а на Горан му позајмил $x+100+x+100=2x+200$ денари. Според тоа, Александар на своите пријатели им позајмил

$$x+x+100+2x+200=4x+300 \text{ денари,}$$

па затоа $4x+300=540$, од каде добиваме $4x=240$, т.е. $x=240:4=60$.

Конечно, Алесандар на Иван му позајмил 60 денари, на Марко му позајмил 160 денари и на Горан му позајмил 320 денари.

4.7.6. ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ

1. На ливадата има вкупно $53+58+89=200$ цветови, а вкупниот број листови е $200 \cdot 11=2200$. На жолтите цветови има $53 \cdot 8=424$, на црвените $58 \cdot 9=522$, а на плавите $89 \cdot 12=1068$ венечни ливчиња. Според тоа, вкупно има 2014 венечни ливчиња.

2. На двете полици имало вкупно $2 \cdot 5=10$ кутии чоколада, а на четирите полици имало вкупно $4 \cdot 3=12$ кутии со колачи. Вкупно на полиците имало $10+12=22$ кутии. Симона и дедо и купиле 2 кутии, па вкупно на рафтовите останале $22-2=20$ кутии.

3. Ако осум кокошки за една недела снеле 32 јајца, тогаш една кокошка за една недела ќе снесе 4 јајца. Сега, девет кокошки за една недела ќе снесат $9 \cdot 4=36$ јајца.

4. Јасно е дека биле засадени 38 ели. Бројот на засадени дабови е $3 \cdot 38=114$, а бројот на засадени борови е $38+114=152$. Сега, бројот на засадени буки е $152:4=38$. Вкупно биле засадени $38+114+152+38=342$ садници. Ако секое дете засадило по 6 садници, на пошумувањето учествувале $342:6=57$ ученици од четврто одделение.

5. Никола во вторник бојадисал 4 летвички повеќе отколку во понеделник, во среда 8 летвички повеќе, во четврток 12 летвички повеќе од понеделник, во петок 16 летвички повеќе, во сабота 20 летвички повеќе отколку во понеделник. Бидејќи $4+8+12+16+20=60$, Никола има бојадисано 60 летвички повеќе отколку секој ден да бојадисувал ист број на летвички како во понеделникот. Од $246-60=186$ и $186:6=31$,

следува дека Никола во понеделник бојадисал 31 летвичка. Според тоа во среда Никола имал бојадисано 39 летвички.

6. Имајќи во предвид дека секое дете на прадедото има по четири деца, прадедото има $4 \cdot 4 = 16$ внуци. Секој внук има по четири деца, од каде заклучуваме дека прадедото има $16 \cdot 4 = 64$ правнуци. Конечно, вкупниот број на потомци е $64 + 16 + 4 = 84$.

7. Ако во кафезот има само фазани, тогаш ќе има 70 нозе, а не 94. Значи, има 24 нозе повеќе, што значи дека има $24 : 2 = 12$ зајаци. Конечно, бројот на фазаните е $35 - 12 = 23$.

8. Ако сите возила се моторцикли, тогаш вкупниот број на тркала ќе биде $44 \cdot 2 = 88$. Но, вкупниот број на тркала е 144, односно $144 - 88 = 56$ повеќе. Бидејќи автомобилот има $4 - 2 = 2$ тркала повеќе од моторциклот добиваме дека имало вкупно $56 : 2 = 28$ автомобили. Значи, има $44 - 28 = 16$ моторцикли.

9. Да претпоставиме дека сите столици имале 3 ногарки. Тогаш вкупно ќе имаме $3 \cdot 45 = 135$ ногарки. Крката избројала 159 ногарки, што значи $159 - 135 = 24$ ногарки повеќе. Тоа значи дека 24 столици имале по 1 ногарка повеќе, т.е. по 4 ногарки. Преостанатите $45 - 24 = 21$ столица имале по 3 ногарки.

10. Првиот ден продале $8450 : 2 = 4225$ тетратки, а вториот ден $4225 - 437 = 3788$ тетратки. Непродадени останале $8450 - (4225 + 3788) = 437$ тетратки.

11. Бидејќи вкупно во трите одделенија има 90 ученици, а во четврто и петто одделение има 62 ученика, тоа значи дека во шестто одделение има $90 - 62 = 28$ ученици, додека во четврто одделение има $90 - 61 = 29$ ученици. Па, во петто одделение има $62 - 29 = 33$ ученици.

12. Бидејќи на првата и втората полица има 120 книги, а на третата и четвртата има 95 книги, добиваме дека на петтата полица има $300 - (120 + 95) = 85$ книги.

Но, тоа значи дека на четвртата полица има $130 - 85 = 45$ книги, на третата $95 - 45 = 50$, на втората $115 - 50 = 65$ и на првата $120 - 65 = 55$ книги.

13. На почетокот во двете корпи вкупно имало $88+57+49=194$ јаболка. Значи, во секоја корпа на почетокот имало по $194:2=97$ јаболка.

Од првата корпа се земени $97-57=40$ јаболка, а од втората корпа се земени $97-49=48$ јаболка.

14. На теренот постојано има точно 6 играчи и бидејќи натпреварот трае 60 минути заклучуваме дека сите 15 играчи вкупно играле $6\cdot 60=360$ минути. Според тоа, секој играч настапил точно $360:15=24$ минути.

15. Ако Иван живее на некој од првите 21 кат, тогаш бројот на неговиот апартман е помал или еднаков на 210 и бројот на апартманот на Марија е помал или еднаков на 21. Но, тогаш збирот на броевите на нивните апартмани ќе биде помал или еднаков на 231, а тој треба да е 239.

Ако Иван живее на 23 или на повисок кат, тогаш бројот на неговиот апартман е поголем или еднаков на 221 и бројот на апартманот на Марија е поголем или еднаков на 22. Но, тогаш збирот на броевите на нивните апартмани е поголем или еднаков на 241, а тој треба да е 239.

Останува можноста Иван да живее на 22 кат и во тој случај бројот на апартманот на Марија е 22, а бројот на апартманот на Иван е $239-22=217$ и тој се наоѓа на 22 кат.

16. Кога од одделението ќе се отселат 5 момчиња во него ќе останат 30 ученици. Бидејќи, тогаш има двапати повеќе девојчиња од момчиња, добиваме дека момчиња има $30:3=10$, а девојчиња има $30-10=20$. Значи, на почетокот во одделението имало $10+5=15$ момчиња и 20 девојчиња.

17. Илија има 20 значки повеќе од Темјана, бидејќи кога тој и дава 10 значки на Темјана тие имаат ист број значки. Ако Темјана му даде на Илија 20 значки, тогаш тој има 20 значки повеќе отколку на почетокот, а таа 20 помалку, па сега Илија има 60 значки повеќе од Темјана. Бидејќи тоа е трипати повеќе од значките што ги има Темјана заклучуваме дека Темјана има $60:3=20$ значки, а Илија има $20+60=80$ значки.

Значи на почетокот Илија имал 60 значки, а Темјана имала 40 значки.

18. Бидејќи сини има колку што има бели и жолти заедно, јасно е дека половина од вкупниот број цамлии што ги има Марко се сини. Значи,

Марко има $36:2=18$ сини цамлии. Бројот на белите и жолтите цамлии е $36-18=18$. Бидејќи жолтите се двапати повеќе од белите, од овие 18 цамлии една третина се бели, а останатите се жолти. Значи, Марко има $18:3=6$ бели и $18-6=12$ жолти цамлии.

19. Бидејќи Јован има двапати повеќе разгледници од Нестор, а двапати помалку разгледници од Милан добиваме дека Милан има четири пати повеќе разгледници од Нестор. Според тоа, вкупниот број на разгледниците на сите тројца е седум пати поголем од бројот на разгледниците на Нестор. Значи, Нестор има $112:7=16$ разгледници. Сега не е тешко да се пресмета дека Јован има 32 разгледници, а Милан има 64 разгледници.

20. Прв начин. Кога во полето ќе одлетаат 7 врапчиња, вкупниот број на врапчиња на двете гранки ќе биде $25-7=18$ и тогаш според условот на задачата на првата гранка ќе има два пати повеќе врапчиња отколку на втората, значи на втората гранка ќе има $18:3=6$ врапчиња, а на првата гранка ќе има $2\cdot 6=12$ врапчиња. Значи, пред да одлетаат во полето 7 врапчиња од втората гранка, на неа имало $6+7=13$ врапчиња. Па на почетокот, пред да прелетале од првата на втората гранка 5 врапчиња, на втората гранка имало $13-5=8$ врапчиња, а на првата гранка имало $12+5=17$ врапчиња.

Втор начин. На почетокот имало

$$2\cdot((25-7):3)+5=2\cdot(18:3)+5=2\cdot 6+5=12+5=17$$

врапчиња на првата гранка и

$$(25-7):3+7-5=18:3+7-5=6+7-5=8$$

врапчиња имало на втората гранка.

21. Јасно, деветте патници носеле $9\cdot 5=45$ дневни порции храна. После придружувањето на новите патници овие 45 порции им стасале за 3 дена, па затоа сега имаме $45:3=15$ патници. Значи, им се придружиле $15-9=6$ патници.

22. Бидејќи е искористена една трикреветна соба повеќе, тоа значи дека во неа се сместени 3 момчиња. Преостанатите 60 натпреварувачи се сместени во ист број двокреветни и трикреветни соби, кои се $60:(2+3)=12$ двокреветни и трикреветни соби. Значи, девојчиња биле $12\cdot 2=24$, а момчиња $(12+1)\cdot 3=39$.

23. Ако претпоставиме дека сите глисери се со по 8 седишта, тогаш ќе имаме $12 \cdot 8 = 96$ седишта, т.е. $96 - 75 = 21$ седиште повеќе отколку што имаме. Разликата од 21 седиште се појавува бидејќи имаме глисери со по 5 седишта, кои имаат по 3 седишта помалку отколку што претпоставивме. Значи, имаме $21 : 3 = 7$ глисери со по 5 седишта. Глисери со по 8 седишта се $12 - 7 = 5$.

24. Ако задачите ги решавала според првобитниот план Загорка последните три дена требало да реши $3 \cdot 15 = 45$ задачи. Меѓутоа, таа последните три дена решила $3 \cdot 4 = 12$ задачи. Значи, разликата $45 - 12 = 33$ задачи ја надополнила во претходните денови решавајќи по 3 задачи повеќе дневно. Според тоа, таа претходно работела $33 : 3 = 11$ денови.

Загорка требало вкупно да работи $11 + 3 = 14$ денови по 15 задачи на ден, т.е да реши $14 \cdot 15 = 210$ задачи.

25. Бидејќи $187 = 11 \cdot 17$, $221 = 13 \cdot 17$ и $272 = 16 \cdot 17$ заклучуваме дека бројот 17 е единствениот природен број, различен од 1 кој е делител на сите три броја 187, 221 и 272. Според тоа, со секој авион ќе се превезат по 17 туристи и притоа за групите од 187, 221 и 272 гости ќе имаме 11, 13 и 16 летови, соодветно.

26. Првата цевка за 3 часа полни $\frac{1}{5}$ од базенот, па за еден час ќе наполни $\frac{1}{15}$ од базенот, од каде имаме дека целиот базен првата цевка ќе го наполни за 15 часа. Втората цевка за еден час ќе наполни $\frac{1}{16}$ од базенот, па целиот базен ќе биде наполнет за 16 часа. Третата цевка за еден час ќе наполни $\frac{1}{18}$ од базенот, па целиот базен ќе биде наполнет за 18 часа. Значи, првата цевка најбрзо го полни базенот.

27. Ако жицата ја превиткаме точно на половина, деловите ќе бидат $\frac{1}{3}$ метри, а ако постапката ја повториме уште еднаш ќе добиеме делови по $\frac{1}{6}$ метри. Ако отсечеме еден од крајните делови ќе добиеме

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{6} = \frac{4-1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \text{ метри.}$$

28. Не сметајќи ги 10-те страни, Самоил за три дена прочитал

$$\frac{3}{8} + \frac{5}{12} + \frac{1}{6} = \frac{9+10+4}{24} = \frac{23}{24}$$

од целата книга. Значи, 10-те страни се $\frac{1}{24}$ од книгата. Според тоа, книгата имала $24 \cdot 10 = 240$ страници.

29. Бидејќи $\frac{6}{5}$ од девојчиња и $\frac{6}{7}$ од момчиња го формираат вкупниот број на ученици, добиваме дека $\frac{1}{5}$ од бројот на девојчињата е еднаква на $\frac{1}{7}$ од бројот на момчињата, односно броевите на девојчиња и момчиња се однесуваат како 5:7. Значи девојчиња има $\frac{5}{12} \cdot 240 = 100$, а момчиња $240 - 100 = 140$.

30. Бидејќи само за 10 ученици не е обезбедено ни скии, ни санки, тогаш тие претставуваат $\frac{1}{5}$ од половината од учениците, односно половината е $10 : \frac{1}{5} = 10 \cdot 5 = 50$, а вкупниот број е $50 \cdot 2 = 100$ ученици.

31. Бидејќи 40 ученици се $\frac{2}{3}$ од $\frac{1}{3}$ од вкупниот број на ученици, а тоа е $\frac{2}{9}$ од сите ученици, добиваме дека наставникот Стојко предава на $40 : \frac{2}{9} = 180$ ученици.

32. Од 400 шипки ќе се добијат $400 \cdot 10 = 4000$ златници и $400 : 20 = 20$ нови шипки. Од 20 нови шипки се добиваат $20 \cdot 10 = 200$ златници и $20 : 20 = 1$ нова шипка. Од оваа шипка ќе се добијат 10 златници и $\frac{1}{20}$ шипка остаток. Значи вкупниот број златници е $4000 + 200 + 10 = 4210$, а ќе преостане $\frac{1}{20}$ од шипката.

33. Мачка и пол за два и пол дена јадат три и пол глувци, па значи 3 мачки за 5 дена јадат $4 \cdot 3,5 = 14$ глувци, па затоа една мачка за еден ден јаде $\frac{14}{15}$ глувци. Една мачка за 45 дена јаде

$$45 \cdot \frac{14}{15} = 3 \cdot 14 = 42 \text{ глувци,}$$

а 100 мачки за 45 дена јадат 4200 глувци.

34. Кога Велко зел третина од преостанатите колачи останале 8, а тоа се две третини од затекнатите колачи, што значи дека имало 12 колачи. Исто пресметуваме дека Марија затекнала 18 колачи, а Катерина 27 колачи. Значи Бисера направила 27 колачи.

35. Нека имало x девојчиња. Ана познава 7 момчиња, Весна познава $8=7+1$ момче, Тања познава $9=7+2$ момчиња итн. Последното x – то девојче познава $7+(x-1)$ момче, односно ги познава сите момчиња. Значи, момчиња има $7+(x-1)$, па значи момчиња и девојчиња има вкупно $7+(x-1)+x=20$.

Оттука $x=7$, што значи дека имало 7 девојчиња и 13 момчиња.

36. Нека во одделението има $3x$ момчиња. Тогаш има $2x$ девојчиња. Од условот на задачата имаме

$$3x+6=2 \cdot 2x, \text{ т.е. } 3x+6=4x,$$

па е $x=6$. Значи, има $3 \cdot 6=18$ момчиња и $2 \cdot 6=12$ девојчиња.

37. Ќе пресметуваме одназад. На пример, пред вечерата во четвртокот имало една лисица и една змија, бидејќи после вечерата единствената змија ја изела единствената лисица. Пред појадокот биле две змии, но едната ја изел ежот за појадок, а потоа за ручек него го изела лисицата. Лесно се пресметува дека бројната состојба пред појадокот во понеделникот била: 41 еж, 28 лисици и 60 змии, види ја долната табела.

Ден	Оброк	Ежови	Лисици	Змии
Четвр.	Вечера		1	1
	Ручек	1	1	1
	Појадок	1	1	2
Среда	Вечера	1	3	2
	Ручек	4	3	2
	Појадок	4	3	6
Втор.	Вечера	4	9	6
	Ручек	13	9	6
	Појадок	13	9	19
Пон.	Вечера	13	28	19
	Ручек	41	28	19
	Појадок	41	28	60

38. Можно е на крајот да остане само 1 бонбона, при што според условот секој од нив добил по 1 бонбона и имало вкупно 6 бонбони. Ако на крајот останале 2 бонбони, тогаш секој добил по 2 бонбони, па на почетокот имало 12 бонбони. Слично, ако останале 3 бонбони, тогаш вкупно имало 18, а ако останале 4 бонбони, тогаш вкупно имало 24 бонбони.

39. Нека од 2000 учесници точно x биле истовремено и филозофи и математичари. Тогаш “чисти” филозофи имало $7x$, а “чисти” математичари имало $12x$. Значи, $x + 7x + 12x = 2000$, од каде наоѓаме $x = 100$. Конечно, филозофи и математичари биле 100, само филозофи биле 700 и само математичари биле 1200.

40. Нека a е должината на најмалата страна. Останатите две страни имаат должини $a + 2$ и $a + 4$. Од условот на задачата имаме

$$3a - 7 = a + 2 + a + 4,$$

т.е. $a = 13$. Според тоа, должините на страните на триаголникот се 13, 15 и 17 cm, а неговиот периметар е 45cm.

41. Нека на почетокот биле отсутни x ученици, што значи дека бројот на учениците во одделението е $9x$. Во моментот кога дошол еден ученик во одделението имало $x - 1$ отсутен ученик, што значи дека бројот на учениците во одделението е $12(x - 1)$. Значи, $9x = 12(x - 1)$, т.е. $x = 4$. Конечно, бројот на учениците во одделението е $9 \cdot 4 = 36$.

42. Одговор. Во одделението имало 36 ученици.

43. После размената Петар и Васко имаат ист број џамлии и нека тоа е бројот x . Тогаш Огнен има $2x$ џамлии. Значи, $x + x + 2x = 160$, т.е. $x = 40$. Следува дека Петар на почетокот имал $40 + 17 = 57$ џамлии, Васко имал $40 + 12 = 52$ џамлии и Огнен $160 - 57 - 52 = 51$ џамлија.

44. Нека x е бројот на денови од четвртиот ден па натаму. Тогаш, ја имаме следната равенка $22 + 2 \cdot (22 + 4) + x \cdot (22 + 4 + 2) = 242$, од каде добиваме $x = 6$. Значи, Марко ќе ја чита книгата вкупно $3 + x = 3 + 6 = 9$ денови.

45. Бројот на паралелки со 32 ученици е $32 - 6 - 8 - 2 = 16$. Вкупниот број на ученици е

$$6 \cdot 29 + 8 \cdot 30 + 2 \cdot 31 + 16 \cdot 32 = 174 + 240 + 62 + 512 = 988.$$

46. Нека А, Б, В и Г се бројот на марките што ги имаат Андреј, Бојан, Васко и Гоце соодветно. Според првиот услов на задачата, имаме $A=B+V$, $A=5Г$, $B=4В$. Тогаш, со замена се добива $A=B+V=4В+В=5В$. Но $A=5Г$, па се добива дека Васко и Гоце имаат ист број марки, односно $B=Г$. Тогаш, според вториот услов $A+B+V+Г=5016$, односно $5В+4В+В+В=5016$. Добиваме дека $11В=5016$, од каде $В=5016:11=456$, па $Г=456$, додека $A=5 \cdot 456 = 2280$ и $B=4 \cdot 456 = 1824$. Значи, Андреј има 2280 марки, Бојан има 1824, а Васко и Гоце имаат по 456 поштенски марки.

47. Најнапред ги наоѓаме заедничките делители на броевите 225 и 105, тоа се броевите 1, 3, 5 и 15. Тие го означуваат бројот на групи кои се формирани. Значи, задачата има 4 решенија: 1 група од 225 ученика која добила 105 топки, 3 групи од по $225:3=75$ ученика и секоја група добила по $105:3=35$ топки, 5 групи од по $225:5=45$ ученика и секоја група добила по $105:5=21$ топка, 15 групи од по $225:15=15$ ученика и секоја група добила по $105:15=7$ топки.

48. На крајот секое девојче имало $12000:3=4000$ марки. Пред да ги подели марките Елена имала 8000 марки, а Марија и Татјана по 2000 марки. Пред да ги подели марките Татјана имала 4000. Тогаш Елена имала 7000, а Марија 1000 марки. На почетокот, пред да ја подели својата колекција, Марија имала 2000, Елена 6500 и Татјана 3500 марки.

49. Ако на забавата има x девојчиња, тогаш x – тоа девојче играло со $x+3$ момчиња. Според тоа, $x+x+3=33$, па е $x=15$. Значи, на забавата имало 15 девојчиња и 18 момчиња.

50. Нека на секоја клупа седат по 6 ученици. Ако преостанатите два ученика седнат (како седми ученици) на две клупи, тогаш ќе остане празно место на три клупи. Значи во паркот имало $2+3=5$ клупи, а во групата имало $5 \cdot 6 + 2 = 32$ ученика.

51. Нека секое дете добило по x портокали. Заедно добиле $3x$ портокали, а изеле $3 \cdot 4 = 12$ портокали. Според тоа, $3x - x = 12$, односно $x = 6$. Значи, секое дете добило по 6 портокали.

52. Одговор. Марија има 50 сликички, Иван има 150 и Златко има 160 сликички.

53. Одговор. Пролетта трае 92 дена, летото 94, есента 90 дена и зимата 89.

54. Одговор. Во втората ќе има 1 цреша повеќе.

55. Одговор. Во овоштарникот има 930 овошки.

56. Одговор. Жарко има 30 денари, а Лимбе има 90 денари.

57. Бидејќи

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = 1,$$

заклучуваме дека со трите дополнувања вкупно сме долеале една чаша млеко. Значи, испивме еднакво количество млеко и какао.

58. Нека x е вкупниот број на овошки во кошницата. Тогаш бројот на јаболка е $\frac{3}{7}x$, а бројот на круши е $\frac{4}{7}x$. Значи во кошницата имало $\frac{1}{7}x$ повеќе круши од јаболка. Ако Наташа добила 4 јаболка и изела 2 круши и добила ист број овошки, имаме $\frac{1}{7}x - 2 = 4$. Од последната равенка добиваме $x = 42$. Од 42-те овошки 18 биле јаболка, а 24 биле круши.

