

7 и 8 ОДДЕЛЕНИЕ

Секоја од задачите со реден број од 1 до 10 се вреднува со 3 поени

1. Кој од следниве изрази има најголема вредност?

- (A) 2011^1 (B) 1^{2011} (C) 1×2011 (D) $1 + 2011$ (E) $\frac{1}{2011}$

Решение. Бидејќи

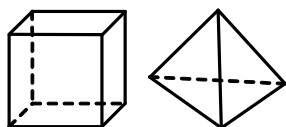
$$2011^1 = 2011$$

$$1 \times 2011 = 2011$$

$$1 + 2011 = 2012$$

$$1 : 2011 = \frac{1}{2011},$$

Најголема вредност е $1 + 2011 = 2012$.



2. Илина си игра со коцки и тетраедри. Таа има 5 коцки и 3 тетраедри. Колку страни заедно имаат коцките и тетраедрите на Илина?

- (A) 42 (B) 48 (C) 50 (D) 52 (E) 56

Решение. Една коцка има 6 страни а еден тетраедар има 4 страни. Пет коцки и три тетраедри заедно имаат

$$5 \cdot 6 + 3 \cdot 4 = 30 + 12 = 42$$

страни.

3. Една зебра (пешачки премин) е составена од бел $1^{2011} = 1$ и црни ленти кои се поставени наизменично, и секоја е широка 50 cm. На улицата, зебрата започнува и завршува со бела лента. Зебрата има 8 бели ленти. Колку е широка улицата?

- (A) 7 m (B) 7,5 m (C) 8 m (D) 8,5 m (E) 9 m

Решение. Ако забрата почнува и завршува со бела трака и има 8 бела траки, таа вкупно има 15 траки. Според тоа ширината на улицата е

$$15 \cdot 0,5 = 7,5 \text{ m}.$$

4. Калкулаторот на Мартин е расипан, и наместо да множи тој дели, одзема наместо да собира. Тој сакал да пресмета $(12 \times 3) + (4 \times 2)$. Кој резултат го дава калкулаторот?

- (A) 2 (B) 6 (C) 12 (D) 28 (E) 38

Решение. Калкулаторот наместо да пресмета $(12 \times 3) + (4 \times 2)$ тој ќе пресмета

$$(12 : 3) - (4 : 2) = 4 - 2 = 2.$$

5. Дигиталниот часовник на Мартин само што почна да покажува 20:11. По колку минути часовникот повторно ќе покажува време запишано со цифрите 0, 1, 1, 2 во некој редослед?

- (A) 40 (B) 45 (C) 50 (D) 55 (E) 60

Решение. Наредниот пат часовникот на Мартин ќе покажува време запишано со цифрите 2,0,1,1 во

21:01

часот. Од покажување на времето 20:11 до 21:01 ќе поминат

20:11

21:01

00:50

минути.

6. На цртежот се дадени три квадрати. Страните на "средниот" квадрат поврзуваат средини на страните на "големиот" квадрат. Страните на "малиот" квадрат поврзуваат средини на страните на "средниот" квадрат. Површината на "малиот" квадрат е 6 cm^2 . Колку е разликата помеѓу плоштината на "големиот" квадрат и плоштината на "средниот" квадрат, во cm^2 ?

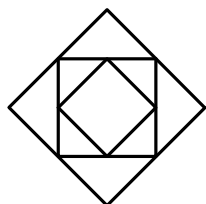
(A) 6

(B) 9

(C) 12

(D) 15

(E) 18



Решение. Должината на страната на "најмалиот" квадрат е $a = \sqrt{6}$, а неговата дијагонала има должина

$$d = \sqrt{(\sqrt{6})^2 + (\sqrt{6})^2} = \sqrt{12}.$$

Значи, должината на страната на "средниот" квадрат е

$$b = d = \sqrt{12} \text{ cm},$$

А неговата плоштина

$$P = b^2 = 12 \text{ cm}^2.$$

Должината на дијагоналата на "средниот" квадрат е

$$D = \sqrt{(\sqrt{12})^2 + (\sqrt{12})^2} = \sqrt{24},$$

па според тоа, должината на страната на "најголемиот" квадрат е $D = \sqrt{24} \text{ cm}$.

