Даниел Велинов
Скопје

РЕКУРЕНТНИ РЕЛАЦИИ

Често во работа со низи наидуваме на низа која е зададена со рекурентни релации. Тоа понекогаш може да биде и потешкотија, бидејќи многу теореми кои ги знаеме можат директно да се применат само на низи кои се зададени експлицитно. Многупати и самото оперирање со низа зададена рекуретно може да биде доста проблематично заради многуте пресметки доколку сакаме да видиме како изгледаат повеќе членови на низата. Се поставува прашањето дали постои начин за трансформација на низа зададена рекурентно во низа зададена експлицитно? Одговорот во општ случај е не, но во специфични случаи тоа е можно. Овде ќе илустрираме еден од тие методи кои тоа го овозможуваат. Најпрвин, да дефинираме што е рекурентна релација за низа, а потоа ќе дефинираме што е решение на рекурентна релација со кое низата ќе биде експлицитно (јавно) зададена низа.

Рекурентна релација за низата $(a_n)_{n\in N}$ е равенство со кое n-тиот член на низата $(a_n)_{n\in \mathbf{N}}$ се изразува преку еден или повеќе претходни членови од низата.

Низа се нарекува *решение* на рекурентна релација ако нејзините членови ја задоволуваат рекурентната релација.

Кај рекурентните релации постојат и почетни услови и доколку таа е добро дефинирана нивниот број зависи од рекурентната релација. Значи, рекурентната релација и почетните услови единствено ја определуваат низата и секој член од низата може да се определи од рекурентната релација и почетните услови.

Многу познати проблеми можат да се претставаат со рекурентни релации. Меѓу нив најпозната е низата на Фибоначи. Таа е зададена со

$$a_1=1,\ a_2=1 \text{ и } a_n=a_{n-1}+a_{n-2}.$$

Овде ќе дадеме метод со помош на кој ќе решаваме линеарни рекурентни релации со константни коефициенти. Хомогена линеарна рекурентна релација со константни коефициенти од ред k има општ облик

$$a_n=t_1a_{n-1}+t_2a_{n-2}+\ldots+t_ka_{n-k},$$

каде $t_1,t_2,\ldots,t_k$, $t_k\neq 0$ се реални броеви. За да рекурентната релација биде добро дефинирана потребно е да бидат дадени првите k членови на низата, односно $a_0 = c_0$, $a_1 = c_1$, $\dots$, $a_{k-1} = c_{k-1}$. Пред да ги дадеме теоремите со помош на кои ќе ги решаваме хомогените линеарни рекурентни релации ќе го опишеме начинот на кој се придружува карактеристична равенка за дадена рекурентна релација.

Нека $a_n = t_1 a_{n-1} + t_2 a_{n-2} + \dots + t_k a_{n-k}$ е дадена хомогена линеарна рекурентна релација. Членовите од десната страна ги префрламе на левата страна и на тој начин ја добиваме равенката

$$a_n - t_1 a_{n-1} - t_2 a_{n-2} - \dots - t_k a_{n-k} = 0.$$

Степенот на r во карактеристичната равенка, придружена на горната рекурентна релација, кој соодветствува на a_n ќе биде разликата од неговиот индекс и најмалиот индекс кој се појавува, во случајот $n-k$. Значи, степенот на r, кој соодветствува на a_n, ќе биде k. Понатаму, за членот $-t_1 a_{n-1}$, во карактеристичната равенка ќе го имаме членот $-t_1 r^{k-1}$ ($-t_1$ е коефициентот пред a_{n-1}, а степенот на r е добиен кога од индексот на a_{n-1} ќе се одземе индексот на a_{n-k}), за $-t_2 a_{n-2}$ во карактеристичната равенка ќе го имаме членот $-t_2 r^{k-2}$ продолжувајќи понатаму на крај за $-t_k a_{n-k}$ ќе добиеме член од карактеристичната равенка $-t_k$. Значи, карактеристичната равенка која е придружена на рекурентната релација

$$a_n - t_1 a_{n-1} - t_2 a_{n-2} - \dots - t_k a_{n-k} = 0$$

е

$$r^k - t_1 r^{k-1} - t_2 r^{k-2} - \dots - t_k = 0.$$

Во продолжение ќе дадеме две теореми, со чија помош се решаваат хомогените линеарни рекурентни релации.

