

Ристо Малчески

МАТЕМАТИЧКИ ТАЛЕНТ 8
ОЛИМПИСКИ ТЕМИ – ВТОР ДЕЛ
(геометрија и комбинаторика)

Скопје, 2019

Рецензент

Проф. д-р Сава Гроздев

CIP - Каталогизација во публикација

Национална и универзитетска библиотека "Св. Климент Охридски",
Скопје

51:373.3(079.1)

МАЛЧЕСКИ, Ристо

Математички талент 8 : олимписки теми : (геометрија и
комбинаторика). Д. 2 / Ристо Малчески. - Скопје : Армаганка, 2019. - 342
стр. ; 25 см

Библиографија: стр. 340-342

ISBN 978-608-4904-86-1

а) Математика - Основно образование - Задачи од натпревари
COBISS.MK-ID 111826954

СОДРЖИНА

Предговор	5
III Геометрија	
III.1 Триаголник	7
III.2 Неравенство на триаголник	22
III.3 Четириаголник	25
III.4 Кружница	31
IV Множества, логика и комбинаторика	
IV.1 Множества	35
IV.2 Логички задачи	38
IV.3 Броења	42
IV.4 Принцип на Дирихле	47
IV.5 Игри и стратегии	49
IV.6 Метод на инваријанти	51
IV.7 Боење на броеви, точки и отсечки	53
IV.8 Боења и покривања	55
IV.9 Дополнителни задачи	61
Решенија на задачите	
III Геометрија	
III.1 Триаголник	65
III.2 Неравенство на триаголник	137
III.3 Четириаголник	153
III.4 Кружница	179
IV Множества, логика и комбинаторика	
IV.1 Множества	194
IV.2 Логички задачи	206
IV.3 Броења	223

IV.4	Принцип на Дирихле	247
IV.5	Игри и стратегии	255
IV.6	Метод на инваријанти	263
IV.7	Боење на броеви, точки и отсечки	269
IV.8	Боења и покривања	283
IV.9	Дополнителни задачи	312
Додаток		
1.	Пресликувања	330
2.	Инјекција, сурјакција и биекција. Инверзно пресликување	331
3.	Еквивалентни множества	332
4.	Принцип на еднаквост, збир, производ, вклучување и исклучување	333
5.	Групирање на елементи на конечно множество	335
	Литература	340

ПРЕДГОВОР

Ниедно истражување на човекот не може да се нарече вистинска наука ако не е поткрепено со математички доказ.

Проблематична е веродостојноста на тврдењата во науките каде што нема примена на ниту една математичка дисциплина, т.е. кои не се поврзани со математиката.

Леонардо да Винчи

Книгава *Математички талент* 8 е наменета за талентираниите ученици по математика од основното образование и на извесен начин е продолжение на книгите *Математички талент* 1 - 7. Меѓутоа, сметам дека оваа книга ќе биде интересна и за наставниците кои дел од своето слободно време го посветуваат на математички надарените ученици, како и за бројните вљубеници во математиката. Книгата, всушност, е збирка од 366 решени задачи во која во два одделни дела се обработени задачи од геометријата и комбинаториката, приспособени за децата кои учествуваат на националните и меѓународните олимпијади за ученици до 15,5 годишна возраст.

Рецензентот д-р Сава Гроздев, придонесе со своите сугестии и забелешки да се подобри содржината на книгава, за што посебно му благодарам.

И покрај вложениот напор, не можем да се ослободам од впечатокот дека се можни значителни подобрувања на оваа збирка решени задачи, како и отстранување на евентуалните пропусти и грешки. Затоа, однапред сум благодарен на секоја добронамерна забелешка, критика и сугестија.

На крајот, ќе ми биде особена чест и задоволство ако оваа збирка придонесе учениците да навлезат во тајните на математиката, а посебно ако математиката им стане животна определба на некои од нив.

Скопје
ноември, 2019 г.

Авторот

III ГЕОМЕТРИЈА

III.1. ТРИАГОЛНИК

1. Даден е остроаголен $\triangle ABC$ со висина CD и нека E е средината на CD . Нека $BE \cap AC = L$. Точката P е избрана така, што четириаголникот $EDBP$ е правоаголник. Докажи, дека правата AP ја полови отсечката BL .
2. Даден е триаголник ABC со тежиште G и центар на впишаната кружница I . Ако $\overline{AB} = 42$, $\overline{GI} = 2$ и $AB \parallel GI$, определи ги должините на страните AC и BC .
3. Нека ABC е разностран остроаголен триаголник и E е внатрешна точка на тежишната линија AD ($D \in BC$). Нека точката F е подножјето на нормалата повлечена од точката E на правата BC , M е внатрешна точка на отсечката EF , а N и P се подножјата на нормалите повлечени од точката M соодветно на правите AC и AB . Докажи дека правите на кои лежат симетралите на аглите PMN и PEN немаат заеднички точки.
4. Даден е $\triangle ABC$ таков што $\angle ACB = 60^\circ$. Низата точки $A_0, A_1, \dots, A_{2006}$ е определена со: $A_0 = A$, A_1 е подножјето на нормалата повлечена од A_0 кон правата BC , A_2 е подножјето на нормалата повлечена од A_1 кон правата AC итн. A_{2006} е подножјето на нормалата повлечена од A_{2005} кон правата AC . Аналогно е дефинирана низата $B_0, B_1, \dots, B_{2006}$: $B_0 = B$, B_1 е подножјето на нормалата повлечена од B_0 кон правата AC итн. Докажи, дека правата $A_{2006}B_{2006}$ е тангента на впишаната кружница во $\triangle ABC$ ако и само ако

$$\frac{\overline{AC} + \overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{2^{2006} + 1}{2^{2006} - 1}.$$

5. Даден е $\triangle ABC$, ($\overline{BC} < \overline{AB}$) и права l која минува низ темето C и е

нормална на BE ($E \in AC$) на $\angle B$. Правата l ја сече симетралата BE во точката F , а тежишната линија BD ($D \in AC$) ја сече во точката G . Докажи, дека отсечката DF ја преполовува отсечката EG .

6. Дадени се $\triangle ABC$ и кружница со центар во точка O која минува низ точките A и C и по втор пат ги сече страните AB и BC во точките K и N , соодветно. Кружниците опишани околу триаголниците ABC и KBN имаат точно две заеднички точки B и M . Докажи, дека $\angle BMO = 90^\circ$.
7. Во $\triangle ABC$ е земена точка K која лежи на симетралата на $\angle BAC$. Правата CK по вторпат ја сече опишаната кружница ω околу $\triangle ABC$ во точката M . Кружницата Ω минува низ точката A , ја допира правата CM во точката K и по вторпат ја сече отсечката AB во точката P , а кружницата ω во точката Q . Докажи, дека точките P, Q и M лежат на една права.
8. Во $\triangle ABC$ важи $\angle ACB = 50^\circ$ и $\angle CBA = 70^\circ$. Нека D е подножјето на нормалата повлечена од точката A кон страната BC , O е центарот на опишаната кружница околу $\triangle ABC$ и E е точката на кружницата која е дијаметрално спротивна на точката A . Определи ја големината на $\angle DAE$.
9. Даден е $\triangle ABC$ со центар на впишаната кружница I . Кружница со центар во I и радиус $\overline{CI}$ ја сече страната AB во внатрешни точки M и N . Докажи, дека $\angle MCN < 60^\circ$.
10. Околу $\triangle ABC$, $b \geq c$ опишана е кружница. Од средината E на лакот BC кој не ја содржи точката A повлечен е дијаметар ED . Докажи дека $\angle DEA = \frac{1}{2}(\beta - \gamma)$, каде β и γ се аглиите на триаголникот во темињата B и C , соодветно.
11. Во триаголникот ABC важи $\angle ACB = 2\angle ABC$. Точката M припаѓа на страната AC и важи $\overline{CM} = \overline{BC}$. Определи ги аглиите на триаголникот ABC ако $\overline{BM} = \overline{AC}$.
12. Во внатрешноста на $\triangle ABC$ на симетралата на аголот B е дадена точка M таква што $\overline{AM} = \overline{AC}$ и $\angle BCM = 30^\circ$. Докажи, дека $\angle AMB = 150^\circ$.

13. Нека M и N се средините на страните BC и AB на триаголникот ABC , соодветно и точката D лежи на страната BC . Докажи, дека ако $P = AD \cap MN$, тогаш $AP \perp BP$ ако и само ако AD е симетрала на аголот $\angle CAB$.
14. Даден е остроаголен $\triangle ABC$. Кружница k низ A и B ги сече страните AC и BC во внатрешни точки M и N , соодветно. Тангентите на k во точките M и N се сечат во точката O . Докажи, дека O е центар на опишаната кружница околу $\triangle CMN$ ако и само ако AB е дијаметар на k .
15. Даден е остроаголен $\triangle ABC$ ($\overline{AC} > \overline{BC}$) со опишана кружница k со центар O . Точката N е средина на AB , а точката P е подножјето на висината повлечена од C кон правата AB . Нека правите CP и CO по втор пат ја сечат k во точките E и K , соодветно. Точката F е проекција на E врз CK , а точката M е проекција на P врз FE . Нека T е средината на KF . Докажи, дека $\angle MTF = \angle PNC$.
16. Даден е агол γ , $0^\circ < \gamma < 180^\circ$ и права AB која ја дели рамнината на две полурамнини ψ и $\overline{\psi}$. Подвижна точка C од ψ е таква што $\angle ACB = \gamma$. Впишаната кружница во $\triangle ABC$ со центар во точката I ги допира AC и BC соодветно во точките E и F . Точката P лежи на полуправата IE , после E , и е така што $PE \perp BC$ и $\overline{PE} = \overline{AF}$. Точката Q лежи на полуправата IF , после F и е таква што $QF \perp AC$ и $\overline{QF} = \overline{BE}$. Докажи, дека симетралата на отсечката PE минува низ постојана точка.
17. Симетралите на аглиите при темињата A, B и C на $\triangle ABC$ ја сечат опишаната кружница околу триаголникот во точките A_1, B_1 и C_1 , соодветно. Да означиме $AA_1 \cap CC_1 = I$, $AA_1 \cap BC = N$ и $BB_1 \cap A_1C_1 = P$. Нека O е центарот на опишаната кружница околу $\triangle IPC_1$ и $OP \cap BC = M$. Определи ги аглиите на $\triangle ABC$, ако $\overline{BM} = \overline{MN}$ и $\angle BAC = 2\angle ABC$.
18. Даден е $\triangle ABC$ и точки M и N , соодветно на страните AC и BC така да $\overline{CM} = \overline{CN}$. Пресечната точка на AN и BM е означена со O . Ако $\overline{AO} = \overline{BO}$ и еден од аглиите на триаголникот е еднаков на 40° , да се определат останатите агли.

19. Во внатрешноста на $\triangle ABC$ со агли $\angle BAC = 70^\circ$ и $\angle ABC = 80^\circ$ земена е точка M . Ако $\angle ACM = 10^\circ$ и $\angle CBM = 20^\circ$, докажи дека $\overline{AB} = \overline{MC}$.
20. Даден е $\triangle ABC$, во кој $\angle BAC = 37^\circ$ и $\angle ABC = 16^\circ$. На продолжението на страната BC е земена точка M така што $\overline{AM} = \overline{AC}$, каде C е меѓу B и M , а во полурамнината определена со правата BC , која не ја содржи A , е земена точка N така што $\angle CBN = 2\angle CMN = 37^\circ$. Да се определи:
а) $\angle CNM$;
б) односот $\overline{AQ} : \overline{AC}$, каде Q е пресечната точка на правите AB и CN .
21. Даден е остроаголен $\triangle ABC$ таков што $\overline{AB} > \overline{AC}$. Нека точката M е средина на страната BC . Надворешната симетрала на $\angle BAC$ ја сече полуправата BC во точка P . Точките K и F лежат на правата PA и се такви што $MF \perp BC$ и $MK \perp PA$. Докажи, дека $\overline{BC}^2 = 4\overline{PF} \cdot \overline{AK}$.
22. Ако I е центар на впишаната кружница во $\triangle ABC$, I_a е центар на припишаната кружница кон страната BC на $\triangle ABC$ и D е втората пресечна точка на на AI со опишаната кружница околу $\triangle ABC$, тогаш $\overline{DB} = \overline{DC} = \overline{DI} = \overline{DI_a}$. Докажи!
23. Даден е $\triangle ABC$ и внатрешна точка M , за која важи $\angle MAC = \angle MBC = 30^\circ$. Ако P и Q се подножните точки на нормалите повлечени од M соодветно кон страните BC и AC , а D е средината на страната AB , докажи дека $\triangle PQD$ е рамнострани.
24. На страната $\overline{BC} = 6\text{cm}$ на рамностран $\triangle ABC$ земена е точка M таква, што $\angle MAB = 20^\circ$. Нека N е точка на правата AM , при што M е меѓу A и N . Определи ја должината на отсечката MN , ако $\angle BCN = 50^\circ$.
25. Даден е триаголник ABC и точки E и D на страната AB така, што $\angle ACE = \angle ECD = 12^\circ$. Определи го $\angle ABC$, ако $\angle ECB = 90^\circ$ и $\overline{AC} + \overline{CD} = \overline{AB}$.
26. Докажи дека постои точно еден триаголник чии должини на страни се последователни природни броеви и еден од аглиите е два пати поголем од еден од преостанатите два агли.

27. Даден е остроаголен триаголник ABC . Нека D е средина на помалиот лак BC на кружницата опишана околу $\triangle ABC$. Точките E и F се симетрични на точката D соодветно во однос на правата BC и центарот на опишаната кружница околу $\triangle ABC$. Нека K е средина на отсечката EA .
- а) Докажи дека кружницата која минува низ средините на страните на $\triangle ABC$ ја содржи точката K .
- б) Докажи дека правата која минува низ точката K и средината на страната BC е нормална на правата AF .
28. Впишаната кружница во триаголникот ABC ги допира страните AB и AC соодветно во точките D и E . Нека симетралите на аглите во темињата C и B ја сечат правата DE соодветно во точките X и Y и нека Z е средината на страната BC . Докажи, дека триаголникот XYZ е рамностран ако и само ако $\angle A = 60^\circ$.
29. Даден е разностран остроаголен триаголник ABC во кој $\overline{AC} > \overline{BC}$. Нека O е центарот на опишаната кружница и H е ортоцентарот на $\triangle ABC$ и нека F е подножјето на висината повлечена од темето C . На правата AB е избрана точка P , различна од A , таква што $\overline{AF} = \overline{PF}$, а M е средината на страната AC . Нека X е пресекот на правите PH и BC , Y е пресекот на правите OM и FX , а Z е пресекот на правите OF и AC . Докажи, дека точките F, M, Y и Z лежат на иста кружница.
30. Нека A, B и C се точки на кружница Γ со центар O такви што $\angle ABC > 90^\circ$. Нека D е пресечната точка на правата AB и нормалата на правата AV во точката C . Нека l е нормалата повлечена од точката D на правата AO , E е пресечната точка на правите l и AC , а F е онаа точка на пресекот на кружницата Γ и правата l која се наоѓа меѓу точките D и E . Докажи, дека кружниците опишани околу триаголниците BFE и CFD се допираат во точката F .
31. На страните на рамностран триаголник ABC избрани се шест точки: A_1, A_2 на BC ; B_1, B_2 на AC и C_1, C_2 на AB . Овие точки се темиња на конвексен шестаголник $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ чии страни имаат еднакви должини. Докажи, дека правите A_1B_2, B_1C_2 и C_1A_2 се сечат во една

точка.

32. Впишаната кружница во $\triangle ABC$ ги допира страните на триаголникот BC, CA и AB во точките M, N и P , соодветно. Нека D е точка на NP е таква што $\frac{\overline{DP}}{\overline{DN}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}}$. Докажи, дека $DM \perp PN$.
33. Точките B и A припаѓаат на коцентричните кружници k_1 и k_2 со центар во O и должини на радиуси 3 и 5, соодветно. Ако $\triangle ABC$ е рамностран, определи ја најголемата можна должина на отсечката OC .
34. Во $\triangle ABC$ точката M е средина на страната BC и важи $\angle MAC = \angle ABC$ и $\angle BAM = 105^\circ$. Определи го $\angle ABC$.
35. Даден е $\triangle ABC$ со $\angle ACB = 100^\circ$. Средината на страната AC е означена со M , а на нејзината симетрала е земена точка K таква, што $2\overline{MK} = \overline{BK}$ и $\angle MKB = 100^\circ$. Определи ги аглиите на $\triangle ABC$.
36. Даден е правоаголен $\triangle ABC$ со прав агол во темето C . Нека H е подножјето на висината повлечена од темето C на страната AB . Докажи, дека збирот на радиусите на впишаните кружници во $\triangle ABC, \triangle BCH$ и $\triangle ACH$ е еднаков на $\overline{CH}$.
37. Даден е остроаголен $\triangle ABC$ с висини AK ($K \in BC$) и BL ($L \in AC$). Ако G и T се тежиштата соодветно на $\triangle ABL$ и $\triangle ABK$, докажи дека остриот агол меѓу AK и BL е еднаков на 60° ако и само ако $\overline{GT} = \frac{1}{6} \overline{AB}$.
38. Даден е $\triangle A_1A_2A_3$ со тежиште G , во кој P_1, P_2 и P_3 соодветно се средините на страните A_2A_3, A_3A_1 и A_1A_2 . Нека точките G_1, G_2 и G_3 се такви, што отсечките P_1G_1, P_2G_2 и P_3G_3 имаат заедничка точка M , за која важи
- $$\overline{MG_1} : \overline{P_1G_1} = \overline{MG_2} : \overline{P_2G_2} = \overline{MG_3} : \overline{P_3G_3} = 1 : m,$$
- каде $m > 1$ е реален број. Ако точките M_1, M_2 и M_3 се соодветно од отсечките GG_1, GG_2 и GG_3 и се такви, што
- $$\overline{GM_1} : \overline{M_1G_1} = \overline{GM_2} : \overline{M_2G_2} = \overline{GM_3} : \overline{M_3G_3} = 10 : 11,$$
- определи ги вредностите на m , за кои отсечките A_1M_1, A_2M_2 и A_3M_3 се паралелни и еднакви.

39. Нека AD и BE се симетрали на внатрешните агли на $\triangle ABC$. Нека x, y, z се растојанијата од точка M , која припаѓа на отсечката DE , до страните BC, CA, AB , соодветно. Докажи, дека $z = x + y$.
40. Триаголникот AOB со ротација во рамнината околу темето O за агол 90° се пресликува во триаголник A_1OB_1 , при што A_1 е слика на A и B_1 е слика на B . Докажи дека тежишната линија на триаголникот OAB_1 повлечена кон страната AB_1 е нормална на правата A_1B .
41. Над страните AB, BC и AC на рамностраниот триаголник ABC замени се соодветно точки M, N и P такви што $\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{BN}}{\overline{NC}} = \frac{\overline{CP}}{\overline{PA}} = \frac{1}{2}$.
На отсечката PM земена е точка Q таква што $\frac{\overline{PQ}}{\overline{QM}} = \frac{1}{2}$. Определи ги аглите на триаголникот AQN .
42. Даден е правоаголен $\triangle ABC$, $\angle A = 90^\circ$, $\angle C = 30^\circ$. Кружницата ω минува низ точката A и ја допира страната BC во нејзината средина K . Нека ω ги сече страната AC и опишаната кружница околу $\triangle ABC$ во точките N и M , соодветно. Докажи, дека $MN \perp BC$.
43. Даден е рамнокрак $\triangle ABC$, $\overline{AC} = \overline{BC}$. Точката D од страната AB е таква што полукружницата со дијаметар BD и центар O ја допира страната AC во точка P и ја сече страната BC во точка Q . Радиусот OP ја сече отсечката DQ во точката E и важи $5\overline{PE} = 3\overline{DE}$. Определи го односот $\overline{AB} : \overline{BC}$.
44. Во правоаголен $\triangle ABC$, $\angle C = 90^\circ$ и висина CH , допирните точки на впишаната кружница со катетите AC и BC се P и Q , соодветно. Ако $AQ \perp HP$, определи го односот $\overline{AH} : \overline{BH}$.
45. Даден е $\triangle ABC$ таков што $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$ и $\overline{BC} = 1$. Во $\triangle ABC$ е впишан рамностран триаголник (на секоја страна на $\triangle ABC$ лежи по едно теме на впишаниот рамностран триаголник). Определи ја најмалата можна должина на страната на впишаниот рамностран триаголник.

46. На краците AC и BC на рамнокракиот $\triangle ABC$ земени се точките A_1 и B_1 , соодветно така што $4\overline{AA_1} \cdot \overline{BB_1} = \overline{AB}^2$. Докажи, дека симетралите на $\angle AA_1B_1$ и $\angle BB_1A_1$ се сечат на правата AB .
47. Даден е рамнокрак триаголник ABC ($\overline{AC} = \overline{BC}$) со $\angle ACB = 20^\circ$. Симетралата на страната BC ја сече AC во точката Q , а точката P од страната BC е таква што $\overline{BP} = \overline{BA}$. Определи ја големината на $\angle PBQ$.
48. Даден е $\triangle ABC$ таков што $\angle B > 45^\circ$, $\angle A > 45^\circ$. Во надворешноста на триаголникот се конструирани рамнокраки правоаголни триаголници DCB и ECA со прави агли во темето C . Точката P се наоѓа во внатрешноста на $\triangle ABC$ и притоа $\triangle ABP$ е рамнокрак правоаголен со прав агол во темето P . Докажи, дека $\triangle DEP$ е рамнокрак правоаголен.
49. Нека ABC е рамнокрак триаголник таков што $\overline{AB} = \overline{AC}$ и $\frac{\angle A}{2} < \angle B$. На продолжението на висината AM се избрани точки D и Z такви што $\angle CBD = \angle A$ и $\angle ZBA = 90^\circ$. Точката E е подножје на нормалата повлечена од точката M кон висината BF , а точката K е подножје на нормалата повлечена од точката Z на правата AE . Докажи, дека $\angle KZB = \angle KBD = \angle KCB$.
50. Нека ABC е рамнокрак триаголник и $\angle BAC = 100^\circ$. Нека D е пресечната точка на симетралата на $\angle ABC$ и страната AC . Докажи, дека $\overline{AD} + \overline{DB} = \overline{BC}$.
51. Отсечката BH е висина во рамнокракиот $\triangle ABC$, $\overline{AC} = \overline{BC}$. Симетралата на страната BC ја сече правата AC во точката D и $\overline{DH} = \overline{HA} + \overline{AB}$. Определи ги можните вредности на $\angle BAC$.
52. Даден е правоаголен $\triangle ABC$ со прав агол во темето C . Нека M е средината на BC , а D и E се подножјата на нормалите повлечени од темето C кон AB и AM , соодветно. Ако $\overline{BE} = 2\overline{DE}$, определи го $\angle ABC$.
53. Даден е $\triangle ABC$, во кој $\angle ACB = 60^\circ$ и $\overline{BC} > \overline{CA}$. Точките A_1 и B_1 , соодветно на страните BC и CA , се такви, што $AA_1 \perp BC$ и $BB_1 \perp CA$.

Точката P е пресечната точка на правите A_1B_1 и AB , и важи $\angle A_1PB = 30^\circ$.

а) Определи ги аглиите на $\triangle ABC$.

б) Точките M и N , соодветно на страните CA и AB , се такви, што $A_1M \perp CA$ и $A_1N \perp AB$. Определи го $\angle SA_1N$, ако S е пресечната точка на правите MN и BB_1 .

54. Отсечките AD и BE се висини во $\triangle ABC$. Правата низ точката D паралелна со AC ја сече правата AB во точка P . Правата низ точката E паралелна со BC ја сече правата AB во точката Q . Докажи, дека точките D, E, P, Q лежат на една кружница.

55. Даден е $\triangle ABC$, $\overline{AC} \neq \overline{BC}$. Нека I е центарот на впишаната кружница k во $\triangle ABC$, а D, E, F се допирните точки на k со страните AB, BC, AC , соодветно.

а) Ако $S = CI \cap EF$, докажи дека $\triangle CDI \sim \triangle DSI$.

б) Нека M е втората пресечна точка на k и CD . Тангентата на k во M ја сече правата AB во точката G . Докажи, дека $GS \perp CI$.

56. Во кружница k е впишан $\triangle ABC$ со $\angle ACB > 90^\circ$. Нека BD е дијаметар на k . Кружницата k_1 со центар D и радиус DC по вторпат ја сече k во точката E и ја сече AB во точката G . Ако F е пресечната точка на GE и BD , докажи дека $\angle DCG = \angle EFD$.

57. Даден е $\triangle ABC$ со ортоцентар H . Нека M е средината на AB , а H_1 и H_2 се проекциите на H врз симетралата на внатрешниот и надворешниот агол при темето C , соодветно. Докажи, дека точките M , H_1 и H_2 лежат на една права.

58. На страните BC, CA и AB на рамнокрак $\triangle ABC$ ($\overline{AB} = \overline{BC}$) земени се точки A_1, B_1 и C_1 такви што $\angle BC_1A_1 = \angle CA_1B_1 = \angle BAC$. Отсечките BB_1 и CC_1 се сечат во точка P . Докажи, дека четириаголниците ABA_1B_1 и AB_1PC_1 се тетивни.

59. Даден е остроаголен $\triangle ABC$ со центар на опишаната кружница O . Точката $H \in AB$ е таква, што $CH \perp AB$. Точката P лежи на правата

CH и важи $\frac{\overline{CH}}{\overline{HP}} = \frac{1}{3}$, при што H е меѓу P и C . Точката $Q \in PB$ е таква што четириаголникот $PACQ$ е тетивен. Докажи дека правата AQ ја полови отсечката CO .

60. Даден е рамнокрак триаголник ABC , $\overline{AC} = \overline{BC}$. Нека k е кружница со центар во C и радиус помал од висината CH , $H \in AB$ на $\triangle ABC$. Низ точките A и B повлекуваме тангенти на k така што допирните точки P и Q се наоѓаат во иста полурамнина во однос на правата CH . Докажи, дека точките P, Q и H лежат на една права.

61. Во остроаголен $\triangle ABC$ се повлечени висините AA_1, BB_1 и CC_1 . Докажи, дека симетричната точка на B_1 во однос на правата, определена со средините на AA_1 и CC_1 , лежи на отсечката A_1C_1 .

62. На страните BC, CA и AB на триаголникот ABC соодветно се избрани точките A_1, B_1 и C_1 така што се исполнети равенствата

$$\overline{AB_1} - \overline{AC_1} = \overline{CA_1} - \overline{CB_1} = \overline{BC_1} - \overline{BA_1}.$$

Нека I_A, I_B, I_C соодветно се центрите на впишаните кружници во триаголниците $AB_1C_1, A_1BC_1, A_1B_1C$. Докажи дека центарот на кружницата опишана околу $\triangle I_A I_B I_C$ се совпаѓа со центарот на кружницата впишана во $\triangle ABC$.

63. Даден е $\triangle ABC$ и внатрешна точка D од страната AB . Правата CD ја сече опишаната кружница k на $\triangle ABC$ во точка E . Ако F е втората заедничка точка на правата AC и опишаната кружница k_1 на $\triangle ADE$, а G е пресечната точка на правите FD и BC , докажи, дека точките B, D, E и G лежат на една кружница. Определи го видот на $\triangle ABC$, ако правата AC е тангентата на k_1 .

64. Даден е $\triangle ABC$ таков што $\overline{AB} = \overline{AC}$. Нека

(a) M е средина на страната BC , а O е точка на правата AM таква што OB е нормална на AB .

(b) Q е произволна точка на страната BC различна од B и C .

(c) E се наоѓа на правата AB , а F на правата AC и притоа точките E, Q и F се различни и колинеарни.

Докажи, дека OQ е нормална на EF ако и само ако $\overline{QE} = \overline{QF}$.

65. Даден е остроаголен $\triangle ABC$ таков што $\overline{AB} \neq \overline{AC}$. Кружницата со дијаметар BC ги сече страните AB и AC во точките M и N соодветно. Со O да ја означиме средината на страната BC . Симетралите на аглиите $\angle BAC$ и $\angle MON$ се сечат во точка R . Докажи, дека кружниците опишани околу $\triangle BMR$ и $\triangle CNR$ се сечат во точка која припаѓа на страната BC .
66. Даден е $\triangle ABC$. Нека $BL, L \in AC$ е симетралата на $\angle ABC$, а $AH, H \in BC$ е висината на триаголникот повлечена од темето A . Докажи, дека $\angle AHL = \angle ALB$ ако и само ако $\angle BAC = \angle ACB + 90^\circ$.
67. Даден е $\triangle ABC$ таков што $\angle C = \angle A + 90^\circ$. Нека D точката на продолжението на страната BC преку темето C за која важи $\overline{AC} = \overline{AD}$. Точката E припаѓа на полурамнината определена со правата BC која не ја содржи точката A и е таква што $\angle EBC = \angle A$ и $\angle EDC = \frac{1}{2} \angle A$. Докажи, дека $\angle CED = \angle ABC$.
68. Темињата A и B на рамностран $\triangle ABC$ лежат на кружница k со радиус 1, а темето C се наоѓа во внатрешноста на кружницата k . Точката $D \neq B$ лежи на кружницата k и важи $\overline{AD} = \overline{AB}$. Правата DC ја сече кружницата k уште во точката E . Определи ја должината на отсечката CE .
69. Во остроаголниот $\triangle ABC$ точките D и E се подножја на висините повлечени од темињата A и B , соодветно, $\overline{AC} > \overline{BC}$ и $\overline{AB} = 2\overline{DE}$. Со O и I да ги означиме центарите на опишаната и впишаната кружница, соодветно. Определи го $\angle AIO$.
70. (задача на Наполеон). Даден е $\triangle ABC$, над чии страни кон надворешноста на триаголникот се конструирани рамнострани триаголници $\triangle BCP$, $\triangle CAQ$ и $\triangle ABR$. Докажи,
- $\overline{AP} = \overline{BQ} = \overline{CR}$.
 - Правите AP, BQ и CR се сечат во една точка.
 - Центрите на рамностраните $\triangle BCP$, $\triangle CAQ$ и $\triangle ABR$ се темиња на рамностран триаголник.

71. Даден е $\triangle ABC$. Кружницата која минува низ темињата B и C и ја допира страната AC во точката S и кружницата која минува низ темињата A и C и ја допира страната BC во точката T по втор пат се сечат во точката D . Докажи дека правата CD минува низ пресечната точка P на тангентите на опишаната кружница околу $\triangle ABC$ повлечени во темињата A и B .
72. Докажи, дека ако за должините на страните на $\triangle ABC$ е точно равенството $2\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$, тогаш темето B , центарот на впишаната кружница во $\triangle ABC$ и средините на страните AB и BC лежат на една кружница.
73. Даден е $\triangle ABC$ таков што $\angle ACB > 90^\circ$. Нека CH е висината повлечена од темето C ($H \in AB$), а AL е симетралата на $\angle BAC$ ($L \in BC$). Определи го $\angle ALC$, ако се знае дека $\angle ALC = \angle BHL$.
74. Во $\triangle ABC$ точките D, E и F се соодветно од страните BC, CA и AB и важи $\overline{AF} = \overline{EF}$ и $\overline{BF} = \overline{DF}$. Докажи, дека ортоцентарот на $\triangle ABC$ лежи на кружницата опишана околу $\triangle CDE$.
75. Во $\triangle ABC$ е впишана кружница со центар I , која страните BC, CA и AB соодветно во точките D, E и F . Правата ID ја сече отсечката EF во точка K и точката M е средината на отсечката BC . Докажи дека точките A, K и M лежат на една права.
76. Впишаната кружница во $\triangle ABC$ ги допира страните BC и AC во точките A_1 и B_1 , соодветно. Правата B_1A_1 ја сече AB во точката X , при што A е меѓу X и B . Определи ги аглите на $\triangle ABC$, ако $\angle CXB = 90^\circ$ и $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC} \cdot \overline{AC}$.
77. Даден е триаголник ABC и права m која ги сече страните AB и AC соодветно во точките D и F , и продолжението на страната BC во точката E така што C е меѓу B и E . Трите прави кои минуваат низ точките A, B, C и се паралелни со m по вторпат ја сечат кружницата опишана околу триаголникот ABC соодветно во точките A_1, B_1, C_1 . Докажи дека правите A_1E, B_1F, C_1D се сечат во една точка.
78. Даден е $\triangle ABC$. Припишана кружница кон страната BC има центар

J и ги допира правите AB и AC соодветно во точките E и F . Правите BJ и CJ ја сечат правата EF соодветно во точките P и Q и притоа важи $\overline{BC} = 2\overline{PQ}$. Определи ја големината на $\angle BAC$.

79. Во кружница k е впишан остроаголен $\triangle ABC$ со ортоцентар H . Кружницата опишана околу $\triangle ACH$ има радиус 1 и центарот и лежи на k .
 - а) Определи ја големината на $\angle ABC$.
 - б) Определи ја должината на отсечката BH .
80. Даден е $\triangle ABC$ со центар на впишаната кружница I . Кружницата која минува низ B и во точката I ја допира правата AI по вторпат ја сече правата AB во точката P и по вторпат ја сече правата BC во точката Q . Правата QI ја сече AC во точката R . Докажи дека $\overline{AR} \cdot \overline{BQ} = \overline{PI}^2$.
81. Нека BE и CF се висините на остроаголниот $\triangle ABC$, $\angle BAC = 45^\circ$ и N, M и K се неговиот ортоцентар и средините на BC и AN , соодветно.
 - а) Докажи, дека четириаголникот $MEKF$ е квадрат.
 - б) Докажи, дека пресекот на дијагоналите на четириаголникот $MEKF$ се совпаѓа со средината на отсечката OH , каде O е центарот на кружницата опишана околу $\triangle ABC$.
 - в) Определи ја должината на отсечката EF , ако радиусот на кружницата опишана околу $\triangle ABC$ е еднаков на 1.
82. Даден е остроаголен $\triangle ABC$. Кружницата $\omega_1(O_1, R_1)$ минува низ точките B и C и по вторпат ги сече правите AB и AC во точките D и E , соодветно. Нека $\omega_2(O_2, R_2)$ е опишаната кружница околу $\triangle ADE$. Докажи дека должината на отсечката O_1O_2 е еднаква на радиусот на опишаната кружница околу $\triangle ABC$.
83. Нека AL и BK се симетралите на аглите на разностранниот триаголник ABC ($L \in BC, K \in AC$). Симетралата на отсечката BK ја сече правата AL во точката M . Нека N е точка на правата BK таква што $LN \parallel MK$. Докажи, дека $\overline{LN} = \overline{NA}$.
84. Даден е $\triangle ABC$. Точката M припаѓа на правата CA (A е меѓу C и M), точката N припаѓа на правата AB (B е меѓу A и N), точката P

припаѓа на правата BC (C е меѓу B и P) и важи $\overline{AM} - \overline{BC} = \overline{BN} - \overline{AC} = \overline{CP} - \overline{AB}$. Докажи, дека аглите на триаголникот MNP не зависат од изборот на точките M, N и P .

85. Нека CH , CL и CM се соодветно висината, симетралата на аголот и тежишната линија повлечени од темето C во $\triangle ABC$ (точките H, L и M се на правата AB). Односите на плоштините на $\triangle HMC$ и $\triangle LMC$ спрема плоштината на $\triangle ABC$ соодветно се $\frac{1}{4}$ и $1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$. Определи ги аглите на $\triangle ABC$.
86. На страните AB, BC и CA на $\triangle ABC$ се земени точки M, N и P , соодветно. Правата низ M и паралелна на BC , правата низ N и паралелна со AC , како и правата низ P и паралелна со AB се сечат во една точка T . Докажи, дека ако $\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{BN}}{\overline{NC}} = \frac{\overline{CP}}{\overline{PA}}$, тогаш T се совпаѓа со тежиштето на $\triangle ABC$.
87. Точката M е средина на страната AC на триаголникот ABC со тежиште G . На страната AB земена е точка N таква што $\overline{AN} = \frac{1}{3}\overline{AB}$. Пресечната точка на отсечките BM и CN е означена со P , а тежиштата на триаголниците CPM и BNP се означени со Q и R , соодветно. Докажи, дека точките Q, G и R лежат на една права и најди го односот $\frac{P_{ARQ}}{P_{ABC}}$ на плоштините на триаголниците ARQ и ABC .
88. Во правоаголен триаголник ABC ($\angle ACB = 90^\circ$) симетралата на аголот CL ($L \in AB$) ја дели хипотенузата на отсечки со должини a и b , ($a > b$). Ако H_1 и H_2 се ортоцентрите соодветно на $\triangle ALC$ и $\triangle BLC$, определи ја плоштината на четириаголника AH_1BH_2 .
89. Даден е остроаголен $\triangle ABC$. Нека h_a, h_b, h_c се висините, t_a, t_b, t_c тежишните линии на повлечени кон страните a, b, c соодветно, r е радиусот на впишаната и R е радиусот на опишаната кружница околу $\triangle ABC$. Докажи, дека $\frac{t_a}{h_a} + \frac{t_b}{h_b} + \frac{t_c}{h_c} \leq 1 + \frac{R}{r}$. Кога важи знак за равенство.
90. Впишаната кружница во $\triangle ABC$ ги допира страните BC, AC и AB во точките D, E и F , соодветно. Со K и L да ги означиме се поднож-

јата на нормалите повлечени од точките F и E на страната BC , соодветно. Нека вторите пресечни точки на овие нормали со впишаната кружница се M и N , соодветно. Докажи, дека $\frac{P_{\triangle BMD}}{P_{\triangle CND}} = \frac{\overline{DK}}{\overline{DL}}$.

91. Нека BAC е триаголник со тежиште G и нека l е права која ги сече страните AB и AC соодветно во точките B_1 и C_1 така што A и G лежат во иста полурамнина во однос на l . Докажи дека

$$P_{BB_1GC_1} + P_{CC_1GB_1} \geq \frac{4}{9} P_{ABC}.$$

Кога важи знак за равенство?

92. Даден е $\triangle ABC$ со центри I_a и I_b на припишаните кружници кон страните BC и AC , соодветно. Ако M е средината на страната AB и правите MI_a и MI_b ги сечат страните BC и AC соодветно во точките Q и P , докажи дека правата PQ е паралелна на AB и минува низ центарот I на впишаната кружница во $\triangle ABC$.

93. Нека P, Q и R се точки на страните BC, CA и AB на триаголникот ABC . Ако правите AP, BQ и CR се сечат во точката T , докажи дека

$$\frac{\overline{TP}}{\overline{AP}} + \frac{\overline{TQ}}{\overline{BQ}} + \frac{\overline{TR}}{\overline{CR}} = 1. \quad (1)$$

94. Во $\triangle ABC$ со должина на страните a, b и c е впишана кружница и на неа се повлечени тангенти паралелни со страните на триаголникот, кои од $\triangle ABC$ отсекуваат три нови триаголници, во кои се впишани кружници. Пресметај го збирот на плоштините на четирите кругови.

95. Нека A, B и C се три колинеарни точки, такви што B е меѓу A и C . Од иста страна на правата AC конструирани се три полукружници со дијаметри AB, BC и AC . Заедничката тангента на првите две полукружници во точката B ја сечат третата полукружница во точка E . Нека U и V се точки во кои заедничката надворешна тангента ги допира првите две полукружници. Пресметај го количникот $\frac{P_{EUV}}{P_{EAC}}$, во функција од $r_1 = \frac{1}{2} \overline{AB}$ и $r_2 = \frac{1}{2} \overline{BC}$.

96. Даден е триаголникот ABC , $(\overline{BC} < \overline{AB})$. Низ точката C е повлечена

права l , нормална на симетралата BE на аголот $\angle B$. Правата l ја сече BE во точка F , а тежишната линија BD во точка G . Да се докаже дека отсечката DF ја преполовува отсечката EG .

97. Нека AD е симетралата на аголот BAC во $\triangle ABC$ и M и N се точки на страните AB и AC , соодветно, такви што $\angle MDA = \angle ABC$ и $\angle NDA = \angle BCA$ и нека P е пресечната точка на правите AD и MN .

Докажи дека $\overline{AD}^3 = \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AP}$.

98. На страните AB, BC, CA на триаголникот ABC се избрани точки C_1, A_1, B_1 , соодветно, така што правите AA_1, BB_1, CC_1 се сечат во една точка. Низ точките B_1 и C_1 повлекуваме прави паралелни на правата AA_1 , кои ги сечат правите CC_1 и BB_1 во точките B_2 и C_2 , соодветно. Докажи дека правите BC, B_1C_1 и B_2C_2 или се паралелни или се сечат во една точка.

III.2. НЕРАВЕНСТВО НА ТРИАГОЛНИК

1. Ако a, b, c се должини на страни на триаголник, тогаш

$$abc \geq (b+c-a)(c+a-b)(b+a-c)$$

Докажи!

2. Нека a, b, c се должини на страни на триаголник. Докажи дека

$$a^3 + b^3 + 3abc > c^3.$$

3. Нека се a, b, c должини на страни на триаголник. Докажи дека

$$a^2(b+c-a) + b^2(c+a-b) + c^2(a+b-c) \leq 3abc \quad (1)$$

4. Ако a и b се должините на катетите и c должината на хипотенузата на произволен правоаголен триаголник, докажи дека за секој природен број $n \geq 3$ важи неравенството $a^n + b^n < c^n$.

5. Дали постојат шест различни точки во рамнината (една црвена, две плави и три зелени), такви што збирот на растојанијата помеѓу црвената и плавите точки е 8, збирот на растојанијата меѓу црвената и зелените точки е 6, а збирот на растојанијата меѓу плавите и зелените точки е 9.

6. Нека a, b и c се страни на триаголник и $p = \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$, $q = \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}$. Докажи дека $|p - q| < 1$.

7. Нека се a, b, c должини на страни на триаголник и $p + q + r = 0$. Докажи дека

$$a^2 pq + b^2 qr + c^2 rp \leq 0 \quad (1)$$

8. Ако се a, b, c страни на $\triangle ABC$ и α, β, γ соодветните агли изразени во радијани, докажи дека

$$\frac{\pi}{3} \leq \frac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{a+b+c} < \frac{\pi}{2}$$

9. Нека a, b, c се должините на страните на $\triangle ABC$ и $2s = a + b + c$ е неговиот периметар. Докажи, дека

$$\sqrt{s} \leq \sqrt{s-a} + \sqrt{s-b} + \sqrt{s-c} \leq \sqrt{3s}. \quad (1)$$

10. Ако a, b и c се страни на триаголник со периметар 1, докажи дека

$$a^2 + b^2 + c^2 + 4abc < \frac{1}{2}.$$

11. Даден е $\triangle ABC$ со страни $a > b > c$ и точка O во неговата внатрешност. Нека правите AO, BO, CO ги сечат страните на триаголникот BC, CA и AB во точки P, Q и R , соодветно. Докажи дека

$$\overline{OP} + \overline{OQ} + \overline{OR} < a.$$

12. Во рамнината се дадени $n \geq 3$ точки $A_1, A_2, \dots, A_n$ такви што никои три не лежат на една права. Точките $M_1, M_2, \dots, M_n$ лежат на отсечките $A_1 A_2, A_2 A_3, \dots, A_n A_1$ соодветно, а точките $B_1, B_2, \dots, B_n$ во $\triangle M_n A_1 M_1, \triangle M_1 A_2 M_3, \dots, \triangle M_{n-1} A_n M_n$. Докажи дека

$$\overline{B_1 B_2} + \overline{B_2 B_3} + \dots + \overline{B_n B_1} \leq \overline{A_1 A_2} + \overline{A_2 A_3} + \dots + \overline{A_n A_1}.$$

13. Дадени се остроаголен $\triangle ABC$ и точка M во неговата внатрешност. Докажи, дека

$$\min\{\overline{MA}, \overline{MB}, \overline{MC}\} + \overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} < \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA}.$$

14. Нека a, b, c се должините на страните на $\triangle ABC$ и $2s = a + b + c$ е неговиот периметар. Докажи, дека

$$\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-b} + \frac{1}{s-c} \geq 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right). \quad (1)$$

15. Нека a, b, c се должините на страните на $\triangle ABC$. Докажи, дека

$$\sqrt{a+b-c} + \sqrt{b+c-a} + \sqrt{c+a-b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}.$$

16. За $\triangle ABC$ радиусот на впишаната кружница е еднаков на $\frac{\sqrt{3}}{3}$, а периметарот е еднаков на 6. Определи ги аглиите на $\triangle ABC$.

17. Во прав агол со теме A впишана е кружница и B и C се допирните точки со краците на аголот. Докажи, ако на дадената кружница повлечеме тангента која ги сече отсечките AB и AC во точките M и N , тогаш

$$\frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{AC}) > \overline{MB} + \overline{NC} > \frac{1}{3}(\overline{AB} + \overline{AC})$$

18. Даден е $\triangle ABC$. На лакот BC на опишаната кружница околу $\triangle ABC$, кој не ја содржи точката A , земени се точки X и Y такви што $\angle BAX = \angle CAU$. Нека M е средината на тетивата AX . Докажи, дека

$$\overline{BM} + \overline{CM} > \overline{AY}.$$

19. Во рамнината се дадени точка M и квадрат $ABCD$ така што $\overline{MA} = 3$ и $\overline{MB} = 2$. Докажи дека

$$3\sqrt{2} - 2 \leq \overline{MD} \leq 3\sqrt{2} + 2$$

20. Во конвексен четириаголник $ABCD$ важи

$$\overline{AB} + \overline{BD} \leq \overline{AC} + \overline{CD}$$

Докажи, дека $\overline{AB} \leq \overline{AC}$.

21. Даден е конвексен четириаголник $ABCD$ таков што $\angle ADC = 30^\circ$ и $\overline{BD} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC}$. Докажи, дека дијагоналата BD е симетрала на аголот $\angle ABC$.

22. За должините на страните a, b, c на $\triangle ABC$ важи

$$a^2 + b^2 + c^2 = a^3 + b^3 + c^3.$$

Определи ја максималната можна плоштина на $\triangle ABC$.

23. Даден е $\triangle ABC$ со тап агол кај темето A . Нека е $a = \overline{BC}$, $b = \overline{CA}$ и h_a и h_b се висините спуштени од темињата A и B , соодветно. Докажи

дека

$$a + h_a > b + h_b$$

24. Нека P е внатрешна точка во $\triangle ABC$ е нека D, E и F се нејзините ортогонални проекции на правите BC, CA и AB , соодветно. Најди ги сите точки P за кои збирот

$$\frac{BC}{PD} + \frac{CA}{PE} + \frac{AB}{PF}$$

е најмал.

25. Нека a, b, c се должини на страни на $\triangle ABC$. Докажи го неравенството

$$a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \geq 0.$$

Кога важи знак за равенство?

26. Во остроаголниот $\triangle ABC$ тежишната линија AM е подолга од страната AB . Докажи, дека $\triangle ABC$ може да биде расечен на најмногу три дела од кои може да се состави ромб.
27. Дадени се 2016 точки во рамнината, растојанијата меѓу кои се различни. Секоја точка е сврзана со отсечка со најблиската до неа точка. Нека M е множеството од тие отсечки.
- а) Да се определи можниот најмал и најголем број елементи на M со различни должини.
- б) Докажи, дека ако l е искршена линија од отсечки во M , тогаш таа е отворена (т.е. крајот на l не се совпаѓа со почетокот) и не се сече самата.
28. Нека G и O се соодветно тежиштето и центарот на опишаната кружница околу $\triangle ABC$, а R и r соодветно се радиусите на опишаната и впишаната кружница. Докажи дека $\overline{OG} \leq \sqrt{R(R-2r)}$.

III.3. ЧЕТИРИАГОЛНИК

1. Дијагоналите AC и BD на тетивен четириаголник $ABCD$ со центар на опишаната кружница I се сечат во точката E . Докажи, дека ако средините на отсечките AD, BC и IE лежат на една права, тогаш $\overline{AB} = \overline{CD}$.

2. Нека E е пресечната точка на дијагоналите AC и BD на тетивниот четириаголник $ABCD$. Ако $\overline{AC} = \overline{BC}$, $\overline{AD} = 5$, $\overline{BE} = 12$ и $\overline{DE} = 3$, определи го $\angle BCD$.
3. Даден е траpez $ABCD$ ($AB \parallel CD$) со заемно нормални дијагонали и пресечна точка на дијагоналите O . На основата AB е избрана точка M . Опишаните кружници околу $\triangle AMO$ и $\triangle BMO$ по втор пат ги сечат отсечките AD и BC во точките P и Q , соодветно. Докажи, дека центарот на опишаната кружница околу $\triangle MPQ$ лежи на средната линија на траpezот $ABCD$.
4. Даден е конвексен четириаголник $ABCD$. Над страните AB и CD кон внатрешноста на четириаголникот се конструирани рамнострани триаголници ABP и DCM , а над страните AD и BC надворешно за четириаголникот се конструирани рамнострани триаголници ADN и BCQ . Докажи, дека точките M, N, P и Q се темиња на паралелограм.
5. На дадена кружница k се избрани точки A, B и C . Конструирана е кружница ω , која се допира до тетивите AB, AC и внатрешно до кружницата k во точките P, Q и R , соодветно. Нека правите PR и QR по втор пат ја сечат k во точките M и N соодветно, а точката T е таква, што четириаголникот $AMTN$ е паралелограм. Докажи дека точките P, Q и T лежат на една права.
6. Даден е квадрат $ABCD$ со должина на страна a . Точките M и N лежат на страните BC и CD , соодветно и се такви што $\angle MAN = 45^\circ$. Определи го периметарот на триаголникот MNC .
7. Четириаголникот $ABCD$ е опишан околу кружница со радиус r , а точките M и N се средини на страните AB и CD . Докажи, дека $\overline{MN} \geq 2r$.
8. Четириаголникот $ABCD$ е впишан во кружница k . Полуправите DA и CB се сечат во точката N , а NT е тангента на кружницата k . Дијагоналите AC и BD се сечат во точката P , која е тежиште на $\triangle NTD$. Определи го односот $\overline{NT} : \overline{AP}$.
9. Нека $ABCD$ е паралелограм и нека E, F, G и H се средини на стра-

ните AB, BC, CD и DA , соодветно. Ако $BH \cap AC = I, BD \cap EC = J, AC \cap DF = K$ и $AG \cap BD = L$, докажи дека четириаголникот $IJKL$ е паралелограм.

10. Во триаголникот ABC точките A_1, B_1 и C_1 се средини на страните BC, CA и AB , соодветно и M е тежиште. Правата која минува низ A_1 и е паралелна со BB_1 ја сече правата B_1C_1 во точката D . Докажи, дека ако точките A, B_1, M, C_1 лежат на една кружница, тогаш $\angle ADA_1 = \angle CAB$.
11. Нека $ABCD$ е трапез со основи AB и CD и нека $\overline{AB} = a, \overline{BC} = b, \overline{CD} = c, \overline{DA} = d, \overline{AC} = m$ и $\overline{BD} = n$. Познато е дека важи

$$m^2 + n^2 = (a + c)^2.$$
 - а) Докажи дека AC и BD се заедно нормални.
 - б) Докажи дека $ac < bd$.
12. За конвексниот четириаголник $ABCD$ важи $\overline{AD} = \overline{BD}, \overline{AB} = \overline{AC}$, $\angle CAD = 25^\circ$ и $\angle ACB = 85^\circ$. Определи ги аглиите на четириаголникот.
13. Во внатрешноста на квадратот $ABCD$ е конструиран рамностран триаголник ABK . Правите BK и AD се сечат во точка P . Докажи, дека должината на отсечката која ги поврзува средините на отсечките KD и CP е еднаква на половината од должината на страната на квадратот.
14. На страните AB и BC на паралелограмот $ABCD$ се избрани точки E и F такви што DE е симетрала на $\angle ADF$ и $\overline{AE} + \overline{CF} = \overline{DF}$. Правата низ C која е нормална на DE , ја сече страната AD во точката L и ја сече дијагоналата BD во точката H . Нека DE ја сече AC во точката N .
 - а) Докажи, дека $\overline{AE} = \overline{DL}$.
 - б) Ако $HN \parallel AD$, докажи дека $\overline{BC} = \overline{CD}$.
 - в) Ако $HN \parallel AD$, докажи дека четириаголникот $ABCD$ е квадрат.
15. Во конвексен четириаголник $ABCD$ дијагоналите AC и BD се сечат под агол од 90° во точката O . Нека K, L, M и N се ортогоналните проекции на точката O на страните AB, BC, CD и DA , соодветно. Докажи, дека четириаголникот $KLMN$ е тетивен.

16. Во паралелограмот $ABCD$ важи $\overline{AB} = \overline{BD}$. Нека K е точка на AB , различна од A таква што $\overline{KD} = \overline{AD}$. Нека M е точката симетрична на точката C во однос на K , а N е точката симетрична на точката B во однос на A . Докажи, дека $\overline{DM} = \overline{DN}$.
17. Во правоаголен трапез $ABCD$, ($AB \parallel CD$) аголот при темето B е еднаков на 75° . Точката H е подножје на нормалата повлечена од точката A на правата BC . Ако $\overline{BH} = \overline{CD}$ и $\overline{AD} + \overline{AH} = 8$, пресметај ја плоштината на трапезот $ABCD$.
18. Нека $ABCD$ е четириаголник со должини на страни $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$, $\overline{CD} = c$, $\overline{DA} = d$. Докажи, дека плоштината на четириаголникот е помала или еднаква на $\frac{ac+bd}{2}$.
19. Даден е конвексен петаголник $ABCDE$ таков што $\overline{AE} = \overline{AB}$, $\angle EAB = 36^\circ$, $\angle ECD = 18^\circ$ и $\angle EDB = 72^\circ$. Нека k е кружницата опишана околу $\triangle BCE$. Ако AE е тангентата на кружницата k , докажи дека средината на отсечката BD , средината на лакот BE и точката A се колинеарни (лежат на една права).
20. Нека $ABCDE$ е конвексен петаголник таков што $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{BC} + \overline{DE}$ и k е кружница со центар на страната AE која ги допира страните AB, BC, CD и DE во точките P, Q, R и S , соодветно (различни од темињата на петаголникот). Докажи, дека правите PS и AE се паралелни.
21. Нека $ABCD$ е рамнокрак трапез таков што $\overline{AB} = \overline{AD} = \overline{BC}$, $AB \parallel DC$ и $\overline{AB} > \overline{CD}$. Нека E е пресечната точка на дијагоналите AC и BD и нека точката N е симетрична на точката B во однос на правата AC . Докажи, дека четириаголникот $ANDE$ е тетивен.
22. Нека O е точка во внатрешноста на паралелограмот $ABCD$ таква што $\angle AOB + \angle COD = 180^\circ$. Докажи, дека $\angle OBC = \angle ODC$.
23. Нека O е точка во внатрешноста на паралелограмот $ABCD$ таква што $\angle AOB + \angle COD = \angle BOC + \angle DOA$. Докажи, дека постои кружница k

која ги допира кружниците опишани околу триаголниците AOB , BOC , COD и DOA .

24. Даден е правилен шестаголник $ABCDEF$. Нека точките M и N се внатрешни точки на страните DE и CD , соодветно такви што $\angle AMN = 90^\circ$ и $\overline{AN} = \overline{CM}\sqrt{2}$. Определи го аголот $\angle BAM$.
25. Нека $ABCD$ е конвексен четириаголник таков што $\angle DAC = \angle BDC = 36^\circ$, $\angle CBD = 18^\circ$ и $\angle BAC = 72^\circ$. Ако P е пресечната точка на дијагоналите AC и BD , определи го $\angle APD$.
26. Точката P лежи на опишаната кружница околу квадратот $ABCD$. Нека P_1, P_2, P_3 и P_4 се симетричните точки на P во однос на правите AB, BC, CD и DA , соодветно. Докажи дека симетричните точки на P во однос на правите P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4 и P_4P_1 лежат на една права која минува низ центарот на квадратот $ABCD$.
27. Во конвексен четириаголник $ABCD$ важи $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD}$, дијагоналите AC и BD се со различни должини и се сечат во точката E . Докажи дека $\overline{AE} = \overline{DE}$ ако и само ако $\angle BAD + \angle ADC = 120^\circ$.
28. Нека $ABCD$ е тетивен четириаголник кој не е трапез и чии дијагонали се сечат во точката E . Нека средините на отсечките AB и CD соодветно се точките F и G , а l е права која минува низ G и е паралелна со AB . Подножјата на нормалите повлечени од точката E кон правите l и CD соодветно се H и K . Докажи дека правите EF и HK за заемно нормални.
29. Нека $A_1A_2A_3A_4$ тетивен е четириаголник. Со H_1, H_2, H_3, H_4 соодветно да ги означиме ортоцентрите на триаголниците $A_2A_3A_4, A_1A_3A_4, A_1A_2A_4, A_1A_2A_3$. Докажи дека четириаголниците $A_1A_2A_3A_4$ и $H_1H_2H_3H_4$ се складни.
30. Нека $ABCDE$ е конвексен петаголник и нека M, N, P, Q и R се средините на страните AB, BC, CD, DE и EA , соодветно. Ако AP, BQ, CR и DM се сечат во една точка, докажи дека таа точка лежи на от-

сечката EN .

31. Даден е тетивен четириаголник $ABCD$. Точката E е симетрична на точката B во однос на пресекот на правите AD и BC , точката F е симетрична на точката B во однос на средината на страната CD и точката G е симетрична на точката A во однос на средината на отсечката CE . Докажи, дека четириаголникот $EFGC$ е тетивен.
32. Во паралелограм $ABCD$ на страните AB и BC избрани се точки M и N соодветно, така што $\overline{AM} = \overline{NC}$. Нека $Q = AN \cap MC$. Докажи, дека DQ е симетрала на $\angle ADC$.
33. Даден е тетивен четириаголник $ABCD$ таков што $\overline{AB} = \overline{AD}$ и точките M и N лежат на страните CD и BC и се такви што $\overline{MN} = \overline{BN} + \overline{DM}$. Правите AM и AN по вторпат ја сечат опишаната кружница околу $ABCD$ во точките P и Q , соодветно. Докажи, дека ортоцентарот на $\triangle APQ$ лежи на отсечката MN .
34. Даден е тетивен четириаголник $ABCD$. Нека M и N се средините на страните AB и CD , соодветно, точката O е пресек на дијагоналите AC и BD , а точките P и Q се проекциите на точката O на страните AD и BC , соодветно. Докажи, дека $MN \perp PQ$.
35. Даден е тангентен трапез $ABCD$, $(AB \parallel CD, \overline{AB} > \overline{CD})$. Впишаната кружница во $\triangle ABC$ ги допира страни AB и AC во точките M и N , соодветно. Докажи, дека центарот на впишаната кружница во трапезот $ABCD$ припаѓа на правата MN .
36. Даден е квадрат $ABCD$ и точка M на AD таква што $\overline{MD} = 2\overline{AM}$. Нека P е втората пресечна точка на BM со опишаната кружница околу квадратот $ABCD$. Докажи дека правата PC минува низ средината на отсечката AD .
37. Нека $ABCD$ е паралелограм таков што $\overline{AC} > \overline{BD}$ и нека $O = AC \cap BD$. Кружницата со центар O и радиус OA ги сече продолженијата на страните AD и AB во точките G и L , соодветно. Нека $Z = BD \cap GL$. Докажи, дека $\angle ZCA = 90^\circ$.

38. Даден е конвексен четириаголник $ABCD$ таков што
- (i) $\overline{AB} = \overline{AD} + \overline{BC}$,
 - (ii) во внатрешноста на четириагоникот $ABCD$ постои точка P која од правата CD е на растојание h и таква што $\overline{AP} = h + \overline{AD}$ и $\overline{BP} = h + \overline{BC}$.

Докажи дека

$$\frac{1}{\sqrt{h}} \geq \frac{1}{\sqrt{\overline{AD}}} + \frac{1}{\sqrt{\overline{BC}}}.$$

39. Дадена е кружница со центар на страната AB на тетивниот четириаголник $ABCD$. Останатите три страни ја допираат кружница. Докажи дека

$$\overline{AD} + \overline{BC} = \overline{AB}.$$

40. Даден е произволен триаголник ABC со плоштина S . Нека $CD \perp AB$ ($D \in AB$), $DM \perp AC$ ($M \in AC$) и $DN \perp BC$ ($N \in BC$). Со H_1 и H_2 да ги означиме ортоцентрите на триаголниците MNC и MND , соодветно. Изрази ја плоштината на четириаголникот AH_1BH_2 преку S .

