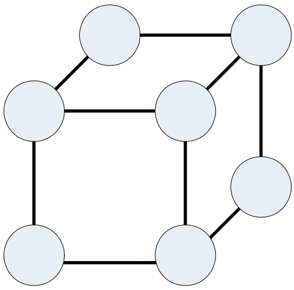
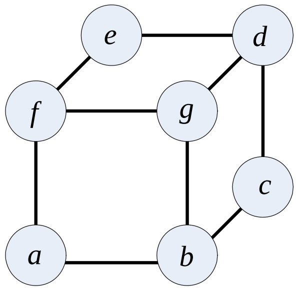
РАЗМЕСТУВАЊЕ НА БРОЕВИ

Драгољуб Милошевиќ

На натпреварите по математика за учениите од основните училишта не ретко се среќаваат задачи во кои се бара да одредени броеви се распоредат на зададен начин, според однапред определени правила, односно да задоволат одредени услови.





Во оваа статија ќе бидат разгледани некои задачи од овој тип.

Пример 1. Распореди ги првите седум природни броеви така да збирот на броевите во темињата на секој од четириаголниците на цртежот 1 е ист.

Решение. Да ги означиме бараните броеви во темињата на четириаголниците со a, b, c, d, e, f и g како што е прикажанон а цртежот(цртеж 2). Да забележиме дека постојат броеви (a, c, e) кои што се наоѓаат само во еден четириаголник, броеви (b, d, f) кои припаѓаат на два четириаголници и еден број g кој припаѓа на сите три четириаголници. Според тоа, имаме

$$a+2b+c+2d+e+2f+3g=3k$$

$$(a+b+c+d+e+f+g)+(b+d+f+2g)=3k,$$

каде што k е бараниот збир (константа).

Бидејќи збирот на првите седум природни броеви е 28, па од последната релација излегува дека

$$b+d+f+2g=3k-28. \qquad (*)$$

Најмала можна вредност на изразот $b+d+f+2g$ е 11 (бидејќи $2+3+3+2\cdot 1=11$), а најголема е 29. Ако се земе предвид овој факт, и користејќи го равенството (*) добиваме $11 \le 3k-28 \le 29$, а одовде имаме $13 \le k \le 19$.

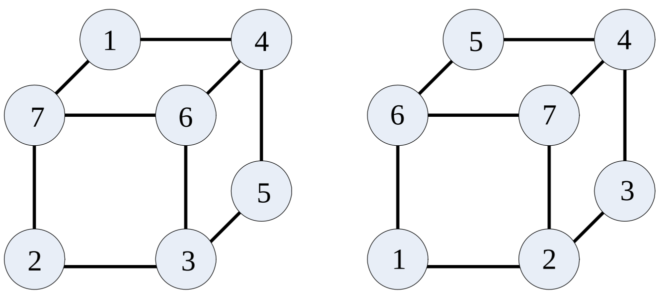
Значи, збирот на броевите во секој од четириаголниците може да биде еден од броевите: $13,14,15,16,17,18$ (еден од нив за сите четириаголници).

Ќе направиме распоред на броевите, на пример за $k=18$. Ако во (*) замениме $k=18$ добиваме $b+d+f+2g=3\cdot 18-28=26$. Со помош на едноставни проби лесно се добива дека едно од можните решенија е $b=3$, $d=4$, $f=7$ и $g=6$ (да забележиме дека $3+4+7+2\cdot 6=26$).

Добиените броеви ќе ги запишеме на соодветните места. Понатаму заклучуваме дека $e=18-(7+6+4)=1$, потоа $a=2$ и $c=5$ (види цртеж). Читателот сам нека ги определи останатите решенија.

Предупредување. Комбинацијата броеви $b=3, d=6, f=7$ и $g=5$ не е можна, иако е исполнето равенството $3+6+7+2\cdot 5=26$.

Напомена. Најпрост начин оваа задача да се реши е да се направа сите можни подмножества (сите пермутации) на броевите $1, 2, 3, 4, 5, 6$ и 7 и со прости пресметаки да се види за кои од нив се исполнети условите од задачата. Така на пример одма може да се види дека основниот распоред на дадените елементи не го исполнува условот од задачата. Навистина, во распоредот кој е прикажан на цртежот збирот на броевите во едниот четириаголник е $1+2+7+6=16$, збирот на броевите во другиот четириаголник е $2+3+4+7=16$, а збирот на броевите во третиот четириаголник е $7+4+5+6=22$. Но, колку пресметувања се потребни за да се дојде до некој од бараните распореди, ако тоа го правиме систематски! Се разбира многу. Заради тоа, ваквите задачи се интересни ако може да се решат без системско испитување на сите можни случаи, како што тоа е направено во примерот.



Пример 2. Да се пополнат полињата на квадратот на цртежот, така да тој биде магичен квадрат.

Решение. Да го разгледаме основниот магичен квадрат од четврт ред, т.е. да направиме разместување на преостанатите броеви од множеството од првите 16 природни броеви.

1			
		2	
	3		
			4

Ако се има во предвид дека

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14+15+16=136,$$

збирот во магичниот квадрат(т.е. збирот на броевите во иста хоризонтал, вертикала, односно секоја дијагонала) е еднаков на 34.

