

ЗА НЕКОИ ЕКСТЕРМАЛНИ ПРОБЛЕМИ

Неравенствата се интересна област за проучување. Колку повеќе се навлегува во неа, толку повеќе се тера на нови истражувања. Од неа, по својата убавина, особено се издвојуваат екстермалните проблеми. Овде ќе бидат презентирани неколку теореми и задачи од екстермалните проблеми. Користејќи ги нив, меѓу другото, ќе дадеме и доказ на познатото неравенство на Коши.

Свойство 1. Производот на два позитивни реални броја, чиј збир е константен, има најголема вредност тогаш кога множителите се еднакви меѓу себе.

За ова свойство ќе презентираме два доказа.

Доказ I. Од условот на задачата, бидејќи збирот на двата позитивни реални броја (да ги означиме со x и y) е константен, иска избереме дека изнесува $2c$. Нивниот производ xy да го означиме со z . Значи, $x + y = 2c$, додека $xy = z$. Заклучуваме дека x и y се решенија на квадратната равенка

$$x^2 - 2cx + z = 0. \text{ Од овде, бидејќи } y = 2c - x \text{ и } y = \frac{z}{x} \text{ добиваме дека } 2c - x = \frac{z}{x}.$$

По средувањето се добива квадратната равенка $x^2 - 2cx + z = 0$. Решенијата на оваа равенка ќе бидат реални броеви ако дискриминантата $D = 4c^2 - 4z$ е позитивна, значи ако $4c^2 - 4z \geq 0$, односно $c^2 - z \geq 0$. Од последното неравенство заклучуваме дека најголемото z за кое неравенството е сè уште исполнето е $z = c^2$. Значи $xy = c^2$ и бидејќи $x + y = 2c$, а x и y се позитивни, следува дека $x = y = c$, што требаше да се докаже.

Доказ II. Да ги зачуваме ознаките од претходниот доказ. Да земеме за x и y вредности x_1 и y_1 соодветно, за кои важи дека $x_1 = y_1$, односно $x_1 = y_1 = c$. Ако дозволиме x и y да примат други вредности, x_2 и y_2 соодветно, при што $x_2 \neq y_2$, тогаш ќе имаме $x_2 \neq c$ и $y_2 \neq c$. Тогаш постои $a \neq 0$ т.ш. $x_2 = c + a$, $y_2 = c - a$. Сега за производот x_2y_2 имаме $x_2y_2 = (c + a)(c - a) = c^2 - a^2 < c^2$. Значи $x_2y_2 < c^2$, а бидејќи $x_1y_1 = c^2$, добиваме $x_1y_1 > x_2y_2$. Заклучуваме дека производот на два позитивни реални броја, чиј збир е константен, има најголема вредност кога тие се еднакви меѓу себе, што произлегува од произволноста на x_2 и y_2 .

Ова свойство може да се воопшти за производ од повеќе реални броеви.

ТЕОРЕМА 1. Производот од m позитивни реални броеви, чиј збир е константен, има најголема вредност кога множителите се еднакви меѓу себе.

Доказ. Нека x, y, z, \dots, t се m -те произволни позитивни реални броеви чиј збир е константен, еднаков на $m \cdot c$ (каде c е константа). Нека тие ги примат вредностите $x_1, y_1, z_1, \dots, t_1$, соодветно, при што $x_1 = y_1 = z_1 = \dots = t_1 = c$. Тогаш нивниот производ ќе биде $P_1 = x_1y_1z_1 \dots t_1 = c^m$.

Сега, слично како во вториот доказ на претходната задача, нека $x_2, y_2, z_2, \dots, t_2$ се такви вредности на x, y, z, \dots, t , меѓу кои има и нееднакви, но такви што $x_2 + y_2 + z_2 + \dots + t_2 = mc$. Ќе докажеме дека $P_2 = x_2 y_2 z_2 \dots t_2 < P_1$.

