

Ристо Малчески
Здравко Цветковски
Скопје

МАТЕМАТИЧКА ИНДУКЦИЈА I

Како што знаеме, во множеството природни броеви $\mathbf{N} = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$ операциите собирање и множење се целосно изводливи, а додека одземањето и делењето се делумни операции во $\mathbf{N}$. Во оваа статија нема да го разгледуваме воведувањето на множеството природни броеви и операциите во него, но ќе забележиме, дека всушност Пеановите аксиоми се тие кои го дефинираат множеството $\mathbf{N}$. Притоа имаме: множеството $\mathbf{N}$ е непразно и важи:

1. $1 \in \mathbf{N}$.
2. За секој природен број k , постои единствен природен број k^+ , кој го нарекуваме *следбеник* на k .
3. Ако $k^+ = n^+$, тогаш $k = n$.
4. $1 \neq k^+$, за секој $k \in \mathbf{N}$.
5. Ако $S \subseteq \mathbf{N}$, $1 \in S$ и од $k \in S$ следува дека $k^+ \in S$, тогаш $S = \mathbf{N}$.

На значењето на Пеановите аксиоми нема посебно да се задржуваме, меѓутоа да забележиме дека со првата и четвртата аксиома се обезбедува бројот 1 да припаѓа на множеството природни броеви и тој да е “првиот” природен број. Понатаму, со втората аксиома се задаваат броевите $2 = 1^+$, $3 = 2^+$ итн., а нивната единственост ја овозможуваат третата и четвртата аксиома. За нашите разгледувања, од посебно значење е петтата аксиома, која уште е позната како *аксиома за индукција* и која всушност обезбедува единственост на множеството природни броеви. Всушност, единственоста на множеството природни броеви лежи во основата на *принципот на математичка индукција* (ПМИ), кој е еден од основните методи за докажување на математички тврдења и кој гласи:

Ако треба да ја докажеме точноста на некое математичко тврдење T , кое зависи од природниот број n , и ако за T знаеме дека:

- T е точно за природниот број 1;
- од претпоставката дека T е точно за некој природен број $k \geq 1$, следува дека T е точно и за $k+1$;

тогаш ова тврдење T е точно за секој природен број n .

Да разгледаме еден пример.

Пример 1. Докажи дека збирот на првите n природни броеви е еднаков на

$$\frac{n(n+1)}{2}.$$

Решение. Да означиме $S_1 = 1$; $S_2 = 1 + 2$; ..., $S_n = 1 + 2 + \dots + n$ т.е. S_n е збирот на првите n природни броеви. Треба да докажеме дека

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}. \quad (1)$$

Прв чекор. Да провериме дека оваа формула е точна за бројот 1. Навистина $S_1 = 1$, а од (1) добиваме дека $S_1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1$.

Втор чекор. Да претпоставиме дека за некој природен број $k \geq 1$ формулата (1) е точна, т.е. за збирот на првите k природни броеви знаеме дека $S_k = \frac{k(k+1)}{2}$.

Ќе докажеме дека формулата (1) важи и за следниот природен број $k+1$, т.е. дека $S_{k+1} = \frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$. Имаме:

$$S_{k+1} = \underbrace{(1 + 2 + \dots + k)}_{S_k} + (k+1) = S_k + (k+1).$$

Сега од претпоставката во вториот чекор следува

$$S_{k+1} = S_k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = (k+1)\left[\frac{k}{2} + 1\right] = (k+1)\frac{k+2}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Според тоа, во првиот чекор докажавме дека условот i) од ПМИ е исполнет, а во вториот чекор дека условот ii) од ПМИ е исто така исполнет. Следствено, согласно со ПМИ формулата (1) важи за секој природен број $n \geq 1$. ♦

Забелешка 1. Често пати проверката во првиот чекор се нарекува *база на индукцијата* (БИ), а претпоставката во вториот чекор *индуктивна претпоставка* (ИП). ♦

Забелешка 2. Со помош на аксиомата за индукција може да се докаже и вториот принцип на математичка индукција, кој гласи:

Ако треба да ја докажеме точноста на некое математичко тврдење T , кое зависи од природниот број n , и ако за T знаеме дека:

iii) T е точно за некој конкретен природен број m ;

iv) од претпоставката дека T е точно за некој природен број $k \geq m$, следува дека T е точно и за $k+1$;

тогаш ова тврдење е точно за секој природен број $n \geq m$. ♦

Пример 2. За секој природен број m означуваме $m! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot m$ и по дефиниција ставаме $0! = 1$. Докажи дека

$$(2n)! < 2^{2n} (n!)^2, \text{ за } n > 1.$$

Решение. Чекор 1. БИ: За $n = 2$ имаме

$$(2 \cdot 2)! = 4! = 24 < 64 = 2^{2 \cdot 2} (2!)^2,$$

т.е. неравенството важи.

Чекор 2. ИП: Нека претпоставиме дека за некој природен број $k \geq 2$ важи $(2k)! < 2^{2k} (k!)^2$.

Од ИП за $k+1$ имаме

$$\begin{aligned} [2(k+1)]! &= (2k)!(2k+1)(2k+2) < 2^{2k} (k!)^2 (2k+1)2(k+1) \\ &< 2^{2k+1} k!(k+1)k!2(k+1) = 2^{2(k+1)} [(k+1)!]^2 \end{aligned}$$

т.е. неравенството важи и за $k+1$, што значи важи за секој $n > 1$. ♦

Забелешка 3. При докажувањето на некои тврдења се користи и таканаречената *индукција со двојна основа*, која симболички е искажана на следниов начин:

v) T е точно за природните броеви m и $m+1$;

vi) од претпоставката дека T е точно за некои природни броеви k и $k+1$, $k \geq m$, следува дека T е точно и за $k+2$;

тогаш ова тврдење е точно за секој природен број $n \geq m$. ♦

Пример 3. Броевите $a_n, n=0,1,\dots$ се зададени со формулите $a_0 = 2, a_1 = \frac{5}{2}$ и

$$a_n = \frac{5}{2} a_{n-1} - a_{n-2}, \text{ за } n > 1. \quad (2)$$

Докажи дека за секој $n=0,1,2,3,\dots$ важи

$$a_n = 2^n + 2^{-n}. \quad (3)$$

Решение. Чекор 1. БИ: За $n=0$ и $n=1$ имаме

$$a_0 = 2 = 1 + 1 = 2^0 + 2^{-0} \text{ и } a_1 = \frac{5}{2} = 2 + \frac{1}{2} = 2^1 + 2^{-1}$$

што значи дека формулата (3) важи за $n=0$ и $n=1$.

Чекор 2. ИП: Нека претпоставиме дека формулата (3) важи за $n=k$ и $n=k+1$, т.е. дека важи $a_k = 2^k + 2^{-k}$ и $a_{k+1} = 2^{k+1} + 2^{-(k+1)}$.

Ако ја искористиме релацијата (2) и индуктивната претпоставка, тогаш за $n=k+2$ добоваме

$$\begin{aligned} a_{k+2} &= \frac{5}{2} a_{k+1} - a_{k+2-2} = \frac{5}{2} a_{k+1} - a_k = \frac{5}{2} (2^{k+1} + 2^{-(k+1)}) - (2^k + 2^{-k}) \\ &= 5 \cdot 2^k + 5 \cdot 2^{-k-2} - 2^k - 2^{-k} = 4 \cdot 2^k + 2^{-k-2} + 4 \cdot 2^{-k-2} - 2^{-k} \\ &= 2^2 2^k + 2^{-(k+2)} + 2^2 2^{-k-2} - 2^{-k} = 2^{k+2} + 2^{-(k+2)} + 2^{-k} - 2^{-k} \\ &= 2^{k+2} + 2^{-(k+2)}, \end{aligned}$$

т.е. формулата (3) важи за $n = k + 2$, па од забелешка 4 следува дека формулата (3) важи за секој $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. ♦

На крајот од овој дел, со помош на математичка индукција ќе докажеме неколку важни неравенства за позитивните реални броеви.

Лема 1. (Неравенство на Бернули). Ако $x > -1$, тогаш

$$(1+x)^n \geq 1+nx, \text{ за секој } n \in \mathbf{N}. \quad (4)$$

Доказ. За $n=1$ имаме $1+x \geq 1+x$, т.е. неравенството важи.

