Двенадцатый Турнир, 1990-1991

ДВЕНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Осенний тур 1990 г.
8-9 кл., тренировочный вариант.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(4)
Докажите, что если произведение двух положительных чисел больше их суммы, то сумма больше четырёх.
Н. Васильев

Задача 2.(4)
Вершины правильного треугольника находятся на сторонах AB, CD и EF правильного шестиугольника ABCDEF.
Докажите, что они имеют общий центр.
Н. Седракян

Задача 3.(4)
Найдите 10 натуральных чисел обладающих тем свойством, что их сумма делится на каждое из них.
С. Фомин

Задача 4.(5)
Доска 100 на 100 разбита на 10000 единичных квадратиков. Один из них вырезали, так что образовалась дырка. Можно ли оставшуюся часть доски покрыть равнобедренными прямоугольными треугольниками с гипотенузой длины 2 так, чтобы их гипотенузы шли по сторонам квадратиков, а катеты - по диагоналям и чтобы треугольники не налегали друг на друга и не свисали с доски?
С. Фомин

ДВЕНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Осенний тур 28 октября 1990 г.
8-9 кл., основной вариант.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(4)
Дано:

$$a = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{\cfrac{\ldots}{99}}}} \qquad b = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{\cfrac{\ldots}{99 + \cfrac{1}{100}}}}}$$

Докажите, что $|a-b| < 1/(99!*100!)$.
Г. Гальперин(4)

Задача 2.(4)
Дана полуокружность Г с концами A и B. Для произвольной точки $C \in Г$ (C не равно A, C не равно B) на сторонах AC и BC треугольника ABC во внешнюю сторону треугольника построены квадраты. Найдите геометрическое место середины отрезка, соединяющего их центры, когда C описывает Г.
Й. Табов, София

Задача 3.(5)
Квадрат 8*8 клеток выкрашен в белый цвет. Разрешается выбрать в нём любой прямоугольник из трёх клеток и перекрасить все их в противоположный цвет (белые в чёрный, чёрные - в белый). Удастся ли несколькими такими операциями перекрасить весь квадрат в чёрный цвет?
И. Рубанов

Задача 4.(5)
Стороны AB, BC, CD и DA четырёхугольника ABCD равны соответственно сторонам A'B', B'C', C'D' и D'A' четырёхугольника A'B'C'D', причём известно, что сторона AB параллельна CD, а сторона B'C' параллельна D'A'.
Докажите, что оба четырёхугольника - параллелограммы.
В. Произволов

Задача 5.(6)
Числовая последовательность $\{x_n\}$ такова, что для любого $n > 1$ выполняется условие: $x_{n+1}=|x_n|-x_{n-1}$.
Докажите, что последовательность периодическая с периодом 9, то есть для любого $n \geq 1$ выполняется условие: $x_n=x_{n+9}$.
М. Концевич

Задача 6.(3+3+4+4)
В колоду сложено n различных карт. Разрешается переложить любое число рядом лежащих карт (не меняя порядок их следования и не переворачивая) в другое место колоды. Требуется несколькими такими операциями переложить все n карт в обратном порядке.
а)(3) Докажите, что при n=9 это можно сделать за 5 операций;
Докажите, что при n=52
б)(3) это можно сделать за 27 операций;
в)(4) нельзя за 17 операций;
г)(4) нельзя за 26 операций.
С. М. Воронин, Челябинск

ДВЕНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Осенний тур 1990 г.
10-11 кл., тренировочный вариант.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(4)
В клетках доски n*n произвольно расставлены числа от 1 до n^2.
Докажите, что найдутся две такие соседние клетки (имеющие общую вершину или общую сторону), что стоящие в них числа отличаются не меньше чем на n+1.
Н. Седракян, Ереван

Задача 2.(4)
Тремя бесконечными сериями равноотстоящих параллельных прямых плоскость разбита на равносторонние треугольники со стороной 1. M - множество всех их вершин. A и B - две вершины одного треугольника. Разрешается поворачивать плоскость на 120^o вокруг любой из вершин множества M. Можно ли за несколько таких преобразований перевести точку A в точку B?
Н. Васильев

Задача 3.(4)
На стене висят двое правильно идущих совершенно одинаковых часов. Одни показывают московское время, другие - местное. Минимальное расстояние между концами их часовых стрелок равно m, а максимальное - M. Найдите расстояние между центрами этих часов.
С. Фомин

Задача 4.(5)
В нашем распоряжении имеются "кирпичи", имеющие форму, которая получается следующим образом: приклеиваем к одному единичному кубу по трём его граням, имеющим общую вершину, ещё три единичных куба, так что склеиваемые грани полностью совпадают.
Можно ли сложить прямоугольный параллелепипед 11*12*13 из таких "кирпичей"?
С. Фомин

ДВЕНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Осенний тур 1990 г.
10-11 кл., основной вариант.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(3)
Дано:

$$a = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{99}}}} \qquad b = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{99 + \cfrac{1}{100}}}}}$$

Докажите, что $|a-b| < 1/(99!*100!)$.
Г. Гальперин(4)

Задача 2.(4)
На дуге AC окрнужности, описанной около правильного треугольника ABC, взята точка M; P - середина этой дуги. Пусть N - середина хорды BM, K - основание перпендикуляра, опущенного из точки P на MC.
Докажите, что треугольник ANK - правильный.
И. Нагель, Евпатория

Задача 3.(4)
Рассматривается конечное множество M единичных квадратов на плоскости. Их стороны параллельны осям координат (разрешается, чтобы квадраты пересекались). Известно, что для любой пары квадратов расстояние между их центрами не больше 2.
Докажите, что существует единичный квадрат (не обязательно из множества M) со сторонами, параллельными осям, пересекающийся хотя бы по точке с каждым квадратом множества M.
А. Анджанс

Задача 4.(5)
На плоскости расположено 20 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой, из них 10 синих и 10 красных.
Докажите, что можно провести прямую, по каждую сторону которой лежит 5 синих и 5 красных точек.
А. Кушниренко

Задача 5.(7)
В треугольнике ABC AC=CB, D - точка AB такая, что радиус окружности, вписанной в треугольник ACD, и радиус окружности, касающейся отрезка DB и продолжений прямых CD и CB и лежащей вне треугольника DCB, равны.
Докажите, что этот радиус равен одной четверти высоты треугольника ABC, проведённой к боковой стороне.
И. Шарыгин

Задача 6.(2+2+4+4)
В колоду сложено n различных карт. Разрешается переложить любое число рядом лежащих карт (не меняя порядок их следования и не переворачивая) в другое место колоды. Требуется несколькими такими операциями переложить все n карт в обратном порядке.
а)(2) Докажите, что при n=9 это можно сделать за 5 операций;
Докажите, что при n=52
б)(2) это можно сделать за 27 операций;
в)(4) нельзя за 17 операций;
г)(4) нельзя за 26 операций.
С. М. Воронин, Челябинск

ДВЕНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Весенний тур 1991 г.
8-9 кл., тренировочный вариант.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(3)
Имеется N целых чисел ($N > 1$). Известно, что каждое из них отличается от произведения всех остальных на число, кратное N.
Докажите, что сумма квадратов этих чисел делится на N.
Д. Фомин

Задача 2.(3)
Каждая из трёх окружностей радиусов соответственно 1, r и r извне касается двух других. При каких значениях r существует треугольник, описанный около этих окружностей? (Все окружности лежат внутри треугольника, каждая касается двух сторон треугольника и каждая сторона треугольника касается двух окружностей.)
Н. Васильев

Задача 3.(3)
В ряд стоят 30 сапог: 15 левых и 15 правых.
Докажите, что среди некоторых десяти подряд стоящих сапог левых и правых поровну.
Д. Фомин

Задача 4.(3)
На экране компьютера горит число, которое каждую минуту увеличивается на 102. Начальное значение числа 123. Программист Федя имеет возможность в любой момент изменять порядок цифр числа, находящегося на экране. Может ли он добиться того, чтобы число никогда не стало четырёхзначным?
Ленинградский фольклор

ДВЕНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Весенний тур 17 марта 1991 г.
8-9 кл., основной вариант.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(3)
Докажите, что произведение 99 дробей $(k^3-1)/(k^3+1)$, где $k = 2, 3, ..., 100$, больше 2/3.
Д. Фомин

Задача 2.(4)
В описанном пятиугольнике ABCDE диагонали AD и CE пересекаются в центре O вписанной окружности.
Докажите, что отрезок BO и сторона DE перпендикулярны.
Фольклор

Задача 3.(2+3)
Ищутся такие натуральные числа, оканчивающиеся (в десятичной записи - *добавлено редактором*) на 5, что в их десятичной записи цифры монотонно не убывают (то-есть каждая цифра, начиная со второй, не меньше предыдущей цифры), и в десятичной записи их квадрата цифры тоже монотонно не убывают.
а)(2) Найдите 4 таких числа.
б)(3) Докажите, что таких чисел бесконечно много.
А. Анджанс

Задача 4.(4)
Круг поделили хордой AB на два сегмента и один из них повернули вокруг точки A на некоторый угол. При этом точка B перешла в точку B'.
Докажите, что отрезки, соединяющие середины дуг сегментов с серединой отрезка BB', перпендикулярны друг другу.
З. Насыров, ученик 11 класса, г. Обнинск