Бидејќи меѓу множителите $x_2, y_2, z_2, \dots, t_2$ има и нееднакви, а нивниот збир е еднаков ма mc , иској од нив ќе биде помал, додека друг ќе биде поголем од c . Затоа, нека $x_2 = c + h$ и $y_2 = c - k$, каде што $h > 0$ и $k > 0$. Тогаш $x_2 + y_2 = 2c + h - k$, додека $P_2 = (c+h)(c-k) \cdot z_2 \cdot \dots \cdot t_2 = [c^2 + c(h-k) - kh] \cdot z_2 \cdot \dots \cdot t_2$. Ако ги замениме $x_2 = c + h$ со $x_3 = c$ и $y_2 = c - k$ со $y_3 = c + h - k$, тогаш, бидејќи $x_2 + y_2 = x_3 + y_3$, збирот на сите множители нема да се измени.

Ќе покажеме дека при таа измена производот ќе се зголеми.

Навистина, $x_3 y_3 = c(c + h - k) = c^2 + c(h - k) - kh = x_2 y_2$. На таков начин докажавме дека $P_3 > P_2$ каде P_3 е производот на $x_3 y_3 z_2 \dots t_2$. Така, производот P_3 ќе има поголема вредност ако еден од множителите (x_3) е еднаков на c .

Ако понатаму меѓу множителите на P_3 има нееднакви, тогаш меѓу нив има два такви што едниот е поголем од c , додека другиот е помал од c . Тогаш, постапката ќе ја повториме, ќе извршиме замена на тие два множителя како и во случај на производителот P_3 , при што новиот производ ќе прими поголема вредност од претходниот, т.е. $P_4 > P_3 > P_2$. Притоа во P_4 има помалку множители различни од c , отколку во P_3 .

Оваа постапка можеме да ја продолжиме сè додека сите множители не станат еднакви на c . На тој начин, зголемувајќи ги производите по вредност, ќе дојдеме до производот P_1 , во кој сите множители се еднакви меѓу себе и еднакви на c . Тоа значи дека $P_1 > P_2$, што требаше да се докаже.

Значи според дадените услови, производ со најголема вредност е оној чии множители се еднакви меѓу себе и притоа најголемата вредност на производот е $P_1 = c^m$. ■

Користејќи ја Теорема 1, ќе го докажеме познатото неравенство на Коши.

ТЕОРЕМА 2. (Неравенство на Коши) Геометриската страна на m позитивни реални броеви не е поголема од нивната аритметичка средина.

Доказ. Нека се дадени реалните броеви $a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0, \dots, a_m > 0$ и нека

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_m = ma. \quad (1)$$

каде a е константа. Според Теоремата 1 имаме

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_m \leq a^m. \quad (2)$$

Од (1) и (2) добиваме

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_m \leq \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_m}{m} \right)^m,$$

или

$$\sqrt[m]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_m} \leq \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_m}{m}, \quad (3)$$

што требаше да се докаже. ■

Да забележиме дека од доказот на Теоремата 1 следува дека во (3) важи знакот за равенство само ако $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_m$.

Сега повторно ќе се вратиме на екстремалните проблеми. Во еден од нив ќе го примениме неравенството на Коши.

Свойство 2. Збирот од два позитивни реални броја чиј производ е константен, има најмала вредност кога собироците се еднакви меѓу себе.

Како и кај првото својство, ќе презентираме два доказа.

Доказ 1. Нека собироците x и y имаат збир еднаков на z , т.е. $x + y = z$ и нека $xy = c^2$, каде $c (> 0)$ е константа. Значи x и y се решенија на квадратната равенка $u^2 - zu + c^2 = 0$, која има решенија во множеството реални броеви само ако дискриминантата D е несгативна, т.е. ако $z^2 - 4c^2 \geq 0$. Од овде заклучуваме дека z^2 ќе има најмала вредност ако $z = 2c$. Тогаш $D = 0$; значи $x = y = c$.