59. Секој мора да има по 2 чоколада, што вкупно се 8 чоколада. Значи треба да се распоредат уште 2 чоколада. Можно е двете преостанати чоколада да припаднат на еден од нив или на две лица да им припадне по една чоколада. Постојат вкупно 10 такви распореди кои се дадени во следната табела:

Мајка	4	2	2	2	3	3	3	2	2	2
Татко	2	4	2	2	3	2	2	3	3	2
Брат	2	2	4	2	2	3	2	3	2	3
Сестра	2	2	2	4	2	2	3	2	3	3

5. ГЕОМЕТРИЈА

5.1. КОМПЛЕМЕНТНИ И СУПЛЕМЕНТНИ АГЛИ

Задача 1. Аглите α и β се комплементни. Колку изнесува збирот на нивните суплементни агли.

Задача 2. Аглите α и β имаат паралелни краци. Колкав е збирот на аглиите α и β , ако $\alpha = 43^0$.

Задача 3. Разликата меѓу комплементните агли α и β е $20^{\circ}52'$. Определи ги аглиите α и β .

Задача 4. Аглиите α и β се суплементни, а аглиите β и γ се комплементни. Најди ги аглиите α , β и γ ако збирот на аглиите α и γ е 142^0 .

Задача 5. Аглиите α и β имаат паралелни краци. Ако $\alpha = 43^0$, колку изнесува разликата $2\beta - \alpha$.

Задача 6. Најди ги аглиите α и β ако аголот α е за 12^0 поголем од комплементниот агол на β , а аголот 3β е за 38^0 поголем од суплементниот агол на α .

Задача 7. Ако аглите α и β се комплементни, а α и γ се суплементни и β е шест пати помал од γ , пресметај $\alpha + \beta + \gamma$.

Задача 8. Разликата на два комплементни агли е двапати помала од помалиот агол. Покажи дека аголот кој е суплементен со помалиот од двата агли е четири пати поголем од него.

Задача 9. Разликата на аглите α и β е суплементна со нивниот збир. Најди ги аглите α и β , ако аголот α е осум пати поголем од аголот β .

Задача 10. Две прави се сечат во една точка и образуваат четири агли (два остри и два тапи). Збирот на накрсните остри агли е еднаков на половината од едниот накрсен тап агол. Одреди ги големините на аглите?

Задача 11. Определи ги аглите во триаголникот и видот на триаголникот, ако се знае дека збирот на два негови агла е $\frac{5}{6}$ од правиот агол и едниот од тие агли е за 20° поголем од другиот.

Задача 12. Нека α и β се два соседни агли такви што нивните симетрали се заемно нормални. Ако се знае дека α е за 30° поголем од β , пресметај колку степени изнесува секој од нив.

5.2. ЗАДАЧИ СО ОТСЕЧКИ

Задача 1. Нацртај отсечка AB , а потоа на неа точка C , која не е средина на отсечката AB . Колкаво е растојанието меѓу средините на отсечките AC и BC ?

Задача 2. Како се распоредени точките A, B и C ако $\overline{AC} = \overline{BC}$ и $\overline{AC} + \overline{BC} = \overline{AB}$?

Задача 3. Отсечката AB е поделена со точка M на два дела кои се разликуваат за 8cm . Одреди ја должината на AB , ако се знае дека помалиот дел е трипати помал од нејзиниот поголемиот дел.

Задача 4. Должината на отсечката AB е за 2cm поголема од должината на отсечката CD . Ако отсечката CD се зголеми трипати, а AB се зголеми за 10cm , тогаш се добиваат еднакви отсечки. Колкави се должините на отсечките AB и CD ?

Задача 5. Отсечката MN има должина за 2cm поголема од отсечката PQ . Ако должината на отсечката PQ се зголеми четири пати, а должината на отсечката MN се зголеми за 19cm , тогаш се добиваат еднакви отсечки. Колкава е должината на отсечката MN ?

Задача 6. Отсечката AB е 18cm подолга од отсечката CD . Ако секоја од отсечките се намали за 8cm , тогаш отсечката AB ќе биде трипати подолга од отсечката CD . Определи ги должините на отсечките!

Задача 7. Дадена е отсечка AB со должина 20cm . Точката C припаѓа на отсечката AB и е оддалечена од точката B за $\frac{1}{5}$ од должината на отсечката AB . Точката D е средина на отсечката AC . Колкаво е растојанието од точката D до средината на отсечката AB ?

Задача 8. Отсечката CD со должина 42cm со точките A , B и E поделена е на четири отсечки CA , AB , BE и ED . Растојанието меѓу средините M и N на отсечките AB и BE е 12cm . Колкаво е растојанието меѓу средините P и Q на крајните отсечки CA и ED ?

Задача 9. Отсечката AB е составена од три отсечки такви што втората е двапати подолга од првата, а третата е трипати подолга од првата отсечка. Растојанието меѓу средините на првата и втората отсечка е 6cm . Одреди ја должината на отсечката AB .

Задача 10. Една отсечка е поделена на четири дела, така што вториот дел е двапати подолг од првиот, третиот дел е трипати подолг од првиот, а четвртиот дел е двапати подолг од вториот. Растојанието меѓу средините на првиот и вториот дел е 3cm . Најди ја должината на отсечката.

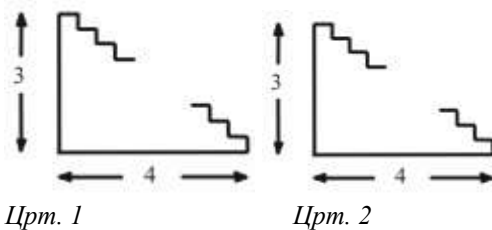
Задача 11. Должината на отсечката AB е 80cm . Оваа отсечка со три точки е поделена на четири дела. Растојанието меѓу средините на крајните

отсечки е 66cm . Колкаво е растојанието меѓу средините на средните делови?

Задача 12. Отсечката AB е поделена со точката M на делови кои се разликуваат за 6cm , т.е. $\overline{MB} - \overline{AM} = 6\text{cm}$. Колкава е должината на отсечката AB ако средината на малиот дел е петпати поблиску до точката A отколку до точката B ?

Задача 13. На правата p во иста насока се нанесени отсечките AB , BC и CD , така што AB е $\frac{1}{2}$ од BC и BC е $\frac{1}{2}$ од CD . Одреди го растојанието меѓу средините на AB и CD , ако $\overline{AD} = 28\text{cm}$.

Задача 14. На една права се нанесени отсечките AB , AC , AD и AE , така што точката B е средина на отсечката AC , точката C е средина на отсечката AD и точката D е средина на отсечката AE . Определи го растојанието меѓу средините на отсечките AB и DE , ако $\overline{AE} = 16\text{cm}$.



Црт. 1

Црт. 2

Задача 15. Во една куќа има две скали со димензии $3m$ и $4m$, како што е прикажано на цртежите лево. Едната скала има 20 скапила (црт. 1), а другата има 18 скапила (црт. 2). Скалите се покриени со патеки, кои целосно

ги покриваат само хоризонталните и вертикалните делови на секое скапило. Најди ја должината на секоја од патеките.

Задача 16. На отсечката MN избрани се последователно точките A, B, C и D така да $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD}$. Растојанието меѓу средините на отсечките AB и CD е 28cm , а растојанието меѓу средините на отсечките MA и DN е 51cm . Колкава е должината на отсечката MN ?

Задача 17. Отсечката AB е поделена со точката C на делови чии должини се разликуваат за 1cm . Најди ја должината на отсечката AB ако средината на помалиот дел е пет пати поблиску до точката A отколку до точката B .

Задача 18. Отсечката AB е поделена на два дела чија разлика е 2 cm . Колку е долга отсечката AB , ако средината на помалиот дел е петпати поблиску до точката A отколку до точката B .

5.3. КВАДРАТ И ПРАВОАГОЛНИК

Задача 1. Продавница е во форма на квадрат со страна 7 метри. Во продавницата се наоѓа статуа со квадратна основа со страна од 1 метар. Дали може преостанатот дел од продавницата да се покрие со 4 правоаголници со страни 3 и 4 метри (одговорот да се објасни).

Задача 2. Периметарот на правоаголникот е 32 cm , а едната страна е трипати подолга од другата. Одреди ги страните на правоаголникот.

Задача 3. Периметарот на правоаголникот е 66 cm , а едната страна е за 11 cm подолга од другата. Колкава е плоштината на правоаголникот?

Задача 4. Плоштината на правоаголникот е еднаква на 336 cm^2 , а должината на едната негова страна е еднаква на 12 cm . Пресметај ја плоштината на оној квадрат чиј периметар е еднаков на периметарот на правоаголникот.

Задача 5. Должината на страната на еден квадрат е три пати поголема од должината на страната на друг квадрат. Нивните периметри се разликуваат за 32 cm . Определи ги должините на страните на двата квадрати.

Задача 6. Ако кај правоаголник должината на едната страна ја намалиме за 3 cm , а должината на другата страна ја намалиме за 2 cm , тогаш тој станува квадрат, чија плоштина е за 46 cm^2 помала од плоштина од правоаголникот. Пресметајте ги страните на правоаголникот.

Задача 7. Ако едната страна на квадратот ја продолжиме за 2 cm , а нејзината соседна страна за 5 cm , тогаш добиваме правоаголник чија што плоштина е за 45 cm^2 поголема од плоштината на квадратот.

Колкава е плоштината на квадратот?

Задача 8. Даден е квадрат $ABCD$. Ако ја продолжиме страната AB преку темето B и страната AD преку темето D за иста должина, ќе добиеме соседни страни на квадрат чиј периметар е за 36cm поголем од периметарот на квадратот $ABCD$, а плоштината му е за 135cm^2 поголема од плоштината на квадратот $ABCD$. Колкава е должината на страната на квадратот $ABCD$?

Задача 9. Кога една страна на правоаголникот се намали за 5cm , а другата се зголеми за 4cm , се добива квадрат чија плоштина е еднаква на плоштината на правоаголникот. За колку периметарот на правоаголникот е поголем од периметарот на квадратот?

Задача 10. Од еден квадрат исечен е друг, така што преостанува рамка која секаде има ширина 6cm . Колкава е страната на новодобиениот квадрат, ако плоштината на рамката изнесува 384cm^2 ?

Задача 11. Мартин оди по страните на игралиште кое има форма на правоаголник. Колку чекори ќе направи Мартин ако еднаш го обиколи игралиштето и ако должината на неговиот чекор е еднаква на 6dm , а должините на страните на игралиштето се еднакви на 120m и 45m ?

Задача 12. Квадрат и правоаголник имаат еднакви плоштини. Познато е дека плоштината на квадратот е 36cm^2 , а должината на правоаголникот е 9cm . Чија периметар е поголем, и за колку?

Задача 13. Шест квадрати со страни 3cm , треба да се наредат на рамнина, еден до друг, во облик на правоаголник со најголем периметар. Колкав е периметарот на правоаголникот?

Задача 14. Периметарот на правоаголникот е 48cm . Должината на правоаголникот е трипати поголема од неговата ширина. Колкава е плоштината на правоаголникот?

Задача 15. Плоштината на правоаголникот е еднаква на плоштината на квадрат со периметар 36cm . Одреди чија периметар е поголема и за

колку, ако должината на едната страна на правоаголникот е еднаква на 27cm .

Задача 16. Правоаголник чиј периметар е 2002cm , поделен е со права паралелна на помалата негова страна на еден квадрат и еден правоаголник. Колкав е периметарот на малиот правоаголник, ако обемот на квадратот е 1000cm^2 ?

Задача 17. Должината на страната на квадратот е 24cm , а едната страна на правоаголникот чија плоштина е еднаква на плоштината на квадратот е 18cm . Кој има поголем периметар, квадратот или правоаголникот?

Задача 18. Мерниот број на плоштината на квадратот во cm^2 е два пати поголем од мерниот број на периметарот на квадратот во cm . Колкави се периметарот и плоштината на тој квадрат?

Задача 19. Ако страната на квадратот се зголеми за 1cm , тогаш неговата плоштина се зголемува за 17cm^2 . Колкав е периметарот на квадратот?

Задача 20. Дадени се два квадрати. Разликата на должините на нивните страни е 11cm , а разликата на нивните плоштини е 671cm^2 . Пресметај го збирот на обемот на двата квадрати.

Задача 21. Страните на два квадрати се разликуваат за 6cm , а нивните плоштини за 96cm^2 . Пресметај го обемот на помалиот квадрат.

Задача 22. Ако едната страна на квадратот се зголеми за 2cm , а другата се намали за 5cm , се добива правоаголник чија плоштина е за 46cm^2 помала од плоштината на квадратот. Колкав е периметарот на квадратот?

Задача 23. Во правоаголникот $ABCD$, должината $\overline{AB}$ е двапати поголема од ширината $\overline{BC}$. На страната $\overline{AB}$ е избрана точка P така што P е средина на $\overline{AB}$. Со отсечката $\overline{PC}$ правоаголникот е поделен на еден

четириаголник и еден триаголник чии периметри се разликуваат за 20 cm .
Определи ја плоштината на правоаголникот $ABCD$.

Задача 24. Периметарот на правоаголникот е 14 cm , а страните му се природни броеви. Колку правоаголници го имаат ова својство и кој од нив има најголема плоштина?

Задача 25. Даден е правоаголник $ABCD$ чија периметар е еднаков на 100 cm . Нека точката K е средина на страната AB , а точката M е средина на страната CD . Со поврзување на точките K и M се добиваат уште два правоаголници $AKMD$ и $BKMC$. Ако периметарот на правоаголникот $BKMC$ е 70 cm , пресметај ги должините на страните на правоаголникот $ABCD$.

Задача 26. Ако од картон со облик на правоаголник со страни чии должини се 2 и 5 dm се изрежат на квадратчиња со страна 1 cm и добиените квадратчиња се подредат едно до друго во низа така што секое е соседно со најмногу две квадратчиња, се добива една лента. Пресметај го периметарот на таа лента.

Задача 27. Во еден овоштарник со правоаголен облик овошките се засадени така што растојанието меѓу две соседни овошки во ред и растојанието меѓу редовите е 4 m . Колку овошки има во тој овоштарник, ако растојанието меѓу првата и последната овошка е по “должина” 84 m , а во ред по “ширина” е 32 m ?

Задача 28. Овоштарник во форма на квадрат со страна 26 m е заграден со 3 реда бодликава жица. Дали може со истата жица да се загради овоштарник во форма на правоаголник со должина 95 m и ширина 60 m ?

Задача 29. Квадрат и правоаголник имаат еднакви плоштини. Пресметај го периметарот на квадратот, ако периметарот на правоаголникот е 50 cm , а должината на правоаголникот е 4 пати поголема од неговата ширина.

Задача 30. Од еден квадрат отсечен е друг, така што останува рамка, која секаде има иста ширина 5 cm . Колкава била страната на прво-

битниот квадрат, ако се знае дека збирот на периметрите на првобитниот и новодобиениот квадрат е 96cm ?

Задача 31. Колкави се плошините на оние правоаголници чии страни се изразени со природни броеви, а нивните периметри се еднакви на 22 cm ?

Задача 32. Квадрат и правоаголник се дадени со следните услови:

- збирот на должините на страните на правоаголникот е еднаков на 13cm , а разликата на страните е еднаква на 5cm , и
- плоштината на квадратот е еднаква на плоштината на правоаголникот.

Одреди кој од нив има поголема периметар и за колку?

Задача 33. Ако страната на даден квадрат се зголеми за 10cm , неговата плоштина се зголемува за 200cm^2 . Одреди ги периметарот и плоштината на дадениот квадрат.

Задача 34. Кога едната страна на квадратот ќе се зголеми трипати, а другата двапати се добива правоаголник чија плоштина е 96cm^2 . За колку е периметарот на правоаголникот поголем од периметарот на квадратот?

Задача 35. Плоштината на едно лозје во вид на правоаголник е 67200m^2 . Должината на овоштарникот е пет пати помала од должината на лозјето, а ширината на овоштарникот е 6 пати помала од ширината на лозјето. Колкава е плоштината на овоштарникот?

Задача 36. Дадени се два еднакви квадрати, кои имаат плоштина од 100cm^2 . Ако страната на едниот квадрат ја зголемиме за 2cm , а периметарот на другиот го зголемиме за 16cm , кој квадрат после овие измени ќе има поголема плоштина?

Задача 37. Квадрат со страна 6cm има плоштина еднаква на плоштината на правоаголник чии должини на страни се природни броеви. Колку такви различни правоаголници има? Кој од нив има најголем, а кој најмал периметар?

Задача 38. Правоаголна градина со должина $8m$ и ширина $6m$ треба да се огради од сите страни со патека широка $50cm$. Колку килограми материјал е потребен, ако за $1m^2$ се потребни $20kg$ материјал?

Задача 39. Во една спортска сала со правоаголен облик со должина $31m$ и ширина $21m$ се наоѓа базен. Секој раб на базенот е оддалечен $3m$ од сидот на салата. Колкава е плоштината на салата надвор од базенот?

Задача 40. Плоштината на правоаголникот е $24cm^2$. Мерните броеви на страните на правоаголникот се изразени во природни броеви, а единицата мерка е $1cm$. Колку такви правоаголници има и колкави се нивните страни? Кој од тие правоаголници има најголем периметар?

Задача 41. Должините на страните на правоаголникот $ABCD$ се $\overline{AB} = 6cm$ и $\overline{BC} = 4cm$. Точката E припаѓа на страната AB , а точката M на страната CD . Одреди ја должината на отсечката EM ако периметарот на четириаголникот $AEMD$ е $14cm$, периметарот на четириаголникот $BEMC$ е $16cm$.

Задача 42. Страните на правоаголникот $ABCD$ се $10cm$ и $4cm$. Точката E припаѓа на страната AB , а точката F на страната CD . Обемот на правоаголникот $AEFD$ е $12cm$. Пресметај ја плоштината на правоаголникот $EBCF$.

Задача 43. Должините на страните на правоаголникот се разликуваат за $2cm$. Ако секоја страна на правоаголникот ја зголемиме за $3cm$, тогаш плоштината на правоаголникот се зголемува за $105cm^2$. Пресметајте ги должините на страните, периметарот и плоштината на почетниот правоаголник.

Задача 44. Плац во облик на правоаголник заграден е со столбови кои се поставени на неговите рабови почнувајќи од едно теме на правоаголникот на растојание $5m$ еден од друг. Во внатрешноста на плацот е изградена куќа чиј темел е во облик на квадрат со страна $12m$. Колкава е плоштината на дворот ако за заградување на плацот се искористени 14 столбови, а познато е дека во секое теме на плацот има по еден столб?

Задача 45. Ако едната страна на квадратот ја продолжимо за 2cm , а другата за 5cm , тогаш се добива правоаголник чија плоштина е за 52cm^2 поголема од плоштината на квадратот. Колкава е плоштината на квадратот?

Задача 46. Две ниви, една во облик на квадрат, друга во облик на правоаголник имаат еднакви обиколки. Збирот на тие обиколки е 3km и 200m . Ширината на правоаголникот е два пати помала од страната на квадратот. Пресметај ја плоштината на правоаголникот.

Задача 47. Сто еднакви квадрати со страна 3cm треба да се подредат, така што да се добие правоаголник со:

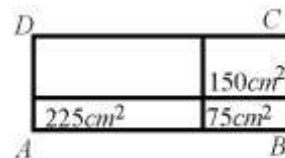
- а) најголема обиколка, б) најмала обиколка.
Колкави се страните на тие правоаголници?

Задача 48. Даден е правоаголник со страни $a\text{ cm}$ и $b\text{ cm}$. Ако страната со должина $a\text{ cm}$ се продолжи за $b\text{ cm}$ и страната со должина $b\text{ cm}$ се продолжи за $a\text{ cm}$ се добива квадрат со плоштина 100cm^2 . Ако должините на страните на дадениот правоаголник се природни броеви, определи го правоаголникот со најмала плоштина.

Задача 49. За покривање на под потребни се 200 плочки во облик на правоаголник $22\text{cm} \times 11\text{cm}$. Колку плочки, во облик на квадрат $20\text{cm} \times 20\text{cm}$ се потребни за покривање на истиот под?

Задача 50. Периметарот на еден правоаголен салон е 56m . Должината на салонот е за 10m поголема од неговата ширина. Салонот е поделен на два дела, еден во облик на квадрат, а другиот во облик на правоаголник. Подот на квадратниот дел е покриен со бели мермерни плочи, а на правоаголниот дел со сиви мермерни плочи. По колку пакети од секој вид плочи се искористени ако за покривање на 3m^2 се потребни по два пакети плочи?

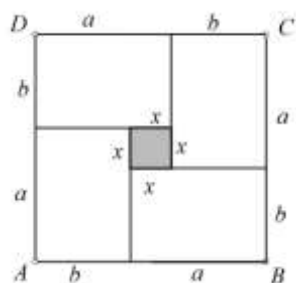
Задача 51. Пресметај го периметарот на квадратот, чија плоштина е еднаква на плоштината на правоаголник $ABCD$ претставен на цртежот десно.



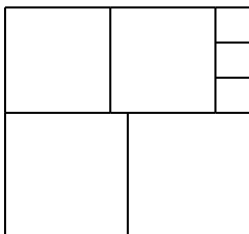
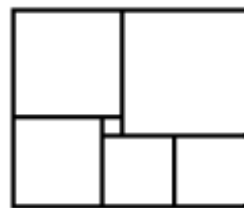
Задача 52. Од десет правоаголници со должини на страни 1cm и 2cm се формирани сите можни различни правоаголници (при формирањето на правоаголниците не е обавезно да се искористат сите 10 плочки). Да се најде:

- Збирот на обиколките на сите добиени правоаголници.
- Збирот на плоштините на сите добиени правоаголници.

Задача 53. Овошна градина во форма на квадрат е поделена на 4 правоаголници и 1 мал квадрат како на цртежот десно. Сите правоаголници имаат еднакви соодветни страни, а плоштината на секој од овие правоаголници е 506m^2 . Ако должините на страните на правоаголниците се последователни природни броеви, колкава е плоштината на овошната градина?



