XV олимпијада

1. Дадена е права l и точка $O \in l$. Нека $\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}, ..., \overrightarrow{OP_n}$ се единечни вектори такви што точките $P_1, P_2, ..., P_n$ се наоѓаат на иста страна од правата l. Докажи дека, ако n е непарен број, тогаш

$$|\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} + ... + \overrightarrow{OP_n}| \geq 1.$$

Решение. Тврдењето на задачата ќе го докажеме со индукција по n. За $n = 1$ тврдењето очигледно е точно.

Нека претпоставиме дека тврдењето е точно за некој непарен број точки n. Нека се дадени $n + 2$ точки. Точките можеме да ги означиме така што

$$\measuredangle(l, \overrightarrow{OP_1}) < \measuredangle(l, \overrightarrow{OP_2}) < \measuredangle(l, \overrightarrow{OP_3}) < ... < \measuredangle(l, \overrightarrow{OP_{n+2}}).$$

Во рамнината во која се наоѓаат точките поставуваме координатен систем на следниот начин: $y-$оската е симетрала на аголот $\measuredangle P_{n+2}OP_1$, а $x-$оската минува низ точката O. Ако (x_i, y_i) се координати на точките P_i, во избраниот координатен систем, тогаш $y_i \geq 0$ и $x_1 = -x_{n+2}$, $y_1 = y_{n+2}$, па според тоа

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} + ... + \overrightarrow{OP_{n+2}}|^2 &= (x_1 + x_2 + ... + x_{n+2})^2 + (y_1 + y_2 + ... + y_{n+2})^2 \\ &= (x_2 + x_3 + ... + x_{n+1})^2 + (y_1 + y_2 + ... + y_{n+2})^2 \\ &\geq (x_2 + x_3 + ... + x_{n+1})^2 + (y_2 + y_3 + ... + y_{n+1})^2 \\ &= |\overrightarrow{OP_2} + \overrightarrow{OP_3} + ... + \overrightarrow{OP_{n+1}}|^2 .\end{aligned}$$

Од индуктивната претпоставка имаме

$$|\overrightarrow{OP_2} + \overrightarrow{OP_3} + ... + \overrightarrow{OP_{n+1}}| \geq 1,$$

па затоа

$$|\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} + ... + \overrightarrow{OP_{n+2}}| \geq 1.$$

2. Дали постои конечно множество точки во просторот M, кои не лежат на иста рамнина, такви што за секои две точки A и B од M постојат други две точки C и D од M такви што правите AB и CD се паралелни и различни?

Решение. Во рамнина такво множество точки се темињата на правилниот петаголник и правилниот шестаголник.

Последното множество точки ќе го искористиме за конструкција на бараното множество точки во просторот. Ги земаме темињата на два правилни шестаголници кои имаат ист центар на симетрија и не лежат во една рамнина. Ова множество точки ги има бараните својства. Ако точките A и B се темиња на ист шестаголник, тогаш за C и D се земаат точки кои се централно симетрични во однос на центарот на симетрија на шестаголникот. Нека сега точките A и B припаѓаат на различни шестаголници. Повторно можеме да земеме централно симетрични слики на точките A и B во однос на заедничкиот центар на симетрија, кои исто така припаѓаат на даденото множество точки.

3. Најди ја најмалата вредност на изразот a^2+b^2, $a,b\in\mathbb{R}$ за кои равенката

$$x^4+ax^3+bx^2+ax+1=0$$

има барем едно реално решение.

Решение. Да претпоставиме дека равенката има решение $x>0$. За ова решение важи

$$x^4-|a|x^3-|b|x^2-|a|x+1\le x^4+ax^3+bx^2+ax+1=0,$$

или

$$x^4+1\le|a|x^3+|b|x^2+|a|x.$$

Лесно се докажуваат неравенствата

$$x^4+1\ge 2x^2 \text{ и } x^4+1\ge x^3+x.$$

Од претходните неравенства имаме

$$x^4+1\le|a|(x^4+1)+|b|\tfrac{x^4+1}{2}=(x^4+1)(|a|+\tfrac{|b|}{2}).$$

Според тоа, $|a|+\frac{|b|}{2}\ge 1$ т.е. $|b|\ge 2-2|a|$.

Ако $|a|\ge 1$, тогаш $a^2+b^2\ge 1$. Ако $|a|<1$, тогаш

$$a^2+b^2\ge|a|^2+(2-2|a|)^2=5(|a|-\tfrac{4}{5})^2+\tfrac{4}{5}\ge\tfrac{4}{5}.$$

Ако равенката има негативно решение x, тогаш $-x$ е позитивно решение на равенката

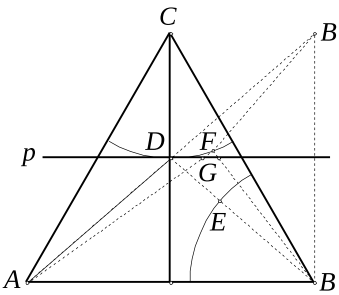
$$x^4-ax^3+bx^2-ax+1=0.$$

Сега на овој случај го применуваме претходниот заклучок. Не може да биде $x=0$.

Значи, во секој случај $a^2+b^2\ge\frac{4}{5}$. Знак за равенство важи за $a=-\frac{4}{5}$, $b=-\frac{2}{5}$.