41. Во трапез $ABCD$ ($AB \parallel CD$) точката $H \in AB$ е подножје на висината спуштена од темето D , точката E е средина на дијагоналата BD и $HE \parallel AC$. Ако плоштината на триаголникот DBH е P , определи ја плоштината на трапезот $ABCD$.

42. Права ги сече страните AB и BC на триаголникот ABC во точките M и K , соодветно. Ако плоштината на $\triangle MBK$ е еднаква на плоштината на четириаголникот $AMKC$, докажи дека

$$\frac{\overline{MB} + \overline{BK}}{\overline{AM} + \overline{CA} + \overline{KC}} \geq \frac{1}{3}. \quad (1)$$

III.4. КРУЖНИЦА

1. Во внатрешноста на даден агол се конструирани две кружници со центри O_1 и O_2 . Кружниците ги допираат краците на аголот и се допираат меѓусебно. Докажи, дека ако трета кружница чиј центар лежи на отсечката O_1O_2 ги допира краците на аголот и ја содржи една од точките O_1 и O_2 , тогаш ја содржи и другата точка.

2. Даден е $\triangle ABC$, впишан во кружница k со центар O . Тангентата на k во точката C ја сече полуправата BA во точка S . На полуправата CA после точката A се избрани точки P и Q такви што $\overline{AP} = \overline{PQ}$. Докажи, дека точките P, O, C и S лежат на една кружница ако и само ако точките Q, B, C и S лежат на една кружница.
3. Впишаната кружница во триаголникот е проектирана на страните на тој триаголник. Докажи, дека шесте крајни точки на овие проекции припаѓаат на иста кружница.
4. Две кружници k_1 и k_2 со различни радиуси имаат две заеднички точки A и B и нивните центри O_1 и O_2 се наоѓаат на различни страни од правата AB . Нека B_1 и B_2 се точки од k_1 и k_2 , соодветно, кои се дијаметрално спротивни точки на точката B . Точките M_1 од k_1 и M_2 од k_2 се избрани така што $\angle AO_1M_1 = \angle AO_2M_2 < 180^\circ$, B_1 е внатрешна точка за $\angle AO_1M_1$ и B е внатрешна точка за $\angle AO_2M_2$. Нека M е средина на отсечката $\overline{B_1B_2}$. Докажи дека $\angle MM_1B = \angle MM_2B$.
5. На кружницата последователно во насока на движењето на стрелката на часовникот се избрани точки A, B, C, D и E такви што

$$\angle ABE = \angle BEC = \angle ECD = 45^\circ.$$

Докажи дека

$$\overline{AB}^2 + \overline{CE}^2 = \overline{BE}^2 + \overline{CD}^2. \quad (1)$$

6. Дадени се кружница k со центар O и радиус 5, тетива AB со должина 7 и точка C на тетивата. Кружницата k_1 која минува низ точките A, O и C по вторпат ја сече k во точката D . Определи го аголот $\angle ABD$ ако периметарот на $\triangle ACD$ е 12.
7. Нека C е кружница со центар во O и радиус R . Од точката A на кружницата C конструираме тангентата t на кружницата. Низ центарот O повлекуваме права d која тангентата ја сече во точка M и кружницата ја сече во точките B и D (B лежи меѓу O и M). Ако $\overline{AM} = R\sqrt{3}$, докажи дека:
 - а) Триаголникот AMD е рамнокрак.
 - б) Центарот на опишаната кружница околу $\triangle AMD$ лежи на кружницата C .

8. (Теорема на Микел). Четири прави кои по парови не се паралелни определуваат четири триаголници. Докажи, дека опишаните кружници околу овие триаголници минуваат кон една точка.
9. Кружниците C_1 и C_2 со центри соодветно O_1 и O_2 надворешно се допираат во точката T . Нека C е кружница со центар O таква што C_1 и C_2 се допираат внатрешно со C соодветно во точките A и B . Заедничката тангента на C_1 и C_2 во точката T ја сече C во точките K и L . Ако D е средината на отсечката KL , докажи дека $\angle O_1 O O_2 = \angle ADB$.
10. Нека BC е дијаметар на кружница k со центар O , A е точка од k таква што $0^\circ < \angle AOB < 120^\circ$, а D е средината на лакот AB на кружницата k кој не ја содржи точката C . Нека правата која минува низ O и е паралелна со DA ја сече правата AC во точката J , а симетралата на отсечката OA ја сече кружницата k во точките E и F . Докажи, дека J е центар на впишаната кружница во триаголникот CEF .
11. Нека S е точка во внатрешноста на $\angle POQ$ и нека кружницата k која минува низ точката S ги допира краците Op и Oq во точките P и Q , соодветно така што S припаѓа на помалиот лак PQ . Правата s која минува низ точката S и е паралелна со Op ја сече Oq во точката R . Нека T е втората пресечна точка на правата PS и опишаната кружница околу $\triangle SQR$. Докажи, дека $OT \parallel SQ$ и дека OT е тангентата на опишаната кружница околу $\triangle SQR$.
12. Нека A и P се пресечните точки на кружниците k_1 и k_2 со центри O и K , соодветно. Права низ A по втор пат ги сече k_1 и k_2 во точките D и E , соодветно. Докажи дека центарот на опишаната кружница околу $\triangle DEP$ лежи на опишаната кружница околу $\triangle OKP$.
13. Нека A и B се пресечните точки на кружниците k_1 и k_2 . Права l која минува низ точката B по вторпат ги сече k_1 и k_2 во точките X и Y , соодветно. Тангентата на k_1 во точката X и тангентата на k_2 во точката Y се сечат во точката C . Докажи, дека
 - a) $\angle XAC = \angle BAY$,

- б) ако точката B е средина на отсечката XY , тогаш $\angle XBA = \angle XBC$.
14. Кружниците $k(O, r)$ и $k_1(O_1, r_1)$, $r > r_1$ внатрешно се допираат во точката A . Тетивата MN на кружницата k ја допира кружницата k_1 во точката P . Докажи, дека правата AP е симетрала на $\angle MAN$.
15. Кружниците $k(O, r)$ и $k_1(O_1, r_1)$, $r > r_1$ внатрешно се допираат во точката A . Тетивата BE на кружницата k ја сече кружницата k_1 во точките C и D . Докажи, дека $\angle BAD = \angle CAE$.
16. Дадени се кружница ω со центар I и две прави кој ја допираат ω во точките A и B и се сечат во точката O . Нека C е точка на помалиот лак AB на ω , различна од средината на лакот. Правите AC и OB се сечат во точката D , а правите BC и OA се сечат во точката E . Докажи, дека центрите на опишаните кружници околу триаголниците ACE , BCD и OCI лежат на една права.
17. Нека AM и BN се заемно нормални тетиви на кружница k кои се сечат во точката K и ја делат кружницата на четири лаци со различни должини, при што лакот AB е со најмала должина. Нека C и D се точки од кружницата, различни од M и N , такви што $AD \parallel BC$. Ако $L = DN \cap MC$ и $T = DC \cap KL$, докажи дека $\angle KTC = \angle KNL$.
18. Нека A, B, C и O се четири точки во рамнината такви што $\angle ABC > 90^\circ$ и $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$. Нека точката D припаѓа на правата AB , $AC \perp DC$ и правата l е таква што $D \in l$ и $l \perp AO$. Правата l ја сече AC во точката E и опишаната кружница околу $\triangle ABC$ во точката F . Докажи, дека опишаните кружници околу триаголниците BEF и CFD се допираат во точката F .

IV МНОЖЕСТВА, ЛОГИКА И КОМБИНАТОРИКА

IV1 МНОЖЕСТВА

1. Нека $F = \{E_1, E_2, \dots, E_s\}$ е фамилија од r – елементни множества. Докажи, дека ако пресекот на секои $r + 1$ множества од оваа фамилија е непразно множество, тогаш и пресекот на целата фамилија е непразно множество.
2. Докажи дека множеството $\{1, 2, 3, \dots, 23, 24, 25\}$ не може да се подели на две подмножества A со 2 елементи и B од 23 елементи, така што збирот од броевите во множеството B да биде еднаков на производот од елементите од множеството A .
3. Нека M е подмножество од $\{1, 2, 3, \dots, 2008\}$ такво што збирот на било кои два различни броја од M не е делив со 82. Определи го најголемиот можен број на елементи на M .
4. Ако $A = \{1, 2, \dots, 4s - 1, 4s\}$ и $S \subset A$ е такво што $|S| = 2s + 2$, тогаш во множеството S постојат три различни броја x, y, z такви што $x + y = 2z$. Докажи!
5. За едно множество природни броеви X ќе велиме дека е добро, ако за секои $a, b \in X$ точно еден од броевите $a + b$ и $|a - b|$ припаѓа на X (броевите a и b може да бидат еднакви). Определи го максималниот број добри множества кои го содржат бројот 2008.
6. Нека A е множество природни броеви со следново својство: за секои $m, n \in A, m \neq n$ точно е неравенството $10|m - n| + 50 \geq mn$. Определи го најголемиот можен број елементи на A .
7. На еден математички натпревар секој од натпреварувачите има најмногу $d \geq 1$ познаници. Нека d_1 и d_2 се ненегативни цели броеви такви што $d_1 + d_2 = d - 1$. Докажи, дека натпреварувачите можат да

бидат распределени во две простории така што секој ученик од првата просторија има најмногу d_1 познаници во неговата просторија и секој ученик од втората просторија има најмногу d_2 познаници во неговата просторија.

8. Докажи, дека постојат по парови дисјунктни множества $A_1, A_2, \dots, A_{2014}$, чија унија е множеството природни броеви и за кои важи следниов услов: за секои природни броеви a и b , најмалку два од броевите $a, b, \text{NZD}(a, b)$ припаѓаат на едно од множествата $A_1, A_2, \dots, A_{2014}$.
9. Дадено е множеството $A = \{3, 5, 7, 9\}$. Определи го бројот на конечните множества природни броеви B такви што за множествата
$$X = \{2a + b \mid a \in A, b \in B\} \text{ и } Y = \{a + 2b \mid a \in A, b \in B\}$$
 е исполнет условот: за секој елемент на X (соодветно на Y) постои елемент на Y (соодветно на X) таков што разликата на двата елемента е 1.
10. Докажи, дека за секој сложен природен број $n \geq 6$ постои множество A од n различни природни броеви, со следново својство: за секој вистински делител d на n , елементите на A можат на два различни начини да се поделат на $\frac{n}{d}$ по парови дисјунктни подмножества секое со по d елементи така, што збирот на елементите на секое множество од едната поделба е еднаков на збирот на елементите на некое множество од другата поделба.
11. Нека n е природен број и $S = \{n, n+1, n+2, \dots, 5n\}$.
 - а) Докажи, дека ако множеството S е поделено на две дисјунктни множества, тогаш постојат три броја x, y, z (не задолжително различни) кои припаѓаат на исто подмножество на S и за кое важи $x + y = z$.
 - б) Дали тврдењето под а) важи ако наместо множеството S го разгледаваме множеството $S' = \{n, n+1, n+2, \dots, 5n-1\}$.
12. Определи ги сите елементи $n \in A = \{2, 3, \dots, 2016\} \subset \mathbb{N}$ со следново својство: секој број $m \in A$ кој е помал од n и е заемно прост со n , мора да биде прост број.

13. Нека A е множество со n^2 , ($n \geq 2$) елементи, $\mathcal{F}$ е фамилија подмножества од A такви што секое од нив има n елементи и секои две различни множества од $\mathcal{F}$ имаат најмногу еден заеднички елемент. Докажи, дека
- фамилијата $\mathcal{F}$ има најмногу $n^2 + n$ елементи,
 - фамилијата $\mathcal{F}$ има $n^2 + n$ елементи за $n = 3$.
14. Докажи, дека за секој природен број $n \geq 2$ постои множество од n природни броеви такво што за секои два броја a и b од тоа множество важи $(a - b)^2 \mid ab$.
15. Даден е природен број $n \geq 3$. Определи го најмалиот природен број k за кој постојат множество A од k реални броеви и n различни броеви $x_1, x_2, \dots, x_n$ за кои броевите $x_1 + x_2, x_2 + x_3, \dots, x_{n-1} + x_n, x_n + x_1$ се од A .
16. Дадена е низа од природни броеви $1 = x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n < \dots$ таква што $x_{n+1} \leq 2n$, за секој $n \in \mathbb{N}$. Дали постојат два члена на низата x_i и x_j такви што $x_i - x_j = 2017$?
17. Ги разгледуваме сите подмножества на множеството $\{1, 2, \dots, N\}$ кои не содржат два соседни броја. Докажи, дека збирот од квадратите на производите на броевите од овие множества е еднаков на $(N + 1)! - 1$.
18. Нека O_{xyz} е правоаголен координатен систем во просторот, S е конечно множество точки во него, а S_x, S_y и S_z се множествата ортогонални проекции на точките од S на O_{yz}, O_{zx}, O_{xy} , соодветно. Докажи дека
- $$|S|^2 \leq |S_x| \cdot |S_y| \cdot |S_z|.$$
19. Нека A е подмножество на множеството $S = \{1, 2, \dots, 1000000\}$, кое содржи точно 101 елемент. Докажи, дека постојат броеви $t_1, t_2, \dots, t_{100} \in S$ такви што множествата
- $$A_i = \{x + t_i \mid x \in A\}, \quad i = 1, 2, \dots, 100$$
- се по парови дисјунктни.

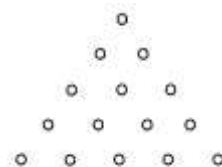
20. Нека затворениот интервал $[0,1]$ е поделен на две дисјунктни множества A и B , т.е. нека $A \cup B = [0,1]$ и $A \cap B = \emptyset$. Дали постои реален број a таков што $A + a = B$, каде $A + a = \{y, y = x + a, x \in A\}$.

IV2 ЛОГИЧКИ ЗАДАЧИ

1. На еден натпревар учествувале 2016 ученици. Докажи дека меѓу нив може да се избераат 45 ученици така да сите се од ист град или сите се од различни градови.
2. Иво нумерирал 100 картички со природните броеви од 1 до 100 и на Јана и дал дел од нив. Познато е дека за секоја картичка на Иво и секоја картичка на Јана, збирот на броевите со кои се означени не е запишан на картичка кај Иво и производот не е запишан на картичка кај Јана. Колку картички има Јана, ако картичката со број 13 не е кај неа?
3. Дадени се три карти и на секоја од нив е запишан по еден природен број. Овие броеви p, q и r го задоволуваат условот $0 < p < q < r$. Три играчи A, B и C играат игра во која еден круг се состои во следното: картите се мешаат и се делат така што секој играч добива по една карта и потоа секој играч добива онолку топчиња колку што е бројот на неговата карта, после што картите се враќаат, а топчињата остануваат кај играчите. Играта има N кругови, $N \geq 2$. На крајот на играта, играчот A имал вкупно 20 топчиња, B – 10 топчиња, а C – 9 топчиња. Познато е дека во последниот круг играчот B добил r топчиња. Кој од играчите добил q топчиња во првиот круг?
4. Природниот број x е таков што се точни две од тврдењата
 - 1) $x + 7$ е точен квадрат,
 - 2) цифрата на единиците на x е 5,
 - 3) $x - 12$ е точен квадрат.Определи го бројот x .
5. Докажи, дека броевите од 1 до 16 може да се наредат во низа така што збирот на секои два соседни броеви е точен квадрат на природен број.
6. Дали постои природен број n кој има точно 49 природни делители и тие делители да може да се подредат во табела со димензии 7×7 , но

така што зборовите на броевите запишани во секој ред и во секоја колона се еднакви?

7. На кружница се запишани 100 по парови различни броеви. Докажи, дека може да се избераат 4 последователни од дадените броеви така што збирот на двата крајни броја е строго поголем од збирот на двата средни.
8. Природните броеви од 1 до 2011 се запишани во произволен редослед еден до друг. Се реализира следнава следната операција (*): ако k , $1 \leq k \leq 2011$ е најлевиот број, првите k броеви се бришат и на нивно место се запишуваат истите броеви, но во обратен редослед (останатите броеви во записот не се менуваат). Докажи, дека:
 - а) за секој природен број n , $1 \leq n \leq 2011$ постои почетен запис, таков што ако операцијата (*) се примени последователно n пати, на првата позиција ќе се најде бројот 1.
 - б) за секој почетен запис постои природен број n таков што ако операцијата (*) се примени последователно n пати, на првата позиција ќе се најде бројот 1.
9. Секое од 1000 цуциња има капа, која е сина однадвор и црвена одвнатре или обратно. Цуцето кое носи црвена (однадвор) капа може само да лаже, а цуцето со сина (однадвор) капа може само да ја говори вистината. Во текот на еден ден секое цуце на секое друго цуце му кажало: “Ти си со црвена капа!”, после што некои цуциња ја превртеле капата наопаку во текот на тој ден. Определи го минималниот број превртувања на капите.
10. На тениски турнир секој тенисер играл по еден натпревар со секој друг тенисер (во тенисот ниту еден натпревар не завршува нерешено). Се покажало, дека најголемиот број играчи кои можат да седнат околу тркалезна маса, но така што секој играч да го победил играчот кој се наоѓа од неговата десна страна е еднаков на четири. Докажи, дека бројот на начините сите играчи да се подредат во редица, но така што секој играч да го победил играчот кој се наоѓа од неговата десна страна е делив со пет.
11. Дадени се 15 сијалици кои се подредени во форма на рамностран триаголник, како што е прикажано на цртежот десно. На почетокот сијалиците



се изгаснати.

а) Докажи, дека може да се запалат 8 сијалици така што меѓу нив нема три кои се темиња на рамностран триаголник.

б) Докажи, дека како и да се запалат 9 сијалици, тогаш меѓу нив има три кои се темиња на рамностран триаголник.

12. На почетокот на масата се поставени 111 парчиња пластелин со еднакви тежини. Во еден чекор можеме да избереме неколку групи (може и една) со еднаков број парчиња во секоја група и од секоја група со слепување на парчињата кои се во неа да формираме ново парче пластелин. Определи го најмалиот број чекори за да се добијат 11 парчиња пластелин, кои по парови имаат различна тежина.

13. Емилија и Весна го пребарувале таванот на дедо Марко и нашле вага и кутија со тегови. Кога теговите ги распределе по маси, констатирале дека има 5 различни групи тегови. Играјќи се со вагата и теговите, констатирале дека ако на едната страна на вагата стават било кои два тега, тогаш е можно во кутијата да се најдат други два тега такви што со нивно ставање на другата страна на вагата, вагата е во рамнотежа.

Определи го најмалиот можен број тегови во кутијата.

14. Нека N е природен број. Дадено е множество тегови кое ги задоволува следниве услови:

- 1) Секој тег од множеството има некоја од тежините $1, 2, \dots, N$;
- 2) За секој $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ постои тег со тежина i .
- 3) Збирот на тежините на сите тегови од даденото множество е парен број.

Докажи дека даденото множество тегови може да се разбие на две подмножества кои имаат еднакви тежини.

15. Дадени се 2005 тегови со маси $1g, 2g, 3g, \dots, 2005g$. Дали може овие тегови да се поделат во пет групи така, што во секоја група да има ист број на тегови и нивната вкупна тежина да биде иста.

16. Определи го најмалиот позитивен реален број α , за кој е точно следново тврдење: ако вкупната тежина на конечен број тикви е еден тон и секоја од тиквите тежи најмногу α тони, тогаш тиквите може да се распределат во 50 вреќи (некои од вреќите може да бидат и празни) така што во секоја вреќа има најмногу α тони тикви.

17. Меѓу 9^k на изглед исти монети една е полесна од останатите. Дадени се три ваги без тегови, едната од кои е неисправна (при секое мерење таа може случајно да биде како точна, така и неточна). Како може со најмногу $3k + 1$ мерења да се определи неисправната монета?
18. Народната банка сака да пушти во употреба 12 различни монети, секоја со номинална вредност природен број. Дали може монетите да имаат таква номинална вредности што секоја сума од 1 до 6543 денари може да се плати со најмногу 8 монети. (При плаќањето на сумата може да се користат неколку монети со една иста номинална вредност.)
19. Во еден град има вкупно 151 спортски клубови, при што во секој клубуваат точно по 12 жители на градот. Познато е дека секои два клуба имаат точно по еден заеднички член, а градоначалникот членува во клубовите “Спортист” и “Фудбалер”. Во уште колку клубови членува градоначалникот?
20. Автобуските линии во еден град се такви што секои две линии имаат точно една заедничка постојка и на секоја линија има барем 4 постојки. Докажи, дека сите постојки може да се распределат меѓу две компании така што на секоја линија има постојка и од двете компании.
21. Множеството темиња на правилен 30-аголник е разбиено на 15 парови, кои определуваат 15 отсечки. Докажи, дека барем две од 15-те отсечки имаат еднакви должини.
22. Растојание меѓу две единечни полиња на бесконечна шаховска табла го нарекуваме минималниот број чекори потребни кралот да стигне од едното до другото поле. На таблата се означени три полиња, такви што растојанието меѓу секои две од нив е еднакво на 100. Определи го бројот на полињата кои од обележените полиња се наоѓаат на растојание еднакво на 50.
23. Овошна 50×50 градина е поделена на 1×1 области. Во некои 1×1 области се засадени јаболкови, портокалови и праскини дрва. Познато е дека секое портокалово дрво е соседно со барем едно јаболково дрво, секое праскино дрво е соседно со барем едно јаболково дрво и едно портокалово дрво и секое празно место е соседно со барем едно јаболково дрво, едно портокалово и едно праскино дрво. Докажи, дека бројот на празните области е помал или еднаков на 1000.

IV3 БРОЕЊА

1. За даден природен број $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ да се определи бројот на негови делители $d(n)$, (вклучувајќи ги 1 и n).
2. Од 100 ученици: 24 ученици не учат ниту еден од јазиците англиски, француски и германски, 48 учат англиски, 8 учат и англиски и француски, 26 учат германски, 8 учат и германски и англиски, 13 учат и германски и француски и 28 учат француски. Колку ученици ги учат сите три јазици?
3. Определи го бројот четирицифрени броеви кои може да се формираат од цифрите 0, 1, 2, 3, 4 и 5, ако:
а) цифрите не се повторуваат
б) дозволено е повторување на цифри.
4. Определи го бројот на зборовите запишани со n букви во кои учествуваат буквите a, b и c , такви што во секој збор секоја од буквите a, b и c се јавува најмалку еднаш. (Под збор ја подразбираме секоја низа со должина од n букви.)
5. На одбојкарски турнир учествувале 10 екипи. Секоја екипа одиграла по еден натпревар со секоја друга екипа. На крајот на турнирот првата екипа имала x_1 победи и y_1 порази, втората екипа имала x_2 победи и y_2 порази итн. Докажи, дека
$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{10}^2 = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_{10}^2.$$
6. Определи го бројот на седумцифрените броеви запишани со цифрите 0, 1, 2, 3 и 4, во кои единицата се јавува трипати, а секоја од останатите цифри се јавува по еднаш.
7. Определи го бројот на пресликувањата $f: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{2016, 2017\}$ такви што $f(1) + f(2) + \dots + f(n)$ е парен број.
8. Претставувањето на природниот број n како збир на природни броеви, при што редоследот на собирците е важен, го нарекуваме *подредено разбивање* на бројот n . На пример, имаме 8 подредени разбивања на бројот 4 и тоа:
$$4 = 1 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 2 = 1 + 2 + 1 = 2 + 1 + 1 = 1 + 3 = 3 + 1 = 2 + 2.$$

Докажи, дека бројот на подредените разбивања на бројот n е еднаков на 2^{n-1} .

9. На еден шаховски турнир, на кој секои два учесника одиграле точно по една партија, секој шахист освоил цел број поени. На турнирот сите шахисти, освен победникот, освоиле ист број поени. Докажи дека бројот на учесниците на турнирот е парен.

Забелешка. Во шахот за победа се добива 1 поен, за нерешено половина поен, за пораз 0 поени.

10. На еден универзитет има 10001 студент. Некои студенти формирале клубови (еден студент може да биде член во повеќе клубови). Некои клубови се групирале во здруженија (еден клуб може да биде во повеќе здруженија). Вкупно има k здруженија. Притоа се исполнети следниве услови:

- i) Секој пар студенти припаѓа на точно еден клуб.
- ii) За секој студент и секое здружение важи дека тој студент членува во точно еден клуб од тоа здружение.
- iii) Секој клуб има непарен број студенти. Клуб со $2m+1$ студент се наоѓа во точно m здруженија.

Опреди ги сите можни вредности на k .

11. За едно множество точки во рамнината ќе велиме дека е слободно ако не постои рамностран триаголник чии темиња припаѓаат на тоа множество. Докажи дека секое множество од n точки во рамнината содржи подмножество со најмалку $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$ точки.

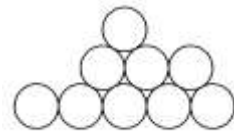
12. Нека X е множество такво што $|X| = n$. Опреди го бројот на подредените парови (A, B) такви што A и B се дисјунктни множества и $A \subseteq X, B \subseteq X$.

13. На почетокот на учебната година во едно одделение од прва година, при запознавањето на учениците, се покажало дека:

- секој ученик има точно 20 познаници,
- секои два ученика кои се познаваат имаат по точно 13 заеднички познаници,
- секои два ученика кои не се познават имаат по точно 12 заеднички познаници.

Опреди го бројот на учениците во ова одделение.

14. Канаста и игра со карти која ја играат пет играчи. Во една населба 25 лица сакаат да играат канаста, но имаат само еден комплет карти. После секоја игра петте играчи се караат и секој играч решава дека повеќе нема да игра со ниту еден од останатите четири играчи. Колку игри најмногу може да се одиграат?
15. Низа од четири парни цифри се нарекува допустлива, ако меѓу цифрите нема три еднакви.
- 1) Определи го бројот на допустливите низи.
 - 2) За секој природен број $n > 2$ со d_n да го означиме бројот на начините на кој со парни цифри може да се пополни табела со n редови и 4 колони така што секој ред е допустлив и низата 2, 0, 0, 8 се среќава точно еднаш. Определи ги сите природни броеви n за кои d_n е делител на d_{n+1} .
16. За еден број со 2017 цифри ќе велиме дека е *лош*, ако секој број формиран од три негови последователни цифри не е делив со 3. Определи го бројот на лошите броеви во чиј декаден запис учествуваат само цифрите 1, 6 и 8.
17. На кружница се засадени n дрва, $11 < n < 2012$. На секое дрво со боја е запишан број, еднаков на вкупниот број листови на тоа дрво и на следните 11 дрва во насока на стрелката на часовникот. Секој од тие броеви, освен еден од нив, е за 1 помал од бројот запишан на следното дрво во насока на стрелката на часовникот. Определи го бројот на сите n , за кои е тоа можно.
18. Дадени се неколку еднакви монети, кои се наредени во редици на следниов начин:
- монетите во првиот ред се допираат една до друга,
 - монетите во секој ред формираат непрекинат блок, и
 - монетите во секој ред допираат точно две монети во долниот ред.
- Едно допустливо подредување со 5 монети во првиот ред е дадено на цртежот десно.
- Нека $A(n)$ е бројот на можните конфигурации, кога имаме n монети во првиот ред. Определи го најмалиот n , за кој $A(n) > 10^4$.



што во секој ред и во секоја колона броевите се различни. Едно поле се нарекува добро ако бројот запишан во него е поголем од бројот на колоната во која тоа се наоѓа. Определи ги сите природни броеви n за кои сите редови содржат ист број добри полиња.

20. Определи го бројот на триелементните подмножества на множеството $S = \{1, 2, 3, \dots, 19, 20\}$ такви што производот на нивните елементи е делив со 4.
21. Една држава има 2012 градови. Некои од градовите се директно поврзани со патишта, но така што од секој град да може да се стигне до секој друг град. Познато е дека ако два града се поврзани со пат, тогаш вкупниот број патишта кои излегуваат од тие градови е непарен број. Колкав е најголемиот број патишта?
22. На одбојкарскиот турнир на Евро-африканскиот куп учествувале екипи од Европа и Африка. Од Европа учествувале 9 пати повеќе екипи отколку од Африка и тие освоиле 9 пати повеќе бодови од африканските екипи (секоја екипа играла со секоја друга екипа по еден натпревар, при што за победа се добива 1 бод, а за загубен натпревар се добиваат 0 бодови). Колку најмногу бодови може да освои најдобрата африканска екипа?
23. Определи го бројот на подмножествата на множеството $\{1, 2, \dots, n\}$ кои не содржат два соседни броја.
24. Рамностран триаголник со должина на страна 10 со прави паралелни на страните на триаголникот е поделен на 100 единечни рамнострани триаголници. Определи го бројот на сите рамнострани триаголници во оваа конфигурација, чии страни се паралелни на страните на почетниот триаголник.
25. Во компанијата Креативност работат научни работници. Во текот на осумчасовен работен ден тие ја посетуваат библиотеката (можно е и по неколку пати). Познато е дека за секој пар научници вкупното време во кое само еден од нив е во библиотеката не е помало од x часови ($x > 4$). Определи го најголемиот можен број на научни работници (во зависност од x)?
26. Определи го бројот на низите $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ од цели броеви такви што

$$a_n + a_{n+1} = 2a_{n+2}a_{n+3} + 2005, \text{ за секој } n \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

27. Дадена е бесконечна табела, формирана според следниве правила:

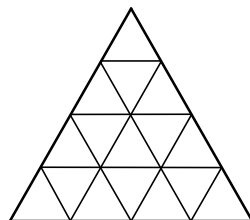
- 1) во горниот лев агол е запишан бројот 4,
- 2) броевите во секој ред и секоја колона се запишани во растечки редослед при што разликата меѓу секои два соседни броја во i -тиот ред е $2i+1$, а разликата меѓу секои два соседни броја во j -тата колона е $2j+1$.

4	7	10	13	16	...
7	12	17	22	27	...
10	17	24	31	38	...
13	22	31	40	49	...
16	27	38	49	60	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

На колку места во табелата се појавува бројот $N = \frac{2013^{2013}-1}{2}$?

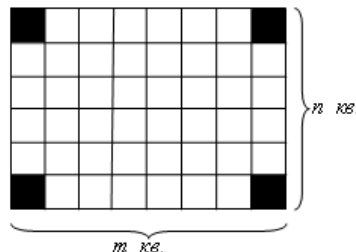
28. Докажи, дека во секој конвексен седумаголник постојат две дијагонали кои формираат агол помал од 13° .
29. Определи множество S со најмал број точки со кои се определени седум различни прави.

30. Нека $n > 3$ е природен број. Рамностранот триаголник ABC е поделен на n^2 идентични рамнострани триаголници со прави паралелни на неговите страни. Таква поделба е илустрирана на цртежот за $n=4$. Нека m е бројот на ромбови составени од 2 мали триаголници, а d е бројот на ромбови составени од 8 мали триаголници. Изрази ја разликата $m-d$ преку n .



31. Четирите аголни квадратчиња на квадратна $m \times n$ мрежа, каде $m > n > 6$ се природни броеви, се обоени во црно.

Ги разгледуваме правоаголниците со темиња во темињата на мрежата и страни по линиите на мрежата. Ако бројот на правоаголниците кои содржат барем едно црно квадратче, е еднаков на 2013, најди го бројот на правоаголниците без црни квадратчиња.



32. Град има форма на квадрат $n \times n$ и е поделен на квартави 1×1 . Во некои од кварталите има предаватели на еден од трите мобилни оператори A, B и C . Секој предавател го опслужува кварталот во кој се наоѓа, како и соседните квартави (соседни се кварталите кои имаат заедничка страна или теме). Еколошките стандарди забрануваат монтирање на повеќе од еден предавател во квартал. Монтирани се помалку од 2010 предаватели и секој квартал е опслужен од секој оператор. Определи ја најголемата можна вредност на n .

IV4 ПРИНЦИП НА ДИРИХЛЕ

1. На меѓународна средба учествувале 1985 лица. Меѓу секои три лица има двајца кои зборуваат еден ист јазик. Докажи, дека ако секој учесник зборува најмногу на 5 јазици, тогаш има барем 200 лица кои знаат еден ист јазик.
2. На таблата се запишани неколку ирационални броеви. Познато е дека за секои два броја a и b запишани на таблата, барем еден од броевите $\frac{a}{b+1}$ и $\frac{b}{a+1}$ е рационален. Определи колку нјамногу броеви може да се запишани на таблата.
3. Нека $p_1, p_2, \dots, p_{2005}$ се различни прости броеви. Нека S е множеството природни броеви такви што сите прости делители на броевите од S се некои од броевите $p_1, p_2, \dots, p_{2005}$ и производот на било кои два броја од S не е точен квадрат. Определи го најголемиот можен број елементи на множеството S .
4. Дадени се 37 двоцифрени броеви кои не се деливи со 10. Докажи, дека меѓу овие 37 броеви постојат 5 броја такви што за секои два од овие броеви цифрите на десетките се различни и цифрите на единиците се различни.
5. Определи го најголемиот број A со следново својство: ако броевите $1, 2, \dots, 1000$ се запишат во произволен редослед, тогаш постојат 50 последователни броеви такви што нивниот збир е поголем или еднаков на A .
6. На едно тестирање учествувале 67 ученици. Тестот се состоел од 6 прашања. Ученик кој точно одговорил на k – тото прашање добива k

бодови, а додека ученик кој неточно одговорил на k – тото прашање добива $-k$ бодови.

а) Докажи, дека постојат најмалку два ученика кои идентично одговорице на сите прашања.

б) Докажи, дека постојат најмалку четири ученици кои освоиле ист број на бодови.

7. Нека A е множество од 65 цели броеви кои даваат различни остатоци при делење со бројот 2016. Докажи, дека постои подмножество $B = \{a, b, c, d\}$ на множеството A такво што $2016 \mid (a + b - c - d)$.
8. Дадени се 9 прави такви што секоја од нив дели даден квадрат $ABCD$ на два трапези, чии плоштини се однесуваат како $2:3$. Докажи дека најмалку три од дадените девет прави минуваат низ иста точка.
9. Даден е правилен шестаголник со должина на страна 1. Во внатрешноста на шестаголникот дадени се m точки такви што никои три од нив не се колинеарни. Шестаголникот е разделен на триаголници, при што секоја од дадените m точки и секое од темињата на шестаголникот е теме на делбен триаголник. Делбени триаголници немаат заедничка внатрешна точка. Докажи дека постои делбен триаголник чија плоштина не е поголема од $\frac{3\sqrt{3}}{4(m+2)}$.
10. Во правилен шестаголник $ABCDEF$ со должина на страна еднаква на 1 избрани се различни точки $P_1, P_2, \dots, P_{2556}$. Ако никои три точки од множеството $S = \{A, B, C, D, E, F, P_1, P_2, \dots, P_{2556}\}$ не лежат на една права, докажи дека постои триаголник со темиња од S чија плоштина е помала од $\frac{1}{1700}$.
11. Во круг со дијаметар 5 земени се 10 произволни точки. Докажи дека меѓу овие 10 точки постојат две точки такви што растојанието меѓу нив е помало од 2.
12. Во табела со димензии $2n \times 2n$ се запишани природни броеви кои се помали или еднакви на 10, при што броевите кои се запишани во квадрати со заеднички теме се заемно прости. Докажи, дека постои број кој се појавува барем $\frac{2n^2}{3}$ пати.
13. Квадрат $n \times n$ е поделен на n^2 единечни квадратчиња. Некои од квадратчињата се обоени со црна боја, а останатите се обоени со бела

боја. За секои два реда и секои две колони четирите квадратчиња кои се наоѓаат во тие два реда и тие две колони не се обоени со иста боја. Определи ја најголемата можна вредност на n .

14. На табла со димензии 5×5 поставени се n бели жетони, секој во различно единечно поле на таблата. Илија добил идеја да ги обои сите жетони во црна боја почитувајќи го следново правило: зема бел жетон од таблата, го пребојува во црна боја, па потоа го става во празно поле на таблата такво што ниту едно негово соседно поле не содржи бел жетон (полињата се соседни ако имаат заедничка страна). Дали постои почетен распоред на n жетони таков што Илија може да ја реализира својата идеја, ако
- а) $n = 20$ б) $n = 21$.

IV5 ИГРИ И СТРАТЕГИИ

- Дадени се три купчиња со a, b и c бонбони, соодветно. Иван и Петар ја играат следнава игра: играчите влечат потези наизменично и играчот кој е на потег отстранува едно од купчињата и, а бонбоните од другите две купчиња ги дели на три купчиња, секое од кои содржи најмалку по една бонбона. Играчот кој не може да направи три купчиња или ќе направи три купчиња со по една бонбона ја губи играта. Ако играта ја почнува Иван, определи ги сите тројки (a, b, c) за кои Петар има добитна стратегија.
- Дадени се природни броеви M и $n \geq 3$. Двајца играчи A и B , (прв на потез е играчот A) последователно го заменуваат бројот M со еден од броевите $M-1, M-2$ или $M-n$. Играчот кој прв ќе добие негативен број ја губи играта. Определи го најголемиот природен број k за кој постои n и k последователни вредности на M , за секоја од кои играта ја добива играчот A .
- Павел и Васил играат игра на $n \times n, n > 1$ табла. На почетокот едно од аголните полиња е црно и на него се наоѓа шаховски топ, а останатите полиња се бели. Играта ја почнува Павел, а потоа играчите наизменично се менуваат. Во секој потез соодветниот играч го преместува топот хоризонтално или вертикално и во тој момент сите полиња, преку кои поминува топот (вклучувајќи го полето на кое потезот

завршува) стануваат црни. Топот не може да преминува преку црни полиња или да застане на црно поле. Играта ја губи играчот кој не може да направи потез. Кој од играчите има добитна стратегија?

4. Дваесет монети се распоредени во круг. Двајца играчи последователно земаат по три монети, се додека не останат две монети. Ако преостанатите монети не се соседни, играта ја добива првиот играч, а ако се соседни, тогаш играта ја добива вториот играч. Кој од двајцата играчи има добитна стратегија?
5. Даден е природен број k и бесконечна решетка од правилни шестаголници. Двајца играчи A и B наизменично играат на решетката, а прв почнува играчот A . На почетокот сите полиња на решетката се празни. Играчот A има право да избере две празни соседни полиња и да стави жетони на нив, а играчот B има право да отстрани еден од веќе поставените жетони. Играчот A победува ако успее во една линија да постави жетони во k последователни полиња. Определи ја најмалата вредност за k , за која играчот A не може да победи со конечен број чекори или докажи дека, таква најмала вредност не постои.
6. За позитивен број n , двајца играчи A и B ја играат следнава игра: Даден е куп од s камчиња, играчите играат наизменично и A игра прв. Во секој потез играчот има право да земе или едно камче, или прост број на камчиња, или $nk, k \geq 1$ камчиња. Победник е оној кој ќе го земе последното камче. Под претпоставка дека играчите A и B играат перфектно, за колку вредности на s играчот A не може да победи?
7. Нека n е позитивен број. Двајца играчи, Марија и Горјан, ја играат следната игра:
 - Марија избира n природни броеви, не секогаш различни
 - Марија ги запишува сите по парови зборови на лист хартија и листот му го дава на Горјан (постојат $\frac{n(n-1)}{2}$ вакви зборови, не секогаш различни),
 - Горјан победува ако само со едно погодување ги погоди n -те броеви кои на почетокот ги избрала Марија.Дали Горјан може да победи во следниве случаи?
 - а) $n=5$ б) $n=6$ в) $n=8$
8. Дадени се две купчиња со по 2010 монети. Двајца играчи Иван и Горјан играат игра при што наизменично повлекуваат потези, а Иван

игра прв. Во секој потез играчот или зема барем една монета од некое купче (може да земе колку сака вклучувајќи ги сите мнети од едно купче) или зема по една монета од секое од двете купчиња. Победува играчот кој последен ќе земе монета. Кој играч има победничка стратегија, ако и двајцата играат на најдобар можен начин?

IV6 МЕТОД НА ИНВАРИЈАНТИ

- Во секој збор составен од буквите a и b можеме да ги извршиме следниве замени: $aba \rightarrow b, b \rightarrow aba, bba \rightarrow a, a \rightarrow bba$. Дали може со помош на овие замени од зборот $baa...a$ да се добие зборот $aa...ab$?
2003 2003
- Правоаголник е поделен (расечен) на четири помали правоаголници. Потоа се зема произволен број од новодобиените правоаголници и секој од нив се дели на четири правоаголници итн. Дали е можно со повторување на наведената операција да се добијат 2006 правоаголници?
- На таблата се запишани броевите 0, 1, 2, 1, 2 и 1. Дозволено е да се изберат кои било три броеви и секој од нив да се зголеми за 1. Дали е можно со повторување на оваа операција да се добијат шест еднакви броеви?
- Во еден чекор е дозволено подредената тројка цели броеви (a, b, c) да се замени со подредената тројка $(a - b, b - c, c - a)$. Докажи, дека од произволна почетна подредена тројка (a, b, c) , после најмалку три чекори никогаш не може да се добие подредена тројка во која ќе се појави некој од броевите 2017 или -2017 .
- Седум пирати се на различна возраст. Заедно имаат 2009 златници и секој од нив има 1 златник повеќе од пиратот кој е непосредно помлад од него (освен најмладиот). Секој ден се избира пират кој на останатите пирати им дава по 1 златник. Определи го најголемиот можен број златници кои во даден момент може да ги има еден пират.
- Во еден чекор е дозволено подредената тројка реални броеви (a, b, c) да се замени со подредената тројка $(\frac{a+b}{\sqrt{2}}, \frac{a-b}{\sqrt{2}}, c)$. Дали после конечно

многу чекори од подредената тројка $(2, \sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ може да се добие подредената тројка $(1, \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$.

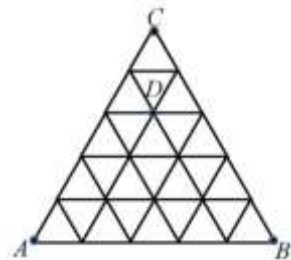
7. На еден остров живеат 2016 камелеони. Во еден момент имало 1007 сини, 402 црвени и 607 жолти камелеони. Ако се сретнат два истобојни камелеони, тогаш тие не ја менуваат сојата боја, но ако се сретнат два разнобојни камелеони, тогаш тие истовремено својата боја ја менуваат во преостанатата трета боја (на пример, син и црвен камелеон стануваат жолти итн.). Дали е можно после извесно време сите камелеони да бидат истобојни.
8. Со подредени парови природни броеви на Илија му е дозволено да ги реализира само следниве операции:
- 1) од подредениот пар (a, b) да го добие подредениот пар $(a+1, b+1)$,
 - 2) ако a и b се парни броеви, тогаш од подредениот пар (a, b) може да го добие подредениот пар $(\frac{a}{2}, \frac{b}{2})$, и
 - 3) од подредените парови (a, b) и (b, c) може да го добие подредениот пар (a, c) .
- Дали е можно, со помош на дозволените операции Илија од подредениот пар $(5, 19)$ да го добие подредениот пар $(17, 2016)$. Во постапката Илија може да ги користи само претходно добиени подредени парови.
9. На табла е запишана конечна низа од броевите 1 и 2. Во еден чекор дозволено е да избришеме два броја, а наместо нив на таблата запишуваме 1, ако избраните броеви се еднакви и 2 ако избраните броеви не се еднакви. Ако постапката ја реализираме се додека е можно, кој број на крајот ќе биде запишан на таблата?
10. За произволен квадратен трином $ax^2 + bx + c$, каде $a, b, c \in \mathbb{R}$ се дозволени следниве операции:
- 1) a и c да ги заменат местата и
 - 2) променливата x може да се замени со $x+t$, каде t е произволен реален број.
- Дали со помош на овие операции од полиномот $x^2 - x - 2$ може да се добие полиномот $x^2 - 2x - 1$?

11. Шаховска табла со димензии 8×8 е обоена на стандарден начин. Во еден чекор можеме да ги пребоиме:
 - а) Сите полиња на произволно избран ред или колона.
 - б) Сите полиња на произволно избран квадрат со димензии 2×2 .
 Дали после конечен број на чекори, може на таблата да остане само едно црно поле.
12. Правоаголна таблица има 30 редици и 67 колони. Во секое квадратче на таблицата е запишан еден ист природен број. Соседни квадратчиња ги нарекуваме квадратчињата кои имаат заедничка страна. Ја реализираме следнава операција: избираме произволно квадратче и ако тоа има парен број соседни квадратчиња, тогаш додаваме 1 на секој од броевите запишани во нив, а ако има непарен број соседни квадратчиња, додаваме 2 на секој од броевите запишани во нив. Дали може после повеќекратно повторување на оваа операција бројот на парните и непарните броеви запишани во таблицата да е еднаков?

IV7 БОЕЊЕ НА БРОЕВИ, ТОЧКИ И ОТСЕЧКИ

1. Природните броеви се обоени во две бои.
 - а) Докажи, дека постојат бесконечно многу парови од различни еднобојни броеви x и y за кои бројот $x + y$ е точен квадрат.
 - б) Дали постојат два различни еднобојни броеви x и y чиј збир е степен на бројот 2.
2. Реалните броеви поголеми од 1 се обоени во две бои, при што се искористени и двете бои. Докажи, дека постојат реални броеви a и b , за кои броевите $a + b$ и ab се обоени во различни бои.
3. Секоја точка во рамнината е обоена во црвена или плава боја. Докажи дека постои триаголник со должини на страни 1, 2 и $\sqrt{3}$ чии темиња се еднобојни.
4. Дали е можно во рамнината да се обележат 10 црвени, 10 сини и 10 зелени точки (сите различни) така што се исполнети условите:
 - за секоја црвена точка A постои сина точка која е поблиска до точката A од било која зелена точка,
 - за секоја сина точка B постои зелена точка која е поблиска до точката B од било која црвена точка, и

- за секоја зелена точка C постои црвена точка која е поблиска до точката C од било која сина точка.
5. Права е обоена во две бои. Докажи, дека постои отсечка чии крајни точки и средина се монохроматски (обоени во иста боја).
 6. Рамнина е обоена во две бои. Докажи, дека постои триаголник кој е сличен на даден триаголник и чии темиња се монохроматски.
 7. Секоја од дијагоналите на правилен 2014 -аголник е обоена во некоја од дадени n бои. Познато е дека, секои две дијагонали, кои се сечат во внатрешна точка, се обоени во различни бои. Кој е најмалиот n за кој тоа е можно?
 8. Докажи, дека меѓу секои шест ирационални броеви може да се избберат три броја a, b, c такви што броевите $a+b, b+c, c+a$ се ирационални.
 9. Во целобројна решетка е даден 10×10 квадрат. Единечните отсечки на квадратот се обоени во неколку бои. Познато е дека контурата на секој квадрат со страни на целобројната решетка е обоена најмногу во две бои. (Не е задолжително таков квадрат да се содржи во дадениот.) Определи го максималниот број искористени бои?
 10. Марко во конвексен 2011 -аголник последователно повлекува дијагонали така што секоја нова дијагонала сече во внатрешна точка најмногу една од претходно повлечените дијагонали. Колку дијагонали најмногу може да повлече Марко?
 11. Во рамнината се дадени 109 точки такви што меѓу нив нема три точки кои лежат на една права. Секоја точка е обоена во една од седум можни бои и во секоја боја се обоени најмалку осум точки. За еден триаголник ќе велиме дека е еднобоен ако сите темиња му се обоени со иста боја. Докажи, дека со дадените точки се определени најмалку 2015 еднобојни разностранни триаголници.
 12. Рамностран триаголник ABC со должина на страна n ($n \geq 3$), со прави кои се паралелни на страните на $\triangle ABC$, е поделен на n^2 рамностранни триаголници со должина на страна 1 . Во темињата на единечните триаголници

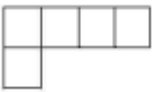


13. На табла има n шајки секоја со секоја поврзана со конец. Секој конец е обоен со една од n дадени различни бои. За секои три различни бои, постојат три шајки поврзани меѓу себе со конци во овие три различни бои. Може ли n да биде
а) 6? б) 7?
14. Секоја точка од страните на даден рамностран $\triangle ABC$ е обоена во една од две бои. Дали постои правоаголен триаголник чии темињата се три точки од страните на $\triangle ABC$ (вклучувајќи ги и темињата на дадениот триаголник), кои се монохроматски.
15. Докажи, дека рамнината може да се обои во црвена и сина боја така што секоја права која лежи во рамнината содржи бесконечно многу црвени и бесконечно многу сини точки.
16. Секоја точка од рамнината е обоена во една од три бои: црвена, зелена или сина. Докажи, дека во рамнина постојат две монохроматски точки кои се на растојание 1.
17. Нека M и N се две темиња на коцка во кои е запишан бројот 1, а во останатите шест темиња е запишан бројот 0. Дозволено е да се земе произволно теме на коцката и за 1 да се зголемат броевите во сите три темиња кои со раб се поврзани со ова теме. Докажи, дека со дозволените потези може да се постигне во сите темиња да се запишани исти броеви ако и само ако MN не е дијагонала на страна на коцката.

1. Баронот Минхаузен тврди дека дека направил дворец со димензии 2007×2009 (секоје квадратче претставува една соба) така што секоја соба има точно две врати кои водат во различни соби и ниту една

врата не води надвор од дворецот. Дали баронот Минхаузен ја говори вистината? Дали може при истите услови да се направи дворец со димензии 2008×2008 ?

2. На колку начини од квадрат со димензии 2011×2011 може да се отсече квадрат со димензии 11×11 така што делот кој останува да може да се покрие со домина (правоаголници со димензии 1×2)?
3. Квадратна 4×4 табла е разделена на 16 единечни квадратчиња, кои ги нарекуваме полиња. Таблата е покриена со 13 домина со димензии 1×2 така што секое од двете полиња на домината покрива точно едно поле на таблата. Докажи, дека едно од домината може да се отстрани и таблата да остане покриена.
4. Квадрат со димензии $n \times n, n \geq 2$ е поделен на n^2 единечни квадратчиња. Секое единечно квадратче е обоено во бела или црна боја така што за секој правоаголник (со најмалку 4 квадратчиња) во квадратот барем две од единечните квадратчиња во четирите негови агли се разнобојни. Определи ја најголемата можна вредност на n .
5. Нека $n \geq 3$ е непарен природен број. Шаховска $n \times n$ табла е стандардно обоена, т.е. долното лево поле е црно. Во еден чекор се избира произволен правоаголник составен од цели единечни полиња на таблата и се менуваат боите на сите полиња од тој правоаголник (црните полиња во бели, белите во црни). Определи го минималниот број чекори со чија реализација таблата може да стане
 - а) бела
 - б) црна
6. На колку начини табла со димензии $2 \times n$ може да се покрие со домина (плочки со димензии 2×1)?
7. Дали е можно од 5×5 квадрат да бидат избрани 16 единечни квадратчиња така, што при нивно боење секој 2×2 квадрат од дадениот квадрат ќе содржи не повеќе од две обоени единечни квадратчиња?
8. Во полињата на табела со димензии 100×100 се запишани $100^2 - 1$ знаци плус и еден знак минус (по еден знак во едно поле). Во еден чекор се менуваат сите знаци во даден ред или дадена колона. Дали може после конечен број чекори да се добие табела во која има точно 2011 минуси?

9. Даден е квадрат со димензии 4×4 , составен од 16 единечни квадратчиња. Во секое единечно квадратче на големиот квадрат е запишан ненегативен цел број така што збирот на било кои пет од нив кои може да се покријат со фигура прикажана на цртежот десно (фигурата може да се ротира и превртуваат) е еднаков на 5. Колку најмногу различни броеви може да се употребат за пополнување на квадратот?
- 
10. Фигурата добиена од квадрат со димензии 2×2 со отстранување на една негова клетка ја нарекуваме триклеточен агол. Дали е можно единечните клетки на табла со димензии 3000×3000 да бидат обоени во црна и бела боја, но така што како и да се ресече таблата на 3000000 триклеточни агли, секој од нив да содржи точно по една црна клетка?
11. Петар покрил шаховска табла со димензии 600×600 со правоаголници со димензии 2×3 така што секое единечно квадратче од таблата е покриено со точно еден правоаголник. Потоа тој ги расекол сите правоаголници на три помали правоаголници со димензии $1 \times 1, 1 \times 2, 1 \times 3$ и му го покажал добиеното покривање на Никола. Дали може Никола според покривањето со помалите правоаголници еднозначно да го определи почетното покривање со правоаголниците 2×3 ?
12. Дадена е шаховска табла со димензии 300×300 . Ќе велиме дека едно нејзино покривање со плочки со димензии 1×3 е добро, ако не постојат две плочки кои ја формираат буквата Т, во било која нејзина положба.
Определи го бројот на добрите покривања на таблата.
13. Во квадратна мрежа се дадени два квадрати кои не се сечат и кои се составени од m^2 и n^2 единечни квадратчиња на мрежата, соодветно. Ако $m^2 + n^2 = 2017$, докажи, дека:
а) такви квадрати постојат;
б) единечните квадратчиња на точно еден од двата квадрати може да се обојат во црвена или сина боја така, што секое квадратче има непарен број соседни квадратчиња со иста боја. (Две единечни квадратчиња се соседни, ако имаат барем едно заедничко теме.)
14. Во секое единечно поле на квадрат со димензии 100×100 е запишан цел број. За правоаголникот составен од единечни полиња на ква-

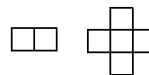
дратот ќе велиме дека е добар ако збирот на броевите запишани во него е делив со 17. Дозволено е истовремено да се обојат сите единечни полиња во добар правоаголник, но не смее едно поле да се бои двапати. Определи го најголемиот број на единечни полиња кои може да се обојат при произволни запишани цели броеви.

15. Во некои полиња од табла со димензии 100×100 се поставени жетони (по еден жетон во поле). За полето ќе велиме дека е *убаво* ако има жетони во парен број негови соседни полиња (соседни се полињата кои имаат заедничка страна). Дали може точно едно поле да е убаво?

16. Покривањето на правоаголник со димензии $m \times n$ со аголни тетрамина (цртеж десно) го нарекуваме правилно ако внатре во тоа покривање не постои правоаголник со страни помали од m и n кој е покриен со аголните тетрамина. Докажи, дека ако за некои m и n постои правилно покривање на правоаголникот со димензии $m \times n$, тогаш правилно покривање постои и за правоаголникот со димензии $2m \times 2n$.



17. Дали може табла со димензии 75×75 да се покрие со фигури прикажани на цртежот десно?

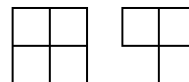


18. Табла со димензии $(2n+1) \times (2n+1)$ е шаховски обоена (горното лево поле е црно). За квадрат од оваа табла со димензии $m \times m$, $1 \leq m \leq 2n+1$ ќе велиме дека е *добар* ако содржи повеќе црни од бели единечни квадратчиња. Изрази го бројот на добрите квадрати како функција од n .

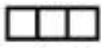
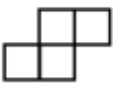
19. Докажи, дека табла со димензии $n \times n$ од која се отстранети аголните полиња може да се покрие со L-тетрамина (види цртеж), ако и само ако $4 \mid n-2$.



20. Табла со димензии 9×7 е покриена со тетрамина и тримина прикажани на цртежите десно. Нека n е бројот тетрамината кои учествуваат во покривањето. Определи ги сите можни вредности на n .



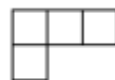
21. Табла со димензии 30×30 е покриена со прави тримина со димензии 1×3 . Во секое вертикално тримино е запишан бројот на колоната во која се наоѓа, а во секое хоризонтално тримино е запишан бројот на редот во кој се наоѓа (редовите и колоните се нумерирани со броевите од 1 до 30). Докажи дека збирот на сите запишани броеви е делив со 3.

22. Квадрат 13×13 е поделен на единечни квадратчиња и е покриен со 28 правоаголници 3×2 кои не се преклопуваат така, што точно едно единечно квадратче не е покриено. Определи ги можните положби на непокриеното единечно квадратче.
23. Квадрат 17×17 е разделен на единечни квадратчиња и е покриен со 24 правоаголници 4×3 кои не се преклопуваат така, што точно едно единечно квадратче не е покриено. Определи ги можните положби на непокриеното единечно квадратче.
24. За дадено множество S од 2014 точки во рамнината нека l е најмалиот природен број за кој постојат l прави такви што секоја точка од S лежи на некоја од тие прави. Нека c е најмалиот природен број за кој постојат c кружници такви што секоја точка од S лежи на некоја од тие кружници. Дали постои множество S за кое
- а) $l=15$ и $c=67$, б) $l=19$ и $c=53$.
25. Нека A и B се два идентични конвексни многуаголници, со плоштина 2015. Многуаголникот A е разделен на многуаголници со плоштини $A_1, A_2, \dots, A_{2015}$, а многуаголникот B на многуаголници со плоштина $B_1, B_2, \dots, B_{2015}$. Со 2015 бои се обоени $A_1, A_2, \dots, A_{2015}$, $B_1, B_2, \dots, B_{2015}$ така што A_i е различно обоен од A_j и B_i е различно обоен од B_j , за $i \neq j$. После поклопувањето на многуаголниците A и B , пресметан е збирот на плоштините на деловите кои што имаат иста боја. Докажи дека постои боење на многуаголниците за кое овој збир е најмалку 1.
26. На шаховска 8×8 табла со 64 полиња (единечни квадратчиња) се поставени 21 право тримино (види цртеж десно).

Тримината не се преклопуваат и нивните единечни квадратчиња покриваат цели полиња на таблата. Дали постои поле на шаховската табла кое не е покриено од тримино? Ако одговорот е позитивен, определи ги сите такви полиња.
27. Дадена е табла со димензии 14×14 , разделена на 196 единечни квадратчиња (полиња) и тетрамино прикажано на цртежот десно, составено од 4 единечни квадратчиња.

Определи го најмалиот број полиња кој треба да се бои од таблата така што при произволно поставување на тетраминото на таблата тоа

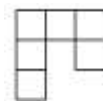
да покрива барем едно обоено поле. При поставувањето треба сите единечно полиња на тетраминото да се преклопуваат со единечни полиња на таблата. Дозволено е превртување и ротирање на тетраминото.

28. Колку најмногу скокачи (коњи) може да се распоредат на шаховска табла со димензии 5×5 така што секој од нив напаѓа точно по два од останатите скокачи (коњи).

29. Табла со димензии 7×7 е покриена со L фигури составени од 4 еднакви квадрати, но така да точно едно поле останува непокриено. Најди ги сите полиња на таблата кои може да останат непокриени.

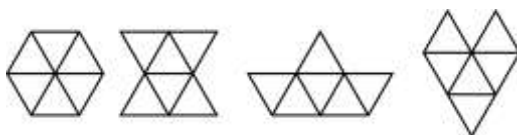


30. Кука ќе ја наречеме кука фигурата прикажана на цртежот десно, која составена од шест единечни квадрати, или било која друга фигура која е добиена од оваа фигура со примена на ротации и осни симетрии. Определи ги сите $m \times n$ правоаголници кои можат да се покријат со куки така што
- 1) правоаголникот е покриен без празнини и преклопувања,
 - 2) ниту еден дел од некоја кука не е надвор од правоаголникот.



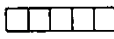
31. Квадратна табла со димензии 2004×2004 е покриена со тетрамина од облик 1×4 кои не се преклопуваат и не излегуваат надвор од таблата. Тетрамината се поставени хоризонтално и вертикално. Дали постои покривање во кое бројот на хоризонтално поставени тетрамина е еднаков на бројот на вертикално поставени тетрамина?

32. Од рамностран триаголник со страна 2014 е отсечен рамностран триаголник со страна 214, така што едно теме им се совпаѓа и две од страните од отсечениот триаголник лежат на две од страните на почетниот. Дали оваа фигура може да се пополни со фигури како на цртежот десно без преклопување (дозволена е ротација), ако триаголниците во фигурите се рамностранни со страна 1?