Задача 54. Правоаголникот претставен на цртежот десно е составен од шест квадрати (види цртеж десно). Пресметај ги плоштината и периметарот на правоаголникот ако страната на најмалиот квадрат е 1cm .



Задача 55. Правоаголник е поделен на 7 квадрати (види цртеж лево). Периметарот на најмалиот квадрат е 2 cm . Колкав е периметарот на правоаголникот?

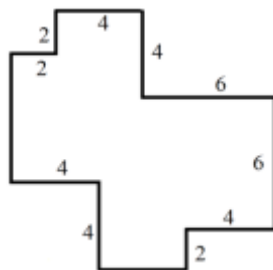
Задача 56. Од правоаголен лист хартија со страни 26cm и 7cm Петар отсекува најголем можен квадрат, чии страни лежат на рабовите на листот. Истата постапка ја повторува и со остатоците од листот, се додека целиот лист не го исече на квадрати. На колку квадрати е исечен листот? Колкав е збирот на обемите на сите добиени квадрати?

Задача 57. Три мали еднакви правоаголници се поставени како на цртежот десно, така да форми-



раат правоаголник. Ако периметарот на секој од малите правоаголници е 60cm , колкава е плоштината на квадратот кој има периметар колку што е периметарот на големиот правоаголник?

Задача 58. Пресметај ја плоштината на фигурата дадена на цртежот десно. Должините на страните се изразени во cm .



Задача 59. Плоштината на еден двор, што има форма на правоаголник е 10 ари. Должината на една страна е 25 метри. Да се огради дворот потребно е на секои 5 метри да се постави по еден столб. Пресметај колку столбови се потребни за оградување на дворот и по колку столбови ќе има секоја страна?

Задача 60. Нива во вид на правоаголник е долга 72m и широка 25m . Колку тони пченка ќе се добие од нивата ако од 1m^2 се добива 5kg пченка.

Задача 61. Плоштината на подот на една сала е $60\text{m}^2 54\text{dm}^2$. Колкава е плоштината на подот на ходникот кој е 4 пати подолг и 6 пати потесен?

Задача 62. Ако едната страна на квадрат се зголеми за 3cm , а другата за 6cm , тогаш добиениот правоаголник има плоштина која е за 1998cm^2 поголема од плоштината на квадратот. Пресметај ги периметрите на квадратот и добиениот правоаголник.

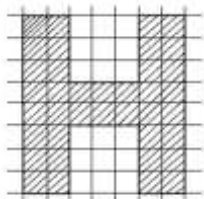
Задача 63. Колку керамички плочки во вид на квадрат, со страна 15cm , се потребни за покривање на под со правоаголна форма со димензии 12m и 27m ?

Задача 64. Во поголем квадрат впишан е помал квадрат. Разликата на нивните плоштини е 105cm^2 , а должината на страната на поголемиот квадрат е за 7cm поголема од должината на страната на помалиот квадрат. Пресметај ги периметарот и плоштината на помалиот квадрат.

Задача 65. Дадени се два квадрати. Разликата на должините на нивните страни изнесува 11cm , а разликата на нивните плоштини е 671cm^2 . Пресметај го збирот на периметрите на двата квадрати.

Задача 66. Ако едната страна на даден квадрат се зголеми двапати, а другата за 22m , се добива правоаголник кој има 2000m поголем периметар. Колку е долга страната на дадениот квадрат?

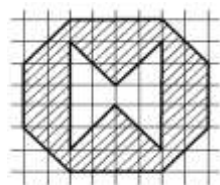
Задача 67. Плоштината на едно лозје е 199900m^2 . Должината на бавчата е 4 пати помала од должината на лозјето, а ширината на бавчата е 5 пати помала од ширината на лозјето. Колкава е плоштината на бавчата?



Цртеж 1

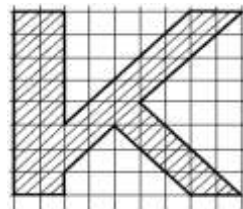
Задача 68. Ако плоштината на едно квадратче е еднаква на 1cm^2 , најди ја плоштината на штрафираната фигура прикажана на цртеж 1.

Задача 69. Ако плоштината на едно квадратче е еднаква на 1cm^2 , најди ја плоштината на штрафираната фигура прикажана на цртеж 2.

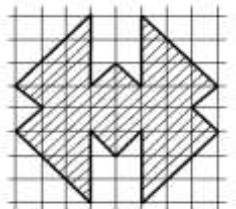


Цртеж 2

Задача 70. Ако плоштината на едно мало квадратче е еднаква на $b\text{cm}^2$, најди ја плоштината на штрафираната фигура прикажана на цртеж 3.



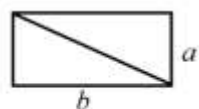
Цртеж 3



Цртеж 4

Задача 71. Плоштината на штрафираната фигура прикажана на цртеж 4 е 136cm^2 . Колкава е должината на страната на квадратчињата од кои е составена мрежата?

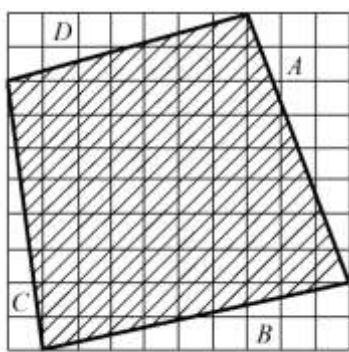
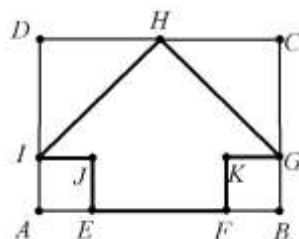
Забелешка. Пред да примениме на натамошните разгледувања, за најмладите читатели ќе споменеме дека плоштината на правоаголен триаголник со катети a и b е еднаква на половината



Цртеж 5

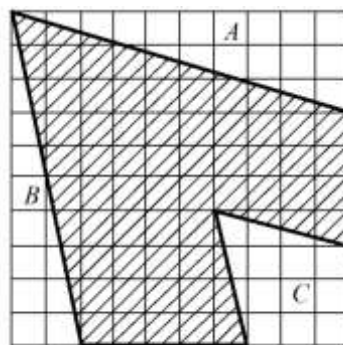
од плоштината на правоаголник со страни a и b . Во точноста на ова тврдење можеш да се увериш ако произволен правоаголник го пресечеш по дијагонала и ако добиените делови ги ставиш еден врз друг, при што ќе забележиш дека тие се совпаѓаат (цртеж 5).

Задача 72. Даден е правоаголник $ABCD$ со страни $\overline{AB} = 8\text{cm}$ и $\overline{AD} = 6\text{cm}$. Нека точките E, F, G, H, I, J и K (види цртеж) се избрани така да $AEJI$ и $FBKG$ се квадрати со должини на страни 2cm , а точката H е средина на страната DC . Пресметај ја плоштината на многуголникот $EFKGHIJ$.

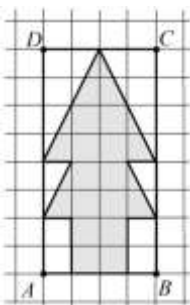


Цртеж 6

Задача 74. Пресметај ја плоштината на штрафираната површина прикажана на цртеж 7, ако плоштината на едно квадратче е еднаква на 1cm^2 .

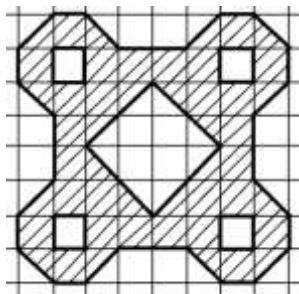


Цртеж 7

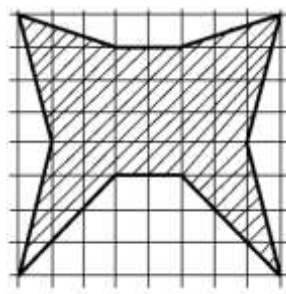


Задача 75. Илија во тетратката внатре во правоаголникот $ABCD$ нацртал геометричка фигура која личи на дрво од бор, цртеж десно. Пресметај ја плоштината на таа фигура ако растојанието меѓу линиите во тетратката на Иван е 1cm

Задача 76. Пресметај ја плоштината на штрафираната површина, ако плоштината на едно квадратче е еднаква на 1cm^2

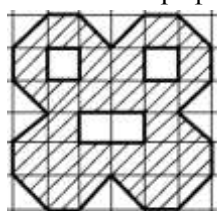


a)

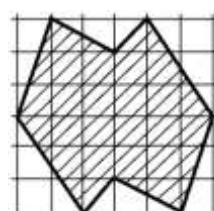


b)

Задача 77. Колкава е полштината на едно мала квадратче ако плоштината на штрафираната површина е:



a) 234 cm^2

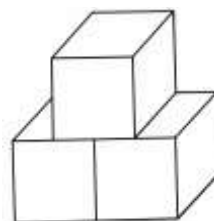


b) 96 cm^2

5.4. КОЦКА И КВАДАР

Задача 1. Збирот на должините на рабовите на коцката е еднаков на 204 cm . Пресметајте ги плоштината и волуменот на коцката.

Задача 2. Три коцки со раб $a=13 \text{ cm}$ се поставени како на црт. 1. Пресметајте ги плоштината и волуменот на така добиеното тело.



Црт. 1

Задача 3. Колку коцки со раб 4 cm треба да се стават, во еден ред една зад друга, за да се добие квадар со плоштина 352 cm^2 .

Задача 4. Колку штици со должина 4 m , ширина 3 dm и дебелина 5 cm , може да се натоварат на камион со носивост 3 тони , ако 1 m^3 штици тежат 500 kg ?

Задача 5. Квадар е составен од 12 еднакви коцки со раб 5cm . Колкава е плоштината на квадарот?

Задача 6. Квадар чии рабови се 2m , 4m и 8m има волумен еднаков на волумен на коцка. Кој има поголема плоштина, коцката или квадарот?

Задача 7. Волуменот на квадарот е 385cm^3 , а мерните броеви на должините на страните на квадарот се природни броеви. Колкава е плоштината на квадарот?

Задача 8. Коцки со рабови 1cm , 2cm , 3cm , и 4cm се расечени на кубни сантиметри и од нив е составена квадратна плоча со дебелина 1cm . Колкава е плоштината на плочата?

Задача 9. Грамада во облик на коцка со раб 100m расечена е на коцки со раб 1dm . Со овие коцки поплочена е патека со ширина 1m . За колку денови ќе ја помине патеката велосипедист, кој секој ден вози 5 часа, а секој час минува 20km ?

Задача 10. Една коцка има волумен осум пати поголем од друга коцка. Колку пати е поголема плоштината на првата коцка од плоштината на втората коцка?

Задача 11. Плоштината на една коцката е еднаква на плоштината на правоаголник со страни 12cm и 8cm . Колкав е волуменот на коцката?

Задача 12. Од парче лим со правоаголна форма со периметар 200cm и ширина еднаква на две третини од должината, кај секое негово теме се отсечени квадрати со плоштина 25cm^2 . Потоа од преостанатиот лим е направена кутија без капак. Колкави се плоштината и волуменот на таа кутија?

Задача 13. Базен со облик на квадар со страни $a=50\text{m}$, $b=20\text{m}$ и $c=3\text{m}$ (длабочина на базенот), наполнет е две третини со вода. Пресметај колку литри вода има во базенот и колкава е плоштината на базенот која не е натоцена?

Задача 14. Кога квадрат чиј еден раб има должина 24cm , ќе се подели на 4 еднакви делови се добиваат 4 коцки. Колку такви квадрати има и колкави им се плоштините?

Задача 15. Коцка со раб 5cm е обоена со црвена боја, а потоа е расечена на коцки со рабови од 1cm . Колку мали коцки има со три, колку со две, а колку со една обоена страна? Колку мали коцки има кои немаат обоена страна?

Задача 16. Ако работ на коцката се зголеми за 1cm , тогаш плоштината на коцката се зголемува за 366cm^2 . Пресметај ги плоштината и волуменот на коцката.

Задача 17. Дрвена коцка со раб 8cm е поделена е на два квадрати, така што волуменот на едниот квадрат е четирипати помал од волуменот на коцката. Најди колку пати плоштината на истиот квадрат е помала од плоштината на коцката.

Задача 18. На две соседни страни на коцка, чиј раб е поголем од 1cm , се залепени два квадрати така што е добиен нов квадрат. Мерните броеви на должините на рабовите на така добиениот квадрат се природни броеви, а неговиот волумен е 105cm^3 . Пресметај ја неговата плоштина.

Задача 19. Имаме четири коцки со рабови 1cm , 2cm , 3cm и 5cm , соодветно. Тие можат да се залепат една до друга по страните. Најдете таков распоред на коцките така што добиеното тело има најмала плоштина. Пресметај ја плоштината на ова тело.

Задача 20. Коцка со страна 5m ја расекуваме на коцки со страни 5mm . Малите коцки ги ставаме во височина една над друга со што добиваме столб. Колку е висок столбот?

Задача 21. Соба со облик на правоаголен паралелопипед има должина 6m , ширина 4m и висина 3m . Вратата и прозорецот зафаќаат вкупна плоштина од 6m^2 . Колку кутии боја од по 5kg треба да се купат за молерисување на таванот и ѕидовите, ако за молерисување на 4m^2 е потребен 1kg боја.

Задача 22. Од парче сирење во облик на коцка со страна 10cm последователно се отсекуваат три парчиња со дебелина од 1cm . Како треба да се направи отсекувањето за да останатото парче сирење има најголем можна плоштина. Пресметај ја плоштината на добиеното тело.

Задача 23. Сапун има облик на квадар со ширина 4cm , должина 8cm и висина 2cm . Секој ден од него се троши едно исто количество. После 7 дена сапунот има повторно облик на квадар, но димензиите му се двапати помали (2cm , 4cm и 1cm). За колку денови ќе се потроши сапунот?

Задача 24. Резервоар со облик на квадар е полн со вода до определена длабочина поголема од 2m . Дното на резервоарот е правоаголник со должина 8m и ширина 5m . Метална коцка со раб 2m се спушта на дното на резервоарот. За колку сантиметри ќе се покачи нивото на водата во резервоарот?

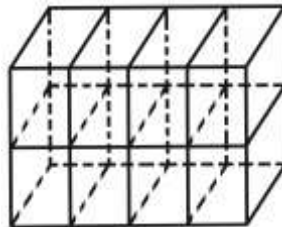
Задача 25. Една коцка со раб 10cm е поделена на 1000 коцки со раб 1cm . Осумте мали коцки кои се наоѓаат во темињата на големата коцка се отсечени.

а) Најди ја плоштината на добиеното тело.

б) Добиеното тело е поставено на маса на една од неговите страни. Коцките кои се допираат со масата го сочинуваат “првиот спрат”. Коцките над нив го сочинуваат “вториот спрат”, коцките од следниот слој “третиот спрат” итн. Коцка од “првиот спрат” (ги има 96) се нумерирани со броевите од 1 до 96. Коцките од “вториот спрат” се нумерирани со следните 100 броеви итн. до последниот “десетти спрат”. На кој “спрат” е напишан бројот 608? А бројот 798?

Задача 26. Куќа има облик на квадар со страни на основата $a=20\text{m}$, $b=10\text{m}$, а висината и е $c=6\text{m}$. Таа има два спрата и секој спрат има по четири соби, како што е прикажано на цртежот.

Познато е дека сите соби се еднакви и имаат облик на квадар. Секоја соба има врата и прозорец кои заедно имаат плоштина еднаква на 6m^2 . Треба да се молерисаат четирите сидови и таванот на секоја од собите. Колку килограми боја е потребно, ако на секои 4m^2 се троши 1kg



боја? (Дебелината на сидовите на собите да се занемари.)

Задача 27. Стаклен аквариум има облик на квадар со димензии на дното 20cm и 40cm , а висината му е 25cm . Во аквариумот има 16l вода. Да се определи:

- а) длабочината на водата во аквариумот;
- б) колку стакло е искористено за да се направи аквариумот.

Задача 28. Земјоделецот Рампо има две ниви кои се оградени со еднаква должина на жица. Едната е правоаголна со димензии 500m и 300m , а другата квадратна. И двете ниви се покриени со 15cm снежна покривка. На која од нивите има повеќе снег и за колку?

Задача 29. Сад со облик на квадар со димензии 1m , 20cm и 3dm е полн со вода. Водата се претура во аквариум со должина 120cm , ширина 4dm и висина 5dm . Колкав дел од аквариумот ќе се наполни со вода?

Задача 30. Еден метар квадратен лим чини 35 денари. Колку денари се потребни за да се купи лим од кој ќе се направат 50 отворени канти за сирење (без капак) со димензии: должина 20cm , ширина 2dm и висина 4dm ?

Задача 31. За својот седми роденден принцезата Косара добила медалјон украсен со скапоцен камен. Каменот имал облик на квадар, чии три страни се со плошина 150mm^2 , 20mm^2 и 30mm^2 . Колку тежи каменот, ако е познато дека 1mm^3 од каменот тежи $\frac{1}{100}\text{g}$?

Задача 32. Три еднакви коцки се поставени така што, првата од нив има по една заедничка страна со втората и третата коцка. Освен тоа трите коцки имаат точно еден заеднички раб. Плоштината на добиеното тело е 56cm^2 .

- а) Да се пресмета волуменот на телото.
- б) Да се пресмета збирот на должините на рабовите на телото.

Задача 33. Коцка со раб 3cm е поделена на 27 помали коцки со раб 1cm . Страните на коцката се обоени како на шаховската табла, при што секое аголно квадратче е бело. Малите коцки, кои имаат барем една црна

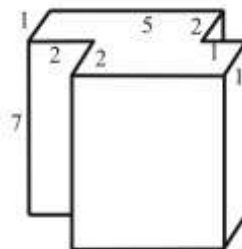
страна се извадени од коцката. Да се најде волуменот и плоштината на добиеното тело.

Задача 34. Од парче дрво во облик на квадар се отсечени две парчиња во облик на квадар, после што останало тело кое има облик и димензии (во cm) како што е прикажано на цртежот.

а) Какви биле димензиите на почетното парче дрво.

б) Колку тежи останатиот дел од дрвото, ако $1cm^3$ од него тежи $3g$.

в) Колку грама лак се потребни за лакирање на останатиот дел од дрвото, ако за $1cm^2$ е потребна $\frac{1}{3}g$ лак.



Задача 35. Некои страни на дрвена коцка со раб $a\text{ cm}$ ($a \in \mathbb{N}$) се обоени со сина боја, а потоа коцката е расечена на коцкички со рабови $1cm$. Ако 14 коцкички имаат по две обоени страници и не постои ниту една коцкичка со три обоени страници, колку коцкички немаат обоено ниту една страна?

Задача 36. Вкупниот волумен на еден квадар и четири коцки е $2002cm^3$. Се знае дека рабовите на квадарот се $2cm$, $5cm$ и $91cm$, а работ на една од коцките е $10cm$. Колкави се рабовите на останатите три коцки, ако се знае дека нивните мерни броеви се природни броеви?

Задача 37. Дадени се коцка со раб $6cm$ и квадар со рабови $9cm$, $12cm$ и $15cm$. На колку најголеми можни коцки можат да се расечат квадарот и коцката. Дали користејќи ги сите расечени коцки може да се состави коцка?

Задача 38. Петар има хартија во облик на правоаголник чии страни се $27cm$ и $72cm$. Колкав е работ на коцката која може да се обложи со оваа хартија. Дозволено е сечење на хартијата.

Задача 39. Дадени се 15 дрвени трупчиња во форма на правилни паралелопипеди со страни $2 \times 2 \times 1$. Дали можат сите трупчиња да пополнат кутија со страни $3 \times 4 \times 5$?

5.5. ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ

Задача 1. Нацртај три отсечки кои имаат заедничка средина, но не лежат на исти прави. Колку најмногу прави се одредени со крајните точки на овие отсечки?

Задача 2. Во правоаголник се повлечени дијагоналите и двете оски на симетрија. Колку триаголници се добиени?

Задача 3. Нацртан е триаголник и секое негово теме е поврзано со една отсечка со средината на спротивната страна. Колку различни отсечки и колку различни триаголници има на цртежот?

Забелешка. *Отсечките кои ги поврзуваат темињата со средините на спротивните страни се сечат во една точка.*

Задача 4. На кружницата имаме 5 различни точки. Колку отсечки се определени со овие точки?

Задача 5. Дадени се пет точки во рамнината, при што меѓу нив не постојат три точки кои што припаѓаат на иста права. Колку триаголници се определени со овие точки?

Задача 6. Дадени се две паралелни прави. На едната се наоѓаат пет, а на другата 3 точки. Колку различни триаголници определуваат овие точки?

Задача 7. Квадрат со страна $3cm$ е поделен на квадратчиња со плоштина $1cm^2$. Нацртајте го соодветниот цртеж и пребројте колку отсечки и колку квадратчиња има на него.

Задача 8. Квадрат со страна $8cm$ поделен е на делови со помош на 7 прави кои се паралелни на едниот пар страни и со 7 прави кои се паралелни на другиот пар страни. Растојанието меѓу секои две соседни прави е $1cm$. Колку правоаголници, кои не се квадрати, се добиени со оваа поделба?

Задача 9. Дадени се 4 отсечки. Колку најмногу прави се одредени со нивните крајни точки?

Задача 10. Во рамнината се дадени 7 точки, од кои само три лежат на иста права p . Колку различни прави се одредени со овие точки?

Задача 11. Даден е триаголникот ABO . На страната AB земени се четири точки кои со отсечки се поврзани со темето O . На страните AO и OB земени се точки C и D , така што C е средина на AO и D е средина на BO и е повлечена отсечката CD . Колку отсечки и колку триаголници забележуваш на цртежот?

Задача 12. Колку различни прави можат да се повлечат низ 7 точки кои лежат на кружница?

Задача 13. Повлекувајќи 4 прави, поделете го кругот на најголем можен број делови. Колкав е тој број? Решението прикажи го со цртеж.

Задача 14. Четири браќа треба да поделат овоштарник кој има облик на рамнокрак правоаголен триаголник, така што секој од нив да добие подеднаков дел. Како тоа ќе го направат?

