

ПОВЕЌЕ РЕШЕНИЈА НА ЕДНА ГЕОМЕТРИСКА ЗАДАЧА

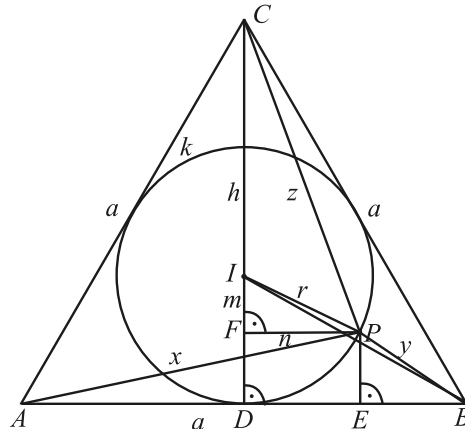
Во оваа статија ќе наведеме повеќе решенија на една геометриска задача за триаголник и во него впишана кружница.

Задача. Докажи дека за произволна точка P која припаѓа на впишаната кружница на рамностранот триаголник ABC важи равенството

$$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 = \frac{5a^2}{4}, \quad (1)$$

каде a е должина на страната на триаголникот.

Решение 1. Да воведеме ознаки како на цртежот долу: $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA} = a$; точката I е центар на впишаната кружница k во триаголникот ABC ; h е висината на тој триаголник; $\overline{IC} = \frac{2}{3}h = \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{2} \sqrt{3} = \frac{a}{3} \sqrt{3}$; точката D е подножје на висината h спуштена кон основата AB на триаголникот; $P \in k$; $\overline{ID} = \overline{IP} = r = \frac{1}{2} \overline{IC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{3} \sqrt{3} = \frac{a}{6} \sqrt{3}$, каде r е радиус на k ; $\overline{IF} = m$ ($F \in ID$); $\overline{FP} = n$; $\overline{PA} = x$, $\overline{PB} = y$, $\overline{PC} = z$.



Применувајќи ја Питагоровата теорема на правоаголните триаголници $\triangle IFP$, $\triangle AEP$, $\triangle BEP$ и $\triangle CFP$ последователно, добиваме:

$$m^2 + n^2 = r^2, \quad (2)$$

$$x^2 = \overline{AE}^2 + \overline{EP}^2 = (\overline{AD} + \overline{DE})^2 + \overline{EP}^2 = \left(\frac{a}{2} + n\right)^2 + (r - m)^2, \quad (3)$$

$$y^2 = \overline{BE}^2 + \overline{EP}^2 = (\overline{BD} - \overline{ED})^2 + \overline{EP}^2 = \left(\frac{a}{2} - n\right)^2 + (r - m)^2, \quad (4)$$

$$z^2 = \overline{CF}^2 + \overline{FP}^2 = (\overline{CI} + \overline{IF})^2 + \overline{FP}^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{3} + m\right)^2 + n^2. \quad (5)$$

Со собирање на равенствата (3), (4) и (5), и користејќи го (2) добиваме:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= \left(\frac{a}{2} + n\right)^2 + (r - m)^2 + \left(\frac{a}{2} - n\right)^2 + (r - m)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3} + m\right)^2 + n^2 \\ &= \frac{5a^2}{6} + 3(m^2 + n^2) + 2r^2 - 4rm + \frac{2}{3}am\sqrt{3} \\ &= \frac{5a^2}{6} + 5r^2 - 4 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{6} \cdot m + \frac{2}{3}am\sqrt{3} \\ &= \frac{5a^2}{6} + 5 \cdot \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 = \frac{5a^2}{6} + \frac{5a^2}{12} = \frac{5a^2}{4} \end{aligned}$$

т.е. $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 = \frac{5a^2}{4}$, што требаше да се докаже.