Доказ 2. Нека избереме вредности x_1 и y_1 на собироците x и y соодветно, при тоа нека $x_1 = y_1$. Тогаш е очвидно дека $x_1 = y_1 = c$ и $x_1 + y_1 = 2c$.

Да дозволиме други вредности x_2 и y_2 за x и y , соодветно, при што $x_2 \neq y_2$. Ако земеме $x_2 = c + a$, каде $a > 0$, тогаш $y_2 = \frac{c^2}{c+a}$, бидејќи $x_2 y_2 = c^2$. Така имаме:

$$x_2 + y_2 = c + a + \frac{c^2}{c+a} > c + a + \frac{c^2}{c+a} - \frac{a^2}{c+a} = c + a + \frac{c^2 - a^2}{c+a} = c + a + c - a = 2c.$$

Значи $x_2 + y_2 > 2c$, односно $x_2 + y_2 > x_1 + y_1$. Од произволноста на x_2 и y_2 произлегува дека навистина збирот од два позитивни реални броја има најмала вредност, доколку производот им е константен, кога тие се еднакви меѓу себе.

Ова својство може да се воопшти за збир од повеќе реални броеви.

ТЕОРЕМА 3. Збирот од m позитивни реални броеви, чиј производ е константен, има најмала вредност кога собироците се еднакви меѓу себе.

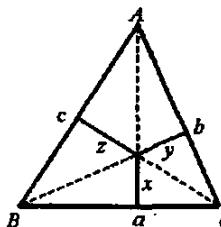
Доказ. Нека за реалните броеви $a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0, \dots, a_m > 0$ имаме $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots \cdot a_m = b^m$, каде b^m е константа. Според Теоремата 2, т.е. неравенството на Коши, имаме $\sqrt[m]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots \cdot a_m} \leq \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_m}{m}$, од каде $\sqrt[m]{b^m} \leq \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_m}{m}$ односно $b \leq \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_m}{m}$. Знак на равенство имаме само кога $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_m$. На крајот имаме $mb \leq a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_m$ и овој збир има најмала вредност само ако важи знак за равенство т.е. ако $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_m$, што требаше да се докаже. ■

Во продолжение ќе бидат приложени неколку примери на примена на погоре наведените својства и теореми.

Пример 1. Во внатрешноста на $\triangle ABC$ да се најде точка, чиј производ на растојанија до страните на триаголникот е најголем.

Решение. Нека x, y, z се растојанија од произволна точка M во внатрешноста на $\triangle ABC$, до страните на триаголникот.

Бидејќи $P = P_{\Delta ABC} = P_{\Delta BMC} + P_{\Delta CMA} + P_{\Delta AMB}$ имаме $P = \frac{ax}{2} + \frac{by}{2} + \frac{cz}{2}$ т.е. $2P = ax + by + cz$ т.е. $ax + by + cz$ е константа. Производот $x \cdot y \cdot z$ ќе биде најголем тогаш кога $ax \cdot by \cdot cz$ е најголем, а ова е можно



кога $ax = by = cz = \frac{2P}{3}$. Од овде следува дека $x = \frac{2P}{3a} = \frac{a \cdot h_a}{3a} = \frac{h_a}{3}$, соодветно $y = \frac{h_b}{3}$, односно $z = \frac{h_c}{3}$, каде h_a , h_b и h_c се висини во ΔABC . Значи, бараната точка е тежиштето на ΔABC .

Пример 2. Да се покаже дека од сите триаголници со дадена плоштина P , рамнотојниот има најмал периметар.

Решение. Според Хероновата формула, за плоштината на триаголникот имаме:

$$P = \sqrt{\frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2} \cdot \frac{a+c-b}{2} \cdot \frac{b+c-a}{2}}$$

каде a , b и c се страните на триаголникот.

