31. TURNIR GRADOVA

Jesenje kolo.

Bazna varijanta, 18. oktobar 2009. god.

8–9. razred (mlađi uzrast)

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je dobijeno najviše poena, poeni za delove jednog zadatka se sabiraju)

---

1. (3 poena) Može li se kvadrat razrezati na 9 kvadrata i obojiti tako da se dobije 1 beli, 3 siva i 5 crnih kvadrata, pri čemu bi istobojni kvadrati bili jednaki, a raznobojni kvadrati – nejednaki?.

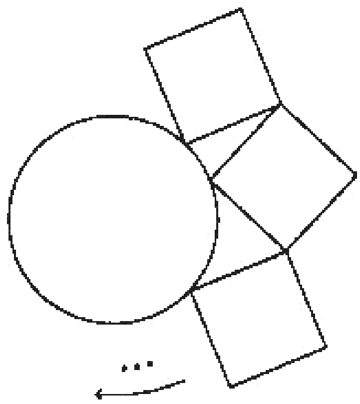
2. (4 poena) Imamo 40 tegova mase 1 g, 2 g, ..., 40 g. Od njih je izabrano 10 tegova s parnom masom i stavljeni su na levi tas terazija. Zatim je izabrano 10 tegova s neparnom masom i stavljeni su na desni tas terazija. Terazije su bile u ravnoteži. Dokažite da se na nekom tasu nalaze dva tega čije se mase razlikuju za 20 g.

3. (4 poena) Na stolu se nalazi kartonski krug poluprečnika 5 cm. Petar, sve dok može, prislanja uz krug spolja kartonske kvadrate stranice 5 cm, tako da budu ispunjeni ovi uslovi:

1) kod svakog kvadrata jedno teme leži na kružnici-granici kruga;

2) kvadrati se ne prekrivaju;

3) svaki sledeći kvadrat dodiruje prethodni u temenu.



Odredite koliko kvadrata može postaviti Petar i dokažite da će prvi i poslednji kvadrat takođe da imaju zajedničko teme.

4. (5 poena) Sedmocifrenu šifru (kod), nazvaćemo dobrim ako se sastoji od sedam različitih cifara. Sef je zaključan (zaštićen) dobrom šifrom. Poznato je da će se sef otvoriti ako se unese dobra šifra koja se bar na jednoj poziciji poklapa sa šifrom sefa (reč je o poklapanju cifara na istoj poziciji). Može li se garantovano sef otvoriti za manje od 7 pokušaja?

5. (5 poena) Na jednom novom sajtu registrovalo se 2000 ljudi. Svaki je pozvao 1000 ljudi među onima koji su registrivani na tom sajtu da mu budu prijatelji. Dva čoveka postaju prijatelji tada i samo tada kada pozovu jedan drugog. Koliki je najmanje broj parova prijatelja na tom sajtu?

31. TURNIR GRADOVA

Jesenje kolo.

Bazna varijanta, 18. oktobar 2009. god.

10–11. razred (stariji uzrast)

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je dobijeno najviše poena. Poeni po delovima jednog zadatka se sabiraju)

---

1. (4 poena) Sedmocifrenu šifru (kod), nazvaćemo dobrim ako se sastoji od sedam različitih cifara. Sef je zaključan (zaštićen) dobrom šifrom. Poznato je da će se sef otvoriti ako se unese dobra šifra koja se bar na jednoj poziciji poklapa sa šifrom sefa (reč je o poklapanju cifara na istoj poziciji). Može li se garantovano sef otvoriti za manje od 7 pokušaja?

2. (4 poena) U prostoru se nalazi zatvorena izlomljena linija od šest delova *ABCDEF* čiji su suprotni delovi paralelni ($AB||DE$, $BC||EF$ i $CD||FA$). Pri tome *AB* nije jednako *DE*. Dokažite da svi delovi izlomljene linije leže u istoj ravni.

3. (4 poena) Postoje li prirodni brojevi *a*,*b*, *c*,*d* takvi da važi jednakost

$$a^3+b^3+c^3+d^3=100^{100}?$$

4. (4 poena) Na svakoj stranici pravilnog 2009-ougla uočena je i označena po jedna tačka. Te tačke su temena 2009-ugla površine *S*. Svaka od tih uočenih tačaka preslikana je simetrično u odnosu na središte stranice na kojoj se ta tačka nalazi. Dokažite da 2009-ugao s temenima u dobijenim (preslikanim) tačkama takođe ima površinu *S*.

5. (5 poena) U nekoj saveznoj državi nalaze se dva glavna grada (severni i juž-ni) i nekoliko drugih gradova od kojih su neki povezani autoputevima. Među tim putevima ima i onih na kojima se plaća putarina. Poznato je da na ma kojem putu iz južne prestonice u severnu ima ne manje od 10 puteva (deonica) gde se plaća putarina. Dokažite da se svi putevi (deonice puta), za koje se plaća putarina, mogu podeliti između deset kompanija, tako da na ma kojem putu iz južne u severnu prestonicu ima puteva (deonica) svake od tih kompanija.

31. TURNIR GRADOVA

Jesenje kolo.

Sožena varijanta, 25. oktobar 2009. god.

8–9. razred (mlađi uzrast)

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je dobijeno najviše poena, poeni za delove jednog zadatka se sabiraju)

---

1. (4 poena) U 10 jednakih bokala razliveno je mleko – ne obavezno na ravne delove, ali je svaki bokal bio ispunjen ne više od 10%. U jednom koraku možemo odabrati jedan bokal i odliti iz njega bilo koju, ali jednaku količinu mleka u ostale bokale. Dokažite da se za ne više od 10 takvih operacija može postići da u svim bokalima bude ista količina mleka.

2. (6 poena) Miša ima 1000 jednakih kockica, pri čemu je kod svake jedan par suprotnih strana bele boje, drugi par – plave boje, a treći par – crvene boje. On je od njih sastavio veliku kocku 10×10×10, prislanjajući jednu do druge strane iste boje. Dokažite da ta velika kocka ima istobojnu stranu.

3. (6 poena) Odredite sve prirodne brojeve a i b, takve da $(a+b^2)(b+a^2)$ predstavlja broj koji je stepen broja 2.

4. (6 poena) Na stranicama BC i CD romba $ABCD$ uzete su tačke P i Q (tim redom) tako da je $BP=CQ$. Dokažite da se presečna tačka težišnih duži trougla APQ nalazi na dijagonali BD romba.

5. (9 poena = 2 poena +7 poena) Između tegova mase 1 g, 2 g, 3 g, ..., N g treba izabrati nekoliko tegova (više od jednog) sa sumarnom masom koja je jednaka prosečnoj masi preostalih tegova. Dokažite:

a) to se može učiniti ako je N+1 kvadrat celog broja (2 poena);

b) ako se to može učiniti, onda je N+1 kvadrat celog broja (7 poena).

6. (10 poena) Na ravan sa kvadratnom mrežom stavljano je 2009 jednakih kvadrata čije stranice leže na linijama mreže. Zatim su označena sva polja (kvadratići) koja su pokrivena neparnim brojem kvadrata. Dokažite da tako označenih polja nema manje od broja polja u jednom kvadratu.

7. (14 poena) Olga i Maksim platili su za putovanje po arhipelagu od 2009 ostrva, pri čemu su neka ostrva povezana dvosmernim brodskim maršrutama. Putovanje su organizovali kao igru. Na početku Olga bira ostrvo na koje će prvo da doputuju. Zatim zajedno putuju brodovima, naizmenično birajući ostrvo, na kojem još nisu bili. Počinje da bira Maksim. Gubi onaj ko ne može da izabere ostrvo (jer nema broda koji ide sa ostrva na kojem se nalaze na neko neposećeno ostrvo). Dokažite da pri ma kojoj šemi maršruta Olga može da pobedi, ma kako igrao Maksim.

31. TURNIR GRADOVA

Jesenje kolo.
Složena varijanta, 25. oktobar 2009. god.
10–11. razred (stariji uzrast)
(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je dobijeno najviše poena. Poeni po delovima jednog zadatka se sabiraju)

---

1. (4 poena) Sto pirata igrali su karte uz plaćanje u zlatu (zlatnim peskom), a zatim je svaki izbrojao koliko je puta ukupno dobio ili izgubio. Svaki pirat koji izgubi ima dovoljno zlata da plati. Tokom jedne operacije (igre) pirat može bilo da svima iz svojih zaliha dâ (isplati) jednaku količinu zlata (kad izgubi), bilo da njemu (kada igru dobije) svaki od ostalih pirata plati jednu te istu istu količinu zlata. Dokažite da se za nekoliko takvih operacija može postići da svaki pirat dobije (sumarno) svoj dobitak ili da isplati gubitak (To znači: ako je neko u igri dobio neku količinu zlata, onda on posle toga (posle podele) ima za toliko zlata više nego što je imao do podele; a ako je u igri izgubio neku količinu zlata, onda on posle toga ima za toliko manje zlata nego što je imao do tada. Razume se da je ukupan broj dobitaka jednak ukupnom broju gubitaka).

2. (6 poena) Od N pravougaonih pločica (ne moraju biti jednake) sastavljen je pravougaonik s nejednakim stranicama. Dokažite da se svaka pločica može raseći na dva dela tako da se od N delova može sastaviti kvadrat, a od preostalih N delova– pravougaonik.

3. (7 poena) Sfera dodirije sve ivice tetraedra. Spojimo dodirne tačke koje su na parovima nesusednih ivica. Dokazati da se tri tako dobijene duži seku u jednoj tački.