Сега, разликата меѓу плоштините на "најголемиот" и "средниот" квадрат е

$$S = (\sqrt{24})^2 - (\sqrt{12})^2 = 24 - 12 = 12 \text{ cm}^2.$$

7. Во улицата на Илина има 17 куќи. Таа живеам во последната куќа на страната каде што сите куќи имаат парни броеви. Бројот на нејзината куќа е 12. Нејзината братучетка живее во последната куќа на страната каде што сите куќи имаат непарни броеви. Кој е бројот на нејзината куќа?

(A) 5

(B) 7

(C) 13

(D) 17

(E) 21

Решение. Ако последниот број на "парната страна" на улицата е 12, на таа страна се куќите со броеви 2,4,6,8,10 и 12. Значи, на парната страна има 6 куќи.

Бидејќи вкупниот број на куќи е 17, на "непарната" страна ќе има $17 - 6 = 11$ куќи, и тоа куќите со броеви

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11

1 3 5 7 9 11 13 15 17 19 21

Бидејќи, братучетка на Илина седи во последната куќа од таа страна, таа живее во куќата со број 21.

8. Мачорот Феликс уловил 12 риби за 3 дена. Секој ден после првиот, тој ловел повеќе риби отколку што уловил претходниот ден. Третиот ден тој уловил помалку риби отколку што уловил првиот и вториот ден заедно.

Колку риби уловил мачорот Феликс третиот ден?

- (A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 9

Решение. Ако x, y и z се бројот на рипчиња кои мачорот Феликс ги уловил првиот, вториот и третиот ден соодветно, тогаш $x < y < z$, $x + y + z = 12$ и $z < x + y$. Единствени такви броеви се

$$x = 3, y = 4 \text{ и } z = 5.$$

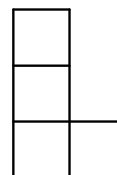
9. Илина ги запишала сите трицифрени броеви кои имаат збир на цифри 8. Потоа најмалиот и најголемиот запишан број ги запишала и ги собрала. Кој збир таа го добила?

- (A) 707 (B) 907 (C) 916 (D) 1000 (E) 1001

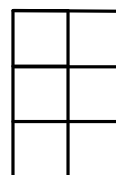
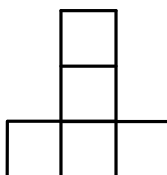
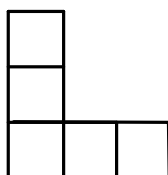
Решение. Најмалиот од запишаните броеви е 107 а најголемиот е 800. Нивниот збир е $800 + 107 = 907$.

10. L-фигурата на цртежот е составена од 4 мали идентични квадратчиња. Треба да се додаде уште едно мало квадратче, за да новодобиената фигура е осно симетрична. На колку начини може да се додаде квадратчето?

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5



Решение. Тоа може да се направи на три различни начини како што е прикажано на цртежот.



Секоја од задачите со реден број од 11 до 20 се вреднува со 4 поени

11. Колку е вредноста на изразот $\frac{2011 \cdot 2,011}{201,1 \cdot 20,11}$?

- (A) 0,01 (B) 0,1 (C) 1 (D) 10 (E) 100

Решение. Со непосредно пресметување имаме

$$\frac{2011 \cdot 2,011}{201,1 \cdot 20,11} = \frac{10 \cdot 201,1 \cdot 2,011}{201,1 \cdot 20,11} = \frac{10 \cdot 2,011}{20,11} = \frac{20,11}{20,11} = 1$$

12. Илина има 9 бисери кои тежат 1g, 2g, 3g, 4g, 5g, 6g, 7g, 8g и 9g. Таа направила 4 прстени, употребувајќи по 2 бисери на секој од нив. Тежината на бисерите на овие 4 прстени се 17g, 13g, 7g и 5g. Кој бисер не е употребен за изработка на прстен?