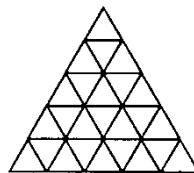


33. Нека рамнината е поделена со хоризонтални и вертикални прави на 1×1 квадратчиња, кои се обиеени во 5 бои така што секое квадратче во



секој крст  е обоено во различна боја. Докажи дека секое квадратче во секој 1×5 правоаголник  е обоено во различна боја.

34. Рамностран триаголник со должина на страна $n, n \in \mathbb{N}$ е поделен со прави паралелни на страните на рамностран триаголници со должина на страна 1 (за $n=5$ види цртеж).



Колку најмногу отсечки со должина 1 и крајни точки во темињата на малите триаголници може да се отстранат така што да не постои триаголник со страни кои се наоѓаат меѓу отстранетите отсечки?

IV9 ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ

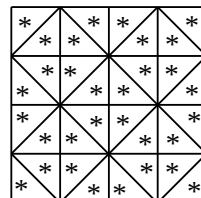
- Докажи, дека ако еден правоаголник може да биде поделен на 200 и на 288 еднакви квадратчиња, тогаш тој може да биде поделен и на 392 еднакви квадратчиња.
- Дадени се $2n$ кутии и $2n$ топчиња. Кутиите и топчињата се означени со броевите $1, 2, \dots, 2n$. Во секоја кутија е ставено по едно топче. Нека $x_i, i=1, 2, \dots, 2n$ е збирот на бројот на кутијата и бројот на топчето кое се наоѓа во неа. Докажи, дека барем два од броевите $x_i, i=1, 2, \dots, 2n$ даваат ист остаток при делење со $2n$.
- На низата од $n \geq 4$ реални броеви $x_1, x_2, \dots, x_n$ применуваме операција со која ги бришиме сите броеви кои немаат индекс $4k+3$ (на пример, од низата 4, 5, 9, 3, 6, 6, 1, 8 ја добиваме низата 9, 1, па во следниот чекор ги бришиме двата броја). На низата 1, 2, 3, ..., 1024 оваа операција е применета пет пати последователно. Определи ја низата која останала.
- Во квадратчињата на шаховска табла со димензии 10×10 се запишани броевите од 1 до 100, така што секој број е запишан точно по еднаш. За секои два броја поврзани со движењето на скокачот, ја пресметуваме нивната разлика така што од поголемиот број го одземаме помалиот. Колку најмалку различни броеви може да има меѓу добиените разлики?
- Во квадрат 3×3 , составен од 9 мали квадратчиња се запишани броевите од 1 до 9. За секој од четирите 2×2 подквадрати е пресметан збирот од запишаните броеви. Најмалиот од четирите зборови го на-

рекуваме карактеристика на квадратот. Да се определи најголемата можна карактеристика на квадратот.

6. Во единечните квадратчиња на квадратна табела 3×3 се запишуваат 9 различни природни броеви чиј збир е еднаков на S . Табелата ја нарекуваме “интересна”, ако при прецртување на било кој ред и било која колона збирот на двата броја во дијагонални полиња е еднаков на збирот на другите два броја во дијагоналните полиња.
 - а) Докажи дека за $S = 2018$ не постои интересна табела.
 - б) Најди го бројот на различните интересни табели кои ги содржат броевите 1, 2, 3, 5, 668 и за кои S е најмал можен број. (Две табели се различни, ако не се добиваат една од друга со вртење околу центарот на табелата.)
7. Во полињата на табла со димензии 8×8 се распоредени жетони така што:
 - 1) Барем во едно поле на секој правоаголник со димензии 1×2 или 2×1 има барем еден жетон.
 - 2) Во секој правоаголник со димензии 7×1 или 1×7 има барем два жетони кои се наоѓаат во соседни полиња.
 Определи го најмалиот можен број на жетони.
8. Нека $ABCD$ е квадрат со должина на страната 10. Да се определи максималниот број точки, кои можат да бидат распоредени во внатрешноста на квадратот, така што секој квадрат со должина на страна 1 и страни, паралелни на страните на $ABCD$, да содржи (заклучно со неговата граница) најмногу 4 точки.
9. Ќе велиме, дека едно пополнување со 0 и 1 на правоаголна таблица со 5 реда и n колони (n – природен број) е “добро”, ако можеме да избереме 3 реда и 3 колони од таблицата така, што во клетките, во кои тие се сечат, е запишан еден и ист број. Да се определи најмалиот m , за кој секое пополнување со 0 и 1 на таблица со 5 реда и n колони, каде $n \geq m$, е добро.
10. На кружница се избрани 2012 точки, кои кружницата ја делат на еднакви лаци. Од овие 2012 точки се земени k точки и со нив е конструиран конвексен k – аголник. Кој е најголемиот број k , за кој е можно k – аголникот да нема паралелни страни?

11. Квадрат 4×4 е поделен на 16 единечни квадратчиња и во секое квадратче е запишана нула или единица. Во еден чекор се избира ред или колона на квадратот и се менуваат броевите во квадратчињата во избраниот ред или колона (нулите стануваат единици, а единиците стануваат нули). Квадратот се нарекува *занулен*, ако бројот на нулите во него не може да се намали. Бројот на нулите во еден занулен квадрат се нарекува *степен на квадратот*. Определи ги сите можни вредности на степенот.
12. Во квадратна табела со димензии 2017×2017 се запишани цели ненегативни броеви така што ако бројот во едно поле е 0, тогаш збирот на броевите во редот и колоната кои се сечат во тоа поле не е помал од 2017. Докажи, дека збирот на сите броеви запишани во табелата не е помал од 2034145.
13. а) Во едно друштво третина од сите фудбалери се шахисти, а четвртината од сите шахисти се се фудбалери. Дали во ова друштво има повеќе шахисти или фудбалери?
 б) Интервалот $(0, 20)$ е покриен со 13 отворени подинтервали така што ниту еден не е подмножество на унијата од останатите интервали. Докажи, дека барем еден од овие подинтервали има должина помала или еднаква на 3.

На местото на ѕвездичките (цртеж десно) се запишани броевите од 1 до 32, така што секој број е запишан по еднаш. Дали може зборовите, на броевите запишани во секое квадратче кое не е поделено на помали квадратчиња, да се еднакви?



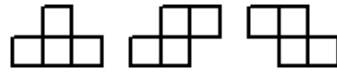
14. Дадена е правоаголна табла со димензии 2017×2018 . Дали може да се повлече права која на таблата ќе пресекува 4035 единечни квадрати?
15. Некои од полињата на квадратна $n \times n$, $n \geq 2$ мрежа се минирани така што во секој 2×2 квадрат има барем едно минирано поле. Во секое поле е запишан бројот на минираните полиња кои имаат заеднички точки со тоа поле (тоа се самото поле и полињата кои имаат заедничка страна или заедничко теме со тоа поле). Нека M е најголемиот запишан број. Определи ја најмалата можна вредност на M .
16. Табла со димензии $n \times n$, $(n \geq 3)$ е поделена на n^2 единечни квадратчиња, во кои се запишани цели броеви поголеми или еднакви на 0 и

помали или еднакви на n така што збирите на броевите во секој 2×2 квадрат од таблата се различни.

а) Определи ги сите природни броеви n , за кои постои $n \times n$ табла со тоа својство.

б) Определи ја најмалата можна разлика меѓу најголемиот и најмалиот запишан број во табла со тоа својство.

17. Дали е можно во шаховска табла 8×8 да се запишат броевите од 1 до 64 (секој број е запишан точно еднаш) така да збирот на броевите во секоја фигура F е делив со 4.



Цртеж 1

Цртеж 2

а) фигурата F е од облик како на цртеж 1

б) фигурата F е од облик како на цртеж 2.

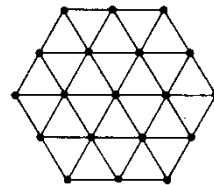
18. Даден е коневексен n -аголник, $n \geq 5$. Докажи, дека постојат најмногу $\frac{n(2n-5)}{3}$ триаголници со плоштина 1 чии темиња се темиња на дадениот n -аголник.

19. Даден е правоаголен триаголник T . Дали е можно тој да се раздели на 2008 триаголници кои ги исполнуваат условите:

а) Секој од делбените триаголници е сличен на триаголникот T .

б) Не постојат два триаголници од делбените кои се складни.

20. Правилен шестаголник е поделен на 24 рамнострани триаголници како што е прикажано на цртежот десно. На 19-те темиња на триаголниците им се придружени 19 различни броеви. Докажете, дека меѓу 24-те триаголници постојат најмалку 7 такви, што за броевите a, b, c придружени на темињата на овие триаголници и земени во редослед спротивно од движењето на стрелките на часовникот важи $a < b < c$.



III ГЕОМЕТРИЈА

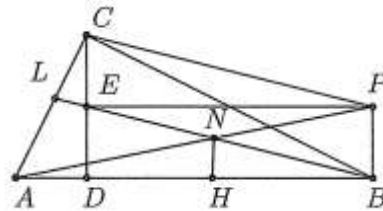
III.1. ТРИАГОЛНИК

1. Даден е остроаголен $\triangle ABC$ со висина CD и нека E е средината на CD . Нека $BE \cap AC = L$. Точката P е избрана така, што четириаголникот $EDBP$ е правоаголник. Докажи, дека правата AP ја полови отсечката BL .

Решение. Нека точката H е подножјето на нормалата повлечена од точката N кон страната AB , види цртеж. Четириаголникот $EBPC$ е паралелограм, па затоа од теоремата на Талес следува дека

$$\frac{\overline{NB}}{\overline{CP}} = \frac{\overline{NB}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{NH}}{\overline{ED}} = \frac{\overline{NH}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{AN}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{LN}}{\overline{CP}},$$

па затоа $\overline{NB} = \overline{LN}$, што и требаше да се докаже.



2. Даден е триаголник ABC со тежиште G и центар на впишаната кружница I . Ако $\overline{AB} = 42$, $\overline{GI} = 2$ и $AB \parallel GI$, определи ги должините на страните AC и BC .

Решение. Нека CM е тежишната линија и CL симетралата на аголот (цртеж десно). При стандардните ознаки за елементите на $\triangle ABC$ имаме $\frac{\overline{AL}}{\overline{BL}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{b}{a}$, па затоа $\overline{AL} = \frac{bc}{a+b}$. Од својствата на симетралата за $\triangle ALC$ имаме

$\frac{\overline{CI}}{\overline{IL}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{AL}} = \frac{a+b}{c}$. Од теоремата на Талес следува

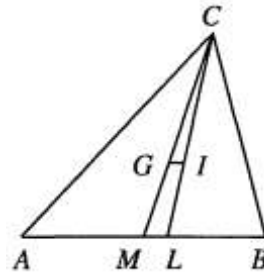
$\frac{\overline{CI}}{\overline{IL}} = \frac{\overline{CG}}{\overline{GM}}$, т.е. $\frac{a+b}{c} = 2$, па затоа $a+b=84$. За $a \geq b$ имаме

$$\overline{LM} = \frac{3}{2} \overline{IG} = 2, \quad \overline{AM} = 21 \text{ и}$$

$$\overline{AL} = \overline{AM} - \overline{LM} = 18, \quad \overline{LB} = \overline{BM} + \overline{LM} = 24,$$

па затоа $\frac{b}{a} = \frac{18}{24} = \frac{3}{4}$. Така ја добивме равенката $3x+4x=84$, од каде

наоѓаме $x=12$, $\overline{AC}=36$ и $\overline{BC}=48$. Ако $a \leq b$, тогаш $\overline{AC}=48$ и $\overline{BC}=36$.

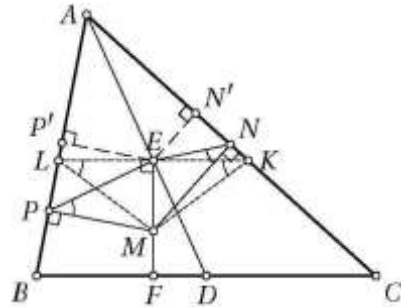


3. Нека ABC е разностран остроаголен триаголник и E е внатрешна точка на тежишната линија AD ($D \in BC$). Нека точката F е подножјето на нормалата повлечена од точката E на правата BC , M е внатрешна точка на отсечката EF , а N и P се подножјата на нормалите повлечени од точката M соодветно на правите AC и AB . Докажи дека правите на кои лежат симетралите на аглиите PMN и PEN немаат заеднички точки.

Решение. Нека правата низ E паралелна на правата BC ги сече страните AC и AB соодветно во точките K и L . Од Талесовата теорема следува $\overline{EK} = \overline{EL}$, па затоа $\triangle MKL$ е рамнокрак. Освен тоа четириаголниците $MENK$ и $MELP$ се тетивни, па затоа важи

$$\angle MNE = \angle MKE = \angle MLE = \angle MPE.$$

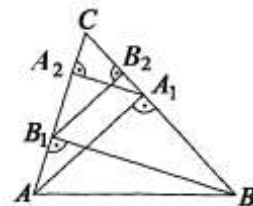
Ако P' и N' се соодветно подножните точки на нормалите повлечени од точката E на страните AB и AC , тогаш од претходно изнесеното следува $\angle PEP' = \angle NEN'$, па затоа симетралите на аглиите $\angle PEN$ и $\angle P'EN'$ се совпаѓаат. Бидејќи симетралите на аглиите $\angle P'EN'$ и $\angle PMN$ се паралелни, останува само да забележиме дека тие не се совпаѓаат, бидејќи во спротивно во спротивно двете симетрали би се совпаѓале со правата ME , што не е можно затоа што $\overline{AB} \neq \overline{AC}$.



4. Даден е $\triangle ABC$ таков што $\angle ACB = 60^\circ$. Низата точки $A_0, A_1, \dots, A_{2006}$ е определена со: $A_0 = A$, A_1 е подножјето на нормалата повлечена од A_0 кон правата BC , A_2 е подножјето на нормалата повлечена од A_1 кон правата AC итн. A_{2006} е подножјето на нормалата повлечена од A_{2005} кон правата AC . Аналогно е дефинирана низата $B_0, B_1, \dots, B_{2006}$: $B_0 = B$, B_1 е подножјето на нормалата повлечена од B_0 кон правата AC итн. Докажи, дека правата $A_{2006}B_{2006}$ е тангентата на впишаната кружница во $\triangle ABC$ ако и само ако

$$\frac{\overline{AC} + \overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{2^{2006} + 1}{2^{2006} - 1}.$$

Решение. Последователно имаме



$$\overline{CA_1} = \frac{1}{2} \overline{CA_0}, \overline{CA_2} = \frac{1}{4} \overline{CA_0}$$

итн. Јасно,

$$\overline{CA_{2006}} = \frac{1}{2^{2006}} \overline{CA_0} = \frac{1}{2^{2006}} \overline{CA}$$

и аналогно $\overline{CB_{2006}} = \frac{1}{2^{2006}} \overline{CB}$. Од обратната теорема на Талес следува

дека $A_{2006}B_{2006} \parallel AB$, при што важи $\overline{A_{2006}B_{2006}} = \frac{1}{2^{2006}} \overline{AB}$. Правата

$A_{2006}B_{2006}$ ја допира впишаната кружница во $\triangle ABC$ ако и само ако четириаголникот $ABB_{2006}A_{2006}$ е тетивен. Последното последователно е еквивалентно со

$$\overline{AB} + \overline{A_{2006}B_{2006}} = \overline{AA_{2006}} + \overline{BB_{2006}}$$

$$\overline{AB} + \frac{\overline{AB}}{2^{2006}} = \frac{(2^{2006}-1)(\overline{AC} + \overline{BC})}{2^{2006}}$$

$$\frac{\overline{AC} + \overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{2^{2006} + 1}{2^{2006} - 1}.$$

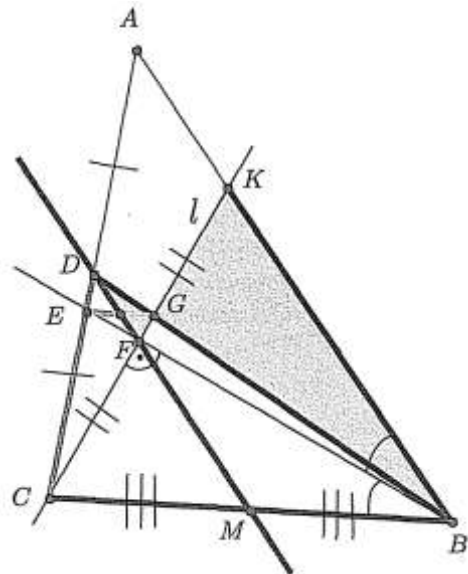
5. Даден е $\triangle ABC$, ($\overline{BC} < \overline{AB}$) и права l која минува низ темето C и е нормална на BE ($E \in AC$) на $\angle B$. Правата l ја сече симетралата BE во точката F , а тежишната линија BD ($D \in AC$) ја сече во точката G . Докажи, дека отсечката DF ја преполовува отсечката EG .

Решение. Нека $K = AB \cap l$ и $M = DF \cap BC$. Од $BF \perp KC$ и BF е симетрала на $\angle KBC$ следува дека $\triangle KBC$ е рамнокрак. Според тоа,

$\overline{BK} = \overline{BC}$ и F е средина на отсечката KC . Затоа DF е средна линија на $\triangle ACK$ и $AK \parallel DF$, од каде следува дека $AC \parallel DM$. Сега е јасно дека DM е средна линија на $\triangle ABC$, па затоа M е средина на отсечката BC .

Според Талесовата теорема доволно е да докажеме дека $GE \parallel BC$.

Од $DF \parallel AK$ и $\overline{DF} = \frac{\overline{AK}}{2}$ следува



$$\frac{\overline{BG}}{\overline{GD}} = \frac{\overline{BK}}{\overline{DF}} = \frac{2\overline{BK}}{\overline{AK}}.$$

Исто така

$$\begin{aligned}\frac{\overline{CE}}{\overline{DE}} &= \frac{\overline{CD} - \overline{DE}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{DE}} - 1 = \frac{\overline{AD}}{\overline{DE}} - 1 = \frac{\overline{AE} - \overline{DE}}{\overline{DE}} - 1 \\ &= \frac{\overline{AE}}{\overline{DE}} - 2 = \frac{\overline{AB}}{\overline{DF}} - 2 = \frac{\overline{AK} + \overline{BK}}{\frac{\overline{AK}}{2}} - 2 = \frac{2\overline{BK}}{\overline{AK}}.\end{aligned}$$

Оттука следува $\frac{\overline{BG}}{\overline{GD}} = \frac{2\overline{BK}}{\overline{AK}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{DE}}$, па сега од Талесовата теорема следува $GE \parallel BC$, со што тврдењето е докажано.

6. Дадени се $\triangle ABC$ и кружница со центар во точка O која минува низ точките A и C и по втор пат ги сече страните AB и BC во точките K и N , соодветно. Кружниците опишани околу триаголниците ABC и KBN имаат точно две заеднички точки B и M . Докажи, дека $\angle BMO = 90^\circ$.

Решение. Кружницата опишана околу $\triangle ABC$ има центар S . Понатаму, $\angle BCA$ е периферен агол над тетивата AB , а $\angle BSA$ е централен агол над истата тетива, па затоа $\angle BSA = 2\gamma$. Четириаголникот $AKNC$ е тетивен, па затоа

$$\angle KNC = 180^\circ - \alpha \Rightarrow \angle BNK = \alpha \text{ и } \angle NKB = \gamma.$$

Значи, $\triangle ABC \sim \triangle NBK$. Ако R е центар на кружницата опишана околу $\triangle NBK$, тогаш $\angle NRB = 2\gamma$. Од рамнокраките триаголници ABS и BNR добиваме

$$x = \angle ABS = 90^\circ - \gamma$$

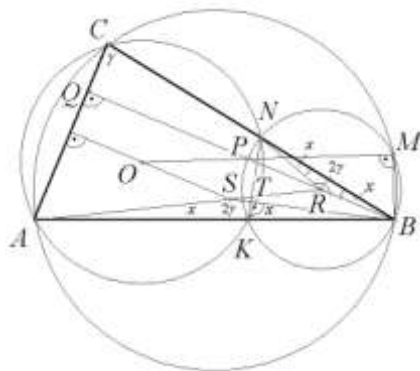
па затоа триаголниците BCQ и TBK се правоаголни. Бидејќи $OS \perp AC$, од триаголникот BCQ добиваме

$$BR \parallel OS. \quad (1)$$

Бидејќи $OR \perp NK$ (O и R се наоѓаат на симетралата на отсечката NK) и $SB \perp NK$, од триаголникот BTK , добиваме

$$SB \parallel OR. \quad (2)$$

Од (1) и (2) следува дека четириаголникот $OSBR$ е паралелограм. Нека точката P е симе-



трична на точката B во однос на R . Тогаш и четириаголникот $OSRP$ е паралелограм. Бидејќи S и R лежат на симетралата на отсечката BM добиваме $SR \perp BM$ и $OP \perp BM$. Сега од Талесовата теорема следува $PM \perp BM$, т.е. $OM \perp BM$, па затоа $\angle BMO = 90^\circ$.

7. Во $\triangle ABC$ е земена точка K која лежи на симетралата на $\angle BAC$. Правата CK по вторпат ја сече опишаната кружница ω околу $\triangle ABC$ во точката M . Кружницата Ω минува низ точката A , ја допира правата CM во точката K и по вторпат ја сече отсечката AB во точката P , а кружницата ω во точката Q . Докажи, дека точките P, Q и M лежат на една права.

Решение. Нека R е втората пресечна точка на кружницата Ω и отсечката AC (види цртеж). Тогаш

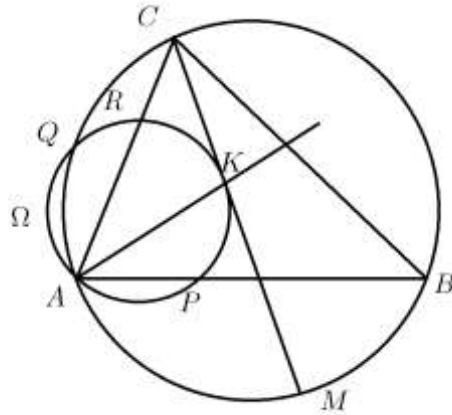
$$\begin{aligned}\angle MKP &= \angle KAP = \angle KAR \\ &= \angle KPR\end{aligned}$$

па затоа $PR \parallel CM$.

Понатаму, важи

$$\begin{aligned}\angle CMQ &= \angle CAQ = \angle RAQ \\ &= \angle RPQ\end{aligned}$$

од што следува дека правите MQ и PQ се совпаѓаат, со што тврдењето е докажано.



8. Во $\triangle ABC$ важи $\angle ACB = 50^\circ$ и $\angle CBA = 70^\circ$. Нека D е подножјето на нормалата повлечена од точката A кон страната BC , O е центарот на опишаната кружница околу $\triangle ABC$ и E е точката на кружницата која е дијаметрално спротивна на точката A . Определи ја големината на $\angle DAE$.

Решение. Во правоаголниот $\triangle ABD$

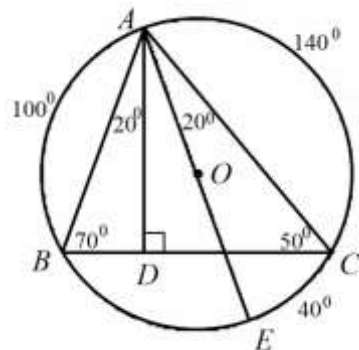
важи $\angle BAD = 20^\circ$. Понатаму,

$$\angle AOC = 2\angle ABC = 140^\circ.$$

Затоа

$$\angle COE = 180^\circ - \angle AOC = 40^\circ,$$

што значи дека $\angle CAE = 20^\circ$.



Бидејќи $\angle BAC = 60^\circ$, добиваме дека

$$\angle DAE = \angle BAC - \angle BAD - \angle EAC = 60^\circ - 20^\circ - 20^\circ = 20^\circ.$$

9. Даден е $\triangle ABC$ со центар на впишаната кружница I . Кружница со центар во I и радиус $\overline{CI}$ ја сече страната AB во внатрешни точки M и N . Докажи, дека $\angle MCN < 60^\circ$.

Решение. Во $\triangle AMC$ точката I е пресек на симетралата на страната CM и симетралата на аголот $\angle CAM$, па затоа I лежи на кружницата опишана околу $\triangle AMC$. Според тоа, $\angle ICM = \angle IAM = \frac{1}{2} \angle CAB$. Аналогно, $\angle ICN = \frac{1}{2} \angle CBA$ и затоа

$$\angle ACB = 180^\circ - \angle CAB - \angle CBA = 180^\circ - 2\angle MCN.$$

Но, по услов M и N се внатрешни точки за AB , па затоа $\angle ACB < \angle MCN$, што заедно со последното равенство дава

$$\angle MCN < 180^\circ - 2\angle MCN, \text{ т.е. } \angle MCN < 60^\circ.$$

10. Околу $\triangle ABC$, $b \geq c$ опишана е кружница. Од средината E на лакот BC кој не ја содржи точката A повлечен е дијаметар ED . Докажи дека $\angle DEA = \frac{1}{2}(\beta - \gamma)$, каде β и γ се агли на триаголникот во темињата B и C , соодветно.

Решение. Аголот $\angle DAE$ е прав агол, како периферен агол на дијаметарот DE на кружницата. Понатаму,

$$\angle ADE = \angle ADB + \angle BDE \quad (1)$$

$$\angle ADB = \angle ACB = \gamma \quad (2)$$

(како периферни агли над исти лак AB) и

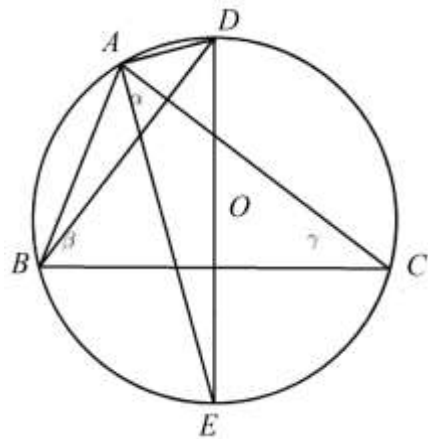
$$\angle BDE = \angle BAE = \frac{\alpha}{2} \quad (3)$$

(бидејќи $BE = CE$). Сега од (1), (2) и (3) следува

$$\angle ADE = \gamma + \frac{\alpha}{2}. \quad (4)$$

Понатаму, од правоаголникот $\triangle ADE$ добиваме

$$\angle DEA = 90^\circ - \angle ADE = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} - \angle ADE,$$



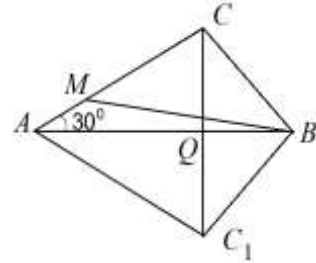
а оттука заради (4) имаме

$$\angle DEA = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} - (\gamma + \frac{\alpha}{2}) = \frac{1}{2}(\beta - \gamma).$$

11. Во триаголникот ABC важи $\angle ACB = 2\angle ABC$. Точката M припаѓа на страната AC и важи $\overline{CM} = \overline{BC}$. Определи ги аглите на триаголникот ABC ако $\overline{BM} = \overline{AC}$.

Решение. Конструираме $\angle ABC_1 = \angle ABC$

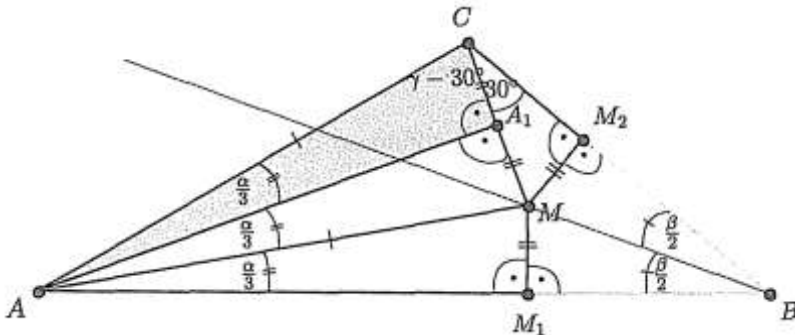
така што C_1 и C се во различни полурамнини во однос на правата AB . Нека точката C_1 на кракот BC_1 е таква што $\overline{C_1B} = \overline{CB}$. Тогаш $\triangle MBC \cong \triangle C_1CB$ како рамнокраки триаголници со еднакви краци и $\angle MCB = \angle CBC_1$, па затоа $\overline{BM} = \overline{C_1C}$. Би-



дејќи AB е симетрала на $\angle CBC_1$, заклучуваме дека $AB \perp CC_1$. Нека $AB \cap CC_1 = Q$. Понатаму, триаголникот ACQ е правоаголен и освен тоа важи $\overline{AC} = 2\overline{AQ}$. Затоа, $\angle CAB = 30^\circ$. Но, $\angle ACB = 2\angle ABC$ и како $\angle ACB + \angle ABC = 150^\circ$, добиваме $\angle ABC = 50^\circ$ и $\angle ACB = 100^\circ$.

12. Во внатрешноста на $\triangle ABC$ на симетралата на аголот B е дадена точка M таква што $\overline{AM} = \overline{AC}$ и $\angle BCM = 30^\circ$. Докажи дека $\angle AMB = 150^\circ$.

Решение. Нека M_1 и M_2 се подножјата на нормалите повлечени од точката M на страните AB и BC , соодветно и A_1 е средината на отсечката CM . Бидејќи M лежи на симетралата на аголот B важи $\overline{M_1M} = \overline{M_2M}$. Според условот на задачата $\triangle CAM$ е рамнокрак, па затоа $\triangle AA_1M$ и $\triangle AA_1C$ се правоаголни складни триаголници.

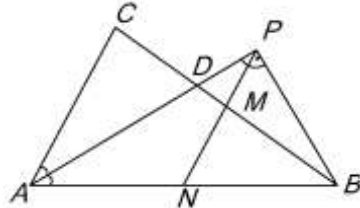


Сега, $\angle AA_1M = \angle AM_1M = 90^\circ$, $\overline{AM} = \overline{AM}$ и $\overline{A_1M} = \overline{M_1M}$, па затоа $\triangle AA_1M \cong \triangle AM_1M$. Значи, $\triangle AM_1M \cong \triangle AA_1M \cong \triangle AA_1C$, па затоа правите AA_1 и AM го делат аголот при темето A на три еднакви дела. Од $\triangle AA_1C$ добиваме дека $\angle ACA_1 = 90^\circ - \frac{\alpha}{3}$ и $\angle ACA_1 = \gamma - 30^\circ$. Значи, $\gamma - 30^\circ = 90^\circ - \frac{\alpha}{3}$, па затоа $\frac{2\alpha}{3} + \beta = 60^\circ$, т.е. $\frac{\alpha}{3} + \frac{\beta}{2} = 30^\circ$.

Сега, од $\triangle AMB$ лесно се добива дека $\angle AMB = 180^\circ - (\frac{\alpha}{3} + \frac{\beta}{2}) = 150^\circ$.

13. Нека M и N се средините на страните BC и AB на триаголникот ABC , соодветно и точката D лежи на страната BC . Докажи, дека ако $P = AD \cap MN$, тогаш $AP \perp BP$ ако и само ако AD е симетрала на аголот $\angle CAB$.

Решение. Нека $AP \perp BP$. Тогаш триаголникот ABP е правоаголен и PN е тежишна линија повлечена кон хипотенузата. Според тоа, $\overline{PN} = \overline{AN} = \overline{BN}$, од каде следува дека $\angle PAN = \angle APN$. Освен тоа, бидејќи MN е средна линија

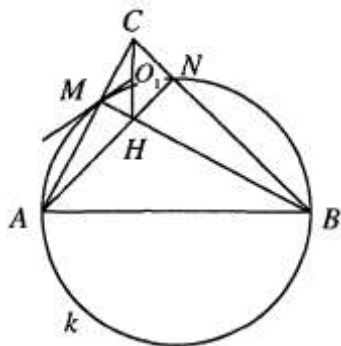


за триаголникот ABC добиваме дека $\angle APN = \angle PAC$. Според тоа, $\angle CAP = \angle PAN$, т.е. AD е симетрала на аголот $\angle CAB$.

Нека AD е симетрала на аголот $\angle CAB$. Тогаш од $\angle CAP = \angle PAN = \angle APN$ следува, дека $\overline{PN} = \overline{AN}$, што значи дека триаголникот ABP е правоаголен, т.е. $AP \perp BP$.

14. Даден е остроаголен $\triangle ABC$. Кругница k низ A и B ги сече страните AC и BC во внатрешни точки M и N , соодветно. Тангентите на k во точките M и N се сечат во точката O . Докажи, дека O е центар на опишаната кругница околу $\triangle CMN$ ако и само ако AB е дијаметар на k .

Решение. Ако AB е дијаметар на k , тогаш AM и BN се висините на $\triangle ABC$. Нека H е ортоцентарот на $\triangle ABC$ и нека тангентата на k во M ја сече висината CH во точка O_1 , цртеж десно. Тогаш $\triangle CMH$ е правоаголен и важи



$$\angle CMO_1 = \angle ABM = \frac{\angle A}{2}.$$

Но, $\angle ABM = \angle ACH$ и затоа $\angle CMO_1 = \angle MCO_1$, т.е. $\triangle MCO_1$ е рамнокрак, од каде заклучуваме дека O_1 е средина на CH . Аналогно се докажува дека тангентата на k во N минува низ O_1 , т.е. $O \equiv O_1$ и

$$\overline{OM} = \overline{ON} = \overline{OC} = \frac{\overline{CH}}{2}.$$

Нека O е центар на опишаната кружница околу $\triangle CMN$. Тогаш

$$\angle CMO = \angle MCO = \angle ABM \text{ и}$$

$$\angle CNO = \angle NCO = \angle BAN,$$

па затоа

$$\angle ACB = \angle MCO + \angle NCO = \angle ABM + \angle BAN.$$

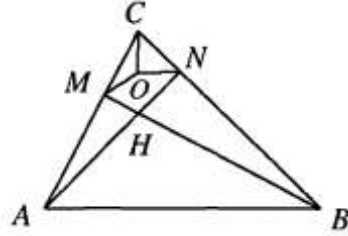
Според тоа,

$$2\angle ANB = \angle ANB + \angle AMB$$

$$= 180^\circ - \angle ABC - \angle BAN + 180^\circ - \angle BAC - \angle ABM$$

$$= 360^\circ - (\angle ABC + \angle ACB + \angle BAC) = 180^\circ,$$

од каде следува $\angle ANB = 90^\circ$, т.е. AB е дијаметар на k .

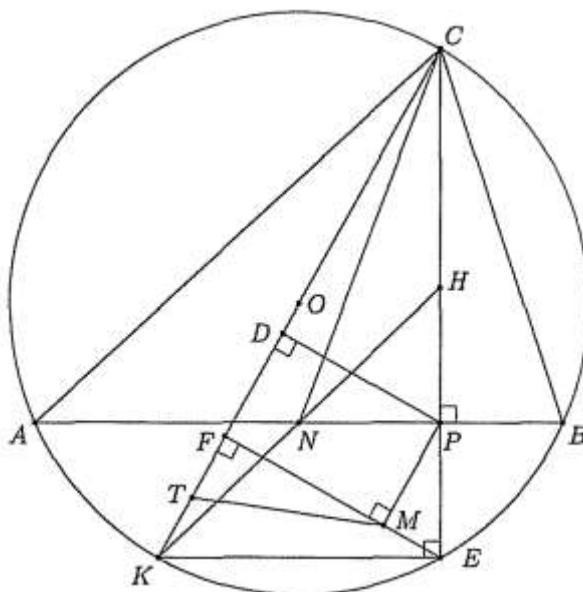


15. Даден е остроаголен $\triangle ABC$ ($\overline{AC} > \overline{BC}$) со опишана кружница k со центар O . Точката N е средина на AB , а точката P е подножјето на висината повлечена од C кон правата AB . Нека правите CP и CO по втор пат ја сечат k во точките E и K , соодветно. Точката F е проекција на E врз CK , а точката M е проекција на P врз FE . Нека T е средината на KF . Докажи, дека $\angle MTF = \angle PNC$.

Решение. Прво ќе докажеме дека $\overline{KE} = 2\overline{NP}$. Нека H е симетричната точка на K во однос на N . Тогаш ON е средна линија за $\triangle HKC$, па затоа $ON \parallel CH$ и $CH \perp AB$. Отсечката CK е дијаметар во k , од што следува дека $\angle KEN = 90^\circ$. Според тоа, $KE \parallel NP$ и NP е средна линија во $\triangle KEN$, па затоа $\overline{KE} = 2\overline{NP}$.

Ќе докажеме дека $\triangle MTF \sim \triangle CNP$, од што следува тврдењето на задачата. Со D да го означиме подножјето на нормалата повлечена од P кон CK . Имаме $\frac{\overline{MF}}{\overline{TF}} = \frac{2\overline{PD}}{\overline{FK}}$. Освен тоа, $\triangle CDP \sim \triangle EFK$, па затоа

$$\frac{\overline{PD}}{\overline{FK}} = \frac{\overline{CP}}{\overline{KE}}, \text{ што значи дека } \frac{\overline{MF}}{\overline{TF}} = \frac{2\overline{CP}}{\overline{KE}}.$$



дека $\overline{KE} = 2\overline{NP}$ и затоа $\frac{\overline{MF}}{\overline{TF}} = \frac{\overline{CP}}{\overline{NP}}$, од каде следува дека $\triangle MTF \sim \triangle CNP$

16. Даден е агол γ , $0^\circ < \gamma < 180^\circ$ и права AB која ја дели рамнината на две полурамнини ψ и $\bar{\psi}$. Подвижна точка C од ψ е таква што $\angle ACB = \gamma$. Впишаната кружница во $\triangle ABC$ со центар во точката I ги допира AC и BC соодветно во точките E и F . Точката P лежи на полуправата IE , после E , и е така што $PE \perp BC$ и $\overline{PE} = \overline{AF}$. Точката Q лежи на полуправата IF , после F и е таква што $QF \perp AC$ и $\overline{QF} = \overline{BE}$. Докажи, дека симетралата на отсечката PE минува низ постојана точка.

Решение. Нека точката $D \in \bar{\psi}$ е таква што

$$\overline{DA} = \overline{DB} \text{ и } \angle ADB = 90^\circ - \gamma.$$

Ќе докажеме, дека тоа е бараната точка, т.е. дека $\overline{QD} = \overline{DP}$. При стандардните ознаки за аглиите на $\triangle ABC$ имаме

$$\angle DAB = \angle ABD = 45^\circ + \frac{\gamma}{2}.$$

Од

$$\overline{PE} = \overline{AF}, \overline{BE} = \overline{QF} \text{ и } \angle BEP = \angle AFQ = 90^\circ$$

следува, дека $\triangle BEP \cong \triangle QFA$, па затоа

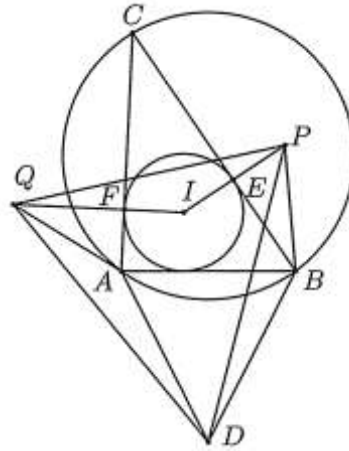
$$\overline{BP} = \overline{AQ} \text{ и } \angle FAQ = \angle EPB.$$

Понатаму

$$\begin{aligned} \angle DBP &= \angle PBE + \beta + 45^\circ + \frac{\gamma}{2} \\ &= 90^\circ - \angle FAQ + \beta + 45^\circ + \frac{\gamma}{2} \\ &= 360^\circ - \angle FAQ - (45^\circ + \frac{\gamma}{2}) - \alpha \\ &= \angle DAQ. \end{aligned}$$

Според тоа, $\triangle QAD \cong \triangle PBD$, т.е.

$$\overline{QD} = \overline{DP}.$$



17. Симетралите на аглите при темињата A, B и C на $\triangle ABC$ ја сечат опишаната кружница околу триаголникот во точките A_1, B_1 и C_1 , соодветно. Да означиме $AA_1 \cap CC_1 = I$, $AA_1 \cap BC = N$ и $BB_1 \cap A_1C_1 = P$. Нека O е центарот на опишаната кружница околу $\triangle IPC_1$ и $OP \cap BC = M$. Определи ги аглите на $\triangle ABC$, ако $\overline{BM} = \overline{MN}$ и $\angle BAC = 2\angle ABC$.

Решение. Нека $\angle CAB = \alpha$, $\angle ABC = \beta$ и $\angle BCA = \gamma$. Имаме

$$\begin{aligned} \angle IPC_1 &= \frac{1}{2}(\angle BA_1 + \angle C_1B_1) = \frac{1}{2}(\angle BA_1 + \angle AC_1 + \angle AB_1) \\ &= \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma) = 90^\circ, \end{aligned}$$

па затоа O е средина на IC_1 . Тогаш

$$\angle IOP = 2\angle IC_1P = \angle CA_1 = \alpha.$$

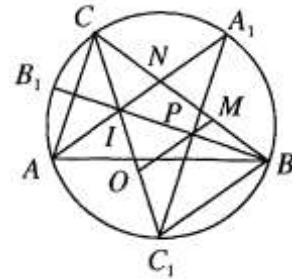
Исто така $\angle CC_1B = \alpha$, па затоа $OP \parallel C_1B$.

Бидејќи $\overline{C_1O} = \overline{OI}$ и $\overline{BM} = \overline{MN}$, следува дека $IN \parallel C_1B$, т.е. $\angle CIA_1 = \alpha$. Од друга страна

$$\angle CIA_1 = \frac{1}{2}(\angle CA_1 + \angle AC_1) = \frac{1}{2}(\alpha + \gamma) = 90^\circ - \frac{\beta}{2}.$$

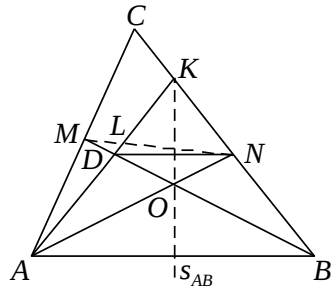
Оттука $\alpha = 90^\circ - \frac{\beta}{2} = \frac{\alpha + \gamma}{2}$, т.е. $\alpha = \gamma$. Бидејќи $\alpha = 2\beta$, заклучуваме

дека $\alpha = \gamma = 72^\circ$ и $\beta = 36^\circ$.



18. Даден е $\triangle ABC$ и точки M и N , соодветно на страните AC и BC така да $\overline{CM} = \overline{CN}$. Пресечната точка на AN и BM е означена со O . Ако $\overline{AO} = \overline{BO}$ и еден од аглите на триаголникот е еднаков на 40° , да се определат останатите агли.

Решение. Да ја разгледаме симетралата s_{AB} на страната AB . Можни се три случаи: s_{AB} ја сече страната BC во внатрешна точка, s_{AB} ја сече страната AC во надворешна точка, s_{AB} минува низ темето C .



Случај 1. Нека s_{AB} ја сече страната BC во внатрешна точка K . Нека $AK \cap BM = D$ и $AK \cap MN = L$. Тогаш $\triangle ANK \cong \triangle BDK$ (признак АСА: $\overline{AK} = \overline{BK}$, $\angle AKB$ – заеднички агол и $\angle KAN = \angle KBD$ како разлики на еднакви агли.) Оттука $\overline{KN} = \overline{KD}$ и затоа $\angle KND = \angle KDN$. Имаме

$$\begin{aligned} \angle CMN &> \angle MLD \text{ (надворешен агол за } \triangle ALM \text{)} \\ &= \angle KLN > \angle KDN \text{ (надворешен агол за } \triangle DNL \text{)} \\ &= \angle KND > \angle KNM = \angle CMN, \end{aligned}$$

т.е. $\angle CMN > \angle CMN$, што не е можно.

Случај 2. s_{AB} ја сече страната AC во надворешна точка. Се разгледува на ист начин како првиот случај.

Случај 3. s_{AB} минува низ темето C . Затоа $\overline{AC} = \overline{BC}$.

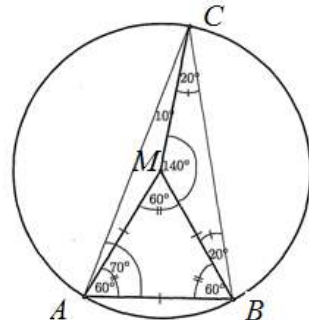
Ако $\angle ACB = 40^\circ$, тогаш $\angle ABC = \angle BAC = 70^\circ$.

Ако $\angle ABC = \angle BAC = 40^\circ$, тогаш $\angle ACB = 100^\circ$.

19. Во внатрешноста на $\triangle ABC$ со агли $\angle BAC = 70^\circ$ и $\angle ABC = 80^\circ$ земена е точка M . Ако $\angle ACM = 10^\circ$ и $\angle CBM = 20^\circ$, докажи дека $\overline{AB} = \overline{MC}$.

Решение. Од условот на задачата следува $\angle BCA = 30^\circ$ и $\angle BCM = 20^\circ$. Според тоа, $\triangle BMC$ е рамнокрак и $\angle BMC = 140^\circ$. Да опишеме кружница k со центар во точката M и радиус $\overline{MB} = \overline{MC}$.

Централниот агол над тетивата BC е еднаков на 140° , па затоа периферниот агол



над оваа тетива е еднаков на 70° . Од $\angle BAC = 70^\circ$ следува дека точката A лежи на кружницата k .

Според тоа k е опишаната кружница околу $\triangle ABC$, а M е нејзиниот центар. Затоа $\overline{MA} = \overline{MB}$. Но, $\angle BCA = 30^\circ$, па затоа $\angle AMB = 60^\circ$, што значи дека рамнокракиот $\triangle ABM$ е рамностран и

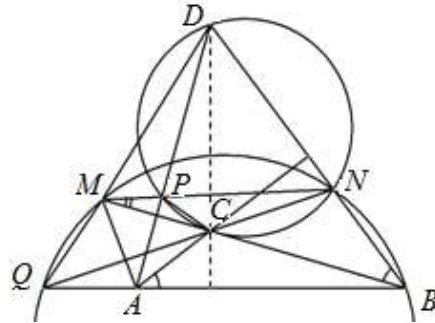
$$\overline{AB} = \overline{MA} = \overline{MB} = \overline{MC},$$

што и требаше да се докаже.

20. Даден е $\triangle ABC$, во кој $\angle BAC = 37^\circ$ и $\angle ABC = 16^\circ$. На продолжението на страната BC е земена точка M така што $\overline{AM} = \overline{AC}$, каде C е меѓу B и M , а во полурамнината определена со правата BC , која не ја содржи A , е земена точка N така што $\angle CBN = 2\angle CMN = 37^\circ$. Да се определи:
- а) $\angle CNM$;

б) односот $\overline{AQ} : \overline{AC}$, каде Q е пресечната точка на правите AB и CN .

Решение. а) Нека симетралата на отсечката CM ги сече MN и правата BN во точките P и D , соодветно. Тогаш BM е нормална на AD . Ќе докажеме, дека AC е нормална на BD , од каде ќе следува, дека точката C е ортоцентар на $\triangle ABD$. Последното е точно, бидејќи



$$\angle BAC + \angle ABN = 37^\circ + 16^\circ + 37^\circ = 90^\circ.$$

Тогаш DC е нормална на AB и затоа

$$\angle CDB = 90^\circ - (16^\circ + 37^\circ) = 37^\circ.$$

Од друга страна, $\angle CPN = 2\angle CMN = 37^\circ$ како надворешен агол за рамнокракиот $\triangle MCP$. Добиваме дека $\angle CDN = \angle CPN$, од каде следува, дека точките P, C, N и D лежат на една кружница. Но тогаш

$$\angle CNM = \angle ADC = \angle ABC = 16^\circ.$$

б) Бидејќи $\angle QBM = \angle QNM = 16^\circ$, точките Q, B, N и M лежат на една кружница. Оттука следува, дека $\angle NQB = \angle NMB = 18,5^\circ$. Освен тоа $\angle QAC = 143^\circ$. Затоа в $\triangle QCA$ имаме $\angle QCA = 18,5^\circ$. Според тоа, $\overline{AQ} = \overline{AC}$, т.е. $\overline{AQ} : \overline{AC} = 1$.

21. Даден е остроаголен $\triangle ABC$ таков што $\overline{AB} > \overline{AC}$. Нека точката M е средина на страната BC . Надворешната симетрала на $\angle BAC$ ја сече полуправата BC во точка P . Точките K и F лежат на правата PA и

се такви што $MF \perp BC$ и $MK \perp PA$. Докажи, дека $\overline{BC}^2 = 4\overline{PF} \cdot \overline{AK}$.

Решение. Со ω да ја означиме опишаната кружница околу $\triangle ABC$ и нека O е центарот на ω , направи цртеж. Ако N е средината на лакот BC од ω , кој не ја содржи A , тогаш MN е симетрала на BC . Освен тоа, AN е симетрала на $\angle BAC$, што значи дека $AN \perp FP$. Според тоа, NF е дијаметар на ω . Од $MK \parallel AN$ следува $\frac{\overline{AK}}{\overline{MN}} = \frac{\overline{FK}}{\overline{EM}}$, па затоа

$$\overline{AK} = \frac{\overline{FK} \cdot \overline{MN}}{\overline{EM}}.$$

Бидејќи MK е висина во правоаголниот триаголник FMP имаме $\overline{FM}^2 = \overline{FK} \cdot \overline{FP}$. Од последните две равенства наоѓаме

$$\overline{AK} \cdot \overline{FP} = \frac{\overline{FK} \cdot \overline{MN}}{\overline{FM}} \cdot \frac{\overline{FM}^2}{\overline{FK}} = \overline{FM} \cdot \overline{MN}.$$

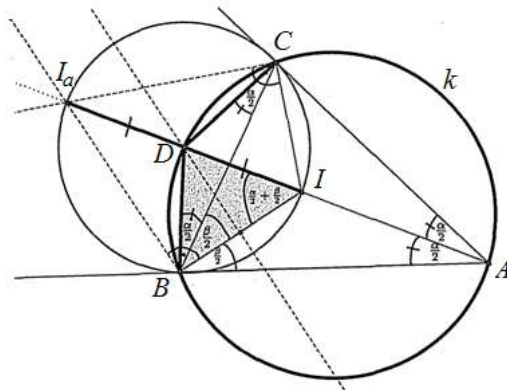
Бидејќи FN и BC се тетиви во ω кои се сечат во точката M , имаме $\overline{FM} \cdot \overline{MN} = \frac{\overline{BC}^2}{4}$. Конечно, од последните две равенства следува тврдењето на задачата.

22. Ако I е центар на впишаната кружница во $\triangle ABC$, I_a е центар на припишаната кружница кон страната BC на $\triangle ABC$ и D е втората пресечна точка на на AI со опишаната кружница околу $\triangle ABC$, тогаш $\overline{DB} = \overline{DC} = \overline{DI} = \overline{DI_a}$. Докажи!

Решение. Аглите на $\triangle ABC$ ќе ги означиме стандардно со α, β и γ

$$\begin{aligned}\angle BID &= \angle BAI + \angle ABI \\ &= \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2},\end{aligned}$$

како надворешен агол на $\triangle BIA$. Од еднаквоста на периферните агли на тетивите DB и DC на опишаната кружница следува



$\overline{DB} = \overline{DC}$ и имаме $\angle DBC = \angle DAC = \frac{\alpha}{2}$ и $\angle DCB = \angle DAB = \frac{\alpha}{2}$. Затоа

$$\angle DBI = \angle DCB + \angle CBI = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}.$$

Значи, $\triangle DIB$ е рамнокрак, па затоа $\overline{DB} = \overline{DI}$.

Од

$$\angle I_a BI = \angle I_a BC + \angle CBI = \frac{180^\circ - \beta}{2} + \frac{\beta}{2} = 90^\circ$$

следува дека $\triangle IBI_a$ е правоаголен. Бидејќи центарот на опишаната кружница на правоаголен триаголник се наоѓа на пресекоот на симетралата на една катета и хипотенузата, добиваме дека центарот мора да биде точката D , бидејќи таа припаѓа на I_a , а бидејќи $\overline{DB} = \overline{DI}$ припаѓа и на симетралата на катетата BI . Затоа $\overline{DI_a} = \overline{DB} = \overline{DI}$.

23. Даден е $\triangle ABC$ и внатрешна точка M , за која важи $\angle MAC = \angle MBC = 30^\circ$. Ако P и Q се подножните точки на нормалите повлечени од M соодветно кон страните BC и AC , а D е средината на страната AB , докажи дека $\triangle PQD$ е рамностран.

Решение. Нека H и F се средините на отсечките AM и BM , соодветно.

Тогаш

$$\overline{DH} = \frac{1}{2} \overline{BM} \text{ и } \overline{DF} = \frac{1}{2} \overline{AM}.$$

Понатаму, четириаголникот $HDFM$ е паралелограм и следствено

$$\angle HDF = 180^\circ - \angle DHM.$$

Освен тоа

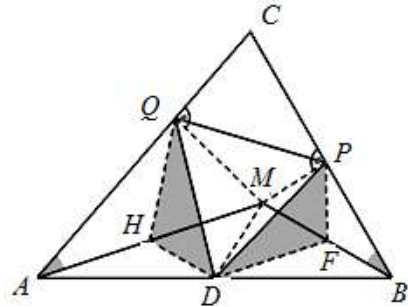
$$\overline{QH} = \frac{1}{2} \overline{AM} \text{ и } \overline{PF} = \frac{1}{2} \overline{BM}$$

(средни линии во правоаголни триаголници). Да ги разгледаме $\triangle DHQ$ и $\triangle PFD$. Последователно ќе искористиме дека $\overline{DH} = \overline{PF}$ и

$$\angle DHQ = \angle DHM + 60^\circ = \angle DFM + 60^\circ = \angle PFD$$

Значи, $\triangle DHQ \cong \triangle PFD$ и следствено $\overline{DP} = \overline{DQ}$. Освен тоа $\angle HQD = \angle FDP$. Добиваме дека

$$\begin{aligned} \angle QDP &= \angle HDF - (\angle HDQ + \angle FDP) = \angle HDF - (\angle HDQ + \angle HQD) \\ &= \angle HDF - (180^\circ - \angle DHQ) = \angle HDF - (18^\circ - \angle DHM - 60^\circ) \end{aligned}$$



$$= \angle HDF - (180^\circ - (180^\circ - \angle HDF) - 60^\circ) = 60^\circ,$$

што е доволно за да тврдиме дека $\triangle PQD$ е рамностран.

24. На страната $\overline{BC} = 6\text{cm}$ на рамностран $\triangle ABC$ земена е точка M таква, што $\angle MAB = 20^\circ$. Нека N е точка на правата AM , при што M е меѓу A и N . Определи ја должината на отсечката MN , ако $\angle BCN = 50^\circ$.

Решение. Нека P е точка на правата AN (M е меѓу A и P) таква, што $\angle ABP = 140^\circ$. Бидејќи $\angle BMP = 80^\circ$, како надворешен за $\triangle ABM$ и

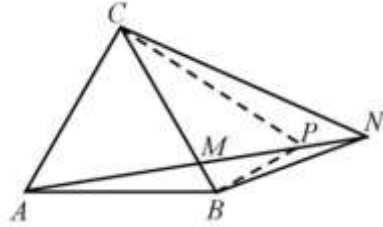
$$\angle APB = 180^\circ - (140^\circ + 20^\circ) = 20^\circ,$$

заклучуваме дека $\triangle APB$ е рамно-

крак ($\overline{AB} = \overline{PB}$). Тогаш и $\triangle CPB$ е рамнокрак ($\overline{BC} = \overline{BP}$). Оттука

$$\angle BCP = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle CBP) = \frac{1}{2}(180^\circ - 80^\circ) = 50^\circ.$$

Од условот $\angle BCN = \angle BCP$ следува, дека $P \equiv N$, бидејќи точките P и N се десно од M . Заклучуваме, дека $\angle ABN = 140^\circ$. Тогаш $\angle BAN = \angle BNA = 20^\circ$ и $\triangle ANB$ е рамнокрак ($\overline{AB} = \overline{NB}$). Освен тоа и $\triangle MBN$ е рамнокрак, бидејќи $\angle MBN = 140^\circ - 60^\circ = 80^\circ = \angle BMN$. Следствено $\overline{MN} = \overline{BN} = \overline{AB} = 6\text{cm}$.

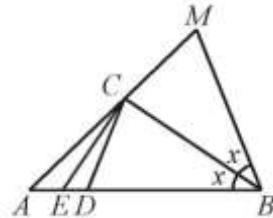


25. Даден е триаголник ABC и точки E и D на страната AB така, што $\angle ACE = \angle ECD = 12^\circ$. Определи го $\angle ABC$, ако $\angle ECB = 90^\circ$ и $\overline{AC} + \overline{CD} = \overline{AB}$.

Решение. На полушравата AC конструираме точка M таква, што $\overline{AM} = \overline{AC} + \overline{CD}$. Тогаш $\overline{CD} = \overline{CM}$ и $\angle DCB = \angle BCM = 78^\circ$. Следствено $\triangle DCB \cong \triangle MCB$, од каде следува $\angle CBD = \angle CBM = x$. Затоа од $\triangle ACB$ добиваме $\angle BAC = 180^\circ - (90^\circ + 12^\circ + x) = 78^\circ - x$.

Бидејќи $\triangle BMA$ е рамнокрак, за збирот на неговите агли

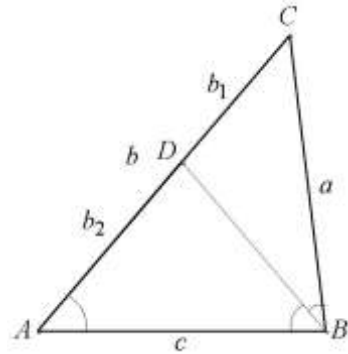
$$4x + 78^\circ - x = 180^\circ, \text{ т.е. } x = 34^\circ \text{ и } \angle ABC = 34^\circ.$$



26. Докажи дека постои точно еден триаголник чии должини на страни се последователни природни броеви и еден од аглите е два пати поголем

од еден од преостанатите два агли.

Решение. Нека $b > a$. Повлекуваме симетралата BD на аголот β и воведуваме ознаки $\overline{CD} = b_1$ и $\overline{DA} = b_2$. Тогаш $\triangle ABC \sim \triangle BDC$ и затоа $\frac{c}{b_2} = \frac{a}{b_1} = \frac{b}{a}$, од каде што добиваме $c = \frac{bb_2}{a}$, $a = \frac{bb_1}{a}$. Ако ги собере-
реме последните две равенства добиваме



$$(b_1 + b_2) \frac{b}{a} = \frac{b^2}{a} = c + a$$

каде $c + a$ е цел број. Според условот на задачата, должините на страните мора да бидат последователни цели броеви, па затоа $b = a + 1$ или $b = a + 2$.

(1) Ако $b = a + 1$, тогаш $\frac{b^2}{a} = \frac{a^2 + 2a + 1}{a} = a + 2 + \frac{1}{a}$, па затоа $a = 1, b = 2$ и $c = 3$, а овој триаголник е дегенериран.

(2) Ако $b = a + 2$, тогаш $\frac{b^2}{a} = \frac{a^2 + 4a + 4}{a} = a + 4 + \frac{4}{a}$, па затоа $a \mid 4$, т.е. $a = 1$ или $a = 2$ или $a = 4$.

Ако $a = 1$, тогаш $b = 3$ и $c = \frac{b^2}{a} - a = 8$, но триаголник со такви страни не постои (зошто?).

Ако $a = 2$, тогаш $b = 4$ и $c = 6$, но овој триаголник е дегенериран.

Ако $a = 4$, тогаш $b = 6$ и $c = 5$, што е решение на задачата.

27. Даден е остроаголен триаголник ABC . Нека D е средина на помалиот лак BC на кружницата опишана околу $\triangle ABC$. Точките E и F се симетрични на точката D соодветно во однос на правата BC и центарот на опишаната кружница околу $\triangle ABC$. Нека K е средина на отсечката EA .

а) Докажи дека кружницата која минува низ средините на страните на $\triangle ABC$ ја содржи точката K .

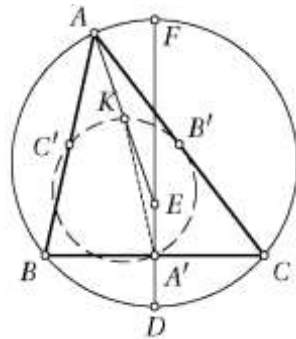
б) Докажи дека правата која минува низ точката K и средината на страната BC е нормална на правата AF .