4. (9 poena) Označimo sa $[n]!$ proizvod $1\cdot 11\cdot 111\cdot\ldots\cdot 1\ldots 11$ (n jedinica) – svega n faktora. Dokažite da je broj $[n+m]!$ deljiv proizvodom $[n]!\cdot[m]!$.

5. (9 poena) Dati su trougao XYZ i konveksan šestougao $ABCDEF$. Stranice AB, CD i EF su paralelne i redom jednake stranicama XY, YZ i ZX. Dokažite da površina trougla s temenima u središtima stranica BC, DE i FA nije manja od površine trougla XYZ.

6. (12 poena) Olga i Maksim platili su za putovanje po arhipelagu od 2009 ostrva, pri čemu su neka ostrva povezana dvosmernim brodskim maršrutama. Putovanje su organizovali kao igru. Na početku Olga bira ostrvo na koje će prvo da doputuju. Zatim zajedno putuju brodovima, naizmenično birajući ostrvo, na kojem još nisu bili. Počinje da bira Maksim. Gubi onaj ko ne može da izabere ostrvo (jer nema broda koji ide sa ostrva na kojem se nalaze na neko neposećeno ostrvo). Dokažite da pri ma kojoj šemi maršruta Olga može da pobedi, ma kako igrao Maksim.

7. (14 poena) Na ulazu u pećinu postavljen je uspravno bubanj (cilindar), na kome je po obodu (kružno) na jednakim razmacima raspoređeno N po izgledu spolja jednakih burića. U svakom burencetu nalazi se haringa – bilo s glavom nagore, bilo s glavom nadole, ali gde i kako – ne vidi se. U jednom koraku Ali-Baba bira nekoliko burića (od 1 do N komada) i prevrće ih. Posle toga bubanj počinje da se okreće, a kada se zaustavi, Ali-Baba ne može da odredi koji burići su bili prevrnuti. Pećina se otvara ako za vreme okretanja bubnja svih N haringi budu okrenute glavom na istu stranu. Za koje vrednosti N Ali-Baba može za izvestan broj koraka otvoriti pećinu?

31. TURNIR GRADOVA

Prolećno kolo.

Bazna varijanta, 28. februar 2010. god.

8–9. razred (mlađi uzrast)

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je dobijeno najviše poena, poeni za delove jednog zadatka se sabiraju)

---

1. (3 poena) U šest korpi nalaze se kruške, šljive i jabuke. Broj šljiva u svakoj korpi jednak je broju jabuka u ostalim korpama uzetih zajedno, a broj jabuka u svakoj korpi jednak je broju krušaka u ostalim korpama uzetih zajedno. Dokažite da je ukupan broj voćki deljiv sa 31.

2. (3 poena) Miloš i Kosta seku kvadratnu tortu. Kosta bira na torti tačku (ali ne na rubu/granici). Posle toga Miloš čini pravolinijski rez od izabrane tačke do kraja (u bilo kom pravcu). Zatim Kosta čini drugi pravolinijski rez od izabrane tačke do kraja, ali normalan na prvi rez, a onda manji od dobijenih delova daje Milošu. Miloš želi da dobije bar četvrtinu torte. Može li ga Kosta u tome sprečiti?

3. Nacrtan je ugao i na raspolaganju je samo šestar.

a) (2 poena) Koliko najmanje kružnica treba nacrtati da bi se sa sigur-nošću utvrdilo da li je dati ugao oštar?

b) (2 poena) Kako utvrditi da li je veličina datog ugala 31^0? Dopušteno je opisivati koliko-god bilo kružnica.

4. (5 poena) Na jednoj olimpijadi svaki učesnik poznaje bar tri druga učesnika. Dokažite da se može izabrati grupa sa parnim brojem učesnika (više od 2 čoveka) i rasporediti ih oko okruglog stola tako da svaki poznaje oba svoja suseda.

5. (5 poena) Na tabli je napisan 101 broj: 1 na kvadrat, 2 na kvadrat, ... , 101 na kvadrat. U jednoj operaciji (koraku) dopušteno je izbrisati ma koja dva broja i umesto njih zapisati moduo (apsolutnu vrednost) njihove razlike. Koji najmanji broj se može dobiti posle 100 takvih operacija?

31. TURNIR GRADOVA

Prolećno kolo.
Bazna varijanta, 28. februar 2010. god.
10–11. razred (stariji uzrast)

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je dobijeno najviše poena. Poeni po delovima jednog zadatka se sabiraju)

---

1. (3 poena) Iz Južne Amerike u Rusiju prevoze banane, limune i ananase 2010 brodova. Broj banana na svakom brodu jednak je broju limuna na svim ostalim brodovima uzetim zajedno, a broj limuna na svakom broju jednak je broju ananasa na ostalim brodovima uzetim zajedno. Dokažite da je ukupan broj južnog voća na brodovima deljiv sa 31.

2. (4 poena) O funkciji $f(x)$ poznato je sledeće: ma koja prava u koordinatnoj ravni ima sa grafikom $y=f(x)$ onoliko zajedničkih tačaka koliko ih ima sa parabolom $y=x^2$. Dokažite da je funkcija $f(x)$ identički jednaka x^2.

3. (5 poena) Može li se površ pravilnog oktaedra oblepiti sa nekoliko pravilnih šestouglova bez preklapanja i praznina (razmaka)? /Pravilan oktaedar ima 6 temena, sve strane su mu jednakostranični trouglovi, a u svakom temenu sustiču se 4 strane/

4. (5 poena) Baron Minhauzen je zamolio da neko zamisli polinom (različit od konstante) $P(x)$ s celim nenegativnim koeficijentima i da mu saopšti samo vrednosti $P(2)$ i $P(P(2))$. Baron tvrdi da on samo na osnovu tih podataka uvek može rekonstruisati (pogoditi) zamišljeni polinom. Da li baron greši?

5. (6 poena) U ravni se nalazi igla. Dopušteno je iglu okretati za 45^0 oko bilo kojeg njenog kraja. Može li se, učinivši nekoliko takvih okretanja igle, postići to da se igla vrati na početno mesto, ali tako da su njeni krajevi zamenili mesta? /Smatrajte da je igla duž?/

31. TURNIR GRADOVA

Prolećno kolo.

Složena varijanta, 14. mart 2010. god.

8–9. razred (mlađi uzrast)

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je dobijeno najvi{e poena, a poeni za delove jednog zadatka se sabiraju)

---

1. (3 poena) Imamo komad (parče) sira. Dopušteno je izabrati ma koji pozitivan (može i neceo) broj *a*, različit od 1, pa razrezati (podeliti) to parče u odnosu 1 : *a* po težini, zatim razrezati u tom istom odnosu ma koji od nastalih komada, itd. Može li se to (u)raditi tako da posle konačnog broja razrezivanja ceo sir bude podeljen na dve gomile iste težine?

2. (4 poena) U trouglu *ABC* tačka *M* je središte stranice *AC*, a tačka *P* leži na stranici *BC*. Duž *AP*seče *BM* u tački *O*. Pokazalo se da je *BO*=*BP*. Nađite odnos *OM*:*PC*

3. Na kružnici je raspoređeno 999 brojeva, svaki je jednak 1 ili −1, pri čemu nisu svi brojevi jednaki. Uzmimo sve proizvode po 10 uzastopnih brojeva (tj.. koji su jedan za drugim) i saberimo ih.

a) (3 poena) Koliki najmanji zbir se tako može dobiti?

b) (3 poena) A koji najveći?

4. (6 poena) Zbir cifara prirodnog broja *n* jednak je 100. Može li zbir cifara kuba broja *n* da bude jednak 1000000?

5. a) (3 poena) Tri viteza jašu na konjima po kružnom putu u smeru suprotnom kretanju satne kazaljke. Mogu li oni da jašu neograničeno dugo s različitim stalnim brzinama, ako na putu postoji samo jedna tačka (mesto) gde jahači imaju mogućnost da prestignu jedan drugog?

b) A ako ima 10 vitezova?

6. (8 poena) U ravni je data otvorena izlomljena linija koja samu sebe nigde ne seče, a sastoji se od 31 dela (duži) (susedni delovi ne pripadaju jednoj pravoj). Preko svakog dela izlomljene linije povučena je prava koja sadrži taj deo. Dobijena je 31 prava, pri čemu je moguće da su se neke prave poklopile. Koliki je najmanji broj različitih pravih koje se tako mogu dobiti?

7. (11 poena) Na nekim poljima table 10×10 nalazi se po jedna buva. Svakog minuta buve skaču, svaka na susedno polje (u odnosu na stranicu). Buve skaču samo u jednom od četiri pravca, paralelna ivicama table, ostajući na istom pravcu, dok je to moguće, a u protivnom slučaju menjaju smer u suprotni. Pera je posmatrao buve u toku jednog sata i nijednom nije video da se dve buve nalaze na istom polju. Koliki je najveći broj buva mogao da skače po tabli?

31. TURNIR GRADOVA
Prolćno kolo.
Složena varijanta, 14. mart 2010. god.
10–11. razred (stariji uzrast)
(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je dobijeno najviše poena.
Poeni po delovima jednog zadatka se sabiraju)

---

1. (3 poena) Mogu li se sve prave u ravni razdvojiti na parove uzajamno normalnih pravih tako da svaka prava pripada tačno jednom paru normalnih pravih?