Решение 2. Да воведеме ознаки како на долниот цртеж:

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA} = a, \quad \overline{IA} = \overline{IB} = \overline{IC} = \frac{a\sqrt{3}}{3}, \quad \overline{IP} = r = \frac{a\sqrt{3}}{6}; (P \in k) \text{ и } \angle BIP = \varphi.$$

Ако ја примениме косинусната теорема на $\triangle AIP$, $\triangle BIP$ и $\triangle CIP$, последователно, добиваме:

$$\begin{aligned} \overline{PA}^2 &= \overline{IP}^2 + \overline{IA}^2 - 2\overline{IP} \cdot \overline{IA} \cos \angle AIP, \\ \overline{PB}^2 &= \overline{IP}^2 + \overline{IB}^2 - 2\overline{IP} \cdot \overline{IB} \cos \angle BIP, \\ \overline{PC}^2 &= \overline{IP}^2 + \overline{IC}^2 - 2\overline{IP} \cdot \overline{IC} \cos \angle CIP, \end{aligned}$$

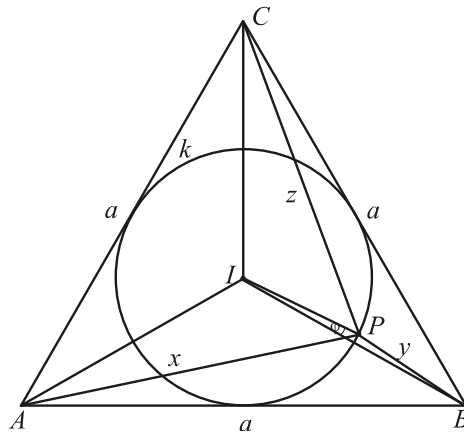
а оттука заради

$$\overline{IP} = r = \frac{a}{6}\sqrt{3}, \quad \overline{IA} = \overline{IB} = \overline{IC} = \frac{a}{3}\sqrt{3}, \quad \angle AIP = 120^\circ + \varphi, \quad \angle BIP = \varphi, \quad \angle CIP = 120^\circ - \varphi$$

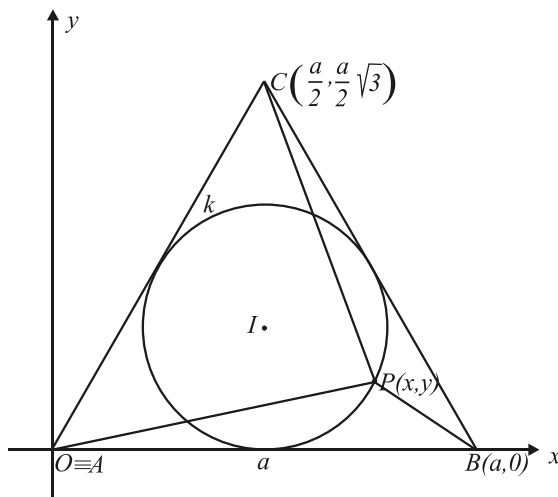
(бидејќи $\angle AIB = \angle BIC = \angle AIC = 120^\circ$) по собирањето на горните три равенства имаме:

$$\begin{aligned} \overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 &= 3 \cdot \frac{a^2}{12} + 3 \cdot \frac{a^2}{3} - 3 \cdot \frac{a^2}{3} [\cos(120^\circ + \varphi) + \cos \varphi + \cos(120^\circ - \varphi)] \\ &= \frac{a^2}{4} + a^2 - a^2 (2 \cos 120^\circ \cos \varphi + \cos \varphi) \\ &= \frac{5a^2}{4} - a^2 (-\cos \varphi + \cos \varphi) = \frac{5a^2}{4} \end{aligned}$$

што требаше да се докаже.



Решение 3. Да воведеме правоаголен координатен систем xOy со координатен почеток во врвот A на $\triangle ABC$. Тогаш $A \equiv O(0,0)$, $B(a,0)$, $C(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\sqrt{3})$ и $P(x,y) \in k$ (цртеж долу).