- (A) 1g (B) 2g (C) 3g (D) 4g (E) 5g

Решение. Бројот 17 може да се претстави како збир на две различни цифри на единствен начин

$$17 = 9 + 8.$$

Бројот 13 може да се претстави како збир на две различни цифри од множеството $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ на единствен начин

$$13 = 6 + 7.$$

Бројот 7 како збир на две различни цифри од множеството $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ може да се претстави како

$$7 = 2 + 5 = 3 + 4$$

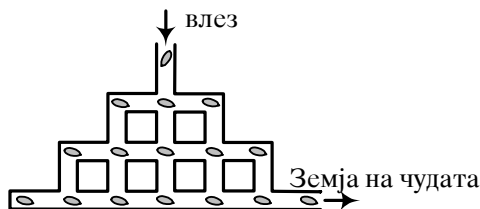
а бројот 5, на истиот начин, како

$$5 = 1 + 4 = 3 + 2.$$

Според тоа, прстенот од 7g е направен од бисерите со 2g и 5g, а прстенот од 5g со бисерите од 1g и 4g.

Значи, неупотребен е бисерот од 3g.

13. Хрчакот Фридолин оди во Земјата на чудата. Пред да влезе во оваа легендарна земја, тој мора да помине низ систем на тунели прикажан на цртежот. Не му е дозволено два пати да помине по истиот пат или истата раскрсница. Во системот од тунели има семки од тиква.



Колку најмногу семки од тиква хрчакот Фридолин може да собере?

- (A) 12 (B) 13 (C) 14 (D) 15 (E) 16

Решение. Со директна проверка се добива дека најголемиот број на семки кои тој може да ги собере е 13.

Ако на првата раскрсница тој не сврти лево или десно, тогаш тој може да собере најмногу 6 односно 10 семки.

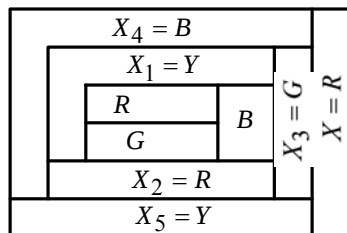
Ако на првата раскрсница сврти десно а потоа на наредната лево тој ќе собере девет семки.

Ако на првата раскрсница сврти десно а потоа на наредната пак десно тој може да собере 11 или 13 семки.

Слично се дискутира и случајот ако тој на првата раскрсница сврти лево.

14. Секој регион во дијаграмот треба да се обои со една од четирите бои: црвена (R), зелена (G), сина (B), жолта (Y). Секои два соседни региони треба да се обоени со различна боја. Боите на три региони се веќе дадени на цртежот.

Со која боја обоен регионот X?



- (A) црвена (B) сина (C) зелена
(D) жолта (E) не може да се утврди

Решение. Регионите кои не се обоени ќе ги означиме со

$$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \text{ и } X.$$

Регионите според условите на задачата треба да се обоени

$$X_1 = Y, X_2 = R, X_3 = G, X_4 = O, X_5 = Y \text{ и } X = R.$$

15. Наставникот ја има следната листа од оценки: 17,13,5,10,14,9,12,16 . Кои две оценки може да се отстранат од листата, за да нивната средна вредност не се промени

- (A) 12 и 17 (B) 5 и 17 (C) 9 и 16 (D) 10 и 12 (E) 14 и 10

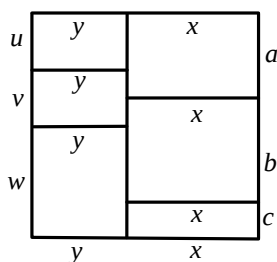
Решение. Средната вредност на дадените оценки е

$$\frac{17+13+5+10+14+9+12+16}{8} = \frac{96}{8} = 12$$

За да средната вредност не се промени треба да се отстранат две оценки чиј збир е 24 . Единствени две такви оценки се 10 и 14 .

16. Лист хартија во облик на квадрат е исечен на шест правоаголници парчиња. Збирот на периметрите на шестте правоаголници е 120cm . Колку е плоштината на листот хартија?