Решение. а) Нека со A', B', C' соодветно ги означиме средините на страните BC, CA, AB . Отсечките KB' и KC' се средни линии на триаголниците AEC и AEB , па затоа

$$\begin{aligned}\angle C'KB' &= \angle BEC = \angle CDB = 180^\circ - \angle BAC \\ &= 180^\circ - \angle B'A'C',\end{aligned}$$

што значи дека точката K лежи на кружницата $A'B'C'$.

б) Отсечката KA' е средна линија во триаголникот EAD , па затоа $KA' \parallel AD$. Понатаму, DF е дијаметар на кружницата ABC па затоа $AD \perp AF$. Конечно, од $KA' \parallel AD$ и $AD \perp AF$ следува $KA' \perp AF$.



28. Впишаната кружница во триаголникот ABC ги допира страните AB и AC соодветно во точките D и E . Нека симетралите на аглите во темињата C и B ја сечат правата DE соодветно во точките X и Y и нека Z е средината на страната BC . Докажи, дека триаголникот XYZ е рамностран ако и само ако $\angle A = 60^\circ$.

Решение. Нека I е центарот на впишаната кружница. Од

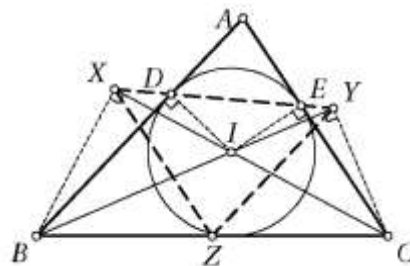
$$\begin{aligned}\angle BIX &= \frac{1}{2}(\angle B + \angle C) \\ &= 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A = \angle ADX\end{aligned}$$

следува дека точките B, I, X, D лежат на иста кружница. Според

тоа, $\angle BXI = \angle BDI = 90^\circ$, па за-

тоа триаголникот BCX е правоаголен, што значи $\overline{ZX} = \overline{ZB}$ и $\angle ZXC = \angle ZCX = \angle XCA$, т.е. $ZX \parallel AC$. Аналогно $\overline{ZY} = \overline{ZB}$ и $ZY \parallel AB$.

Според тоа, $\overline{ZX} = \overline{ZY}$ и $\angle XZY = \angle A$, од што следува тврдењето.

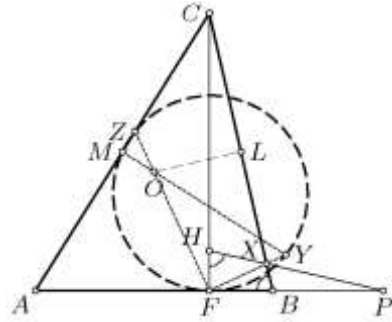


29. Даден е разностран остроаголен триаголник ABC во кој $\overline{AC} > \overline{BC}$. Нека O е центарот на опишаната кружница и H е ортоцентарот на $\triangle ABC$ и нека F е подножјето на висината повлечена од темето C . На правата AB е избрана точка P , различна од A , таква што $\overline{AF} = \overline{PF}$, а M е средината на страната AC . Нека X е пресекот на правите PH и BC , Y е пресекот на правите OM и FX , а Z е пресекот на правите OF и AC . Докажи, дека точките F, M, Y и Z лежат на иста кружница.

Решение. Бидејќи $\angle ZMY = 90^\circ$, доволно е да докажеме дека

$$\angle ZFY = \angle OFX = 90^\circ.$$

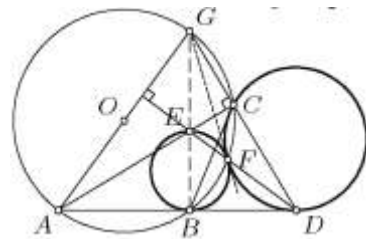
Нека X' е точка на страната BC таква што $\angle OFX' = 90^\circ$ и нека L е средина на страната BC . Точките F и L се наоѓаат на кружницата k над дијаметар OX' , а исто така и двете лежат на Ојлеровата кружница ω на триаголникот ABC , чиј центар K е средина на отсечката OH . Затоа FL како заедничка тетива на кружниците k и ω е нормална на JK , каде J е средината на OX' . Од $JK \parallel HX'$ следува дека $FL \perp HX'$. Оттука следува



$\angle FHX' = 90^\circ - \angle CFL = 90^\circ - \angle FCL = \angle ABC = \angle ANF = \angle FHX$, па затоа $X \equiv X'$.

30. Нека A, B и C се точки на кружница Γ со центар O такви што $\angle ABC > 90^\circ$. Нека D е пресечната точка на правата AB и нормалата на правата AV во точката C . Нека l е нормалата повлечена од точката D на правата AO , E е пресечната точка на правите l и AC , а F е онаа точка на пресекот на кружницата Γ и правата l која се наоѓа меѓу точките D и E . Докажи, дека кружниците опишани околу триаголниците BFE и CFD се допираат во точката F .

Решение. Нека G е точката на Γ дијаметрално спротивна на A . Точката E е ортоцентар на триаголникот DAG , па затоа G лежи на правата BE . Бидејќи $\angle CDF = \angle GAC = \angle GFC$ и $\angle FBE = \angle FAG = \angle GFE$, правата FG е заедничка тангента на кружниците CFD и BFE , па затоа овие кружници се допираат во точката F .



31. На страните на рамностран триаголник ABC избрани се шест точки: A_1, A_2 на BC ; B_1, B_2 на AC и C_1, C_2 на AB . Овие точки се темиња на конвексен шестаголник $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ чии страни имаат еднакви должини. Докажи, дека правите A_1B_2, B_1C_2 и C_1A_2 се сечат во една точка.

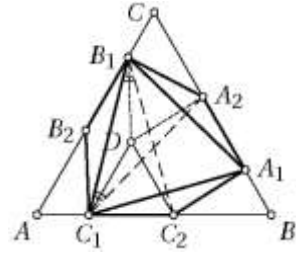
Решение. Нека D е точката во внатрешноста на $\triangle ABC$ таква што $\triangle C_1C_2D$ е рамностран. Тогаш DC_1 е паралелна и еднаква со B_1B_2 , па затоа $B_1B_2C_1D$ е ромб и оттука $\overline{DB_1} = \overline{B_1B_2} = \overline{A_2B_1}$. Аналогно $\overline{DA_2} = \overline{A_2B_1}$, што значи дека $\triangle DA_2B_1$ е рамностран. Значи, точките A_2, B_1, C_1, C_2 лежат на кружница со центар D , па затоа

$$\angle B_1C_1A_2 = \angle C_1B_1C_2 = \frac{1}{2}\angle C_1DC_2 = 30^\circ.$$

Слично,

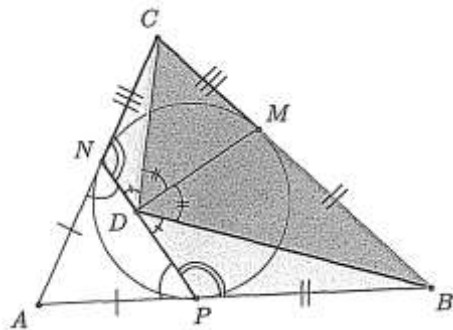
$$\angle C_1A_1B_2 = \angle A_1C_1A_2 = \angle A_1B_1C_2 = \angle B_1A_1B_2 = 30^\circ.$$

Од досега изнесеното следува дека $\triangle A_1B_1C_1$ е рамностран и дека A_1B_2, B_1C_2 и C_1A_2 се сечат во една точка.



32. Впишаната кружница во $\triangle ABC$ ги допира страните на триаголникот BC, CA и AB во точките M, N и P , соодветно. Нека D е точка на NP е таква што $\frac{\overline{DP}}{\overline{DN}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}}$. Докажи, дека $DM \perp PN$.

Решение. Бидејќи $\overline{AP} = \overline{AN}$, како тангентни отсечки на впишаната кружница во $\triangle ABC$, добиваме дека $\triangle NAP$ е рамнокрак. Затоа, $\angle ANP = \angle APN$, од каде следува $\angle DNC = \angle DPB$ и притоа $\angle DNC > 90^\circ$ (при основата рамнокрак триаголник има остри агли).



Од условот $\frac{\overline{DP}}{\overline{DN}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}}$, следува дека триаголниците CDN и BDP имаат два пара пропорционални страни и $\angle DNC = \angle DPB$, па затоа $\triangle CDN \sim \triangle BDP$. Оттука следува дека $\angle CDN = \angle BDP$ и $\frac{\overline{CD}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{CN}}{\overline{BP}}$.

Понатаму, од својствата на тангентните отсечки следува $\overline{CN} = \overline{CM}$ и $\overline{BP} = \overline{BM}$, па затоа $\frac{\overline{CD}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{CN}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{CM}}{\overline{BM}}$. Сега, од обратната теорема за си-

метралата на аголот на триаголник, применета на $\triangle BDC$ следува дека $\angle BDM = \angle CDM$. Според тоа,

$$\angle MDN = \angle MDC + \angle CDN = \angle MDB + \angle BDP = \angle MDP,$$

а како $\angle MDN + \angle MDP = 180^\circ$, добиваме $\angle MDN = \angle MDP = 90^\circ$, со што тврдењето на задачата е докажано.

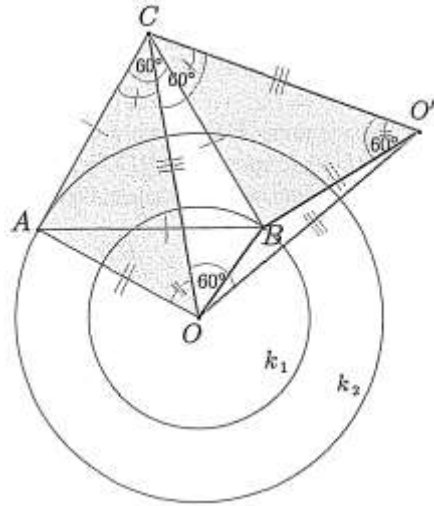
33. Точките B и A припаѓаат на коцентричните кружници k_1 и k_2 со центар во O и должини на радиуси 3 и 5, соодветно. Ако $\triangle ABC$ е рамностран, определи ја најголемата можна должина на отсечката OC .

Решение. Нека O' е точка таква што $\triangle CAO \cong \triangle CBO'$ и A и O' се на различни страни на BC . Тогаш

$$\begin{aligned}\angle OCO' &= \angle OCB + \angle BCO' \\ &= \angle OCB + \angle OCA \\ &= \angle ACB = 60^\circ.\end{aligned}$$

Понатаму, бидејќи $\overline{O'C} = \overline{OC}$, добиваме дека $\triangle OCO'$ е рамностран, па затоа $\overline{O'O} = \overline{OC}$. Бидејќи $\overline{O'B} = \overline{OA}$, следува дека

$$\begin{aligned}\overline{OC} &= \overline{O'O} \leq \overline{OB} + \overline{O'B} \\ &= \overline{OB} + \overline{OA} = 8.\end{aligned}$$



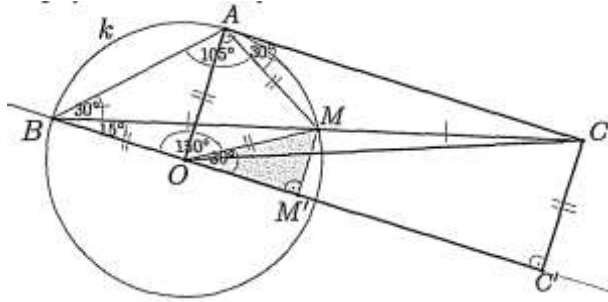
Значи, $\overline{OC} \leq 8$ и останува да докажеме дека при некој распоред на точките A и B во последното неравенство важи знак за равенство. Равенство важи ако и само ако точките O, B и O' во овој распоред се колинеарни, т.е. ако и само ако

$$\begin{aligned}180^\circ &= \angle OBC + \angle O'BC = \angle OBC + \angle OAC = \angle OAB + 60^\circ + \angle OBA + 60^\circ, \\ \text{односно ако и само ако } \angle OAB + \angle OBA &= 60^\circ. \text{ Оттука следува дека } \\ \overline{OC} &= 8 \text{ ако и само ако } \angle AOB = 120^\circ.\end{aligned}$$

34. Во $\triangle ABC$ точката M е средина на страната BC и важи $\angle MAC = \angle ABC$ и $\angle BAM = 105^\circ$. Определи го $\angle ABC$.

Решение. Нека O е центарот на кружницата k опишана околу $\triangle ABM$ и нека C' и M' се подножјата на нормалите повлечени од точките C и M на правата OB , соодветно. Од $\angle BAM = 105^\circ$ следува

дека соодветниот централен агол е $\angle BOM = 150^\circ$. Од рамнокракиот $\triangle BOM$ следува дека $\angle OBM = \angle OMB = 15^\circ$. Сега, $\angle MOM' = 30^\circ$, како надворешен агол за $\triangle BOM$.



Сега, од правоаголникот $\triangle MOM'$ добиваме $\overline{MM'} = \frac{\overline{OM}}{2}$. Бидејќи M е средината на отсечката BC и $MM' \parallel CC'$ (двете се нормални на BC'), добиваме дека MM' е средна линија на $\triangle BCC'$, па затоа

$$\overline{CC'} = 2\overline{MM'} = \overline{OM} = \overline{OA}.$$

Од условот $\angle MAC = \angle ABC$ следува дека правата CA е тангента на кружницата k , па затоа $OA \perp AC$. Значи, правоаголните триаголници ACO и $C'OC$ имаат зедничка хипотенуза и еднакви катети AO и CC' , па затоа тие се складни. Затоа четириаголникот $OACC'$ е правоаголник и $BC' \parallel AC$ и $BC' \perp OA$. Затоа

$$\angle AOM = 180^\circ - \angle AOB - \angle MOM' = 180^\circ - 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ.$$

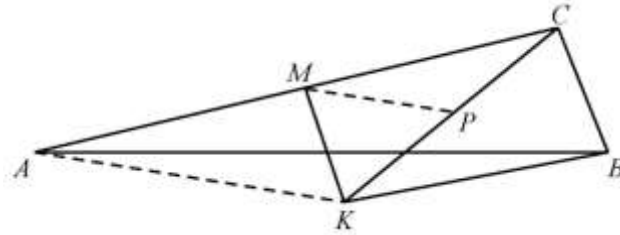
Конечно, бараниот агол е

$$\angle ABC = \angle ABM = \frac{\angle AOM}{2} = 30^\circ.$$

35. Даден е $\triangle ABC$ со $\angle ACB = 100^\circ$. Средината на страната AC е означена со M , а на нејзината симетрала е земена точка K таква, што $2\overline{MK} = \overline{BK}$ и $\angle MKB = 100^\circ$. Определи ги аглите на $\triangle ABC$.

Решение. Да забележиме, дека точките K и B се во една и иста полурамнина во однос на правата AC . Во спротивен случај правата BK ја сече AC во точка L и бидејќи $\triangle MLK$ е правоаголен, не е можно $\angle MKL = 100^\circ$, т.е. $\angle MKB = 100^\circ$. Сега од збирот на аглите во четириаголникот $MKBC$ добиваме, дека

$$\angle KBC = 360^\circ - (100^\circ + 100^\circ + 90^\circ) = 70^\circ.$$



Да го разгледаме $\angle MCK$. Можни се три случаи: $\angle MCK = 30^\circ$, $\angle MCK < 30^\circ$ или $\angle MCK > 30^\circ$.

Прв случај. Нека $\angle MCK = 30^\circ$. Тогаш $\overline{CK} = 2\overline{MK} = \overline{BK}$. Но, MK е симетрала на AC и затоа $\overline{AK} = \overline{CK} = \overline{BK}$. Заклучуваме, дека K е пресечната точка на симетралите страните на $\triangle ABC$ и бидејќи триаголникот е тапоаголен, следува дека K е надворешна точка за триаголникот. Освен тоа $\angle CAK = \angle ACK = 30^\circ$. Нека $\angle ABK = \angle BAK = x$. Тогаш

$$\angle BAC + \angle ABC = (30^\circ - x) + (70^\circ - x) = 80^\circ,$$

од каде следува $x = 10^\circ$. За аглиите на $\triangle ABC$ наоѓаме $\angle BAC = 20^\circ$ и $\angle ABC = 60^\circ$.

Втор случај. Нека $\angle MCK < 30^\circ$. Тогаш $\angle BCK > 70^\circ = \angle KBC$ и од теоремата за неравенствата меѓу агли и страни во $\triangle KBC$ следува, дека $\overline{BK} > \overline{CK}$. Да го разгледаме правоаголниот $\triangle KMC$. Ако P е средината на KC , тогаш од рамнокракиот $\triangle MPC$ следува, дека за надворешниот агол $\angle KPM$ важи $\angle KPM < 60^\circ$. Но, тогаш од рамнокракиот $\triangle KPM$ заклучуваме, дека $\angle KMP > 60^\circ$ и следствено $\overline{MK} < \overline{PK}$. Оттука $2\overline{MK} < 2\overline{PK}$, т.е. $\overline{BK} < \overline{CK}$, што е противречност.

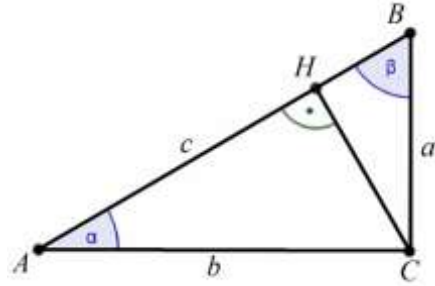
Трет случај. Нека $\angle MCK > 30^\circ$. Тогаш $\angle BCK < 70^\circ = \angle KBC$ и од теоремата за неравенствата меѓу агли и страни во $\triangle KBC$ следува, дека $\overline{BK} < \overline{CK}$. Одново да го разгледаме правоаголниот $\triangle KMC$. Ако P е средината на KC , тогаш од рамнокракиот $\triangle MPC$ следува, дека за надворешниот $\angle KPM$ важи $\angle KPM > 60^\circ$. Но, тогаш од рамнокракиот $\triangle KPM$ заклучуваме, дека $\angle KMP < 60^\circ$ и следствено $\overline{MK} > \overline{PK}$. Оттука $2\overline{MK} > 2\overline{PK}$, т.е. $\overline{BK} > \overline{CK}$, што пак е противречност.

36. Даден е правоаголен $\triangle ABC$ со прав агол во темето C . Нека H е под-

ножјето на висината повлечена од темето C на страната AB . Докажи, дека збирот на радиусите на впишаните кружници во $\triangle ABC$, $\triangle BCH$ и $\triangle ACH$ е еднаков на $\overline{CH}$.

Решение. За елементите на $\triangle ABC$ ќе ги користиме стандардните ознаки. Нека $s = \frac{a+b+c}{2}$.

Бидејќи AN е висина во $\triangle ABC$ имаме $\angle AHC = 90^\circ$, што значи дека $\triangle AHC \sim \triangle ABC \sim \triangle BCH$. Нека r, r_1, r_2 се радиусите на впишаните кружници во $\triangle ABC$,



$\triangle ACH, \triangle BCH$. Од сличностите на триаголниците следува $\frac{r}{r_1} = \frac{c}{b}$,

$\frac{r}{r_2} = \frac{c}{a}$, па затоа $r_1 = r \frac{b}{c}$, $r_2 = r \frac{a}{c}$. Понатаму, од $r = \frac{P}{s} = \frac{\frac{ab}{2}}{\frac{a+b+c}{2}} = \frac{ab}{a+b+c}$,

добиваме $r_1 = \frac{ab}{a+b+c} \cdot \frac{b}{c}$, $r_2 = \frac{ab}{a+b+c} \cdot \frac{a}{c}$. Според тоа,

$$\begin{aligned} r + r_1 + r_2 &= \frac{ab}{a+b+c} + \frac{ab}{a+b+c} \cdot \frac{b}{c} + \frac{ab}{a+b+c} \cdot \frac{a}{c} \\ &= \frac{ab}{a+b+c} \left(1 + \frac{b}{c} + \frac{a}{c}\right) \\ &= \frac{ab}{a+b+c} \cdot \frac{a+b+c}{c} = \frac{ab}{c}. \end{aligned}$$

Од друга страна, од $\triangle AHC \sim \triangle ABC$ следува $\frac{b}{c} = \frac{\overline{CH}}{a}$, т.е. $\overline{CH} = \frac{ab}{c}$.

Значи, $r + r_1 + r_2 = \overline{CH}$, што и требаше да се докаже.

37. Даден е остроаголен $\triangle ABC$ с висини AK ($K \in BC$) и BL ($L \in AC$). Ако G и T се тежиштата соодветно на $\triangle ABL$ и $\triangle ABK$, докажи дека остриот агол меѓу AK и BL е еднаков на 60° ако и само ако $\overline{GT} = \frac{1}{6} \overline{AB}$.

Решение. Нека H е пресечната точка на висините AK и BL (H е ортоцентар на триаголникот). Бидејќи во четириаголникот $LHKS$ два од аглиите се прави, добиваме дека $\angle LHK$ не може да е остар. Во спротивно добиваме дека $\angle ACB = \gamma$ не е остар, т.е. дека триаголникот не е остроаголен, што е противречност. Сега заклучуваме, дека $\angle LHK = 120^\circ$ ако и само ако $\gamma = 60^\circ$. Нека M е средината на страната AB . Тогаш KM и LM се тежишни линии соодветно во правоаголните

триаголници ABK и ABL , од каде следува, дека $\overline{KM} = \overline{LM} = \frac{1}{2}\overline{AB}$, т.е.

дека $\triangle LKM$ е рамнокрак. Од рамнокраките триаголници ALM и BKM имаме соодветно

$$\angle AML = 180^\circ - 2\angle MAL = 180^\circ - 2\alpha$$

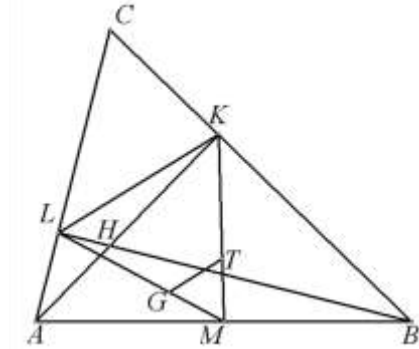
и

$$\angle BMK = 180^\circ - 2\angle MBK = 180^\circ - 2\beta.$$

Тогаш

$$\begin{aligned}\angle LMK &= 180^\circ - (\angle AML + \angle BMK) = 180^\circ - (180^\circ - 2\alpha + 180^\circ - 2\beta) \\ &= 2(\alpha + \beta) - 180^\circ\end{aligned}$$

Заклучуваме, дека $\angle LMK = 60^\circ$ ако и само ако $\gamma = 60^\circ$. Но $\angle LMK = 60^\circ$ ако и само ако рамнокракиот $\triangle LKM$ е рамностран, т.е. ако и само ако $\overline{LK} = \frac{1}{2}\overline{AB}$. Бидејќи според условот G и T се тежишта соодветно на $\triangle ABL$ и $\triangle ABK$, важи $\overline{MG} = \frac{1}{3}\overline{LM}$ и $\overline{MT} = \frac{1}{3}\overline{KM}$. Од равенството $\overline{LM} = \overline{KM}$ следува, дека $\triangle GTM$ е рамностран ако и само ако $\triangle LKM$ е рамностран, т.е. ако и само ако $\overline{GT} = \frac{1}{3}\overline{LK} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{1}{6}\overline{AB}$.



38. Даден е $\triangle A_1A_2A_3$ со тежиште G , во кој P_1, P_2 и P_3 соодветно се средините на страните A_2A_3, A_3A_1 и A_1A_2 . Нека точките G_1, G_2 и G_3 се такви, што отсечките P_1G_1, P_2G_2 и P_3G_3 имаат заедничка точка M , за која важи

$$\overline{MG_1} : \overline{P_1G_1} = \overline{MG_2} : \overline{P_2G_2} = \overline{MG_3} : \overline{P_3G_3} = 1:m,$$

каде $m > 1$ е реален број. Ако точките M_1, M_2 и M_3 се соодветно од отсечките GG_1, GG_2 и GG_3 и се такви, што

$$\overline{GM_1} : \overline{M_1G_1} = \overline{GM_2} : \overline{M_2G_2} = \overline{GM_3} : \overline{M_3G_3} = 10:11,$$

определи ги вредностите на m , за кои отсечките A_1M_1, A_2M_2 и A_3M_3 се паралелни и еднакви.

Решение. Од условот следува, дека $\overline{MG_1} = \frac{1}{m}\overline{P_1G_1}$. Оттука

$$\overline{GG_1} = \frac{m}{m-1}\overline{GM} - \frac{1}{m-1}\overline{GP_1}.$$

Бидејќи G е тежиште на $\triangle A_1A_2A_3$, важи

$$\overrightarrow{GP_1} : \overrightarrow{GA_1} = 2:1 \text{ и } \overrightarrow{GP_1} = -\frac{1}{2} \overrightarrow{GA_1}.$$

Следствено

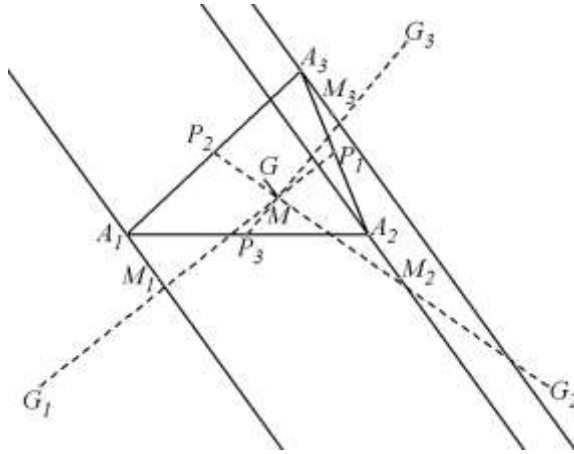
$$\overrightarrow{GG_1} = \frac{m}{m-1} \overrightarrow{GM} + \frac{1}{2(m-1)} \overrightarrow{GA_1}.$$

Од друга страна $\overrightarrow{GG_1} = \frac{21}{10} \overrightarrow{GM_1}$ и ако замениме во претходното равенство, добиваме

$$\overrightarrow{GM_1} = \frac{10m}{21(m-1)} \overrightarrow{GM} + \frac{5}{21(m-1)} \overrightarrow{GA_1}.$$

Ако земеме предвид, дека $\overrightarrow{A_1M_1} = \overrightarrow{GM_1} - \overrightarrow{GA_1}$, наоѓаме

$$\overrightarrow{A_1M_1} = \frac{10m}{21(m-1)} \overrightarrow{GM} + \frac{26-21m}{21(m-1)} \overrightarrow{GA_1}.$$



Аналогно ги добиваме равенствата

$$\overrightarrow{A_2M_2} = \frac{10m}{21(m-1)} \overrightarrow{GM} + \frac{10m}{21(m-1)} \overrightarrow{GA_2} \text{ и } \overrightarrow{A_3M_3} = \frac{10m}{21(m-1)} \overrightarrow{GM} + \frac{26-21m}{21(m-1)} \overrightarrow{GA_3}.$$

Отсечките A_1M_1 и A_2M_2 се паралелни и еднакви ако и само ако $\overrightarrow{A_1M_1} = \overrightarrow{A_2M_2}$. Заклучуваме, дека последното е исполнето ако и само ако

$$\frac{26-21m}{21(m-1)} \overrightarrow{GA_1} = \frac{26-21m}{21(m-1)} \overrightarrow{GA_2}, \text{ т.е. } (26-21m)(\overrightarrow{GA_1} - \overrightarrow{GA_2}) = \vec{0}.$$

Бидејќи не е можно $\overrightarrow{GA_1} = \overrightarrow{GA_2}$, добиваме дека $\overrightarrow{A_1M_1} = \overrightarrow{A_2M_2}$ ако и само ако $m = \frac{26}{21}$. Аналогно $\overrightarrow{A_1M_1} = \overrightarrow{A_3M_3}$ ако и само ако $m = \frac{26}{21}$.

Следствено постои единствена вредност $m = \frac{26}{21}$, за која отсечките

A_1M_1 , A_2M_2 и A_3M_3 се паралелни и еднакви. Притоа, за $m = \frac{26}{21}$

точни се равенствата $\overrightarrow{A_1M_1} = \overrightarrow{A_2M_2} = \overrightarrow{A_3M_3} = \frac{52}{21} \overrightarrow{GM}$.

39. Нека AD и BE се симетрали на внатрешните агли на $\triangle ABC$. Нека x, y, z се растојанијата од точка M , која припаѓа на отсечката DE , до страните BC, CA, AB , соодветно. Докажи, дека $z = x + y$.

Решение. Прво ќе ја докажеме следнава лема.

Лема. Нека $ABCD$ е трапез со должини на основи $\overline{AD} = b$ и $\overline{BC} = a$. Должината на отсечката MN која краците AB и CD ги сели во однос $p:q$ е $\overline{MN} = \frac{ap+bq}{p+q}$.

Доказ. Лесно се докажува дека $MN \parallel BC \parallel AD$. Нека $a > b$.

Конструираме паралелограм $ABTD$ и нека $R = DT \cap MN$.

Од условот имаме

$$\overline{AM} : \overline{MB} = p : q = \overline{DN} : \overline{NC},$$

па затоа бидејќи $\triangle DRN \sim \triangle DTC$ важи

$$\frac{\overline{RN}}{\overline{TC}} = \frac{p}{p+q}, \text{ т.е. } \overline{RN} = \frac{p}{p+q}(a-b).$$

Значи,

$$\overline{MN} = \overline{MR} + \overline{RN} = b + \frac{p}{p+q}(a-b) = \frac{ap+bq}{p+q}.$$

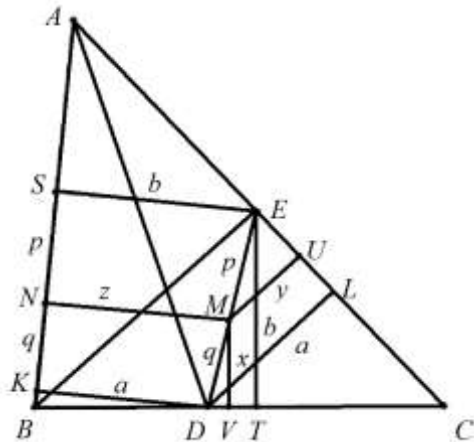
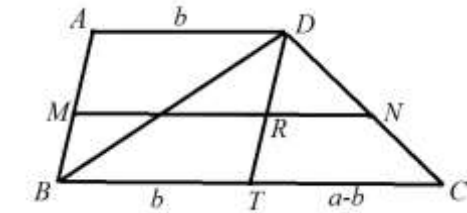
Ако $a = b$, тогаш четириаголникот е паралелограм и тврдењето е точно. ■

Да се вратиме на почетната задача. Нека претпоставиме дека точката M ја дели отсечката ED во однос $p:q$. Нека S и K се подножјата на нормалите повлечени од точките E и D кон страната AB , соодветно.

Бидејќи $MN \parallel ES \parallel DK$ важи

$$\frac{\overline{SN}}{\overline{NK}} = \frac{p}{q}. \text{ Да означиме } \overline{SE} = b$$

и $\overline{DK} = a$. Нека T и L се подножјата на нормалите повлечени од точките E и D кон страните BC и AC , соодветно. Точките D и E припаѓаат на симетралите на внатрешните агли, па затоа



важи $\overline{DL} = \overline{DK} = a$ и $\overline{ET} = \overline{ES} = b$. Сега, од лемата следува $z = \frac{ap+bq}{p+q}$.

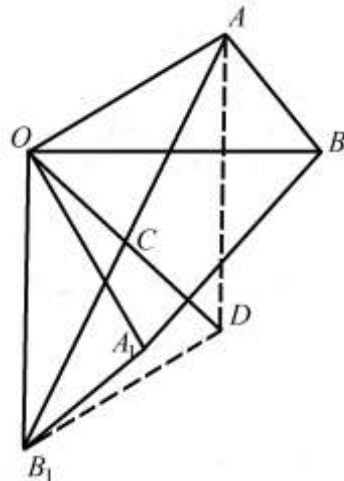
Од $\triangle DET$ следува $x = \frac{bq}{p+q}$, а од $\triangle EDL$ следува $y = \frac{ap}{p+q}$. Конечно, од последните три равенства следува равенство $z = x + y$, кое и требаше да се докаже.

40. Триаголникот AOB со ротација во рамнината околу темето O за агол 90° се пресликува во триаголник A_1OB_1 , при што A_1 е слика на A и B_1 е слика на B . Докажи дека тежишната линија на триаголникот OAB_1 повлечена кон страната AB_1 е нормална на правата A_1B .

Решение. Нека OC е тежишната линија на триаголникот OAB_1 повлечена кон страната AB_1 . Нека D лежи на продолжението на OC така што $\overline{OC} = \overline{CD}$ (види цртеж). Ќе докажеме дека $\triangle AOD \cong \triangle OA_1B$. Јасно, $\overline{OA_1} = \overline{AO}$. Понатаму, четириаголникот AOB_1D е паралелограм, па затоа

$$\overline{AD} = \overline{OB_1} = \overline{OB}.$$

Но, $AO \perp OA_1$, $BO \perp OB_1$ и $AD \parallel OB_1$, па затоа $\angle OAD = \angle A_1OB$. Оттука следува дека $\triangle AOD \cong \triangle OA_1B$ и две страни на едниот триаголник се нормални на соодветните две страни на другиот триаголник, па затоа и третата страна на првиот триаголник е нормална на соодветната страна на вториот триаголник, т.е. $OD \perp A_1B$, што и требаше да се докаже.



41. Над страните AB , BC и AC на рамностраниот триаголник ABC замени се соодветно точки M , N и P такви што

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{BN}}{\overline{NC}} = \frac{\overline{CP}}{\overline{PA}} = \frac{1}{2}.$$

На отсечката PM земена е точка Q таква што $\frac{\overline{PQ}}{\overline{QM}} = \frac{1}{2}$. Определи ги аглиите на триаголникот AQN .

Решение. *Прв начин.* Означуваме $\overrightarrow{AM} = x$.

Разгледуваме ротација $\rho(A, +60^\circ)$. Нека

$\rho(x) = x_1$ и следствено $\overrightarrow{AB} = 3x$, $\overrightarrow{AP} = 2x_1$

и $\overrightarrow{AC} = 3x_1$. Пресметуваме

$$\overrightarrow{AQ} = \frac{\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{AP}}{3} = \frac{x + 4x_1}{3} \text{ и}$$

$$\overrightarrow{AN} = \frac{2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{3} = \frac{6x + 3x_1}{3}.$$

Следствено

$$\overrightarrow{QN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AQ} = \frac{5x - x_1}{3}.$$

Тогаш $\rho(\overrightarrow{QN}) = \frac{5\rho(x) - \rho(x_1)}{3} = \frac{5x_1 - (x_1 - x)}{3} = \frac{4x_1 + x}{3} = \overrightarrow{AQ}$. Добиваме дека

триаголникот AQN е рамностран со агли 120° , 30° и 30° .

Втор начин. На отсечката MN избираме

точка R таква што $\frac{\overrightarrow{MR}}{\overrightarrow{RN}} = \frac{1}{2}$. Нека $PM_1 \perp AB$

($M_1 \in AB$). Од $\sphericalangle APM_1 = 30^\circ$ следува, дека

$\overrightarrow{AM}_1 = \frac{1}{2}\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AM}$ и следствено $M_1 \equiv M$.

Аналогно $MN \perp BC$ и $NP \perp AC$. Добиваме дека $\triangle AMP \cong \triangle BNM \cong \triangle CPN$, од каде

$$\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{NP} \text{ и } \sphericalangle AQM = \sphericalangle BRN.$$

Следствено $\triangle AMQ \cong \triangle BNR$, т.е. $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{BR}$. Пресметуваме,

$$\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{QM} + \overrightarrow{MR} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{NB}$$

и заклучуваме, дека $RBNQ$ е паралелограм, па затоа $\overrightarrow{QN} = \overrightarrow{BR} = \overrightarrow{AQ}$.

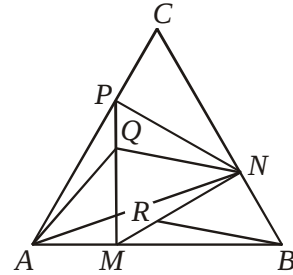
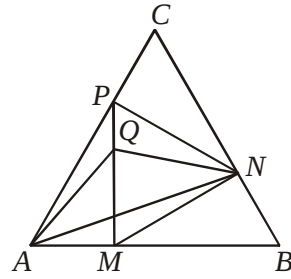
Од друга страна $\sphericalangle NQR = \sphericalangle NBR = 90^\circ - \sphericalangle BRN$. Оттука

$$\sphericalangle AQM + \sphericalangle NQR = \sphericalangle BRN + 90^\circ - \sphericalangle BRN = 90^\circ.$$

Нека $QR_1 \perp MN$ ($R_1 \in MN$). От $\sphericalangle MQR_1 = 30^\circ$ следува, дека

$$\overrightarrow{MR}_1 = \frac{1}{2}\overrightarrow{MQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{RN} = \overrightarrow{MR}$$

и значи $R_1 \equiv R$. Следствено $\sphericalangle AQN = 120^\circ$, а другите два агли се по 30° .



42. Даден е правоаголен $\triangle ABC$, $\angle A = 90^\circ$, $\angle C = 30^\circ$. Кружницата ω минува низ точката A и ја допира страната BC во нејзината средина K . Нека ω ги сече страната AC и опишаната кружница околу $\triangle ABC$ во точките N и M , соодветно. Докажи, дека $MN \perp BC$.

Решение. Имаме $\overline{AK} = \overline{KC}$, па затоа

$$\angle KAC = \angle NKC = 30^\circ,$$

од каде добиваме

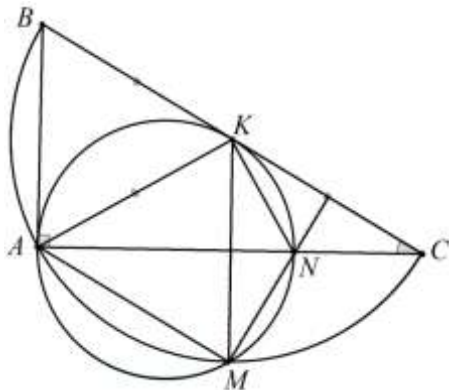
$$\angle ANK = \angle NKC + \angle ACB = 60^\circ.$$

Точките A, K, N, M лежат на ω , па затоа

$$\angle KAN = \angle KMN = 30^\circ,$$

$$\angle AMK = 60^\circ.$$

Понатаму, K е центар на опишаната кружница околу $\triangle ABC$, па затоа $\overline{AK} = \overline{KC} = \overline{KM}$. Според тоа, $\triangle AKM$ е рамностран. Значи, $\angle AKM = 60^\circ$, па како $\angle AKB = 60^\circ$, добиваме дека $\angle MKC = 60^\circ$. Од друга страна, $\angle KMN = 30^\circ$, па затоа $MN \perp BC$.



43. Даден е рамнокрак $\triangle ABC$, $\overline{AC} = \overline{BC}$. Точката D од страната AB е таква што полукружницата со дијаметар BD и центар O ја допира страната AC во точка P и ја сече страната BC во точка Q . Радиусот OP ја сече отсечката DQ во точката E и важи $5\overline{PE} = 3\overline{DE}$. Определи го односот $\overline{AB} : \overline{BC}$.

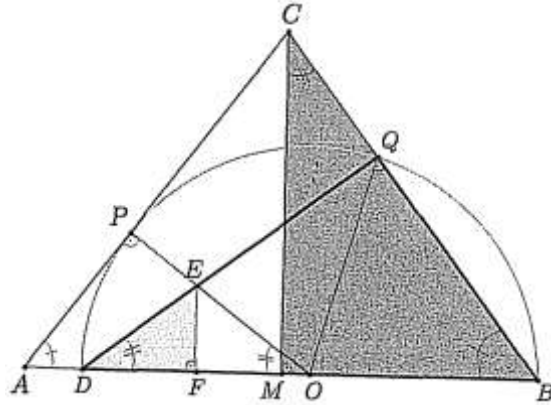
Решение. Јасно, $\angle APO = 90^\circ$ и $\angle DQB = 90^\circ$. Понатаму, $\angle PAO = \angle QBD$, па затоа $\triangle APO \sim \triangle BQD$, што значи дека $\angle AOP = \angle BDQ$, односно $\angle DOE = \angle ODE$. Според тоа, $\triangle DEO$ е рамнокрак, па затоа $\overline{DE} = \overline{OE}$. Оттука и од условот на задачата добиваме $\overline{PE} = \frac{3}{5}\overline{DE} = \frac{3}{5}\overline{OE}$.

Сега

$$\overline{OD} = \overline{OP} = \overline{PE} + \overline{OE} = \frac{3}{5}\overline{OE} + \overline{OE} = \frac{8}{5}\overline{OE} \text{ и } \overline{DE} = \overline{OE} = \frac{5}{8}\overline{OD}.$$

Подножјето F на нормалата повлечена од точката E на отсечката DO е средина на отсечката DO . Понатаму, $\triangle EFD \sim \triangle BQD$ (имаат еден заеднички агол и по еден прав агол), па затоа

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DQ}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{DF}} = \frac{\frac{5}{8}\overline{OD}}{\frac{1}{2}\overline{OD}} = \frac{5}{4}.$$



Нека M е средината на основата на рамнокракиот $\triangle ABC$. Од $\angle CBM = \angle DBQ$ следува дека правоаголните триаголници CMB и DQB се слични, па затоа $\frac{\overline{BC}}{\overline{CM}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{DQ}} = \frac{5}{4}$. Нека бараниот однос е $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = k$. Имаме $\overline{AB} = k\overline{BC}$ и $\overline{BM} = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{k\overline{BC}}{2}$. Сега, од Питагоровата теорема применета на $\triangle CMB$ следува дека

$$\overline{CM} = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{BM}^2} = \sqrt{\overline{BC}^2 - \frac{k^2\overline{BC}^2}{4}} = \overline{BC}\sqrt{1 - \frac{k^2}{4}}.$$

Затоа

$$\frac{5}{4} = \frac{\overline{BC}}{\overline{CM}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BC}\sqrt{1 - \frac{k^2}{4}}},$$

од каде после квадрирање и средување на изразот добиваме $k^2 = \frac{36}{25}$,

т.е. $k = \frac{6}{5}$. Конечно, $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{6}{5}$.

44. Во правоаголен $\triangle ABC$, $\angle C = 90^\circ$ и висина CH , допирните точки на впишаната кружница со катетите AC и BC се P и Q , соодветно. Ако $AQ \perp HP$, определи го односот $\overline{AH} : \overline{BH}$.

Решение. Ако $AQ \perp HP$, тогаш $\angle BAQ = \angle CHP$ и $\angle PCN = \angle QBA$ како агли со нормални краци. Затоа $\triangle ABQ \sim \triangle HCP$, од што следува

$$\overline{AB} : \overline{BQ} = \overline{CH} : \overline{CP}.$$

Ако

$$\overline{AB} = c, \overline{AC} = b, \overline{BC} = a, s = \frac{a+b+c}{2},$$

тогаш $\overline{BQ} = s - b, \overline{CP} = s - c$ и $\overline{CH} = \frac{ab}{c}$, па затоа

$$c(s - c) = \frac{ab}{c}(s - b),$$

од каде добиваме

$$c^2 a + c^2 b - c^3 = a^2 b + abc - ab^2,$$

па ако се искористи Питагоровата теорема $a^2 + b^2 = c^2$, добиваме

$$a^3 + 2ab^2 + b^3 = c(a^2 + ab + b^2).$$

Нека k е позитивен реален број таков што $b = ka$. Тогаш $c = a\sqrt{1+k^2}$ и ако замениме во горното равенство добиваме

$$(1 + 2k^2 + k^3)a^3 = (1 + k + k^2)a^3\sqrt{1+k^2},$$

т.е.

$$(1 + 2k^2 + k^3)^2 = (1 + k + k^2)^2(1 + k^2).$$

Последната равенка е еквивалентна со равенката

$$k^5 - k^3 - k = 0,$$

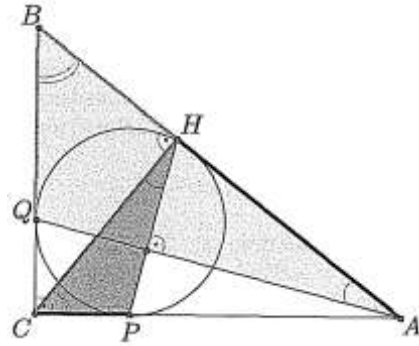
т.е. последователно со равенките

$$k(k^4 - k^2 - 1) = 0$$

$$k(k^4 - k^2 + \frac{1}{4} - \frac{5}{4}) = 0$$

$$k((k^2 - \frac{1}{2})^2 - \frac{5}{4}) = 0$$

$$k(k^2 - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2})(k^2 - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}) = 0$$



Но, k е позитивен број, па затоа $k^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Конечно, од $\triangle ACH \sim \triangle ABC$ и $\triangle CBH \sim \triangle ABC$ следува $\overline{AH} : b = b : c$ и $\overline{BH} : a = a : c$, т.е. $\overline{AH} = \frac{b^2}{c}$ и $\overline{BH} = \frac{a^2}{c}$, па затоа

$$\overline{AH} : \overline{BH} = b^2 : a^2 = k^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

45. Даден е $\triangle ABC$ таков што $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$ и $\overline{BC} = 1$. Во $\triangle ABC$ е впишан рамностран триаголник (на секоја страна на $\triangle ABC$ лежи по едно теме на впишаниот рамностран триаголник). Определи ја нај-малата можна должина на страната на впишаниот рамностран три-

аголник.

Решение. Нека $\triangle DEF$ е рамностран триаголник впишан во $\triangle ABC$ (цртеж десно). Ако $EG \perp AC$, тогаш од правоаголниот $\triangle AEG$ имаме

$$\angle FGE = 90^\circ - \angle EAG = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ.$$

Понатаму, бидејќи $\angle EDF = \angle FGE$, заклучуваме дека точките F, E, D, G лежат на една кружница,

од што следува дека $\angle EGD = \angle EFD$. Според тоа,

$$\angle DGB = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ.$$

Но, $\angle DBG = 60^\circ$, па затоа $\triangle GBD$ е рамностран.

Нека $\overline{BD} = x$ и GH е висината

во $\triangle GBD$. Имаме $\overline{GH} = \frac{x\sqrt{3}}{2}$. Понатаму, четириаголникот $ECHG$ е

правоаголник, па затоа $\overline{EC} = \overline{GH} = \frac{x\sqrt{3}}{2}$. Сега, од правоаголниот $\triangle ECD$ имаме

$$\begin{aligned}\overline{ED}^2 &= \overline{EC}^2 + \overline{CD}^2 = \left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)^2 + (1-x)^2 \\ &= \frac{7x^2}{4} - 2x + 1 = \left(\frac{\sqrt{7}}{2}x - \frac{2}{\sqrt{7}}\right)^2 + \frac{3}{7} \geq \frac{3}{7}.\end{aligned}$$

т.е. $\overline{ED} \geq \sqrt{\frac{3}{7}}$.

Ќе докажеме дека во последното неравенство се достигнува знак за равенство. Јасно, $\overline{ED} = \sqrt{\frac{3}{7}}$ ако и само ако $\frac{\sqrt{7}}{2}x - \frac{2}{\sqrt{7}} = 0$, т.е. ако и

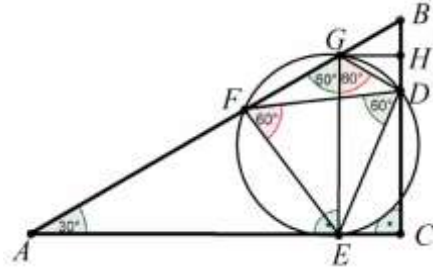
само ако $x = \frac{4}{7}$. Ќе докажеме дека за секоја вредност $\overline{BD} = x \in (0,1)$

постои рамностран $\triangle FDE$. Нека B е точка на страната AC таква што $\overline{EC} = \frac{x\sqrt{3}}{2}$ и нека G е точка на страната AB таква што $\overline{BG} = x$. Тогаш

$\triangle BGD$ е рамностран и ако GH е неговата висина, важи $\overline{GH} = \frac{x\sqrt{3}}{2}$.

Според тоа, $\overline{EC} = \overline{GH}$, т.е. четириаголникот $ECHG$ е правоаголник.

Од $\triangle AEG$ следува $\angle FGE = 60^\circ$, па затоа $\angle EGD = 60^\circ$. Сега на страната AB да земеме точка F таква што $\angle EDF = 60^\circ$. Тогаш $\angle EDF = \angle FGE$, па затоа точките F, E, D, G лежат на иста кружница, од што



следува дека $\angle EGD = \angle EFD = 60^\circ$. Според тоа, $\angle EDF = \angle EFD = 60^\circ$, па затоа $\triangle DEF$ е рамнострани.

46. На краците AC и BC на рамнокракиот $\triangle ABC$ земени се точките A_1 и B_1 , соодветно така што $4\overline{AA_1} \cdot \overline{BB_1} = \overline{AB}^2$. Докажи, дека симетралите на $\angle AA_1B_1$ и $\angle BB_1A_1$ се сечат на правата AB .

Решение. Нека M е средината на AB . Тогаш равенството од условот на задачата можеме да го запишеме во видот $\frac{\overline{AM}}{\overline{BB_1}} = \frac{\overline{AA_1}}{\overline{BM}}$. Според тоа, $\triangle AMA_1$

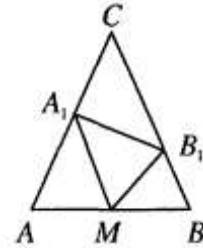
$\sim \triangle BB_1M$. Значи, $\frac{\overline{AA_1}}{\overline{BM}} = \frac{\overline{MA_1}}{\overline{B_1M}}$, т.е. $\frac{\overline{AA_1}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{MA_1}}{\overline{MB_1}}$. Освен

тоа, $\angle AA_1M = \angle BMB_1$, па затоа

$$\angle A_1MB_1 = 180^\circ - \angle AMA_1 - \angle BMB_1 = 180^\circ - \angle AMA_1 - \angle AA_1M = \angle A_1AM.$$

Според тоа, $\triangle AMA_1 \sim \triangle MB_1A_1$, од каде следува $\angle AA_1M = \angle MA_1B_1$. Конечно, од $\triangle BB_1M \sim \triangle AMA_1 \sim \triangle MB_1A_1$ следува дека $\angle BB_1M = \angle MB_1A_1$.

Значи, $M \in AB$ е пресечната точка на симетралите на $\angle AA_1B_1$ и $\angle BB_1A_1$.



47. Даден е рамнокрак триаголник ABC ($\overline{AC} = \overline{BC}$) со $\angle ACB = 20^\circ$. Симетралата на страната BC ја сече AC во точката Q , а точката P од страната BC е таква што $\overline{BP} = \overline{BA}$. Определи ја големината на $\angle PBQ$.

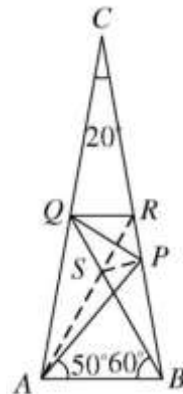
Решение. Од $\overline{QB} = \overline{QC}$, следува $\angle QBC = \angle QCB = 20^\circ$. Според тоа,

$\angle QBA = 60^\circ$. Повлекуваме $QR \parallel AB$, $R \in BC$. Тогаш четириаголникот $ABRQ$ е рамнокрак трапез

со $\angle QBA = \angle RQB = 60^\circ$. Ако $AR \cap BQ = S$, тогаш триаголниците ABS и SQR се рамнострани и

$\overline{AS} = \overline{AB} = \overline{BS}$ и $\overline{SQ} = \overline{QR} = \overline{RS}$. Бидејќи $\overline{BP} = \overline{BA}$ добиваме дека $\overline{PA} = \overline{AB} = \overline{BS}$. Според тоа, триаголникот PSB е рамнокрак, па затоа

$$\angle BSP = \angle BPS = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle PBS) = 80^\circ \text{ и}$$



$$\angle ASP = 360^\circ - (\angle BPS + \angle ABP + \angle SAB) = 140^\circ.$$

Оттука $\angle PSR = 180^\circ - \angle ASP = 40^\circ = \angle PRS$, т.е. $\overline{PS} = \overline{PR}$. Од $\overline{SQ} = \overline{QR}$ и $\overline{PS} = \overline{PR}$ следува дека $\triangle SPQ \cong \triangle RPQ$ и

$$\angle PQB = \angle SQP = \frac{1}{2} \angle PQB = \frac{1}{2} \cdot 60^\circ = 30^\circ.$$

48. Даден е $\triangle ABC$ таков што $\angle B > 45^\circ$, $\angle A > 45^\circ$. Во надворешноста на триаголникот се конструирани рамнокраки правоаголни триаголници DCB и ECA со прави агли во темето C . Точката P се наоѓа во внатрешноста на $\triangle ABC$ и притоа $\triangle ABP$ е рамнокрак правоаголен со прав агол во темето P . Докажи, дека $\triangle DEP$ е рамнокрак правоаголен.

Решение. Нека M е средината на отсечката AB . Да ги разгледаме триаголниците EAP и CAM . Имаме

$$\angle EAP = \angle CAP + 45^\circ = \angle CAM$$

и

$$\overline{EA} : \overline{AC} = \sqrt{2} = \overline{AP} : \overline{AM},$$

па затоа $\triangle EAP \sim \triangle CAM$. Според тоа,

$$\overline{EP} = \sqrt{2} \overline{CM} \text{ и } \angle EPA = \angle CMA.$$

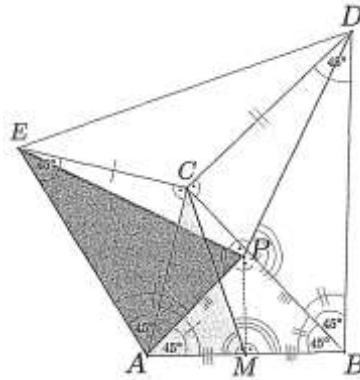
Аналогно се докажува дека $\triangle DPB \sim \triangle CMB$. Според тоа,

$$\overline{DP} = \sqrt{2} \overline{CM} \text{ и } \angle DPB = \angle CMB.$$

Според тоа, $\triangle DPE$ е рамнокрак. Сега, лесно следува дека

$$\begin{aligned} \angle DPE &= 360^\circ - \angle DPB - \angle EPA - \angle APB \\ &= 360^\circ - \angle CMA - \angle CMB - 90^\circ \\ &= 270^\circ - (\angle CMA + \angle CMB) \\ &= 270^\circ - 180^\circ = 90^\circ, \end{aligned}$$

со што тврдењетое докажано.

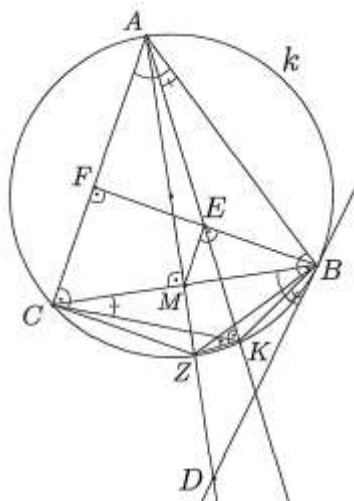


49. Нека ABC е рамнокрак триаголник таков што $\overline{AB} = \overline{AC}$ и $\frac{\angle A}{2} < \angle B$.

На продолжението на висината AM се избрани точки D и Z такви што $\angle CBD = \angle A$ и $\angle ZBA = 90^\circ$. Точката E е подножје на нормалата повлечена од точката M кон висината BF , а точката K е подножје

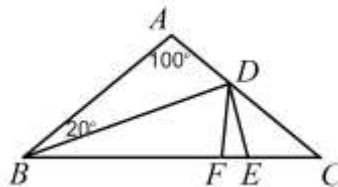
на нормалата повлечена од точката Z на правата AE . Докажи, дека $\angle KZB = \angle KBD = \angle KCB$.

Решение. Од симетријата на рамнокракиот триаголник во однос на висината AM следува $\angle ZCA = \angle ZBA = 90^\circ$. Сега, од $\angle ZKA = \angle ZBA = \angle ZCA = 90^\circ$ следува дека точките A, B, K, Z и C припаѓаат на опишаната кружница k околу $\triangle ABC$. Затоа важи $\angle KCB = \angle KZB$, како периферни агли над тетивата BK . Од условот $\angle CBD = \angle A$ следува дека BD е тангентата на кружницата k . Конечно, од еднаквоста на тангентниот и соодветниот периферен агол следува $\angle KBD = \angle KCB = \angle KZB$, што и требаше да се докаже.



50. Нека ABC е рамнокрак триаголник и $\angle BAC = 100^\circ$. Нека D е пресечната точка на симетралата на $\angle ABC$ и страната AC . Докажи, дека $\overline{AD} + \overline{DB} = \overline{BC}$.

Решение. Нека E е точка на BC таква што $\overline{BE} = \overline{BD}$. Тогаш $\triangle BED$ е рамнокрак со агол меѓу краците 20° , па затоа аглите при основата му се 80° . Аголот $\angle BED$ е надворешен за $\triangle ECD$, па затоа

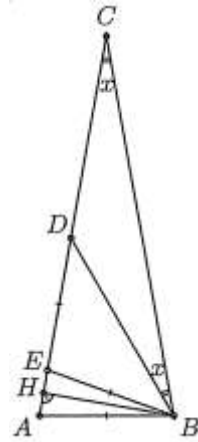


$80^\circ = \angle BED = \angle ECD + \angle CDE$. Сега, бидејќи $\angle ECD = 40^\circ$ добиваме $\angle CDE = 40^\circ$, па затоа $\triangle ECD$ е рамнокрак и важи $\overline{DE} = \overline{EC}$. Нека F е точка на BC таква што $\overline{BF} = \overline{BA}$. Тогаш триаголниците ABD и FBD се складни (признак САС). Оттука следува дека $\angle BDF = \angle BDA = 60^\circ$ и $\overline{AD} = \overline{DF}$. Но, тогаш $\angle FDC = 60^\circ$. Од друга страна $\angle CFD$ е надворешен за $\triangle BFD$, па затоа $\angle CFD = 80^\circ$. Според тоа, $\triangle CDF$ е рамнокрак, па затоа $\overline{AD} = \overline{DF} = \overline{DE} = \overline{EC}$. Затоа $\overline{AD} + \overline{DB} = \overline{EC} + \overline{BE} = \overline{BC}$.

51. Отсечката BH е висина во рамнокракиот $\triangle ABC$, $\overline{AC} = \overline{BC}$. Симе-

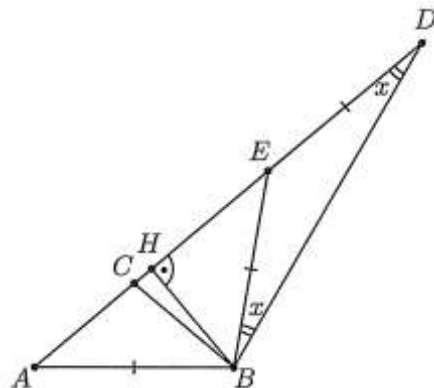
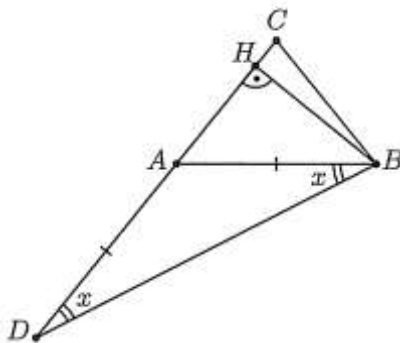
тралата на страната BC ја сече правата AC во точката D и $\overline{DH} = \overline{HA} + \overline{AB}$. Определи ги можните вредности на $\angle BAC$.