2. a) (2 poena) Imamo parče sira. Dopušteno je izabrati ma koji iracionalan broj $a>0$ i razrezati (podeliti) to parče u odnosu $1 : a$ po težini, zatim razrezati u tom istom odnosu ma koji od nastalih komada, itd. Može li se to (u)raditi tako da posle konačnog broja razrezivanja ceo sir bude podeljen na dve gomile iste težine?
b) (2 poena) Isto pitanje, ako se bira pozitivan racionalan broj $a\neq 1$.

3. (6 poena) Može li se, primenjujući na broj 1 funkcije sin, cos, tg, ctg, arcsin, arccos, arctg, arcctg, u nekom redosledu, dobiti broj 2010? (Svaka funkcija se može koristiti koliko-god hoćete puta).

4. (6 poena) Na kongresu se skupilo 5000 ljubitelja filma, pri čemu je svaki video bar jedan film. Podeljeni su u sekcije dva tipa: ili rasprava o filmu koji su videli svi članovi sekcije; ili svaki priča o filmu koji je on video, a nije ga više video niko u sekciji. Dokazati da se svi mogu podeliti tačno na 100 sekcija.(Dopuštena je i sekcija od jednog čoveka: on piše mišljenje o filmu koji je video).

5. (7 poena) Trideset tri viteza jašu na konjima po kružnom putu u smeru suprotnom kretanju satne kazaljke. Mogu li oni da jašu neograničeno dugo s različitim stalnim brzinama, ako na putu postoji samo jedna tačka (mesto) gde jahači imaju mogućnost da prestignu jedan drugog?

6. (8 poena) Četvorougao $ABCD$ je opisan oko kružnice s centrom I . Tačke M i N su središta stranica AB i CD. Zna se da je $IM/AB=IN/CD$. Dokažite da je $ABCD$ trapez ili paralelogram.

7. (9 poena) Dat je prirodan broj. Dopušteno je izmeću cifara broja na proizvoljan način postaviti pluseve i izračunati nastali zbir (na primer, od broja 123456789 može se dobiti zbir 12345+6+789=13140). S dobijenim brojem ponovo se može vršiti slična operacija, i tako dalje. Dokazati da se, polazeći od ma kojeg broja, može dobiti jedno-cifrerni broj, obavivši ne više od 10 operacija.

ТРИДЦАТЬ ПЕРВЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

11 класс, устный тур, 8 мая 2010 г.

---

1. Про пирамиду $SA_1A_2...A_n$ известно, что ее основание $A_1A_2...A_n$ — правильный n-угольник, а все боковые грани — равнобедренные треугольники (равные стороны не обязательно с вершиной S). Обязательно ли эта пирамида правильная, если
а) $n = 5$?
б) $n > 5$?

Г.Гальперин

2. В кинотеатре два зала с одинаковым числом мест. В каждом зале несколько рядов (места в любом ряду нумеруются подряд, начиная с единицы). Группа школьников побывала на утреннем сеансе в первом зале, а на дневном сеансе — во втором, оба раза заняв все места. Известно, что в первом зале есть ряд из 10 мест, а во втором — нет. Докажите, что найдутся два школьника, которые на одном из сеансов сидели в одном ряду, а на другом — имели одинаковый номер места.

А.Буфетов

3. На плоскости дана окружность ω_1 радиуса 1. На одной из ее хорд, как на диаметре, построена окружность ω_2. На одной из хорд ω_2, как на диаметре, построена окружность ω_3, и т.д. Найдите наибольшее возможное расстояние между двумя точками, одна из которых принадлежит ω_1, а другая принадлежит $\omega_{1000000}$.

М.Мурашкин

4. Ладья прошлась по шахматной доске 8×8, не проходя дважды через одну и ту же клетку. При этом все повороты направо делались в черных клетках, а налево — в белых. Какое наибольшее число клеток могло быть пройдено?

А.Шаповалов

5. Саша и Люда играют в игру. Саша должен построить описанный 13-угольник с одной заданной стороной, а Люда хочет ему помешать. Сначала Саша называет номер стороны — число k от 1 до 13. Затем Люда задает длину этой стороны — действительное положительное число s. Саша выиграет, если опишет теперь вокруг единичного круга 13-угольник, где длина k-й по величине стороны равна s. Может ли Люда ему помешать? (Сторона k-я по величине, если найдутся $k-1$ сторон не короче нее, и при этом остальные $13-k$ сторон не длиннее нее).

А.Шаповалов

6. Обозначим через $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ произведение всевозможных попарных разностей $a_i - a_j$, где $1 \leq i < j \leq n$. Докажите, что для любых натуральных $a_1, a_2, \ldots, a_n$ число $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ делится на $[1, 2, \ldots, n]$.

М.Берштейн

ТРИДЦАТЬ ПЕРВЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

8 – 9 классы, сложный вариант, 25 октября 2009 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты, баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы	задачи	
4	1.	В 10 одинаковых кувшинов было разлито молоко — не обязательно поровну, но каждый оказался заполнен не более, чем на 10%. За одну операцию можно выбрать кувшин и отлить из него любую часть поровну в остальные кувшины. Докажите, что не более чем за 10 таких операций можно добиться, чтобы во всех кувшинах молока стало поровну. *Е.Н.Горинов*
6	2.	У Миши есть 1000 одинаковых кубиков, у каждого из которых одна пара противоположных граней белая, вторая — синяя, третья — красная. Он собрал из них большой куб $10 \times 10 \times 10$, прикладывая кубики друг к другу одноцветными гранями. Докажите, что у большого куба есть одноцветная грань. *М.В.Мурашкин*
6	3.	Найдите все такие натуральные числа a и b, что $(a+b^2)(b+a^2)$ является целой степенью двойки. *В.В.Произволов*
6	4.	На сторонах BC и CD ромба $ABCD$ взяли точки P и Q соответственно так, что $BP = CQ$. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника APQ лежит на диагонали BD ромба. *В.В.Произволов*
	5.	Из гирек весами 1 г, 2 г, …, N г требуется выбрать несколько (больше одной) с суммарным весом, равным среднему весу оставшихся гирек. Докажите, что
2	а)	это можно сделать, если $N+1$ — квадрат целого числа;
7	б)	если это можно сделать, то $N+1$ — квадрат целого числа. *А.В.Шаповалов*
10	6.	На клетчатую плоскость положили 2009 одинаковых квадратов, стороны которых идут по сторонам клеток. Затем отметили все клетки, которые покрыты нечетным числом квадратов. Докажите, что отмеченных клеток не меньше, чем клеток в одном квадрате. *И.Пак, Ю.Рабинович*
14	7.	Оля и Максим оплатили путешествие по архипелагу из 2009 островов, где некоторые острова связаны двусторонними маршрутами катера. Они путешествуют, играя. Сначала Оля выбирает остров, на который они прилетают. Затем они путешествуют вместе на катерах, по очереди выбирая остров, на котором еще не были (первый раз выбирает Максим). Кто не сможет выбрать остров, проиграл. Докажите, что при любой схеме маршрутов Оля может выиграть, как бы ни играл Максим. *Фольклор, предложил А.В.Шаповалов*

ТРИДЦАТЬ ПЕРВЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

10 – 11 классы, сложный вариант, 25 октября 2009 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

баллы задачи

4 1. 100 пиратов сыграли в карты на золотой песок, а потом каждый посчитал, сколько он в сумме выиграл либо проиграл. У каждого проигравшего хватает золота, чтобы расплатиться. За одну операцию пират может либо раздать всем поровну золота, либо получить с каждого поровну золота. Докажите, что можно за несколько таких операций добиться того, чтобы каждый получил (в сумме) свой выигрыш либо выплатил проигрыш. (Разумеется, общая сумма выигрышей равна сумме проигрышей).

Е.Н.Горинов

6 2. Из N прямоугольных плиток (возможно, неодинаковых) составлен прямоугольник с неравными сторонами. Докажите, что можно разрезать каждую плитку на две части так, чтобы из N частей можно было сложить квадрат, а из оставшихся N частей — прямоугольник.

А.В.Шаповалов

7 3. Сфера касается всех ребер тетраэдра. Соединим точки касания на парах несмежных ребер. Докажите, что три полученные прямые пересекаются в одной точке.

В.В.Произволов

9 4. Обозначим через $[n]!$ произведение $1 \cdot 11 \cdot 111 \cdot \dots \cdot \underbrace{11...11}_{n \text{ единиц}}$ — всего n сомножителей. Докажите, что число $[n+m]!$ делится на произведение $[n]! \cdot [m]!$.

М.А.Берштейн

9 5. Даны треугольник XYZ и выпуклый шестиугольник $ABCDEF$. Стороны AB, CD и EF параллельны и равны соответственно сторонам XY, YZ и ZX. Докажите, что площадь треугольника с вершинами в серединах сторон BC, DE и FA не меньше площади треугольника XYZ.

Н.Белухов

12 6. Оля и Максим оплатили путешествие по архипелагу из 2009 островов, где некоторые острова связаны двусторонними маршрутами катера. Они путешествуют, играя. Сначала Оля выбирает остров, на который они прилетают. Затем они путешествуют вместе на катерах, по очереди выбирая остров, на котором еще не были (первый раз выбирает Максим). Кто не сможет выбрать остров, проиграл. Докажите, что при любой схеме маршрутов Оля может выиграть, как бы ни играл Максим.