Теорема 1. Нека $t_1, t_2, \dots, t_k$ се реални броеви и нека карактеристичната равенка на рекурентната релација

$$r^k - t_1 r^{k-1} - t_2 r^{k-2} - \dots - t_k = 0$$

има k различни решенија $r_1, r_2, \dots, r_k$. Тогаш низата $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ е решение на рекурентната релација

$$a_n = t_1 a_{n-1} + t_2 a_{n-2} + \dots + t_k a_{n-k}$$

ако и само ако

$$a_n = C_1 r_1^{\,n} + C_2 r_2^{\,n} + \dots + C_k r_k^{\,n}. \ \blacksquare$$

Теорема 2. Нека $t_1, t_2, \ldots, t_k$ се реални броеви и нека карактеристичната равенка на рекурентната релација

$$r^k - t_1 r^{k-1} - t_2 r^{k-2} - \ldots - t_k = 0$$

има t различни решенија $r_1, r_2, \ldots, r_t$ со кратност $k_1, k_2, \ldots, k_t$, при што

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_t = k \ .$$

Тогаш низата $(a_n)_{n \in N}$ е решение на рекурентната релација

$$a_n = t_1 a_{n-1} + t_2 a_{n-2} + \ldots + t_k a_{n-k}$$

ако и само ако

$$a_n = (C_{1,0} + C_{1,1} n + \ldots + C_{1,k_1-1} n^{k_1-1}) r_1^{\,n} + (C_{2,0} + C_{2,1} n + \ldots + C_{2.k_2-1} n^{k_2-1}) r_2^{\,n} + \ldots +$$
$$+ (C_{t,0} + C_{t,1} n + \ldots + C_{t.k_t-1} n^{k_t-1}) r_t^{\,n} . \ \blacksquare$$

Пример 1. Реши ја рекурентната релација $a_n = 6a_{n-1} - 8a_{n-2}$, $a_0 = 2$, $a_1 = 6$.

Решение. Карактеристичната равенка која соодветствува на рекурентната релација $a_n = 6a_{n-1} - 8a_{n-2}$ е $r^2 - 6r + 8 = 0$. Решенијата на оваа квадратна равенка се $r_1 = 2$ и $r_2 = 4$, па врз основа на Теорема 1, $a_n = C_1 2^n + C_2 4^n$. Имајќи ги во предвид почетните услови, можеме да ги определиме константите C_1 и C_2. Од $a_0 = 2$ имаме дека $C_1 + C_2 = 2$, од $a_1 = 6$ имаме $2C_1 + 4C_2 = 6$. Решенија на овој систем се $C_1 = 1$ и $C_2 = 1$. Па, низата $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ зададена со рекурентната релација $a_n = 6a_{n-1} - 8a_{n-2}$, $a_0 = 2$, $a_1 = 6$, има екплицитен облик $a_n = 2^n + 4^n = 2^n(1 + 2^n)$. $\blacksquare$

Пример 2. Реши ја рекурентната релација $a_n - 6a_{n-1} + 9a_{n-2} = 0$, $a_0 = 1$, $a_1 = 9$.

Решение. Карактеристичната равенка која соодветствува на горната рекурентна релација е $r^2 - 6r + 9 = 0$, па таа има едно решение со кратност 2. Тогаш, според Теорема 2, низата $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ има експлицитен облик $a_n = C_1 3^n + C_2 n 3^n$. Константите C_1 и C_2 ќе ги определиме од почетните услови $a_0 = 1$, $a_1 = 9$. Го добиваме системот $C_1 = 1$ и $3C_1 + 3C_2 = 9$. Па експлицитниот облик на низата $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ која ја задоволува рекурентната релација

$a_n - 6a_{n-1} + 9a_{n-2} = 0$, $a_0 = 1$, $a_1 = 9$ е $a_n = 3^n + 2n3^n = 3^n(1+2n)$. ■

Нехомогена линеарна рекурентна релација со константни коефициенти од ред k има општ облик

$$a_n = t_1 a_{n-1} + \ldots + t_k a_{n-k} + F(n),$$

каде каде $t_1, t_2, \ldots, t_k$, $t_k \neq 0$ се реални броеви. Хомогената линеарна релација $a_n = t_1 a_{n-1} + t_2 a_{n-2} + \ldots + t_k a_{n-k}$, се нарекува хомогена линеарна релација која одговара на нехомогената линеарна релација

$$a_n = t_1 a_{n-1} + t_2 a_{n-2} + \ldots + t_k a_{n-k} + F(n).$$

Во продолжение ќе бидат дадени две теореми кои се користат за решавање на нехомогени линеарни рекурентни релации со константни коефициенти.