Решение. *Прв случај.* Ако D лежи на отсечката AC , тогаш $\triangle ABC$ е остроаголен и H лежи на отсечката AC . Од условот следува, дека H е меѓу A и D . Конструираме точка E на отсечката DH таква што $\overline{AH} = \overline{HE}$, што значи $\overline{BA} = \overline{BE}$. Имаме $\triangle AHB \cong \triangle EHB$, па затоа $\overline{BA} = \overline{BE} = \overline{DE}$. Од симетралата имаме $\overline{BD} = \overline{CD}$. Нека $\angle ACB = \angle DBC = x$. Тогаш $\angle DBE = \angle BDE = 2x$ (како надворешен за $\triangle BCD$) и $\angle BAH = \angle BEH = 4x$ (како надворешен за $\triangle BDE$). За збирот на аглиите во $\triangle ABC$ добиваме $4x + 4x + x = 180^\circ$, од каде следува $\angle BAC = 4x = 80^\circ$.



Втор случај. Ако D лежи на полуправата CA после точката A , тогаш $\triangle ABC$ е остроаголен и H лежи на отсечката AC . Од условот следува дека $\overline{AD} = \overline{AB}$. Нека $\angle ADB = \angle ABD = x$. Тогаш $\angle ABC = \angle BAC = 2x$ (како надворешен за $\triangle ABD$) и $\angle DCB = \angle DBC = 3x$. За збирот на аглиите во $\triangle ABC$ добиваме $2x + 2x + 3x = 180^\circ$, од каде следува $\angle BAC = 2x = \frac{360^\circ}{7}$.

Трет случај. Ако D лежи на полуправата AC после точката C , тогаш $\triangle ABC$ е тапоаголен и H лежи на истата полуправа. Од условот следува дека H е меѓу A и D . На отсечката AD конструираме точка E таква што $\overline{AH} = \overline{HE}$, што значи $\overline{BA} = \overline{BE}$. Имаме $\triangle AHB \cong \triangle EHB$, па затоа $\overline{BA} = \overline{BE} = \overline{DE}$. Нека $\angle DBE = \angle BDE = x$. Тогаш $\angle ABC = \angle BAC = \angle BEA = 2x$



(како надворешен за $\triangle BDE$) и $\angle CBD = \angle BCD = 4x$ (како надворешен за $\triangle ABC$ (од симетралата имаме $\overline{BD} = \overline{CD}$)). За збирот на аглиите на $\triangle BCD$ добиваме $4x + 4x + x = 180^\circ$, од каде следува $\angle BAC = 2x = 40^\circ$.

52. Даден е правоаголен $\triangle ABC$ со прав агол во темето C . Нека M е средината на BC , а D и E се подножјата на нормалите повлечени од темето C кон AB и AM , соодветно. Ако $\overline{BE} = 2\overline{DE}$, определи го $\angle ABC$.

Решение. Нека $\angle ABC = \beta$. Бидејќи точките A, D, E и C лежат на кружницата со дијаметар AC заклучуваме дека

$$\angle AED = \angle ACD = \angle ABC = \beta.$$

Според тоа, $\angle DEM = 180^\circ - \beta$,

што значи дека четириаголникот $DBME$ е тетивен. Освен

тоа, DM е тежишна линија во правоаголникот $\triangle BDC$, па затоа

$$\angle BEM = \angle BDM = \angle DBM = \beta.$$

Според тоа,

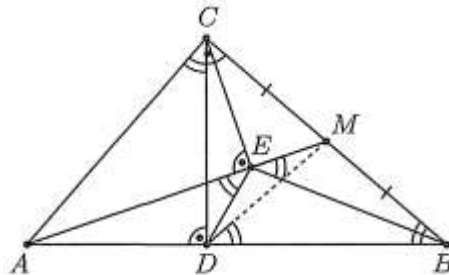
$$\angle DEC = \angle CEB = 90^\circ + \beta.$$

Од друга страна, $\angle CDE = \angle CAE = \angle BCE$, па затоа $\triangle CDE \sim \triangle BCE$.

Значи,

$$2 = \frac{\overline{BE}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{CE}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{DE}} = \left(\frac{\overline{BC}}{\overline{CD}}\right)^2,$$

т.е. $\overline{BC} = \sqrt{2}\overline{CD}$, па затоа $\beta = 45^\circ$.



53. Даден е $\triangle ABC$, во кој $\angle ACB = 60^\circ$ и $\overline{BC} > \overline{CA}$. Точките A_1 и B_1 , соодветно на страните BC и CA , се такви, што $AA_1 \perp BC$ и $BB_1 \perp CA$. Точката P е пресечната точка на правите A_1B_1 и AB , и важи $\angle A_1PB = 30^\circ$.

а) Определи ги аглиите на $\triangle ABC$.

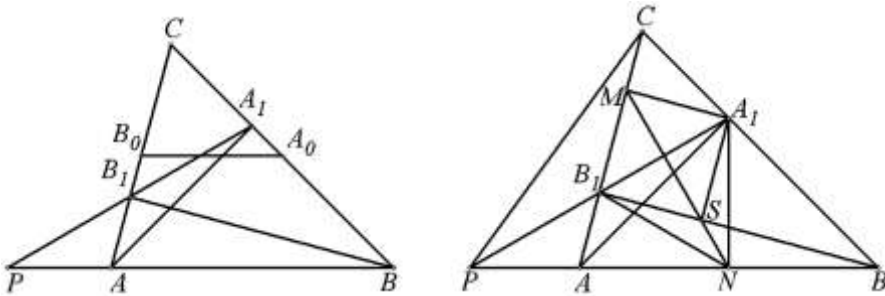
б) Точките M и N , соодветно на страните CA и AB , се такви, што $A_1M \perp CA$ и $A_1N \perp AB$. Определи го $\angle SA_1N$, ако S е пресечната точка на правите MN и BB_1 .

Решение. а) Од условот следува, дека $\angle CAA_1 = \angle CBB_1 = 30^\circ$. Следствено $\overline{CA_1} = \frac{1}{2}\overline{CA}$ и $\overline{CB_1} = \frac{1}{2}\overline{CB}$. Нека A_0 и B_0 се средините соодветно на страните BC и CA . Тогаш триаголниците A_1B_1C и B_0A_0C се складни, па затоа $\angle CB_1A_1 = \angle ABC$.

Бидејќи $\angle BAC$ е надворешен за $\triangle PAB_1$, важи

$$\angle BAC = \angle APB_1 + \angle PB_1A = 30^\circ + \angle CB_1A_1 = 30^\circ + \angle ABC.$$

Следствено $\angle BAC - \angle ABC = 30^\circ$. Освен тоа от условот следва, дека $\angle BAC + \angle ABC = 120^\circ$. Сега лесно наоѓаме, дека $\angle BAC = 75^\circ$ и $\angle ABC = 45^\circ$.



б) Бидејќи $\angle CB_1A_1 = \angle ABC = 45^\circ$, заклучуваме дека правоаголниот триаголник A_1B_1M е рамнокрак, т.е. $\overline{A_1M} = \overline{B_1M}$. Правоаголниот триаголник ABA_1 е исто така рамнокрак и заклучуваме, дека N е средина на AB . Правоаголните триаголници ABA_1 и ABB_1 имаат заедничка хипотенуза и затоа тежишните линии кон неа се еднакви, т.е. $\overline{A_1N} = \overline{B_1N}$. Но тогаш MN е симетрала на отсечката A_1B_1 . Бидејќи S лежи на симетралата, важи $\overline{A_1S} = \overline{B_1S}$. Добиваме, дека $\triangle B_1NS \cong \triangle A_1NS$, од каде следува $\angle SA_1N = \angle SB_1N$. Останува да се заклучи, дека $\angle SB_1N = \angle NBB_1 = 15^\circ$.

54. Отсечките AD и BE се висини во $\triangle ABC$. Правата низ точката D паралелна со AC ја сече правата AB во точка P . Правата низ точката E паралелна со BC ја сече правата AB во точката Q . Докажи, дека точките D, E, P, Q лежат на една кружница.

Решение. Точките D, E лежат на кружница со дијаметар AB . Во зависност од аглиите на $\triangle ABC$ можни се неколку цртежи (направи ги!).

Ако аголот C е тап, тогаш $\angle QPD = \angle ABC = \angle EDC = 180^\circ - \angle QED$,

што значи дека четириаголникот $QPDE$ е тетивен. Ако аголот A е тап, тогаш $\angle QPD = \angle BAE = \angle BDE = \angle QED$, што значи дека четириаголникот $QPDE$ е тетивен. Ако аголот B е тап или $\triangle ABC$ нема тапи агли, тогаш $\angle QPD = \angle BAC = \angle EDC = \angle QED$, па затоа точките D, E, P, Q лежат на една кружница.

55. Даден е $\triangle ABC$, $\overline{AC} \neq \overline{BC}$. Нека I е центарот на впишаната кружница k во $\triangle ABC$, а D, E, F се допирните точки на k со страните AB, BC, AC , соодветно.

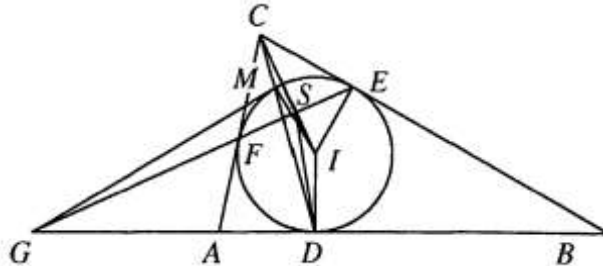
а) Ако $S = CI \cap EF$, докажи дека $\triangle CDI \sim \triangle DSI$.

б) Нека M е втората пресечна точка на k и CD . Тангентата на k во M ја сече правата AB во точката G . Докажи, дека $GS \perp CI$.

Решение. а) Од правоаголникот $\triangle CEI$ имаме

$$\overline{DI}^2 = \overline{EI}^2 = \overline{SI} \cdot \overline{CI},$$

па затоа $\frac{\overline{DI}}{\overline{SI}} = \frac{\overline{CI}}{\overline{DI}}$, што значи $\triangle CDI \sim \triangle DSI$.



б) Четириаголникот $DIMG$ е тетивен. Од а) следува $\angle ISD = \angle IDC = \angle IMD$, што значи дека S лежи на опишаната кружница околу $DIMG$. Сега очигледно $\angle GSI = \angle GMI = 90^\circ$.

56. Во кружница k е впишан $\triangle ABC$ со $\angle ACB > 90^\circ$. Нека BD е дијаметар на k . Кружницата k_1 со центар D и радиус DC по вторпат ја сече k во точката E и ја сече AB во точката G . Ако F е пресечната точка на GE и BD , докажи дека $\angle DCG = \angle EFD$.

Решение. Бидејќи $\angle ACB > 90^\circ$, точките G и E се во различни полурамнини во однос на дијаметарот BD . Тогаш $\angle EFD$ е надворешен агол за четириаголникот $CDFG$. Ако $\angle DCG = \angle EFD$, тогаш

$$\angle DCG + \angle DFG = 180^\circ,$$

т.е. доволно е да докажеме дека четириаголникот $CDFG$ е тетивен. Од друга страна, $CE \perp BD$ и D е центар на k_1 . Затоа

$$\angle CDF = \frac{1}{2} CGE_{k_1}$$

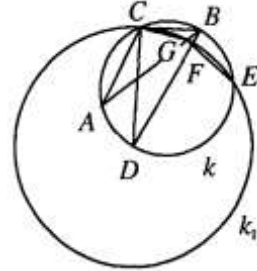
(како централен агол), $\angle CGF = \angle CGE$ е впишан во k_1 и

$$\angle CGF = \frac{1}{2}(360^\circ - CGE_{k_1}).$$

Тогаш

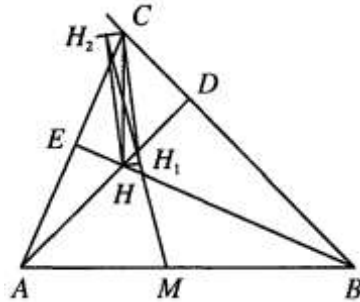
$$\angle CDF + \angle CGF = 180^\circ,$$

т.е. $CDFG$ е тетивен, од каде следува дека $\angle DCG = \angle EFD$.



57. Даден е $\triangle ABC$ со ортоцентар H . Нека M е средината на AB , а H_1 и H_2 се проекциите на H врз симетралата на внатрешниот и надворешниот агол при темето C , соодветно. Докажи, дека точките M , H_1 и H_2 лежат на една права.

Решение. Нека D и E се подножјата на висините во $\triangle ABC$ повлечени од темињата A и B , соодветно (цртеж десно). Четириаголникот $HDCE$ е тетивен и е впишан во кружница со дијаметар CH . Јасно, точките H_1 и H_2 лежат на истата кружница. Понатаму, овие точки се наоѓаат на симетралите на внатрешниот и надворешниот агол при темето C , па затоа тие се средини на двата лаци DE .



Според тоа, правата H_1H_2 е симетрала на отсечката DE .

Од друга страна, четириаголникот $ABDE$ е тетивен и е впишан во кружница со дијаметар AB . Тоа значи дека симетралата H_1H_2 на тетивата DE минува низ центарот на кружницата опишана околу четириаголникот $ABDE$, а тоа е точката M , што значи дека точките M , H_1 и H_2 лежат на една права.

58. На страните BC, CA и AB на рамнокрак $\triangle ABC$ ($\overline{AB} = \overline{BC}$) земени се точки A_1, B_1 и C_1 такви што $\angle BC_1A_1 = \angle CA_1B_1 = \angle BAC$. Отсечките

BB_1 и CC_1 се сечат во точка P . Докажи, дека четириаголниците ABA_1B_1 и AB_1PC_1 се тетивни.

Решение. Од $\angle BC_1A_1 = \angle BAC$ следува дека $A_1C_1 \parallel AC$ и затоа четириаголникот ACA_1C_1 е рамнокрак трапез (направи цртеж). Ако $\angle CAB = \gamma$, тогаш $\angle ABC = 180^\circ - 2\gamma$ и $\angle AB_1A_1 = 2\gamma$ како надворешен за $\triangle A_1B_1C$. Според тоа, четириаголникот ABA_1B_1 е тетивен. Бидејќи AA_1 и CC_1 се дијагонали во рамнокрак трапез, добиваме дека $\angle C_1CA_1 = \angle A_1AC_1 = \angle BB_1A_1$. Отсечката PA_1 се гледа под ист агол од точките B_1 и C , што значи дека четириаголникот A_1PB_1C е тетивен, па затоа $\angle B_1PC = \angle B_1A_1C$. Значи, $\angle B_1PC + \angle B_1AC_1 = 180^\circ$, од каде следува дека четириаголникот AB_1PC_1 е тетивен.

59. Даден е остроаголен $\triangle ABC$ со центар на опишаната кружница O . Точката $H \in AB$ е таква, што $CH \perp AB$. Точката P лежи на правата CH и важи $\frac{CH}{HP} = \frac{1}{3}$, при што H е меѓу P и C . Точката $Q \in PB$ е таква што четириаголникот $PACQ$ е тетивен. Докажи дека правата AQ ја полови отсечката CO .

Решение. Нека M е средината на AC и нека точката N е таква што A е средина на NC (направи цртеж). Триаголниците BHC и OMC се слични. Освен тоа, $\frac{CH}{HP} = \frac{1}{3} = \frac{CM}{MN}$, па затоа $\triangle BCP \sim \triangle OCN$. Оттука добиваме $\angle QAC = \angle QPC = \angle ONC$ и затоа $AQ \parallel ON$. Сега AQ е средна линија за $\triangle CON$, од каде следува дека AQ ја полови CO .

60. Даден е рамнокрак триаголник ABC , $\overline{AC} = \overline{BC}$. Нека k е кружница со центар во C и радиус помал од висината CH , $H \in AB$ на $\triangle ABC$. Низ точките A и B повлекуваме тангенти на k така што допирните точки P и Q се наоѓаат во иста полурамнина во однос на правата CH . Докажи, дека точките P, Q и H лежат на една права.

Решение. Од $\overline{CP} = \overline{CQ}$, $\overline{CA} = \overline{CB}$ и $\angle APC = \angle BQC = 90^\circ$, следува $\triangle APC \cong \triangle BQC$. Според тоа, $\angle CAP = \angle CBQ$, што значи дека ако пресечната точка на правите AP и BQ е T , тогаш околу четириаголникот $ABTC$ може да се опише кружница. Оттука следува дека $\angle BAC =$

-

107

Нека I_A, I_B, I_C соодветно се центрите на впишаните кружници во триаголниците $AB_1C_1, A_1BC_1, A_1B_1C$. Докажи дека центарот на кружницата опишана околу $\triangle I_AI_BI_C$ се совпаѓа со центарот на кружницата впишана во $\triangle ABC$.

Решение. Нека I е центарот на кружницата впишана во $\triangle ABC$, а A_0, B_0 и C_0 се нејзините допирни точки соодветно до страните BC, CA и AB . Ќе сметаме дека точката A_1 лежи на отсечката A_0B . Да забележиме дека

$$\overline{CA_0} + \overline{AC_0} = \overline{CB_0} + \overline{AB_0} = \overline{CA}.$$

Од условот следува, дека $\overline{CA_1} + \overline{AC_1} = \overline{CB_1} + \overline{AB_1} = \overline{CA}$, од каде добиваме $\overline{CA_0} - \overline{CA_1} = \overline{AC_1} - \overline{AC_0}$, т.е. $\overline{A_0A_1} = \overline{C_0C_1}$ и следствено точката C_1 лежи на отсечката C_0A . Сега правоаголните триаголници IA_0A_1 и IC_0C_1 имаат еднакви по две катети и $\angle IA_1C = \angle IC_1B$. Тоа значи дека четириаголникот BC_1IA_1 е тетивен. Аналогно четириаголниците AB_1IC_1 и CA_1IB_1 се тетивни.

Точките B, I_B и I лежат на една права (симетралата на $\angle A_1BC_1$), па затоа

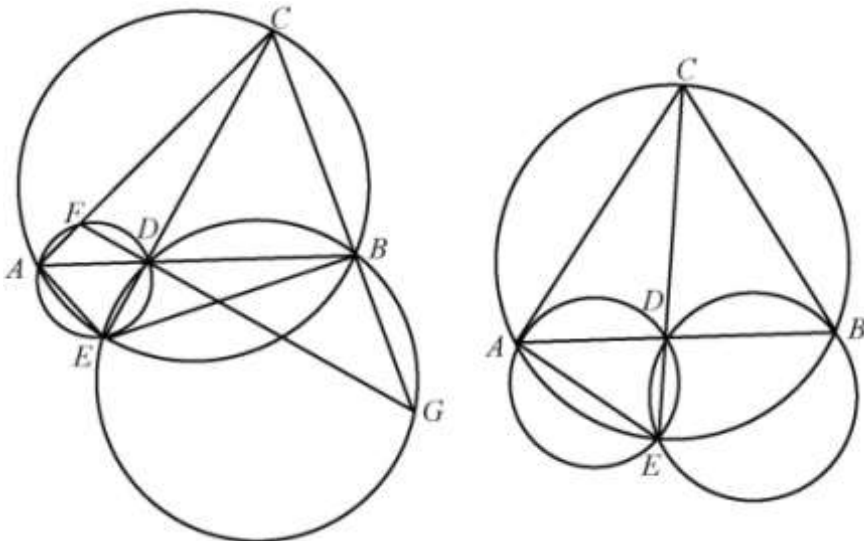
$$\begin{aligned}\angle A_1IBI &= \angle BA_1I_B + \angle A_1BI_B = \angle I_BA_1C_1 + \angle C_1BI \\ &= \angle I_BA_1C_1 + \angle C_1A_1I = \angle I_BA_1I.\end{aligned}$$

Според тоа, $\triangle I_BA_1$ е рамнокрак, т.е. $\overline{II_B} = \overline{IA_1}$. Аналогно добиваме дека $\overline{II_B} = \overline{IC_1} = \overline{II_A} = \overline{IB_1} = \overline{II_C} = \overline{IA_1}$. Според тоа, I е центар на кружницата опишана околу $\triangle I_AI_BI_C$.

63. Даден е $\triangle ABC$ и внатрешна точка D од страната AB . Правата CD ја сече опишаната кружница k на $\triangle ABC$ во точка E . Ако F е втората заедничка точка на правата AC и опишаната кружница k_1 на $\triangle ADE$, а G е пресечната точка на правите FD и BC , докажи, дека точките B, D, E и G лежат на една кружница. Определи го видот на $\triangle ABC$, ако правата AC е тангентата на k_1 .

Решение. Можни се три случаи, кои се разликуваат. Детално ќе го разгледаме првиот случај, кога $\overline{AC} > \overline{BC}$. Вториот случај, кога $\overline{AC} < \overline{BC}$, може да се анализира на сличен начин. Третиот случај $\overline{AC} = \overline{BC}$ е поврзан со последниот дел од условот на задачата. Нека k_2 е опишаната кружница околу $\triangle BDE$. Ќе докажеме, дека $G \in k_2$. Да

забележиме, дека аглиите $\angle AED$ и $\angle AFD$ се наоѓаат на различни страни од тетивата AD на кружницата k_1 , па нивниот збир е 180° . Од друга страна, аглиите $\angle AFD$ и $\angle CFD$ се соседни, од каде следува, дека $\angle AED = \angle CFD$. Во исто време аглиите $\angle AED$ и $\angle ABC$ се перифериски агли на ист лак на кружницата k . Добиваме, дека $\angle CFD = \angle ABC$. Имаме, дека $\angle CFD$ е надворешен за $\triangle ADF$, од каде следува $\angle CFD = \angle CAB + \angle ADF$. Аналогно, $\angle ABC$ е надворешен за $\triangle BDC$ и $\angle ABC = \angle BDG + \angle BGD$. Бидејќи $\angle ADF = \angle BDG$, заклучуваме, дека $\angle CAB = \angle BGD$. Понатаму, аглиите $\angle CAB$ и $\angle BEC$ се над ист лак во кружницата k , па затоа $\angle CAB = \angle BEC$. Така добивме, дека



$\angle BGD = \angle BEC$. Но овие два агли се над ист лак во k_2 , што е можно само ако $G \in k_2$.

Кога $\overline{AC} < \overline{BC}$, точката A е меѓу C и F , а G е на отсечката BC . Аналогно на горните разгледувања можеме да докажеме, дека $\angle DEB + \angle DGB = 180^\circ$ и одново разгледуваните точки лежат на една кружница.

Ако правата AC е тангента на k_1 , тогаш $\angle DAC$ е периферен агол на лакот AD од k_1 . Над истот лак е и $\angle AED$, па затоа $\angle DAC = \angle AED$. Но аглиите $\angle AED$ и $\angle ABC$ се над ист лак во кружницата k и добиваме, де $\angle DAC = \angle ABC$, т.е. $\triangle ABC$ е рамнокрак.

64. Даден е $\triangle ABC$ таков што $\overline{AB} = \overline{AC}$. Нека

(a) M е средина на страната BC , а O е точка на правата AM таква што OB е нормална на AB .

(b) Q е произволна точка на страната BC различна од B и C .

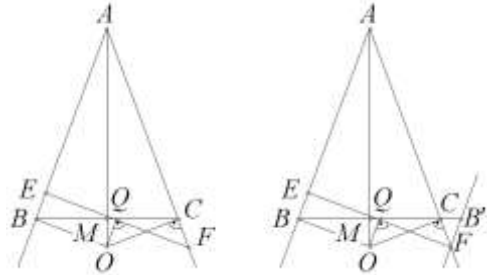
(c) E се наоѓа на правата AB , а F на правата AC и притоа точките E, Q и F се различни и колинеарни.

Докажи, дека OQ е нормална на EF ако и само ако $\overline{QE} = \overline{QF}$.

Решение. Нека $OQ \perp EF$. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $Q \in MC$. Од $\angle OBE + \angle OQE = 180^\circ$ следува дека четириаголникот $OQEB$ е тетивен. Оттука следува дека $\angle OEQ = \angle OBQ = \angle OAB$.

Од друга страна $\angle FCO = \angle FQO = 90^\circ$, што значи дека четириаголникот $OFCQ$ е тетивен. Затоа $\angle QOF = 180^\circ - \angle FCQ = \angle BCA$, од што следува дека $\angle OFQ = 90^\circ - \angle QOF = \angle CAM = \angle QEO$. Според тоа, $\triangle EOF$ е рамнокрак со висина OQ , од што следува $\overline{EQ} = \overline{FQ}$ (цртеж лево).

Нека претпоставиме дека $\overline{EQ} = \overline{FQ}$. Применуваме централна симетрија на B и E во однос на точката Q . Нека B' е сликата на B при оваа централна симетрија. Од $\overline{EQ} = \overline{FQ}$ следува дека F е сликата на E . Од $B'F \parallel BE$ следува дека $\triangle ABC \sim \triangle FB'C$, па затоа $\overline{CF} = \overline{B'F} = \overline{BE}$. Од



$$\angle EBO = 90^\circ = \angle FCO, \overline{OB} = \overline{OC} \text{ и } \overline{BE} = \overline{CF}$$

следува дека $\triangle OEB \cong \triangle OFC$ па затоа $\overline{OE} = \overline{OF}$. Според тоа, $\triangle OFE$ е рамнокрак со основа EF и тежишна линија OQ , па затоа $OQ \perp EF$.

65. Даден е остроаголен $\triangle ABC$ таков што $\overline{AB} \neq \overline{AC}$. Кружницата со дијаметар BC ги сече страните AB и AC во точките M и N соодветно. Со O да ја означиме средината на страната BC . Симетралите на аглиите $\angle BAC$ и $\angle MON$ се сечат во точка R . Докажи, дека кружниците опишани околу $\triangle BMR$ и $\triangle CNR$ се сечат во точка која припаѓа

на страната BC .

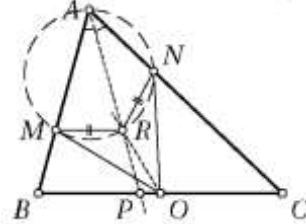
Решение. Од $\overline{OM} = \overline{ON}$ следува $\overline{RM} = \overline{RN}$. Бидејќи $\triangle ANM \sim \triangle ABC$ и $\overline{AB} \neq \overline{AC}$ заклучуваме дека $\overline{AM} \neq \overline{AN}$. Според тоа, точката R е пресек на симетралата на $\angle MAN$ и симетралата на отсечката MN , па затоа лежи на кружницата опишана околу $\triangle AMN$.

Нека правите AR и BC се сечат во точката P . Тогаш

$$\angle MAR = \angle MNA = \angle ABP \text{ и}$$

$$\angle NRA = \angle NMA = \angle ACP,$$

што значи дека четириаголниците $RMBP$ и $RNCP$ се тетивни, т.е. P е пресечна точка на кружниците опишани околу $\triangle BMR$ и $\triangle CNR$.



66. Даден е $\triangle ABC$. Нека $BL, L \in AC$ е симетралата на $\angle ABC$, а $AH, H \in BC$ е висината на триаголникот повлечена од темето A . Докажи, дека $\angle AHL = \angle ALB$ ако и само ако $\angle BAC = \angle ACB + 90^\circ$.

Решение. Нека $\angle AHL = \angle ALB = \varphi$ и I е центарот на впишаната кружница во $\triangle ABH$. Тогаш

$$\angle AHI = \frac{1}{2} \angle AHB = 45^\circ \text{ и } \angle AIL = 180^\circ - \angle AIB = 45^\circ.$$

Оттука,

$$\begin{aligned} \angle LAI + \angle LHI &= (180^\circ - \angle ALI - \angle ALI) + (\angle AHL - \angle AHI) \\ &= (180^\circ - \varphi - 45^\circ) + (\varphi + 45^\circ) = 180^\circ. \end{aligned}$$

Според тоа, четириаголникот $AiHL$ е тетивен, па затоа $\varphi = 45^\circ$. Сега имаме

$$\angle BAC = 90^\circ + \angle BAI = 90^\circ + \frac{1}{2}(90^\circ - \angle ABC).$$

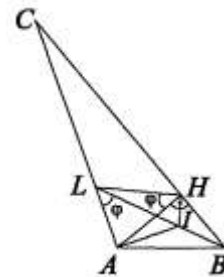
Ако во последното равенство замениме

$$\angle ABC = 180^\circ - \angle BAC - \angle ACB,$$

добиваме

$$\angle BAC = \angle ACB + 90^\circ.$$

За да ја докажеме обратната импликација, ќе ги корисиме стандардните ознаки за аглиите на $\triangle ABC$. Нека $\alpha = \gamma + 90^\circ$. Тогаш лесно се гледа, дека AL е надворешна симетрала на агол за $\triangle ABH$. Според тоа, L е центар на припишаната кружница за $\triangle ABH$ кон страната AH . Сега имаме



$$\angle AHL = \frac{1}{2} \angle CHA = 45^\circ.$$

Од друга страна

$$\begin{aligned} \angle ALB &= 180^\circ - \angle BAL - \angle ABL = 180^\circ - \alpha - \frac{\beta}{2} \\ &= 180^\circ - \alpha - \frac{180^\circ - \alpha - \gamma}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha - \gamma}{2} = 45^\circ. \end{aligned}$$

Конечно, $\angle AHL = \angle ALB$.

67. Даден е $\triangle ABC$ таков што $\angle C = \angle A + 90^\circ$. Нека D точката на продолжението на страната BC преку темето C за која важи $\overline{AC} = \overline{AD}$. Точката E припаѓа на полурамнината определена со правата BC која не ја содржи точката A и е таква што $\angle EBC = \angle A$ и $\angle EDC = \frac{1}{2} \angle A$.

Докажи, дека $\angle CED = \angle ABC$.

Решение. Нека M е средината на CD . Тогаш AM е симетрала на отсечката CD . Нека AM ги сече DE и BE во точките P и Q соодветно. Тогаш $\overline{PE} = \overline{PD}$. Затоа важи

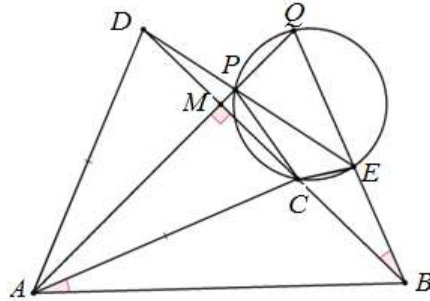
$$\begin{aligned} \angle EBA + \angle CAB &= \angle A + \angle B + \angle A \\ &= 180^\circ - \angle C + \angle A \\ &= 90^\circ. \end{aligned}$$

Тоа значи, дека $AC \perp BE$. Затоа во $\triangle ABQ$ правите BC и AC се висини, што значи дека C е ортоцетар на $\triangle ABQ$ и

$$\angle CQE = \angle CQB = \angle A = \frac{1}{2} \angle A + \frac{1}{2} \angle A = \angle PDC + \angle PCD = \angle CPE.$$

Според тоа, четириаголникот $CPQE$ е тетивен, па затоа

$$\angle CED = \angle CEP = \angle CQP = \angle CQA = \angle ABC.$$

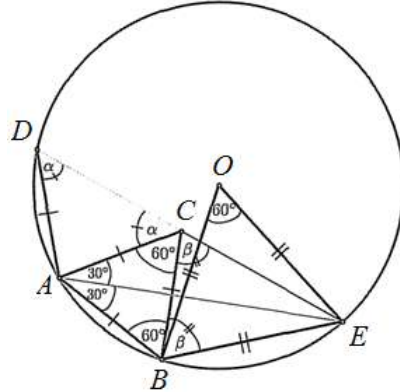


68. Темињата A и B на рамностран $\triangle ABC$ лежат на кружница k со радиус 1, а темето C се наоѓа во внатрешноста на кружницата k . Точката $D \neq B$ лежи на кружницата k и важи $\overline{AD} = \overline{AB}$. Правата DC ја сече кружницата k уште во точката E . Определи ја должината на отсечката CE .

Решение. Од $\overline{AD} = \overline{AB} = \overline{AC}$ следува дека $\triangle ACD$ е рамнокрак. Да означиме $\alpha = \angle ADC = \angle ACD$ и $\beta = \angle BCE$. Тогаш $\alpha + \beta = 120^\circ$. Од

тетивниот четириаголник $ABED$ следува $\angle ABE = 180^\circ - \alpha$. Тогаш $\angle CBE = 120^\circ - \alpha = \beta$, што значи дека $\triangle CBE$ е рамнокрак и четириаголникот $ABEC$ е делтоид.

Оттука следува дека AE е симетрала на $\angle BAC$, бидејќи е дијагонала која го дели делтоидот на два еднакви дела. Затоа $\angle EAB = 30^\circ$, од што следува дека централниот агол над тетивата BE е еднаков на 60° . Според тоа, триаголникот чии темиња се B, E и центарот O на кружницата е рамностран, т.е. $\overline{BE} = 1$.



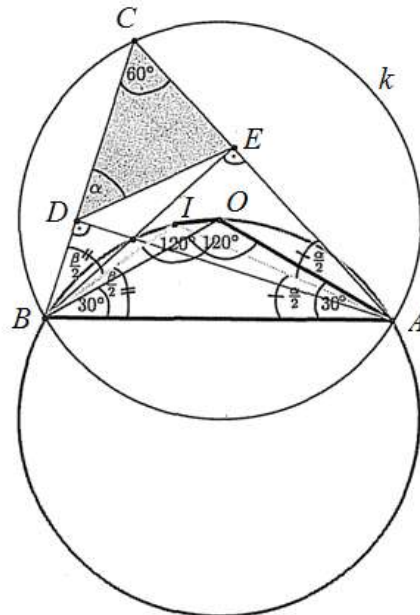
Конечно, од $\triangle CBE$ следува дека $\overline{CE} = \overline{BE} = 1$.

69. Во остроаголниот $\triangle ABC$ точките D и E се подножја на висините повлечени од темињата A и B , соодветно, $\overline{AC} > \overline{BC}$ и $\overline{AB} = 2\overline{DE}$. Со O и I да ги означиме центарите на опишаната и впишаната кружница, соодветно. Определи го $\angle AIO$.

Решение. Од $\angle AEB = \angle ADB = 90^\circ$ следува дека четириаголникот $AEDB$ е тетивен. Затоа, $\angle CDE = \angle BAC = \alpha$ како надворешен агол на тетивен четириаголник. Според тоа, $\triangle CDE$ и $\triangle ABC$ имаат еден заеднички агол и еден пар еднакви агли, па затоа $\triangle DEC \sim \triangle ABC$. Од сличноста следува

$$\overline{CD} : \overline{AC} = \overline{DE} : \overline{AB}$$

и користејќи го условот добиваме $\overline{AC} = 2\overline{CD}$. Според тоа, во правоаголниот $\triangle ACD$ хипотенузата е двапати поголема од катетата, па затоа $\gamma = \angle ACD = 60^\circ$. Оттука непосредно добиваме



$$\angle AOB = 120^\circ \text{ и } \angle ABO = \angle BAO = 30^\circ.$$

Бидејќи $\gamma = 60^\circ$, важи $\alpha + \beta = 120^\circ$, па од $\triangle AIB$ имаме

$$\angle AIB = 180^\circ - (\angle ABI + \angle BAI) = 180^\circ - \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right) = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ.$$

Значи, $\angle AIB = \angle AOB = 120^\circ$, па затоа четириаголникот $AOIB$ е тетивен, при што неговите темиња се во овој распоред бидејќи $\overline{AC} > \overline{BC}$.

Затоа $\angle AIO = \angle ABO = 30^\circ$.

70. (задача на Наполеон). Даден е $\triangle ABC$, над чии страни кон надворешноста на триаголникот се конструирани рамнострани триаголници $\triangle BCP$, $\triangle CAQ$ и $\triangle ABR$. Докажи,

а) $\overline{AP} = \overline{BQ} = \overline{CR}$.

б) Правите AP , BQ и CR се сечат во една точка.

в) Центрите на рамностраниите $\triangle BCP$, $\triangle CAQ$ и $\triangle ABR$ се темиња на рамностран триаголник.

Решение. а) Да ги разгледаме

$$\triangle ACP \text{ и } \triangle BCQ. \text{ Имаме } \overline{AC} = \overline{CQ}$$

и $\overline{CP} = \overline{CQ}$. Понатаму,

$$\begin{aligned} \angle BCQ &= \angle BCA + \angle ACQ \\ &= \angle BCA + 60^\circ \end{aligned}$$

и аналогно $\angle ACP = \angle BCA + 60^\circ$.

Сега од признакот САС следува дека $\triangle ACP \cong \triangle QCB$, па затоа

$$\overline{BQ} = \overline{AP}.$$

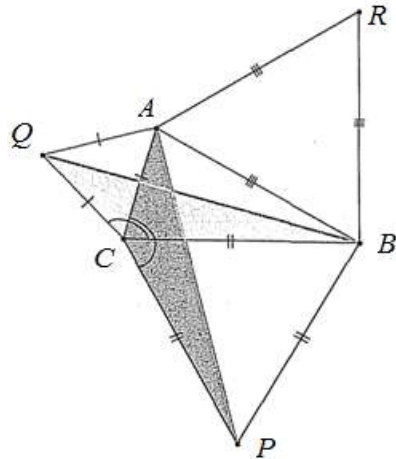
Аналогно, разгледувајќи ги $\triangle ABP$ и $\triangle CBR$, се докажува дека $\overline{AP} = \overline{CR}$, со што тврдењето е докажано.

б) Нека T е пресекот на правите AP и BQ . Треба да докажеме дека точките C, T и R се колинеарни. Од решението под а), т.е. од $\triangle ACP \cong \triangle QCB$, следува дека $\angle APC = \angle QBC$, т.е. $\angle CPT = \angle CBT$.

Според тоа, четириаголникот $BPCT$ е тетивен.

Од тетивноста на четириаголникот следува дека

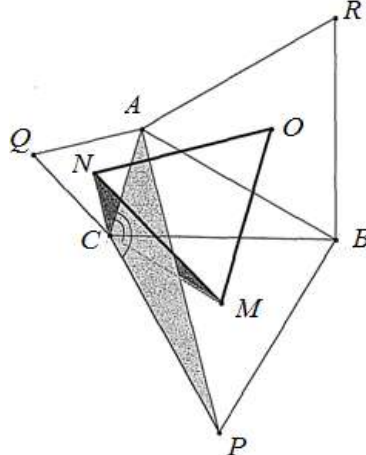
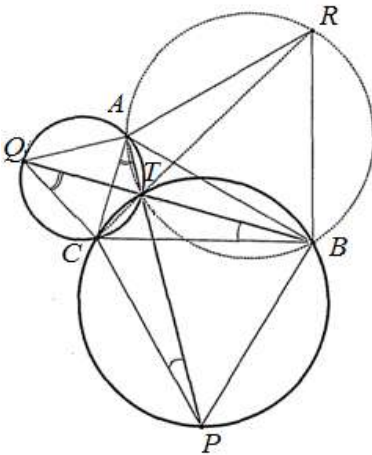
$$\angle BTC = 180^\circ - \angle BCP = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ.$$



Бидејќи точките B, T и Q се колинеарни, добиваме дека

$$\angle CTQ = 180^\circ - \angle BTC = 60^\circ.$$

Од рамностраниот $\triangle ACQ$ имаме $\angle CAQ = 60^\circ$, па затоа $\angle CTQ = \angle CAQ$, т.е. четириаголникот $ATCQ$ е тетивен. Оттука лесно следува дека $\angle ATC = 120^\circ$. Сега, лесно наоѓаме дека



$$\angle ATB = 360^\circ - \angle ATC - \angle BTC = 120^\circ,$$

што значи дека четириаголникот $ARBT$ е тетивен. Но, последното значи дека $\angle ATR = \angle ABR = 60^\circ$. Сега имаме

$$\angle CTR = \angle CTA + \angle ATR = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ$$

од каде следува дека точките C, T и R се колинеарни.

в) Со M, N и P да ги означиме центрите на рамностраните $\triangle BCP$, $\triangle CQA$ и $\triangle ABR$, соодветно. Да ги разгледаме $\triangle ACP$ и $\triangle ABR$. Важи

$$\overline{CM} = \frac{\sqrt{3}}{3} \overline{CP} \text{ и } \overline{NC} = \frac{\sqrt{3}}{3} \overline{AC}. \text{ Затоа } \overline{MC} : \overline{NC} = \overline{PC} : \overline{AC}. \text{ Понатаму,}$$

$$\angle MCN = \angle BCA + 60^\circ \text{ и } \angle ACN = 30^\circ + \angle BCA + 30^\circ = \angle BCA + 60^\circ, \text{ што}$$

$$\text{значи дека } \triangle ACP \sim \triangle NCM. \text{ Аналогно се докажува дека } \overline{MO} = \frac{\sqrt{3}}{3} \overline{CR} \text{ и}$$

$$\overline{NO} = \frac{\sqrt{3}}{3} \overline{BQ}. \text{ Сега од тврдењето под а) следува дека } \overline{MN} = \overline{NO} = \overline{OM},$$

т.е. $\triangle MNO$ е рамностран.

71. Даден е $\triangle ABC$. Кружницата која минува низ темињата B и C и ја допира страната AC во точката S и кружницата која минува низ темињата A и C и ја допира страната BC во точката S по втор пат

се сечат во точката D . Докажи дека правата CD минува низ пресечната точка P на тангентите на опишаната кружница околу $\triangle ABC$ повлечени во темињата A и B .

Решение. Ако $\angle ACB = \gamma$, тогаш од условот следува дека

$$\angle ADC = \angle BDC = 180^\circ - \gamma, \text{ t.e. } \angle ADB = 2\gamma.$$

Тоғаш

$$\angle ADB + \angle APB = 2\gamma + 180^\circ - 2\gamma = 180^\circ,$$

т.е. четириаголникот $APBD$ е тетивен.

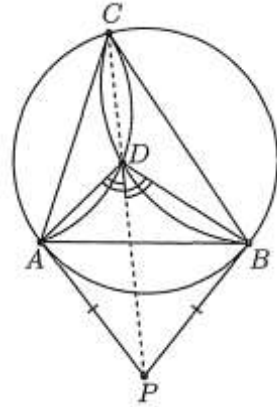
Останува да забележине дека

$$\overline{PA} = \overline{PB}, \text{ т.е. } \angle PBD = \angle PDA = \gamma,$$

па затоа

$$\angle PDB + \angle BDC = \gamma + 180^\circ - \gamma = 180^\circ,$$

што значи дека точките C, D и P лежат на една права.



72. Докажи, дека ако за должините на страните на $\triangle ABC$ е точно равенството $\overline{2AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$, тогаш темето B , центарот на впишаната кружница во $\triangle ABC$ и средините на страните AB и BC лежат на една кружница.

Решение. Ќе ги користиме стандардните ознаки за $\triangle ABC$. Без ограничување на општоста можеме да сметаме дека $a < b < c$. Нека C_0 е средината на AB , A_0 е средината на BC , I е центарот на впишаната кружница во $\triangle ABC$, $IT_1 \perp BC, T_1 \in BC$ и $IT_3 \perp AB, T_3 \in AB$. Бидејќи точките T_1 и T_3 се допирните точки на впишаната кружница за $\triangle ABC$ со страните BC и AB , добиваме дека важи

$$\overline{BT_1} = \overline{BT_3} = s - b = \frac{a+c-b}{2} = \frac{b}{2}.$$

Тогаш

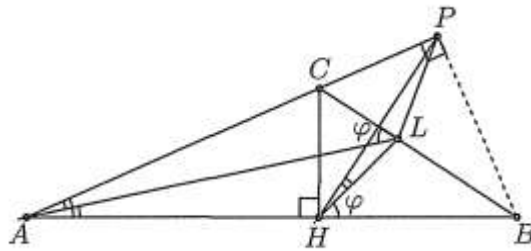
$$\overline{A_0T_1} = \overline{BT_1} - \overline{BA_0} = \frac{b}{2} - \frac{a}{2} = \frac{b-a}{2} \text{ и } \overline{C_0T_3} = \overline{BC_0} - \overline{BT_3} = \frac{c}{2} - \frac{b}{2} = \frac{c-b}{2}.$$

Бидејќи $\frac{b-a}{2} = \frac{c-b}{2}$ следува дека $\triangle IT_1 A_0 \cong \triangle IT_3 C_0$, па затоа $\sphericalangle A_0 IT_1 = \sphericalangle C_0 IT_3$.

Од $\angle BT_1I = \angle BT_3I = 90^\circ$ следува дека четириаголникот IT_1BT_3 е тети-
вен. Тогаш $\angle T_1BT_3 + \angle T_1IT_3 = 180^\circ$, што заедно со $\angle A_0IT_1 = \angle C_0IT_3$

73. Даден е $\triangle ABC$ таков што $\angle ACB > 90^\circ$. Нека CH е висината повлечена од темето C ($H \in AB$), а AL е симетралата на $\angle BAC$ ($L \in BC$). Определи го $\angle ALC$, ако се знае дека $\angle ALC = \angle BHL$.

Решение. Нека $\angle ALC = \angle BHL = \varphi$ и P е подножјето на висината од темето B спуштена на правата AC (P припаѓа на полуправата AC). Четириаголникот $HBPC$ е тетивен и истиот е впишан во кружница со дијаметар BC . Затоа $\angle BHP = \angle BCP$. Тогаш



т.е. четириаголникот $AHLP$ е тетивен. Од друга страна, AL е симетрала на $\angle BAC$ и затоа $L \in s_{PH}$. Можни се два случаи:

Прв случај. Ако $s_{PH} \cap BC = L$, тогаш L е центар на кружницата опишана околу $HBPC$, т.е. $\overline{BL} = \overline{LC}$ и $\overline{AB} = \overline{AC}$, што противречи на $\angle ACB > 90^\circ$.

Втор случај. Ако $s_{PH} \equiv BC$, тогаш четириаголникот $HBPC$ е делтоид и $\angle CHL = \angle CPL = \angle BHL = \varphi$, т.е. $\varphi = 45^\circ$.

74. Во $\triangle ABC$ точките D, E и F се соодветно од страните BC, CA и AB и важи $\overline{AF} = \overline{EF}$ и $\overline{BF} = \overline{DF}$. Докажи, дека ортоцентарот на $\triangle ABC$ лежи на кружницата опишана околу $\triangle CDE$.

Решение. Нека H е ортоцентарот на $\triangle ABC$ и A' и B' се подножјата на висините во $\triangle ABC$ повлечени од темињата A и B , соодветно. Прво ќе го разгледаме случајот кога $E \equiv A'$. Тогаш F е средината M на AB , $D \equiv B'$ и тврдењето е очигледно.

Нека $E \in BA_1$ (во спротивно $D \in BA_1$ и расудувањата се аналогни). Нека симетралата на BE ја сече AB во F и D е симетричната точка

на A во однос на нормалата повлечена од D кон AC (направи цртеж). Тогаш

$$\frac{\overline{B_1D}}{\overline{A_1E}} = \frac{\overline{B_1D}}{\overline{MF}} \cdot \frac{\overline{MF}}{\overline{A_1E}} = \frac{\overline{AB_1}}{\overline{AM}} \cdot \frac{\overline{MB}}{\overline{BA_1}} = \frac{\overline{AB_1}}{\overline{BA_1}} = \frac{\overline{B_1H}}{\overline{HA_1}},$$

(последното следува од $\triangle AB_1H \sim \triangle BA_1H$). Но, тогаш $\triangle B_1DH \sim \triangle A_1EH$, па затоа $\angle B_1DH = \angle A_1EH$, што значи дека четириаголникот $DCEH$ е тетивен, што и требаше да се докаже.

75. Во $\triangle ABC$ е впишана кружница со центар I , која страните BC, CA и AB соодветно во точките D, E и F . Правата ID ја сече отсечката EF во точка K и точката M е средината на отсечката BC . Докажи дека точките A, K и M лежат на една права.

Решение. Повлекуваме права низ K паралелна со BC и нека таа права ги сече AB и AC соодветно во точките P и Q . Од $IK \perp PQ$ следува дека точките I, K, F и P лежат на една кружница (со дијаметар IP). Аналогно I, K, E, Q лежат на една кружница. Според тоа,

$$\angle FIP = \angle FKP = \angle EKQ = \angle EIQ,$$

па затоа $\triangle FIP \cong \triangle EIQ$ и $\overline{IP} = \overline{IQ}$. Добиваме, дека $\triangle IPQ$ е рамнокрак, а IK е висина и тежишна линија во него, т.е. $\overline{KP} = \overline{KQ}$. Последното означува дека K лежи на тежишната линија AM .

76. Впишаната кружница во $\triangle ABC$ ги допира страните BC и AC во точките A_1 и B_1 , соодветно. Правата B_1A_1 ја сече AB во точката X , при што A е меѓу X и B . Определи ги аглите на $\triangle ABC$, ако $\angle CXB = 90^\circ$ и $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC} \cdot \overline{AC}$.

Решение. Нека $Y \in BC$ е таква што $AY \parallel XA_1$. Тогаш $\overline{BY} = a - b$ и од условот $\frac{a}{c} = \frac{c}{a-b}$ следува дека $\triangle ABC \sim \triangle YBA$ (направи цртеж). Според тоа, $\angle AXA_1 = \angle BAY = \gamma$, што значи дека четириаголникот XA_1A_1C е тетивен. Од $\angle XAC = \angle XA_1C = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$ добиваме $\alpha = 90^\circ + \frac{\gamma}{2}$. Освен тоа, $\angle AA_1C = 90^\circ$, т.е. AA_1 е висина и симетрала на агол. Тогаш $\gamma = \beta$ и $90^\circ + \frac{\gamma}{2} + 2\gamma = 180^\circ$, т.е. $\gamma = 36^\circ$. Конечно, аглите на триаголникот се $36^\circ, 36^\circ$ и 108° .

77. Даден е триаголник ABC и права m која ги сече страните AB и AC соодветно во точките D и F , и продолжението на страната BC во точката E така што C е меѓу B и E . Трите прави кои минуваат низ точките A, B, C и се паралелни со m по вторпат ја сечат кружницата опишана околу триаголникот ABC соодветно во точките A_1, B_1, C_1 . Докажи дека правите A_1E, B_1F, C_1D се сечат во една точка.

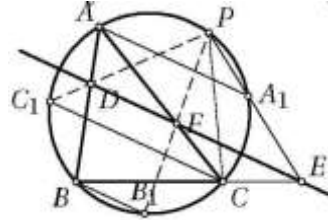
Решение. Нека правата A_1E по вторпат ја сече опишаната кружница околу $\triangle ABC$ во точката P . Тогаш

$$\angle EPC = \angle A_1PC = \angle A_1AC = \angle EFC,$$

па затоа четириаголникот $EPFC$ е тетивен. Сега

$$\angle FPC = \angle FEC = \angle B_1BC = \angle B_1PC,$$

па затоа точката P лежи на правата B_1F . Аналогно P лежи на правата C_1D .



78. Даден е $\triangle ABC$. Припишана кружница кон страната BC има центар J и ги допира правите AB и AC соодветно во точките E и F . Правите BJ и CJ ја сечат правата EF соодветно во точките P и Q и притоа важи $\overline{BC} = 2\overline{PQ}$. Определи ја големината на $\angle BAC$.

Решение. Нека $\angle BAC = \alpha$. Тогаш

$$\angle BJC = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} = \angle BEF,$$

па затоа четириаголникот $BEJQ$ е

тетивен. Но, $\angle BEJ = 90^\circ$, па затоа опишаната кружница околу четириаголникот $BEJQ$ има дијаметар BJ .

Понатаму, $\angle JPQ = \angle EBP = \angle CBP$,

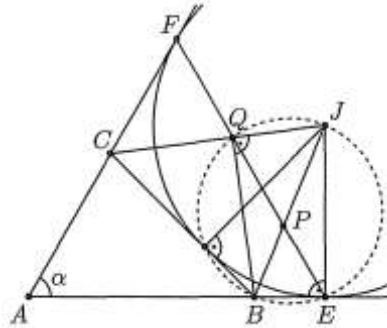
што значи дека четириаголникот $CBPQ$ е тетивен (BC е дијаметар на опишаната околу него кружница).

Според тоа, $\triangle JQP \sim \triangle JBC$, па

затоа $\frac{\overline{JQ}}{\overline{JB}} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{BC}} = \frac{1}{2}$, од што следува дека $\angle JBQ = 30^\circ$. Но, $\angle JQB = 60^\circ$

па затоа

$$\angle BAC = \alpha = 180^\circ - 2\angle BJC = 2\angle JBQ = 60^\circ.$$

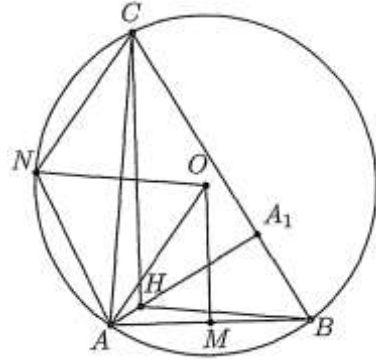


79. Во кружница k е впишан остроаголен $\triangle ABC$ со ортоцентар H . Кружницата опишана околу $\triangle ACH$ има радиус 1 и центарот и лежи на k .

а) Определи ја големината на $\angle ABC$.

б) Определи ја должината на отсечката BH .

Решение. а) Нека $\angle ABC = \beta$ и $N \in k$ е центарот на опишаната кружница околу $\triangle ACH$. Тогаш $\angle ANC = 360^\circ - 2\angle AHC$. Лесно се гледа дека $\angle AHC = 180^\circ - \beta$ и затоа $\angle ANC = 2\beta$. Од друга страна, четириаголникот $ABCN$ е тетивен и затоа $\beta + 2\beta = 180^\circ$, т.е $\beta = 60^\circ$.



б) Нека O е центарот на k , M е средината на AB и A_1 е подножјето на висината повлечена од темето A . Од $\overline{AO} = \overline{ON}$ и $\angle AON = 60^\circ$ (N е средина на лакот AC), следува дека $\triangle AON$ е рамностран и затоа $\overline{OA} = \overline{NA} = 1$. Од правоаголникот $\triangle ABA_1$ имаме $\overline{A_1B} = \frac{\overline{AB}}{2} = \overline{AM}$, како катета сприт агол од 30° . Освен тоа,

$$\angle A_1BH = 90^\circ - \angle ACB = \angle OAM.$$

Според тоа, $\triangle BA_1H \cong \triangle AMO$ и затоа $\overline{BH} = \overline{OA} = 1$.

80. Даден е $\triangle ABC$ со центар на впишаната кружница I . Кружницата која минува низ B и во точката I ја допира правата AI по вторпат ја сече правата AB во точката P и по вторпат ја сече правата BC во точката Q . Правата QI ја сече AC во точката R . Докажи дека $\overline{AR} \cdot \overline{BQ} = \overline{PI}^2$.

Решение. Бидејќи AI е тангентата, BI е симетрала на агол и четириаголникот $PBQI$ е тетивен добиваме

$$\angle AIP = \angle IBP = \angle IBQ = \angle IPQ.$$

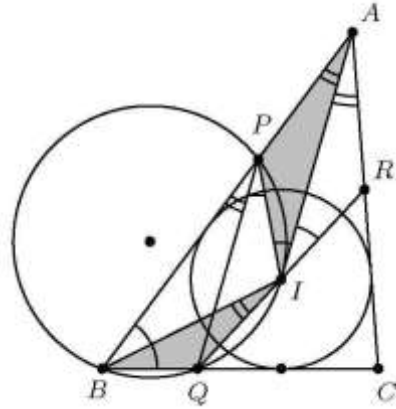
Според тоа, $AI \parallel PQ$, па затоа

$$\angle IAB = \angle QPB = \angle QIB.$$

Од овие равенства и од $\angle AIP = \angle IBQ$ следува дека $\triangle IAP \sim \triangle BIQ$. Оттука

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PI}} = \frac{\overline{QI}}{\overline{BQ}}. \quad (1)$$

Освен тоа $\angle RIA = \angle IPQ = \angle AIP$ и бидејќи AI е симетрала добиваме $\angle RAI = \angle PAI$. Според тоа, $\triangle RAI \cong \triangle PAI$, па затоа $\overline{AR} = \overline{AP}$. Бидејќи I е средина на лакот PQ , важи $\overline{IP} = \overline{QI}$. Сега од равенството (1) добиваме $\frac{\overline{AR}}{\overline{PI}} = \frac{\overline{PI}}{\overline{BQ}}$ односно $\overline{AR} \cdot \overline{BQ} = \overline{PI}^2$.



81. Нека BE и CF се висините на остроаголниот $\triangle ABC$, $\angle BAC = 45^\circ$ и N, M и K се неговиот ортоцентар и средините на BC и AH , соодветно.

а) Докажи, дека четириаголникот $MEKF$ е квадрат.

б) Докажи, дека пресекот на дијагоналите на четириаголникот $MEKF$ се совпаѓа со средината на отсечката OH , каде O е центарот на кружницата опишана околу $\triangle ABC$.

в) Определи ја должината на отсечката EF , ако радиусот на кружницата опишана околу $\triangle ABC$ е еднаков на 1.

Решение. а) Од

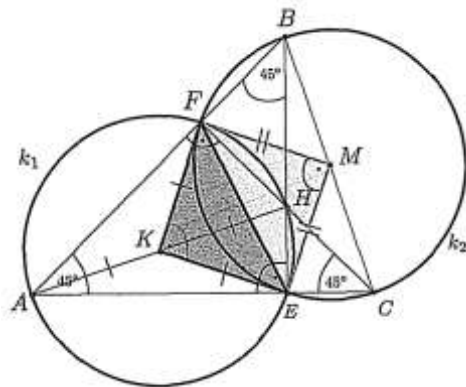
$$\angle AEH = \angle ARH = 90^\circ$$

следува дека четириаголникот $AENH$ е тетивен и AH е дијаметар на неговата опишана кружница k_1 . Значи, центарот K на k_1 е средината на отсечката AH , па затоа

$$\overline{KA} = \overline{KE} = \overline{KH} = \overline{KF} = \frac{\overline{AH}}{2}.$$

Понатаму, бидејќи централниот агол е двапати поголем од периферниот агол над ист лак добиваме

$$\angle EKF = 2\angle EAF = 2\angle BAC = 90^\circ.$$



Од $\angle BEC = \angle BFC = 90^\circ$ следува дека четириаголникот $BFEC$ е тетивен и BC е дијаметар на неговата опишана кружница k_2 . Значи центарот на k_2 е средината M на BC , па затоа

$$\overline{MC} = \overline{ME} = \overline{MF} = \overline{MB} = \frac{\overline{BC}}{2}.$$

Според условот на задачата имаме $\angle BAC = 45^\circ$, па затоа $\angle ACF = 45^\circ$, од каде следува дека

$$\angle EMF = 2\angle ECF = 2\angle ACF = 90^\circ.$$

Според тоа, $\angle EMF = \angle EKF = 90^\circ$, $\overline{EK} = \overline{EF}$ и $\overline{MF} = \overline{ME}$, па затоа триаголниците EKF и EMF се рамнокраки правоаголни триаголници.

Тоа значи дека $\angle KFM = 2 \cdot 45^\circ = \angle KEM$, па затоа четириаголникот $MEKF$ е правоаголник, што значи $\overline{EK} = \overline{FM}$. Конечно, $MEKF$ е правоаголник со еднакви страни, па затоа е квадрат.

б) *Прв начин.* Бидејќи O е центар на опишаната кружница околу $\triangle ABC$ важи $\angle BOC = 2\angle BAC = 90^\circ$, па затоа $O \in k_2$. Затоа $\overline{MO} = \frac{\overline{BC}}{2}$.

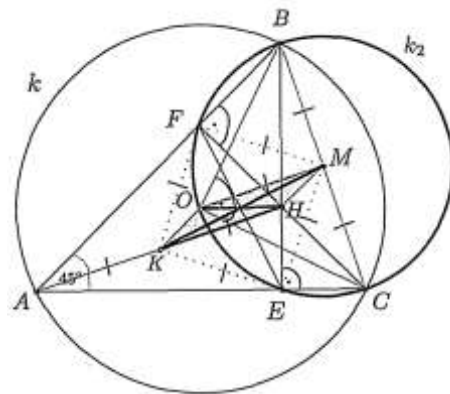
Од решението на задачата под а) следува

$$\overline{KH} = \frac{\overline{BC}}{2} = \overline{MO}.$$

Бидејќи KH лежи на висината повлечена на $\triangle ABC$ повлечена во темето A добиваме $KH \perp BC$, а бидејќи M е средина на BC и O е центар на опишаната кружница околу $\triangle ABC$ важи $MO \perp BC$. Значи, отсечките OM и KH се паралелни и еднакви, па затоа четириаголникот $OMHK$ е паралелограм. Затоа неговите дијагонали OH и MK се преполовуваат. Средината на отсечката MK се совпаѓа со средината на отсечката EF (дијагоналите на квадратот $MEKF$ се преполовуваат), со што тврдењето е докажано.