- (A) 48 cm² (B) 64 cm² (C) 110,25 cm² (D) 144 cm² (E) 256 cm²



Решение. Страните на правоаголниците ќе ги означиме како на цртежот. Тогаш од условот на задачата имаме

$$6x + 6y + 2(a + b + c + u + v + w) = 120 .$$

Ако m е должината на страната на квадратот, тогаш $x + y = m$, $a + b + c = m$ и $u + v + w = m$, од каде што добиваме

$$6m + 2(m + m) = 120 .$$

Од последната равенка $m = 12$, па плоштината на листот хартија е

$$P = m^2 = 12^2 \text{ cm}^2 = 144 \text{ cm}^2 .$$

17. На три натпревари тимот на “Барселона” постигнал 3 гола, а примил 1 гол. Во овие 3 натпревари, “Барселона” еднаш победила, еднаш играла нерешено и еднаш изгубила. Со кој резултат на “Барселона” победила?

- (A) 2 : 0 (B) 3 : 0 (C) 1 : 0 (D) 4 : 1 (E) 0 : 1

Решение. Бидејќи примила еден гол, единствен резултат со кој може да изгуби е 1 : 0 . Но тогаш единствено резултат кој е нерешен е 0 : 0 .

Сега, јасно е дека Барселона победила со 3 : 0 .

18. На лист хартија, Илина нацрнала отсечка DE со должина 2. Колку различни точки F може таа да нацрта на листот, така што триаголникот DEF е правоаголен и има плоштина 1 cm² ?

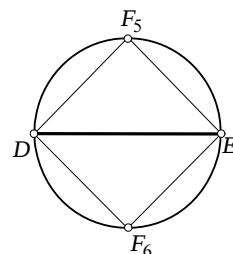
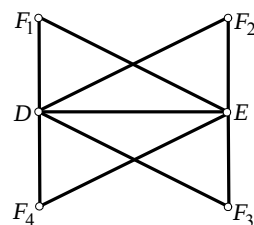
- (A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8 (E) 10

Решение. За бараниот триаголник DEF , отсечката DE може да е катета или хипотенуза.

Постојат четири правоаголници DEF за кои што u е катета, и имаат плоштина $N = 8$. Тоа се DEF_1 , DEF_2 , 2 и DEF_4 прикажани на цртежот.

Ако DE е хипотенуза на бараниот триаголник, тогаш висината спуштена од темето F има должина 1 . Исто така, точката F припаѓа на кружницата со дијаметар DE и има висина 1 .

Такви триаголници има 2 (види цртеж), и тоа DEF_5 и DEF_6 .



19. Позитивниот број a е помал од 1, а бројот b е поголем 1. Кој од следниве броеви има најголема вредност?

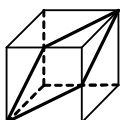
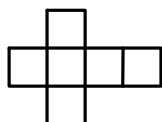
- (A) $a \cdot b$ (B) $a + b$ (C) $a : b$ (D) b (E) не зависи од a и b

Решение. Бидејќи $0 < a < 1 < b$, имаме $b^2 > 1$ од каде добиваме $a : b < ab$. Од $b > 0$ и $a < 1$, добиваме

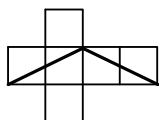
$$ab < b.$$

Секако дека од позитивноста на a и b , јасно е дека $b < a + b$. Според тоа,

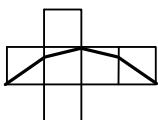
$$a : b < ab < b < a + b.$$



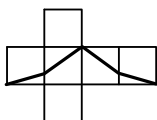
20. Фигурата на цртежот е направена од хартија, и потоа од неа е склопена коцка. Потоа е повлечена темна линија која што ја дели површината на коцката на два идентични дела. Како изгледа хартијата ако коцката се расклопи?



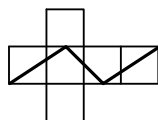
(A)



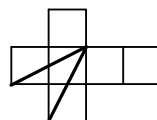
(B)



(C)



(D)



(E)

Решение. Два од рабовите на коцката испртаната темна линија ги дели на половина. Таква скица е само скицата под (A).