Фольклор, предложил А.В.Шаповалов

14 7. У входа в пещеру стоит барабан, на нем по кругу через равные промежутки расположены N одинаковых с виду бочонков. Внутри каждого бочонка лежит селедка — либо головой вверх, либо головой вниз, но где как — не видно (бочонки закрыты). За один ход Али-Баба выбирает любой набор бочонков (от 1 до N штук) и переворачивает их все. После этого барабан приходит во вращение, а когда останавливается, Али-Баба не может определить, какие бочонки перевернуты. Пещера откроется, если во время вращения барабана все N селедок будут расположены головами в одну сторону. При каких N Али-Баба сможет за сколько-то ходов открыть пещеру?

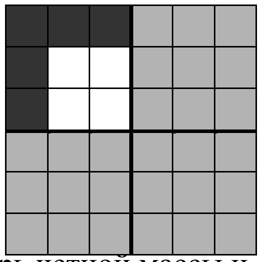
Л.Брагинский, Д.Фомин, П.Коган

31 турнир городов, осень (18 октября 2009 г.)

Решения задач
(А.Шаповалов и Л.Медников)

Базовый вариант, младшие

1. [3] Можно ли квадрат разрезать на 9 квадратов и раскрасить их так, чтобы получились 1 белый, 3 серых и 5 черных квадратов, причем одноцветные квадраты были бы равны, а разноцветные квадраты – не равны?
Решение. Можно. Разрежем квадрат 6×6 на 4 квадрата 3×3. Три из них окрасим в серый цвет, а от четвертого отрежем угловой (белый) квадрат 2×2. Оставшийся уголок состоит из 5 единичных квадратов (см. рис).



2. [4] Есть 40 гирек массой 1 г, 2 г, ..., 40 г. Из них выбрали 10 гирь четной массы и положили на левую чашу весов. Затем выбрали 10 гирь нечетной массы и положили на правую чашу весов. Весы оказались в равновесии. Докажите, что на какой-нибудь чаше есть две гири с разностью масс в 20 г.
Решение. Разобьем гирьки на пары с разностью 20 г: (1, 21), (2, 22), ..., (20, 40). Если на весах окажутся обе гирьки какой-то пары, все доказано. Иначе на весах оказалось ровно по одной гирьке из каждой пары. Тогда (независимо от выбора гирек в каждой паре) вес нечетной чашки при делении на 20 даст тот же остаток, что и сумма $1 + 3 + ... + 19 = 100$ (то есть 0), а вес четной чашки даст тот же остаток, что и сумма $2 + 4 + ... + 20 = 110$ (то есть 10). Противоречие: по условию эти веса равны.

3. [4] На столе лежит картонный круг радиуса 5 см. Петя, пока возможно, прикладывает к кругу снаружи картонные квадраты со стороной 5 см так, чтобы выполнялись условия:
1) у каждого квадрата одна вершина лежит на границе круга;
2) квадраты не перекрываются;
3) каждый следующий квадрат касается предыдущего вершиной к вершине.
Определите, сколько квадратов может выложить Петя, и докажите, что последний и первый квадрат тоже коснутся вершинами.
Ответ. 8 квадратов.
Решение. Если вершина A квадрата $ABCD$ лежит на окружности с центром O, то точки B, D и O лежат на окружности радиусом 5 см и центром A. Вписанный угол $BOD = 45°$ – как половина центрального угла BAD. Итак, по условию каждый выложены квадрат виден из центра под углом 45°, и границы соседних углов совпадают, поэтому всего Петя сможет выложить $360°/45° = 8$ квадратов. Пусть $EDFG$ – еще один выложенный квадрат (E лежит на окружности). $OADE$ – ромб, поэтому$\angle OAD = \angle OED$. Отсюда
$\angle OAB = 360° - 90° - \angle OAD = 360° - 90° - \angle OED = \angle OEG$. Треугольники OAB и OEG равны по двум сторонам и углу между ними, значит, $OB = OG$. Итак, вершины квадратов, противоположные общей, равноудалены от O. Таким образом, одна вершина первого квадрата и одна вершина восьмого лежат на одном и том же луче из O на одинаковом расстоянии от O. Значит, они совпадают.

4. Семизначный код, состоящий из семи различных цифр, назовем хорошим. Паролем сейфа является хороший код. Известно, что сейф откроется, если введен хороший код и на каком-нибудь месте цифра кода совпала с соответствующей цифрой пароля. Можно ли гарантированно открыть сейф быстрее чем за 7 попыток?
Решение. Можно за 6 попыток: 1234560, 2345610, 3456120, 4561230, 5612340, 6123450. Среди первых 6 цифр пароля есть цифра от 1 до 6. Поскольку мы каждую цифру от 1 до 6 по разу набрали на каждом из первых 6 мест, она хоть раз да совпадет.

5. [5] На новом сайте зарегистрировалось 2000 человек. Каждый пригласил к себе в друзья по 1000 человек. Два человека объявляются друзьями тогда и только тогда, когда каждый из них пригласил другого в друзья. Какое наименьшее количество пар друзей могло образоваться?
Ответ. 1000.
Решение. Всего было отправлено 2000000 приглашений, а пар на сайте $2000 \cdot 1999/2 = 1999000$. Приглашений на 1000 больше, чем пар, поэтому внутри хотя бы 1000 пар было отправлено два приглашения. Значит, образовалось хотя бы 1000 пар друзей. Ровно 1000 возможна: расставим всех людей на сайте по кругу, и пусть каждый пригласит 1000 следующих за ним по часовой стрелке. Тогда друзьями окажутся только то, кто расположен строго напротив друг друга.

Базовый вариант, старшие

1. [4] Семизначный код, состоящий из семи различных цифр, назовем хорошим. Паролем сейфа является хороший код. Известно, что сейф откроется, если введен хороший код и на каком-нибудь месте цифра кода совпала с соответствующей цифрой пароля. Можно ли гарантированно открыть сейф быстрее чем за 7 попыток?
См. задачу 5 для 8-9 классов.

2. [4] В пространстве расположена замкнутая шестизвенная ломаная $ABCDEF$, противоположные звенья которой параллельны ($AB \parallel DE$, $BC \parallel EF$ и $CD \parallel FA$). При этом AB не равно DE. Докажите, что все звенья ломаной лежат в одной плоскости.
Решение 1. Плоскости AEF и BCD параллельны: в них есть по паре параллельных прямых. Если бы они не совпадали, то высекали бы на параллельных прямых AB и DE равные отрезки $AB = DE$. Значит, все 6 точек лежат в плоскости AEF.
Решение 2. Вектор $\overline{AD}$ двумя способами *разными* способами выражается через векторы $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ и $\overline{CD}$: $\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} = \overline{ED} + \overline{FE} + \overline{AF} = a\overline{AB} + b\overline{BC} + c\overline{CD}$, где $a \neq 1$. Поэтому векторы $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ и $\overline{CD}$ компланарны.

3. [4] Существуют ли такие натуральные числа a, b, c, d, что $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 100^{100}$?
Решение. Существуют, например
$(100^{33})^3 + (2\cdot 100^{33})^3 + (3\cdot 100^{33})^3 + (4\cdot 100^{33})^3 = (1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3)\cdot 100^{99} = 100\cdot 100^{99} = 100^{100}$.

4. [4] На сторонах правильного 2009-угольника отметили по точке. Эти точки являются вершинами 2009-угольника площади S. Каждую из отмеченных точек отразили относительно середины стороны, на которой эта точка лежит. Докажите, что 2009-угольник с вершинами в отраженных точках также имеет площадь S.
Решение. Пусть $A_1A_2\ldots A_{2009}$ – правильный 2009-угольник со стороной 1, φ – его угол, P – его периметр, M – 2009-угольник площади S, a_i расстояние от A_i до ближайшей по часовой стрелке отмеченной вершины ($i = 1, 2, \ldots, 2009$). Сторона многоугольника M отсекает от угла A_i правильного многоугольника треугольник площади $0,5 \sin\varphi\cdot(1 - a_{i-1})a_i$. Суммируя отсеченные площади, получаем $0,5 \sin\angle A\cdot((a_1 + a_2 + \ldots + a_{2009}) - (a_1a_2 + a_2a_3 + \ldots + a_{2009}a_1)$.

После отражения сторона нового 2009-угольника отсекает от угла A_i треугольник площади $0{,}5 \sin \varphi \cdot a_{i-1}(1 - a_i)$. Суммируя отсеченные площади, снова получаем тот же результат.

5. [5] В стране две столицы и несколько городов, некоторые из них соединены дорогами. Среди дорог есть платные. Известно, что на любом пути из южной столицы в северную имеется не меньше десяти платных дорог. Докажите, что все платные дороги можно раздать десяти компаниям так, чтобы на любом пути из южной столицы в северную имелись дороги каждой из компаний.

Решение 1. Отметим на каждом пути из южной столицы Ю в северную С самую первую платную дорогу числом 1. Докажем, что на каждом пути p осталось не менее 9 неотмеченных платных дорог.

Выберем на p ближайшую к С отмеченную дорогу d. Поскольку она отмечена, она была первой платной на некотором пути q. Пройдем от Ю до d по (бесплатным дорогам) пути q, а далее через d вдоль p до С. По условию на таком пути не менее 10 платных дорог, и только дорога d отмечена. Значит, на участке пути от d до С есть не менее 9 неотмеченных платных дорог.

Объявим временно отмеченные дороги бесплатными и отметим на каждом пути первую платную дорогу числом 2. Теперь на каждом пути останется не менее 8 платных дорог.