Задача 5.(6)
В королевстве 8 городов. Король хочет построить такую систему дорог, чтобы из каждого города можно было попасть в каждый, минуя не более одного промежуточного города, и чтобы из каждого города выходило не более K дорог. При каких k это возможно?
С. Фомин

Задача 6.(8)
В соревновании участвуют 16 боксеров. Каждый боксер в течение одного дня может проводить только один бой. Известно, что все боксеры имеют разную силу, и что сильнейший всегда выигрывает.
Докажите, что за 10 дней можно определить место каждого боксера. (Расписание каждого дня соревнований составляется вечером накануне и в день соревнований не изменяется).
А. Анджанс, Рига

ДВЕНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Весенний тур 1991 г.
10-11 кл., тренировочный вариант.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(4)
Укажите все такие натуральные n, и целые неравные друг другу x и y, при которых верно равенство: $x+x^2+x^4+...+x^{2n}= y+y^2+y^4+...+y^{2n}$.
Фольклор

Задача 2.(4)
На окружности даны точки K и L. Построить треугольник ABC такой, что KL является его средней линией, параллельной AB, и при этом точка C и точка пересечения медиан треугольника ABC лежат на данной окружности.
Фольклор

Задача 3.(4)
На доске выписаны числа 1, 1/2, 1/3, ..., 1/100. Выбираем из написанных на доске два произвольных числа a и b, стираем их и пишем на доску число a+b+ab. Такую операцию проделываем 99 раз, пока не останется одно число. Какое это число?
Найдите его и докажите, что оно не зависит от последовательности выбора чисел.
Д. Фомин

Задача 4.(2+2)
а)(2) Можно ли расположить пять деревянных кубов в пространстве так, чтобы каждый имел общую часть грани с каждым? (Общая часть должна быть многоугольником.)
б)(2) Тот же вопрос про шесть кубов.
Фольклор

ДВЕНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Весенний тур 1991 г.
10-11 кл., основной вариант.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(4)
Ищутся такие оканчивающиеся на 5 числа (натуральные в десятичной записи - *добавление редактора*), что их цифры монотонно не убывают (то-есть каждая цифра, начиная со второй, не меньше предыдущей цифры), и в десятичной записи их квадрата цифры тоже монотонно не убывают.
Докажите, что таких чисел бесконечно много.
А. Анджанс

Задача 2.(5)
В окружности фиксирована хорда MN. Для каждого диаметра AB этой окружности рассмотрим точку C, в которой пересекаются прямые AM и BN, и проведем через неё прямую l, перпендикулярную AB.
Докажите, что все прямые l проходят через одну точку.
Е. Куланин

Задача 3.
Сумма n чисел равна нулю, а сумма их квадратов равна единице. Докажите, что среди этих чисел найдутся два числа, произведение которых не больше -1/n.
Фольклор

Оригинальный (без литературной правки) вариант условия::
n чисел x_1, x_2, x_3, ..., x_n удовлетворяют двум условиям: $\Sigma x_n=1$; $\Sigma x_n^2=0$.
Докажите, что из них найдутся два числа, произведение которых не больше -1/n.

Задача 4.(3+3)
На сфере отмечено 5 точек, никакие три из которых не лежат на большой окружности (большая окружность - это окружность, по которой пересекаются сфера и плоскость, проходящая через её центр). Две большие окружности, не проходящие через отмеченные точки, называются эквивалентными, если одну из них с помощью непрерывнвого перемещения по сфере можно перевести в другую так, что в процессе перемещения окружность не проходит через отмеченные точки.
а)(3) Сколько можно нарисовать окружностей, не проходящих через отмеченные точки, и не эквивалентных друг другу?
б)(3) Та же задача для n отмеченных точек.
А. Канель-Белов

Задача 5.(4+4)
В королевстве 16 городов. Король хочет построить такую систему дорог, чтобы из каждого города можно было попасть в каждый, минуя не более одного промежуточного города, и чтобы из каждого города выходило не более 5 дорог.
а)(4) Докажите, что это возможно.
б)(4) Докажите, что если в формулировке заменить число 5 на число 4, то желание короля станет неосуществимым.
С. Фомин

Задача 6.(8)
В соревновании участвуют 32 боксера. Каждый боксер в течение одного дня может проводить только один бой. Известно, что все боксеры имеют разную силу, и что сильнейший всегда выигрывает.
Докажите, что за 15 дней можно определить место каждого боксера. (Расписание каждого дня соревнований составляется вечером накануне и в день соревнований не изменяется).
А. Анджанс