Секоја од задачите со реден број од 21 до 30 се вреднува со 5 поени

21. Петцифрениот број $24X8Y$ е делив со 4, 5 и 9. Колку е збирот на цифрите X и Y ?

- (A) 13 (B) 10 (C) 9 (D) 5 (E) 4

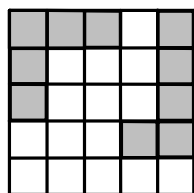
Решение. За да бројот $24X8Y$ е делив со 5, неговата последна цифра треба да е 0 или 5. За да тој е делив со 4, последната цифра Y мора да е една од цифрите 4, 8, 0. Според тоа,

$$Y \in \{0, 5\} \cap \{0, 4, 8\} = \{0\},$$

т.е. $Y = 0$ Значи, $24X8Y = 24X80$. За да бројот е делив со 9, треба збирот на неговите цифри да е делив со 9. Значи, $9 \mid 2 + 4 + x + 8 + 0 = 14 + X$.

Единствена таква цифра е $X = 4$, и бараниот збир е

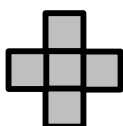
$$X + Y = 0 + 4 = 4.$$



22. Илина поставила две фигури составени од по пет мали квадрати на квадратна плоча (види цртеж). Која од следниве пет фигури таа може да ја смести на празниот дел од таблата, така што не би имало место за ниту една од преостанатите четири фигури?



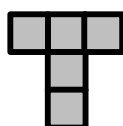
(A)



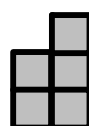
(B)



(C)

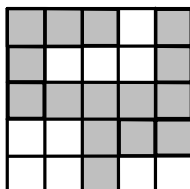


(D)

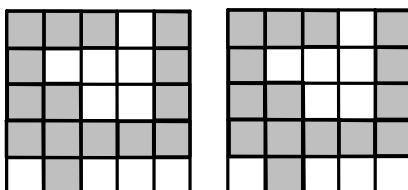


(E)

Решение. Ако ја ставиме фигурата под (D) како на цртежот, тогаш ниту една од другите фигура не може да се постави.



Од друга страна, на пример како и да го поставиме крстот во празниот дел, секогаш може да се постави барем една од преостанатите четири фигури.



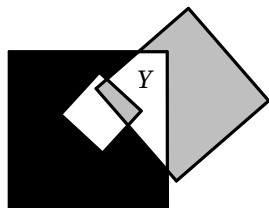
Слично се разгледуваат и другите фигури.

23. Секое од трите врапчиња, Ики, Мики и Оки, направиле сопствено гнездо. Ики вели: "Моето гнездо е повеќе од два пати подалеку од гнездото на Мики отколку од гнездото на Оки". Мики вели: "Моето гнездо е повеќе од два пати подалеку од гнездото на Оки отколку од гнездото на Ики". Оки вели: "Моето гнездо е повеќе од два пати подалеку од гнездото на Мики отколку од гнездото на Ики". Најмалку две од врапчињата ја кажуваат вистината. Кос врапче лаже?

- (A) Ики (B) Мики (C) Оки (D) ниту едно (E) невозможно е да се каже

Решение. Користејќи го неравенството на триаголник или растојание меѓу точки од една права, се добива дека лажело врапчето Мики, под претпоставка дека другите две врапчиња ја зборувале вистината.

24. Во внатрешноста на квадрат со страна 7см, е нацртан квадрат со страна 3см. Потоа е нацртан квадрат со страна 5см кој ги сече првите два квадрати како на цртежот. Колку изнесува разликата меѓу плоштината на црниот дел и вкупната плоштина на сивите делови?