Повторяя рассуждение, расставим отметки 3, ..., 10 на каждом пути.
Теперь раздадим дороги компаниям в соответствии с их «номерами». Оставшиеся платные дороги раздадим произвольно.

Решение 2. Пусть проезд по каждой платной дороге стоит 1 тугрик. Назовем *весом* дороги, наименьшую сумму, которую надо заплатить, чтобы выехав из Ю, проехать по этой дороге.

Докажем, что вес самой северной дороги каждого пути не меньше 10. Предположим, противное – что вес последней дороги на пути p не превосходит 9. Тогда до нее можно дойти, заплатив не более 8 тугриков. Продолжив путь по остатку пути p мы получим (в противоречие с условием) пример пути, на котором менее 10 платных дорог.

Заметим, что первая платная дорога на каждом пути имеет вес 1. При переходе к следующей дороге вес не меняется или увеличивается на 1. Поэтому на каждом пути есть дороги любого веса от единицы до 10. Отдадим k-й компании все дороги веса k, а дороги веса больше 10 распределим произвольно.

31 турнир городов, осень (25 октября 2009 г.)

Решения задач

(А.Шаповалов и Л.Медников)

Сложный вариант, младшие

1. В 10 одинаковых кувшинов было разлито молоко – не поровну, но каждый оказался заполнен не более, чем на 10%. За одну операцию можно выбрать кувшин и отлить из него поровну во все остальные. Докажите, что не более чем за 10 таких операций можно добиться, чтобы во всех кувшинах молока стало поровну.

Решение. Отольем из каждого кувшина во все остальные $^1/_{10}$ от *первоначального* количества молока в данном кувшине. Тогда молоко из каждого кувшина распределится поровну, значит, и в каждом кувшине станет поровну.

2. У Миши есть 1000 одинаковых кубиков, у каждого из которых одна пара противоположных граней белая, вторая – синяя, третья – красная. Он собрал из них большой куб 10×10×10, прикладывая кубики друг к другу одноцветными гранями. Докажите, что у большого куба есть одноцветная грань.

Решение. Пусть левая грань кубика – разноцветная. Тогда найдутся два соседних разноцветных квадратика. Повернем кубик так, чтобы соответствующие кубики были один над другим. Они образуют 2×1×1-параллелепипед П с разноцветной (скажем, сине-белой) левой гранью. Тогда общая горизонтальная грань кубиков красная, а все вертикальные 2×1-грани П – сине-белые. Рассмотрим 2×1×1-параллелепипед П', примыкающий к П по 2×1-грани. У него есть сине-белая грань, значит, и все его 2×1-грани – сине-белые. Так продолжая, видим, что в двойном горизонтальном слое 2×10×10, содержащем П, у всех вертикальных 2×1×1 параллелепипедов есть сине-белая грань, и, значит, общая грань красная. Итак, в двойном слое одинарные слои 1×10×10 соприкасаются по красной грани 10×10, значит, и верхняя грань куба – тоже красная.

3. Найдите все такие натуральные a и b, что $(a^2 + b)(b^2 + a)$ является целой степенью двойки.

Ответ. $a = b = 1$

Решение 1. Каждая скобка является степенью двойки. Поэтому числа a и b одной четности. Разберем два случая.

1) $a = b$. Тогда $a^2 + a = a(a + 1)$ – степень двойки. Числа a и $a + 1$ – степени двойки разной четности, следовательно, $a = 1$.

2) $a > b$. Тогда $a^2 + b = 2^m > b^2 + a = 2^n$. Имеем

$(2^{m-n} - 1)\cdot 2^n = a^2 - b^2 + b - a = (a - b)(a + b - 1)$. $a - b$ четно, а $a + b - 1$ нечетно, следовательно, $a - b = 2^n = a + b^2$. Противоречие.

Решение 2. Каждая скобка является степенью двойки. Пусть $a = 2^k m$, $b = 2^l n$, где m и n – нечетны. Можно считать, что $k \geq l$. Тогда $a^2 + b = 2^{2k}m^2 + 2^l n = 2^l(2^{2k-l}m^2 + n)$. Последняя скобка четна только при $2k - l = 0$, то есть при $k = l = 0$. Итак, a и b – нечетны. Тогда $a + 1 = 2^k m$, $b + 1 = 2^l n$, где m и n – нечетны, $k \geq 1$, $l \geq 1$. Снова можно считать, что $k \geq l$. Нетрудно убедиться, что

$a^2 + b = 2^{2k}m^2 - 2^{k+1}m + 2^l n = 2^l(2^{2k-l}m^2 - 2^{k-l+1}m + n)$. Выражение $2^{2k-l}m^2 - 2^{k-l+1}m + n$ нечетно, значит, равно 1. Но первый член по модулю не меньше второго, поэтому такое равенство возможно только при $k = m = n = 1$. Но тогда и $l = 1$, то есть $a = b = 1$.

4. На сторонах BC и CD ромба $ABCD$ взяли точки P и Q соответственно так, что $BP = CQ$. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника APQ лежит на диагонали BD ромба.

Набросок решения. Достаточно доказать, что середина отрезка PQ лежит на прямой, параллельной BD и расположенной в 1,5 раза дальше от A, чем BD. Но это – прямая, проходящая через точки K и L – середины сторон BC и CD соответственно. Ясно, что $KP = LQ$. Отсюда легко вывести, что точки P и Q равноудалены от прямой KL, а значит, середина отрезка PQ лежит на KL.

5. Из гирек весами 1 г, 2 г, ..., N г требуется выбрать несколько (больше одной) с суммарным весом, равным среднему весу оставшихся гирек. Докажите, что

а) это можно сделать, если N+1 – квадрат целого числа;

б) если это можно сделать, то N+1 – квадрат целого числа;

Решение. **а**) Пусть $N + 1 = k^2$. Выберем гирьки веса 1, 2,..., k, их сумма равна $\frac{k^2+k}{2}$. Среднее арифметическое оставшихся последовательных чисел равно полусумме крайних, то есть $\frac{k+1+k^2-1}{2} = \frac{k^2+k}{2}$.

б) Общий вес всех N гирек равен $\frac{N^2+N}{2}$. Пусть мы выбрали k гирек общим весом S так, что средний вес оставшихся $N - k$ гирек равен S. Значит, $\frac{N^2+N}{2} - S = (N-k)S$, что равносильно равенству $2S(N - k + 1) = N^2 + N$. Отсюда следует, что $2S > N + k$, поскольку $N^2 + N > N^2 + N - k^2 + k = (N + k)(N - k + 1)$.

С другой стороны, если мы выбираем k *наименьших* гирь, то средний вес оставшихся будет *наибольшим* и равным $\frac{N+k+1}{2}$, то есть (при любом выборе гирь) $2S \le N + k + 1$.

Итак, единственный возможный вариант – выбрать k *наименьших* гирь, удвоенный общий вес $k^2 + k$ которых должен *равняться* $N + k + 1$. Отсюда, $N + 1 = k^2$.

6. [5] На клетчатую плоскость положили 2009 одинаковых квадратов, стороны которых идут по сторонам клеток. Затем отметили все клетки, которые покрыты нечетным числом квадратов. Докажите, что отмеченных клеток не меньше, чем в одном квадрате.

Решение. Назовем 2009 квадратов плитками. Разобьем плоскость на решетку из квадратов размером с плитку линиями, идущими по границам клеток. У каждой клетки теперь есть координаты: номер столбца (считая от левого края квадрата) и номер строки, (считая от нижнего края). Заметим, что все клетки, накрытые плиткой, имеют разные координаты. Выберем любую пару координат, и в каждой накрытой клетке с этими координатами напишем число покрывающих ее плиток. Сумма этих чисел равна числу плиток, то есть 2009. Хотя бы одно слагаемое нечетно. Это верно для каждой пары координат, а число пар равно числу клеток в плитке.

7. Оля и Максим оплатили путешествие по архипелагу 2009 островов, где некоторые острова связаны двусторонними маршрутами катера. Они путешествуют, играя. Сначала Оля выбирает остров, на который они прилетают. Затем они вместе путешествуют на катерах, по очереди выбирая следующий остров (первый раз выбирает Максим). Кто не сможет выбрать новый остров, проиграл. Докажите, что при любой схеме маршрутов Оля может выиграть, как бы не играл Максим.

Решение. Отметим на схеме *максимально возможное* число маршрутов без общих концов. Соответственно, острова разобьются на пары и несколько (но не менее одного) отдельных островов. Прилетим на какой-нибудь отдельный остров. Далее, если Максим ходит на остров отмеченного маршрута, Оля отвечает ходом на второй остров этого маршрута. Предположим, однако, что Максиму удастся сделать ход на отдельный остров. Путь с начала до этого острова состоит из четного числа $2k$ островов, или из $k-1$ отмеченного маршрута и двух отдельных островов. Но ведь этот путь можно разбить на k маршрутов, и они, вместе с непосещенными отмеченными маршрутами дадут *большее* число маршрутов, что противоречит максимальности. Значит, ход Максима на отдельный остров невозможен, и Оля выигрывает.

Сложный вариант, старшие

1. 100 пиратов сыграли в карты на золотой песок, а потом каждый посчитал, сколько он в сумме выиграл либо проиграл. У каждого проигравшего хватает золота, чтобы расплатиться. За одну операцию пират может либо раздать всем поровну золота, либо получить с каждого поровну золота. Докажите, что можно за несколько таких операций добиться того, чтобы каждый получил (в сумме) свой выигрыш либо выплатил проигрыш. (Разумеется, общая сумма выигрышей равна сумме проигрышей.)