Затоа неговите дијагонали OH и MK се преполовуваат. Средината на отсечката MK се совпаѓа со средината на отсечката EF (дијагоналите на квадратот $MEKF$ се преполовуваат), со што тврдењето е докажано.

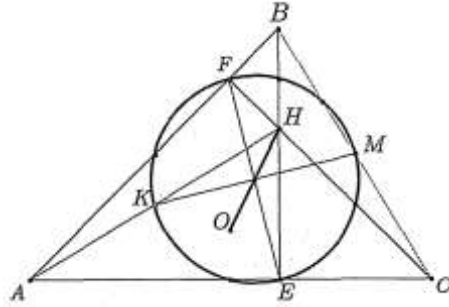
Втор начин. Пресекот на дијагоналите на квадратот $MEKF$ е центар на опишаната кружница околу него. Од начинот на кој се определени точките M, E, K и F , следува дека опишаната кружница околу квадратот $MEKF$ е Ојлеровата кружница за $\triangle ABC$. Но, центарот на



Ојлеровата кружница е во средината на OH , па во нашиот случај се поклопува со пресекот на дијагоналите на четириаголникот $MEKF$.

в) Од досега изнесеното следува $\overline{EF} = \overline{EM} \sqrt{2} = \frac{\overline{BC}}{2} \sqrt{2}$. Бидејќи $\overline{OC} = 1$, од рамнокракиот правоаголен триаголник OMC

следува $\frac{\overline{BC}}{2} = \overline{CM} = \overline{OC} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Значи, $\overline{EF} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2} = 1$.



82. Даден е остроаголен $\triangle ABC$. Кружницата $\omega_1(O_1, R_1)$ минува низ точките B и C и по вторпат ги сече правите AB и AC во точките D и E , соодветно. Нека $\omega_2(O_2, R_2)$ е опишаната кружница околу $\triangle ADE$. Докажи дека должината на отсечката O_1O_2 е еднаква на радиусот на опишаната кружница околу $\triangle ABC$.

Решение. Нека O е центарот на опишаната кружница околу $\triangle ABC$. Точките O и O_1 припаѓаат на симетралата на отсечката BC , па затоа $OO_1 \perp BC$. Од тетивниот четириаголник $BCED$ следува дека $\angle DEA = \angle ABC$. Централниот агол $\angle AO_2D$ на кружницата ω_2 е

$$\angle AO_2D = 2\angle AED = 2\angle ABC$$

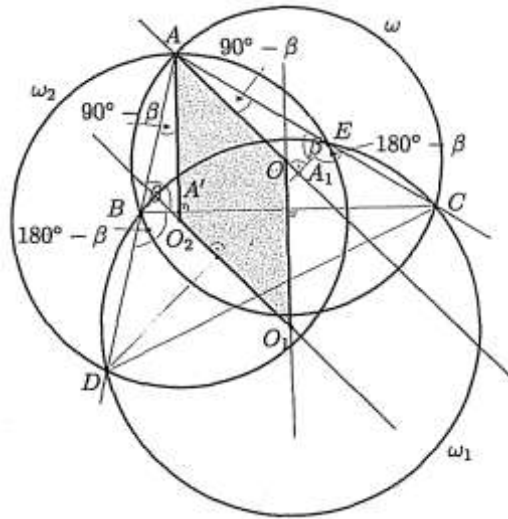
па од рамнокракиот $\triangle AO_2D$ добиваме дека

$$\angle DAO_2 = \angle AO_2D = 90^\circ - \angle ABC.$$

Нека $A' = AO_2 \cap BC$. Од $\angle ABA' = \angle ABC$ и

$$\angle BAA' = \angle BAO_2 = \angle DAO_2 = 90^\circ - \angle ABC$$

следува $\angle AA'B = 90^\circ$ и $AO_2 \perp BC$.



Понатаму, од $AO_2 \perp BC$ и $OO_1 \perp BC$ следува $OO_1 \parallel AO_2$.

Бидејќи точките O_1 и O_2 се наоѓаат на симетралата на отсечката DE добиваме $O_1O_2 \perp DE$. Сега $\angle AOC = 2\angle ABC$, па од рамнокракиот $\triangle AOC$ следува

$$\angle OCA = \angle CAO = 90^\circ - \angle ABC.$$

Нека $A_1 = AO \cap DE$. Имаме

$$\angle A_1EA = \angle DEA = \angle ABC \text{ и } \angle EAA_1 = \angle CAO = 90^\circ - \angle ABC,$$

па затоа $\angle AA_1E = 90^\circ$ и $AO \perp DE$. Сега, од $O_1O_2 \perp DE$ и $AO \perp DE$ следува $O_1O_2 \parallel AO$.

Конечно, од $O_1O_2 \parallel AO$ и $OO_1 \parallel AO_2$ следува дека четириаголникот AO_2O_1O е паралелограм, а оттука следува дека $\overline{O_1O_2} = \overline{AO}$ е радиус на опишаната кружница околу $\triangle ABC$, што и требаше да се докаже.

83. Нека AL и BK се симетралите на агли на разностраниот триаголник ABC ($L \in BC, K \in AC$). Симетралата на отсечката BK ја сече правата AL во точката M . Нека N е точка на правата BK таква што $LN \parallel MK$. Докажи, дека $\overline{LN} = \overline{NA}$.

Решение. Во произволен триаголник симетралата на страна и симетралата на спротивниот агол на таа страна се сечат на опишаната кружница околу тој триаголник, па затоа точката M припаѓа на опишаната кружница околу $\triangle ABK$. Оттука користејќи ја еднаквоста на периферни агли и на агли со паралелни краци добиваме

$$\angle CBK = \angle ABK = \angle AMK = \angle NLA.$$

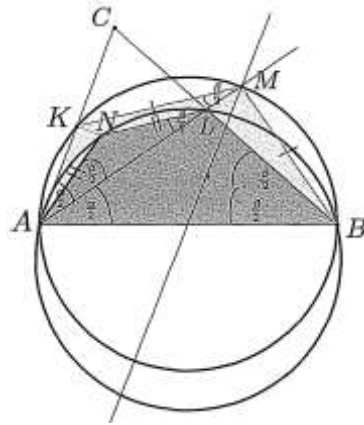
Значи

$$\angle ABN = \angle ABK = \angle ALN,$$

па затоа четириаголникот $ABLN$ е тетивен. Ако искористиме дека AK е симетрала на $\angle ABC$, тогаш од својството на периферните агли следува

$$\angle NAL = \angle NABL = \angle CBK = \angle ABK = \angle NLA.$$

Според тоа, $\triangle ALN$ е рамнокрак, па затоа $\overline{LN} = \overline{NA}$.



84. Даден е $\triangle ABC$. Точката M припаѓа на правата CA (A е меѓу C и M), точката N припаѓа на правата AB (B е меѓу A и N), точката P припаѓа на правата BC (C е меѓу B и P) и важи $\overline{AM} - \overline{BC} = \overline{BN} - \overline{AC} = \overline{CP} - \overline{AB}$. Докажи, дека аглите на триаголникот MNP не зависат од изборот на точките M, N и P .

Решение. Нека α, β, γ се аглите на $\triangle ABC$. Конструираме точка M' на полуправата BA таква што $\overline{AM} = \overline{AM'}$, точка N' на полуправата CB таква што $\overline{BN} = \overline{BN'}$ и точка P' на полуправата AC таква што $\overline{CP} = \overline{CP'}$.

Бидејќи

$$\overline{AM} - \overline{BC} = \overline{BN} - \overline{AC} = \overline{BN'} - \overline{AC}$$

добиваме дека

$$\overline{CM} = \overline{AC} + \overline{AM} = \overline{BC} + \overline{BN'} = \overline{CN'}.$$

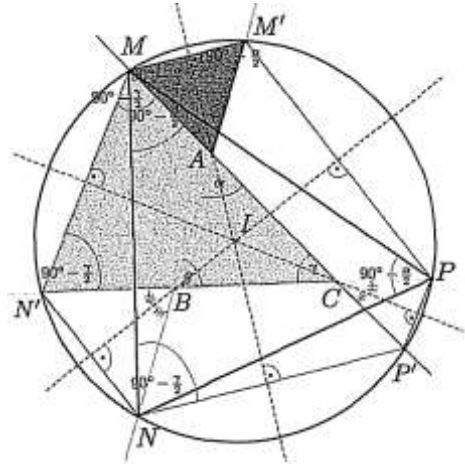
Според тоа, $\triangle MCN'$ е рамнокрак, па затоа симетралата на отсечката MN' е симетрала на $\angle MCN' = \angle ACB$ и поминува низ центарот I на впишаната кружница во $\triangle ABC$. Аналогно се докажува дека I припаѓа на симетралите на отсечките NP' и PM' . Од рамнокракиот $\triangle AMM'$ следува дека симетралата на отсечката MM' е симетрала на $\angle BAC$, па затоа таа минува низ I . Аналогно симетралите на отсечките NN' и PP' минуваат низ I . Според тоа, шестаголникот $M'MN'NP'P$ е тетивен.

Оттука и од рамнокракиот $\triangle BPM'$ следува

$$\angle PMN = \angle PM'N = \angle PM'B = 90^\circ - \frac{\beta}{2}.$$

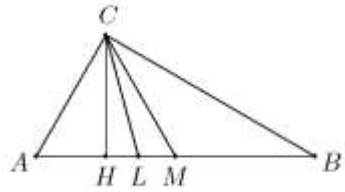
Аналогно се наоѓа $\angle MNP = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$ и $\angle MPN = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$, со што тврдењето е докажано.

85. Нека CH , CL и CM се соодветно висината, симетралата на аголот и тежишната линија повлечени од темето C во $\triangle ABC$ (точките H, L и M се на правата AB). Односите на плоштините на $\triangle HMC$ и $\triangle LMC$ спрема плоштината на $\triangle ABC$ соодветно се $\frac{1}{4}$ и $1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$. Определи ги



аглите на $\triangle ABC$.

Решение. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $\angle BAC \geq \angle ABC$. Тогаш точките A, H, L, M и B на AB се распоредени според овој редослед (цртеж десно). Од $4P_{HMC} = P_{ABC}$ следува дека $4\overline{HM} = \overline{AB}$,



т.е. H е средина на AM . Од $P_{HMC} = (1 - \frac{\sqrt{3}}{2})P_{ABC}$ следува дека $\frac{\overline{LM}}{2\overline{AB}} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$, па затоа $\frac{\overline{AM} - \overline{LM}}{\overline{AM} + \overline{LM}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{3 - \sqrt{3}}$, т.е. $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AL}}{\overline{BL}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Го изразуваме $\overline{CH}^2$ на два начина, преку Питагоровата теорема за $\triangle AHC$ и $\triangle BHC$ и добиваме $\overline{AC}^2 - \frac{\overline{AB}^2}{4} = 3\overline{AC}^2 - \frac{9\overline{AB}^2}{4}$, од каде добиваме $\overline{AB} = 2\overline{AC}$. Тогаш $\overline{AB} = 2\overline{CM}$, што значи дека $\angle ACB = 90^\circ$. Оттука и од $\overline{BC} = \sqrt{3}\overline{AC}$ заклучуваме дека $\angle BAC = 60^\circ$ и $\angle ABC = 30^\circ$. Кога $\angle BAC \leq \angle ABC$, аналогно се добива дека

$$\angle ACB = 90^\circ, \angle BAC = 30^\circ \text{ и } \angle ABC = 60^\circ.$$

86. На страните AB, BC и CA на $\triangle ABC$ се земени точки M, N и P , соодветно. Правата низ M и паралелна на BC , правата низ N и паралелна со AC , како и правата низ P и паралелна со AB се сечат во една точка T . Докажи, дека ако $\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{BN}}{\overline{NC}} = \frac{\overline{CP}}{\overline{PA}}$, тогаш T се совпаѓа со тежиштето на $\triangle ABC$.

Решение. Нека $\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = x, \frac{\overline{BN}}{\overline{NC}} = y$ и $\frac{\overline{CP}}{\overline{PA}} = z, \overline{AB} = c, \overline{BC} = a$ и $\overline{CA} = b$,

h_C е висината во $\triangle ABC$ низ темето C и h_P е должината на нормалата повлечена од точката P кон правата AB . Ќе искористиме дека збирот на плоштините на трапезите $AMTP, BMTN$ и $CNTP$ е еднаков на P_{ABC} . Нека правата NT ја сече AB во точка N_1 , направи цртеж.

Имаме $\frac{\overline{AN_1}}{\overline{BN_1}} = \frac{\overline{CN}}{\overline{NB}} = \frac{1}{y}$ од каде следува дека $\overline{PT} = \overline{AN_1} = \frac{c}{y+1}$. Аналогно,

$$\frac{h_P}{h_C} = \frac{\overline{AP}}{\overline{AC}} = \frac{1}{z+1}, \text{ т.е. } h_P = \frac{h_C}{z+1}. \text{ Освен тоа, од } \frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = x \text{ следува дека}$$

$$\overline{AM} = \frac{cx}{x+1}. \text{ Тогаш}$$

$$P_{AMTP} = \frac{1}{2}(\overline{AM} + \overline{PT})h_P = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x+1} + \frac{1}{y+1}\right)\frac{ch_C}{z+1},$$

па затоа $\frac{P_{AMTP}}{P_{ABC}} = \left(\frac{x}{x+1} + \frac{1}{y+1}\right)\frac{1}{z+1}$. Аналогно,

$$\frac{P_{BMTN}}{P_{ABC}} = \left(\frac{y}{y+1} + \frac{1}{z+1}\right)\frac{1}{x+1} \text{ и } \frac{P_{CNTP}}{P_{ABC}} = \left(\frac{z}{z+1} + \frac{1}{x+1}\right)\frac{1}{y+1}.$$

После собирањето на последните три равенства и средувањето на изразите добиваме

$$xyz = x + y + z + 2. \quad (1)$$

Од (1) за $x = y = z$ добиваме $x^3 - 3x - 2 = (x-2)(x+1)^2 = 0$ и затоа $x = 2$. Оттука $h_P = \frac{1}{3}h_C$, што покажува дека точката T е на растојание $\frac{1}{3}h_C$ од AB . Аналогно се добива за растојанијата на T до другите две страни на $\triangle ABC$. Единствена внатрешна точка со тоа својство е тежиштето.

87. Точката M е средина на страната AC на триаголникот ABC со тежиште G . На страната AB земена е точка N таква што $\overline{AN} = \frac{1}{3}\overline{AB}$. Пресечната точка на отсечките BM и CN е означена со P , а тежиштата на триаголниците CPM и BNP се означени со Q и R , соодветно. Докажи, дека точките Q , G и R лежат на една права и најди го односот $\frac{P_{ARQ}}{P_{ABC}}$ на плоштините на триаголниците ARQ и ABC .

Решение. Да ја означиме плоштината на триаголникот APN со S . Бидејќи $\overline{BN} = 2\overline{AN}$ и триаголниците APN и BPN имаат заедничка висина од темето P , важи $P_{BPN} = 2S$. Од друга страна точката P лежи на тежишната линија BM и следствено

$$P_{BPC} = P_{APB} = 3S.$$

Оттука добиваме, дека

$$P_{BCN} = P_{BPC} + P_{BPN} = 3S + 2S = 5S$$

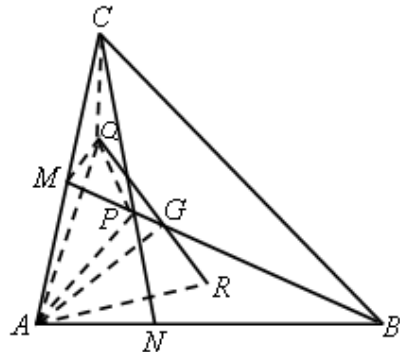
и

$$\frac{\overline{CP}}{\overline{PN}} = \frac{S_{BPC}}{S_{BPN}} = \frac{3S}{2S} = \frac{3}{2}.$$

Од $\overline{BN} = 2\overline{AN}$ следува дека

$$P_{ACN} = \frac{1}{2}P_{BCN} = \frac{5}{2}S,$$

од каде



$$P_{APC} = \frac{5}{2}S - S = \frac{3}{2}S.$$

Бидејќи PM е тежишна линија во триаголникот APC , важи $P_{APM} = P_{CPM} = \frac{3}{4}S$. Така добиваме дека $\frac{\overline{BP}}{\overline{PM}} = \frac{P_{BCP}}{P_{CPM}} = \frac{3S}{\frac{3}{4}S} = 4$. Ако ја примениме теоремата за тежиште за ABC и точката A , го добиваме равенството $\overline{AG} = \frac{1}{3}\overline{AB} + \frac{1}{3}\overline{AC}$. Повторно од истата теорема, но применета за триаголникот CPM , следува

$$\overline{AQ} = \frac{1}{3}\overline{AM} + \frac{1}{3}\overline{AP} + \frac{1}{3}\overline{AC} = \frac{1}{6}\overline{AC} + \frac{1}{3}\overline{AP} + \frac{1}{3}\overline{AC} = \frac{1}{2}\overline{AC} + \frac{1}{3}\overline{AP}.$$

Од друга страна

$$\overline{AP} = \overline{AB} + \overline{BP} = \overline{AB} + \frac{4}{5}\overline{BM} = \overline{AB} + \frac{4}{5}\overline{BA} + \frac{4}{5}\overline{AM} = \frac{1}{5}\overline{AB} + \frac{2}{5}\overline{AC}$$

и следствено $\overline{AQ} = \frac{1}{15}\overline{AB} + \frac{19}{30}\overline{AC}$. Ако ја примениме теоремата за тежиште и за триаголникот BPN , со аналогини пресметувања го добиваме равенството $\overline{AR} = \frac{23}{45}\overline{AB} + \frac{2}{15}\overline{AC}$. Но тогаш

$$\overline{RG} = \overline{AG} - \overline{AR} = -\frac{8}{45}\overline{AB} + \frac{1}{5}\overline{AC} \text{ и } \overline{GQ} = \overline{AQ} - \overline{AG} = -\frac{4}{15}\overline{AB} + \frac{3}{10}\overline{AC}.$$

Следствено $\overline{GQ} = \frac{3}{2}\overline{RG}$, од што следува дека трите точки лежат на една права, и дека точката G лежи на отсечката RQ . Притоа $\frac{\overline{RG}}{\overline{GQ}} = \frac{2}{3}$.

За да го определиме бараниот однос на плоштините на двата триаголника, ќе ги искористиме претходно добиените резултат. За плоштината на триаголникот ABC имаме

$$P_{ABC} = P_{BCN} + P_{ACN} = 5S + \frac{5}{2}S = \frac{15}{2}S.$$

Од равенството

$$P_{AMQG} = P_{AMQ} + P_{AQG} = P_{AGM} + P_{GMQ}$$

следува

$$P_{AQG} = P_{AGM} + P_{GMQ} - P_{AMQ}.$$

Бидејќи $P_{AGM} = \frac{1}{6}P_{ABC}$, важи $P_{AGM} = \frac{5}{4}S$. Но, точката Q е тежиште на триаголникот CMP , па затоа $P_{PMQ} = \frac{1}{3}P_{CMP} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4}S = \frac{1}{4}S$. Сега од

$$\frac{P_{GMQ}}{P_{PMQ}} = \frac{\overline{GM}}{\overline{PM}} = \frac{\frac{1}{3}\overline{MB}}{\frac{1}{5}\overline{MB}} = \frac{5}{3} \text{ следува } P_{GMQ} = \frac{5}{12}S. \text{ Триаголниците } AMQ \text{ и } CMQ \text{ се еднаквоплошни, бидејќи } QM \text{ е тежишна линија во } AQC.$$

Затоа $P_{AMQ} = P_{CMQ} = \frac{1}{3}P_{CMP} = \frac{1}{4}S$. За плоштината на триаголникот AQG добиваме

$$P_{AQG} = P_{AGM} + P_{GMQ} - P_{AMQ} = \frac{5}{4}S + \frac{5}{12}S - \frac{1}{4}S = \frac{17}{12}S.$$

Конечно, од $\frac{P_{ARQ}}{P_{AQG}} = \frac{\overline{RQ}}{\overline{GQ}} = \frac{5}{3}$, следува $P_{ARQ} = \frac{85}{36}S$. Според тоа,

$$\frac{P_{ARQ}}{P_{ABC}} = \frac{\frac{85}{36}S}{\frac{15}{2}S} = \frac{17}{54}.$$

88. Во правоаголен триаголник ABC ($\angle ACB = 90^\circ$) симетралата на аголот CL ($L \in AB$) ја дели хипотенузата на отсечки со должини a и b , ($a > b$). Ако H_1 и H_2 се ортоцентрите соодветно на $\triangle ALC$ и $\triangle BLC$, определи ја плоштината на четириаголника AH_1BH_2 .

Решение. Двапати ќе го искористиме следново тврдење:

Ако H е ортоцентарот на $\triangle ABC$ и $\angle ACB = 45^\circ$, тогаш $\overline{CH} = \overline{AB}$.

Доказ. Нека BH ја сече AC во точката M . Тогаш $\triangle MBC$ е рамнокрак правоаголен, бидејќи $\angle BMC = 90^\circ$ и $\angle BCM = 45^\circ$. Следствено

$$\overline{CM} = \overline{BM}, \angle MCH = \angle MBA = 90^\circ - \angle BAC.$$

Оттука $\triangle MCH \cong \triangle MBA$ и заклучуваме, дека $\overline{CH} = \overline{AB}$. Аналогно се докажува и кога триаголникот е тапоаголен, кога H е надворешна точка за $\triangle ABC$. ■

Преминуваме кон решавање задачата.

Нека $CD \perp AB$ ($D \in AB$), $\overline{AL} = b$ и $\overline{BL} = a$ (види цртеж). Ако го примениме докажаното тврдење за $\triangle ALC$ и $\triangle BLC$, соодветно добиваме

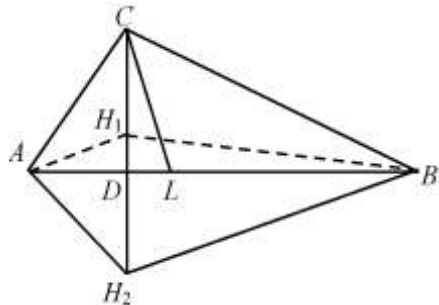
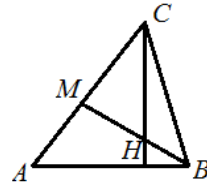
$$\overline{CH_1} = \overline{AL} = b \text{ и } \overline{CH_2} = \overline{BL} = a.$$

Оттука следува, дека

$$\overline{H_1H_2} = a - b.$$

Плоштината P на AH_1BH_2 е

збир на плоштините на $\triangle AH_1B$ и $\triangle AH_2B$. Затоа



$$\begin{aligned}
 P &= \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \overline{DH}_1 + \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \overline{DH}_2 = \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot (\overline{DH}_1 + \overline{DH}_2) \\
 &= \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \overline{H_1 H_2} = \frac{1}{2} (a+b)(a-b) = \frac{a^2 - b^2}{2}.
 \end{aligned}$$

89. Даден е остроаголен $\triangle ABC$. Нека h_a, h_b, h_c се висините, t_a, t_b, t_c тежишните линии на повлечени кон страните a, b, c соодветно, r е радиусот на впишаната и R е радиусот на опишаната кружница околу $\triangle ABC$. Докажи, дека $\frac{t_a}{h_a} + \frac{t_b}{h_b} + \frac{t_c}{h_c} \leq 1 + \frac{R}{r}$. Кога важи знак за равенство.

Решение. Со A', B', C' да ги означиме средините на страните BC, CA, AB , соодветно (види цртеж). Двете страни на неравенството да ги помножиме со P (P е плоштината на триаголникот). Ако искористиме дека

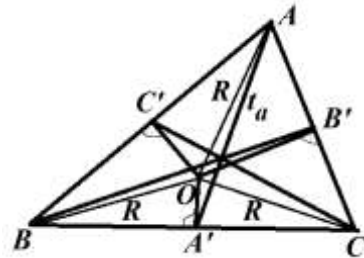
$$P = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2} = rs = r \frac{a+b+c}{2}$$

го добиваме еквивалентното неравенство

$$\frac{at_a}{2} + \frac{bt_b}{2} + \frac{ct_c}{2} \leq P + R \frac{a+b+c}{2},$$

т.е. неравенството

$$\frac{a(t_a - R)}{2} + \frac{b(t_b - R)}{2} + \frac{c(t_c - R)}{2} \leq P. \quad (1)$$



За да го докажеме последното неравенство, да забележиме дека во $\triangle AOA'$ важи $\overline{AO} + \overline{OA'} \geq \overline{AA'}$, т.е. важи $t_a - R \leq \overline{OA'}$. Аналогно, точни се неравенствата $t_b - R \leq \overline{OB'}$ и $t_c - R \leq \overline{OC'}$. Ако последните неравенства ги помножиме со a, b и c соодветно, ги собереме добиените неравенства и поделиме со 2 наоѓаме

$$\frac{a(t_a - R)}{2} + \frac{b(t_b - R)}{2} + \frac{c(t_c - R)}{2} \leq \frac{\overline{OA'} \cdot a}{2} + \frac{\overline{OB'} \cdot b}{2} + \frac{\overline{OC'} \cdot c}{2} = P,$$

т.е. точно е неравенството (1). Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $t_a - R = \overline{OA'}$, $t_b - R = \overline{OB'}$ и $t_c - R = \overline{OC'}$, т.е. ако и само ако $\triangle ABC$ е рамностран.

90. Впишаната кружница во $\triangle ABC$ ги допира страните BC, AC и AB во точките D, E и F , соодветно. Со K и L да ги означиме се подножјата на нормалите повлечени од точките F и E на страната BC , соодветно. Нека вторите пресечни точки на овие нормали со впишаната кружница се M и N , соодветно. Докажи, дека

$$\frac{P_{\triangle BMD}}{P_{\triangle CND}} = \frac{\overline{DK}}{\overline{DL}}.$$

Решение. Нека I е центарот на впишаната кружница во $\triangle ABC$. Имаме

$$\angle BFK = 90^\circ - \angle B \text{ и}$$

$$\angle BFD = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle B,$$

па затоа $\angle DFM = \frac{1}{2} \angle B$. Но,

$\angle DFM = \angle MDK$, па затоа $\angle MDK = \frac{1}{2} \angle B$. Значи, $\triangle MDK$ и $\triangle BID$ имаат еднакви агли, т.е. тие се слични. Од сличноста на овие триаголници следува $\frac{\overline{MK}}{\overline{DK}} = \frac{r}{\overline{BD}}$, каде r е радиусот на впишаната кружница во

$\triangle ABC$. На потполно ист начин се докажува дека $\frac{\overline{NL}}{\overline{DL}} = \frac{r}{\overline{CD}}$. Затоа,

$$r = \frac{\overline{MK} \cdot \overline{BD}}{\overline{DK}} = \frac{\overline{NL} \cdot \overline{CD}}{\overline{DL}}, \text{ од каде добиваме}$$

$$\frac{P_{\triangle BMD}}{P_{\triangle CND}} = \frac{\overline{MK} \cdot \overline{BD}}{\overline{NL} \cdot \overline{CD}} = \frac{\overline{DK}}{\overline{DL}}.$$

91. Нека BAC е триаголник со тежиште G и нека l е права која ги сече страните AB и AC соодветно во точките B_1 и C_1 така што A и G лежат во иста полурамнина во однос на l . Докажи дека

$$P_{BB_1GC_1} + P_{CC_1GB_1} \geq \frac{4}{9} P_{ABC}.$$

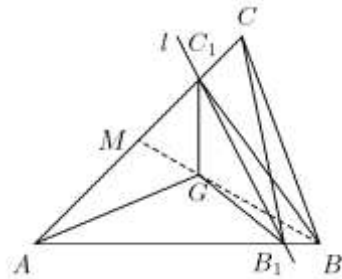
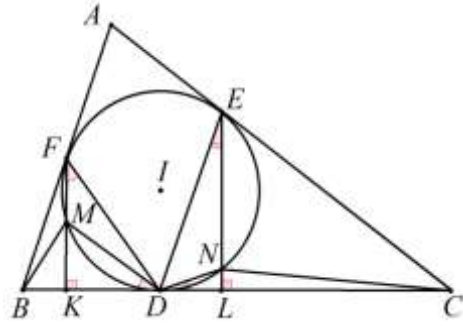
Кога важи знак за равенство?

Решение. Заради пократкото запишување да означиме $P_{ABC} = P$, $P_{AB_1C_1} = P_0$, $P_{AB_1G} = P_1$ и $P_{AC_1G} = P_2$. Од условот на задачата следува, дека $P_0 \geq P_1 + P_2$. Имаме

$$P_{BB_1GC_1} = P_{ABC_1} - P_1 - P_2 \text{ и}$$

$$P_{CC_1GB_1} = P_{ACB_1} - P_1 - P_2.$$

Од $P_{ABG} : P_{AMG} = 2:1 = P_{BGC_1} : P_{MGC_1}$ следува дека $P_{ABC_1} = 3P_2$. Аналогно се докажува дека $P_{ACB_1} = 3P_1$. Тогаш



$$P_{BB_1GC_1} + P_{CC_1GB_1} = P_{ABC_1} - P_1 - P_2 + P_{ACB_1} - P_1 - P_2 = P_1 + P_2.$$

Останува да докажеме дека $P_1 + P_2 \geq \frac{4P}{9}$. Имаме $P_1 = \frac{P_{AB_1C}}{3} = \frac{P \cdot \overline{AB_1}}{3\overline{AB}}$ и

$$P_1 = \frac{P \cdot \overline{AC_1}}{3\overline{AC}}. \text{ Тогаш}$$

$$P_1 + P_2 = \frac{P}{3} \left(\frac{\overline{AB_1}}{\overline{AB}} + \frac{\overline{AC_1}}{\overline{AC}} \right) \geq \frac{2P}{3} \sqrt{\frac{\overline{AB_1}}{\overline{AB}} \cdot \frac{\overline{AC_1}}{\overline{AC}}} = \frac{2P}{3} \sqrt{\frac{P_0}{P}} = \frac{2}{3} \sqrt{P(P_1 + P_2)},$$

од каде што следува саканото неравенство. Знак за равенство важи ако и само ако правата l минува низ G и е паралелна со BC .

92. Даден е $\triangle ABC$ со центри I_a и I_b на припишаните кружници кон страните BC и AC , соодветно. Ако M е средината на страната AB и правите MI_a и MI_b ги сечат страните BC и AC соодветно во точките Q и P , докажи дека правата PQ е паралелна на AB и минува низ центарот I на впишаната кружница во $\triangle ABC$.

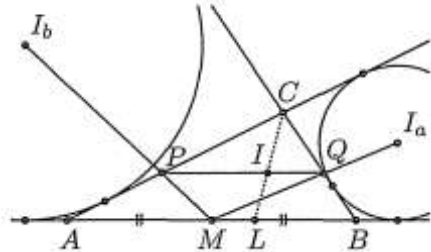
Решение. Ги користиме стандардните ознаки за $\triangle ABC$. Имаме

$$\begin{aligned} \frac{\overline{CP}}{\overline{PA}} &= \frac{P_{CMI_b}}{P_{AMI_b}} = \frac{\frac{1}{2}P_{CBI_b} + \frac{1}{2}P_{CAI_b}}{\frac{1}{2}P_{ABI_b}} \\ &= \frac{r_b a + r_b b}{r_b c} = \frac{a+b}{c}. \end{aligned}$$

Аналогно, $\frac{\overline{CQ}}{\overline{QB}} = \frac{a+b}{c}$, т.е.

$$\frac{\overline{CP}}{\overline{PA}} = \frac{\overline{CQ}}{\overline{QB}}, \text{ што значи дека}$$

$PQ \parallel AB$. Од друга страна ако правата CI ја сеча страната AB во точката L , тогаш $\frac{\overline{CI}}{\overline{IL}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{BL}} = \frac{a}{\frac{ac}{a+b}} = \frac{a+b}{c}$, што значи дека $I \in PQ$.



93. Нека P, Q и R се точки на страните BC, CA и AB на триаголникот ABC . Ако правите AP, BQ и CR се сечат во точката T , докажи дека

$$\frac{\overline{TP}}{\overline{AP}} + \frac{\overline{TQ}}{\overline{BQ}} + \frac{\overline{TR}}{\overline{CR}} = 1. \quad (1)$$

Решение. Нека A' и T_1 се подножјата на нормалите повлечени од точките A и T кон страната BC , соодветно. Очигледно

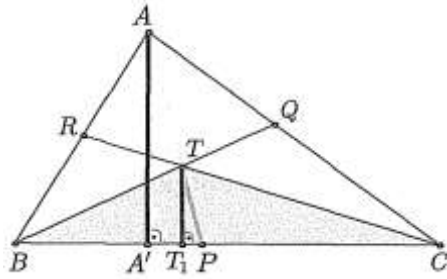
$$\triangle AA'P \sim \triangle TT_1P, \text{ па затоа важи } \frac{\overline{TP}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{TT_1}}{\overline{AA'}}. \text{ Според тоа,}$$

$$\frac{\overline{TP}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{TT_1}}{\overline{AA'}} = \frac{\frac{\overline{BC}}{2} \cdot \overline{TT_1}}{\frac{\overline{BC}}{2} \cdot \overline{AA'}} = \frac{P_{\triangle BTC}}{P_{\triangle ABC}}.$$

Аналогно се докажува дека

$$\frac{\overline{TQ}}{\overline{BQ}} = \frac{P_{\triangle CTA}}{P_{\triangle ABC}} \text{ и } \frac{\overline{TR}}{\overline{CR}} = \frac{P_{\triangle ATB}}{P_{\triangle ABC}}.$$

Конечно, ако ги собереме последните три равенства го добиваме равенството (1).



94. Во $\triangle ABC$ со должина на страните a , b и c е впишана кружница и на неа се повлечени тангенти паралелни со страните на триаголникот, кои од $\triangle ABC$ отсекуваат три нови триаголници, во кои се впишани кружници. Пресметај го збирот на плоштините на четирите кругови.

Решение. Со r да го означиме радиусот на кружницата впишана во $\triangle ABC$, а со r_a, r_b и r_c радиусите на кружниците впишани во триаголниците добиени со конструирање на тангентите на впишаната кружница (види цртеж). Нека P е плошина на $\triangle ABC$, а $s = \frac{a+b+c}{2}$ неговиот полупериметар. Триаголниците AB_aC_a и ABC се слични, па затоа радиусите на впишаните кружници се однесуваат како висините h'_a и h_a кои соодветствуваат на страните B_aC_a и BC . Значи,

$$\frac{r}{r_a} = \frac{h_a}{h'_a}$$

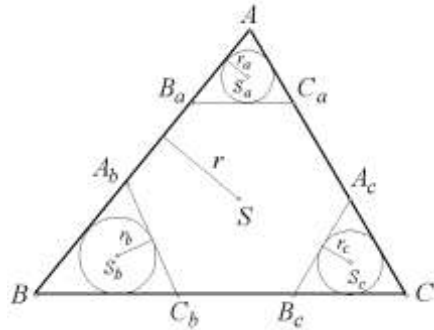
Бидејќи $h'_a = h_a - 2r$, добиваме

$$r_a = \frac{h_a - 2r}{h_a} r.$$

Аналогно,

$$r_b = \frac{h_b - 2r}{h_b} r \text{ и } r_c = \frac{h_c - 2r}{h_c} r.$$

Бидејќи $r = \frac{P}{s}$, $h_a = \frac{2P}{a}$, $h_b = \frac{2P}{b}$ и $h_c = \frac{2P}{c}$, од претходните равенства следува $r_a = \frac{P(s-a)}{s^2}$, $r_b = \frac{P(s-b)}{s^2}$ и $r_c = \frac{P(s-c)}{s^2}$. Ако искористиме дека



$$a + b + c = 2s \text{ и } P^2 = (s - a)(s - b)(s - c)s,$$

добиваме дека

$$\begin{aligned} S &= r^2 \pi + r_a^2 \pi + r_b^2 \pi + r_c^2 \pi = \frac{P^2}{s^4} [s^2 + (s - a)^2 + (s - b)^2 + (s - c)^2] \pi \\ &= \frac{P^2}{s^4} [4s^2 + a^2 + b^2 + c^2 - 2s(a + b + c)] \pi \\ &= \frac{1}{s^4} (s - a)(s - b)(s - c)(a^2 + b^2 + c^2) s \pi \\ &= \frac{1}{(a + b + c)^3} (b + c - a)(c + a - b)(a + b - c)(a^2 + b^2 + c^2) \pi. \end{aligned}$$

95. Нека A, B и C се три колинеарни точки, такви што B е меѓу A и C . Од иста страна на правата AC конструирани се три полукружници со дијаметри AB, BC и AC . Заедничката тангента на првите две полукружници во точката B ја сечат третата полукружница во точка E . Нека U и V се точки во кои заедничката надворешна тангента ги допира првите две полукружници. Пресметај го количникот $\frac{P_{EUV}}{P_{EAC}}$, во функција од $r_1 = \frac{1}{2} \overline{AB}$ и $r_2 = \frac{1}{2} \overline{BC}$.

Решение. Од $\overline{BE}^2 = 2r_1 \cdot 2r_2$ добиваме $\overline{BE} = 2\sqrt{r_1 r_2}$. Од друга страна

$$\overline{UV}^2 = \overline{MN}^2 - (\overline{MU} - \overline{NV})^2 = 4r_1 r_2$$

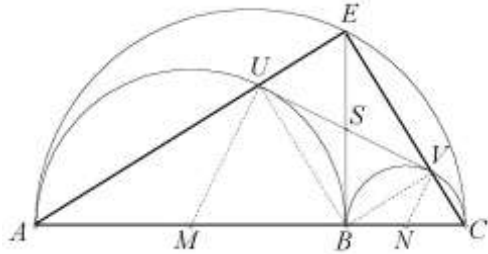
(M и N се центри на полукружниците), а од овде добиваме

$$\overline{UV} = 2\sqrt{r_1 r_2} = \overline{BE}.$$

Понатаму,

$$\overline{SU} = \overline{SB} = \overline{SV} = \frac{1}{2} \overline{UV} = \sqrt{r_1 r_2} = \overline{ES},$$

па затоа четириаголникот $BVEU$ е правоаголник, (дијагоналите му се еднакви и се половат). Понатаму, аглиите $\angle BUA$ и $\angle EUB$ се прави, па затоа точките A, U, E се колинеарни.



Слично се докажува дека E, V, C се колинеарни. Триаголникот EUV е складен со триаголникот UEB кој е сличен со $\triangle ECA$. Затоа $\triangle EUV$ и $\triangle ECA$ се слични со коефициент на сличност

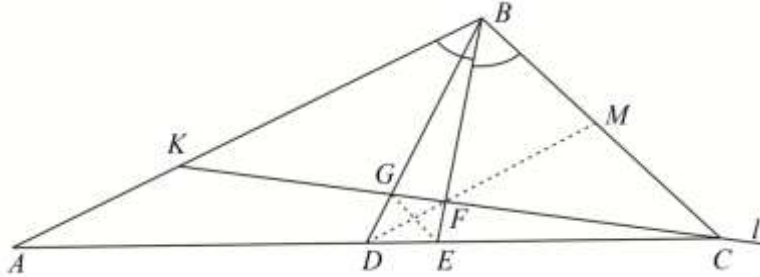
$$k = \frac{\overline{UV}}{\overline{AC}} = \frac{\sqrt{r_1 r_2}}{r_1 + r_2}.$$

Според тоа

$$\frac{P_{EUV}}{P_{ECA}} = k^2 = \frac{r_1 r_2}{(r_1 + r_2)^2}.$$

96. Даден е триаголникот ABC , ($\overline{BC} < \overline{AB}$). Низ точката C е повлечена права l , нормална на симетралата BE на аголот $\angle B$. Правата l ја сече BE во точка F , а тежишната линија BD во точка G . Да се докаже дека отсечката DF ја преполовува отсечката EG .

Решение. Нека $CF \cap AB = \{K\}$ и $DF \cap BC = \{M\}$. Бидејќи $BF \perp KC$ и BF е симетрала на $\angle KBC$ следува дека $\triangle KBC$ е рамнокрак, т.е. $\overline{BK} = \overline{BC}$, и уште F е средина на KC . Според тоа, DF е средна



линија за $\triangle ACK$, односно $DF \parallel AK$, од каде јасно M е средина на BC .

Ќе покажеме дека $GE \parallel BC$. Доволно е да покажеме дека $\frac{\overline{BG}}{\overline{GD}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{ED}}$.

Од $DF \parallel AK$ и $\overline{DF} = \frac{\overline{AK}}{2}$ имаме

$$\frac{\overline{BG}}{\overline{GD}} = \frac{\overline{BK}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{BK}}{\overline{AK}} \quad (1).$$

Понатаму

$$\begin{aligned} \frac{\overline{CE}}{\overline{DE}} &= \frac{\overline{CD} - \overline{DE}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{DE}} - 1 = \frac{\overline{AD}}{\overline{DE}} - 1 = \frac{\overline{AE} - \overline{DE}}{\overline{DE}} - 1 = \frac{\overline{AE}}{\overline{DE}} - 2 \\ &= \frac{\overline{AB}}{\overline{DF}} - 2 = \frac{\overline{AK} + \overline{BK}}{\frac{\overline{AK}}{2}} - 2 = 2 + 2 \frac{\overline{BK}}{\overline{AK}} - 2 = \frac{2\overline{BK}}{\overline{AK}} \end{aligned} \quad (2)$$

Од (1) и (2) добиваме $\frac{\overline{BG}}{\overline{GD}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{ED}}$, па следува $GE \parallel BC$, и бидејќи M е средина на BC , следува DF ја преполовува GE .

97. Нека AD е симетралата на аголот BAC во $\triangle ABC$ и M и N се точки

на страните AB и AC , соодветно, такви што $\angle MDA = \angle ABC$ и $\angle NDA = \angle BCA$ и нека P е пресечната точка на правите AD и MN .

Докажи дека $\overline{AD}^3 = \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AP}$.

Решение. Од условот на задачата следува дека $\triangle AND \sim \triangle ACD$, па затоа $\overline{AD} : \overline{AC} = \overline{AN} : \overline{AD}$, т.е.

$$\overline{AD}^2 = \overline{AC} \cdot \overline{AN} \quad (1)$$

Слично, $\triangle ABD \sim \triangle ADM$, па затоа

$$\overline{AD}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AM} \quad (2)$$

Понатаму, $\angle MAN + \angle MDN = 180^\circ$, што значи дека четириаголникот $AMDN$ е тетивен, Според тоа,

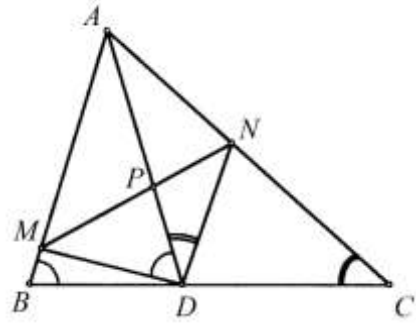
$\angle AMN = \angle ADN$ (агли над ист лак) и како $\angle MAP = \angle DAN$ (по услов) заклучуваме дека $\triangle APM \sim \triangle AND$. Значи, $\overline{AD} : \overline{AN} = \overline{AM} : \overline{AP}$, т.е.

$$\overline{AD} \cdot \overline{AP} = \overline{AN} \cdot \overline{AM} \quad (3)$$

Конечно, од (1), (2) и (3) добиваме

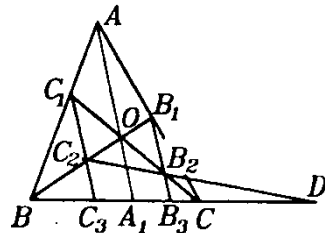
$$\overline{AD}^4 = \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AM} \cdot \overline{AN} = \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AP} \cdot \overline{AD}$$

од што следува дека $\overline{AD}^3 = \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AP}$.



98. На страните AB, BC, CA на триаголникот ABC се избрани точки C_1, A_1, B_1 , соодветно, така што правите AA_1, BB_1, CC_1 се сечат во една точка. Низ точките B_1 и C_1 повлекуваме прави паралелни на правата AA_1 , кои ги сечат правите CC_1 и BB_1 во точките B_2 и C_2 , соодветно. Докажи дека правите BC, B_1C_1 и B_2C_2 или се паралелни или се сечат во една точка.

Решение. Пресечните точки на правите C_1C_2 и B_1B_2 со правата BC да ги означиме со C_3 и B_3 , соодветно, а пресечната точка на правите AA_1, BB_1, CC_1 да ја означиме со O (види цртеж). Нека меѓу правите BC, B_1C_1 и B_2C_2 има две кои не се паралелни, на пример BC и B_2C_2 (останатите случаи се разгледуваат аналогно), и нивната пресечна точка да ја означиме со D .



Од Талесовата теорема имаме

$$\frac{\overline{B_2B_3}}{\overline{B_2B_1}} = \frac{\overline{A_1O}}{\overline{AO}} \text{ и } \frac{\overline{C_2C_3}}{\overline{C_2C_1}} = \frac{\overline{A_1O}}{\overline{AO}},$$

па затоа $\frac{\overline{B_2B_3}}{\overline{C_2C_3}} = \frac{\overline{B_2B_1}}{\overline{C_2C_1}}$. Разгледуваните отсечки $B_1B_2, B_2B_3, C_1C_2, C_2C_3$

лежат на паралелни прави, точката B_1 лежи на правата DB_1 , точките B_2, C_2 припаѓаат на правата DB_2 и точките B_3, C_3 припаѓаат на правата DB_3 , па затоа точката C_1 мора да лежи на правата DB_1 , што значи дека правите BC, B_1C_1 и B_2C_2 се сечат во точката D .

III.2. НЕРАВЕНСТВО НА ТРИАГОЛНИК

1. Ако a, b, c се должини на страни на триаголник, тогаш

$$abc \geq (b+c-a)(c+a-b)(b+a-c)$$

Докажи!

Решение. Ако ги искористиме неравенствата

$$a^2 \geq a^2 - (b-c)^2 = (a-b+c)(a+b-c)$$

$$b^2 \geq b^2 - (a-c)^2 = (b-a+c)(b+a-c)$$

$$c^2 \geq c^2 - (b-a)^2 = (c-b+a)(c+b-a)$$

добиваме

$$a^2b^2c^2 \geq (a-b+c)^2(a+b-c)^2(b+c-a)^2$$

т.е.

$$abc \geq (b+c-a)(a+b-c)(c+a-b)$$

Знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c$.

Забелешка. Ако ставиме $2s = a+b+c$ добиваме

$$abc \geq 8(s-a)(s-b)(s-c)$$

и како плоштината P на триаголникот е

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \quad P = sr \text{ и } P = \frac{abc}{4R},$$

каде R и r , каде R и r се радиусите на опишаната и впишаната кружница, соодветно, добиваме $R \geq 2r$, при што знак за равенство важи за рамнострани триаголник.

2. Нека a, b, c се должини на страни на триаголник. Докажи дека

$$a^3 + b^3 + 3abc > c^3.$$

Решение. Во секој триаголник $a + b > c$, $b + c > a$ и $c + a > b$. Ако двапати го искористиме првото неравенство и земеме предвид дека за секои позитивни реални броеви a и b важи $a^2 - ab + b^2 > 0$, добиваме

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + 3abc &= (a + b)(a^2 - ab + b^2) + 3abc > c(a^2 - ab + b^2) + 3abc \\ &= c(a^2 - ab + b^2 + 3ab) = c(a + b)^2 > c \cdot c^2 = c^3. \end{aligned}$$

Забелешка. Потполно аналогно се докажува дека се исполнети и следниве две неравенства $b^3 + c^3 + 3abc > a^3$, $c^3 + a^3 + 3abc > b^3$.

3. Нека се a, b, c должини на страни на триаголник. Докажи дека

$$a^2(b + c - a) + b^2(c + a - b) + c^2(a + b - c) \leq 3abc \quad (1)$$

Решение. Неравенството (1) е симетрично, па затоа без ограничување на општоста можеме да претпоставиме $a \geq b \geq c$. Тогаш важи следното неравенство

$$a(a - b)(a - c) + (b - c)^2(b + c - a) \geq 0$$

кое е еквивалентно со неравенството

$$a^3 + abc - a^2b - a^2c + b^3 + abc - b^2c - b^2a + c^3 + abc - c^2a - c^2b \geq 0$$

од што следува неравенството (1).

4. Ако a и b се должините на катетите и c должината на хипотенузата на произволен правоаголен триаголник, докажи дека за секој природен број $n \geq 3$ важи неравенството $a^n + b^n < c^n$.

Решение. За катетите a и b и хипотенузата c на правоаголен триаголник важи $a < c$, $b < c$ и $a^2 + b^2 = c^2$. Оттука, за $n \geq 3$ добиваме

$$\begin{aligned} a^n + b^n &= a^2 a^{n-2} + b^2 b^{n-2} \\ &< a^2 c^{n-2} + b^2 c^{n-2} \\ &= (a^2 + b^2) c^{n-2} \\ &= c^2 c^{n-2} = c^n. \end{aligned}$$

5. Дали постојат шест различни точки во рамнината (една црвена, две плави и три зелени), такви што збирот на растојанијата помеѓу црвената и плавите точки е 8, збирот на растојанијата меѓу црвената и зелените точки е 6, а збирот на растојанијата меѓу плавите и зелените

точки е 9.

Решение. Нека претпоставиме дека такви точки постојат. Ќе ги означиме црвената, двете плави и трите зелени точки со R, B_1, B_2, G_1, G_2 и G_3 соодветно. Од неравенството на триаголник добиваме

$$\begin{aligned} \overline{RG_1} + \overline{G_1B_1} &\geq \overline{RB_1} & \overline{RG_1} + \overline{G_1B_2} &\geq \overline{RB_2} \\ \overline{RG_2} + \overline{G_2B_1} &\geq \overline{RB_1} & \text{и} & \overline{RG_2} + \overline{G_2B_2} &\geq \overline{RB_2} \\ \overline{RG_3} + \overline{G_3B_1} &\geq \overline{RB_1} & \overline{RG_3} + \overline{G_3B_2} &\geq \overline{RB_2} \end{aligned}$$

Ако овие неравенства ги собереме, имаме

$$\begin{aligned} (\overline{G_1B_1} + \overline{G_2B_1} + \overline{G_3B_1} + \overline{G_1B_2} + \overline{G_2B_2} + \overline{G_3B_2}) + \\ + 2(\overline{RG_1} + \overline{RG_2} + \overline{RG_3}) \geq 3(\overline{RB_1} + \overline{RB_2}) \end{aligned}$$

односно

$$9 + 2 \cdot 6 \geq 3 \cdot 8$$

Заради добиената контрадикција, таков распоред не постои.

6. Нека a, b и c се страни на триаголник и $p = \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$, $q = \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}$. Докажи дека $|p - q| < 1$.

Решение. Разликата $p - q$ можеме да ја запишеме во видот

$$\begin{aligned} p - q &= \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) - \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}\right) = \frac{a^2c + b^2a + c^2b - a^2b - c^2a - b^2c}{abc} \\ &= \frac{-ac(c-a) + b(c^2 - a^2) - b^2(c-a)}{abc} = \frac{(c-a)[-ac + bc + ba - b^2]}{abc} \\ &= \frac{(c-a)[-c(a-b) + b(a-b)]}{abc} = \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{abc} \end{aligned}$$

Од неравенствата $a < b + c$, $b < a + c$, $c < a + b$, добиваме

$$-a < b - c < a, \quad -b < c - a < b, \quad -c < a - b < c,$$

односно

$$|a - b| < c, \quad |b - c| < a, \quad |c - a| < b.$$

Според тоа

$$|p - q| = \left| \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{abc} \right| = \frac{|(a-b)(b-c)(c-a)|}{abc} = \frac{|a-b||b-c||c-a|}{abc} < \frac{cab}{abc} = 1.$$

7. Нека се a, b, c должини на страни на триаголник и $p + q + r = 0$. Докажи дека

$$a^2 pq + b^2 qr + c^2 rp \leq 0 \quad (1)$$

Решение. Случајот кога $p = q = r = 0$ или кога еден од броевите p, q или r е еднаков на нула е тривијален.

Нека $p \neq 0, q \neq 0, r \neq 0$. Без ограничување на општоста можеме да земеме $p = -q - r$, па неравенството го добива обликот

$$a^2(-q-r)q + b^2qr + c^2r(-q-r) \leq 0,$$

т.е.

$$b^2 \leq a^2 + c^2 + \frac{a^2q}{r} + \frac{c^2r}{q}. \quad (2)$$

Бидејќи a, b, c се страни на триаголник добиваме $b \leq a + c$, т.е.

$$b^2 < a^2 + c^2 + 2ac = a^2 + c^2 + 2\sqrt{\frac{a^2q}{r} \frac{c^2r}{q}} \leq a^2 + c^2 + \frac{a^2q}{r} + \frac{c^2r}{q}$$

па значи неравенството (2) важи, односно важи неравенството (1).

8. Ако се a, b, c страни на $\triangle ABC$ и α, β, γ соодветните агли изразени во радијани, докажи дека

$$\frac{\pi}{3} \leq \frac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{a+b+c} < \frac{\pi}{2}$$

Решение. Неравенството $a \geq b$ е еквивалентно со неравенството $\alpha \geq \beta$, па затоа важи $(a-b)(\alpha-\beta) \geq 0$. Притоа, знак за равенство важи ако и само ако $a = b$. Слично, $(b-c)(\beta-\gamma) \geq 0$ и $(c-a)(\gamma-\alpha) \geq 0$, па следува

$$(a-b)(\alpha-\beta) + (b-c)(\beta-\gamma) + (c-a)(\gamma-\alpha) \geq 0. \quad (1)$$

Користејќи го условот $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ неравенството (1) можеме да го запишеме во обликот

$$a(2\alpha - \beta - \gamma) + b(2\beta - \gamma - \alpha) + c(2\gamma - \alpha - \beta) \geq 0, \\ a(3\alpha - \pi) + b(3\beta - \pi) + c(3\gamma - \pi) \geq 0,$$

т.е.

$$3(a\alpha + b\beta + c\gamma) \geq \pi(a + b + c)$$

$$\frac{\pi}{3} \leq \frac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{a+b+c}$$

Знак за равенството важи ако и само ако $a = b = c$.

Од $(b+c-a)\alpha + (c+a-b)\beta + (a+b-c)\gamma > 0$ следува

$$a(\beta + \gamma - \alpha) + b(\gamma + \alpha - \beta) + c(\alpha + \beta - \gamma) > 0,$$

т.е.

$$a(\pi - 2\alpha) + b(\pi - 2\beta) + c(\pi - 2\gamma) > 0,$$

односно

$$\frac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{a+b+c} < \frac{\pi}{2}.$$

9. Нека a, b, c се должините на страните на $\triangle ABC$ и $2s = a + b + c$ е неговиот периметар. Докажи, дека

$$\sqrt{s} \leq \sqrt{s-a} + \sqrt{s-b} + \sqrt{s-c} \leq \sqrt{3s}. \quad (1)$$

Решение. Прво ќе го докажеме левото неравенство. Од $s, s-a, s-b, s-c > 0$ следува дека двете страни на неравенството се позитивни, па затоа ако квадрираме добиваме дека истото е еквивалентно со неравенството

$$s < s-a + s-b + s-c + 2\sqrt{s-a}\sqrt{s-b} + 2\sqrt{s-b}\sqrt{s-c} + 2\sqrt{s-c}\sqrt{s-a}$$

и ако искористиме дека $2s = a + b + c$ го добиваме неравенството

$$0 < 2\sqrt{s-a}\sqrt{s-b} + 2\sqrt{s-b}\sqrt{s-c} + 2\sqrt{s-c}\sqrt{s-a}$$

кое очигледно е точно.

Понатаму, ако го искористиме неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина за броевите $\sqrt{s-a}, \sqrt{s-b}$ и $\sqrt{s-c}$ добиваме

$$\frac{\sqrt{s-a} + \sqrt{s-b} + \sqrt{s-c}}{3} \leq \sqrt{\frac{\sqrt{s-a}^2 + \sqrt{s-b}^2 + \sqrt{s-c}^2}{3}} = \sqrt{\frac{s-a+s-b+s-c}{3}} = \sqrt{\frac{s}{3}}.$$

Последното неравенство го множиме со 3 и го добиваме десното неравенство во (1). Знак за равенство важи ако и само ако $\sqrt{s-a} = \sqrt{s-b} = \sqrt{s-c}$, т.е. ако и само ако $a = b = c$.

10. Ако a, b и c се страни на триаголник со периметар 1, докажи дека

$$a^2 + b^2 + c^2 + 4abc < \frac{1}{2}.$$

Решение. Од условот $a + b + c = 1$ и неравенството на триаголник $c < a + b$ следува дека $c < 1 - c$, т.е. $2c - 1 < 0$. Исто така $2a - 1 < 0$ и $2b - 1 < 0$. Затоа

$$(2a-1)(2b-1)(2c-1) < 0$$

$$8abc - 4(ab + bc + ca) + 2(a + b + c) - 1 < 0$$

$$8abc - 4(ab + bc + ca) + 1 < 0.$$

Од друга страна, од $1 = a + b + c = (a + b + c)^2$ следува

$$2(ab + bc + ca) = 1 - (a^2 + b^2 + c^2).$$

Оттука добиваме

$$8abc - 2(1 - (a^2 + b^2 + c^2)) + 1 < 0$$

$$8abc + 2(a^2 + b^2 + c^2) < 1$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + 4abc < \frac{1}{2}.$$

11. Даден е $\triangle ABC$ со страни $a > b > c$ и точка O во неговата внатрешност. Нека правите AO, BO, CO ги сечат страните на триаголникот BC, CA и AB во точки P, Q и R , соодветно. Докажи дека

$$\overline{OP} + \overline{OQ} + \overline{OR} < a.$$

Решение. Јасно, страната a на $\triangle ABC$ е поголема од секоја од отсечките AP, BQ, CR . Повлекуваме $OX \parallel AB$, $OY \parallel AC$, $XK \parallel OR$, $YL \parallel OQ$ (точките X и Y лежат на страната на BC , точката K на страната AB и точката L на страната CA , (направи цртеж). Разгледувајќи ги паровите слични триаголници $\triangle OXY$ и $\triangle ABC$; $\triangle B XK$ и $\triangle BCR$; $\triangle CYL$ и $\triangle CBQ$ наоѓаме $\overline{XY} > \overline{OP}$, $\overline{BX} > \overline{XK} = \overline{OR}$ и $\overline{YC} > \overline{YL} = \overline{OQ}$. Значи,

$$a = \overline{BX} + \overline{XY} + \overline{YC} > \overline{OR} + \overline{OP} + \overline{OQ}.$$

12. Во рамнината се дадени $n \geq 3$ точки $A_1, A_2, \dots, A_n$ такви што никои три не лежат на една права. Точките $M_1, M_2, \dots, M_n$ лежат на отсечките $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_nA_1$ соодветно, а точките $B_1, B_2, \dots, B_n$ во $\triangle M_nA_1M_1, \triangle M_1A_2M_2, \dots, \triangle M_{n-1}A_nM_n$. Докажи дека

$$\overline{B_1B_2} + \overline{B_2B_3} + \dots + \overline{B_nB_1} \leq \overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} + \dots + \overline{A_nA_1}.$$

Решение. Ќе искористиме дека ако P е точка во $\triangle ABC$, тогаш

$$\overline{PB} + \overline{PC} \leq \overline{AB} + \overline{AC}. \quad (*)$$

Навистина, ако $D = AB \cap CP$, тогаш

$$\begin{aligned} \overline{PB} + \overline{PC} &\leq \overline{BD} + \overline{PD} + \overline{PC} = \overline{BD} + \overline{CD} \\ &\leq \overline{BD} + \overline{DA} + \overline{AC} = \overline{AB} + \overline{AC}. \end{aligned}$$

Тогаш прво од неравенството на триаголник, а потоа од неравенството (*) следува

$$\begin{aligned} \overline{B_1B_2} + \overline{B_2B_3} + \dots + \overline{B_nB_1} &\leq (\overline{B_1M_1} + \overline{B_2M_1}) + (\overline{B_2M_2} + \overline{B_3M_2}) + \dots + (\overline{B_nM_n} + \overline{B_1M_n}) \\ &= (\overline{B_1M_n} + \overline{B_1M_1}) + (\overline{B_2M_1} + \overline{B_2M_2}) + \dots + (\overline{B_nM_{n-1}} + \overline{B_nM_n}) \\ &\leq (\overline{A_1M_n} + \overline{A_1M_1}) + (\overline{A_2M_1} + \overline{A_2M_2}) + \dots + (\overline{A_nM_{n-1}} + \overline{A_nM_n}) \\ &= \overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} + \dots + \overline{A_nA_1}. \end{aligned}$$

13. Дадени се остроаголен $\triangle ABC$ и точка M во неговата внатрешност. Докажи, дека

$$\min\{\overline{MA}, \overline{MB}, \overline{MC}\} + \overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} < \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA}.$$

Решение. Прво ќе ја докажеме следнава лема.