- (A) 0 cm^2 (B) 10 cm^2 (C) 11 cm^2
(D) 15 cm^2 (E) не е можно да се утврди

Решение. Едната од белите плоштини ќе ја означиме со Y . Плоштината на црната површина е

$$7^2 - 3^2 - Y = 40 - Y,$$

а вкупната плоштина на сивите делови заедно е

$$5^2 - Y = 25 - Y.$$

Нивната разлика е

$$40 - Y - (25 - Y) = 40 - 25 = 15.$$

25. Мартин учествувал на натпревар по стрелаштво. Секогаш кога ќе ја погодел целта тој освојувал 5, 8 или 10 бодови. Тој еднаков број пати освоил 8 и 10 бодови. Вкупно освоил 99 бодови, а 25% од гаѓањата ја промашил метата. Колку пати Мартин гаѓал во метата?

- (A) 10 (B) 12 (C) 16 (D) 20 (E) 24

Решение. Бидејќи 8 и 10 бодови освоил ист број пати, а вкупно на крајот имал 99 бода, добиваме дека

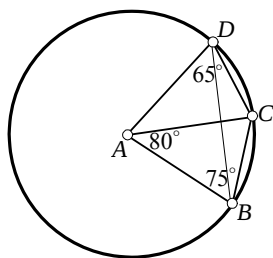
$$5 \mid 99 - 18x$$

и $99 - 18x \geq 0$. Лесно се добива дека единствена можност за x е $x = 3$. Значи, за освоените бодови тој гаѓал

$$3 \cdot 2 + 9 = 15$$

пати. Бројот 15 е 75% од вкупниот број нагаѓања, па тој промашил 5 пати.

Значи, Мартин освоил 99 бода во 20 гаѓања.



26. Во конвексниот четириаголник $ABCD$ важи $\overline{AB} = \overline{AC}$, $\angle BAD = 80^\circ$, $\angle ABC = 75^\circ$, $\angle ADC = 65^\circ$. Која е големината на $\angle BDC$?

- (A) 10° (B) 15° (C) 20° (D) 30° (E) 45°

Решение. Триаголникот ABC е рамнокрак со основа BC (од условот на задачата). Според тоа

$$\angle BCA = 75^\circ \quad \text{и} \quad \angle BAC = 30^\circ.$$

Бидејќи $\angle BAD = 80^\circ$ и $\angle BAC = 30^\circ$, имаме

$$\angle DAC = \angle BAD - \angle BAC = 80^\circ - 30^\circ = 50^\circ$$

За триаголникот ACD имаме $\angle CAD = 50^\circ$, $\angle ADC = 65^\circ$, па според тоа

$$\angle ACD = 180^\circ - \angle DAC - \angle ADC = 180^\circ - 65^\circ - 50^\circ = 65^\circ.$$

Триаголникот DAC е рамнокрак со основа DC . Значи, $\overline{AC} = \overline{AD}$. Следствено, точките B, C, D лежат на кружница со центар во A и радиус $r = \overline{AB} = \overline{AC} = \overline{AD}$.

Сега,

$$\angle BDC = \frac{1}{2} \angle BAC = \frac{1}{2} 30^\circ = 15^\circ$$

(перифериски и централен агол над ист кружен лак).

27. Пред седум години, бројот на години на Лепа бил делив 8, а за осум години бројот на години на Лепа ќе биде делив со 7. Пред осум години, бројот на години на Драги бил делив со 7, а за седум години бројот на години на Драги ќе биде делив со 8. Ниту Драги ниту Лепа немаат повеќе од сто години. Која од следниве реченици може да е вистинита?

- (A) Драги е две години постар од Лепа
(B) Драги е една година постар од Лепа
(C) Драги и Лепа се на иста возраст
(D) Драги е една година помлад од Лепа
(E) Драги е две години помлад од Лепа

Решение. Нека Лепа има a години. Тогаш $a - 7 = 8x$ и $a + 8 = 7y$, односно $8x + 7 = 7y - 8$, односно $8x + 15 = 7y$.

Бидејќи x и y се природни броеви последното равенство е можно за $x = 6, x = 13, \dots$. Од $8x + 7 < 100$ добиваме $x = 6$, т.е. $a = 55$.

