

БМО 2001

1. Нека n е природен број. Ако a и b се природни броеви поголеми од 1 и такви што $ab = 2^n - 1$, докажи дека бројот $ab - (a - b) - 1$ е од видот $2^{2m}k$, каде k е непарен природен број, а m е природен број.

Решение. Нека $a = 2^r a_1 - 1$ и $b = 2^s b_1 + 1$, каде a_1 и b_1 се непарни природни броеви и $r, s \geq 1$. Тогаш

$$2^n - 1 = ab = (2^r a_1 - 1)(2^s b_1 + 1) = 2^{r+s} a_1 b_1 + 2^r a_1 - 2^s b_1 - 1$$

па затоа $2^r \mid 2^s b_1$ и $2^s \mid 2^r a_1$, што е можно ако и само ако $r = s$. Според тоа,

$$ab - (a - b) - 1 = (a + 1)(b - 1) = 2^{2r} a_1 b_1,$$

каде $a_1 b_1$ е непарен природен број.

2. Ако конвексниот петаголник ги задоволува условите

- 1) сите внатрешни агли се еднакви, и
 - 2) должините на сите страни се рационални броеви,
- докажи дека петаголникот е правилен.

Решение. Нека $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$ е дадениот петаголник и нека $\overline{A_i A_{i+1}} = a_i$, ($A_6 = A_1$). Должините на проекцијата на петаголникот на правата нормална на страната $A_1 A_2$ е еднаква на $a_2 \sin 72^\circ + a_3 \sin 36^\circ$, а исто така е еднаква и на $a_5 \sin 72^\circ + a_4 \sin 36^\circ$, па затоа $a_4 - a_3 = 2(a_2 - a_5) \cos 36^\circ$. Но, $\cos 36^\circ = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ е ирационален број, па затоа мора да важи $a_4 = a_3$. Аналогно се добива дека $a_4 = a_5 = a_1 = a_2$, што значи дека петаголникот е правилен.

3. Нека a, b, c се позитивни реални броеви такви што $a + b + c \geq abc$. Докажи, дека $a^2 + b^2 + c^2 > abc\sqrt{3}$.

Решение. Прво од неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина, а потоа од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина и условот на задачата следува

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq \frac{1}{9}(a + b + c)^4 \geq 3\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3(a + b + c) \geq 3abc(a + b + c) \geq 3(abc)^2,$$

т.е. $a^2 + b^2 + c^2 \geq abc\sqrt{3}$.

4. Коцка со димензии $3 \times 3 \times 3$ е поделена на 27 складни единечни коцки (клетки). Една од добиените единечни клетки е празна, а во секоја од преостанатите се наоѓа единечна коцка означена со еден од броевите 1, 2, ..., 26 (секој од овие броеви е доделен на точно една коцка). Дозволено е единечна коцка да се пре-

места во соседна празна клетка (две клетки се соседни ако имаат заеднички сид). Дали може со помош на конечно многу дозволени потези единичните коцки да се распоредат така што коцките означени со броевите k и $27-k$ ги заменат местата, за секој $k \in \{1, 2, \dots, 13\}$?

Решение. Да ја означиме секоја непразна клетка со бројот на коцката која се наоѓа во неа, а празната клетка со 0. Така позицијата во секој чекор можеме да ја опишеме со некоја пермутација σ на множеството $\{0, 1, 2, \dots, 26\}$, при што почетната позиција соодветствува на идентичната пермутација

$$\sigma \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & 25 & 26 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 25 & 26 \end{pmatrix}.$$

Во секој потез реализираме транспозиција $(0, x)$ за некој $x \neq 0$, т.е. елементите 0 и x ги менуваат местата. Секоја транспозиција ја менува парноста на пермутацијата (т.е. парноста на бројот парови (i, j) такви што $i < j$ и $\sigma(i) > \sigma(j)$).

Бидејќи конечната пермутација $\sigma \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & 26 & 26 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 25 & 1 \end{pmatrix}$ е непарна (како производ на 13 транспозиции $(i, 26-i)$), потребен е непарен број потези.

Од друга страна, ако клетките ги обоиме наизменично црно и бело, како кај шаховската табла, добиваме дека бојата на празната клетка се менува во секој потез. Така, таа по непарен број потези не може да биде во иста боја. Тоа значи, дека празната клетка не може да остане на истото место како во почетната позиција, со што добивме противречност.