4. Војник треба да провери дали во област која има облик на рамностран триаголник (вклучувајќи ја и неговата граница) има мини. Дометот на неговиот детектор е еднаков на половина од должината на висината на триаголникот. Војникот тргнува од едно теме на триаголникот. Како треба да се движи војникот за да ја исполни задачата, а при тоа да помине пат со најмала можна должина.

Решение. Нека војникот поаѓа од темето A. За да ги испита темињата B и C, мора да дојде до кружните лаци со радиус $\frac{h}{2}$ (h е висина на триаголникот) и центри во B и C. Нека на почеток бил на лакот со центар во C, а потоа на лакот со центар во B. Ако на овој пат се додаде патот до темето B, задачата се сведува на барање на најкраток пат од A до B, при услов да дојде на лакот со центар во C. Ќе докажеме дека најкраток таков пат е патот $ADB,$ каде што D е средината на висината повлечена од темето C. Нека E е пресек на отсечката BD и лакот со центар во $B,$ а F е било која точка на лакот со центар во C. Низ D повлекуваме права $p \| AB$ и точката B ја пресликуваме симетрично во однос на таа права. Добиената точка ја означуваме со B', а со G го означуваме пресекот на отсечката FB и правата p. Тогаш



Црт. 15.1.

$$\overline{AF}+\overline{FB}=\overline{AF}+\overline{FG}+\overline{GB}\geq\overline{AB'}=\overline{AD}+\overline{DB}$$

(точките A, D, B' се на иста права). Значи, ADB е најкраткиот пат од A до B, па решение на задачата е патот ADE. (Сега не е тешко да се покаже дека може да се испита целата област).

5. Нека G е непразно множество реални функции од облик $f(x)=ax+b$, $a,b\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$, кои ги задоволуваат условите:

1° ако $f,g\in G$, тогаш $g\circ f\in G$, каде $(g\circ f)(x)=g(f(x))$

2° ако $f=ax+b$, тогаш инверзната функција $f^{-1}\in G$, каде

$$f^{-1}(x)=\tfrac{x-b}{a};$$

3° за секое $f\in G$ постои x_f, таков што $f(x_f)=x_f$.

Докажи дека постои $k\in\mathbb{R}$ таков што $f(k)=k$ за секоја $f\in G$.

Решение. Ако функцијата $f(x)=x+b$ припаѓа на множеството G, тогаш $b=0$ (според 2°), т.е. тогаш $f(x)=x$. Затоа можеме да претпоставиме дека постојат барем две функции $f_1(x)=a_1x+b_1$ и $f_2(x)=a_2x+b_2$, такви што $a_1\neq 1$ и $a_2\neq 1$. Тогаш, $x_{f_1}=\frac{b_1}{1-a_1}$ и $x_{f_2}=\frac{b_2}{1-a_2}$. Од 1° и 2° имаме

$$g=f_1\circ f_2\in G \quad \text{и} \quad h=f_2\circ f_1\in G \quad \text{и} \quad g\circ h^{-1}\in G.$$

Според тоа,

$$g(x)=a_1(a_2x+b_2)+b_1,\ h(x)=a_2(a_1x+b_1)+b_2,$$

$$h^{-1}(x)=\tfrac{x-a_2b_1-b_2}{a_1a_2},\ (a_1a_2\neq 0),\ g\circ h^{-1}(x)=x+[(a_1b_2+b_1)-(a_2b_1+b_2)].$$

Бидејќи $g\circ h^{-1}\in G$ и бидејќи коефициентот пред x во $g\circ h^{-1}$ е еднаков на 1, мора да е исполнето $(a_1b_2+b_1)-(a_2b_1+b_2)=0$. Значи, $\frac{b_1}{1-a_1}=\frac{b_2}{1-a_2}$ т.е. $x_{f_2}=x_{f_1}$, што и требаше да се докаже.

6. Нека $a_1,a_2,...,a_n$ се дадени позитивни реални броеви и $q\in\mathbb{R}$, $0<q<1$. Најди n реални броеви $b_1,b_2,...,b_n$ такви што

а) $a_k<b_k$, за $k=1,2,3,...,n$,

б) $q<\frac{b_{k+1}}{b_k}<\frac{1}{q}$, за $k=1,2,3,...,n-1$, и

в) $b_1+b_2+...+b_n<\frac{1+q}{1-q}(a_1+a_2+...+a_n)$.

Решение. Ќе докажеме дека броевите

$$b_k=a_1q^{k-1}+a_2q^{k-2}+a_3q^{k-3}+...+a_{k-1}q+a_k+a_{k+1}q+...+a_nq^{n-k}$$

ги задоволуваат условите (a), (b) и (c).

Јасно, условот (a) е исполнет. Ако $1\le k\le n-1,$ тогаш

$$qb_k-b_{k+1}=a_{k+1}(q^2-1)+...+a_nq^{n-k-1}(q^2-1)<0,$$

и аналогно $qb_{k+1}-b_k<0$, па според тоа и условот (b) е исполнет. Конечно,

$$\begin{aligned}b_1+b_2+...+b_n&=a_1+a_2q+...+a_nq^{n-1}+a_1q+a_2q^2+a_3q^3+...+a_nq^{n-2}+...\\&+a_1q^{n-1}+a_2q^{n-2}+...+a_n<(a_1+...+a_n)(1+2q+...+2q^{n-1})\\&<(a_1+...+a_n)\frac{1+q}{1-q}.\end{aligned}$$