Лесно се добива дека $I(\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{6})$ и $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$. Сега, равенката на кружницата k гласи:

$$(x - \frac{a}{2})^2 + (y - \frac{a\sqrt{3}}{6})^2 = (\frac{a\sqrt{3}}{6})^2$$

т.е.

$$12x^2 - 12ax + 12y^2 - 4ay\sqrt{3} + 3a^2 = 0. \quad (*)$$

Бидејќи важи

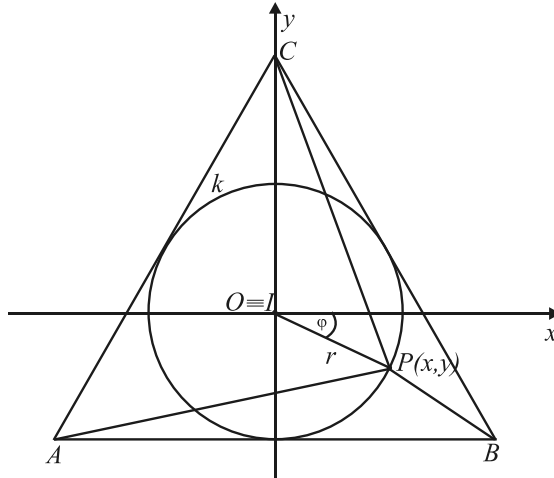
$$\overline{PA}^2 = x^2 + y^2, \overline{PB}^2 = (x-a)^2 + y^2, \overline{PC}^2 = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2,$$

следува

$$\begin{aligned} \overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 &= x^2 + y^2 + x^2 - 2ax + a^2 + y^2 + x^2 - ax + \frac{a^2}{4} + y^2 - ay\sqrt{3} + \frac{3a^2}{4} \\ &= 3x^2 + 3y^2 - 3ax - ay\sqrt{3} + 2a^2 \\ &= \frac{(12x^2 - 12ax + 12y^2 - 4ay\sqrt{3} + 3a^2) + 5a^2}{4} \stackrel{(*)}{=} \frac{5a^2}{4} \end{aligned}$$

што требаше да се докаже.

Решение 4. Во ова решение повторно ќе користиме аналитичка геометрија и тригонометрија. Да воведеме правоаголен координатен систем xOy со координатен почеток во точката I - центар на впишаната кружница k во $\triangle ABC$ (цртеж долу).



Имаме: $I \equiv O(0,0)$, $A(-\frac{a}{2}, -\frac{a\sqrt{3}}{6})$, $B(\frac{a}{2}, -\frac{a\sqrt{3}}{6})$, $C(0, \frac{a\sqrt{3}}{3})$. Радиусот на k е

$r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, па произволна точка $P \in k$ има координати $P(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$, каде

$\varphi = \angle P I x$.

Бидејќи

$$\begin{aligned} \overline{PA}^2 &= \left(r \cos \varphi + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(r \sin \varphi + \frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 \\ &= r^2 \cos^2 \varphi + ar \cos \varphi + \frac{a^2}{4} + r^2 \sin^2 \varphi + \frac{ar\sqrt{3}}{3} \sin \varphi + \frac{a^2}{12} \\ &= r^2 + ar \cos \varphi + \frac{ar\sqrt{3}}{3} \sin \varphi + \frac{a^2}{3} \end{aligned}$$

$$\overline{PB}^2 = (r \cos \varphi - \frac{a}{2})^2 + (r \sin \varphi + \frac{a\sqrt{3}}{6})^2 = r^2 - ar \cos \varphi + \frac{ar\sqrt{3}}{3} \sin \varphi + \frac{a^2}{3}$$

и

$$\overline{PC}^2 = (r \cos \varphi)^2 + (r \sin \varphi - \frac{a\sqrt{3}}{3})^2 = r^2 - \frac{2ar\sqrt{3}}{3} \sin \varphi + \frac{a^2}{3},$$

со собирање на горните равенства добиваме:

$$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 = 3r^2 + a^2 = 3(\frac{a\sqrt{3}}{6})^2 + a^2 = \frac{a^2}{4} + a^2 = \frac{5a^2}{4},$$

што требаше да се докаже.