Од овде се добива

$$16P^2 = (a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a). \quad (1)$$

Периметарот $L = a+b+c$ можеме да го претставиме така:

$$L = a+b+c = \frac{3}{4} \left(\frac{a+b+c}{3} + \frac{a+b-c}{1} + \frac{a+c-b}{1} + \frac{b+c-a}{1} \right) \quad (2)$$

Да го запишеме равенството (1) во вид:

$$\frac{16P^2}{3} = \frac{a+b+c}{3} \cdot \frac{a+b-c}{1} \cdot \frac{a+c-b}{1} \cdot \frac{b+c-a}{1} \quad (3)$$

Од (3) гледаме дека производот на множителите, кои во (2) се јавуваат како собироци е константен. Затоа сумата L прима најмала вредност кога тие множители се еднакви меѓу себе, т.е.

$$\frac{a+b+c}{3} = a+b-c = a+c-b = b+c-a$$

што е можно само кога $a = b = c$. Значи, навистина, рамнотојниот триаголник е овој со најмал периметар.

Пример 3. Да се најде најголемата вредност на функцијата $y = 3x^2 - 2x^3$, ако $0 < x < \frac{3}{2}$.

Решение. Дадената функција можеме да ја запишеме на следниов начин: $y = x^2(3 - 2x) = xx(3 - 2x)$. Тогаш според Теоремата 1 како производ од три ненегативни множители y чиј збир е константен (имено $x + x + (3 - 2x) = 3$), има најголема вредност кога множителите се еднакви меѓу себе т.е. при $x = 3 - 2x$, односно за $x = 1$. Значи, за $x = 1$ функцијата $y = 3x^2 - 2x^3$ ќе има најголема вредност $y_{\max} = 1$.

Пример 4. Да се најде најмалата вредност на збирот $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, ако $x > 0$, $y > 0$ и $x + y = 2a$, каде a е константа.

Решение. Нека со z го означиме збирот $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, тогаш него можеме да го напишеме и на следниов начин: $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x+y}{xy} = \frac{2a}{xy}$. Бидејќи $xy > 0$ изразот $\frac{2a}{xy}$ има најмала вредност кога xy има најголема вредност. Имено, дропка чиј броител е константен ќе има најмала вредност кога нејзиниот именител е најголем. Според Теоремата 1 и условот на задачата $x + y = 2a$, производот xy ќе има најголема вредност ако $x = y = a$. Значи, најмалата вредност на z ќе биде $z_{\min} = \frac{2a}{aa} = \frac{2}{a}$.

Задачи за самостојна работа

1. Да се докаже дека, ако $mx + ny = 2c$, каде m , n и c се позитивни константи, а $x > 0$, $y > 0$, тогаш производот xy има најголема вредност за $x = \frac{c}{m}$, $y = \frac{c}{n}$.

2. Да се докаже дека збирот од два позитивни собироци mx и ny , каде m и n се позитивни константи има најмала вредност $2 \cdot c \cdot \sqrt{mn}$, доколку производот $xy = c^2$, каде $c > 0$ е константа.

3. Да се најде најголемата вредност на функцијата $y = 4x^3 - x^4$, ако $0 < x < 4$.

4. Да се најде најмалата вредност на $z = x + y$, ако $x > 0$, $y > 0$ и $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2}$, каде a е константа.

5. Да се најде најмалата вредност на изразот $M = x^2 + y^2 + z^2$ ако $x + y + z = 3a$, каде $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ и a е константа.

6. Да се докаже неравенството $(1-a)(1-b)(1-c) \geq 8abc$ ако $a+b+c=1$, $a>0$, $b>0$, $c>0$.

7. Да се докаже неравенството:

$$\sqrt{a_1 a_2} + \sqrt{a_1 a_3} + \dots + \sqrt{a_1 a_n} + \sqrt{a_2 a_3} + \dots + \sqrt{a_{n-1} a_n} \leq \frac{n-1}{2} (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$$

каде $a_i > 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

8. Да се докаже неравенството

$$\frac{\frac{n}{1} + \frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

каде a_i се позитивни реални броеви.