Теорема 3. Ако $(a_n^p)_{n\in\mathbf{N}}$ е партикуларно решение на нехомогената линеарна релација со константни коефициенти

$$a_n = t_1 a_{n-1} + t_2 a_{n-2} + \ldots + t_k a_{n-k} + F(n),$$

тогаш нејзиното решение е секое решение кое има облик $(a_n^h + a_n^p)_{n\in\mathbf{N}}$, каде $(a_n^h)_{n\in\mathbf{N}}$ е решение на соодветната хомогена линеарна релација. ■

Теорема 4. Нека $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ја задоволува нехомогената линеарна рекурентна релација со константни коефициенти

$$a_n = t_1 a_{n-1} + t_2 a_{n-2} + \ldots + t_k a_{n-k} + F(n),$$

каде $t_1, t_2, \ldots, t_k$ се реални броеви и

$$F(n) = (A_0 + A_1 n + A_2 n^2 + \ldots + A_{t-1} n^{t-1} + A_t n^t) s^n,$$

каде $A_0, A_1, A_2, \ldots A_t$ се реални броеви. Разликуваме два случаи:

- s не е решение на карактеристичната равенка на соодветната хомогена релација, тогаш постои партикуларно решение во облик
$$(B_0 + B_1 n + B_2 n^2 + \ldots + B_{t-1} n^{t-1} + B_t n^t) s^n$$
- s е решение на карактеристичната равенка на соодветната хомогена релација со кратност m, тогаш постои партикуларно решение во облик
$$n^m (B_0 + B_1 n + B_2 n^2 + \ldots + B_{t-1} n^{t-1} + B_t n^t) s^n. \ ■$$

Пример 3. Реши ја рекурентната релација $a_n = 3a_{n-1} + 2n$, $a_1 = -\frac{3}{2}$.

Решение. Соодветната хомогена линеарна релација која одговара на горната нехомогена линеарна релација е $a_n = 3a_{n-1}$, па соодветната карактеристична равенка е $r - 3 = 0$. Експлицитната низа која соодветствува на рекурентната релација $a_n = 3a_{n-1}$ е $a_n^h = C_1 3^n$. Едно решение на нехомогената равенка ќе го бараме од облик $a_n^p = An + B$. Заменувајќи во почетната равенка имаме

$$An + B = 3(A(n-1) + 3B) + 2n,$$

од каде се добива дека $A = -1$, $B = -\frac{3}{2}$. Значи $a_n^p = -n - \frac{3}{2}$. Од почетниот услов $C_1 = \frac{1}{3}$, па решението на нехомогената линеарна релација е

$$a_n = a_n^h + a_n^p = -n - \frac{3}{2} + 3^{n-1}. \ \blacksquare$$

Задачи за самостојна работа

1. Да се решат рекурентните релации:
   а) $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $n \geq 2$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$
   б) $a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}$, $n \geq 1$, $a_0 = 1$, $a_1 = 3$
   в) $a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3}$, $n \geq 3$, $a_1 = 5$, $a_2 = 15$
   г) $a_n = 3a_{n-1} - 3a_{n-2} + a_{n-3}$, $n \geq 3$, $a_0 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 9$
   д) $a_n = 2a_{n-1} + n^2 + 2n - 1$, $n \geq 1$, $a_1 = 6$.

Користена литература

1. Batchedder P.M., An Introduction to linear difference equations, Dover Publications, 1967.
2. Cull P., Elahive M., Robson R., Difference equations: From rabbits to chaos, Springer, 2005.
3. Graham R.L, Knuth D.E., Patashnik O., Concrete Mathematics: A foundation for computer science, Second edition, Addison-Wesley Professional, 1994.
4. Green D. H., Knuth D.E., Homogeneous equations, Mathematics for the analysis of algorithms, Birkhäuser, 1982.
5. Малчески, Р., Малческа, В., Математика 5 – дискретна математика (второ издание), ФОН универзитет , Скопје, 2011