Слично, нека b е бројот на годините на Драги. Тогаш $b - 8 = 7z$ и $b + 7 = 8u$, од каде добиваме $7z + 8 = 8u - 7$, т.е. $7z + 15 = 8u$. Бидејќи u и z се природни броеви, последното равенство е можно за $z = 7 + 8s$. Бидејќи $7z + 8 < 100$ добиваме $z = 7$. Сега, бројот на години на Драги е

$$b = 49 + 8 = 57.$$

Значи, Драги е две години постар од Лепа.

28. Во изразот

$$\frac{K \cdot A \cdot N \cdot G \cdot A \cdot R \cdot O \cdot O}{G \cdot A \cdot M \cdot E}, \quad (1)$$

на различни букви одговараат различни ненулти цифри. На исти букви одговараат исти цифри. Која е најмалата целобројна позитивна вредност на овој израз?

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 5 (E) 7

Решение. Вредноста на изразот е иста со вредноста на изразот

$$\frac{K \cdot A \cdot N \cdot R \cdot O \cdot O}{M \cdot E}. \quad (2)$$

За да вредноста на изразот е што помала, најдобро е $M = 9$ и $N = 8$. За да таа е целобројна, треба

$$M \cdot E \mid K \cdot A \cdot N \cdot R \cdot O \cdot O.$$

Во тој случај, една од цифрите треба да е 6 а друга да е 3, за да $K \cdot A \cdot N \cdot R \cdot O \cdot O$ е делив со 9. Уште повеќе, во овој случај, една од цифрите треба да е 4, за да тој е делив со 8.

Ако избереме $K = 6, A = 3, N = 4$, за да имаме најмала вредност потребно е во овој случај да избереме $R = 2$ и $O = 1$.

Во именител на (2) не може да е ниту цифрата 5, ниту цифрата 7, за да количникот е цел број. Но во (1) сега можеме да избереме $G = 5$ или $G = 7$ и во двата случаи добиваме вредност 2.

Навистина

$$\frac{6 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1}{5 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 8} = 2,$$

$$\frac{6 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1}{7 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 8} = 2.$$

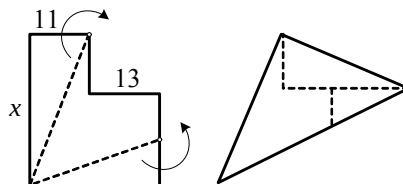
Сега вредноста на изразот е 2.

Вредност 1 не може да се добие. Секако, вредноста на именителот е најголема можна избрана, а на броителот најмала можна избрана.

29. На левиот цртеж е претставена фигура составена од два правоаголници. Должините на две нејзини страни се 11 и 13 (види цртеж). Фигурата е исечена на три дела и деловите се составени во триаголник.

Која должината на страната x ?

- (A) 36 (B) 37 (C) 38 (D) 39 (E) 40



Решение. Триаголникот е направен од два правоаголни триаголници со катети x и 11 за едниот и y и 24 за другиот, и еден петаголник кој не е конвексен.

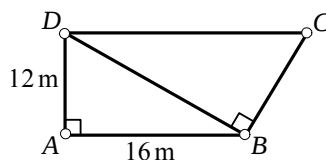
Сега е очигледно дека

$$x = 13 + 24 = 37.$$

30. Еден трапез е направен од два слични триаголници како што е прикажано на цртежот.

Колкава е површината на трапезот?

- (A) 120 (B) 192 (C) 240
(D) 246 (E) 296



Решение. Хипотенузата на правоаголниот триаголник со катети 12 cm и 16 cm е дијагонала на трапезот, катета на другиот правоаголен триаголник и нејзината должина е еднаква на

$$l = \sqrt{12^2 + 16^2} = \sqrt{144 + 256} = \sqrt{400}.$$

Од сличноста на правоаголните триаголници, имаме

$$12 : 16 = \overline{BC} : \overline{BD}$$

$$x = \overline{BD} = \frac{20 \cdot 12}{16} = 15.$$

Сега плоштината на трапезот е еднаква на

$$P = \frac{12 \cdot 16}{2} + \frac{20 \cdot 15}{2} = 12 \cdot 8 + 10 \cdot 15 = 96 + 150 = 246.$$