Лема. Ако X е внатрешна точка на конвексниот четириаголник $ABCD$, тогаш

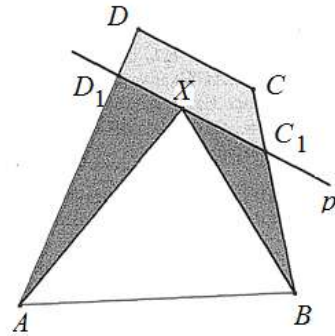
$$\overline{XA} + \overline{XB} < \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA}.$$

Доказ. Низ точката X повлекуваме права p паралелна со CD . Нека $p \cap BC = C_1$ и $p \cap AD = D_1$. Од неравенството на триаголник, применето за триаголниците AXD_1 и BXC_1 и четириаголникот C_1CDD_1 добиваме

$$\begin{aligned}\overline{XA} &< \overline{AD_1} + \overline{D_1X}, \\ \overline{XB} &< \overline{BC_1} + \overline{C_1X}, \\ \overline{C_1D_1} &< \overline{C_1C} + \overline{CD} + \overline{DD_1}.\end{aligned}$$

Според тоа,

$$\begin{aligned}\overline{XA} + \overline{XB} &< \overline{AD_1} + \overline{D_1X} + \overline{BC_1} + \overline{C_1X} \\ &= \overline{AD_1} + \overline{C_1D_1} + \overline{BC_1} \\ &< \overline{AD_1} + \overline{C_1C} + \overline{CD} + \overline{DD_1} + \overline{BC_1} \\ &= \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{AD},\end{aligned}$$



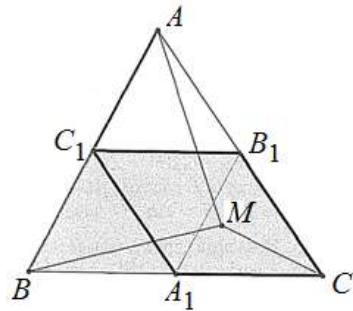
со што тврдењето е докажано. ■

Да се вратиме на задачата.

Нека A_1, B_1, C_1 се средините на страните BC, CA, AB , соодветно. Да забележиме дека барем два од четириаголниците BCB_1C_1, CAC_1A_1 и ABA_1B_1 во својата внатрешност или на границата ја содржат точката M . Без ограничување на општоста нека се тоа четириаголниците BCB_1C_1 и CAC_1A_1 .

Од докажаната лема следува

$$\begin{aligned}\overline{MB} + \overline{MC} &< \overline{CB_1} + \overline{B_1C_1} + \overline{C_1B}, \\ \overline{MC} + \overline{MA} &< \overline{AC_1} + \overline{C_1A_1} + \overline{A_1C}.\end{aligned}$$



Ако ги собереме последните неравенства и искористиме дека точките A_1, B_1, C_1 се средините на страните BC, CA, AB , добиваме

$$\begin{aligned}\overline{MB} + \overline{MC} + \overline{MC} + \overline{MA} &< \overline{CB_1} + \overline{B_1C_1} + \overline{C_1B} + \overline{AC_1} + \overline{C_1A_1} + \overline{A_1C} \\ &= \overline{AB} + \frac{\overline{CA}}{2} + \frac{\overline{BC}}{2} + \frac{\overline{CA}}{2} + \frac{\overline{BC}}{2} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA}.\end{aligned}$$

Но, $\overline{MC} \geq \min\{\overline{MA}, \overline{MB}, \overline{MC}\}$, па затоа

$$\begin{aligned} \min\{\overline{MA}, \overline{MB}, \overline{MC}\} + \overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} &\leq \overline{MB} + \overline{MC} + \overline{MC} + \overline{MA} \\ &< \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA}, \end{aligned}$$

што и требаше да се докаже.

14. Нека a, b, c се должините на страните на $\triangle ABC$ и $2s = a + b + c$ е неговиот периметар. Докажи, дека

$$\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-b} + \frac{1}{s-c} \geq 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right). \quad (1)$$

Решение. Од неравенството на триаголник следува

$$s - a = \frac{b+c-a}{2} > 0.$$

Аналогно се докажува дека $s - b > 0$ и $s - c > 0$. Од неравенството меѓу аритметичката и хармониската средина за броевите $\frac{1}{s-a}$ и $\frac{1}{s-b}$ добиваме

$$\frac{\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-b}}{2} \geq \frac{2}{\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-b}} = \frac{2}{s-a+s-b} = \frac{2}{c},$$

па затоа $\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-b} \geq \frac{4}{c}$. Аналогно се докажува дека $\frac{1}{s-b} + \frac{1}{s-c} \geq \frac{4}{a}$ и $\frac{1}{s-c} + \frac{1}{s-a} \geq \frac{4}{b}$. Конечно, ако ги собереме последните три неравенства и поделиме со 2 го добиваме неравенството (1). Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $\frac{1}{s-a} = \frac{1}{s-b} = \frac{1}{s-c}$, т.е. ако и само ако $a = b = c$.

15. Нека a, b, c се должините на страните на $\triangle ABC$. Докажи, дека

$$\sqrt{a+b-c} + \sqrt{b+c-a} + \sqrt{c+a-b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}.$$

Решение. Ако го примениме неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина за броевите $\sqrt{a+b-c}$ и $\sqrt{b+c-a}$ добиваме

$$\frac{\sqrt{a+b-c} + \sqrt{b+c-a}}{2} \leq \sqrt{\frac{(a+b-c)^2 + (b+c-a)^2}{2}} = \sqrt{\frac{a+b-c+b+c-a}{2}} = \sqrt{b}.$$

Аналогно се докажуваат неравенствата

$$\frac{\sqrt{b+c-a} + \sqrt{c+a-b}}{2} \leq \sqrt{c} \text{ и } \sqrt{a+b-c} + \sqrt{c+a-b} \leq \sqrt{a}.$$

Ако ги собереме последните три неравенства го добиваме бараното неравенство. Јасно, знак за равенство важи ако и само ако

$$\sqrt{a+b-c} = \sqrt{b+c-a} = \sqrt{c+a-b},$$

т.е. ако и само ако $a = b = c$.

16. За $\triangle ABC$ радиусот на впишаната кружница е еднаков на $\frac{\sqrt{3}}{3}$, а периметарот е еднаков на 6. Определи ги аглиите на $\triangle ABC$.

Решение. Плоштината на $\triangle ABC$ е $P = sr = \frac{6}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$. Од неравенството межу аритметичката и геометриската средина применето на броевите $s-a, s-b$ и $s-c$ добиваме

$$\sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)} \leq \frac{s-a+s-b+s-c}{3} = \frac{s}{3}, \quad (1)$$

т.е.

$$(s-a)(s-b)(s-c) \leq \frac{s^3}{27}.$$

Од друга страна, според Хероновата формула имаме

$$\sqrt{3} = P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \leq \sqrt{s \cdot \frac{s^3}{27}} = \frac{s^2 \sqrt{3}}{9} = \sqrt{3},$$

што значи дека во неравенството (1) важи знак за равенство, од што следува $s-a = s-b = s-c$, т.е. $a = b = c$. Значи, $\triangle ABC$ е рамностран и сите негови агли се еднакви на 60° .

17. Во прав агол со теме A впишана е кружница и B и C се допирните точки со краците на аголот. Докажи, ако на дадената кружница повлечеме тангентата која ги сече отсечките AB и AC во точките M и N , тогаш

$$\frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{AC}) > \overline{MB} + \overline{NC} > \frac{1}{3}(\overline{AB} + \overline{AC})$$

Решение. Ако K е допирната точка со кружницата, тогаш $\overline{BM} = \overline{MK}$, $\overline{KN} = \overline{NC}$, па е

$$\overline{MN} = \overline{BM} + \overline{CN}. \quad (1)$$

Но, $\overline{MN} < \overline{AM} + \overline{CN}$, па затоа

$$2\overline{MN} < \overline{BM} + \overline{AM} + \overline{CN} + \overline{AN} = \overline{AB} + \overline{BC}$$

т.е.

$$\overline{MN} < \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{BC})$$

Од друга страна, $\overline{MN} > \overline{AN}$ и $\overline{MN} > \overline{AM}$, па затоа $2\overline{MN} > \overline{AN} + \overline{AM}$ и според (1) добиваме

$$3\overline{MN} > \overline{AN} + \overline{NC} + \overline{AM} + \overline{MB} = \overline{AB} + \overline{BC}$$

т.е.

$$\overline{MN} > \frac{1}{3}(\overline{AB} + \overline{BC}).$$

18. Даден е $\triangle ABC$. На лакот BC на опишаната кружница околу $\triangle ABC$, кој не ја содржи точката A , земени се точки X и Y такви што $\angle BAX = \angle CAU$. Нека M е средината на тетивата AX . Докажи, дека

$$\overline{BM} + \overline{CM} > \overline{AY}.$$

Решение. Нека O е центарот на опишаната кружница околу $\triangle ABC$. Тогаш $OM \perp AX$. Повлекуваме нормала од B на OM и нека таа ја сече опишаната кружница во точката Z . Од $BZ \perp OM$ следува дека OM е симетрала на BZ . Според тоа, $\overline{MZ} = \overline{MB}$.

Сега од неравенството на триаголник следува

$$\overline{BM} + \overline{MC} = \overline{ZM} + \overline{MC} > \overline{CZ}$$

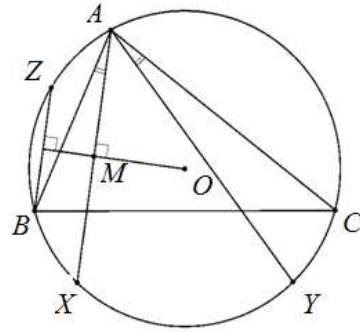
Но, $BZ \parallel AX$, па затоа

$$AZ = BX = CY$$

од каде добиваме

$$\overline{ZAC} = \overline{ZA} + \overline{AC} = \overline{YC} + \overline{CA} = \overline{YCA},$$

т.е. $\overline{CZ} = \overline{AY}$. Затоа $\overline{BM} + \overline{CM} > \overline{AY}$.



19. Во рамнината се дадени точка M и квадрат $ABCD$ така што $\overline{MA} = 3$ и $\overline{MB} = 2$. Докажи дека

$$3\sqrt{2} - 2 \leq \overline{MD} \leq 3\sqrt{2} + 2$$

Решение. Нека точката N е добиена со ротација на M околу A за агол 90° . Бидејќи $ABCD$ е квадрат, точката D можеме да ја разгледуваме како точка добиена со ротација на B околу A за агол 90° . Затоа, $\triangle ABM \cong \triangle ADN$, $\overline{DN} = 2$ и $\overline{AN} = 3$, направи цртеж. Бидејќи $\triangle MAN$ е рамнокрак правоаголен со краци $\overline{AM}$ и $\overline{AN}$ добиваме

$$\overline{MN} = \overline{AM}\sqrt{2} = 3\sqrt{2}.$$

Тогаш D, M и N се темиња на $\triangle DMN$, па затоа

$$\overline{MD} \leq \overline{MN} + \overline{ND} \text{ и } \overline{MD} \geq |\overline{MN} - \overline{ND}|,$$

т.е.

$$|3\sqrt{2} - 2| \leq \overline{MD} \leq 3\sqrt{2} + 2.$$

20. Во конвексен четириаголник $ABCD$ важи

$$\overline{AB} + \overline{BD} \leq \overline{AC} + \overline{CD}$$

Докажи, дека $\overline{AB} \leq \overline{AC}$.

Решение. Да претпоставиме дека $\overline{AB} > \overline{AC}$. Тогаш

$$\overline{AC} + \overline{BD} < \overline{AB} + \overline{BD} \leq \overline{AC} + \overline{CD}$$

па затоа $\overline{BD} < \overline{CD}$. Меѓутоа од $\overline{AB} > \overline{AC}$ следува

$$\angle DBC < \angle ABC < \angle ACB < \angle DCB,$$

од што следува $\overline{CD} < \overline{BD}$, што е противречност (направи цртеж).

21. Даден е конвексен четириаголник $ABCD$ таков што $\angle ADC = 30^\circ$ и $\overline{BD} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC}$. Докажи, дека дијагоналата BD е симетрала на аголот $\angle ABC$.

Решение. Нека B_1 и B_2 се симетричните точки на точката B во однос на правите DA и DC , соодветно. По конструкција имаме $\overline{DB_1} = \overline{DB} = \overline{DB_2}$, $\angle B_1DA = \angle BDA$ и $\angle B_2DC = \angle BDC$. Според тоа, $\overline{DB_1} = \overline{DB_2}$ и

$$\begin{aligned} \angle B_1DB_2 &= \angle B_1DA + \angle BDA + \angle CBD + \angle B_2DC \\ &= 2(\angle BDA + \angle CBD) \\ &= 2\angle ADC = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ, \end{aligned}$$

што значи дека $\triangle B_1DB_2$ е рамностран и

$$\overline{B_1B_2} = \overline{B_1D} = \overline{B_2D} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC}.$$

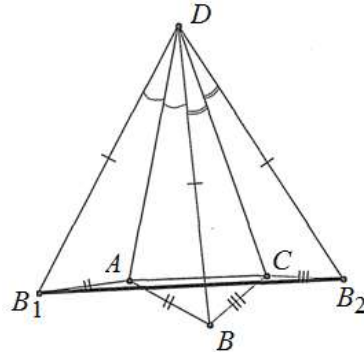
Од неравенството на триаголник следува

$$\overline{B_1A} + \overline{AC} + \overline{CB_2} \geq \overline{B_1B_2}. \quad (1)$$

Според конструкцијата на точките B_1 и B_2 имаме $\overline{B_1A} = \overline{BA}$ и $\overline{CB_2} = \overline{CB}$, па затоа

$$\begin{aligned} \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} &= \overline{B_1A} + \overline{AC} + \overline{CB_2} \\ &\geq \overline{B_1B_2} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} \end{aligned}$$

од каде следува дека во (1) важи знак за равенство, па затоа точките A и C припаѓаат на правата B_1B_2 . Од рамностраниот $\triangle B_1DB_2$ следува дека $\angle DBA = \angle DB_1B_2 = 60^\circ$. По конструкција на точката B_1 следува $\angle DBA = \angle DB_1A = 60^\circ$.



Аналогно се докаже дека $\angle DBC = \angle DB_2A = 60^\circ$. Затоа $\angle DBA = \angle DBC = 60^\circ$, т.е. BD е симетрала на аголот $\angle ABC$.

22. За должините на страните a, b, c на $\triangle ABC$ важи

$$a^2 + b^2 + c^2 = a^3 + b^3 + c^3.$$

Опреди ја максималната можна плоштина на $\triangle ABC$.

Решение. Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$(a^3 + b^3 + c^3)(a + b + c) \geq (a^2 + b^2 + c^2)^2. \quad (1)$$

Ако го искористиме познатото неравенство

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{(a+b+c)^2}{3}, \quad (2)$$

добиваме дека

$$(a^3 + b^3 + c^3)(a + b + c) \geq (a^2 + b^2 + c^2) \frac{(a+b+c)^2}{3}$$

т.е.

$$3(a^3 + b^3 + c^3) \geq (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2).$$

Сега, од условот на задачата следува $a + b + c \leq 3$. Во задача 7 докажавме дека $P \leq \frac{s^2 \sqrt{3}}{9} = \frac{(a+b+c)^2 \sqrt{3}}{36}$. Оттука и од последното неравенство следува $P \leq \frac{3^2 \sqrt{3}}{36} = \frac{\sqrt{3}}{4}$. Значи, максималната плоштина на триаголникот кој ги задоволува условите на задачата е еднаква на $\frac{\sqrt{3}}{4}$ и таа се достигнува ако и само ако во неравенствата (1) и (2) важи равенство, т.е. ако и само ако $a = b = c = 1$.

23. Даден е $\triangle ABC$ со тап агол кај темето A . Нека е $a = \overline{BC}$, $b = \overline{CA}$ и h_a и h_b се висините спуштени од темињата A и B , соодветно. Докажи дека

$$a + h_a > b + h_b$$

Решение. Нека P е плоштината на $\triangle ABC$. Од условите на задачата следува $a > b > h_a$ и $2P = ah_a = bh_b < ab$. Затоа $\frac{2P}{ab}(a - b) < a - b$, од што следува $\frac{2P}{b} - \frac{2P}{a} < a - b$, т.е. $h_b - h_a < a - b$, од што следува бараното неравенство.

24. Нека P е внатрешна точка во $\triangle ABC$ е нека D, E и F се нејзините

ортогонални проекции на правите BC , CA и AB , соодветно. Најди ги сите точки P за кои збирот

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{PD}} + \frac{\overline{CA}}{\overline{PE}} + \frac{\overline{AB}}{\overline{PF}}$$

е најмал.

Решение. Ако ги воведеме ознаките $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$, $c = \overline{AB}$, тогаш треба да го одредиме минимумот на изразот

$$S = \frac{a}{\overline{PD}} + \frac{b}{\overline{PE}} + \frac{c}{\overline{PF}}.$$

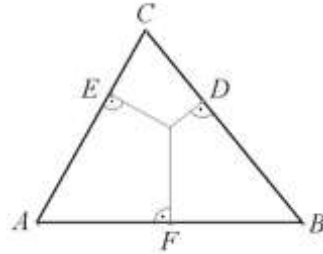
Ако со P ја означиме плоштината на триаголникот ABC , тогаш

$$2P = a \cdot \overline{PD} + b \cdot \overline{PE} + c \cdot \overline{PF}$$

па затоа

$$\begin{aligned} 2PS &= a^2 + b^2 + c^2 + bc\left(\frac{\overline{PF}}{\overline{PE}} + \frac{\overline{PE}}{\overline{PF}}\right) + ca\left(\frac{\overline{PD}}{\overline{PF}} + \frac{\overline{PF}}{\overline{PD}}\right) + ca\left(\frac{\overline{PD}}{\overline{PE}} + \frac{\overline{PE}}{\overline{PD}}\right) \\ &\geq a^2 + b^2 + c^2 + 2(bc + ca + ab) \\ &= (a + b + c)^2. \end{aligned}$$

Знак за равенство важи ако и само ако $\overline{PD} = \overline{PE} = \overline{PF}$, т.е. ако P е центар на кружницата опишана околу триаголникот ABC . Тогаш дадениот израз има минимална вредност $S_{\min} = \frac{a+b+c}{2P}$.



25. Нека a, b, c се должини на страни на $\triangle ABC$. Докажи го неравенството

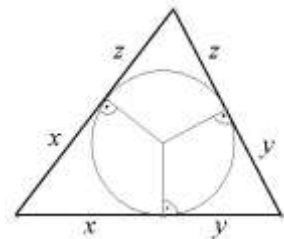
$$a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \geq 0.$$

Кога важи знак за равенство?

Решение. *Прв начин.* За секој триаголник со должини на страни a, b, c постојат ненегативни броеви x, y, z , такви што $a = y + z$, $b = z + x$, $c = x + y$ (види цртеж). Ако овие равенства ги замениме во даденото неравенство, после средувањето го добиваме еквивалентното неравенство

$$xy^3 + yz^3 + z^3 \geq xyz(x + y + z).$$

Последното неравенство следува од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц применето на броевите:



$$a_1 = \sqrt{z}, a_2 = \sqrt{x}, a_3 = \sqrt{y}, b_1 = \sqrt{xy^3}, b_2 = \sqrt{yz^3}, b_3 = \sqrt{zx^3},$$

при што знак за равенство е исполнет ако и само ако

$$\frac{xy^3}{z} = \frac{yz^3}{x} = \frac{zx^3}{y}.$$

т.е. ако и само ако $x = y = z$, односно $a = b = c$.

Втор начин. Даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}[(a+b-c)(a-b+c)(c-a)^2 + \\ & + (b+c-a)(b-c+a)(b-a)^2 \\ & + (c+a-b)(c-a+b)(c-b)^2] \geq 0, \end{aligned}$$

кое следува од неравенството на триаголник. Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a = b = c$.

26. Во остроаголниот $\triangle ABC$ тежишната линија AM е подолга од страната AB . Докажи, дека $\triangle ABC$ може да биде расечен на најмногу три дела од кои може да се состави ромб.

Решение. Нека N е средината на страната AC , а K е точка од правата MN таква што $\overline{MK} = \overline{MN}$. Тогаш триаголниците MNC и MKB се симетрични во однос на M , па затоа се складни. Да направиме расекување по средната линија MN . Поставувајќи го $\triangle MNC$ така што ќе се совпадне со $\triangle MKB$ го добиваме паралелограмот $ANKB$ и ако $\overline{AN} = \overline{AB}$, тогаш ромбот е составен.

Нека $\overline{AN} < \overline{AB}$. Конструираме кружница k со центар A и радиус $\overline{AB}$. Тогаш точката N е внатрешна, а точката M е надворешна за k . Нека k ја сече отсечката NM во точката P . Од паралелограмот $ANKB$ го отсекуваме триаголникот APN и го поставуваме така што страната AN да се совпадне со страната BK , при што добиваме ромб.

Нека $\overline{AN} > \overline{AB}$. Бидејќи $\triangle ABC$ е остроаголен, подножјето H на висината CH лежи на отсечката AB . Подножјето T на нормалата повлечена од N кон AB е средина на отсечката AH . Според тоа, $\overline{BT} > \overline{AT}$ и затоа $\overline{BN} > \overline{AN}$. Значи кружницата со центар во B и радиус $\overline{AN}$ ја сече страната AN во точка S (точката N е надворешна, а точката A е внатрешна за таа кружница). Од паралелограмот $ANKB$ го отсекуваме $\triangle ABS$ и го поставуваме така што страната AB да се совпадне со страната NK , при што добиваме ромб.

Забелешка. Може да се докаже, дека и тапоаголен триаголник може да се расече на три дела од кои може да се состави ромб. Навистина, ако $\angle B$ е тап и $\overline{AB} \geq \overline{BC}$, тогаш тежишната линија AM е подолга од страната AB , бидејќи притоа $\overline{AN} < \overline{AB}$.

27. Дадени се 2016 точки во рамнината, растојанијата меѓу кои се различни. Секоја точка е сврзана со отсечка со најблиската до неа точка. Нека M е множеството од тие отсечки.

а) Да се определи можниот најмал и најголем број елементи на M со различни должини.

б) Докажи, дека ако l е искршена линија од отсечки во M , тогаш таа е отворена (т.е. крајот на l не се совпаѓа со почетокот) и не се сече самата.

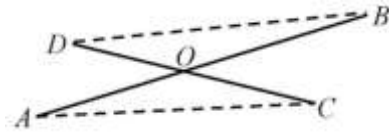
Решение. а) Нека A_1 е произволна точка од дадените и A_2 е најблиската до неа. За најблиската точка A_3 до A_2 имаме две можности: да се совпадне со A_1 или да е различна од A_1 . Во првиот случај точките A_1 и A_2 са крајни само на отсечката A_1A_2 и завршуваме со нив. Да земеме произволна друга точка од дадените и расудуваме за неа како за A_1 . Во вториот случај расудуваме за A_2 и A_3 така, како што направивме за A_1 и A_2 , т.е. ја разгледуваме најблиската точка A_4 до A_3 и двете можности за неа: да се совпадне со A_2 или да е различна од A_2 . Ја следиме опишаната организација на разгледување на дадените точки до нивно исцрпување. Јасно, можно е секогаш новоизбраната точка да се совпаѓа со претходната и во тој случај сите 2016 точки се групират по парови. Во секој пар за единиот крај најблиска точка е вториот крај на отсечката која ги сврзува, а за вториот крај најблиска точка е првиот крај на отсечката која ги сврзува. Бројот на елементите на M во тој случај е 1008 и тоа е најмал број. Можно е меѓутоа секој пат новоизбраната точка да е на помало растојание и тогаш сите точки се подредуваат во низа $A_1 A_2 A_3 \dots A_{2015} A_{2016}$, така што за секои два последователни пара важи $\overline{A_i A_{i+1}} > \overline{A_{i+1} A_{i+2}}$ (i се менува од 1 до 2014). Бројот на елементите на M во овој случај е 2015 и тоа е бараниот најголем број.

б) Доволно е да забележиме, дека за секој искршена линија $A_1 A_2 A_3 \dots A_{k-1} A_k$ ($4 \leq k \leq 2016$) е исполнето $\overline{A_i A_{i+1}} > \overline{A_{i+1} A_{i+2}}$ (i се менува од

1 до $k-2$). Не е можно $A_1 \equiv A_k$, бидејќи во спротивен случај треба да е исполнето $A_1 A_2 > A_{k-1} A_k = A_{k-1} A_1$ и ќе добиеме, дека A_{k-1} е поблиску до A_1 , отколку A_2 . Тоа противречи на изборот на A_2 . Со тоа е докажан првиот дел од б). Да допуштиме, дека има две отсечки AB (B е најблиската до A) и CD (C е најблиската до D) од M , кои се сечат в точка O .

Имаме, дека $\overline{AC} > \overline{AB}$, бидејќи B е најблиската до A . Аналогно $\overline{DB} > \overline{DC}$, бидејќи C е најблиската до D . Ги собираме двете неравенства:

$$\begin{aligned}\overline{AC} + \overline{DB} &> \overline{AB} + \overline{DC} \\ &= \overline{AO} + \overline{OB} + \overline{DO} + \overline{OC} \\ &= (\overline{AO} + \overline{OC}) + (\overline{DO} + \overline{OB}) \\ &> \overline{AC} + \overline{DB}.\end{aligned}$$



Последното неравенство е последица од неравенството на триаголник.

Така добиваме, дека $\overline{AC} + \overline{DB} > \overline{AC} + \overline{DB}$, што е противречност.

28. Нека G и O се соодветно тежиштето и центарот на опишаната кружница околу $\triangle ABC$, а R и r соодветно се радиусите на опишаната и впишаната кружница. Докажи дека $\overline{OG} \leq \sqrt{R(R-2r)}$.

Решение. Ако го искористиме равенството на Лајбниц

$$\overline{OG}^2 = R^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9},$$

добиваме дека даденото неравенство е еквивалентно на неравенството

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 18Rr.$$

Но,

$$R = \frac{abc}{4P} \text{ и } r = \frac{2P}{a+b+c},$$

па затоа доволно е да докажеме дека

$$(a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2) \geq 9abc.$$

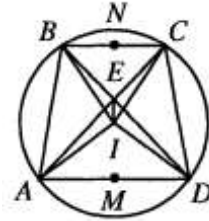
Последното следува ако ги помножиме неравенствата

$$a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc} \text{ и } a^2 + b^2 + c^2 \geq 3\sqrt[3]{a^2 b^2 c^2}.$$

III.3. ЧЕТИРИАГОЛНИК

1. Дијагоналите AC и BD на тетивен четириаголник $ABCD$ со центар на опишаната кружница I се сечат во точката E . Докажи, дека ако средините на отсечките AD, BC и IE лежат на една права, тогаш $\overline{AB} = \overline{CD}$.

Решение. Со M и N да ги означиме средините на AD и BC соодветно. Без ограничување на општоста можеме да сметаме дека I е внатрешна точка за $AMNB$, а E е внатрешна точка за $MDCN$. Имаме



$$\begin{aligned} P_{MIN} &= P_{AMNB} - P_{ABI} - P_{AMI} - P_{BNI} \\ &= P_{AMNB} - P_{ABI} - \frac{1}{2}(P_{ADI} + P_{BCI}) \\ &= P_{AMNB} - \frac{1}{2}P_{ABI} - \frac{1}{2}(P_{ABCD} - P_{CDI}). \end{aligned}$$

Аналогно, $P_{MEN} = P_{MDCN} - \frac{1}{2}P_{DCE} - \frac{1}{2}(P_{ABCD} - P_{ABE})$. Сега од $P_{MIN} = P_{MEN}$ добиваме

$$\begin{aligned} P_{AMNB} - \frac{1}{2}P_{ABI} - \frac{1}{2}(P_{ABCD} - P_{CDI}) &= P_{MDCN} - \frac{1}{2}P_{DCE} - \frac{1}{2}(P_{ABCD} - P_{ABE}), \\ \frac{1}{2}P_{ADN} + \frac{1}{2}P_{ABC} - \frac{1}{2}P_{ABI} - \frac{1}{2}(P_{ABCD} + \frac{1}{2}P_{CDI}) &= \\ &= \frac{1}{2}P_{ADN} + \frac{1}{2}P_{CBD} - \frac{1}{2}P_{DCE} - \frac{1}{2}(P_{ABCD} + \frac{1}{2}P_{ABE}), \end{aligned}$$

$$P_{ABC} - P_{CBD} + P_{DCE} - P_{ABE} = P_{ABI} - P_{CDI},$$

$$P_{ABE} - P_{CDE} + P_{DCE} - P_{ABE} = P_{ABI} - P_{CDI}$$

Затоа $P_{ABI} = P_{CDI}$, од каде следува дека $\overline{AB} = \overline{CD}$.

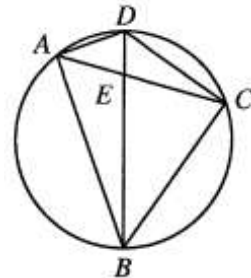
2. Нека E е пресечната точка на дијагоналите AC и BD на тетивниот четириаголник $ABCD$. Ако $\overline{AC} = \overline{BC}$, $\overline{AD} = 5$, $\overline{BE} = 12$ и $\overline{DE} = 3$, определи го $\angle BCD$.

Решение. Ако симетралата на CD ја сече BD во точката O , тогаш

$$\begin{aligned} \angle COD &= 180^\circ - 2\angle ODC = 180^\circ - 2\angle BAC \\ &= \angle ACB = \angle ADO, \end{aligned}$$

па затоа $AD \parallel CO$. Тогаш

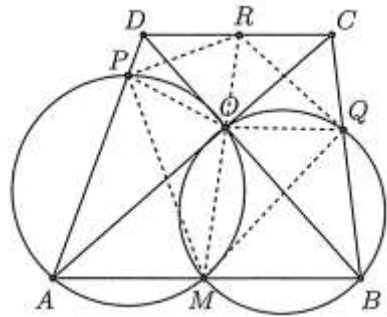
$$\frac{\overline{OE}}{3} = \frac{\overline{CO}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{OE} + 3}{5},$$



од каде добиваме $\overline{OE} = \frac{9}{2}$, т.е. O е средина на BD . Но, тоа значи дека $\angle BCD = 90^\circ$.

3. Даден е трапез $ABCD$ ($AB \parallel CD$) со заемно нормални дијагонали и пресечна точка на дијагоналите O . На основата AB е избрана точка M . Опишаните кружници околу $\triangle AMO$ и $\triangle BMO$ по втор пат ги сечат отсечките AD и BC во точките P и Q , соодветно. Докажи, дека центарот на опишаната кружница околу $\triangle MPQ$ лежи на средната линија на трапезот $ABCD$.

Решение. Нека правата MO ја сече отсечката CD во точка R , види цртеж. Четириаголниците $AMOP$ и $MBQO$ се тетивни (зошто?). Затоа, $\angle BMO = \angle APO$ и $\angle BMO = \angle CQO$. Понатаму, $AB \parallel CD$, па затоа $\angle BMO = \angle DRO$, од каде добиваме $\angle BMO = \angle CQO = \angle APO = \angle DRO$.



Според тоа, четириаголниците $POED$ и $OQCR$ се тетивни. Имаме

$$\begin{aligned}\angle MQR &= \angle MQO + \angle OQR = \angle MBO + \angle OCR \\ &= \angle MBO + \angle OAM = 90^\circ\end{aligned}$$

и аналогно $\angle MPR = 90^\circ$. Тоа значи, дека четириаголникот $MQRP$ е тетивен и центарот на опишаната кружница е средината на отсечката MR , која е средна линија на трапезот $ABCD$. Сега тврдењето на задачата следува од тоа што опишаната кружница околу $\triangle MPQ$ се совпаѓа со опишаната кружница околу четириаголникот $MQRP$.

4. Даден е конвексен четириаголник $ABCD$. Над страните AB и CD кон внатрешноста на четириаголникот се конструирани рамнострани триаголници ABP и DCM , а над страните AD и BC надворешно за четириаголникот се конструирани рамнострани триаголници ADN и BCQ . Докажи, дека точките M, N, P и Q се темиња на паралелограм.

Решение. Да разгледаме ротација ρ околу точката A за агол 60° . Имаме, $\rho(B) = P$ и $\rho(D) = N$, па затоа $\overline{BD} = \overline{PN}$. Понатаму, ако ρ_1 е ротација околу точката C за агол 60° добиваме $\rho_1(B) = Q$ и

$\rho_1(D) = N$, па затоа $\overline{BD} = \overline{MQ}$. Според тоа, $\overline{MQ} = \overline{PN}$.

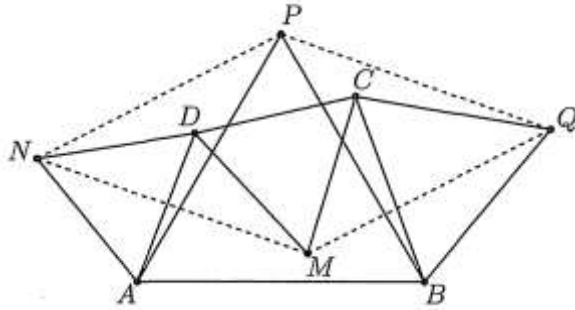
Аналогно, со помош на ротации околу точките B и D за агли еднакви на 60° се докажува дека

$$\overline{MN} = \overline{AC} = \overline{PQ}.$$

Конечно, од $\overline{MQ} = \overline{PN}$

и $\overline{MN} = \overline{PQ}$ следува,

дека точките M, N, P и Q се темиња на паралелограм.



5. На дадена кружница k се избрани точки A, B и C . Конструирана е кружница ω , која се допира до тетивите AB, AC и внатрешно до кружницата k во точките P, Q и R , соодветно. Нека правите PR и QR по втор пат ја сечат k во точките M и N соодветно, а точката T е таква, што четириаголникот $AMTN$ е паралелограм. Докажи дека точките P, Q и T лежат на една права.

Решение. Четириаголникот $AMRN$ е тетивен, па затоа

$$\angle AMP + \angle ANQ = \angle AMR + \angle ANR = 180^\circ.$$

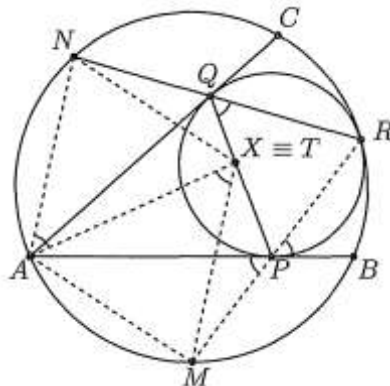
Нека опишаните кружници околу $\triangle AMP$ и $\triangle ANQ$ по втор пат се сечат во точката X . Тогаш

$$\begin{aligned} \angle AXP + \angle AXQ &= (180^\circ - \angle AMP) + (180^\circ - \angle ANQ) \\ &= 360^\circ - (\angle AMP + \angle ANQ) = 180^\circ \end{aligned}$$

што значи дека $X \in PQ$. Понатаму,

$$\begin{aligned} \angle AXM &= \angle APM = \angle BPR \\ &= \angle PQR = \angle XAM \end{aligned}$$

и затоа $MX \parallel AN$. Аналогно, $NX \parallel AM$, што значи дека четириаголникот $AMXN$ е паралелограм и $X \equiv T$, со што доказот е завршен.



6. Даден е квадрат $ABCD$ со должина на страна a . Точките M и N лежат

на страните BC и CD , соодветно и се такви што $\angle MAN = 45^\circ$.
Опреди го периметарот на триаголникот MNC .

Решение. Нека $AP \perp AM$ ($P \in CD$). Бидејќи

$\angle BAD = \angle MAP$, добиваме

$$\angle BAM = 90^\circ - \angle MAD = \angle MAN.$$

Освен тоа $\overline{AB} = \overline{AD}$ и $\angle ABM = \angle ADP$. Според

тоа, $\triangle ABM \cong \triangle ADP$, од каде следува,

дека $\overline{AM} = \overline{AP}$ и $\overline{BM} = \overline{DP}$. Од

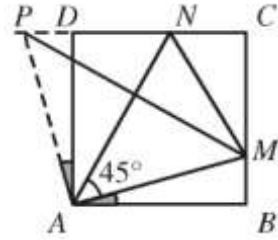
$$\angle PAN = 90^\circ - \angle MAN = 45^\circ$$

наоѓаме дека AN е симетрала на аголот во рамнокракиот триаголник AMP , што значи дека AN е симетрала на отсечката MP . Според тоа, $\overline{PN} = \overline{MN}$. Од

$$\overline{PN} = \overline{PD} + \overline{DN} = \overline{BM} + \overline{DN}$$

наоѓаме $\overline{MN} = \overline{BM} + \overline{DN}$. За периметарот на триаголникот MNC добиваме

$$P_{MCN} = \overline{MC} + \overline{CN} + \overline{NM} = \overline{MC} + \overline{CN} + \overline{DN} + \overline{BM} = \overline{BC} + \overline{CD} = 2a.$$



7. Четириаголникот $ABCD$ е опишан околу кружница со радиус r , а точките M и N се средини на страните AB и CD . Докажи, дека $\overline{MN} \geq 2r$.

Решение. Последователно добиваме (направи цртеж):

$$\begin{aligned} 2r(\overline{AB} + \overline{CD}) &= r(\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA}) = 2P_{ABCD} \\ &= (P_{ABC} + P_{ABD}) + (P_{CDA} + P_{CDB}) \\ &= 2P_{ABN} + 2P_{CDM} \leq \overline{MN} \cdot \overline{AB} + \overline{MN} \cdot \overline{CD} \\ &= \overline{MN} \cdot (\overline{AB} + \overline{CD}), \end{aligned}$$

од каде следува бараното неравенство.

8. Четириаголникот $ABCD$ е впишан во кружница k . Полуправите DA и CB се сечат во точката N , а NT е тангентата на кружницата k . Дијагоналите AC и BD се сечат во точката P , која е тежиште на $\triangle NTD$. Опреди го односот $\overline{NT} : \overline{AP}$.

Решение. Од условот на задачата следува дека T припаѓа на лакот BC кој не ја содржи точката A , види цртеж. Нека $M \in NT \cap DP$ е средината на NT . Од својствата на тангентата и секантата следува

$$\overline{MB} \cdot \overline{MD} = \overline{MT}^2 = \overline{MN}^2.$$

Според тоа,

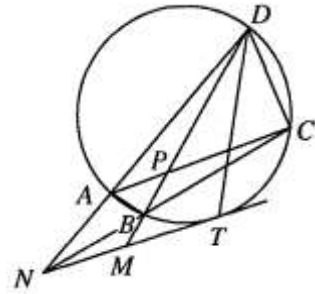
$$\overline{MB} : \overline{MN} = \overline{MN} : \overline{MD},$$

па затоа $\triangle NMB \sim \triangle DMN$. Добиваме

$$\angle MNB = \angle MDN = \angle NCA,$$

па затоа $NT \parallel AC$. Според тоа,

$$\overline{NT} : \overline{AP} = 2\overline{NM} : \overline{AP} = 2\overline{MD} : \overline{PD} = 3:1.$$

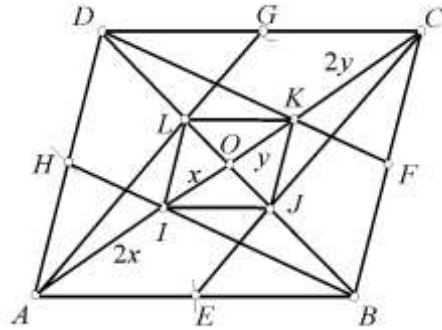


9. Нека $ABCD$ е паралелограм и нека E, F, G и H се средини на страните AB, BC, CD и DA , соодветно. Ако $BH \cap AC = I, BD \cap EC = J, AC \cap DF = K$ и $AG \cap BD = L$, докажи дека четириаголникот $IJKL$ е паралелограм.

Решение. Нека $AC \cap BD = O$.

Јасно, AO и BH се тежишни линии на триаголникот ABD , од што следува дека I е тежиште на ABD .

Слично K е тежиште на триаголникот BCD . Ако $\overline{IO} = x$, тогаш $\overline{AI} = 2x$. На потполно аналоген начин се добива дека ако $\overline{KO} = y$, тогаш $\overline{CK} = 2y$. Според тоа,



$$3x = \overline{AO} = \overline{CO} = 3y, \text{ т.е. } \overline{IO} = x = y = \overline{KO}.$$

Аналогно се докажува дека $\overline{JO} = \overline{LO}$.

Конечно, дијагоналите на четириаголникот $IJKL$ се преполовуваат, што значи дека тој е паралелограм.

10. Во триаголникот ABC точките A_1, B_1 и C_1 се средини на страните BC, CA и AB , соодветно и M е тежиште. Правата која минува низ A_1 и е паралелна со BB_1 ја сече правата B_1C_1 во точката D . Докажи, дека ако точките A, B_1, M, C_1 лежат на една кружница, тогаш $\angle ADA_1 = \angle CAB$.

Решение. Од $A_1D \parallel MB_1$ и $A_1, B_1, M, C_1 \in k$ следува

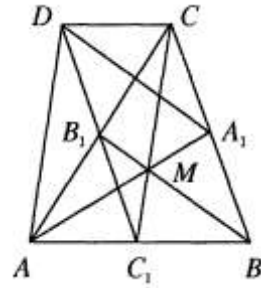
$$\angle AA_1D = \angle AMB_1 = \angle AC_1B_1 = \angle ABC.$$

Од $B_1C_1 \parallel BA_1$ и $A_1D \parallel BB_1$ следува дека четириаголникот BA_1DB_1 е паралелограм. Тогаш $\overline{BA_1} = \overline{B_1D} = \overline{B_1C_1}$. Но, $\overline{AB_1} = \overline{B_1C}$, па затоа четириаголникот AC_1CD е паралелограм, т.е. $AD \parallel CC_1$. Според тоа

$$\angle DAA_1 = \angle CMA_1 = \angle AMC_1 = \angle AB_1C_1 = \angle ACB.$$

Оттука следува

$$\angle ADA_1 = 180^\circ - \angle DAA_1 - \angle DA_1A = 180^\circ - \angle ABC - \angle ACB = \angle CAB.$$



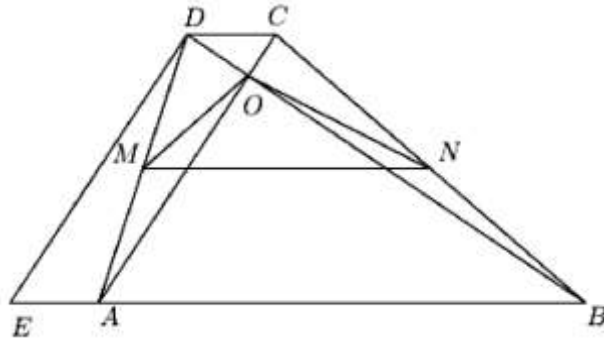
11. Нека $ABCD$ е трапез со основи AB и CD и нека $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$, $\overline{CD} = c$, $\overline{DA} = d$, $\overline{AC} = m$ и $\overline{BD} = n$. Познато е дека важи

$$m^2 + n^2 = (a + c)^2.$$

а) Докажи дека AC и BD се заедно нормални.

б) Докажи дека $ac < bd$.

Решение. а) Од точката D повлекуваме права паралелна на AC . Нека таа права ја сече правата AB во точката E (види цртеж). Четириаголникот $EACD$ е паралелограм, па затоа $\overline{EA} = \overline{DC} = c$ и $\overline{DE} = \overline{AC} = d$.



Го разгледуваме триаголникот EBD . Имаме $\overline{EB}^2 = (a + c)^2$ и од условот на задната важи $m^2 + n^2 = (a + c)^2$, па затоа

$$\overline{EB}^2 = (a + c)^2 = m^2 + n^2 = \overline{ED}^2 + \overline{DB}^2,$$

што според обратната Питагорова теорема значи дека триаголникот EBD е правоаголен. Според тоа, $ED \perp BD$, па затоа $AC \perp BD$.

б) Нека M и N се средините на страните AD и BC , соодветно. Тогаш MN е средна линија на трапезот, па затоа важи $\overline{MN} = \frac{a+c}{2}$. Нека O е

пресекот на дијагоналите AC и BD на трапезот. Од $AC \perp BD$. Следува дека триаголниците AOD и BOC се правоаголници. Отсечките OM и ON се тежишни линии кои соодветствуваат на хипотенузите, па затоа $\overline{OM} = \frac{d}{2}$ и $\overline{ON} = \frac{b}{2}$.

Да го разгледаме триаголникот MNO . Имаме $\overline{MN} < \overline{MO} + \overline{ON}$, т.е. $\frac{a+c}{2} < \frac{b+d}{2}$, па затоа

$$a^2 + 2ac + c^2 < b^2 + 2bd + d^2. \quad (1)$$

Од правоаголните триаголници ABO и CDO добиваме $a^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2$ и $c^2 = \overline{OC}^2 + \overline{OD}^2$, па затоа

$$a^2 + c^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 + \overline{OC}^2 + \overline{OD}^2.$$

Од друга страна, од правоаголните триаголници AOD и BOC добиваме $d^2 = \overline{AD}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OD}^2$ и $b^2 = \overline{BC}^2 = \overline{OC}^2 + \overline{OB}^2$, па затоа

$$b^2 + d^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 + \overline{OC}^2 + \overline{OD}^2.$$

Според тоа, $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$, па од (1) следува дека $ac < bd$.

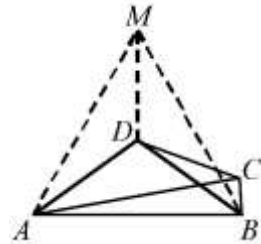
12. За конвексниот четириаголник $ABCD$ важи $\overline{AD} = \overline{BD}$, $\overline{AB} = \overline{AC}$, $\angle CAD = 25^\circ$ и $\angle ACB = 85^\circ$. Определи ги аглите на четириаголникот.

Решение. Од $\overline{AB} = \overline{AC}$ и $\angle ACB = 85^\circ$ следува

дека $\angle ABC = 85^\circ$ и $\angle BAC = 10^\circ$, па затоа

$$\angle BAD = \angle BAC + \angle CAD = 35^\circ.$$

Нека ABM е рамностран триаголник, при што точката M е во истата полурамнина во однос на AB , како и точките C и D . Тогаш $\angle MAD = 25^\circ$. Сега од $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{AM}$ и $\angle MAD =$

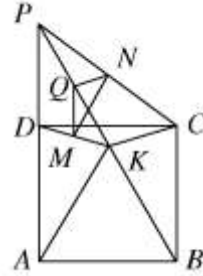


$\angle CAD = 25^\circ$ следува дека $\triangle ADC \cong \triangle ADM$ и $\angle ACD = \angle AMD$. Бидејќи MD е симетрала на заедничката страна на AB на $\triangle ABM$ и $\triangle ABD$, заклучуваме дека $\angle ACD = \angle AMD = 30^\circ$. Според тоа, $\angle ADC = 125^\circ$ и $\angle BCD = 115^\circ$.

13. Во внатрешноста на квадратот $ABCD$ е конструиран рамностран триаголник ABK . Правите BK и AD се сечат во точка P . Докажи, дека должината на отсечката која ги поврзува средините на отсечките KD и

CP е еднаква на половината од должината на страната на квадратот.

Решение. Триаголникот ABP е правоаголен и $\angle APB = 30^\circ$, па затоа $\overline{AB} = \frac{1}{2} \overline{BP}$, од каде следува дека $\overline{PK} = \overline{AB}$. Нека M, N, Q се средините на DK, PC, PK , соодветно. Тогаш QM е средна линија во $\triangle DPK$, па затоа $QM \parallel DP$ и $\overline{QM} = \frac{1}{2} \overline{DP}$. Аналогно $QN \parallel KC$ и $\overline{QN} = \frac{1}{2} \overline{KC}$. Освен тоа



$$\angle MQN = 30^\circ + 75^\circ = 105^\circ.$$

Понатаму $\triangle DKC$ е рамнокрак и $\angle KDC = 15^\circ$, па затоа $\angle KDP = 105^\circ$.

Значи, $\triangle QMN \sim \triangle DPK$ со коефициент на сличност $\frac{1}{2}$, па затоа $\frac{\overline{MN}}{\overline{PK}} = \frac{1}{2}$

т.е. $\overline{MN} = \frac{1}{2} \overline{PK} = \frac{1}{2} \overline{AB}$.

14. На страните AB и BC на паралелограмот $ABCD$ се избрани точки E и F такви што DE е симетрала на $\angle ADF$ и $\overline{AE} + \overline{CF} = \overline{DF}$. Правата низ C која е нормална на DE , ја сече страната AD во точката L и ја сече дијагоналата BD во точката H . Нека DE ја сече AC во точката N .

а) Докажи, дека $\overline{AE} = \overline{DL}$.

б) Ако $HN \parallel AD$, докажи дека $\overline{BC} = \overline{CD}$.

в) Ако $HN \parallel AD$, докажи дека четириаголникот $ABCD$ е квадрат.

Решение. а) Нека $M \in DE \cap CL$, $K \in DF \cap CL$.

Тогаш DM е висина и симетрала на агол во $\triangle LKD$, па затоа $\overline{DL} = \overline{DK}$. Значи,

$\triangle LKD \sim \triangle CKF$, па затоа $\overline{KF} = \overline{CF}$ и значи

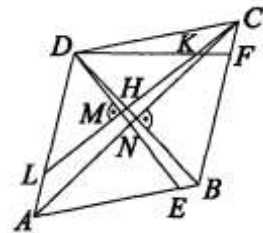
$$\overline{AE} = \overline{DF} - \overline{CF} = \overline{DF} - \overline{KF} = \overline{DK} = \overline{DL}.$$

б) Од сличностите $\triangle ANE \sim \triangle CND$, $\triangle HNC \sim \triangle LAC$ и $\triangle LHD \sim \triangle CHB$ следува

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AN}}{\overline{NC}} = \frac{\overline{LH}}{\overline{HC}} = \frac{\overline{DL}}{\overline{BC}}.$$

Конечно, бидејќи $\overline{AE} = \overline{DL}$ добиваме $\overline{BC} = \overline{CD}$.

в) Од б) следува, дека четириаголникот $ABCD$ е ромб, таков што $DB \perp AC$, па значи H е ортоцентар во $\triangle DNC$. Според тоа,



$HN \perp DC$, па затоа $AD \perp DC$, т.е. четириаголникот $ABCD$ е квадрат.

15. Во конвексен четириаголник $ABCD$ дијагоналите AC и BD се сечат под агол од 90° во точката O . Нека K, L, M и N се ортогоналните проекции на точката O на страните AB, BC, CD и DA , соодветно. Докажи, дека четириаголникот $KLMN$ е тетивен.

Решение. Четириаголникот $AKON$ е тетивен, па затоа важи $\angle OAN = \angle OKN$. Аналогно заклучуваме дека важи

$$\angle OBL = \angle OKL, \angle ODN = \angle OMN, \angle OCL = \angle OML.$$

Ако ги собереме овие равенства добиваме

$$\begin{aligned} \angle LKN + \angle LMN &= \angle OAD + \angle ODA + \angle OBC + \angle OCB \\ &= 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ, \end{aligned}$$

што значи четириаголникот $KLMN$ е тетивен.

16. Во паралелограмот $ABCD$ важи $\overline{AB} = \overline{BD}$. Нека K е точка на AB , различна од A таква што $\overline{KD} = \overline{AD}$. Нека M е точката симетрична на точката C во однос на K , а N е точката симетрична на точката B во однос на A . Докажи, дека $\overline{DM} = \overline{DN}$.

Решение. Бидејќи

$$\angle BKD = 180^\circ - \angle DKA = 180^\circ - \angle KAD = \angle CBK$$

и $\overline{DK} = \overline{DA} = \overline{BC}$, добиваме дека триаголниците DKB и KBC се складни. Затоа,

$$\overline{CK} = \overline{DB} = \overline{AB} = \overline{CD} \text{ и}$$

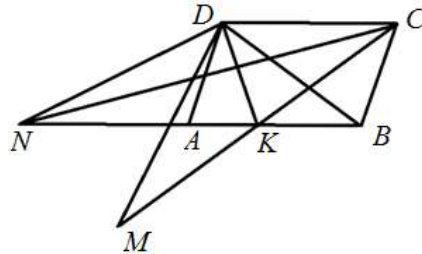
$$\angle NBD = \angle KDB = \angle BKC = \angle DCM.$$

Сега, бидејќи $\angle DCM = \angle NBD$,

$$\overline{DC} = \overline{BD} \text{ и}$$

$$\overline{CM} = 2\overline{CK} = 2\overline{DB} = 2\overline{AB} = \overline{NB},$$

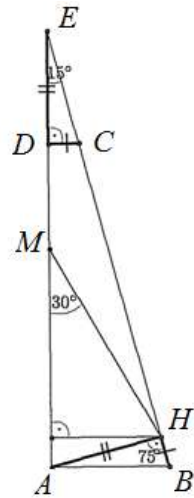
добиваме дека триаголниците CDM и BDN се складни, од каде следува дека $\overline{DM} = \overline{DN}$.



17. Во правоаголен трапез $ABCD$, $(AB \parallel CD)$ аголот при темето B е еднаков на 75° . Точката H е подножје на нормалата повлечена од точката A на правата BC . Ако $\overline{BH} = \overline{CD}$ и $\overline{AD} + \overline{AH} = 8$, пресметај ја плоштината на трапезот $ABCD$.

Решение. Нека краците на траpezот се сечат во точката E . Бидејќи $\angle AHB = \angle CDE = 90^\circ$, $\angle DCE = \angle HBA = 75^\circ$ и $\overline{BH} = \overline{CD}$, добиваме дека $\triangle ABH \cong \triangle ECD$. Оттука следува дека плоштината на траpezот $ABCD$ е еднаква на плоштината на $\triangle EAH$. За хипотенузата на овој триаголник важи $\overline{AE} = \overline{AD} + \overline{DE} = \overline{AD} + \overline{AH} = 8$.

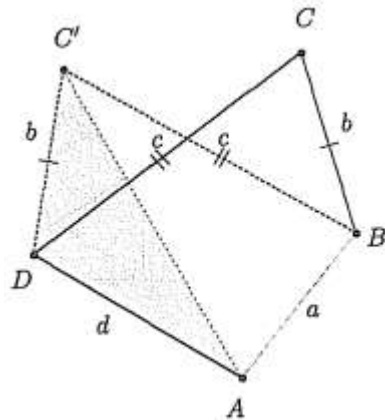
Нека M е средината на отсечката AE . Тогаш $\overline{ME} = \overline{MA} = \overline{MH} = 4$ и бидејќи $\angle AEH = 15^\circ$, добиваме $\angle AMH = 30^\circ$. Оттука следува дека висината повлечена од H на AE е еднаква на половина од MH , т.е. на 2. Конечно, одовде следува дека бараната плошина е еднаква на $\frac{8 \cdot 2}{2} = 8$.



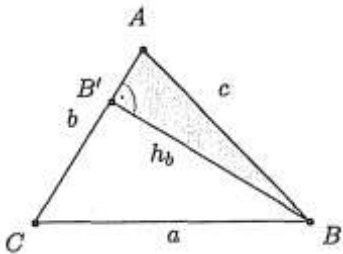
18. Нека $ABCD$ е четириаголник со должини на страни $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$, $\overline{CD} = c$, $\overline{DA} = d$. Докажи, дека плоштината на четириаголникот е помала или еднаква на $\frac{ac+bd}{2}$.

Решение. Конструираме точка C' таква што $\overline{BC'} = c$ и $\overline{DC'} = b$, види цртеж. Јасно, $\triangle BCD \cong \triangle BC'D$, при знак CCC. Затоа четириаголниците $ABCD$ и $ABC'D$ имаат еднакви плоштини. Според тоа, бараното неравенство треба да го докажеме за четириаголникот $ABC'D$.

Ќе го искористиме тврдењето според кое плоштината на триаголникот е помала или еднаква на полу-



производот на две негови страни. Ова неравенство ќе го докажеме на следниот начин. Ќе докажеме дека за секој $\triangle ABC$ важи $P_{\triangle ABC} \leq \frac{bc}{2}$ (за останатите парови страни тврдењето се докажува аналогно).



Нека $\overline{BB'} = h_b$ е висината повлечена од темето B . Од правоаголниот $\triangle BB'A$ добиваме $h_b \leq c$, при што знак за равенство важи ако и само ако $B' \equiv A$. Затоа важи

$$P_{\triangle ABC} = \frac{bh_b}{2} \leq \frac{bc}{2}.$$

Сега, користејќи го ова неравенство добиваме

$$P_{ABCD} = P_{ABC'D} = P_{ABD} + P_{BC'D} \leq \frac{ad}{2} + \frac{bc}{2} = \frac{ad+bc}{2},$$

со што задачата е решена.

19. Даден е конвексен петаголник $ABCDE$ таков што $\overline{AE} = \overline{AB}$, $\angle EAB = 36^\circ$, $\angle ECD = 18^\circ$ и $\angle EDB = 72^\circ$. Нека k е кружницата опишана околу $\triangle BCE$. Ако AE е тангентата на кружницата k , докажи дека средината на отсечката BD , средината на лакот BE и точката A се колинеарни (лежат на една права).

Решение. Кружницата k е опишана околу $\triangle BCE$, па затоа ако AE е нејзина тангента, тогаш и AB е нејзина тангента, па затоа $\triangle EAB$ е рамнокрак. Затоа

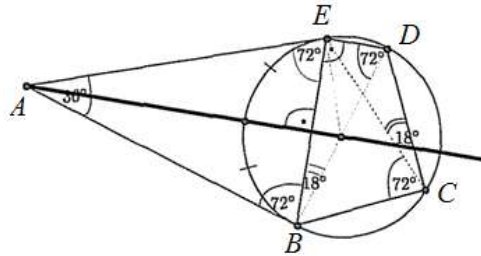
$$\angle AEB = \angle ABE = 72^\circ.$$

Понатаму, $\angle AEB = \angle ECB$, како тангентен и периферен агол на кружницата k , па затоа $\angle ECB = 72^\circ$. Но, $\angle EDB = 72^\circ$, па затоа и точката D припаѓа на кружницата k . Понатаму, бидејќи $\angle ECD = 18^\circ$, добиваме дека

$$\angle BCD = \angle BCE + \angle ECD = 90^\circ,$$

што значи дека центарот на k е средината на отсечката BD .

Центарот на k припаѓа на симетралата на отсечката BE , на која припаѓа и средината на лакот BE . Понатаму, бидејќи $\triangle EAB$ е рамнокрак добиваме дека и A припаѓа на симетралата на отсечката BE , што значи дека разгледуваните три точки припаѓаат на симетралата на отсечката BE , т.е. се колинеарни.



20. Нека $ABCDE$ е конвексен петаголник таков што $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{BC} + \overline{DE}$ и k е кружница со центар на страната AE која ги допира страните AB, BC, CD и DE во точките P, Q, R и S , соодветно (различни од те-

мињата на петаголниот). Докажи, дека правите PS и AE се паралелни.