Нека претпоставиме дека за $n=k$, важи $(1+x)^k \geq 1+kx$.

Нека $n=k+1$. Од индуктивната претпоставка и бидејќи $1+x > 0$ имаме

$$(1+x)^{k+1} = (1+x)^k(1+x) \geq (1+kx)(1+x) = 1+kx+x+kx^2 = 1+(k+1)x+kx^2 \geq 1+(k+1)x$$

т.е. неравенството (4) важи и за $n=k+1$, па од принципот на математичка индукција добиваме дека важи за секој $n \in \mathbf{N}$ и секој реален број $x > -1$. ♦

Лема 2. ако $x_i > 0$, $i=1, 2, \dots, n$ и $x_1x_2\dots x_n=1$ тогаш

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq n,$$

при што $x_1 + x_2 + \dots + x_n = n$ ако и само ако $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1$.

Доказ. Даденото неравенство ќе го докажеме со математичка индукција по n .

i) За $n=1$ неравенството е точно и притоа важи знак на равенство.

Ако $n=2$ и $x_1x_2=1$, тогаш едниот број е поголем или еднаков на 1, а другиот е помал или еднаков на 1, на пример $x_1 \leq 1$ и $x_2 \geq 1$. Според тоа,

$$x_1 + x_2 = 1 + x_1x_2 + (x_2 - 1)(1 - x_1) = 2 + (x_2 - 1)(1 - x_1) \geq 2$$

и знак за равенство важи ако и само ако $x_2 - 1 = 0$ или $1 - x_1 = 0$, што заедно со $x_1x_2 = 1$ дава $x_1 = x_2 = 1$.

ii) Нека претпоставиме дека за $n=k$ и произволни реални броеви x_i , $i=1, 2, \dots, k$, чиј производ е единица, точно е неравенството

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k \geq k$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $x_i = 1$, $i=1, 2, \dots, k$.

Нека $n=k+1$ и $x_1, \dots, x_{k+1}$ се позитивни реални броеви за кои $x_1x_2\dots x_kx_{k+1}=1$. Ако сите x_i не се еднакви на 1, тогаш имаме броеви поголеми од 1, но и помали од 1. Без ограничување на општоста можеме да земеме $x_1 < 1$ и $x_2 > 1$. Тогаш имаме k позитивни броеви $x_1x_2, x_3, \dots, x_{k+1}$ чиј производ е еднаков на 1, па според индуктивната претпоставка добиваме

$$x_1 x_2 + x_3 + \dots + x_k + x_{k+1} \geq k$$

при што знак за равенство важи ако и само ако

$$x_1 x_2 = x_3 = \dots = x_k = x_{k+1} = 1.$$

Но, тогаш

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \dots + x_k + x_{k+1} &= 1 + x_1 x_2 + x_3 + x_4 + \dots + x_k + x_{k+1} + (x_2 - 1)(1 - x_1) \\ &\geq k + 1 + (x_2 - 1)(1 - x_1) \geq k + 1 \end{aligned}$$

при што знак за равенство важи ако и само ако

$$x_1 x_2 = x_3 = \dots = x_k = x_{k+1} = 1$$

и при тоа $(x_2 - 1)(1 - x_1) = 0$ т.е. $x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_k = x_{k+1} = 1$. ♦

Дефиниција 1. Нека се дадени n позитивни реални броеви $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Броевите

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i, \left(\prod_{i=1}^n a_i \right)^{1/n}, \frac{n}{\sum_{i=1}^n a_i^{-1}}$$

ги нарекуваме *аритметичка, геометриска и хармониска средина* на броевите $a_1, a_2, \dots, a_n$, соодветно.