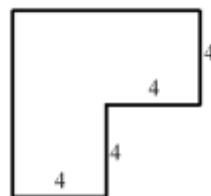
Задача 15. Распоредете 10 точки на 5 прави така што на секоја права да се наоѓаат по 4 точки. Решението претстави го со цртеж.

Задача 16. Градинарот Коста во својата градина сакал да насади 19 трендафили, распоредени во 9 редови, но така што во секој ред да има по 5 трендафили. Како тоа ќе го направи?

Задача 17. Синџир е составен од 12 алки. Секоја алка има дијаметар на отворот 6cm , а дебелината на тркалезниот метал од кој е направена е 5mm . Одреди ја должината на затегнатиот синџир ако сите алки со во кружен облик.

Задача 18. На страните на триаголникот воочени се точно по две точки. Најди го бројот на правите определени со овие 6 точки, а кои не минуваат низ темињата на триаголникот.

Задача 19. Подели ја фигурата прикажана на цртежот десно на четири складни делови, а потоа

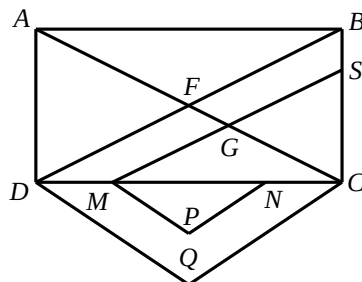


пресметај ги периметарот и плоштината на еден од тие четири делови.

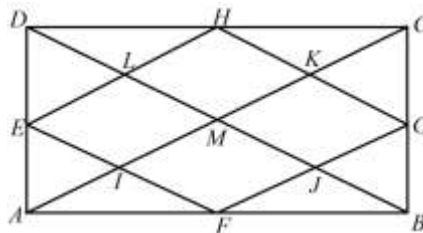


Задача 20. Подели ја фигурата дадена на цртежот лево на четири еднакви делови.

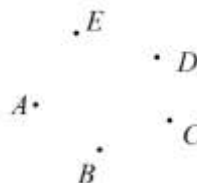
Задача 21. Колку триаголници има на цртежот десно. Испиши ги!



Задача 22. Колку триаголници има на цртежот? Испиши ги!



Задача 23. Во рамнината се дадени 5 точки, како на цртежот десно. Да има повеќе отсечки чии крајни точки се зададените или триаголници со темиња во зададените точки? Испиши ги отсечките и триаголниците.



Задача 24. Дадени се паралелни прави a и b . На правата a се дадени точките A, B, C, D, E , а на правата b точките M, N, P, Q . Колку:

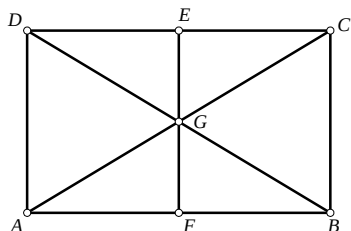
- отсечки,
- триаголници,
- конвексни четириаголници

одредуваат овие 9 точки.

Задача 25. На две паралелни прави се земени по три различни точки. Колку различни триаголници чии темиња се дадените точки можеме да формираме?

Задача 26. Колку вкупно отсечки и колку вкупно триаголници се прикажани на цртежот десно?





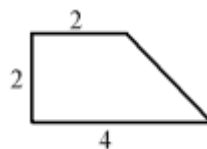
Задача 27. Што има повеќе на цртежот лево: отсечки или триаголници?

Задача 28. Распореи 14 точки на 7 прави, така да на секоја права има по 4 точки.

Задача 29. Колкав е бројот на различните правоаголници со целобројни страни во cm :

- а) чиј обем е $2002cm$, б) чија плоштина е $2002cm^2$?

Задача 30. Четириаголникот прикажан на цртежот десно подели го на четири дела еднакви по облик и по површина.



Задача 31. Дали може квадрат со страна $12cm$ да се подели на 2, 4, 6, 7, 8, 9 или 10 помали квадрати (не мора да се еднакви)?

Задача 32. Избери шест точки во рамнината и поврзи ги со отсечки, така да секоја точка биде поврзана со четири други точки и да не постојат две отсечки кои се сечат во внатрешна точка.

Задача 33. Периметарот на еден триаголник е $72cm$. Пресметај ги должините на страните, ако тие се три последователни парни природни броја.

Задача 34. Радиусот на кружницата е $18mm$. Точката M е оддалечена $30mm$ од центарот на кружницата. Определи колку се оддалечени најблиската и најоддалечената точка на кружницата до точката M .

Задача 35. Дадени се две различни паралелни прави a и b и права c која ги сече. Најди ги точките B и C такви да $B \in b$, $C \in c$ при што B и C се симетрични во однос на правата a .

Задача 36. Нека се дадени правата p и точките A и B така што $A \notin p$ и $B \notin p$. На правата p конструирај точка C така што $\overline{AC} = \overline{BC}$.

Задача 37. Даден е правоаголник $ABCD$ ($\overline{AB} > \overline{BC}$). Нека s е симетралата на $\angle BAD$, а D_1 е симетричната точка на темето D во однос на правата s . Ако $\overline{AD}_1 = 4\text{cm}$, $\overline{BD}_1 = 7\text{cm}$. Пресметај ја периметарот на правоаголникот $ABCD$.

Задача 38. На страната BC на триаголникот ABC се наоѓа точка E , таква да $\overline{AE} = \overline{BE}$. Пресметај го периметарот на триаголникот AEC ако се знае дека $\overline{AC} = 5\text{cm}$ и $\overline{BC} = 9\text{cm}$.

Задача 39. Играјќи со хартија во облик на правоаголник со плоштина 351cm^2 и должина на една страна 27cm , Марија отсекала два рамнострани триаголници над пократката страна на правоаголникот. Колкав е периметарот на останатиот дел од хартијата?

Задача 40. Најди ги сите триаголници со целобројни должини на страните изразени во сантиметри, ако нивните периметри се 15 cm .

5.6. РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ

5.6.1. КОМПЛЕМЕНТНИ И СУПЛЕМЕНТНИ АГЛИ

1. Имаме $\alpha + \beta = 90^0$. Суплементните агли на α и β се $180^0 - \alpha$ и $180^0 - \beta$ и нивниот збир е:

$$(180^0 - \alpha) + (180^0 - \beta) = 360^0 - (\alpha + \beta) = 360^0 - 90^0 = 270^0.$$

2. Ако α и β се еднакви агли, тогаш $\alpha + \beta = 86^0$, а ако не се еднакви, тогаш тие се суплементни и нивниот збир е еднаков на 180^0 .

3. За аглите α и β имаме дека $\alpha + \beta = 90^\circ$ и $\alpha - \beta = 20^\circ 52'$.
Значи,

$$\beta = (90^\circ - 20^\circ 52') : 2 = 34^\circ 34', \text{ а } \alpha = 90^\circ - 34^\circ 34' = 55^\circ 26'.$$

4. Аглите α и β се суплементни па затоа $\alpha = 180^0 - \beta$. Слично, $\gamma = 90^0 - \beta$. Со замена во $\alpha + \gamma = 142^0$ добиваме $180^0 - \beta + 90^0 - \beta = 142^0$, па е $\beta = 64^0$. Конечно, $\alpha = 116^0$, $\gamma = 26^0$.

5. Ако аглите α и β имаат паралелни краци, тогаш или $\alpha = \beta$ или $\beta = 180^0 - \alpha = 137^0$. Во првиот случај

$$2\beta - \alpha = \alpha = 43^0,$$

а во вториот случај

$$2\beta - \alpha = 2 \cdot 137^0 - 43^0 = 231^0.$$

6. Од условот на задачата имаме $\alpha = 90^0 - \beta + 12^0 = 102^0 - \beta$ и $3\beta = 180^0 - \alpha + 38^0$, т.е. $\alpha = 218^0 - 3\beta$. Значи, $102^0 - \beta = 218^0 - 3\beta$, т.е. $2\beta = 116^0$ или $\beta = 58^0$. Конечно, $\alpha = 102^0 - 58^0 = 44^0$.

7. Од условот следува дека $6\beta = \gamma$, $\alpha = 90^0 - \beta$ и $\alpha + \gamma = 180^0$. Со замена за α и γ од првите две равенки добиваме $90^0 - \beta + 6\beta = 180^0$, т.е. $\beta = 18^0$. Конечно, $\alpha + \beta + \gamma = 18^0 + 180^0 = 198^0$.

8. Нека помалиот агол е α . Од условот имаме $2[(90^0 - \alpha) - \alpha] = \alpha$, па затоа $\alpha = 36^0$. Според тоа, $180^0 - \alpha = 180^0 - 36^0 = 144^0 = 4 \cdot 36^0 = 4\alpha$.

9. **Одговор.** $\alpha = 90^0$ и $\beta = 11^0 15'$.

10. **Прв начин.** Накрските остри агли се еднакви меѓу себе и нека нивната големина изнесува x . Тогаш, накрските тапи агли имат големина $180^0 - x$. Од условот имаме дека $2x = \frac{1}{2}(180^0 - x)$, односно $4x = 180^0 - x$, од каде $5x = 180^0$, па $x = 36^0$ е големината на накрските остри агли. Накрските тапи агли имаат големина $180^0 - 36^0 = 144^0$.

Втор начин. Нека α е накрсниот остар агол и β е накрсниот тап агол. Од условот на задачата имаме дека накрсниот тап агол е 2 пати поголем од збирот на накрските остри агли, односно $\beta = 2 \cdot (\alpha + \alpha) = 4\alpha$

или накрсниот тап агол е 4 пати поголем од накрсниот остар агол. Па, значи дека накрсниот остар агол изнесува $180^\circ : 5 = 36^\circ$, додека накрсниот тап агол е $180^\circ - 36^\circ = 144^\circ$.

11. Имаме дека збирот на аглите α и β е $\alpha + \beta = \frac{5}{6} \cdot 90^\circ = 75^\circ$, а нивната разлика е $\alpha - \beta = 20^\circ$, каде α е аголот кој е за 20° поголем од β . Тогаш,

$$\beta = (75^\circ - 20^\circ) : 2 = 27^\circ 30', \quad \alpha = 75^\circ - 27^\circ 30' = 47^\circ 30',$$

па

$$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ.$$

Значи, триаголникот е тапоаголен.

12. Бидејќи аглите се соседни и нивните симетрали се заемно нормални добиваме дека $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 90^\circ$, односно $\alpha + \beta = 180^\circ$. Бидејќи знаеме дека α е за 30° поголем од β , добиваме дека $\alpha = \beta + 30^\circ$. Ако го замениме ова во $\alpha + \beta = 180^\circ$, добиваме $\beta = 75^\circ$. Па според тоа $\alpha = 105^\circ$.

5.6.2. ЗАДАЧИ СО ОТСЕЧКИ



Црт. 1

1. Нека M е средина на отсечката AC и N е средина на отсечката BC (црт. 1), т.е.

$$\overline{AM} = \overline{MC} \text{ и } \overline{CN} = \overline{NB}.$$

Имаме:

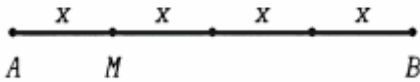
$$\overline{AB} = \overline{AM} + \overline{MC} + \overline{CN} + \overline{NB} = \overline{MC} + \overline{MC} + \overline{CN} + \overline{CN} = \overline{MN} + \overline{MN} = 2\overline{MN},$$

што значи: должината на отсечката AB е двапати поголема од должината на отсечката MN , односно растојанието меѓу средините на отсечките AC и BC е еднакво на половината од должината на отсечката AB .

2. Бидејќи $\overline{AC} + \overline{BC} = \overline{AB}$, точките A, B и C лежат на една права. Од $\overline{AC} = \overline{BC}$ добиваме дека точката C е средина на отсечката AB .

3. I начин. Бидејќи помалиот дел е трипати помал од поголемиот дел добиваме дека разликата меѓу големиот и малиот дел е двапати поголема од малиот дел на отсечката AB .

Според тоа, малиот дел на отсечката AB е еднаков на $8:2=4cm$, а големиот дел е еднаков на $3 \cdot 4=12cm$. Конечно, отсечката AB е долга $4+12=16cm$.



Црт. 2

II начин. Ако $\overline{AM} = x$, тогаш $\overline{MB} = 3x$, (црт.2). Значи $\overline{MB} - \overline{AM} = 2x$, од што следува $2x = 8$, т.е. $x = 4cm$. Конечно, за должината на отсечката AB

имаме $\overline{AB} = 4 \cdot 4cm = 16cm$.

4. Имаме, $\overline{AB} = \overline{CD} + 2$. Но, $\overline{AB} + 10 = 3\overline{CD}$, па затоа

$$\overline{CD} + 2 + 10 = 3\overline{CD},$$

од што следува $\overline{CD} + 12 = 3\overline{CD}$.

Конечно, две должини на CD се еднакви на $12cm$, т.е. $\overline{CD} = 12:2 = 6cm$, па затоа $\overline{AB} = \overline{CD} + 2 = 8cm$.

5. Имаме, $\overline{MN} = \overline{PQ} + 2$ и $4\overline{PQ} = \overline{MN} + 19$, што значи

$$4\overline{PQ} = \overline{MN} + 19 = \overline{PQ} + 2 + 19,$$

т.е. $3\overline{PQ} = 21$. Конечно,

$$\overline{PQ} = 21:3 = 7cm \text{ и } \overline{MN} = \overline{PQ} + 2 = 9cm.$$

6. Ако должината на отсечката CD ја означиме со x , тогаш должината на отсечката AB е $(18+x)$. После намалувањето на должините за $8cm$ имаме отсечки со должини $x-8$ и $x+18-8=x+10$.

Од условот на задачата добиваме

$$(x-8)+(x-8)+(x-8) = x+10$$

$$3x-24 = x+10$$

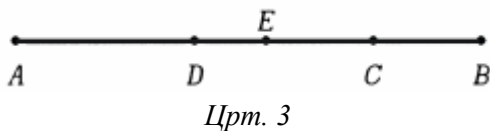
$$3x = x+24+10$$

$$3x = x+34,$$

па затоа $2x = 34$, т.е. $x = 17$.

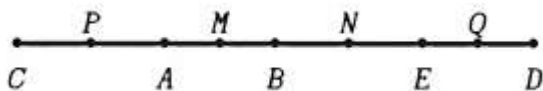
Значи, должината на отсечката CD е $17cm$, а на отсечката AB е $(17+18)cm = 35cm$.

7. Бидејќи $\frac{1}{5}$ од должината на AB е еднаква на $20:5=4cm$ добиваме дека точката C од точката B е оддалечена $4cm$. Значи, $\overline{AC}=16cm$, а $\overline{AD}=\overline{CD}=8cm$.



Нека E е средина на отсечката AB (црт. 3). Тогаш, $\overline{AE}=\overline{BE}=10cm$. Бараното растојание е $\overline{DE}=\overline{AE}-\overline{AD}=10cm-8cm=2cm$.

8. Бидејќи растојанието меѓу средините M и N на отсечките AB и BE е $12cm$ должината на отсечката AE



$$\begin{aligned}\overline{AE} &= \overline{AM} + \overline{MB} + \overline{BN} + \overline{NE} = \overline{MB} + \overline{MB} + \overline{BN} + \overline{BN} = 2(\overline{MB} + \overline{BN}) \\ &= 2\overline{MN} = 2 \cdot 12cm = 24cm.\end{aligned}$$

Според тоа, збирот на должините на крајните отсечки е

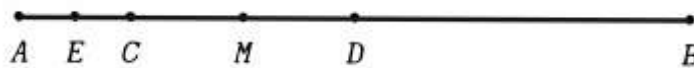
$$\overline{CA} + \overline{ED} = \overline{CD} - \overline{AE} = 42cm - 24cm = 18cm.$$

Растојанието меѓу средините на крајните отсечки е

$$\begin{aligned}\overline{PQ} &= \overline{PA} + \overline{AE} + \overline{EQ} = \overline{PA} + \overline{EQ} + 24cm = \frac{1}{2}(\overline{CA} + \overline{ED}) + 24cm \\ &= \frac{1}{2} \cdot 18cm + 24cm = 33cm.\end{aligned}$$

9. Нека AC е првата, CD е втората и DB е третата отсечка. Нека средината на отсечката AC е точката E , а средината на отсечката CD е точката M (црт. 5). Познато е дека $\overline{EM}=6cm$. Имаме,

$$\overline{AD} = \overline{AE} + \overline{EC} + \overline{CM} + \overline{MD} = \overline{EC} + \overline{EC} + \overline{CM} + \overline{CM} = \overline{EM} + \overline{EM} = 12cm.$$



Но, $\overline{CD}=2\overline{AC}$, па затоа

$$\overline{AD} = \overline{AC} + 2\overline{AC} = 3\overline{AC},$$

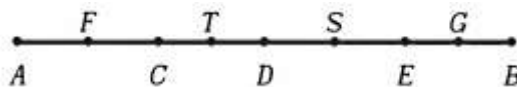
односно $3\overline{AC}=12cm$, т.е. $\overline{AC}=4cm$.

Значи,

$$\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CD} + \overline{DB} = \overline{AC} + 2\overline{AC} + 3\overline{AC} = 24cm.$$

10. Ако првата должина е x , втората е $2x$, третата е $3x$ и четвртата е $4x$. Растојанието меѓу средините на првата и втората отсечка е 3cm , па значи вкупната должина на првата и втората отсечка е $2 \cdot 3\text{cm} = 6\text{cm}$ (види задача 1). Од друга страна вкупната должина на првата и втората отсечка е $x + 2x = 3x$, па затоа $3x = 6\text{cm}$, т.е. $x = 2\text{cm}$.

Значи, деловите се со должини 2cm , 4cm , 6cm и 8cm , а должината на целата отсечка е 20cm .



Црт. 6

11. Нека точките C, D, E ја делат отсечката AB на четири отсечки и нека точките F, T, S, G се средините на овие

отсечки соодветно (црт. 6). Од

$$\overline{AB} = \overline{AF} + \overline{FG} + \overline{GB}, \quad \overline{FG} = 66\text{cm}, \quad \overline{AB} = 80\text{cm},$$

добиваме

$$\overline{AF} + \overline{FG} = \overline{AB} - \overline{GB} = 80\text{cm} - 66\text{cm} = 14\text{cm}.$$

Сега,

$$\begin{aligned} \overline{CE} &= \overline{AB} - (\overline{AC} + \overline{EB}) = \overline{AB} - (\overline{AF} + \overline{FC} + \overline{EG} + \overline{GB}) \\ &= \overline{AB} - (\overline{AF} + \overline{AF} + \overline{GB} + \overline{GB}) \\ &= 80\text{cm} - (14\text{cm} + 14\text{cm}) = 52\text{cm}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 52\text{cm} &= \overline{CE} = \overline{CT} + \overline{TD} + \overline{DS} + \overline{SE} = \overline{TD} + \overline{TD} + \overline{DS} + \overline{DS} \\ &= (\overline{TD} + \overline{DS}) + (\overline{TD} + \overline{DS}) = 2\overline{TS}, \end{aligned}$$

па затоа $\overline{TS} = 26\text{cm}$, т.е. растојанието меѓу средините на средните делови е 26cm .



Црт. 7

12. Со P да ја означиме средината на отсечката AM (црт. 7). Според условот на задачата имаме дека отсечката PB е петпати

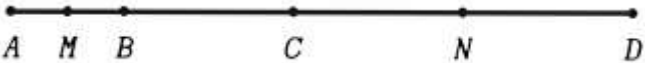
поголем од помалиот дел AP . Имаме, $\overline{MB} - \overline{AM} = 6\text{cm}$ и како

$$\overline{MB} + \overline{PM} = \overline{PB} = 5\overline{AP} = 5\overline{PM}$$

добиваме $\overline{MB} = 4\overline{PM}$ и $\overline{AM} = 2\overline{PM}$.

Значи, $4\overline{PM} - 2\overline{PM} = 6\text{cm}$ и $\overline{PM} = 3\text{cm}$. Конечно,

$$\overline{AB} = \overline{AM} + \overline{MB} = 2\overline{PM} + 4\overline{PM} = 6\overline{PM} = 6 \cdot 3\text{cm} = 18\text{cm}.$$

13. Имаме, 
 $2\overline{AB} = \overline{BC}$, $\overline{CD} = 2\overline{BC}$, *Црт. 8*

т.е.

$$\overline{BC} = 2\overline{AB}, \quad \overline{CD} = 2\overline{BC} = 4\overline{AB}.$$

Значи,

$$\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} = \overline{AB} + 2\overline{AB} + 4\overline{AB} = 7\overline{AB},$$

односно $7\overline{AB} = 28\text{cm}$, од што следува

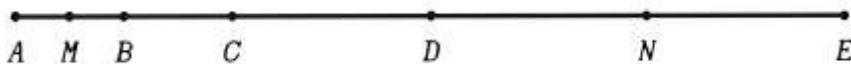
$$\overline{AB} = 4\text{cm}, \quad \overline{BC} = 2\overline{AB} = 8\text{cm}, \quad \overline{CD} = 4\overline{AB} = 16\text{cm}.$$

Бидејќи M е средина на AB имаме $\overline{AM} = \overline{MB} = 2\text{cm}$.

Слично, $\overline{CN} = \overline{ND} = 8\text{cm}$. Конечно добиваме

$$\overline{MN} = \overline{MB} + \overline{BC} + \overline{CN} = 18\text{cm}.$$

14. Нека средината на AB ја означиме со M , а средината на DE ја означиме со N (црт. 9). Бидејќи D е средина на $\overline{AE} = 16\text{cm}$ добиваме $\overline{AD} = \overline{DE} = 8\text{cm}$. Бидејќи C е средина на $\overline{AD} = 8\text{cm}$ важи $\overline{AC} = \overline{CD} = 4\text{cm}$.