Решение 5. Овој доказ е многу краток и елегантен, ако се знае една теорема од геометријата позната како **Теорема на Лајбниц**. Таа гласи:

Ако M е произволна точка од рамнината на $\triangle ABC$, а точката T е тежиште на тој триаголник, тогаш важи

$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2 = 3\overline{MT}^2 + \overline{AT}^2 + \overline{BT}^2 + \overline{CT}^2. \quad (6)$$

Во нашата задача е $P \equiv M, I \equiv T$, па је $\overline{MT} = \overline{PI} = r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ и $\overline{AT} = \overline{AI} = R$,

$\overline{BT} = \overline{BI} = R$, $\overline{CT} = \overline{CI} = R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, каде R е радиусот на опишаната кружница

околу $\triangle ABC$. Сега, од (6) добиваме:

$$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 = 3(\frac{a\sqrt{3}}{6})^2 + 3(\frac{a\sqrt{3}}{3})^2 = \frac{a^2}{4} + a^2 = \frac{5a^2}{4},$$

што требаше да се докаже.

Решение 6. За овој доказ потребно е да се знае една теорема од геометријата која е последица од генерализираната теорема на Лајбниц (наместо $\triangle ABC$ се зема многуаголникот $A_1A_2...A_n$ во Теоремата на Лајбниц, види [1], стр. 108-114) и која гласи:

Ако R е радиусот на опишаната кружница и r е радиусот на впишаната кружница во правилниот многуаголник $A_1A_2...A_n$, а M е произволна точка на впишаната кружница k во тој многуаголник, тогаш

$$\overline{MA_1}^2 + \overline{MA_2}^2 + ... + \overline{MA_n}^2 = n(R^2 + r^2). \quad (7)$$

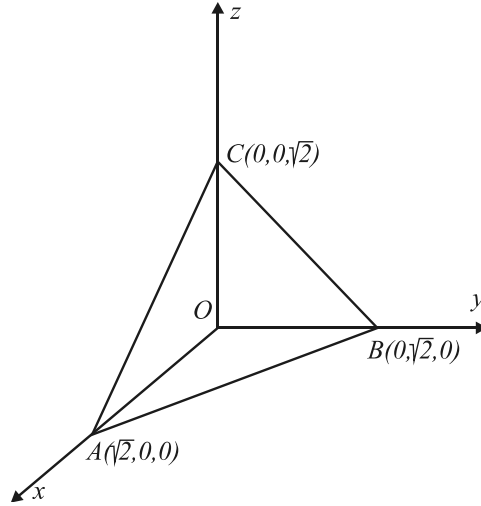
Во нашата задача $M \equiv P, n = 3, R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ им $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, па како $A_1 = A, A_2 = B,$

$A_3 = C$ добиваме:

$$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 = 3[(\frac{a\sqrt{3}}{3})^2 + (\frac{a\sqrt{3}}{6})^2] = 3(\frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{12}) = 3 \cdot \frac{5a^2}{12} = \frac{5a^2}{4}.$$

Решение 7. Во овој доказ, заради полесно пресметување, ќе претпоставиме дека $a = 2$, па треба да докажеме дека важи равенството:

$$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 = 5. \quad (1')$$



Да воведеме просторен координатен систем $Oxyz$ како на горниот цртеж, така што $O(0,0,0)$, $A(\sqrt{2},0,0)$, $B(0,\sqrt{2},0)$ и $C(0,0,\sqrt{2})$. Не е тешко да се докаже дека триаголникот со темиња A, B и C лежи во рамнината чија равенка е $x + y + z = \sqrt{2}$. (Равенка на рамнина низ три дадени точки). Јасно е дека во таа рамнина лежи и впишаната кружница k во $\triangle ABC$. Точките со координати $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$, $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})$ и $(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ припаѓаат на таа кружница k како и на сферата со центар во $O(0,0,0)$ и равенка $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Така, кружницата k е пресек на сферата $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ и рамнината $x + y + z = \sqrt{2}$. Точката $P(x, y, z)$ припаѓа на таа рамнина и на сферата, па за нејзините координати x, y, z се исполнети двете равенки и затоа:

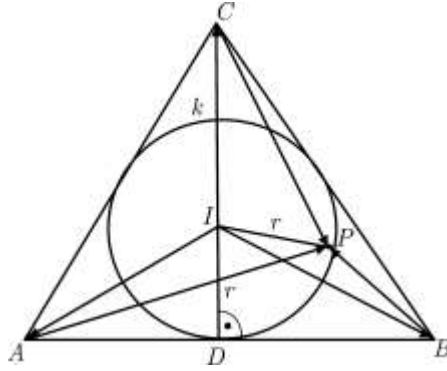
$$\begin{aligned} \overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 &= [(x - \sqrt{2})^2 + y^2 + z^2] + [x^2 + (y - \sqrt{2})^2 + z^2] + [x^2 + y^2 + (z - \sqrt{2})^2] \\ &= 3(x^2 + y^2 + z^2) - 2\sqrt{2}(x + y + z) + 6 \\ &= 3 \cdot 1 - 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} + 6 = 3 - 4 + 6 = 5 \end{aligned}$$

а ова е $(1')$.

Решение 8. И во овој случај, заради полесно пресметување ќе земеме $a = 2$, и ќе докажеме дека важи равенството:

$$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 = 5. \quad (1'')$$

За овој доказ ќе користиме вектори.



Од горниот цртеж имаме:

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{IP} - \overrightarrow{IA}, \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{IP} - \overrightarrow{IB}, \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{IP} - \overrightarrow{IC},$$

а оттука

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AP} = (\overrightarrow{IP} - \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{IP} - \overrightarrow{IA}) = \overrightarrow{IP} \cdot \overrightarrow{IP} - 2\overrightarrow{IP} \cdot \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IA},$$

т.е.

$$|\overrightarrow{AP}|^2 = |\overrightarrow{IP}|^2 - 2\overrightarrow{IP} \cdot \overrightarrow{IA} + |\overrightarrow{IA}|^2.$$

Ставајќи $|\overrightarrow{AP}| = \overrightarrow{PA}$ и $|\overrightarrow{IA}| = \overrightarrow{IA}$:

$$\overrightarrow{PA}^2 = \overrightarrow{IP}^2 + \overrightarrow{IA}^2 - 2\overrightarrow{IP} \cdot \overrightarrow{IA},$$

и аналогно:

$$\overrightarrow{PB}^2 = \overrightarrow{IP}^2 + \overrightarrow{IB}^2 - 2\overrightarrow{IP} \cdot \overrightarrow{IB},$$

$$\overrightarrow{PC}^2 = \overrightarrow{IP}^2 + \overrightarrow{IC}^2 - 2\overrightarrow{IP} \cdot \overrightarrow{IC}.$$

По собирањето на последниве три равенства добиаме:

$$\overrightarrow{PA}^2 + \overrightarrow{PB}^2 + \overrightarrow{PC}^2 = 3\overrightarrow{IP}^2 + \overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{IB}^2 + \overrightarrow{IC}^2 - 2\overrightarrow{IP} \cdot (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}). \quad (8)$$

Бидејќи (црт. 6) $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$ (заради $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{ID} \Rightarrow \overrightarrow{IA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{IC}$, итн.