Решение. Обозначим через Z сумму выигрышей (она же сумма проигрышей). Пусть сначала у каждого пирата весь его песок лежит в *правом* кармане. Попросим каждого проигравшего выдать всем (включая себя самого) по 0,01 от своего проигрыша. Полученный при этом песок каждый кладет в свой *левый* карман. В результате у каждого пирата в *левом* кармане окажется на $0{,}01Z$ золотого песка, а *правый* карман каждого проигравшего "облегчится" на его проигрыш. Далее каждому выигравшему все пираты (включая его самого) выдают из своих *левых* карманов по 0,01 его выигрыша. В результате все *левые* карманы снова опустеют, а к песку в *правом* кармане каждого выигравшего добавится его выигрыш.

2. Из N прямоугольных плиток (возможно, неодинаковых) составлен прямоугольник с неравными сторонами. Докажите, что можно разрезать каждую плитку на две части так, чтобы из N частей можно было сложить квадрат, а из оставшихся N частей – прямоугольник.

Решение. Пусть размеры прямоугольника $a \times b$, $a < b$ и сторона b горизонтальна. Сожмем прямоугольник равномерно по горизонтали так, чтобы стороны стали равны. Получим разбитый на прямоугольники квадрат. Каждая его часть получена сжатием плитки по горизонтали в ${}^{b}/_{a}$ раз. Значит, она имеет меньшую ширину, но ту же высоту, и такую часть можно отрезать от плитки вертикальным разрезом. Оставшая часть плитки получается из нее сжатием по горизонтали в ${}^{b}/_{(b-a)}$ раз. Соответственно, из них можно сложить прямоугольник, получающийся из исходного сжатием в ${}^{b}/_{(b-a)}$ раз.

3. Сфера касается всех ребер тетраэдра. Соединим точки касания на парах несмежных ребер. Докажите, что три полученные прямые пересекаются в одной точке.

Решение 1. Поместим в каждую вершину массу, обратно пропорциональную длинам проведенных из этой вершины касательных к сферы (все три касательные для данной вершины, очевидно, равны). Тогда точка касания ребра совпадает с центром масс этого ребра, и все три отрезка из условия задачи пересекаются в центре масс тетраэдра.

Решение 2. Пусть K, L, M, N, P, R – точки, в которых соответственно ребра AB, AC, AD, BC, BD, CD тетраэдра $ABCD$ касаются сферы, a, b, c, d – длины касательных, выходящих соответственно из вершин A, B, C, D.

Плоскости ABD и BCD пересекаются по прямой BD. По теореме Менелая (примененной к треугольнику ABD) прямая MK пересекает BD в точке, делящей отрезок BD (внешним образом) в отношении $\frac{AM}{DM} \cdot \frac{BK}{AK} = \frac{a}{d} \cdot \frac{b}{a} = \frac{b}{d}$. По той же причине прямая

RN пересекает BD в той же точке ($\frac{CR}{DR}\cdot\frac{BN}{CN} = \frac{c}{d}\cdot\frac{b}{c} = \frac{b}{d}$). (Если $b = d$, то MK и RN параллельны BD.) Значит, прямые MK и RN лежат в одной плоскости (пересекаются или параллельны). Следовательно, прямые MN и KR также пересекаются.

Аналогично прямая LP пересекает MN и KR. Поскольку эти три прямые очевидно не лежат в одной плоскости, они должны пересекаться в одной точке.

4. Обозначим через $[n]!$ произведение $1\cdot 11\cdot 111\cdot\ldots\cdot\underbrace{11\ldots11}_{n\text{ единиц}}$ (всего n сомножителей).

Докажите, что число $[n+m]!$ делится на произведение $[n]![m]!$.

Решение 1. Обозначим число из k единиц 1_k, тогда $[m]! = 1_m[m-1]!$, $1_{m+n} = 10^m 1_n + 1_m$.

Обозначим $C[m, n] = \frac{[n+m]!}{[m]![n]!}$. Положим $[0]! = 1$, тогда $C[0, n]$ и $C[m, 0]$ определены и равны 1.

Докажем индукцией по $m + n$, что число $C[m, n]$ – целое. База и случай $m = 0$ или $n = 0$ очевидны.

Пусть $m, n \geq 1$ и для меньших значений $m + n$ все доказано. Тогда число

$$C[m, n]= \frac{1_{m+n}[n+m-1]!}{[m]![n]!} = \frac{\left(1_n 10^m + 1_m\right)[n+m-1]!}{[m]![n]!} = 10^m\frac{1_n[n+m-1]!}{[m]!1_n[n-1]!} + \frac{1_m[n+m-1]!}{1_m[m-1]![n]!} =$$

$=10^m C[m,n-1] + C[m-1,n]$ – тоже целое.

Решение 2. Пусть q – число, взаимно простое с 10, $k(q)$ – наименьшее k, при котором кратно q. Легко видеть, что m при делении на k дает в остатке $r \Leftrightarrow 1_m$ при делении на 1_k дает в остатке 1_r. Отсюда 1_k кратно $q \Leftrightarrow k$ кратно $k(q)$. Поэтому из множителей вида 1_k, входящих в $[n]!$, на q делятся ровно $\left[\frac{n}{k(q)}\right]$.

Из этого следует, что простое число $p \neq 2, 5$ входит в разложение $[n]!$ на простые множители в степени

$$\left[\frac{n}{k(p)}\right] + \left[\frac{n}{k(p^2)}\right] + \left[\frac{n}{k(p^3)}\right] + \ldots$$

В силу неравенства $\left[\frac{n}{k}\right] + \left[\frac{m}{k}\right] \leq \left[\frac{n+m}{k}\right]$ каждое простое число входит в разложение $[n+m]!$ не в меньшей степени, чем в разложение $[n]![m]!$.

Решение 3 (для знатоков). Рассмотрим многочлены $P_k(x) = x^{k-1} + x^{k-2} \ldots + x + 1$, $Q_n(x) = P_2(x)\ldots P_n(x)$ (над полем комплексных чисел).

Корнями многочлена $P_k(x)$ являются все (кроме единицы) корни k-й степени из единицы. Пусть ε – *первообразный* корень k-й степени из 1. Тогда он является корнем l-й степени тогда и только тогда, когда l кратно k. Поэтому множитель $x - \varepsilon$ входит в разложение $Q_{m+n}(x)$ на линейные множители в степени $\left[\frac{n+m}{k}\right]$, а в $Q_n(x)Q_m(x)$ – в степени $\left[\frac{n+m}{k}\right] + \left[\frac{n+m}{k}\right] \leq \left[\frac{n+m}{k}\right]$.

Следовательно, $Q_{m+n}(x)$ делится на $Q_n(x)Q_m(x)$.

Поскольку $Q_n(x)Q_m(x)$ – приведенный многочлен, частное – многочлен с целыми коэффициентами. Подставив $x = 10$, получаем утверждение задачи.

5. Даны треугольник XYZ и выпуклый шестиугольник $ABCDEF$. Стороны AB, CD и EF параллельны и равны соответственно сторонам XY, YZ и ZX. Докажите, что площадь треугольника с вершинами в серединах сторон BC, DE и FA не меньше площади треугольника XYZ.

Решение 1. Пусть $S_{XYZ} = s$, $S_{ABCDEF} = S$, K, L и M – середины соответственно сторон BC, DE и FA.

1) Напомним, что если R – середина отрезка PQ, не пересекающего прямую HG, то

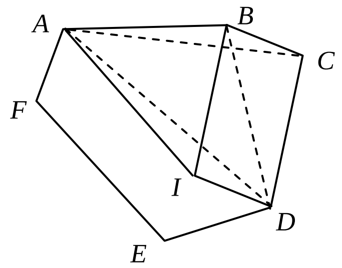
$$S_{RHG} = {}^1/_2\,(S_{PHG} + S_{QHG})$$

(высота треугольника RHG, опущенная на HG равна полусумме соответствующих высот треугольников PHG и QHG).

Поэтому $S_{KLM} = {}^1/_2\,(S_{BLM} + S_{CLM}) = {}^1/_4\,(S_{BDM} + S_{BEM} + S_{CDM} + S_{CEM}) =$

$$= {}^1/_8\,(S_{BDA} + S_{BDF} + S_{BEA} + S_{BEF} + S_{CDA} + S_{CDF} + S_{CEA} + S_{CEF}).$$

2) Построим параллелограмм $BCDI$ (см. рис.). По условию треугольники ABI и XYZ равны. Заметим, что



$$S_{DAB} = S_{CAB} + S_{IAB} = S_{CAB} + s$$

(высота треугольника ADB, опущенная на AB равна сумме соответствующих высот треугольников ACB и AIB).

Аналогично $S_{EAB} = S_{FAB} + s$,

$S_{ACD} = S_{BCD} + s$, $S_{FCD} = S_{ECD} + s$,

$S_{BFE} = S_{AFE} + s$, $S_{CFE} = S_{AFE} + s$,

3) Отсюда

$$S_{KLM} = {}^1/_8\,(S_{BDA} + S_{BDF} + S_{BEA} + S_{BEF} + S_{CDA} + S_{CDF} + S_{CEA} + S_{CEF}) =$$
$$= {}^1/_8\,(6s + S_{ABC} + S_{BDF} + S_{ABF} + S_{AEF} + S_{BCD} + S_{CDE} + S_{ACE} + S_{DEF}).$$

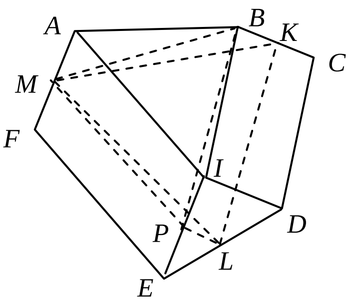
Заметим, что

$$S_{BDF} + S_{ABF} + S_{BCD} + S_{DEF} = S_{AEF} + S_{CDE} + S_{ACE} + S_{ABC} = S$$

Поэтому $S_{KLM} = {}^1/_8\,(6s + 2S) = {}^1/_4\,(3s + S) > s$.