1			14
	13	2	
	3	16	
15			4

a)

1			15
	13	2	
	3	16	
14			4

b)

1			14
	16	2	
	3	13	
15			4

c)

1			15
	16	2	
	3	13	
14			4

d)

1			13
	14	2	
	3	15	
16			4

e)

1			16
	14	2	
	3	15	
13			4

f)

1			13
	15	2	
	3	14	
16			4

g)

1			16
	15	2	
	3	14	
13			4

h)

Да забележиме дека збирот на веќе запишаните броеви во секоја од дијагоналите е 5(види цртеж), во преостанатите полиња на секоја од нив треба да се запише збир кој е еднаков на 29. Тој услов го

1	a	b	14
c	13	2	d
e	3	16	f
15	g	h	4

1	8	11	14
12	13	2	7
6	3	16	9
15	10	5	4

1	12	7	14
8	13	2	11
10	3	16	5
15	6	9	4

задоволуваат два пара на природни броеви од споменатото множество, $\{13,16\}$ и $\{14,15\}$, кое се проверува со обична проба. Сите можни распореди на овие парови се дадени на цртежите подолу(a)-h)).

Ќе го разгледаме случајот а) а броевите од непополнетите полиња на квадратот ќе ги означиме со a, b, c, d, e, f, g и h (види цртеж).

Од условот на задачата имаме:

$$a+b=19, \quad c+d=19, \quad e+f=15, \quad g+h=15$$

$$c+e=18, \quad a+g=18, \quad b+h=16, \quad d+f=16.$$

Ако направиме смена $a=19-b$, го добиваме системот

$$\begin{cases} c+d=19 \\ e+f=15 \\ g+h=15 \\ c+e=18 \\ b-g=1 \\ b+h=16 \\ d+f=16 \end{cases}.$$

Ако извршиме смена $b=1+g$ во последниот систем, добиваме

$$\begin{cases} c+d=19 \\ e+f=15 \\ g+h=15 \\ c+e=18 \\ d+f=16 \end{cases},$$

а од овде со смена $e=19-d$, го добиваме системот:

$$\begin{cases} e+f=15 \\ g+h=15 \\ d-e=1 \\ d+f=16 \end{cases}.$$

На крај со смената $d=e+1$ се добива системот

$$\begin{cases} e+f=15 \\ g+h=15 \end{cases}.$$

Според добиениот систем, гледаме дека едниот од собироците (броевите e или f, односно g или h) можеме слободно да го одбираме, при што мора да водиме сметка да не се случи да добиеме решение во кое имаме два исти броја, односно две од непознатите да имаат иста вредност.

Преостанатите броеви се од множеството $A=\{5,6,7,...,12\}$. Заради равенството $e+f=15$ треба да се провери дали e може да биде некоја од следните вредности: $5,6,7,8,9,10$ (јасно е дека e не може да е 11 или 12).

За $e=5$ добиваме $f=10$, па заради равенствата $d=e+1$ и $c=15-d$, добиваме $d=6$ и $c=13$ што не е можно.

За $e=6$, добиваме $f=9$. Тогаш $d=7$ и $c=12$. За распоредување се останати броевите $5,8,10,11$. Единствено броевите 5 и 10 даваат збир 15, лесно се добива дека $g=10$ и $h=5$ (ако $g=5$ тогаш би добиле $b=6=e$ што не е можно). Но сега, $b=10+1=11$ и $a=19-11=8$ (види цртеж).

Спроведувајќи слична постапка, лесно се согледува дека e не може да биде ниту еден од броевите $7,8,9$.

На крај за $e=10$ имаме $f=5$, па лесно се добива дека $d=11$ и $c=8$.

Остануваат за распоредување броевите $6,7,9,12$. Единствено броевите 6 и 9 го исполнуваат условот да нивниот збир е 15. Непосредно добиваме $g=1+6=7$ и $a=19-7=12$ (случајот $g=9$ не е можен, бидејќи во тој случај би добиле $b=1+9=10=e$; види цртеж).

На читателот за вежба му преостанува сам да провери, дали има и колку решенија, почнувајќи од шемите а и б.

Задачи за вежбање

1. Направи распоред на броевите од множеството $\{1,2,3,4,5,6\}$ така да збирот на броевите во секое од темињата на четириаголниците на цртежот од почетокот на статијата биде

А) 13 Б)14 В)15 Г)16 Д)17 Ѓ)19

2. Пробај наместо првите седум природни броеви, да ги распоредиш било кои седум последователни природни броеви во кругчињата од цртежот од претходната задача, така што збирот на броевите во секој четириаголник биде ист.

3. Елементите од множеството

$\{9, 10, 11, 12, 17, 18, 19, 20, 25, 26, 27, 28\}$

распореди ги во празните полиња од квадратот така што тој да стане магичен. Најди барем едно решение!

	4	1	
2			3

4. Распореди ги броевите $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ и 9 во точки од кружница(два различни броја во две различни точки), така што збирот на било кои два соседни броја да не е делив ни со 3, ни со 5, ни со 7. Колку такви распореди има? (задача од натпревари на млади математичари ви Република Босна и Херцеговина, 1983 година).