водејќи сметка дека $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$), $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{IC} = \frac{2}{3}h = \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{a}{3}\sqrt{3} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$

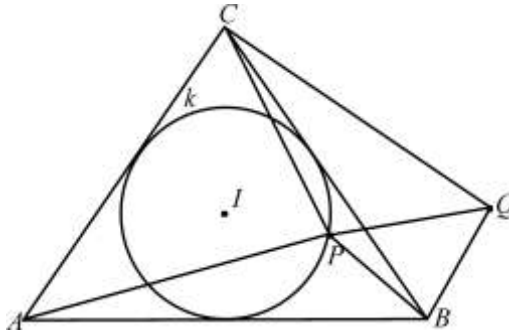
и $\overrightarrow{IP} = r = \frac{1}{3}h = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{a}{6}\sqrt{3} = \frac{2}{6}\sqrt{3} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$, имаме од (8):

$$\overrightarrow{PA}^2 + \overrightarrow{PB}^2 + \overrightarrow{PC}^2 = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)^2 = 3 \cdot \frac{3}{9} + 3 \cdot \frac{12}{9} = 1 + 4 = 5.$$

Со ова равенството (1'') е докажано.

Последица 1. Плоштината на триаголникот со должини на страни $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PB}$ и $\overrightarrow{PC}$ е $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Доказ. Избираме точка Q надвор од $\triangle ABC$ така што $\overline{BQ} = \overline{BP}$ и $\overline{CQ} = \overline{AP}$.
 Тогаш $\triangle BQC$ и $\triangle BPA$ се складни (правило ССС) па важи $\angle ABP = \angle CBQ$, и
 оттука $\angle PBQ = \angle CBQ + \angle CBP = \angle ABP + \angle CBP = 60^\circ$ што значи дека $\triangle PBQ$ е
 рамностран. Сега $\overline{PQ} = \overline{PB}$ па $\triangle PQC$ има страни еднакви на $\overline{PA}$, $\overline{PB}$ и $\overline{PC}$.



Ако конструираме слично уште уште две точки, на пример R и S , надвор од
 триаголникот кај страните AC и AB , добиваме шестаголник чија плоштина е
 еднаква на збирот од две плоштини на $\triangle ABC$ или на три плоштини (на $\triangle PQC$ и
 уште два кои ги добиваме ако ги вклучиме точките R и S чии должини на
 страните се исто така еднакви на $\overline{PA}$, $\overline{PB}$ и $\overline{PC}$) плус три плоштини на
 рамностраните триаголници со страни $\overline{PA}$, $\overline{PB}$ и $\overline{PC}$, соодветно. Според тоа
 имаме:

$$3P_{\triangle PQC} = 2P_{\triangle ABC} - (P_A(\overline{PA}) + P_A(\overline{PB}) + P_A(\overline{PC})),$$

и одовде заради:

$$P_{\triangle ABC} = \frac{a^2}{4} \sqrt{3} = \frac{2^2}{4} \sqrt{3} = \sqrt{3},$$

$$P_A(\overline{PA}) = \frac{\overline{PA}^2}{4} \sqrt{3}; \quad P_A(\overline{PB}) = \frac{\overline{PB}^2}{4} \sqrt{3}; \quad P_A(\overline{PC}) = \frac{\overline{PC}^2}{4} \sqrt{3},$$

добиваме:

$$3P_{\triangle PQC} = 2\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} (\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2).$$

Заради $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 = 5$ имаме:

$$3P_{\triangle PQC} = 2\sqrt{3} - \frac{5\sqrt{3}}{4}, \text{ т.е.}$$

$$3P_{\triangle PQC} = \frac{\sqrt{3}}{4},$$

што требаше да се докаже.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Arslanagić, Š., *Aspekti nastave matematike za nadarene učenike srednjoškolskog uzrasta*, Udruženje matematičara Bosne i Hercegovine, Sarajevo, 2001.
- [2] Arslanagić, Š., *Metodička zbirka zadataka sa osnovama teorije iz elementarne matematike*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2006.
- [3] Pavković, B., Veljan, D., *Elementarna matematika 2*, Školska knjiga, Zagreb, 1995.