(Точка I очевидно находится внутри шестиугольника, поэтому $s < S$).

Решение 2. Построим параллелограмм $BCDI$ (см. рис.). По условию треугольники ABI и XYZ равны. Значит, отрезок AI параллелен и равен FE, то есть $AIEF$ – тоже параллелограмм. Пусть P – середина EI.



Тогда $S_{KLM} > S_{MPB} > S_{ABI} = S_{XYZ}$.

Оба неравенства следуют из следующего очевидного утверждения:

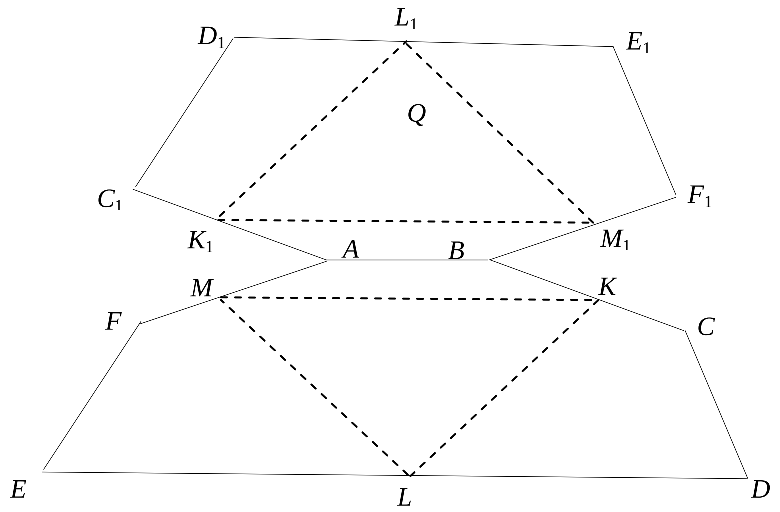
Пусть $TUVW$ – параллелограмм, точка R и отрезок VW лежат по разные стороны от прямой TU. Тогда

$$S_{RVW} > S_{RTU}.$$

(В первом случае используется параллелограмм $BKLP$, во втором – $AIPM$.)

Замечание. В этой задаче есть досадный второй случай, который не учитывают оба приводимых ранее решения: когда шестиугольник и треугольник, данные в условии, ориентированы по-разному (то есть шестиугольник при чтении букв – названий вершин – обходится по часовой стрелке, а треугольник – против). В этом случае если достраивать на одной из сторон шестиугольника наш треугольник, он будет торчать наружу!

Вот набросок решения для этого случая. Он сводится к 1-му следующей перестройкой шестиугольника:



Здесь $\overline{AC_1} = \overline{CB}$, $\overline{C_1D_1} = \overline{EF}$, $\overline{BF_1} = \overline{FA}$, $\overline{F_1E_1} = \overline{DC}$. Отсюда легко следует, что $\overline{K_1L_1} = \overline{LK}$, $\overline{K_1M_1} = \overline{MK}$, $\overline{L_1M_1} = \overline{ML}$, т.е. серединный треугольник не изменился.

6. См задачу 7 для младших.

7. У входа в пещеру стоит барабан, на нем по кругу через равные промежутки расположены N одинаковых с виду бочонков. Внутри каждого бочонка лежит селедка – либо головой вверх, либо головой вниз, но где как – не видно (бочонки закрыты). За один ход Али-Баба выбирает любой набор бочонков (от 1 до N штук) и переворачивает их все. После этого барабан приходит во вращение, а когда останавливается, Али-Баба не может определить, какие бочонки были перевернуты. Пещера откроется, если во время вращения барабана все N селедок будут расположены головами в одну сторону. При каких N Али-Баба сможет за сколько-то ходов открыть пещеру?

Ответ. При $N = 2^k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

Решение. Заменим бочонки на нули и единицы, стоящие по кругу.

Пусть $N \neq 2^k$, $k = 0, 1, 2,$ Покажем, что при невезении Али-Баба никогда не откроет пещеру. Можно считать, что мы играем против Али-Бабы, вращая круг, и что он заранее говорит нам, на каких местах он будет менять цифры на каждом (в том числе и на первом) ходу.

Рассмотрим сначала случай, когда N нечетно. Расставим на круге нули и единицы так, чтобы Али-Баба не выиграл первым своим (известным нам) ходом (то есть чтобы после его хода на круге были как нули, так и единицы).

Пусть Али-Баба на очередном ходу выбрал для замены определенные k мест. Он выиграет только если эти k мест совпадут либо со множеством всех нулей, либо со множеством всех единиц. Но число нулей не равно числу единиц (сумма чисел нечетна!). Значит, каких-то цифр – не k штук. Загнав поворотом такую цифру на одно из выбранных k мест, мы не дадим Али-Бабе выиграть следующим ходом.

Случай, когда N четно, но имеет нечетный делитель m, сводится к разобранному. Отметим на большом круге m равноотстоящих мест и забудем про остальные.

Действуя, как описано выше, мы сможем помешать Али-Бабе уравнять все цифры на отмеченных местах.

Алгоритм выигрыша Али-Бабы для 2^k мест будем строить индуктивно. База для $k = 1$ очевидна. Пусть у нас есть алгоритм A_m для m мест. Построим A_{2m}. Начнем с частных случаев. Разобьем круг на m пар противоположных мест и установим соответствие между парами для $2m$ и местами для m.

1) Пусть мы знаем, что в каждой паре цифры равны. Применим алгоритм A_m, заменяя места целыми парами. Ясно, что когда замок открылся там, он откроется и тут.

2) Пусть мы знаем, что четность суммы в каждой паре одинакова. Применим A_m для пар. Если не открылось, то все суммы были нечетны. Но меняя оба числа пары, мы не меняем четности. Значит, все суммы остались нечетными. Изменим m цифр подряд (назовем эту операцию D). Теперь все суммы четны. Еще раз применив A_m для пар, откроем замок. Назовем алгоритм для этого случая B.

3) Применим теперь A_m для пар другим способом: цель – сделать суммы в парах одной четности. По прежнему на каждом шагу мы выбираем набор пар согласно A_m, но меняем в каждой выбранной паре только *по одной* цифре. Назовем алгоритм C. Он гарантирует, что на каком-то шаге (мы не знаем, на каком) четности сумм совпадут. Дверь это, понятно, не откроет. Но мы схитрим: после каждого шага C применим B, а затем D. При совпадении сумм четностей B откроет дверь, а иначе BD не изменит четностей сумм.

ТРИДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
11 класс, очный тур, 8 мая 2010 г.

Задача 1.

а) Ответ: не обязательно. Пусть $SA_1 = SA_3 = A_1A_2$. Тогда все боковые грани — равнобедренные треугольники. Точку S можно выбрать так, чтобы пирамида была неправильная.

б) Ответ: пирамида обязана быть правильной. Заметим, что в каждой треугольной грани либо расстояния от S до других двух вершин одинаковые, либо одно из этих двух расстояний равно стороне правильного n-угольника, лежащего в основании пирамиды. Если есть две соседние треугольные грани, в которых вершина S лежит напротив основания равнобедренного треугольника, то пирамида правильная. Если таких граней одна или нет, то вершина S удалена на сторону n-угольника как минимум от трех вершин, и снова пирамида правильная.

Задача 2. Предположим противное — таких школьников нет.

Пусть в одном из залов больше рядов, чем в другом. Тогда школьники, сидящие на первых местах этого зала, не смогут рассесться в разные ряды второго зала — противоречие. Значит, общее число рядов в каждом зале одинаково.

Пусть в одном из залов (скажем, в первом) длина самого короткого ряда больше, чем в другом, и равна m. Тогда школьники с местами 1, 2, ..., m из первого зала не смогут рассесться в разные ряды второго зала. В самом деле, школьники с первыми местами из первого зала садятся в разные ряды второго зала, и поскольку всего рядов поровну, одно место каждого кратчайшего ряда второго зала будет кем-то из них занято; школьники со вторыми местами аналогично займут еще по одному месту каждого кратчайшего ряда второго зала, и так далее, то есть мест в кратчайшем ряду второго зала не может оказаться меньше m.

Если же длины кратчайших рядов равны, то аналогично равны и количества кратчайших рядов.

Рассуждая далее точно так же, получим, что одинаковы длины следующих по величине рядов и их количества, и так далее (строгое доказательство можно оформить по индукции). В результате получим, что набор длин рядов и их количеств в обоих залах одинаков, что противоречит условию.

Задача 3.

Ответ: 1001.