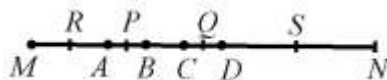
Црт. 9

Бидејќи B е средина на $\overline{AC} = 4\text{cm}$ добиваме $\overline{AB} = \overline{BC} = 2\text{cm}$. Но, M е средина на $\overline{AB} = 2\text{cm}$ па затоа $\overline{AM} = \overline{MB} = 1\text{cm}$ и N е средина на $\overline{DE} = 8\text{cm}$, па затоа $\overline{DN} = \overline{NE} = 4\text{cm}$.

$$\text{Конечно, } \overline{MN} = \overline{AE} - \overline{AM} - \overline{NE} = 16\text{cm} - 1\text{cm} - 4\text{cm} = 11\text{cm}.$$

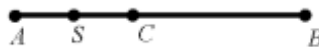
15. Должината на патеката, која ја покрива дадената скала, е еднаква на збирот од должините на хоризонталните отсечки (ширината на скалилото) и збирот на должините на вертикалните отсечки (висината на скалилото). Бидејќи двете скали имаат еднакви димензии, добиваме дека должините на двете патеки се еднакви на $3m + 4m = 7m$.

16. Нека P, Q, R и S се средините на отсечките AB, CD, MA и DN , соодвет-



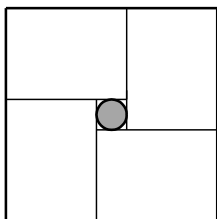
но и нека $\overline{AB} = x$, $\overline{MA} = y$ и $\overline{DN} = z$. Од условот на задачата следува дека $\overline{PQ} = 2x = 28\text{cm}$ и $\overline{RS} = \frac{y}{2} + 3x + \frac{z}{2} = 51\text{cm}$, од каде добиваме $x = 14$ и $y + z = 18\text{cm}$, па е $\overline{MN} = y + z + 3x = 60\text{cm}$.

17. Нека S е средината на AC и нека $\overline{AS} = x$. Тогаш $\overline{SB} = 5x$, па е $\overline{AC} = 2x$ и $\overline{AB} = 6x$, односно $\overline{BC} = 4x$. Од условот на задачата имаме $\overline{BC} - \overline{AC} = 1$, т.е. $4x - 2x = 1$ или $2x = 1$. Конечно, $\overline{AB} = 6x = 3 \cdot 2x = 3\text{cm}$.



18. **Одговор.** Должината на отсечката AB е 6cm .

5.6.3. КВАДРАТ И ПРАВОАГОЛНИК



1. Да можно е, на пример, ако статуата се постави во средината на продавницата, а правоаголниците околу неа, како што е прикажано на цртежот лево.

2. Ако ширината е $x\text{ cm}$, должината е $3x\text{ cm}$, обиколката е $8x\text{ cm}$. Бидејќи обиколката е $8x\text{ cm}$ имаме $8x = 32$, т.е. $x = 32 : 8 = 4$.

Значи, ширината е 4 cm , а должината е $3 \cdot 4\text{ cm} = 12\text{ cm}$.

3. Ако обиколката на правоаголникот е 66 cm , тогаш збирот на должините на две соседни страни е $66 : 2\text{ cm} = 33\text{ cm}$. Нека должината на помалата страна е $x\text{ cm}$. Бидејќи поголемата страна е за 11 cm подолга од помалата страна, нејзината должина е еднаква на $(x + 11)\text{ cm}$. Значи, збирот на две соседни страни на правоаголникот е $(x + x + 11)\text{ cm}$, од што добиваме $x + x + 11 = 33$. Од последната равенка последователно имаме

$$2x = 33 - 11; \quad 2x = 22; \quad x = 11.$$

Според тоа, должините на страните на правоаголникот се 11 cm и $(11 + 11)\text{ cm} = 22\text{ cm}$, а неговата плоштина е $P = 11 \cdot 22\text{ cm}^2 = 242\text{ cm}^2$.

4. Должината на другата страна на правоаголникот е еднаква на $336\text{cm}^2:12\text{cm}=28\text{cm}$, па затоа неговата обиколка е еднаква на

$$2 \cdot (12+28)\text{cm} = 2 \cdot 40\text{cm} = 80\text{cm}.$$

Според тоа, должината на страната на бараниот квадрат е еднаква на $80\text{cm}:4 = 20\text{cm}$, па затоа неговата плоштина е еднаква на $20 \cdot 20\text{cm}^2 = 400\text{cm}^2$.

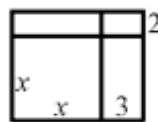
5. Нека L_1 е периметарот на првиот, а L на вториот квадрат. Ако $L_1=4a$ тогаш $L=4 \cdot 3a$. Бидејќи $32=L-L_1=12a-4a=8a$, се добива дека должината на страната на првиот квадрат е 4cm , а на другиот квадрат е 12cm .

6. Разликата меѓу плоштините на правоаголникот и квадратот е еднаква на $(2x+3x+6)\text{cm}^2$. Од друга страна таа е еднаква на 46cm^2 , па затоа

$$2x+3x+6=46$$

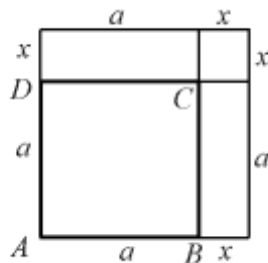
од каде наоѓаме $x=8\text{cm}$.

Според тоа, должините на страните на правоаголникот се еднакви на $x+2\text{cm}=10\text{cm}$ и $x+3\text{cm}=11\text{cm}$.

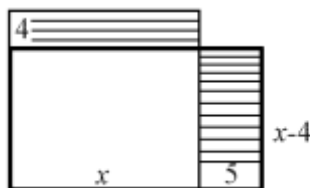


7. **Одговор.** Страната на квадратот е $a=5\text{cm}$, а неговата плоштина е 25cm^2 .

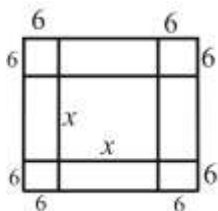
8. Нека a е должината на страната на квадратот чии страни се продолжени за x . Периметарот на новиот квадрат е за $4x$ поголем од периметарот на почетниот квадрат, па затоа $4x=36$, од каде наоѓаме $x=9$. Плоштината на новиот квадрат е за $2ax+x^2$ поголема од плоштината на почетниот квадрат, па затоа $18a+81=135$, од каде наоѓаме $a=3\text{cm}$.



9. Со x да ја означиме должината на страната на добиениот квадрат. Тогаш страните на дадениот правоаголник се $x+5$ и $x-4$. Од еднаквоста на плоштините на квадратот и правоаголникот следува



дека се еднакви площтините на штрафираните делови на цртежот десно. Горниот дел има плоштна $4x$, а десниот дел има плоштина $5(x-4)$. Од равенството $5(x-4)=4x$ следува дека $x=20cm$ е должината на страната на квадратот. Обиколката на квадратот е $4 \cdot 20=80cm$. Страните на правоаголникот се $25cm$ и $16cm$, па неговата обиколка е $2(25+16)=82cm$. Конечно, обиколката на правоаголникот е $2cm$ поголема од обиколката на квадратот.



10. Од цртежот лево се гледа дека разликата на площтините на квадратите, односно площтината на рамката е еднаква на $(4 \cdot 6x + 4 \cdot 6 \cdot 6)cm^2$. Затоа $4 \cdot 6x + 4 \cdot 6 \cdot 6 = 384$ од каде што наоѓаме $24x = 384 - 144$, т.е. $x = 240 : 24 = 10$.

Значи, страната на новодобиениот квадрат е еднаква на $10cm$.

11. Должините на страните на игралиштето се еднакви на $120m = 1200dm$ и $45m = 450dm$, па затоа обиколката на игралиштето е еднаква на $(2 \cdot 1200 + 2 \cdot 450)dm = 3300 dm$.

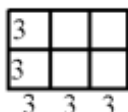
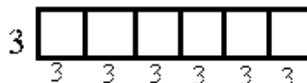
Значи, Мартин ќе направи $3300 : 6 = 550$ чекори.

12. Бидејќи $a \cdot a = 36 = 6 \cdot 6$ добиваме дека страната на квадратот е $6cm$, па затоа неговата обиколка е $4 \cdot 6cm = 24cm$. Ако едната страна на правоаголникот е еднаква на $9cm$, тогаш другата страна е еднаква на $36cm : 9 = 4cm$, па затоа неговата обиколка е $2 \cdot 9cm + 2 \cdot 4cm = 26cm$.

Значи, обиколката на правоаголникот е за $26cm - 24cm = 2cm$ поголема од обиколката на квадратот.

13. Шесте квадрати можеме да ги наредиме во облик на правоаголник на два начини.

i) Ако сите ги наредиме во низа (цртеж десно), тогаш страните на правоаголникот се $3cm$ и $6 \cdot 3 = 18cm$ и неговата обиколка е еднаква на $2 \cdot 3cm + 2 \cdot 18cm = 42 cm$.



ii) Ако ги наредиме во два реда од по три квадрати (цртеж лево), тогаш неговите страни се $2 \cdot 3 = 6cm$ и $3 \cdot 3cm = 9cm$ и неговата обиколка е еднаква на $2 \cdot 6cm + 2 \cdot 9cm = 30cm$.

Како што можеме да забележиме првиот правоаголник има поголема обиколка.

14. Ако ширината на правоаголникот е еднаква на b , тогаш неговата должина е еднаква на $3b$, па затоа обиколката е еднаква на $2b + 2 \cdot 3b = 8b$.

Значи, $8b = 48 \text{ cm}$, т.е. $b = 6 \text{ cm}$.

Страните на правоаголникот се 6 cm и $3 \cdot 6 = 18 \text{ cm}$. Неговата плоштина е $P = 6 \cdot 18 \text{ cm}^2 = 108 \text{ cm}^2$.

15. Бидејќи обиколката на квадратот е 36 cm , неговата страна е еднаква на $36 \text{ cm} : 4 = 9 \text{ cm}$, а плоштината му е еднаква на $9 \cdot 9 \text{ cm}^2 = 81 \text{ cm}^2$.

Плоштината на правоаголникот е исто така 81 cm^2 . Бидејќи едната негова страна е еднаква на 27 cm , добиваме дека другата страна на правоаголникот е еднаква на $81 : 27 \text{ cm} = 3 \text{ cm}$.

Обиколката на правоаголникот е еднаква на $(2 \cdot 27 + 2 \cdot 3) \text{ cm} = 60 \text{ cm}$ и таа е за $(60 - 36) \text{ cm} = 24 \text{ cm}$ поголема од обиколката на квадратот.

16. Страната на квадратот е $1000 : 4 = 250 \text{ cm}$ и таа е еднаква на помалата страна на правоаголникот. Според тоа, поголемата страна на правоаголникот е $(2002 - 2 \cdot 250) : 2 = 1502 : 2 = 751 \text{ cm}$, што значи дека втората страна на помалиот правоаголник е $751 - 250 = 501 \text{ cm}$. Конечно, периметарот на помалиот правоаголник е $2(250 + 501) = 1502 \text{ cm}$.

17. Плоштината на квадратот е $24 \cdot 24 = 576 \text{ cm}^2$. Непознатата страна на правоаголникот е $576 \text{ cm}^2 : 18 \text{ cm} = 32 \text{ cm}$.

Обиколката на квадратот е $4 \cdot 24 \text{ cm} = 96 \text{ cm}$, а обиколката на правоаголникот е $2 \cdot (18 + 32) \text{ cm} = 100 \text{ cm}$.

Значи, обиколката на правоаголникот е за 4 cm поголема од обиколката на квадратот.

18. Бидејќи плоштината на квадратот е $a \cdot a$, а обиколката на квадратот е $4a$, имаме $a \cdot a = 2 \cdot 4a$, т.е. $a \cdot a = 8a$.

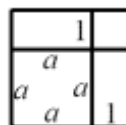
Јасно, $a = 8$, па затоа плоштината на квадратот е еднаква на $8 \cdot 8 \text{ cm}^2 = 64 \text{ cm}^2$, а обиколката е еднаква на $4 \cdot 8 \text{ cm} = 32 \text{ cm}$.

19. Од цртежот десно се гледа дека зголемувањето на плоштината на квадратот е

$$a \cdot 1 + a \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2a + 1,$$

па затоа $2a + 1 = 17$ од што добиваме $a = 8 \text{ cm}$.

Според тоа, обиколката на квадратот е $L = 4a = 4 \cdot 8 \text{ cm} = 32 \text{ cm}$.



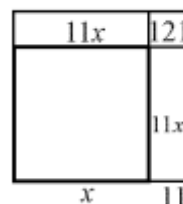
20. Плоштината од 671 cm^2 е збир на плоштините на двата правоаголници и најмалиот квадрат, прикажани на цртежот десно, (зошто?). Ако со x ја означиме должината на страната на малиот квадрат, ја добиваме равенката

$$11x + 121 + 11x = 671,$$

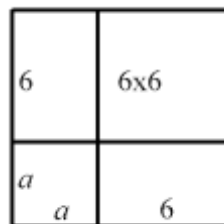
чие решение е $x = 25 \text{ cm}$, па затоа страната на големиот квадрат е 36 cm .

Конечно, збирот на периметрите на двата квадрати е

$$L = 4 \cdot 25 + 4 \cdot 36 = 100 + 144 = 244 \text{ cm}.$$



21. Нека a е страната на помалиот квадрат. Тогаш $a + 6$ е страната на поголемиот квадрат. Да ги поставиме квадратите како на цртежот десно. Големiot квадрат се состои од малиот квадрат, два правоаголници со плоштина $6a$ и квадрат со плоштина 36 . Затоа, $2 \cdot 6a + 36 = 96$, од каде наоѓаме $a = 5 \text{ cm}$. Периметарот на помалиот квадрат е $L = 4a = 20 \text{ cm}$.



22. Ако страната на квадратот е $a \text{ cm}$, тогаш делот кој е одземен од квадратот има плоштина $5a \text{ cm}^2$, а делот кој е додаден на квадратот е со плоштина $2(a-5) \text{ cm}^2$.

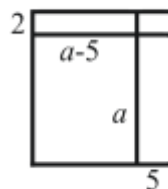
Од досега изнесеното имаме

$$5a - 2(a-5) = 46$$

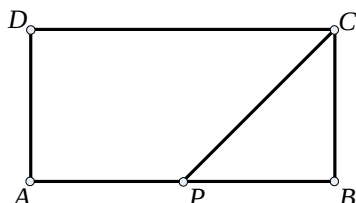
$$3a + 10 = 46$$

$$3a = 36$$

$$a = 12.$$



Значи обиколката на квадратот е $4 \cdot 12 \text{ cm} = 48 \text{ cm}$.



23. Ако означиме дека $\overline{BC} = b$ тогаш $\overline{AP} = \overline{PB} = \overline{AD} = b$. Периметарот на че-

триаголникот $APCD$ е $b+b+2b+\overline{PC}$, а периметарот на триаголникот PBC е $b+b+\overline{PC}$. Од условот на задачата имаме дека периметрите се разликуваат за 20 па се добива $2b=20$, односно $b=10$ cm. За должината на правоаголникот $\overline{AB}=a$ имаме $a=2b=20$ cm, а за плоштината

$$P=ab=10 \cdot 20=200 \text{ cm}^2.$$

24. Од условите на задачата имаме, $2a+2b=14$, т.е. $a+b=7$. Бидејќи a и b се природни броеви, од последната равенка добиваме

$$(a,b) \in \{(6,1), (5,2), (4,3)\}.$$

Притоа правоаголникот со страни 3 и 4 има најголема плоштина

$$P=4 \cdot 3 \text{ cm}^2=12 \text{ cm}^2.$$

25. Од правоаголникот $ABCD$ имаме $2a+2b=100$. Правоаголникот $BKMC$ има две страни чија должина е еднаква на половина од должината на едната страни на правоаголникот $ABCD$ и две страни чија должина е еднаква на должината на другата страна на правоаголникот $ABCD$ (цртеж десно), па затоа $a+2b=70$. Од



$$100=2a+2b=a+(a+2b)=a+70,$$

добиваме $a=30$ cm. Од $a+2b=70$ cm, добиваме $2b=70-a=70\text{cm}-30\text{cm}=40\text{cm}$, т.е. $b=20$ cm.

26. Јасно, квадратчињата се наредени како на цртежот десно. Бидејќи $2dm=20\text{cm}$ и $5dm=50\text{cm}$ во лентата имаме



$20:50=1000$ квадратчиња со страна 1cm, па затоа нејзината обиколка е

$$2 \cdot 1000 + 2 \cdot 1 = 2002 \text{ cm}.$$

27. Во еден ред по “должина” има $84:4+1=22$ овошки, а по “ширина” $32:4+1=9$ овошки. Значи, вкупниот број на овошки во овој овоштарник е $22 \cdot 9=198$.

28. За квадратниот овоштарник е употребено $3 \cdot 4 \cdot 26m=312m$ бодликава жица. За да се загради правоаголниот овоштарник потребно е $2 \cdot (95m+60m)=310m$ бодликава жица. Бидејќи $310m < 312m$ добиваме

дека со жицата од квадратниот овоштарник може да се загради правоаголникот овоштарник.

29. Ако со x ја означиме ширината на правоаголникот, тогаш неговата должина е $4x$, па затоа неговата обиколка е $2 \cdot (4x+x)=10x$. Според тоа, $10x=50$, т.е. $x=5$.

Значи, страните на правоаголникот се 5cm и 20cm , а неговата плоштина е $P=5 \cdot 20\text{cm}^2=100\text{cm}^2$.

За страната на квадратот имаме $a \cdot a=100\text{cm}^2=10\text{cm} \cdot 10\text{cm}$, т.е. $a=10\text{cm}$. Неговата обиколка е $L=4 \cdot 10\text{cm}=40\text{cm}$.

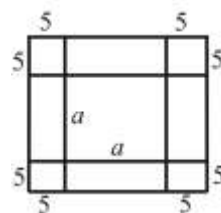
30. Страните на двата квадрати се разликуваат за 10cm (цртеж десно), па затоа обиколката на почетниот квадрат е $4a$, а обиколката на новодобиениот квадрат е $4(a-10)$. Според тоа,

$$4a + 4(a-10)=96,$$

$$8a - 40=96,$$

$$8a=136,$$

$$a=17.$$



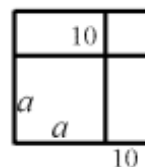
Страната на новодобиениот квадрат е еднаква на $(17-10)\text{cm}=7\text{cm}$.

31. Ако обиколката на правоаголникот е 22cm , тогаш збирот на должината и ширината е $22\text{cm}:2=11\text{cm}$, па затоа страните на правоаголникот можат да бидат следните парови природни броеви $(1,10)$, $(2,9)$, $(3,8)$, $(4,7)$ и $(5,6)$, а плоштините на овие правоаголници се 10cm^2 , 18cm^2 , 24cm^2 , 28cm^2 и 30cm^2 , соодветно.

32. Ако збирот на страните на правоаголникот е еднаков на 13cm , а разликата на страните е еднаква на 5cm , тогаш помалата страна на правоаголникот е еднаква на $(13\text{cm}-5\text{cm}):2=4\text{cm}$, а поголемата на $(13\text{cm}+5\text{cm}):2=9\text{cm}$. Плоштината на правоаголникот е еднаква на $4 \cdot 9\text{cm}^2=36\text{cm}^2$, и таа е еднаква на плоштината на квадратот. Бидејќи $6 \cdot 6=36$, страната на квадратот е еднаква на 6cm .

Обиколката на правоаголникот е еднаква на $2 \cdot (9+4)\text{cm}=26\text{cm}$, а на квадратот на $4 \cdot 6\text{cm}=24\text{cm}$. Значи, обиколката на правоаголникот е за 2cm поголема од обиколката на квадратот.

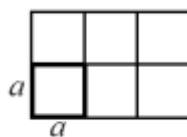
33. Ако страната на дадениот квадрат е еднаква на a cm , тогаш со нејзиното зголемување за $10cm$ добиваме два правоаголници чии страни имаат должини a и $10cm$ и еден квадрат со чија должина на страна е еднаква на $10cm$ (цртеж десно). Нивните плоштини се еднакви на $10a$ и $100cm^2$, соодветно, па затоа



$$2 \cdot 10a + 100 = 200, 20a = 100, a = 5.$$

Значи, обиколката на квадратот е $4a = 4 \cdot 5 = 20cm$, а неговата плоштина е $a \cdot a = 5 \cdot 5cm^2 = 25cm^2$.

34. Правоаголникот со плоштина $96cm^2$ се состои од шест квадрати кои се еднакви на дадениот квадрат, цртеж десно. Значи, плоштината на дадениот квадрат е $96 : 6 = 16cm^2$. Но, плоштината на дадениот



квадрат е $P = a \cdot a$, па затоа $a \cdot a = 16cm^2$, од каде наоѓаме $a = 4cm$. Периметарот на правоаголникот е $O = 10a = 40cm$, а периметарот на квадратот е $L' = 4a = 16cm$. Според тоа, правоаголникот има за $24cm$ поголем периметар.

35. Четири вертикални и пет хоризонтални прави го делат лозјето на 30 еднакви делови. Плоштината на секој од тие делови е еднаква на плоштината P на овоштарникот, па затоа $P = 67200 : 30 = 2240m^2$.

36. Бидејќи $10 \cdot 10 = 100$ страните на квадратите пред измените ќе бидат еднакви на $10cm$. Ако страната на првиот квадрат ја зголемиме за $2cm$, тогаш страната на првиот квадрат е еднаква на $10cm + 2cm = 12cm$, а неговата плоштина на $12 \cdot 12cm^2 = 144cm^2$.

Бидејќи обиколката на вториот квадрат ја зголемуваме за $16cm$, тој ќе има обиколка $4 \cdot 10cm + 16cm = 56cm$. Страната на вториот квадрат ќе биде $56cm : 4 = 14cm$, а плоштина $14 \cdot 14cm^2 = 196cm^2$.

Според тоа, после измените вториот квадрат ќе има за $196cm^2 - 144cm^2 = 52cm^2$ поголема плоштина од првиот квадрат.

37. Плоштината на квадратот е еднаква на $36cm^2$. Од условот на задачата имаме дека должините на страните на правоаголници кои имаат плоштина $36cm^2$ се: 1 и 36, 2 и 18, 3 и 12, 4 и 9cm. Од овие правоаголници

најголема обиколка има првиот и таа изнесува 74cm , а најмала е обиколката на последниот правоаголник: 26cm .