Теорема 1 (Неравенство на Коши). За аритметичката, геометриската и хармониската средина на позитивните реални броеви $a_1, a_2, \dots, a_n$ важи

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \geq \left(\prod_{i=1}^n a_i \right)^{1/n} \geq \frac{n}{\sum_{i=1}^n a_i^{-1}}$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Доказ. Означуваме $\beta_n = \left(\prod_{i=1}^n a_i \right)^{1/n}$. Да ги разгледаме следниве n по-

зитивни реални броеви $y_i = \frac{a_i}{\beta_n}$, $i = 1, 2, \dots, n$. За броевите y_i , $i = 1, 2, \dots, n$ важи

$\prod_{i=1}^n y_i = 1$, што според лема 2 значи $y_1 + y_2 + \dots + y_n \geq n$, т.е.

$$\frac{a_1}{\beta_n} + \frac{a_2}{\beta_n} + \dots + \frac{a_n}{\beta_n} \geq n$$

односно $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \geq \left(\prod_{i=1}^n a_i \right)^{1/n}$. Притоа, знак за равенство важи ако и само ако

$y_1 = y_2 = \dots = y_n$ т.е. ако и само ако $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Од претходно изнесеното имаме:

$$\frac{1}{(\prod_{i=1}^n a_i)^{1/n}} = \left(\frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a_2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{a_n}\right)^{1/n} \leq \frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}{n} = \frac{1}{\frac{n}{\sum_{i=1}^n a_i^{-1}}}$$

односно $(\prod_{i=1}^n a_i)^{1/n} \geq \frac{n}{\sum_{i=1}^n a_i^{-1}}$, при што знак за равенство важи ако и само ако

$$\frac{1}{a_1} = \frac{1}{a_2} = \dots = \frac{1}{a_n} \text{ т.е. ако и само ако } a_1 = a_2 = \dots = a_n. \blacklozenge$$

Пример 4. Докажи дека за секој $x > 0$ и за секој $n \in \mathbf{N}$ важи неравенството

$$1 + \frac{x}{n} \geq \sqrt[n]{1+x}$$

Решение. Прв начин. За $x > 0$ и $n \in \mathbf{N}$ имаме $\frac{x}{n} > -1$. Од неравенството на Бернули добиваме:

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \geq 1 + n \cdot \frac{x}{n} = 1 + x \text{ т.е. } 1 + \frac{x}{n} \geq \sqrt[n]{1+x}.$$

Втор начин. Од неравенството помеѓу аритметичка и геометриска средина, при $x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = 1$ и $x_n = 1 + x$ добиваме

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1 \cdot (1+x)}$$

$$\text{односно } 1 + \frac{x}{n} \geq \sqrt[n]{1+x}. \blacklozenge$$

ЗАДАЧИ ЗА САМОСТОЈНА РАБОТА

1. Докажи, дека за секој $n \in \mathbf{N}$ се точни равенствата:

$$\text{а) } 1 + 3 + \dots + (2n-3) + (2n-1) = n^2, \quad \text{б) } 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$\text{в) } 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2, \quad \text{г) } 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + (n-1)n = \frac{n(n^2-1)}{3},$$

$$\text{д) } \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)} = \frac{n}{2n+1}, \quad \text{е) } \left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{n+2}{2n+2}.$$

2. Докажи дека $\underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}}_{n \text{ корени}} = 2 \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}$, за секој $n \in \mathbf{N}$.

Упатство. Искористи ги принципот на математичка индукција и тригонометрискиот идентитет $\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$, за $\alpha = \frac{\pi}{2^{k+1}}$.

3. Докажи дека $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{3n+1} > 1$, за секој $n \in \mathbf{N}$.

4. Докажи дека за секој $n > 1$ се исполнети неравенствата:

$$\text{а) } \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{3n+1}}, \quad \text{б) } \frac{n}{2} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^n-1} < n.$$

5. Докажи дека за секој природен број $n > 3$ важи $n! > 2^n$.
6. Броевите $a_n, n=1, 2, 3, \dots$ се зададени со $a_1=1, a_2=1$ и $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$, за $n > 2$. Докажи дека $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n]$, за секој $n=1, 2, 3, \dots$.
7. Докажи дека се точни неравенствата:
- а) $n! < (\frac{n+1}{2})^n$, за $n > 1$ б) $(n!)^2 < (\frac{(n+1)(2n+1)}{6})^n$, за $n > 1$

Упатство. а) Земи $a_i = i, i=1, 2, \dots, n$ и искористи ги неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина и пример 1. б) Земи $a_i = i^2, i=1, 2, \dots, n$ и искористи ги неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина и задача 1 б).