Первое решение. Докажем по индукции, что наибольшее возможное расстояние между центром ω_1 и точкой, принадлежащей ω_N, равно $\sqrt{N}$. База для $N = 1$ очевидна. Покажем, что из верности нашего утверждения для N следует его верность для $N+1$. Для начала найдем наибольшее возможное расстояние между центром ω_1 и точкой, принадлежащей ω_{N+1}, при условии, что хорда, на которой построена окружность ω_2, стягивает дугу величины 2φ. Радиус ω_2 при этом равен $\sin\varphi$. По предположению индукции, наибольшее возможное расстояние между центром ω_2 и точкой, принадлежащей ω_{N+1}, равно $\sin\varphi\sqrt{N}$. Расстояние между центрами ω_1 и ω_2 равно $\cos\varphi$. Отсюда наибольшее возможное расстояние между центром ω_1 и точкой, принадлежащей ω_{N+1}, равно $\cos\varphi+\sin\varphi\sqrt{N}$. Осталось подобрать угол φ таким образом, чтобы значение $\cos\varphi+\sin\varphi\sqrt{N}$ было максимальным. Заметим, что

$$\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{N} = \sqrt{N+1}\left(\frac{\cos\varphi}{\sqrt{N+1}} + \frac{\sin\varphi\sqrt{N}}{\sqrt{N+1}}\right) = \sqrt{N+1}\cos\left(\varphi - \arccos\frac{1}{\sqrt{N+1}}\right) \leqslant \sqrt{N+1},$$

причем при $\varphi = \arccos\frac{1}{\sqrt{N+1}}$ достигается равенство. Шаг индукции доказан. Радиус первой окружности равен 1. Поэтому наибольшее возможное расстояние между двумя точками, принадлежащими ω_1 и ω_N, равно $1+\sqrt{N}$. Подставляя $N = 1000000$, находим ответ.

Второе решение. Решим задачу для N окружностей. Пусть точки A и B принадлежат ω_1 и ω_N соответственно. Обозначим за O_i центр окружности ω_i. Очевидно, что $AB \leqslant AO_1 + O_1O_2 + \ldots + O_{N-1}O_N + O_NB$. Заметим, что окружности можно было построить и так, чтобы отрезки AO_1, O_1O_2, ..., O_NB имели те же длины и лежали на одной прямой. Значит, наибольшее возможное расстояние AB совпадает с наибольшей возможной суммой $AO_1+O_1O_2+\ldots+O_{N-1}O_N+O_NB$. Введем обозначения: r_i — радиус ω_i, $d_i = O_iO_{i+1}$. Так как O_{i+1} — центр хорды длины $2r_{i+1}$ окружности ω_i, то $r_i^2 = d_i^2 + r_{i+1}^2$. Поэтому $r_1^2 = d_1^2 + r_2^2 = d_1^2 + d_2^2 + r_3^2 = \ldots = d_1^2 + d_2^2 + \ldots + d_{n-1}^2 + r_N^2$, откуда

$$AO_1+O_1O_2+\ldots+O_{N-1}O_N+O_NB = r_1+d_1+\ldots+d_{N-1}+r_N \leqslant r_1 + N\sqrt{\frac{d_1^2+d_2^2+\ldots+d_{n-1}^2+r_N^2}{N}} = r_1(1+\sqrt{N}).$$

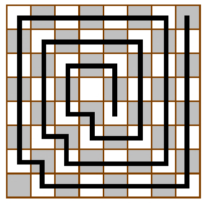
Здесь было использовано неравенство между средним арифметическим и средним квадратическим. Равенство в нем может достигаться при $d_1 = d_2 = \ldots = d_{N-1} = r_N$, что равносильно $d_1^2 = d_2^2 = \ldots = d_{n-1}^2 = r_N^2 = \frac{r_1^2}{N}$. Значит, наибольшее возможное расстояние AB равно $r_1(1+\sqrt{N})$. Подставляя $r_1 = 1$, $N = 1000000$, находим ответ.

Задача 4. Ответ: Все кроме двух.

Указание. Рассмотрим граф из внутренних границ клеток, которые ладья не пересекала. В нем нет висячих вершин внутри доски, и есть как минимум 2 висячие вершины на границе доски. Если их ровно 2, то они принадлежат противоположным краям доски. Если эти висячие вершины соединяются, то они разделяют доску на 2 части, в одной ладья не была. Если не соединяются, то каждой компоненте связности принадлежит цикл, отгораживающий как минимум одну вершину.

Решение.

На рисунке — пример на 62 клетки (стартуем из середины). Докажем теперь, что в любом случае останутся как минимум две не обойденные клетки. Закрасим внутренние границы клеток, которые ладья не пересекала. Будем считать их ребрами графа. Рассмотрим клетки, примыкающие к правому краю доски, и их границы, идущие от края доски. Если ни одна из этих границ не закрашена, то ладья прошла по правому краю и сделала поворот в угловых клетках. Но это были либо два поворота направо, либо два поворота налево, а клетки — разного цвета. Противоречие.



Значит, среди границ правых клеток есть ребро R с концом на краю доски. Аналогично, такое ребро L есть среди границ левых крайних клеток. Если ребра R и L соединены в графе маршрутом, то маршрут разбивает доску на две части, в каждой есть как минимум 6 клеток (по одной с каждой не крайней горизонтали). В одной из этих частей ладья не побывала, значит, она обошла не более 58 клеток. Пусть R и L не соединены. Пойдем от края по ребру R и будем идти по графу, не поворачивая назад. Есть три возможности: а) попадем в вершину, где уже были; б) попадем в вершину на краю доски; в) попадем в вершину v внутри доски, из которой других ребер не входит. На самом деле случай (в) невозможен: тогда бы мы обошли 4 примыкающие к v клетки буквой *П*, сделав два левых или два правых поворота в двух соседних клетках, а они — разного цвета. В случаях (а) и (б) пройденный маршрут разбивает доску на 2 части (в случае (а) есть цикл, в случае (б) маршрут замыкается в цикл краем доски). Аналогично находим такой маршрут, стартуя от края по ребру L. Он добавит еще одну часть. Ладья побывала только в одной из частей, значит, в каждой из оставшихся найдется хотя бы по одной не обойденной клетке.

Задача 5.

Ответ: Люда не может помешать Саше.

Первое решение. Сначала Саша называет число $k = 4$. Пусть Люда назвала число, большее $\operatorname{tg} 18°$. Тогда Саша берёт на окружности вершины прямоугольника $ABCD$ и делит дугу AB точками на 10 равных частей (это все будут точки касания сторон 13-угольника с окружностью). Тогда 4-я сторона касается в точке A. Уменьшая дугу AB почти до $0°$, Саша может сделать 4-ю сторону сколь угодно длинной. Наоборот, раздвигая дугу до $180°$, Саша делает 4-ю сторону сколь угодно близкой к $\operatorname{tg} 18°$.

Пусть Люда назвала число не больше $\operatorname{tg} 18°$. Тогда Саша впишет равнобедренный остроугольный треугольник ABC с основанием AB, и разделит дугу AB на 11 равных частей. Тогда 4-я сторона касается в доп. точке. Сближая A и B, Саша получает все значения меньше $2\operatorname{tg}(180/11)°$.

Набросок второго решения. Сначала Саша называет число $k = 4$. Пусть радиус круга равен 1. Если длина 4-й стороны s больше 1, то Саша делает так: описывает ромб, у которого касательная больше 1, но чуть-чуть меньше нашей стороны. Два угла этого ромба будут острые, два — тупые. Далее, берет две соседние точки касания, соединенные меньшей дугой (концы тупого угла), и описывает около нее равнозвенную ломаную из 9 звеньев, концы ее на сторонах ромба лежат так, чтобы как раз две его стороны стали равны нашей длине s.

Если длина 4-й стороны s меньше или равна 1, Саша делает так. Рисует горизонтальную касательную над кругом так, чтобы ее середина была над центром, длина равна s. После этого вправо продолжает девятизвенной ломаной, у которой одно звено чуть больше половины длины s, а остальные звенья очень маленькие, затем проводит еще звено — большое, и влево от исходной стороны звено — большое, их соединяет нижней горизонтальной касательной. Тогда девять звеньев маленькие, а длина трех звеньев очевидно больше 1.

Задача 6. Для доказательства того, что $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ делится на $[1, 2, \dots, n]$, нам достаточно доказать, что для любого простого p и натурального k среди чисел вида $a_i - a_j$, где $1 \leqslant i < j \leqslant n$, чисел, делящихся на p^k, не меньше, чем среди чисел вида $i - j$. В самом деле, для целого числа $b = b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_n$ степень вхождения p в b равна сумме степеней вхождения p в b_i, которая в свою очередь равна сумме по всем натуральным k количества таких b_i, которые кратны p^k.

Для каждого p^k рассмотрим, набор $d_0, d_1, \dots, d_{p^k-1}$, где d_j — количество таких a_i, которые имеют остаток j при делении на p^k (то есть $d_0 + d_1 + \dots + d_{p^k-1} = n$). Тогда количество чисел среди $a_i - a_j$, делящихся на p^k, есть $\frac{1}{2}(d_0(d_0-1) + d_1(d_1-1) + \dots + d_{p^k-1}(d_{p^k-1}-1)) = \frac{1}{2}(d_0^2 + d_1^2 + \dots + d_{p^k-1}^2 - n)$. Осталось доказать, что $d_0^2 + d_1^2 + \dots + d_{p^k-1}^2$ при фиксированной сумме $d_0 + d_1 + \dots + d_{p^k-1} = n$ принимает наименьшее значение тогда, когда эти остатки распределены достаточно равномерно (то есть все d_i равны или $\left[\frac{n}{p^k}\right]$, или $\left[\frac{n}{p^k}\right] + 1$), например, при $a_i = i$. Это нетрудно сделать например методом "шевелений".