38. Градината заедно со патеката има форма на правоаголник, (направи цртеж), со должина

$$8m + 50\text{cm} + 50\text{cm} = 800\text{cm} + 50\text{cm} + 50\text{cm} = 900\text{cm} = 9m$$

и ширина

$$6m + 50\text{cm} + 50\text{cm} = 600\text{cm} + 50\text{cm} + 50\text{cm} = 700\text{cm} = 7m.$$

Плоштината на тој правоаголник е $9 \cdot 7 = 63m^2$. Бидејќи плоштината на градината е $6 \cdot 8 = 48m^2$, плоштината на патеката е

$$63m^2 - 48m^2 = 15m^2.$$

Според тоа, потребниот материјал е тежок $15 \cdot 20 = 300\text{kg}$.

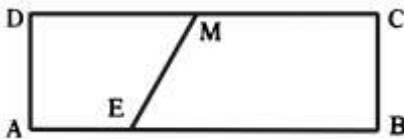
39. Димензиите на базенот се $(31 - 2 \cdot 3)m = 25m$ и $(21 - 2 \cdot 3)m = 15m$. Значи, неговата плоштината е еднаква на $15 \cdot 25m^2 = 375m^2$. Бидејќи плоштината на салата е

$$31 \cdot 21m^2 = 651m^2,$$

добиваме дека плоштината на салата надвор од базенот е еднаква на

$$(651 - 375)m^2 = 276m^2.$$

40. Ако плоштината на правоаголникот е 24cm^2 , тогаш должините на страните на тој правоаголник се следните парови природни броеви: 1 и 24; 2 и 12; 3 и 8; 4 и 6. Обиколките на овие правоаголници се 50cm , 28cm , 22cm и 20cm , соодветно. Според тоа, најголема обиколка има правоаголникот чии страни се 1cm и 24cm .



41. Обиколката на четириаголникот $AEMD$ е 14cm и се состои од отсечките AE , EM , MD и DA , цртеж лево. Обиколката на четириаголникот $EBMC$ е 16cm и се состои од отсечките BE , EM , MC и CB . Значи,

$$\overline{AE} + \overline{EM} + \overline{MD} + \overline{DA} = 14, \quad \overline{BE} + \overline{EM} + \overline{MC} + \overline{CB} = 16.$$

Ако овие обиколки ги собереме добиваме дека

$$\overline{AE} + \overline{EM} + \overline{MD} + \overline{DA} + \overline{BE} + \overline{EM} + \overline{MC} + \overline{CB} = 30.$$

Но, $\overline{AE} + \overline{BE} = 6$, $\overline{MD} + \overline{MC} = 6$, $\overline{DA} = \overline{CB} = 4$, па значи $20 + 2\overline{EM} = 30$.

Според тоа, $\overline{EM} = 5\text{cm}$.

42. Не може да биде $\overline{AB} = 4\text{cm}$, бидејќи тогаш $\overline{AD} = 10\text{cm}$, па периметарот на правоаголникот $AEFD$ ќе биде поголем од 20cm , т.е. поголем од 12cm . Значи,

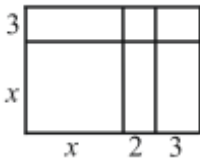
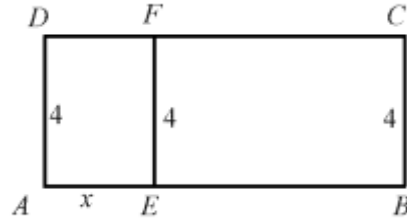
$$\overline{AB} = 10\text{cm} \text{ и } \overline{AD} = \overline{EF} = \overline{BC} = 4\text{cm}.$$

Нека $\overline{AE} = \overline{DF} = x$. Тогаш

$$2x + 2 \cdot 4 = 12,$$

па е $\overline{AE} = x = 2\text{cm}$ и $\overline{EB} = 10 - 2 = 8\text{cm}$.

Конечно, плоштината на правоаголникот $EBCF$ е $P = 8 \cdot 4 = 32\text{cm}^2$.



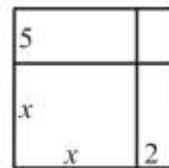
43. Нека ширината на почетниот правоаголник е x . Тогаш неговата должина е $x+2$. Ако ги продолжиме страните на правоаголникот по 3cm , тогаш добиваме нов правоаголник. Разликата на плоштините на новодобиениот и почетниот правоаголник е 105cm^2 . Таа се појавува заради двата правоаголници со страни x и 3cm , еден правоаголник со страни 3 и 2cm и квадрат со страна 3cm , па затоа

$$2 \cdot 3x + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3 = 105, 6x = 90, \text{ т.е. } x = 15\text{cm}.$$

Значи, должините на страните на почетниот правоаголник се 15cm и 17cm . Неговата плоштина е еднаква на $15 \cdot 17 = 255\text{cm}^2$, а обиколката на $2 \cdot (15 + 17)\text{cm} = 64\text{cm}$.

44. Бидејќи димензиите на куќата се $12\text{m} \cdot 12\text{m}$, плацот мора да биде и подолг и поширок од 12m . Бидејќи столбовите се поставени на 5m еден од друг, добиваме дека на секоја страна на плацот мора да има 4 или повеќе столбови, а сите вкупно се 14. Ова е можно само ако на две страни има 5 столба, а на другите две страни има по 4 столба (во темињата на плацот имаме по еден столб, па затоа тие се броени за две соседни страни, т.е. два пати). Значи, страните на плацот се 20 и 15m . Плоштината на плацот е $15 \cdot 20\text{m}^2 = 300\text{m}^2$, плоштината на основата на куќата е $12 \cdot 12\text{m}^2 = 144\text{m}^2$. Значи, плоштината на дворот е $(300 - 144)\text{m}^2 = 156\text{m}^2$.

45. Ако страните на квадратот ги зголемиме за 2cm , односно за 5cm , тогаш се добива правоаголник кој има плоштина поголема од плоштината на квадратот и која е еднаква на збирот од плоштините на три право-



голници со страни 5 и x , 5 и 2, 2 и x , па затоа имаме $5x+5\cdot 2+2x=52$, од каде што добиваме $7x+10=52$, т.е. $x=6\text{cm}$.

Плоштината на квадратот е $6\cdot 6\text{cm}^2=36\text{cm}^2$.

46. Бидејќи збирот на обиколките е 3200m , а обиколките се еднакви добиваме дека секоја обиколка е $3200\text{m}:2=1600\text{m}$. Страната на квадратот е $1600\text{m}:4=400\text{m}$. Ширината на правоаголникот е два пати помала од страната на квадратот, па затоа таа е $400\text{m}:2=200\text{m}$. Должината на правоаголникот е $(1600\text{m}-2\cdot 200\text{m}):2=600\text{m}$.

За плоштината на правоаголникот имаме $200\cdot 600\text{m}^2=120000\text{m}^2$.

47. Бидејќи $100\cdot 1=100$, $100=2\cdot 50$, $100=4\cdot 25$, $100=5\cdot 20$ и $100=10\cdot 10$ се единствените можности на запишување на бројот 100 како производ на два природни броја, можеме да составиме 5 различни правоаголници со страни:

3 и $3\cdot 100=300\text{cm}$ и обиколка $2\cdot (3+300)=606\text{cm}$;

$2\cdot 3=6$ и $3\cdot 50=150\text{cm}$ и обиколка $2\cdot (6+150)=312\text{cm}$;

$5\cdot 3=15$ и $3\cdot 20=60\text{cm}$ и обиколка $2\cdot (15+60)=150\text{cm}$;

$4\cdot 3=12$ и $3\cdot 25=75\text{cm}$ и обиколка $2\cdot (12+75)=174\text{cm}$;

$10\cdot 3=30$ и $3\cdot 10=30\text{cm}$ и обиколка $2\cdot (30+30)=120\text{cm}$,

при што последниот е квадрат.

Значи, страните на правоаголникот со најголема обиколка се 3 и 300cm , а страните на правоаголникот со најмала обиколка се 15 и 60cm .

48. Плоштината на добиениот квадрат е $P_{\text{кв}}=(a+b)^2=100\text{cm}^2$, значи $a+b=10\text{cm}$. Бидејќи должините на страните на правоаголникот се природни броеви, за a и b можни се некои од следниве парови вредности: $a=1, b=9$; $a=2, b=8$; $a=3, b=7$; $a=4, b=6$; $a=5, b=5$; $a=6, b=4$; $a=7, b=3$; $a=8, b=2$ или $a=9, b=1$. Правоаголникот со најмала плоштина $P_{\text{пр}}=ab$, се добива за $a=1, b=9$ или $a=9, b=1$ и изнесува $P_{\text{пр}}=9\text{cm}^2$.

49. Бидејќи плоштината на една правоаголна плочка е $22\text{cm}\cdot 11\text{cm}$, а потребни се 200 плочки, плоштината на подот е 48400cm^2 . Плоштината на една квадратна плочка е $20\text{cm}\cdot 20\text{cm}=400\text{cm}^2$. Значи, потребни се $48400:400=121$ квадратна плочка со страна 20cm .

50. Збирот на должината и ширината на салонот е $56\text{m}:2=28\text{m}$. Бидејќи должината е за 10m поголема од ширината, удвоената ширина

изнесува $28m-10m=18m$. Според тоа, ширината на салонот е еднаква на $18m:2=9m$, а неговата должина е еднаква на $10m+9m=19m$.

Од досега кажаното следува дека квадратниот дел на салонот има страна чија должина е $9m$, а должините на страните на правоаголниот дел на салонот се $9m$ и $10m$. Плоштината на квадратниот дел на салонот е еднаква на $9 \cdot 9m^2=81m^2$, а на правоаголниот дел на $9 \cdot 10m^2=90m^2$. Бидејќи за покривање на $3m^2$ се потребни по два пакети плочи, бројот на пакетите со бели плочи е $(81:3) \cdot 2=54$, а бројот на пакетите со сиви плочи е $(90:3) \cdot 2=60$.

51. Да ги означиме должините на страните како на цртежот десно.

Тогаш

$$ab = 75, ac = 150 \text{ и } bd = 225,$$

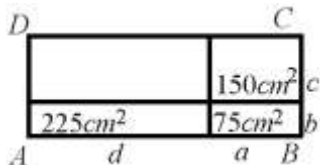
па е $ac \cdot bd = 150 \cdot 225$. Оттука,

$$75cd = 150 \cdot 225, \text{ т.е. } cd = 450.$$

Според тоа, плоштината на квадратот изнеува

$$75 + 150 + 225 + 450 = 900cm^2,$$

што значи дека неговата страна е $30cm$, па затоа периметарот му е $120cm$.



52. Нека a и b се должините на страните на некој од добиените правоаголници. Можните вредности за a и b , во сантиметри, се дадени во табелата:

a	1	1	1	1	...	1	1	2	2	2	2	...	2	2	3	3	4	4
b	2	4	6	8	...	18	20	2	3	4	5	...	9	10	4	6	4	5

а) Збирот P на периметрите е еднаков на удвоениот збир од броевите во првиот и вториот ред од горната табела. Значи, $P=450cm$.

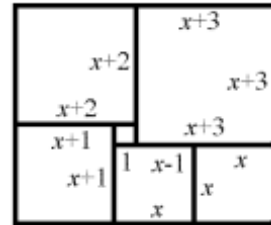
б) Збирот B на плоштините е еднаков на збирот од производите на броевите a со соодветните броеви b од горната табела. Значи, $B=284cm^2$.

53. Имаме $506 = 2 \cdot 253 = 2 \cdot 11 \cdot 23 = 22 \cdot 23$, па оттука заклучуваме дека $a = 23m$ и $b = 22m$. Но, тоа значи дека $x = a - b = 23 - 22 = 1m$. Според тоа, за плоштината на овошната градина добиваме

$$P = 4ab + x^2 = 4 \cdot 506 + 1^2 = 2025m^2.$$

Да забележиме дека $a + b = 45m$, па плоштината на овошната градина може да се најде според формулата $P = (a + b)^2 45^2 = 2025m^2$.

54. Со x да ја означиме должината на страната на долниот среден квадрат. Тогаш, од цртежот десно лесно заклучуваме дека должината на страната на горниот десен квадрат е еднаква на $x+3$ и дека таа истовремено е еднаква на $x+(x-1)=2x-1$. Според тоа, $x+3=2x-1$, т.е. $x=4$. Значи, должините на страните на правоаголникот се



$$x+3+x+2=2x+5=13cm \text{ и } x+x+3=2x+3=11cm,$$

па затоа неговиот периметар е $48cm$, а неговата плоштина е $143cm^2$.

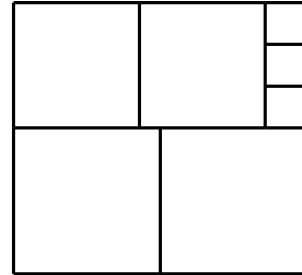
55. Периметарот на најмалиот квадрат е $2cm$, па должината на неговата страна е $\frac{1}{2}cm$.

Тоа значи дека должината на страна од вториот по големина квадрат е $\frac{3}{2}cm$. Должината на

едната страна на правоаголникот е $\frac{7}{2}cm$. Збирот

на должините на две страни на најголемиот квадрат е еднаков на збирот од должините на две страни од средниот квадрат и една страна од најмалиот квадрат, па должината на страна на најголемиот квадрат е $\frac{7}{4}cm$. Оттука должината на правоаголникот е $\frac{14}{4}$

cm , а ширината $\frac{13}{4}cm$. Затоа периметарот на правоаголникот е $\frac{54}{4}cm$.



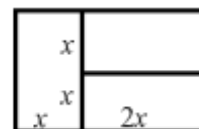
56. Сечењето е прикажано на цртежот десно. Петар добил осум квадрати и тоа: три квадрати со страна $7cm$, еден квадрат со страна $5cm$, два квадрати со страна $2cm$ и два квадрати со страна $1cm$. Збирот на нивните периметри е:



Збирот на нивните периметри е:

$$3 \cdot 4 \cdot 7 + 4 \cdot 5 + 2 \cdot 4 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \cdot 1 = 128cm.$$

57. Од цртежот е јасно дека едната страна на малиот правоаголник е двапати поголема од другата негова страна. Ако должината на малата страна е x ,



тогаш должината на големата страна е $2x$, па затоа $2(x + 2x) = 60$, од каде наоѓаме $x = 10\text{cm}$. Значи обемот на големиот правоаголник е

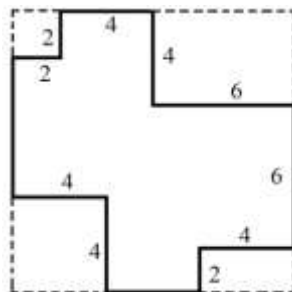
$$2(3x + 2x) = 2(30 + 20) = 100\text{cm}$$

и тоа е обемот на квадратот. Според тоа, страната на квадратот е $100 : 4 = 25\text{cm}$ и неговата плоштина е

$$P = 25 \cdot 25 = 625\text{cm}^2.$$

58. Дадената фигура можеме да ја сместиме во квадрат со страни 12cm (види цртеж). Сега нејзината плоштина можеме да ја пресметаме ако од плоштината на квадратот во кој ја сместивме ги одземеме плоштините на:

- квадрат со страна 2cm ,
- квадрат со страна 4cm ,
- правоаголник со страни 2cm и 4cm , и
- правоаголник со страни 4cm и 6cm .



Според тоа, плоштината на дадената фигура е:

$$\begin{aligned} P &= 12 \cdot 12 - 2 \cdot 2 - 4 \cdot 4 - 2 \cdot 4 - 4 \cdot 6 \\ &= 144 - 4 - 16 - 8 - 24 \\ &= 92\text{cm}^2. \end{aligned}$$

59. Одговор. На поголемата страна има 9 столбови, а на помалата има 6 столбови. За оградување на дворот се потребни 26 столбови.

60. Одговор. 9т пченка.

61. Одговор. $40\text{m}^2 36\text{dm}^2$.

62. Одговор. Периметарот на квадратот е 880cm , а периметарот на добиениот правоаголник е 898cm .

63. Одговор. 14400 плочки.

64. Одговор. Периметарот на помалиот квадрат е 16cm , а неговата плоштина е 16cm^2 .

65. Одговор. Страната на помалиот квадрат е 25cm , а на поголемиот е 36cm . Збирот на периметрите на квадратите изнесува 244cm .

66. Одговор. Должината на страната е 978m .

67. Одговор. Плоштината на бавчата е 9995m^2 .

68. Фигурата претставена на цртежот се состои од цели квадратчиња, па затоа пресметувањето на нејзината плоштина ќе го направиме со броење на штрафираните квадратчиња. Во случајов тој број е 38, што значи дека плоштината на фигурата е 38cm^2 .

69. Како што можеме да забележиме штрафираната фигура на цртежот се состои од квадратчиња и правоаголни триаголници. Затоа, за да ја пресметаме нејзината плоштина доволно е да ги собереме плоштината која ја зафаќаат квадратчињата и плоштината која ја зафаќаат правоаголните триаголници. За да ја пресметаме плоштината која ја зафаќаат правоаголните триаголници ќе искористиме дека ако вака  залепиме два такви триаголници ќе добиеме квадратче. Оттука ќе следува дека плоштината на еден ваков правоаголен триаголник е еднаква на половина од плоштината на квадратчето. Сега да ги преброиме квадратчињата и триаголниците. Имаме, 28 квадратчиња и 16 триаголници, па значи бараната плоштина е еднаква на $28 + 16 : 2 = 36\text{cm}^2$.

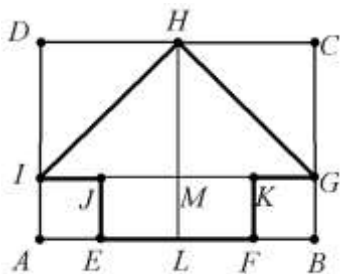
70. Како и во претходната задача и овде ќе ги преброиме квадратчињата и триаголниците, при што и повторно ќе користиме дека плоштината на два триаголника е еднаква на плоштината на едно квадратче. Во случајов имаме 26 квадратчиња и 18 триаголници, што значи дека вкупната плоштина е еднаква на плоштината на $26 + 18 : 2 = 35$ квадратчиња. Но, секое квадратче има плоштина еднаква на $b\text{cm}^2$, па затоа вкупната плоштина на штрафираната фигура е еднаква на $35b\text{cm}^2$.

71. Дадената фигура е составена од 20 триаголници и 24 квадратчиња. Според тоа, нејзината плоштина е еднаква на плоштината на $24 + 20 : 2 = 34$ квадратчиња. Од друга страна плоштината на фигурата е

еднаква на 136cm^2 , па затоа плоштината на едно квадратче е еднаква на $136:34=4\text{cm}^2$. Но, плоштината на квадрат со страна a е $P=a\cdot a$, па затоа

$$a\cdot a=4\text{cm}^2=2\cdot 2\text{cm}^2,$$

од каде добиваме дека должината на страната на квадратчињата во мрежата е 2cm .

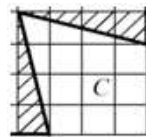


72. Нека се L и M средините на отсечките EF и JK . Тогаш $\overline{EL}=\overline{LF}=2$, па затоа плоштините на квадратите $AEJI$, $ELMJ$, $LFKM$ и $FBKG$ се еднакви. Исто така, плоштините на триаголниците IHD , IMH , GCH и GHM се еднакви, па затоа плоштината на многуаголникот $EFGKHIJ$ е еднаква на половина од плоштината на правоаголникот, т.е.

$$P=\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{AD}=24\text{cm}^2.$$

73. Плоштината на целиот квадрат во кој е впишана штрафираната површина е $10\cdot 10=100\text{cm}^2$. Нештрафираниот дел се состои од четири правоаголни триаголници. Триаголникот A е половина од правоаголник со страни 3 и 8, па затоа неговата плоштина е $(3\cdot 8):2=12\text{cm}^2$; триаголникот B е половина од правоаголник со страни 2 и 9, па затоа неговата плоштина е $(2\cdot 9):2=9\text{cm}^2$; триаголникот C е половина од правоаголник со страни 1 и 8, па затоа неговата плоштина е $(1\cdot 8):2=4\text{cm}^2$ и триаголникот D е половина од правоаголник со страни 2 и 7, па затоа неговата плоштина е $(2\cdot 7):2=7\text{cm}^2$. Според тоа, плоштината на нештрафираниот дел е еднаква на $12\text{cm}^2+9\text{cm}^2+4\text{cm}^2+7\text{cm}^2=32\text{cm}^2$, што значи дека плоштината на штрафираниот дел е $100\text{cm}^2-32\text{cm}^2=68\text{cm}^2$.

74. Плоштината на целиот квадрат во кој е впишана штрафираната површина е $10\cdot 10=100\text{cm}^2$. Нештрафираниот дел се состои од два триаголника и еден четириаголник. Триаголникот A е половина од правоаголник со страни 3 и



10, па затоа неговата плоштина е еднаква на $(3 \cdot 10) : 2 = 15 \text{ cm}^2$. Триаголникот B е половина од правоаголник со страни 2 и 10, па затоа неговата плоштина е еднаква на $(2 \cdot 10) : 2 = 10 \text{ cm}^2$. Останува да ја пресметаме плоштината на четириаголникот C . За таа цел ќе го искористиме цртежот десно. Плоштината на четириаголникот C се добива кога од плоштината на квадрат со страна 4 се одземат плоштините на двата триаголници со страни 1 и 4. Според тоа, плоштината на четириаголникот C е еднаква на

$$4 \cdot 4 - (4 \cdot 1) : 2 - (4 \cdot 1) : 2 = 16 - 2 - 2 = 12 \text{ cm}^2.$$

Конечно, плоштината на штрафираната фигура е еднаква на

$$100 - 15 - 10 - 12 = 63 \text{ cm}^2.$$

75. Должините на страните на правоаголникот $ABCD$ се еднакви на 4 cm и 8 cm , па затоа неговата плоштина е $4 \cdot 8 = 32 \text{ cm}^2$. Плоштината на правоаголникот на фигурата која ја нацртал Илија ја добиваме ако од плоштината на правоаголникот $ABCD$ ги одземеме плоштините на еден правоаголник со страни 2 cm и 4 cm и три правоаголници со страни 1 cm и 3 cm , (зошто?). Според тоа, плоштината на фигурата која ја нацртал Илија е еднаква на $32 - 2 \cdot 4 - 3 \cdot 2 \cdot 1 = 18 \text{ cm}^2$.

5.6.4. КОЦКА И КВАДАР

1. Бидејќи коцката има 12 раба, за должината на работ на коцката добиваме $(204:12) \text{ cm} = 17 \text{ cm}$. Плоштината и волуменот на коцката се

$$P = 6 \cdot 17 \cdot 17 \text{ cm}^2 = 1734 \text{ cm}^2, V = 17 \cdot 17 \cdot 17 \text{ cm}^3 = 4913 \text{ cm}^3.$$

2. Волуменот на добиеното тело е еднаков на збирот од волумените на коцките од кои е составено, т.е. тој е еднаков на

$$V = 3 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 13 \text{ cm}^3 = 6591 \text{ cm}^3.$$

Плоштината на телото е еднаква на збирот на плоштините на 14 квадрати со страна 13 (зошто?), т.е. таа е еднаква на

$$P = 14 \cdot 13 \cdot 13 \text{ cm}^2 = 2366 \text{ cm}^2.$$

3. Плоштината на една страна на коцката е 16 cm^2 , па затоа обвивката на квадарот содржи $352:16=22$ страни на коцката. Ако коцките ги по-

ставиме во ред една зад друга, тогаш добиениот квадрат има 2 од овие 22 страни на коцката како основи, а останатите 20 ја формираат обвивката. Бидејќи обвивката е составена од 4 еднакви страни, добиваме дека секоја страна на обвивката содржи $20:4=5$ страни на квадратот.

Според тоа, наредени се 5 коцки (нацртај цртеж).

4. Волуменот на една штица е $V=400\cdot 30\cdot 5\text{cm}^3=60000\text{cm}^3=60\text{dm}^3$. Бидејќи 1m^3 штици тежи 500kg , а носивоста на камионот е $3\text{t}=3000\text{kg}$ можат да се натоварат $3000:500=6\text{m}^3$ штици. Според тоа, на камионот можат да се натоварат

$$6\text{m}^3 : 60\text{dm}^3 = 6000\text{dm}^3 : 60\text{dm}^3 = 100 \text{ штици.}$$

5. Постојат неколку такви квадрати (направи цртежи), а нивните плоштини се:

а) За квадратот кој се добива ако коцките се наредени во еден ред страните се 5cm , 5cm и 60cm , па затоа

$$P=2\cdot(5\cdot 5+5\cdot 60+60\cdot 5)=1250\text{cm}^2.$$

б) За квадратот кој се добива ако коцките се наредени во два реда од по шест коцки страните се 5cm , 10cm и 30cm , па затоа

$$P=2\cdot(5\cdot 10+10\cdot 30+30\cdot 5)=1000\text{cm}^2.$$

в) За квадратот кој се добива ако коцките се наредени во три реда од по четири коцки страните се 5cm , 15cm и 20cm , па затоа

$$P=2\cdot(5\cdot 15+15\cdot 20+20\cdot 5)=950\text{cm}^2.$$

г) За квадратот кој се добива ако коцките се наредени во висина во два реда со по две коцки во ред страните се 10cm , 15cm и 10cm , па затоа

$$P=2\cdot(10\cdot 10+10\cdot 15+15\cdot 10)=800\text{cm}^2.$$

6. Волуменот на квадратот е

$$2\cdot 4\cdot 8\text{m}^3=64\text{m}^3.$$

Бидејќи квадратот и коцката имаат исти волумени добиваме

$$a\cdot a\cdot a=64\text{m}^3=4\cdot 4\cdot 4\text{m}^3,$$

што значи дека страната на коцката е $a=4\text{m}$. Плоштината на коцката е $6\cdot 4\cdot 4\text{m}^2=96\text{m}^2$, а на квадратот е $2(2\cdot 4+2\cdot 8+4\cdot 8)=112\text{m}^2$, т.е. квадратот има поголема плоштина од коцката.

7. Бидејќи волуменот на квадратот е

$$V=385\text{cm}^3=5\cdot 77\text{cm}^3=5\cdot 7\cdot 11\text{cm}^3,$$

а броевите 5, 7 и 11 не можат да се запишат како производ на други природни броеви добиваме дека страните на квадратот се 5cm, 7cm и 11cm. Според тоа, неговата плоштина е

$$P=2 \cdot (5 \cdot 7 + 5 \cdot 11 + 7 \cdot 11) \text{cm}^2 = 334 \text{cm}^2.$$

8. При расекувањето на коцките добиваме онолку кубни сантиметри колку што изнесува волуменот на коцките, односно добиваме

$$(1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 \cdot 4) \text{cm}^3 = 100 \text{cm}^3.$$

Според тоа, волуменот на плочата ќе биде еднаков на 100cm^3 . Бидејќи дебелината на плочата е 1cm, а нејзиниот волумен е еднаков на 100cm^3 таа има страни 1cm, 10cm и 10cm. Нејзината плоштина ќе биде

$$P=2 \cdot (1 \cdot 10 + 1 \cdot 10 + 10 \cdot 10) \text{cm}^2 = 240 \text{cm}^2.$$

9. За да се поплучи 1km од патеката потребни се $1000 \cdot 10 \cdot 10 = 100000$ коцки со волумен 1dm^3 , т.е. потребни се 100m^3 од грамадата. Грамадата има волумен $100 \cdot 100 \cdot 100 \text{m}^3 = 1000000 \text{m}^3$ па затоа со добиените коцки може да се поплучи патека од

$$1000000 : 100 = 10000 \text{km}.$$

Велосипедистот дневно минува $5 \cdot 20 = 100 \text{km}$, што значи, за да ја мине патеката треба да вози $10000 : 100 = 100$ денови.

10. Ако волуменот на втората коцка е $V=a \cdot a \cdot a$, тогаш волуменот на првата коцка е $V_1=8a \cdot a \cdot a=2a \cdot 2a \cdot 2a$, т.е. работ на првата коцка е 2a, па значи нејзината плоштина е $P_1=6 \cdot 2a \cdot 2a=4 \cdot 6 \cdot a \cdot a=4P$.

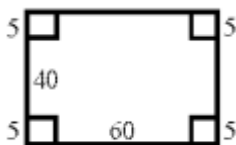
Значи, плоштината на првата коцка е четири пати поголема од плоштината на втората коцка.

11. Плоштината на правоаголникот е $12 \cdot 8 \text{cm}^2 = 96 \text{cm}^2$. Значи, плоштината на коцката е $6a \cdot a = 96 \text{cm}^2$, што значи

$$a \cdot a = 96 : 6 \text{cm}^2 = 16 \text{cm}^2 = 4 \cdot 4 \text{cm}^2,$$

од што следува $a=4 \text{cm}$.

Конечно, волуменот на коцката е $V=4 \cdot 4 \cdot 4 \text{cm}^3 = 64 \text{cm}^3$.



12. Збирот на должината и ширината на лимот е 100cm. Ако со $3x$ ја означиме должината, тогаш ширината е две третини од $3x$, па затоа ширината е $2x$. Значи, $3x+2x=100$, т.е. $5x=100$ односно

$$x=100:5=20cm.$$

Според тоа, должината е $a=3\cdot 20cm=60cm$, а ширината е
 $b=2\cdot 20cm=40cm$.

Плоштината на кутијата е

$$P=(60\cdot 40-4\cdot 25)cm^2=(2400-100)cm^2=2300cm^2.$$

Бидејќи плоштината на секој од исечените квадрати е еднаква на $25cm^2$ добиваме дека нивните страни се еднакви на $5cm$, па затоа рабовите на добиената кутија се $60-2\cdot 5cm=50cm$, $40-2\cdot 5cm=30cm$ и $5cm$ и волуменот на истата е

$$V=50\cdot 30\cdot 5cm^3=7500cm^3.$$

13. Базенот е наполнет две третини, па затоа водата во базенот е длабока $2m$, а $1m$ од длабочината на базенот не е натопен. Според тоа волуменот на водата во базенот е $V=50\cdot 20\cdot 2m^3=2000m^3$.

Бидејќи $1m^3$ има 1000 литри, во базенот се наоѓаат $2000\cdot 1000=2000000$ литри вода.

Водата не ја натопува следната плоштина:

$$P=2\cdot 50\cdot 1m^2+2\cdot 20\cdot 1m^2=140m^2.$$

14. Поделбата може да се направи по работ од $24cm$ и во тој случај за да се добијат 4 коцки останатите два раба мораат да бидат по $6cm$ (направи цртеж). Притоа плоштината на квадратот е

$$P=2(6\cdot 6+6\cdot 24+6\cdot 24)=628cm^2.$$

Поделбата може да се направи по работ од $24cm$ на два дела, па тогаш другиот раб мора да е $12cm$, а третиот $24cm$ (направи цртеж). Во овој случај плоштината е $P=2304cm^2$.

Слично, имаме уште два квадрати кога работ од $24cm$ не се дели. Тоа со квадратите со рабови:

а) $24, 48, 48cm$ и плоштина $P=9216cm^2$.

б) $24, 24, 96cm$ и плоштина $P=10368cm^2$.

15. Со расекувањето се добиваат $5\cdot 5\cdot 5=125$ мали коцки.

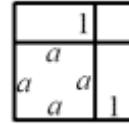
Со три црвени страни има 8 мали коцки, тоа се коцките кои ги содржат темињата на големата коцка.

Со две обоени страни ќе има на секој раб на големата коцка по три мали коцки, па затоа нивниот број е $12\cdot 3=36$.

Со само една обоена страна ќе имаме на секоја страна $3 \cdot 3 = 9$ мали коцки или вкупно $9 \cdot 6 = 54$ мали коцки.

Необоени ќе бидат $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27 = 125 - (54 + 36 + 8)$ мали коцки.

16. Кога страната на квадратот се зголеми за 1 cm (цртеж лево), тогаш плоштината на квадратот се зголемува за $(a \cdot 1 + a \cdot 1 + 1)\text{ cm}^2 = (2a + 1)\text{ cm}^2$. Бидејќи вкупното зголемување на плоштината на коцката е еднакво на секоја од нејзините шест страни, на секоја страна плоштината се зголемува за



$$366\text{ cm}^2 : 6 = 61\text{ cm}^2.$$

Според тоа, $2a + 1 = 61$, т.е. $2a = 60$, па страната на коцката е $a = 30\text{ cm}$.

Плоштината на коцката е $P = 6 \cdot a \cdot a = 5400\text{ cm}^2$, а волуменот е $V = a \cdot a \cdot a = 27000\text{ cm}^3$.

17. Волуменот на коцката е $V_1 = 8 \cdot 8 \cdot 8\text{ cm}^3 = 512\text{ cm}^3$. Значи, волуменот на квадратот што има рабови 8 , 8 и $x\text{ cm}$ е $V_2 = 512 : 4\text{ cm}^3 = 128\text{ cm}^3$. Имаме, $8 \cdot 8 \cdot x = 128$ т.е. $x = 2\text{ cm}$.

Плоштината на коцката е $P = 6 \cdot 8 \cdot 8\text{ cm}^2 = 384\text{ cm}^2$, а плоштината на разгледуваниот квадрат е $P = 2(8 \cdot 8 + 8 \cdot 2 + 2 \cdot 8)\text{ cm}^2 = 192\text{ cm}^2$. Значи, квадратот има $384 : 192 = 2$ пати помала плоштина од коцката.

18. Со a да ја означиме должината на работ на коцката, $a > 1$. Тогаш должините на рабовите на добиениот квадрат се природните броеви a , $a + b$, $a + c$ и неговиот волумен е

$$a(a + b)(a + c) = 105\text{ cm}^3.$$

Бидејќи $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$ и $a < a + b$, $a < a + c$, добиваме $a = 3\text{ cm}$. Не можеме да определиме дали $a + b = 5$, $a + c = 7$ или обратно, но тоа не е неопходно. За плоштината на квадратот имаме

$$P = 2(a(a + b) + a(a + c) + (a + b)(a + c)) = 2(3 \cdot 5 + 3 \cdot 7 + 5 \cdot 7)\text{ cm}^2 = 142\text{ cm}^2.$$

19. Ќе ги залепиме коцките така што ќе покриеме најголем можеен дел од нивните плоштини. Очигледно дека нема да можеме да ја покриеме целата страна на најголемата коцка, но најголем дел од неа ќе покриеме ако на неа ги залепиме останатите три коцки при што ќе покриеме $9 + 4 + 1 = 14\text{ cm}^2$. На коцката со раб 3 cm можеме целосно да покриеме една страна ако неа ја залепиме на големата коцка и делови од друга страна ако на неа ги залепиме коцките со страни 1 и 2 cm . На тој начин од коцката со

раб 3cm ќе покриеме $9+4+1=14\text{cm}^2$. Од коцката со раб 2cm лепејки ја за поголемите коцки веќе покривме две страни и ако на неа ја залепиме малата коцка вкупно ќе покриеме $4+4+1=9\text{cm}^2$. Така од најмалата коцка покривме три страни со вкупна плоштина 3cm^2 . Ваквиот распоред е возможен ако на една иста страна од најголемата коцка ги залепиме трите помали коцки и најмалата коцка ги допира истовремено сите три коцки.

Плоштината на добиеното тело изнесува

$$(6(25+9+4+1)-(14+14+9+3))\text{cm}^2=194\text{cm}^2.$$

20. Должината на страната на коцката е $5\text{m}=500\text{cm}=5000\text{mm}$, па затоа при расекувањето секоја страна ја делиме на $5000:5=1000$ делови. Бидејќи расекувањето го правиме по должина, висина и ширина ние добиваме

$$1000 \cdot 1000 \cdot 1000 = 1\,000\,000\,000$$

мали коцки со страна 5mm . Според тоа, висината на столбот ќе биде

$$5\,000\,000\,000\text{mm} = 5\,000\,000\text{m} = 5\,000\text{km}.$$

21. Плоштината која треба да се молериса е еднаква на

$$(2 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 6 + 6 \cdot 4 \cdot 6)\text{m}^2 = 78\text{m}^2.$$

Бидејќи за молерисување на 4m^2 е потребен 1kg боја, а $78=4 \cdot 19+2$ добиваме дека за да се молерисаат 76m^2 потребни се 19kg боја, а за останатите 2m^2 е потребен уште половина килограм боја. Но, една кутија содржи 5kg боја, па затоа треба да земеме 4 кутии од по 5kg и притоа половина килограм од купената боја нема да се искористи при молерисувањето.

22. За да останатото парче сирење има најголема можна плоштина треба при секое отсекување да се сече парче со најмала можна плоштина. Парчињата кои се отсекуваат имаат облик на квадар со висина 1cm . Значи плоштината на отсеченото парче ќе биде најмала кога плоштините на основите се најмали можни. Со други зборови секогаш треба да се сече паралелно на страната која има најмала плоштина. Првото отсекување може да се направи паралелно на било која страна, бидејќи сите страни имаат еднаква плоштина. После тоа се добиваат два квадрати со стран 10cm и четири правоаголници со страни 9cm и 10cm . Второто отсекување треба да се направи паралелно на еден од овие правоаголници. После ова сечење се добива квадар со основа квадрат со страна 9cm и висина 10cm . Третото

отсекување треба да се направи паралелно на основата на овој квадар. После тоа се добива коцка со раб 9cm . Значи, бараната плоштина е $6 \cdot 9 \cdot 9\text{cm}^2 = 486\text{cm}^2$.

23. Волуменот на сапунот е еднаков на $4 \cdot 8 \cdot 2\text{cm}^3 = 64\text{cm}^3$. Послед 7 дена останале $2 \cdot 3 \cdot 1\text{cm}^3 = 8\text{cm}^3$. Значи за 7 дена се потрошиле $(64 - 8)\text{cm}^3 = 56\text{cm}^3$ сапун, т.е. секој ден се трошеле по $56\text{cm}^3 : 7 = 8\text{cm}^3$ сапун. Според тоа, сапунот ќе се потроши за $64 : 8 = 8$ дена.

24. Зголемувањето на нивото на водата всушност е висината на квадар со основа правоаголник со страни 8m и 5m и волумен еднаков на волуменот на коцката со раб 2m . Ако со x го означиме покачувањето на нивото на водата во cm , тогаш добиваме $800 \cdot 500 \cdot x = 200 \cdot 200 \cdot 200$, од каде што наоѓаме $x = 20\text{cm}$.

25. а) Плоштината на добиеното тело можеме да ја пресметаме директно, но полесно е да забележиме дека секоја од отсечените коцки има три “внатрешни” и три “надворешни” страни за почетната коцка. Затоа плоштината на добиеното тело е еднаква на плоштината на коцката, т.е. $6 \cdot 10 \cdot 10\text{cm}^2 = 600\text{cm}^2$.

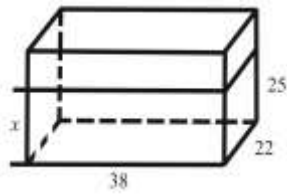
б) Бројот 608 ќе го запишеме во вид $608 = 96 + 5 \cdot 100 + 12$. Значи, бројот 608 е запишан на “седмиот спрат”. Аналогно за бројот 798 имаме $798 = 96 + 7 \cdot 100 + 2$, т.е. бројот 798 е запишан на “деветтиот спрат”.

26. Прво ќе пресметаме колкава е вкупната плоштина на сидовите и таваните S на сите осум соби во куќата. Очигледно, дека S е збир од удвоената плоштина на основата (двата тавани), од плоштините на околните страни и од одбоената плоштина на трите преградени страни. Тогаш,

$$S = (2 \cdot 20 \cdot 10 + 20 \cdot 6 + 10 \cdot 6 + 20 \cdot 6 + 10 \cdot 6 + 3 \cdot 2 \cdot 10 \cdot 6)\text{m}^2 = 1120\text{m}^2.$$

Јасно, од оваа плоштина треба да ја извадиме плоштината која ја зафаќаат вратите и прозорците и така ќе ја добиеме плоштината која треба да се молериса. Имаме, $(1120 - 8 \cdot 6)\text{m}^2 = 1072\text{m}^2$. Бидејќи за 4m^2 е потребно 1kg боја добиваме дека за да ја молерисаме целата плоштина потребни се $1072 : 4 = 268\text{kg}$ боја.

27. а) Нека $x\text{ cm}$ е длабочината на водата во аквариумот. Бидејќи $1\text{l} = 1000\text{cm}^3$ добиваме дека



$$20 \cdot 40x \text{ cm}^3 = 16 \cdot 1000 \text{ cm}^3,$$

т.е. $x=20$.

б) Плоштината на стаклото кое е искористено за да се направи аквариумот е

$$S = (2(40 \cdot 25 + 20 \cdot 25) + 40 \cdot 20) \text{ cm}^2 = 3800 \text{ cm}^2 = 38 \text{ dm}^2.$$

28. Обиколката на правоаголникот е $2(500+300)m=1600m$, од каде што следува дека страната на квадратната нива е еднаква на $1600m:4=400m$. Волуменот на снегот на правоаголната нива е

$$50000 \cdot 30000 \cdot 15 \text{ cm}^3 = 500 \cdot 3 \cdot 15 \text{ m}^3 = 22500 \text{ m}^3,$$

а на квадратната нива е

$$40000 \cdot 40000 \cdot 15 \text{ cm}^3 = 400 \cdot 4 \cdot 15 \text{ m}^3 = 24000 \text{ m}^3.$$

Значи, на квадратната нива има

$$(24000 - 22500) \text{ m}^3 = 1500 \text{ m}^3$$

снег повеќе отколку на правоаголната.

29. Во садот имаме $1m \cdot 20cm \cdot 3dm = 100 \cdot 20 \cdot 30 \text{ cm}^3 = 60000 \text{ cm}^3$. Волуменот на аквариумот е $120cm \cdot 4dm \cdot 5dm = 120 \cdot 40 \cdot 50 \text{ cm}^3 = 240000 \text{ cm}^3$. Според тоа, волуменот на аквариумот е $240000:60000=4$ пати поголем од волуменот на садот, па значи ќе се наполни $\frac{1}{4}$ од аквариумот.

30. За една отворена канта за сирење потребно е

$$2 \cdot 2 + 4 \cdot 2 \cdot 4 = 36 \text{ dm}^2 \text{ лим.}$$

За 50-те канти потребно е

$$50 \cdot 36 = 1800 \text{ dm}^2 = 18 \text{ m}^2 \text{ лим.}$$

Значи, потребни се $18 \cdot 35 = 630$ денари за да се купи лимот од кој ќе се направат кантите.

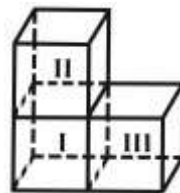
31. Со a , b и c да ги означиме должините на трите рабови на квадратот. Дадено е дека $a \cdot b = 150$, $a \cdot c = 30$ и $b \cdot c = 20$. Тогаш,

$$150 \cdot 30 \cdot 20 = (a \cdot b) \cdot (a \cdot c) \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b \cdot c) \cdot (a \cdot b \cdot c) = V \cdot V,$$

каде со V е означен волуменот на каменот. Бидејќи $V \cdot V = 90000$ добиваме $V = 300 \text{ mm}^3$. Но, 1 mm^3 од каменот тежи $\frac{1}{100} g$, па затоа целиот камен тежи

$$300 \cdot \frac{1}{100} g = 3 \cdot 100 \cdot \frac{1}{100} g = 3g.$$

32. Трите коцки имаат вкупно $3 \cdot 6 = 18$ страни. Четири од овие страни се залепени две по две, види цртеж, па затоа телото има $18 - 4 = 14$ страни. Секоја страна е квадрат со плоштина $56 \text{ cm}^2 : 14 = 4 \text{ cm}^2$. Според тоа, работ на секоја коцка е еднаков на 2 cm .



а) Волуменот на една коцка е 8 cm^3 , па затоа волуменот на добиеното тело е $3 \cdot 8 \text{ cm}^3 = 24 \text{ cm}^3$.

б) Од сите 36 рабови на коцките не се рабови на добиеното тело: 6 рабови на првата коцка, 4 рабови на втората коцка и 4 рабови на третата коцка. Затоа телото има $36 - 14 = 22$ рабови, секој долг по 2 cm . Конечно, должината на рабовите на телото е $22 \cdot 2 \text{ cm} = 44 \text{ cm}$.

33. На секоја страна имаме по четири мали коцки кои имаат барем една црна страна и секоја од овие коцки има по две црни страни кои се наоѓаат на соседни страни од големата коцка. Затоа од големата коцка се извадени $(6 \cdot 4) : 2 = 12$ мали коцки. Според тоа, волуменот V на добиеното тело е $V = (27 - 12) \text{ cm}^3 = 15 \text{ cm}^3$. Плоштината S на телото е $S = (6 \cdot 5 + 8 \cdot 6) \text{ cm}^2 = 78 \text{ cm}^2$, бидејќи осумте аголни коцки учествуваат со 6 страни во формирањето на површината на телото, а шесте централни коцки со по 5 страни.

34. а) Лесно се гледа дека димензиите на почетното парче дрво биле должина 6 cm , ширина 3 cm и висина 7 cm .

б) Волуменот на телото е еднаков на $(6 \cdot 3 \cdot 7 - 2 \cdot 2 \cdot 7 - 2 \cdot 1 \cdot 7) \text{ cm}^3 = 84 \text{ cm}^3$. Бидејќи 1 cm^3 дрво тежи 3 g добиваме дека преостанатото парче дрво тежи $84 \cdot 3 = 252 \text{ g}$.

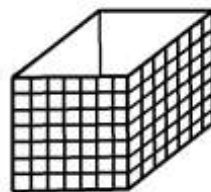
в) Плоштината на добиеното тело е еднаква на

$$2(6 \cdot 7 + 3 \cdot 7 + (6 \cdot 3 - 2 \cdot 2 - 2 \cdot 1)) \text{ cm}^2 = 150 \text{ cm}^2$$

и како за 1 cm^2 се користи $\frac{1}{3} \text{ g}$ лак добиваме дека за лакирање на целото тело се потребни $150 \cdot \frac{1}{3} \text{ g} = 50 \cdot 3 \cdot \frac{1}{3} \text{ g} = 50 \text{ g}$ лак.

35. Могни се две решенија. Во првиот случај сите 14 коцкички со две обоени страни припаѓаат на еден раб на коцката со должина 14 cm . Тогаш се обоени две соседни страни на коцката и има вкупно

$$14 \cdot 14 + 14 \cdot 13 = 378 \text{ обоени коцкички.}$$



Според тоа, има

$$14 \cdot 14 \cdot 14 - 378 = 2366 \text{ необоени коцкички.}$$

Во вториот случај, 14 двостано обоени коцкички припаѓаат на два раба со должина 7cm , а обоени се три страни. Тогаш има $2 \cdot 7 \cdot 7 + 5 \cdot 7 = 133$ обоени коцкички, а необоени се $7 \cdot 7 \cdot 7 - 133 = 210$ коцкички.

36. Волуменот на квадратот е $2 \cdot 5 \cdot 91 = 910\text{cm}^3$, а волуменот на една од коцките е $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000\text{cm}^3$. Според тоа, збирот на волумените на останатите три коцки со страни a, b, c ќе биде

$$a^3 + b^3 + c^3 = 2002 - 910 - 1000 = 92\text{cm}^3.$$

Нека е $a \geq b \geq c$. Работ a е еднаков на 4cm , бидејќи ако $a > 5\text{cm}$ добиваме дека

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq 125 > 92\text{cm}^3,$$

а ако $a \leq 3\text{cm}$, тогаш

$$a^3 + b^3 + c^3 \leq 3 \cdot 3^3 = 81 < 92\text{cm}^3.$$

Затоа

$$b^3 + c^3 = 92 - 3^3 = 28\text{cm}^3,$$

од каде на сличен начин наоѓаме $b = 3\text{cm}$ и $c = 1\text{cm}$.

37. Работ на најголемата можна расечена коцка е

$$\text{НЗД}(6, 9, 12, 15) = 3.$$

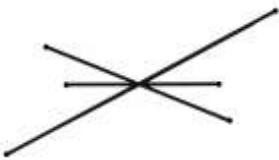
Дадената коцка се расекува на $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ коцки, а квадратот на 60 такви коцки. Од вкупно 68 расечени коцки не може да се состави нова коцка, бидејќи се потребни 64 или 125 расечени коцки.

38. Нека a е работ на коцката за чие обложување е потребно да се искористи хартијата. Плоштината на коцката е $P = 6a^2$ и како плоштината на хартијата е $27 \cdot 72 = 1994\text{cm}^2$ добиваме дека со хартијата треба да се обложи коцка чија страна има плоштина $1994 : 6 = 324\text{cm}^2$. Но, квадрат со страна 18cm има плоштина $18 \cdot 18 = 324\text{cm}^2$, што значи дека работ на бараната коцка е 18cm .

39. Да претпоставиме дека кутијата може да се пополни со дадените трупчиња. Тогаш ја разгледуваме страната на кутијата со

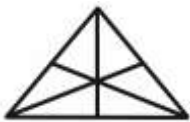
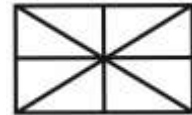
димензии 3×5 . Таа страна мора да биде пополнета со правоаголници со страни 2×1 и квадрати со димензии 2×2 . Меѓутоа, ако е пополнет правоаголникот, тогаш тој ќе има парна плоштина што не е можно. Значи претпоставката дека кутијата може да се пополни не е точна.

5.6.5. ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ



1. Очигледно најмногу прави имаме кога дадените отсечки, кои не лежат на исти прави имаат крајни точки такви што било кои три не лежат на иста права. Во тој случај (види цртеж) имаме $(6 \cdot 5) : 2 = 15$ прави.

2. Има вкупно 16 триаголници: 8 поединечни, 4 составени од два мали триаголници и 4 составени од 4 мали триаголници (цртеж десно).



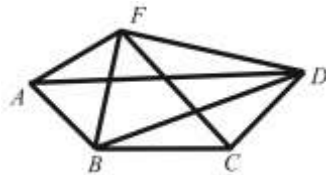
3. Од цртежот гледаме дека има 6 отсечки и на секоја имаме по три точки кои определуваат по три отсечки, па вкупно имаме $6 \cdot 3 = 18$ отсечки.

Вкупниот број на триаголници е $1 + 6 + 3 + 6 = 16$.

4. Секоја од петте точки со останатите 4 точки дава 4 различни отсечки. Значи, од 5 точки можат да се повлечат $5 \cdot 4 = 20$ отсечки, при што секоја отсечка е броена двапати. Затоа вистинскиот број на повлечените отсечки е $20 : 2 = 10$.

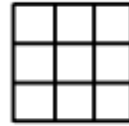
5. Дадените точки да ги означиме со A, B, C, D и E (цртеж десно). Да ги преброиме триаголниците. Имаме, $ABC, ACD, ADE, ABE, ACE, ABD, BCD, BCE, BDE, CDE$.

Значи, со овие точки се одредени вкупно 10 триаголници.



6. Одговор. Бројот на триаголниците определен со овие точки е 45.

7. На цртежот има 8 отсечки со должина 3cm . На секоја има по 4 точки, кои определуваат по 6 отсечки. Според тоа, вкупниот број отсечки е $8 \cdot 6 = 48$. Имаме 9 квадрати со плоштина 1cm^2 , 4 квадрати со плоштина 4cm^2 и 1 квадрат со плоштина 9cm^2 . Според тоа, вкупниот број квадрати е 14.



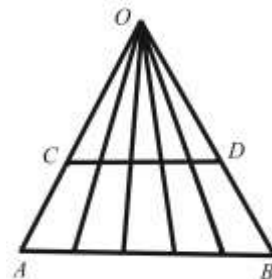
8. Хоризонтални прави има 9. Две од тие прави можеме да избереме на $(9 \cdot 8) : 2 = 36$ начини. Слично, две од 9 вертикални прави можеме да избереме на 36 начини. Секој правоаголник еднозначно е определен со две хоризонтални и две вертикални прави, па правоаголници (меѓу кои се и квадратите) има $36 \cdot 36 = 1296$. Да ги преброиме квадратите. Квадрати со страна 1cm има $8 \cdot 8 = 64$, со страна 2cm има $7 \cdot 7 = 49$, со страна 3cm има $6 \cdot 6 = 36$, со страна 4cm има $5 \cdot 5 = 25$, со страна 5cm има $4 \cdot 4 = 16$, со страна 6cm има $3 \cdot 3 = 9$, со страна 7cm има $2 \cdot 2 = 4$ и со страна 8cm има $1 \cdot 1 = 1$. Според тоа, правоаголници кои не се квадрати се:

$$1296 - (64 + 49 + 36 + 25 + 16 + 9 + 4 + 1) = 1092.$$

9. Најмногу прави ќе имаме ако не постојат три крајни точки на отсечки такви што лежат на иста права. Во овој случај од секоја од овие $4 \cdot 2 = 8$ точки низ останатите 7 точки можат да се повлечат 7 прави. Значи, бројот на правите е $8 \cdot 7 = 56$ и бидејќи секоја права е броена двапати добиваме дека вкупниот број прави е $56 : 2 = 28$.

10. Низ четирите точки кои не лежат на заедничката права p , која ги содржи точките 1, 2 и 3, можеме да повлечеме $(4 \cdot 3) : 2 = 6$ прави. Низ секоја од овие четири точки и низ точките 1, 2 и 3 можеме да повлечеме три различни прави, па затоа имаме уште $4 \cdot 3 = 12$ прави, т.е. досега имаме $12 + 6 = 18$ прави, што заедно со правата p која ги содржи точките 1, 2 и 3 дава вкупно 19 различни прави.

11. На отсечката AB имаме 6 точки. Овие 6 точки одредуваат $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$ отсечки. И на отсечката CD имаме 15 отсечки. Од точката O имаме 6 отсечки и на секоја по 3 отсечки, па значи



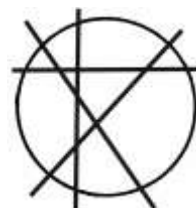
вкупно имаме 18 отсечки. Конечно, на цртежот имаме $15+15+18=48$ отсечки.

За бројот на триаголниците имаме: 15 отсечки на AB со точката O формираат 15 триаголници и 15 отсечки на CD со точката O формираат 15 триаголници.

Значи, бројот на триаголниците е $15+15=30$.

12. Од една точка може да се повлечат 6 прави кои минуваат низ останатите точки, а од 7 точки можат да се повлечат $7 \cdot 6 = 42$ прави. Овој број треба да го поделиме со 2, бидејќи секоја права ја броиме двапати. Значи, бројот на правите е $42:2=21$.

13. Било кои 4 прави, такви што две по две се сечат и било кои три отсечки не минуваат низ иста точка го делат кругот на 11 делови (види цртеж).



14. Нека триаголникот го означиме со ABC , со прав агол кај темето A . Ако повлечеме отсечка која ја поврзува средината E на страната BC со темето кај правиот агол A , тогаш добиваме два еднакви дела. Сега ги поврзуваме средините M на AC и N на AB со точката E и добиваме четири еднакви делови.



а)



б)

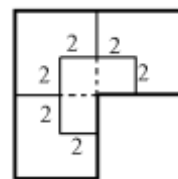
15. Еден таков распоред е даден на цртежот а) лево.

16. Еден од можните распореди на трендафилите е даден на цртежот б) лево.

17. Должината на синцирот е $12 \cdot 6cm + 5mm + 5mm = 73cm$.

18. Низ секоја точка може да се повлечат по 4 прави кои не минуваат низ темињата на триаголникот. Такви точки има 6, а секоја права се брои двапати, па затоа бараниот број прави е еднаков на $6 \cdot 4 : 2 = 12$.

19. Дадената фигура можеме да ја поделиме како што е прикажано на цртежот десно. Понатаму, плоштината на еден од четирите делови ја наоѓаме кога од плоштината на квадратот со страна 4 ја одземеме

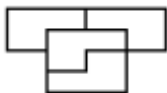


плоштината на квадратот со страна 2, т.е.

$$P = 4^2 - 2^2 = 12.$$

За периметарот имаме

$$O = 2 \cdot 4 + 4 \cdot 2 = 16.$$



20. Бараната поделба е дадена на цртежот лево.

21. Има вкупно 13 триаголници и тоа: $ABC, ACD, DBC, DBA, AFB, ADF, DFG, FBC, MCG, GSC, MSC, MPN, CDQ$.

22. На цртежот се прикажани следните триаголници: $AFI, FBJ, BGJ, GCK, CHK, HDL, DEL, EAI, FBG, GCH, HDE, EAF, ABM, BCM, CDM, DAM, ABC, ACD, DAB, BCD$. Значи, вкупно има 20 триаголници.

23. Со зададените точки се определени отсечките:

$$AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE, DE,$$

што значи вкупно 10 отсечки. Исто така се определени и 10 триаголници и тоа:

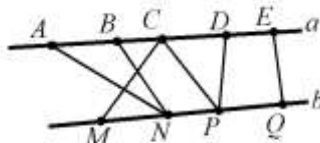
$$ABC, ABD, ABE, ACD, ACE, ADE, BCD, BCE, BDE, CDE.$$

Според тоа, имаме ист број на отсечки и триаголници.

24. а) Секои две точки определуваат една отсечка, па имаме $(9 \cdot 8) : 2 = 36$ отсечки.

б) Секоја отсечка на правата a со една точка на правата b определува еден триаголник и секоја отсечка на правата b со една точка на правата a определува еден триаголник. На правата a имаме $(5 \cdot 4) : 2 = 10$ отсечки, а на правата b имаме $(4 \cdot 3) : 2 = 6$ отсечки. Според тоа, вкупно имаме $4 \cdot 10 + 5 \cdot 6 = 70$ триаголници.

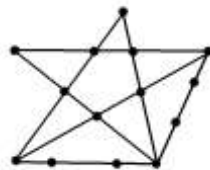
в) Секоја отсечка на правата a и секоја отсечка на правата b определуваат еден трапез или паралелограм. Такви четириаголници има $6 \cdot 10 = 60$.



25. **Одговор.** Можеме да формираме 18 различни триаголници.

26. **Одговор.** Вкупно има 26 отсечки и 18 триаголници.

28. Бараното распоредување може да се изврши на повеќе начини. Едно од можните решенија е дадено на цртежот десно.



29. а) Ако x и y се должините на страните, тогаш

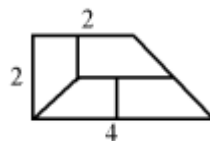
$$x + y = 1001 = 1 + 1000 = 2 + 999 = 3 + 998 = \dots = 500 + 501,$$

што значи дека има 500 различни правоаголници.

б) Имаме $xy = 2002 = 1 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$, па е

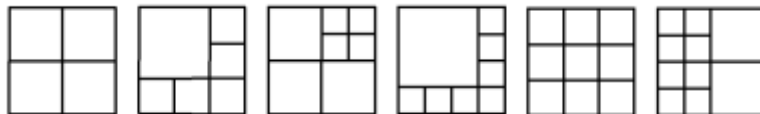
$$xy = 1 \cdot 2002 = 2 \cdot 1001 = 7 \cdot 286 = 11 \cdot 182 = 13 \cdot 154 = 14 \cdot 143 = 22 \cdot 91 = 26 \cdot 77,$$

што значи дека има 8 различни правоаголници.



30. Решението е дадено на цртежот десно.

31. Квадратот не може да се подели на два помали квадрати. На 4, 6, 7, 8, 9 и 10 може да се подели. Можни поделби се дадени на цртежот долу.



32. Упатство. Земи два триаголника еден во друг и поврзи ги нивните темиња.

33. Три парни последователни природни броеви се од облик

$$2k, 2k + 2, 2k + 4,$$

каде k е некој природен број. Според условот на задачата, треба да определиме k таков што

$$2k + (2k + 2) + (2k + 4) = 72$$

$$6k + 6 = 72$$

$$6k = 66$$

Од последната равенка $k = 11$.

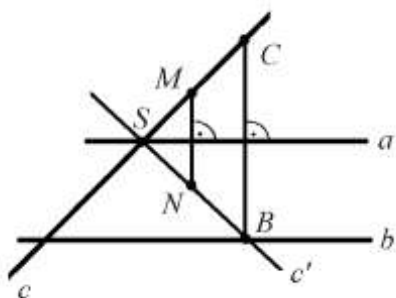
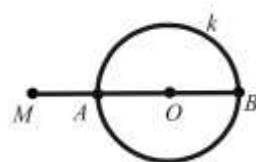
Значи, должините на страните на триаголникот се 22, 24 и 26.

34. Повлекуваме права p низ точката M и центарот O на кружницата. Оваа права ја сече кружницата во точките A и B (цртеж десно).

Точката A е најблиска точка до точката M ,
а точката B е најоддалечена точка од точката M .
Според тоа,

$$\overline{AM} = \overline{MO} - \overline{AO} = (30 - 18)mm = 12mm,$$

$$\overline{MB} = \overline{MO} + \overline{OB} = (30 + 18)mm = 48mm.$$



B ја сече правата c во бараната точка C .

35. Нека S е пресечната точка на правите a и c . Избираме произволна точка M , $M \neq S$, на правата c и ја определуваме точката N , симетрична на M во однос на правата a . Тогаш $SN = c'$ е симетрична на правата c во однос на правата a . Правата c' ја сече правата b во точка B . Нормалата на правата a во точката

36. Точките кои се наоѓаат на симетралата од отсечката AB се еднакво оддалечени од нејзините крајни точки A и B . Затоа, бараната точка C е пресек на симетралата на AB и правата p . Задачата може да има едно единствено решение, ако AB не е нормална на p , може да нема решение, ако AB е нормална на p и при тоа p не е нејзина симетрала и може да има бесконечно многу решенија, ако p е симетрала на отсечката AB , тогаш секоја точка $C \in p$ важи $\overline{AC} = \overline{BC}$.

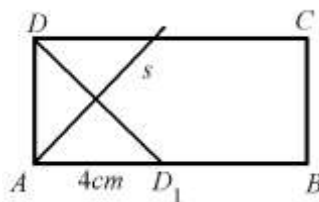
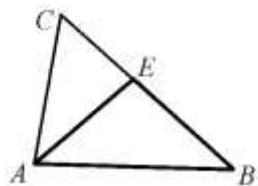
37. Точката D_1 е симетрична со D во однос на s припаѓа на страната AB и

$$\overline{AD} = \overline{AD_1} = 4cm.$$

Оттука

$$\overline{AB} = \overline{AD_1} + \overline{BD_1} = 11cm.$$

Обиколката на правоаголникот е

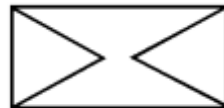


$$O = 2(\overline{AB} + \overline{AD}) = 30cm.$$

38. Периметарот на триаголникот AEC е (види цртеж лево):

$$\overline{AE} + \overline{EC} + \overline{CA} = (\overline{BE} + \overline{EC}) + \overline{CA} = \overline{BC} + \overline{CA} = 14cm.$$

39. Нека $a = 27cm$. Од $P = ab = 351$ наоѓаме $b = 351 : 27 = 13cm$. Бараниот обем на фигурата претставена на цртежот десно е



$$L = 2 \cdot 27 + 4 \cdot 13 = 106cm.$$

40. Збирот на должините на кои било две страни на триаголникот мора да е поголем од должината на третата страна. Нека $a \leq b \leq c$. Тогаш мора да биде $a + b > c$. Можните должини на страните се наведени во следнава табела:

a	1	2	3	4	3	4	5
b	7	6	5	4	6	5	5
c	7	7	7	7	6	6	5

РЕКОА ЗА МАТЕМАТИКАТА

Правата математика одсекогаш била убава, а правата уметност од секогаш била вистинита.

В. Девиде

Природата е огромна книга во која е напишана науката. Таа е постојано отворена пред нашите очи, ама човекот не може да ја разбере доколку предходно не го научи јазикот и буквите со кои е напишана. А таа е напишана со јазикот на математиката.

Галилео Галилеј

ЛИТЕРАТУРА

1. Andrić, V.: Pripremni zadaci za matematička takmičenja, DMS, Beograd, 1991
2. Andrić, V.; Ilić, V.; Lazarević, B.; Tomić, I.: Pripremni zadaci za matematička takmičenja za učenike osnovnih škola, DMS, Beograd, 1988
3. Андрић, В.: Математика X (приручник за припремање за такмичење ученика основних школа од IV до VIII разред), Круг, Београд, 1996
4. Златилов, В.; Тонова, Т.; Цветкова, И.; Пендалиева, В.: Математическа читанка (4 клас), Труд & прозорец, София, 2000
5. Ilić, N. V.: Odabrani zadaci sa matematičkih takmičenja 5. i 6. razred, DMS, Beograd, 1991
6. Косев, К.: Сборник от задачи по математика за изявени ученици в 5 клас, Модул, София, 1994
7. Косев, К.: Сборник от задачи по математика за изявени ученици в 4 клас, Модул, София, 1993
8. Лазаревић, Б.: Припремни задаци за математичка такмичења за ученике IV разреда основне школе, ДМС, Београд, 1990
9. Малчески, Р.; Малчески, А.; Аневска, К.: Решавање на текстуални задачи, СММ, Скопје, 2012
10. Малчески, Р.; Димовски, Д.; Тренчевски, К. Вовед во теорија на броеви, МММ, Скопје, 1993
11. Малчески, Р.; Малчески, А.; Аневска, К.: Вовед во елементарна теорија на броеви, СММ, Скопје, 2014
12. Раковска, Д.; Тонов, И. и др.: Математически състезания 4-7 клас, Регалия 6, София, 1993
13. Раковска, Д.; Тонов, И. и др.: Математически състезания 4-7 клас, Втора част, Регалия 6, София, 1995
14. Stojanović, V.: Vodić za šampione (pripreme takmičenja za IV, V i VI razred), Matematiskop, Beograd, 1999
15. Тренчевски, К.; Малчески, Р.; Димовски, Д.: Занимлива математика, МММ, Скопје, 1994
16. Тюфекчиев, И.; Лесов, Х.: Задачи за извънкласна работа по математика в VI и V клас, СМБ, София, 1985

17. Христова, М.; Витанов, Т.; Миланова, Д.; Лозанов, Ч.: Клуб математика за всеки (5. клас), Анубис, София, 1998