Решение. Нека O е центарот на кружницата k . Имаме

$\overline{BP} = \overline{BQ}$, $\overline{CQ} = \overline{CR}$, $\overline{DR} = \overline{DS}$ како тангентни отсечки на кружницата k . Од условот $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{BC} + \overline{DE}$ следува

$$\overline{AP} + \overline{BP} + \overline{CR} + \overline{DR} = \overline{BQ} + \overline{CQ} + \overline{DS} + \overline{ES}$$

Оттука добиваме $\overline{AP} = \overline{ES}$. Понатаму, од $\overline{AP} = \overline{ES}$, $\angle APO = \angle ESO = 90^\circ$ и $\overline{PO} = \overline{SO}$ (радиуси на k) следува дека $\triangle APO \cong \triangle ESO$, па затоа $\angle PAO = \angle SEO$.

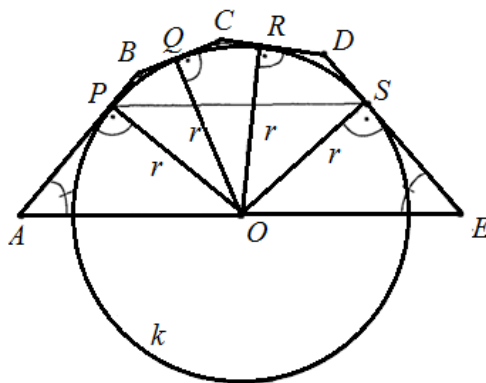
Од рамнокракиот $\triangle POS$ следува $\angle OPS = \angle OSP$, па затоа

$$\begin{aligned}\angle APS &= \angle APO + \angle OPS \\ &= 90^\circ + \angle OPS \\ &= 90^\circ + \angle OSP \\ &= \angle PSE\end{aligned}$$

Сега, од четириаголникот $APSE$ заклучуваме

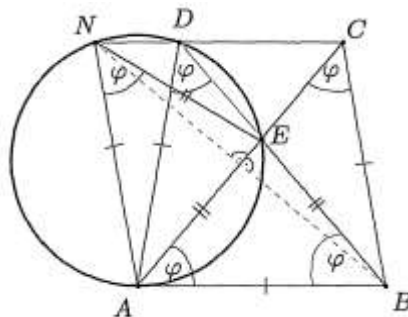
$$2\angle EAP + 2\angle APS = \angle EAP + \angle APS + \angle PSE + \angle SEA = 360^\circ,$$

па затоа $\angle EAP + \angle APS = 180^\circ$, што значи дека четириаголникот $APSE$ е рамнокрак трапез, т.е. $AE \parallel PS$.



21. Нека $ABCD$ е рамнокрак трапез таков што $\overline{AB} = \overline{AD} = \overline{BC}$, $AB \parallel DC$ и $\overline{AB} > \overline{CD}$. Нека E е пресечната точка на дијагоналите AC и BD и нека точката N е симетрична на точката B во однос на правата AC . Докажи, дека четириаголникот $ANDE$ е тетивен.

Решение. Нека $\angle BAC = \varphi$. Од рамнокракиот $\triangle ABC$ следува $\angle ACB = \varphi$. Понатаму, заради симетрија на рамнокракиот трапез $ABCD$ важи $\angle ADB = \angle ACB = \varphi$ и $\angle ABD = \angle BAC = \varphi$. Значи, $\angle ADE = \varphi$ и $\angle ANE = \angle ABE = \varphi$



заради симетрија во однос на правата AC . Конечно, од $\angle ADE = \varphi = \angle ANE$ следува дека точките A, N, D и E лежат на една кружница, т.е. четириаголникот $ANDE$ е тетивен.

22. Нека O е точка во внатрешноста на паралелограмот $ABCD$ таква што $\angle AOB + \angle COD = 180^\circ$. Докажи, дека $\angle OBC = \angle ODC$.

Решение. Конструираме точка O' надвор од паралелограмот $ABCD$ таква што $\overline{AO} = \overline{DO'}$ и $\overline{BO} = \overline{CO'}$. По конструкција $\triangle AOB \cong \triangle DO'C$ и $AO \parallel DO'$ и $BO \parallel CO'$. Оттука следува дека четириаголниците $AOO'D$ и $BCO'O$ се паралелограми. Од

$$\begin{aligned}\angle CO'D + \angle COD &= \angle AOB + \angle COD \\ &= 180^\circ\end{aligned}$$

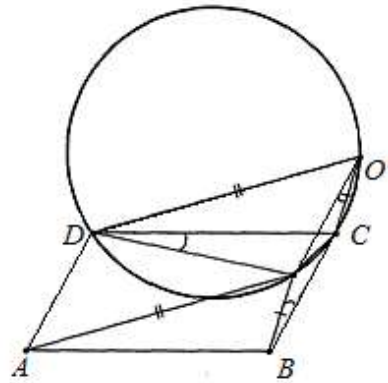
следува дека четириаголникот $CO'DO$ е тетивен. Тоа значи дека $\angle ODC = \angle OO'C$, како периферни агли над тетивата CO , а од паралелограмот $BCO'O$ следува

$$\angle OO'C = \angle OBC.$$

Оттука следува дека

$$\angle ODC = \angle OBC,$$

што и требаше да се докаже.



23. Нека O е точка во внатрешноста на паралелограмот $ABCD$ таква што $\angle AOB + \angle COD = \angle BOC + \angle DOA$. Докажи, дека постои кружница k која ги допира кружниците опишани околу триаголниците AOB , BOC , COD и DOA .

Решение. Бидејќи

$$\angle AOB + \angle COD + \angle BOC + \angle DOA = 360^\circ,$$

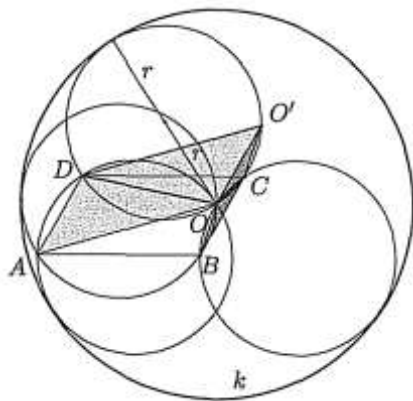
од условот на задачата следува дека

$$\angle AOB + \angle COD = \angle BOC + \angle DOA = 180^\circ.$$

Конструираме точка O' надвор од паралелограмот $ABCD$ таква што $\overline{AO} = \overline{DO'}$ и $\overline{BO} = \overline{CO'}$. Оттука следува дека четириаголниците $AOO'D$ и $BCO'O$ се паралелограми. Од

$$\angle CO'D + \angle COD = \angle AOB + \angle COD = 180^\circ$$

следува дека четириаголникот $CO'DO$ е тетивен. Од паралелограмот $AOO'D$ следува дека $\triangle DOA \cong \triangle ODO'$, а од паралелограмот $BCO'O$ следува дека $\triangle BOC \cong \triangle O'CO$. Значи, радиусите на опишаните кружници околу триаголниците AOB, BOC, COA и DOA се еднакви. Бидејќи овие кружници се сечат во точката A , кружницата со центар во O и радиус $2r$, каде r е радиусот на опишаните кружници околу триаголниците AOB, BOC, COA и DOA е бараната кружница.



24. Даден е правилен шестаголник $ABCDEF$. Нека точките M и N се внатрешни точки на страните DE и CD , соодветно такви што $\angle AMN = 90^\circ$ и $\overline{AN} = \overline{CM}\sqrt{2}$. Определи го аголот $\angle BAM$.

Решение. Внатрешниот агол на правилен шестаголник е еднаков на 120° , па од рамнокракиот $\triangle ABC$ следува дека $\angle ACB = 30^\circ$. Затоа

$$\begin{aligned}\angle NCA &= \angle DCB - \angle ACB \\ &= 120^\circ - 30^\circ = 90^\circ.\end{aligned}$$

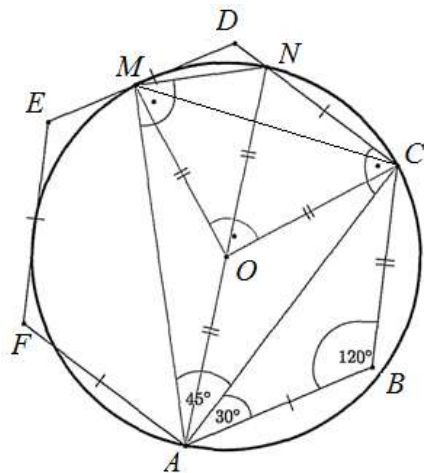
Оттука следува дека четириаголникот $AMNC$ е тетивен ($\angle AMN = \angle ACN = 90^\circ$). Центарот на опишаната кружница околу овој четириаголник е во средината на отсечката AN , па затоа

$$\overline{OM} = \overline{OC} = \frac{\overline{AN}}{2} = \frac{\overline{CM}\sqrt{2}}{2}.$$

Во $\triangle COM$ важи

$$\overline{OM}^2 + \overline{OC}^2 = 2\overline{OM}^2 = 2\left(\frac{\overline{CM}\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \overline{CM}^2$$

па од обратната Питагорова теорема следува дека $\angle COM = 90^\circ$. На овој централен агол соодветниот периферен агол е



$$\angle CAM = \frac{\angle COM}{2} = 45^\circ.$$

Затоа бараниот агол е

$$\angle BAM = \angle BAC + \angle CAM = 30^\circ + 45^\circ = 75^\circ.$$

25. Нека $ABCD$ е конвексен четириаголник таков што

$$\angle DAC = \angle BDC = 36^\circ, \angle CBD = 18^\circ \text{ и } \angle BAC = 72^\circ.$$

Ако P е пресечната точка на дијагоналите AC и BD , определи го $\angle APD$.

Решение. *Прв начин.* На правите AD и BA , преку точката A , да земеме точки E и Z соодветно, такви шт $\overline{AC} = \overline{AE} = \overline{AZ}$.

Од

$$\angle DEC = \frac{\angle DAC}{2} = 18^\circ = \angle CBD$$

слеува дека четириаголникот $DEBC$ е тетивен. Аналогно,

$$\angle AZC = \frac{\angle BAC}{2} = 36^\circ = \angle BDC,$$

па затоа четириаголникот $CBZD$ е тетивен. Значи, петаголникот $BCDZE$ е впишан во кружницата $k(A, \overline{AC})$. Оттука слеува $\overline{AC} = \overline{AD}$ и

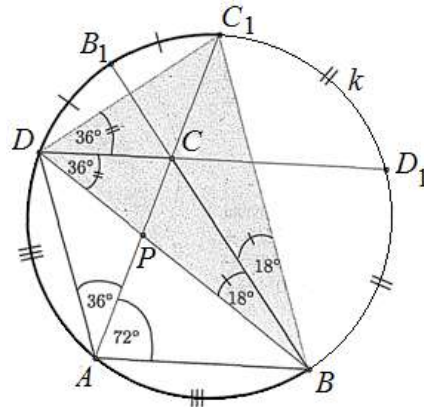
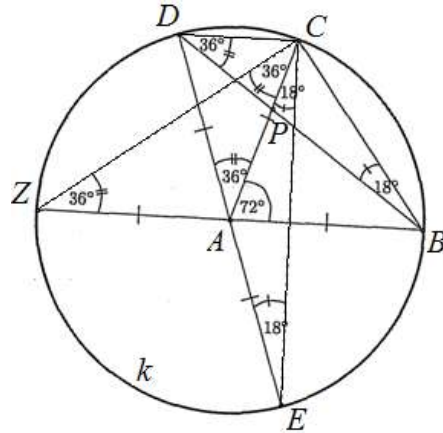
$$\angle ACD = \angle ADC = \frac{180^\circ - 36^\circ}{2} = 72^\circ.$$

Сега, од $\triangle CPD$ имаме

$$\angle CPD = 180^\circ - \angle PCD - \angle PDC = 180^\circ - 72^\circ - 36^\circ = 72^\circ.$$

Оттука $\angle APD = 108^\circ$.

Втор начин. Нека k е опишаната кружница околу $\triangle ADB$ и B_1, C_1, D_1 се пресечните точки на k со правите BC, AC, CD , соодветно. Од $\angle DBB_1 = 18^\circ$ и $\angle DBC_1 = 36^\circ$ слеува дека $\angle B_1BC_1 = 18^\circ$, од каде слеува дека B_1 е средина на лакот DC_1 . Аналогно D_1 е среди-



на на лакот BC_1 .

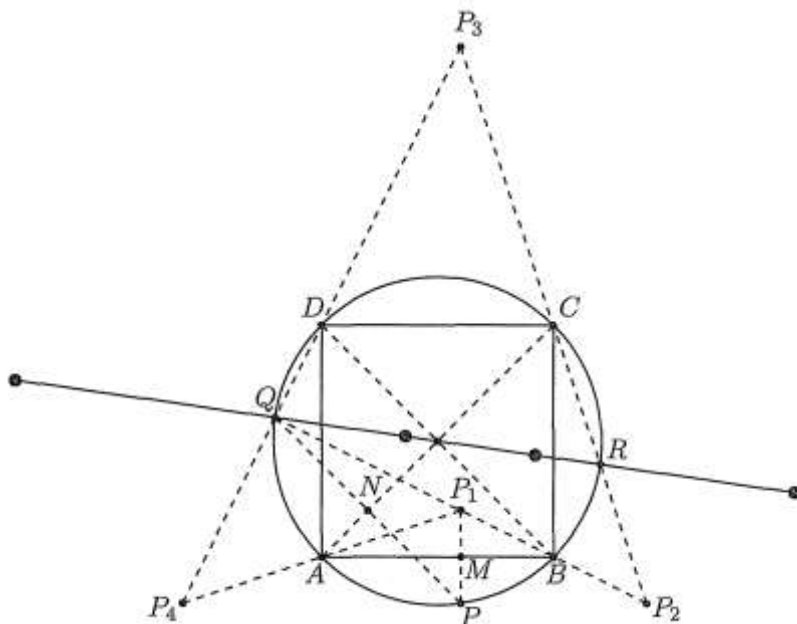
Значи, BB_1 и DD_1 се симетрали на $\angle DBC_1$ и $\angle BDC_1$ соодветно. Според тоа, точката C е центар на впишаната кружница во $\triangle BDC_1$ и $\angle DC_1A = \angle AC_1B = 36^\circ$, бидејќи AC_1 е симетрала на аголот $\angle BC_1D = 180^\circ - \angle BAD$. Сега

$$\angle APD = \angle C_1DB + \angle AC_1D = 2 \cdot 36^\circ + 36^\circ = 108^\circ.$$

26. Точката P лежи на опишаната кружница околу квадратот $ABCD$. Нека P_1, P_2, P_3 и P_4 се симетричните точки на P во однос на правите AB, BC, CD и DA , соодветно. Докажи дека симетричните точки на P во однос на правите P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4 и P_4P_1 лежат на една права која минува низ центарот на квадратот $ABCD$.

Решение. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека точката P е на помалиот лак AB , види цртеж. Нека Q и R се симетричните точки на P во однос на правите AC и BD , и нека M и N се проекциите на P врз AB и AC , соодветно.

Бидејќи M и N се средини на PP_1 и PQ , соодветно, а четириаголникот $PMNA$ е впишан во кружница со дијаметар PA , добиваме



$$\angle P_1QP = \angle MNP = \angle MAP = \angle BAP = \frac{1}{2}PB.$$

Аналогно се докажува дека $\angle P_2QP = \frac{1}{2}PB$, од каде следува дека точките P_1, P_2 и Q лежат на една права. На оваа права лежи и точката B , бидејќи P_1 и P_2 се симетрични во однос на B (зошто?).

Од $\angle RQP = 2\angle BQP = 2\angle P_1QP$ следува дека точката симетрична на P во однос на правата P_1P_2 лежи на QR . Аналогно на QR лежат и точките симетрични на P во однос на правите P_2P_3, P_3P_4 и P_4P_1 . Бидејќи QR е дијаметар на опишаната кружница околу квадратот $ABCD$, тој го содржи нејзиниот центар, со што задачата е решена.

27. Во конвексен четириаголник $ABCD$ важи $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD}$, дијагоналите AC и BD се со различни должини и се сечат во точката E . Докажи дека $\overline{AE} = \overline{DE}$ ако и само ако $\angle BAD + \angle ADC = 120^\circ$.

Решение. Нека C' е точка на полуправата EB таква што $\overline{EC'} = \overline{EC}$. Од складноста на триаголниците AEC' и DEC следува $\overline{AC'} = \overline{DC} = \overline{AB}$, но $C' \neq B$, па затоа

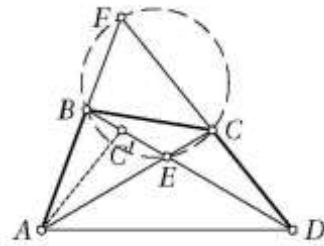
$$180^\circ = \angle ABD + \angle AC'D = \angle ABD + \angle ACD.$$

Тоа значи дека полуправите AB и DC

се сечат во некоја точка F (бидејќи $\angle ABC + \angle BCD > 180^\circ$) и дека четириаголникот $BEFC$ е тетивен. Сега

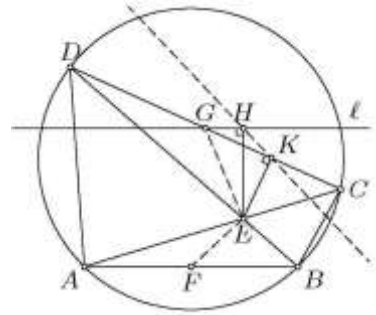
$$\angle EFA = \angle ECB = \angle EAF,$$

па затоа $\overline{EF} = \overline{EA} = \overline{ED}$, т.е. E е центар на опишаната кружница околу $\triangle ADF$. Конечно, $2\angle AFD = \angle AED = \angle BEC = 180^\circ - \angle AFD$, па значи $\angle AFD = 60^\circ$ и $\angle BAD + \angle ADC = 120^\circ$.



28. Нека $ABCD$ е тетивен четириаголник кој не е трапез и чии дијагонали се сечат во точката E . Нека средините на отсечките AB и CD соодветно се точките F и G , а l е права која минува низ G и е паралелна со AB . Подножјата на нормалите повлечени од точката E кон правите l и CD соодветно се H и K . Докажи дека правите EF и HK за заемно нормални.

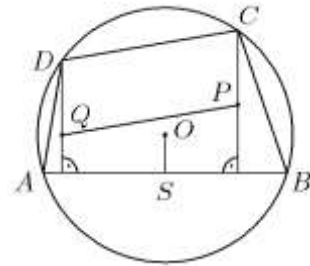
Решение. Нека претпоставиме дека точката K е меѓу точките G и C . Точките E, G, H и K лежат на кружницата со дијаметар EG , па затоа $\angle ENK = \angle EGK$. Бидејќи триаголниците EAB и EDC се слични ($\angle AEB = \angle DEC$ и $\angle EAB = \angle EDC$), заклучуваме дека триаголниците EFB и EGC исто така се слични. Следува дека $\angle EFB = \angle CGE = \angle KHE$, што заедно со $FB \perp HE$ дава $EF \perp KH$.



29. Нека $A_1A_2A_3A_4$ тетивен е четириаголник. Со H_1, H_2, H_3, H_4 соодветно да ги означиме ортоцентрите на триаголниците $A_2A_3A_4, A_1A_3A_4, A_1A_2A_4, A_1A_2A_3$. Докажи дека четириаголниците $A_1A_2A_3A_4$ и $H_1H_2H_3H_4$ се складни.

Решение. Прво ќе ја докажеме следнава лема.

Лема. Ако $ABCD$ е тетивен четириаголник и P и Q се ортоцентрите соодветно на $\triangle ABC$ и $\triangle ABD$, тогаш четириаголникот $PCDQ$ е паралелограм.



Доказ. Од $CP \perp AB$ и $DQ \perp AB$ следува

$CP \parallel DQ$. Ако O е центарот на опишаната

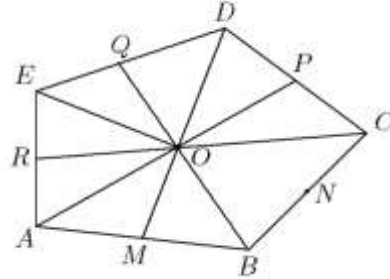
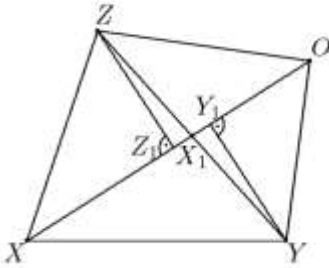
кружница околу четириаголникот $ABCD$ и S е средината на AB , тогаш важи $\overline{OS} = \overline{CP}$ (ова својство се докажува ако се искористи дека пресечната точка на CS и OP е тежиштето на триаголникот ABC). Аналогно, $\overline{OS} = \overline{DQ}$, па затоа $\overline{DQ} = \overline{CP}$. Конечно, од $CP \parallel DQ$ и $\overline{DQ} = \overline{CP}$ следува, дека $PCDQ$ е паралелограм. ■

Од лемата следува, дека отсечките A_1A_2 и H_2H_1 ; A_2A_3 и H_3H_2 ; A_3A_4 и H_4H_3 ; A_4A_1 и H_1H_4 се паралелни и еднакви, па затоа четириаголниците $A_1A_2A_3A_4$ и $H_1H_2H_3H_4$ се складни.

30. Нека $ABCDE$ е конвексен петаголник и нека M, N, P, Q и R се средините на страните AB, BC, CD, DE и EA , соодветно. Ако AP, BQ, CR и DM се сечат во една точка, докажи дека таа точка лежи на от-

сечката EN .

Решение. Ќе докажеме, дека точката O лежи на тежишната линија XX_1 на $\triangle XYZ$ ако и само ако $P_{XYO} = P_{XZO}$.



Навистина, $\frac{P_{XYO}}{P_{XZO}} = \frac{\overline{Y_1Y}}{\overline{Z_1Z}} = \frac{\overline{X_1Y}}{\overline{X_1Z}}$. Според тоа, $P_{XYO} = P_{XZO}$ ако и само ако

X_1 е средина на YZ .

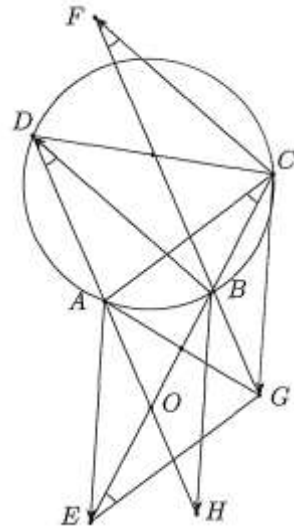
Сега, ако O е заедничка точка на AP, BQ, CR и DM , последователно добиваме

$$P_{BEO} = P_{BDO} = P_{ADO} = P_{ACO} = P_{CEO}.$$

Според тоа, $P_{BEO} = P_{CEO}$, т.е. EO минува низ средината N на отсечката BC .

31. Даден е тетивен четириаголеник $ABCD$. Точката E е симетрична на точката B во однос на пресекот на правите AD и BC , точката F е симетрична на точката B во однос на средината на страната CD и точката G е симетрична на точката A во однос на средината на отсечката CE . Докажи, дека четириаголникот $EFGC$ е тетивен.

Решение. Нека H е симетричната точка на A во однос на пресечната точка на AD и BC . Тогаш $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BH}$ и $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{BD}$. Оттука следува, дека триаголниците FCG и BHD се складни. Според тоа, $\angle CFG = \angle BDH = \angle ACB = \angle CEG$ ($AEGC$ е паралелограм), т.е. точките E, F, G и C лежат на една кружница.



32. Во паралелограм $ABCD$ на страните AB и BC избрани се точки M

и N соодветно, така што $\overline{AM} = \overline{NC}$. Нека $Q = AN \cap MC$. Докажи, дека DQ е симетрала на $\angle ADC$.

Решение. Нека точката P е пресек на правите CD и AN . Ако DQ е симетрала на $\angle ADP$, тогаш DQ е симетрала на $\angle ADC$. Затоа доволно е да се докаже дека DQ е симетрала на $\angle ADP$.

Да ги воведеме ознаките

$$\overline{AB} = \overline{DC} = a, \overline{AD} = \overline{BC} = b, \overline{AM} = \overline{CN} = c, \overline{CP} = x.$$

Од $\angle PAD = \angle PNC$ и $\angle ADP = \angle NCP$ следува дека $\triangle APD \sim \triangle NPC$, па затоа $\frac{\overline{PD}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{CP}}{\overline{CN}}$, т.е. $\frac{a+x}{b} = \frac{x}{c}$. Значи, $x = \frac{ac}{b-c}$. Понатаму, $\triangle AMQ \sim$

$\triangle PCQ$, па затоа $\frac{\overline{PQ}}{\overline{AQ}} = \frac{\overline{CP}}{\overline{AM}}$, т.е. $\frac{\overline{PQ}}{\overline{AQ}} = \frac{x}{c} = \frac{a}{b-c}$. Сега,

$$\overline{PD} = \overline{PC} + \overline{CD} = x + a = \frac{ac}{b-c} + a = \frac{ab}{b-c},$$

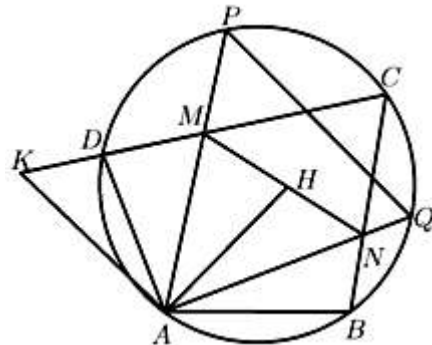
па затоа

$$\frac{\overline{PD}}{\overline{AD}} = \frac{\frac{ab}{b-c}}{b} = \frac{a}{b-c} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{AQ}}.$$

Конечно, од последното равенство следува дека DQ е симетрала на $\angle ADP$.

33. Даден е тетивен четириаголник $ABCD$ таков што $\overline{AB} = \overline{AD}$ и точките M и N лежат на страните CD и BC и се такви што $\overline{MN} = \overline{BN} + \overline{DM}$. Правите AM и AN по вторпат ја сечат опишаната кружница околу $ABCD$ во точките P и Q , соодветно. Докажи, дека ортоцентарот на $\triangle APQ$ лежи на отсечката MN .

Решение. Конструираме точка $K \in MD$ така што $\overline{DK} = \overline{BN}$ и D лежи меѓу M и K . Тогаш од $\overline{DK} = \overline{BN}$, $\overline{AB} = \overline{AD}$ и $\angle ABN = \angle ADK$ следува дека $\triangle ADK \cong \triangle ABN$, па затоа $\overline{AN} = \overline{AK}$. От-



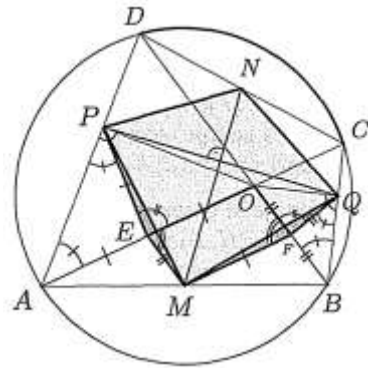
тука и од $\overline{MK} = \overline{MN}$ следува дека $\triangle AMK \cong \triangle AMN$, па затоа $\angle AMK = \angle AMN$.

Нека H е точка на MN , за која $\overline{MH} = \overline{MD}$. Тогаш точките D и H се симетрични во однос на AM и затоа $\angle APD = \angle APH$ и $DH \perp AP$. Но, $\angle APD = \angle APB = \angle ADB = \angle ABH$, што значи дека точките P, H и B лежат на една права. Аналогно се докажува дека $QH \perp AP$ и Q, H и D лежат на една права. Јасно, од досега изнесеното следува дека точката H е ортоцентар на $\triangle APQ$.

34. Даден е тетивен четириаголник $ABCD$. Нека M и N се средините на страните AB и CD , соодветно, точката O е пресек на дијагоналите AC и BD , а точките P и Q се проекциите на точката O на страните AD и BC , соодветно. Докажи, дека $MN \perp PQ$.

Решение. Со E и F да ги означиме средините на отсечките AO и BO , соодветно. Отсечката EP е тежишна линија повлечена кон хипотенузата на правоаголниот $\triangle AOP$, па затоа $\overline{EP} = \frac{\overline{AO}}{2}$. Отсечката MF е средна линија за $\triangle AOB$, па затоа $\overline{MF} = \frac{\overline{AO}}{2}$.

Според тоа, $\overline{EP} = \overline{MF}$. Аналогно се докажува дека $\overline{FQ} = \overline{MP}$.



Понатаму, $\angle MEP = \angle MEO + \angle OEP$. Но, $\angle MEO = \angle BOC$, како агли со паралелни краци, а бидејќи E е центар на опишаната кружница околу правоаголниот $\triangle OAP$ добиваме $\angle OEP = 2\angle OAP$. Значи,

$$\angle MEP = \angle BOC + 2\angle OAP = \angle BOC + 2\angle OAD = \angle BOC + 2\angle CAD.$$

Аналогно се докажува дека

$$\angle MFQ = \angle AOD + 2\angle CBD.$$

Но, $\angle AOD = \angle BOC$, како накрсни агли, а $\angle CAD = \angle CBD$, како периферни агли над тетивата CD .

Значи, $\angle MEP = \angle MFQ$ и како $\overline{EP} = \overline{MF}$ и $\overline{FQ} = \overline{MP}$, добиваме дека $\triangle MEP \cong \triangle QFM$. Од оваа складност следува $\overline{MQ} = \overline{MP}$.

Аналогно се докажува дека $\overline{NP} = \overline{NQ}$.

Според тоа, четириаголникот $MPNQ$ е делтоид, па како дијагоналите на делтоидот се заемно нормални добиваме дека $MN \perp PQ$.

35. Даден е тангентен трапез $ABCD$, ($AB \parallel CD, \overline{AB} > \overline{CD}$). Впишаната кружница во $\triangle ABC$ ги допира страни AB и AC во точките M и N , соодветно. Докажи, дека центарот на впишаната кружница во трапезот $ABCD$ припаѓа на правата MN .

Решение. Нека I е центарот на впишаната кружница во $\triangle ABC$ и $R = BI \cap MN$. Од

$$\angle ANM = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle MAN \text{ и } \angle BIC = 90^\circ + \frac{1}{2} \angle MAN$$

следува дека четириаголникот $IRNC$ е тетивен. Според тоа,

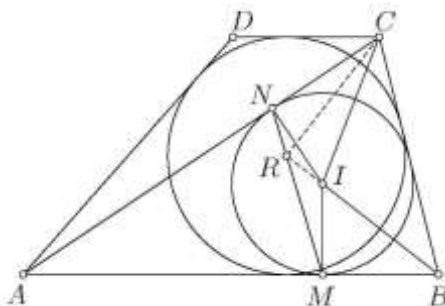
$$\angle BRC = \angle INC = 90^\circ \text{ и затоа}$$

$$\angle BCR = 90^\circ - \angle CBR$$

$$= 90^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \angle BCD)$$

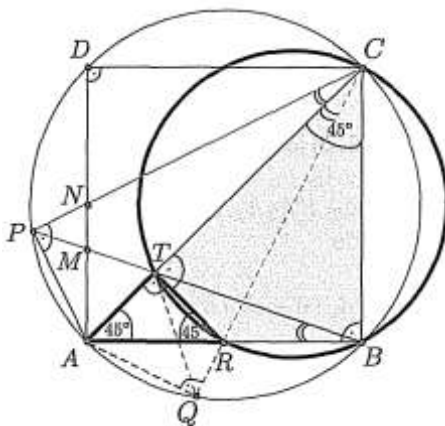
$$= \frac{1}{2} \angle BCD.$$

Значи, CR е симетрала на $\angle BCD$, што значи дека R е центарот на впишаната кружница во трапезот $ABCD$.



36. Даден е квадрат $ABCD$ и точка M на AD таква што $\overline{MD} = 2\overline{AM}$. Нека P е втората пресечна точка на BM со опишаната кружница околу квадратот $ABCD$. Докажи дека правата PC минува низ средината на отсечката AD .

Решение. Нека $T = AC \cap MB$ и $N = CP \cap AD$. Според Талесовата теорема од условот на задачата следува $\overline{AC} = 4\overline{AT}$. Нека Q и R се симетричните точки на точките P и N во однос на правата AC , соодветно. Бидејќи $\angle APC = 90^\circ$ како агол на дијаметарот AC , добиваме дека $\angle AQC = 90^\circ$, што значи дека



точката Q припаѓа на опишаната кружница околу квадратот $ABCD$. Бидејќи отсечката AD е симетрична на отсечката AB во однос на дијагоналата AC , заклучуваме дека точката R припаѓа на страната AB .

Заради симетријата важи $\angle ACP = \angle ACQ$, а исто така важи $\angle ACP = \angle ABP$, како периферни агли над тетивата AP . Затоа

$$\angle TCN = \angle ACQ = \angle ABP = \angle RBT.$$

Оттука следува дека четириаголникот $RBCT$ е тетивен, па затоа $\angle ART = \angle ACB = 45^\circ$ (како надворешен агол на тетивен четириаголник). Но, во квадратот $ABCD$ важи $\angle BAC = 45^\circ$, па затоа $\triangle ATR$ е рамнокрак правоаголен триаголник. Сега едноставно се пресметува дека

$$\overline{AR} = \sqrt{2} \cdot \overline{AT} = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \overline{AC} = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \sqrt{2} \overline{AB} = \frac{\overline{AB}}{2}.$$

Конечно, заради симетријата имаме $\overline{AN} = \overline{AR} = \frac{\overline{AB}}{2}$, што и требаше да се докаже.

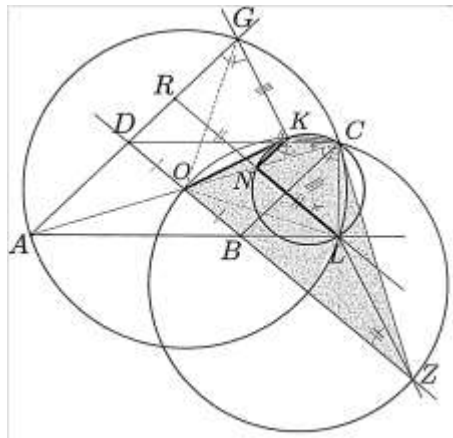
37. Нека $ABCD$ е паралелограм таков што $\overline{AC} > \overline{BD}$ и нека $O = AC \cap BD$. Кружницата со центар O и радиус OA ги сече продолженијата на страните AD и AB во точките G и L , соодветно. Нека $Z = BD \cap GL$.

Докажи, дека $\angle ZCA = 90^\circ$.

Решение. Во точката L повлекуваме права паралелна на BD и нека оваа права ги сече правите AC и AG во точките N и R , соодветно. Бидејќи $\overline{DO} = \overline{OB}$, од Талесовата теорема следува дека $\overline{NR} = \overline{NL}$, т.е. точката N е средина на отсечката LR .

Нека K е средина на GL . Значи, NK е средна линија на $\triangle GLR$, па затоа $NK \parallel LR$. Оттука

следува дека $\angle AGL = \angle NKL$, а бидејќи $\angle AGL = \angle ACL$, како периферен агол над тетивата AL , добиваме дека $\angle NKL = \angle ACL = \angle NCL$. Според тоа, четириаголникот $NKCL$ е тетивен, па затоа $\angle KCN =$



$\angle KLN$, како периферни агли над тетивата KN . Понатаму, $\angle KLN = \angle KZO$, како агли со паралелни краци, па затоа $\angle KCO = \angle KCN = \angle KZO$. Затоа четириаголникот $KCZO$ е тетивен и следува $\angle ZCA = \angle ZCO = \angle ZKO = \angle LKO = 90^\circ$, бидејќи $OK \perp GL$ ($\overline{OG} = \overline{OL}$ и K е средина на GL).

38. Даден е конвексен четириаголник $ABCD$ таков што

(i) $\overline{AB} = \overline{AD} + \overline{BC}$,

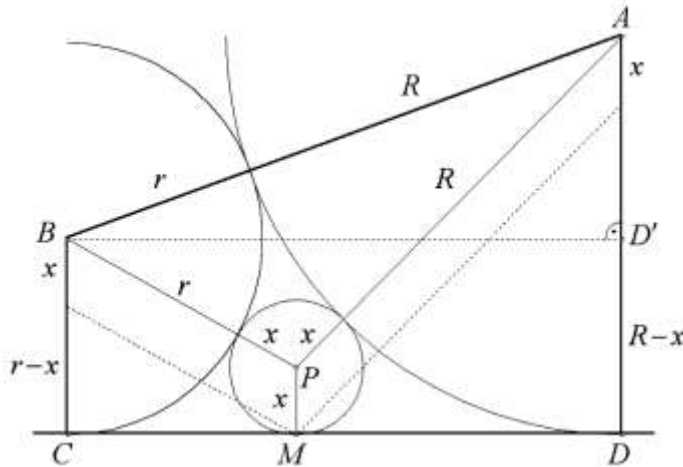
(ii) во внатрешноста на четириаголникот $ABCD$ постои точка P која од правата CD е на растојание h и таква што

$$\overline{AP} = h + \overline{AD} \text{ и } \overline{BP} = h + \overline{BC}.$$

Докажи дека

$$\frac{1}{\sqrt{h}} \geq \frac{1}{\sqrt{\overline{AD}}} + \frac{1}{\sqrt{\overline{BC}}}.$$

Решение. Јасно, h е максимално ако CD е тангента на кружница со центар во A и радиус $R = \overline{AD}$ и тангента на кружница со центар B и радиус $r = \overline{BC}$, види цртеж.



Нека $h_{\max} = x$. Од Питагоровата теорема следува

$$\overline{CD} = \overline{BD'} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{AD'}^2} = \sqrt{(R+r)^2 - (R-r)^2} = 2\sqrt{Rr} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \overline{CD} &= \overline{CM} + \overline{MD} \\ &= \sqrt{(r+x)^2 - (r-x)^2} + \sqrt{(R+x)^2 - (R-x)^2} \\ &= 2\sqrt{Rx} + 2\sqrt{rx}. \end{aligned} \quad (2)$$

Од (1) и (2) добиваме $2\sqrt{Rr} = 2\sqrt{Rx} + 2\sqrt{rx}$. Значи,

$$\frac{1}{\sqrt{h}} \geq \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{r} + \sqrt{R}}{\sqrt{Rr}} = \frac{1}{\sqrt{R}} + \frac{1}{\sqrt{r}}.$$

39. Дадена е кружница со центар на страната AB на тетивниот четириаголник $ABCD$. Останатите три страни ја допираат кружница. Докажи дека

$$\overline{AD} + \overline{BC} = \overline{AB}.$$

Решение. За четириаголник важи

$$\alpha + \gamma = 180^\circ \text{ и } \beta + \delta = 180^\circ.$$

Центарот O на кружницата е пресек на симетралите на аглите γ и δ . Нека FHG е нормала на симетралите на аглите $\angle FAH = \angle GOH = \alpha$. Значи,

$$\overline{AH} = \overline{AF} \text{ и } \overline{HO} = \overline{GO} \quad (1)$$

Од

$$\angle OFG = \frac{\alpha}{2} = 90^\circ - \frac{\gamma}{2} = \angle COE$$

и

$$\overline{OE} = \overline{OF}$$

следува $\triangle FGO \cong \triangle OCE$ т.е.

$$\overline{GO} = \overline{CE} \quad (2)$$

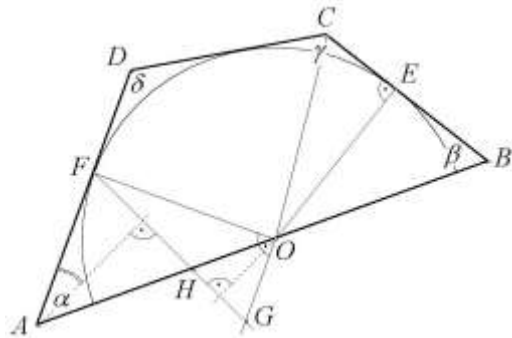
Од (1) и (2) добиваме

$$\overline{AO} = \overline{AH} + \overline{HO} = \overline{AF} + \overline{CE} \quad (3)$$

Аналогно добиваме

$$\overline{BO} = \overline{BE} + \overline{DF}. \quad (4)$$

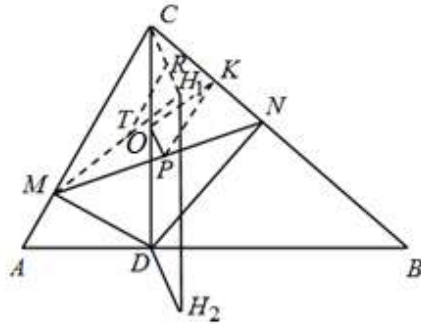
Од (3) и (4) добиваме $\overline{AB} = \overline{AD} + \overline{BC}$.



40. Даден е произволен триаголник ABC со плоштина S . Нека $CD \perp AB$ ($D \in AB$), $DM \perp AC$ ($M \in AC$) и $DN \perp BC$ ($N \in BC$). Со H_1 и H_2 да ги означиме ортоцентрите на триаголниците MNC и MND , соодветно. Изрази ја плоштината на четириаголникот AH_1BH_2 преку S .

Решение. *Прв начин.* Нека O , P , K , R и T се средините на отсечките CD , MN , CN , CH_1 и MH_1 , соодветно. Од $\triangle MNC$ следува дека $\overline{PK} = \frac{1}{2}\overline{MC}$ и $PK \parallel MC$. По аналогија, од $\triangle MH_1C$ следува $\overline{TR} = \frac{1}{2}\overline{MC}$ и $TR \parallel MC$. Како резултат на тоа, $\overline{PK} = \overline{TR}$ и $PK \parallel TR$.

Исто така $OK \parallel DN$ (од $\triangle CDN$) и бидејќи $DN \perp BC$ и $MH_1 \perp BC$, следува дека $TH_1 \parallel OK$. Бидејќи O е ортоцентар на $\triangle CMN$, $OP \perp MN$. Затоа, од $CH_1 \perp MN$ имаме дека $OP \parallel CH_1$. Па можеме да заклучиме дека $\triangle TRH_1 \cong \triangle KPO$ (имаат паралелни страни и $\overline{TR} = \overline{PK}$), оттука $\overline{RH_1} = \overline{PO}$, т.е. $\overline{CH_1} = 2\overline{PO}$ и $CH_1 \parallel PO$.



Аналогно, $\overline{DH_2} = 2\overline{PO}$ и $DH_2 \parallel PO$. Од

$$\overline{CH_1} = 2\overline{PO} = \overline{DH_2} \text{ и } CH_1 \parallel PO \parallel DH_2$$

четириаголникот CH_1H_2D е паралелограм, па затоа $\overline{H_1H_2} = \overline{CD}$ и $H_1H_2 \parallel CD$. Оттука површината на четириаголникот AH_1BH_2 е

$$\frac{\overline{AB \cdot H_1 H_2}}{2} = \frac{\overline{AB \cdot CD}}{2} = S.$$

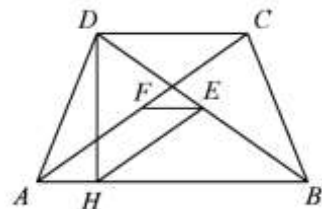
Втор начин. Бидејќи $MH_1 \parallel DN$ и $NH_1 \parallel DM$, $MDNH_1$ е паралелограм. Слично, $NH_2 \parallel CM$ и $MH_2 \parallel CN$ имплицираат дека $MCNH_2$ е паралелограм. Нека P е средина на отсечката $\overline{MN}$. Тогаш $\sigma_P(D) = H_1$ и $\sigma_P(C) = H_2$, па затоа $CD \parallel H_1H_2$ и $\overline{CD} = \overline{H_1H_2}$. Од $CD \perp AB$ можеме да заклучиме дека $P_{AH_1BH_2} = \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \overline{CD} = S$.

41. Во траpez $ABCD$ ($AB \parallel CD$) точката $H \in AB$ е подножје на висината спуштена од темето D , точката E е средина на дијагоналата BD и $HE \parallel AC$. Ако плоштината на триаголникот DBH е P , определи ја плоштината на траpezот $ABCD$.

Решение. Конструируем $EF \parallel AB$, $F \in AC$.

Тогаш $AHEF$ е паралелограм и $\overline{AF} = \overline{HE}$. Бидејќи HE е тежишна линија на правоаголникот $\triangle DHB$, важи $\overline{HE} = \frac{1}{2}\overline{BD}$. Но $\overline{AF} = \frac{1}{2}\overline{AC}$, па затоа $\overline{AC} = \overline{BD}$. Следствено

$ABCD$ е рамнокрак трапез. Имаме



$$\overline{HB} = \overline{AB} - \overline{AH} = \overline{AB} - \frac{\overline{AB} - \overline{CD}}{2} = \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2} \text{ и } P_{ABCD} = \overline{DH} \cdot \overline{HB}.$$

Но $P_{DBH} = P = \frac{1}{2} \overline{DH} \cdot \overline{HB}$, од каде следува $P_{ABCD} = 2P$.

42. Права ги сече страните AB и BC на триаголникот ABC во точките M и K , соодветно. Ако плоштината на $\triangle MBK$ е еднаква на плоштината на четириаголникот $AMKC$, докажи дека

$$\frac{\overline{MB} + \overline{BK}}{\overline{AM} + \overline{CA} + \overline{KC}} \geq \frac{1}{3}. \quad (1)$$

Решение. Да означиме $\overline{BK} = y$, $\overline{KC} = z$, $\overline{CA} = b$, $\overline{AM} = u$ и $\overline{MB} = x$ (на прави цртеж). Бидејќи $P_{BMK} = P_{AMKC}$, важи $P_{BMK} > P_{MKC}$, т.е. $y > z$ и $P_{BMK} > P_{AMK}$, т.е. $x > u$. Нека го претпоставиме спротивното, т.е.

$$\frac{\overline{MB} + \overline{BK}}{\overline{AM} + \overline{CA} + \overline{KC}} < \frac{1}{3}.$$

Од последното неравенство следува низата неравенства

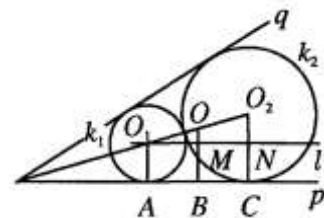
$$\begin{aligned} \frac{x+y}{u+b+z} < \frac{1}{3} &\Rightarrow 3x+3y > u+b+z < x+y+b \\ &\Rightarrow 2x+2y < b \\ &\Rightarrow x+u+y+z < 2x+2y < b \\ &\Rightarrow (x+u)+(y+z) < b \\ &\Rightarrow \overline{AB} + \overline{BC} < \overline{CA}, \end{aligned}$$

што не е можно, па затоа точно е неравенството (1).

III.4. КРУЖНИЦА

1. Во внатрешноста на даден агол се конструирани две кружници со центри O_1 и O_2 . Кружниците ги допираат краците на аголот и се допираат меѓусебно. Докажи, дека ако трета кружница чиј центар лежи на отсечката O_1O_2 ги допира краците на аголот и ја содржи една од точките O_1 и O_2 , тогаш ја содржи и другата точка.

Решение. Нека кружниците се $k_1(O_1, r)$, $k_2(O_2, R)$ и $k(O, x)$, каде $r < x < R$. Повлекуваме нормали O_1A , OB и O_2C кон кракот p на аголот (цртеж десно). Нека



$l \parallel p$ е права низ точката O_1 и нека таа ги сече OB и O_2C во точките M и N , соодветно. Тогаш $\triangle O_1OM \sim \triangle O_1O_2N$, па затоа $\frac{\overline{OO_1}}{\overline{O_1O_2}} = \frac{\overline{OM}}{\overline{O_2N}}$.

Имаме,

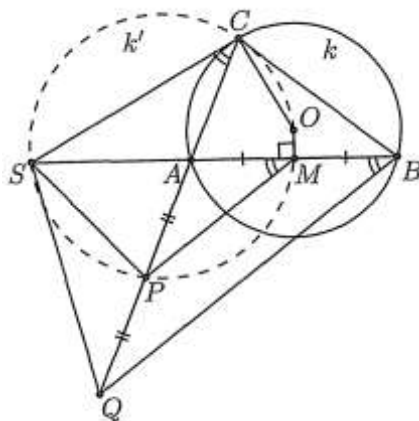
$$\begin{aligned}\overline{OM} &= \overline{OB} - \overline{BM} = \overline{OB} - \overline{O_1A} = x - r, \\ \overline{O_2N} &= \overline{O_2C} - \overline{CN} = \overline{O_2C} - \overline{O_1A} = R - r, \\ \overline{O_1O_2} &= r + R.\end{aligned}$$

Ако k ја содржи точката O_1 , тогаш $\overline{O_1O} = x$ и ја добиваме равенката $\frac{x}{R+r} = \frac{x-r}{R-r}$, од каде наоѓаме $x = \frac{r+R}{2}$. Ако k ја содржи точката O_2 , тогаш $\overline{O_1O} = R + r - x$ и ја добиваме равенката $\frac{r+R-x}{R+r} = \frac{x-r}{R-r}$, од каде наоѓаме $x = \frac{r+R}{2}$. И во двата случаја O е средина на O_1O_2 , што значи дека k ги содржи и двете точки O_1 и O_2 .

2. Даден е $\triangle ABC$, впишан во кружница k со центар O . Тангентата на k во точката C ја сече полуправата BA во точка S . На полуправата CA после точката A се избрани точки P и Q такви што $\overline{AP} = \overline{PQ}$. Докажи, дека точките P, O, C и S лежат на една кружница ако и само ако точките Q, B, C и S лежат на една кружница.

Решение. Нека точките P, O, C и S лежат на една кружница k' . Од $OC \perp SC$ следува дека OS е дијаметар на k' и ако M е средината на AB , тогаш $OM \perp AB$, па затоа $M \in k'$. Значи, $\angle SMP = \angle SCP$ и бидејќи PM е средна линија во $\triangle QBA$, заклучуваме дека $\angle SMP = \angle SBQ$. Тогаш $\angle SCQ = \angle SBQ$, што значи дека точките Q, B, C и S лежат на една кружница.

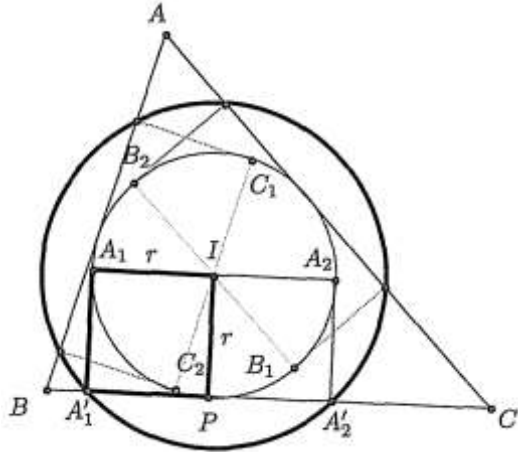
Обратно, нека точките Q, B, C и S лежат на една кружница. Тогаш $\angle SCQ = \angle SBQ$ и бидејќи $\angle SMP = \angle SBQ$, заклучуваме дека точките S, P, M и C лежат на една кружница k' . Но, $\angle OMS = \angle OCS = 90^\circ$, па затоа дијаметарот на k' е от-



сечката SO . Конечно, точките P, O, C и S лежат на една кружница.

3. Впишаната кружница во триаголникот е проектирана на страните на тој триаголник. Докажи, дека шесте крајни точки на овие проекции припаѓаат на иста кружница.

Решение. Нека A_1A_2 е дијаметарот на впишаната кружница паралелен со страната BC , а проекцијата на кружницата на страната BC е отсечката $A'_1A'_2$, каде A'_1 и A'_2 се нормалните проекции на точките A_1 и A_2 на страната BC , соодветно. Нека I е центарот на впишаната кружница во $\triangle ABC$



и P е допирната точка на кружницата со BC . Четириаголникот $A_1IPA'_1$ е квадрат, бидејќи $\overline{A'_1P} = \overline{A'_1I} = \overline{IP} = r$, $\angle IPA'_1 = 90^\circ$ и $\overline{A'_1P} \parallel \overline{A_1I}$. Затоа $\overline{A'_1I} = r\sqrt{2}$. Слично се покажува и за останатите проекции на впишаната кружница врз страните на триаголникот, што значи дека темињата на добиениот шестаголник лежат на кружница со центар во I и радиус $r\sqrt{2}$.

4. Две кружници k_1 и k_2 со различни радиуси имаат две заеднички точки A и B и нивните центри O_1 и O_2 се наоѓаат на различни страни од правата AB . Нека B_1 и B_2 се точки од k_1 и k_2 , соодветно, кои се дијаметрално спротивни точки на точката B . Точките M_1 од k_1 и M_2 од k_2 се избрани така што $\angle AO_1M_1 = \angle AO_2M_2 < 180^\circ$, B_1 е внатрешна точка за $\angle AO_1M_1$ и B е внатрешна точка за $\angle AO_2M_2$. Нека M е средина на отсечката $\overline{B_1B_2}$. Докажи дека $\angle MM_1B = \angle MM_2B$.

Решение. Точките B_1 , A и B_2 се колинеарни ($\angle B_1AB = 90^\circ = \angle BAB_2$). Од M средина на $\overline{B_1B_2}$ и O_1 средина на $\overline{B_1B}$, следува дека $\overline{MO_1}$ е средна линија во триаголникот B_2BB_1 , од каде

$$\overline{MO_1} = \frac{1}{2} \overline{BB_2} = \overline{AO_2}.$$

На сличен начин,

$$\overline{MO_2} = \frac{1}{2} \overline{BB_1} = \overline{AO_1}.$$

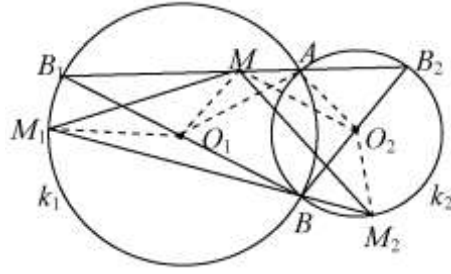
Од тука следува дека триаголниците MO_1A и AO_2M се складни, од каде следува $\angle MO_1A = \angle AO_2M$. Затоа,

$$\begin{aligned} \angle MO_1M_1 &= \angle AO_1M_1 - \angle AO_1M \\ &= \angle AO_2M_2 - \angle AO_2M = \angle MO_2M_2, \end{aligned}$$

и земајќи ги во предвид равенствата $\overline{MO_1} = \overline{M_2O_2}$ и $\overline{MO_2} = \overline{M_1O_1}$, се добива дека триаголниците MO_1M_1 и M_2O_2M се складни, од каде $\overline{MM_1} = \overline{MM_2}$. Точките M_1 , B и M_2 се колинеарни бидејќи

$$\angle M_1BA + \angle ABM_2 = \frac{1}{2} \angle AO_1M_1 + \frac{1}{2} (360^\circ - \angle AO_2M_2) = 180^\circ,$$

па следува дека триаголникот M_1M_2M е рамнокрак, од каде $\angle MM_1B = \angle MM_2B$.



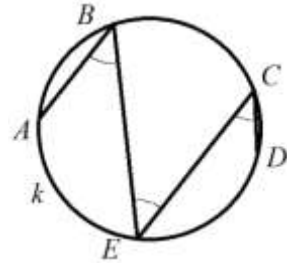
5. На кружницата последователно во насока на движењето на стрелката на часовникот се избрани точки A, B, C, D и E такви што

$$\angle ABE = \angle BEC = \angle ECD = 45^\circ.$$

Докажи дека

$$\overline{AB}^2 + \overline{CE}^2 = \overline{BE}^2 + \overline{CD}^2. \quad (1)$$

Решение. Од $\angle ABE = \angle BEC = 45^\circ$ следува $AB \parallel EC$, што значи дека четириаголникот $ABCE$ е трапез. Исто така $BE \parallel CD$, па затоа четириаголникот $BEDC$ е трапез. Понатаму $\overline{AE} = \overline{BC} = \overline{ED}$ како тетиви над еднакви кружни лаци. Трапезите $AECB$ и $BEDC$ се рамнокраки, па затоа $\overline{AC} = \overline{BE}$ и $\overline{BD} = \overline{EC}$.



Периферниот агол на лакот ED е $\angle EBD = \angle ECD = 45^\circ$. Според тоа, $\angle ABD = 90^\circ$, што значи дека AD е дијаметар на кружницата k и важи

$$\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CD}^2.$$

Сега бидејќи $\overline{AC} = \overline{BE}$ и $\overline{BD} = \overline{EC}$, од последното равенство следува равенството (1).

6. Дадени се кружница k со центар O и радиус 5, тетива AB со должина 7 и точка C на тетивата. Кружницата k_1 која минува низ точките A, O и C по вторпат ја сече k во точката D . Определи го аголот $\angle ABD$ ако периметарот на $\triangle ACD$ е 12.

Решение. Ако $\angle ABD = \alpha$, тогаш

$$\angle AOD = 2\angle ABD = 2\alpha \text{ и } \angle ACD = \angle AOD = 2\alpha.$$

Бидејќи $\angle ACD$ е надворешен за $\triangle BCD$, следува

$$\angle CDB = \angle ACD - \angle CBD = 2\alpha - \alpha = \alpha.$$

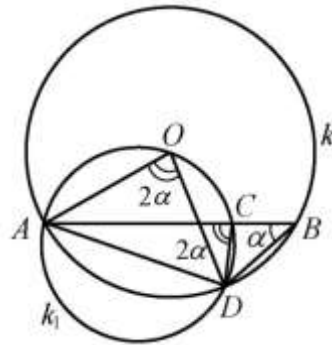
Според тоа, $\overline{CD} = \overline{CB}$, па затоа

$$\overline{AC} + \overline{CD} = \overline{AB}.$$

Тогаш

$$\overline{AD} = O_{\triangle ACD} - \overline{AB} = 12 - 7 = 5.$$

Значи, $\overline{AO} = \overline{OD} = \overline{AD} = 5$, т.е. $\triangle AOD$ е рамностран, па затоа $\angle AOD = 60^\circ$ и $\angle ABD = 30^\circ$.



7. Нека C е кружница со центар во O и радиус R . Од точката A на кружницата C конструираме тангента t на кружницата. Низ центарот O повлекуваме права d која тангентата ја сече во точка M и кружницата ја сече во точките B и D (B лежи меѓу O и M). Ако $\overline{AM} = R\sqrt{3}$, докажи дека:

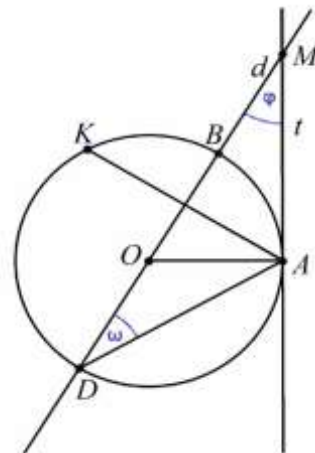
а) Триаголникот AMD е рамнокрак.

б) Центарот на опишаната кружница околу $\triangle AMD$ лежи на кружницата C .

Решение. Бидејќи t е тангента на кружницата C важи $\angle OAM = 90^\circ$. Од Питагоровата теорема следува

$$\overline{OM}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AM}^2 = R^2 + (R\sqrt{3})^2 = 4R^2$$

т.е. $\overline{OM} = 2R$. Значи, во правоаголниот триаголник OAM имаме $\overline{OM} = 2\overline{OA}$, па затоа $\varphi = \angle OMA = 30^\circ$. Понатаму, бидеј-



ќи $\overline{OA} = \overline{OD} = R$, триаголникот OAD е рамнокрак и важи

$$\angle ODA = \angle OAD = \omega \text{ и } \angle AOD = 180^\circ - \omega.$$

Аголот $\angle AOD$ е надворешен за $\triangle OAM$, па затоа

$$\angle AOD = 90^\circ + \angle OMA$$

$$180^\circ - 2\omega = 90^\circ + \varphi$$

$$\omega = \frac{90^\circ - \varphi}{2} = \frac{90^\circ - 30^\circ}{2} = 30^\circ.$$

Според тоа, триаголникот AMD со $\overline{AM} = \overline{AD}$.

б) Центарот на опишаната кружница околу $\triangle AMD$ лежи на симетралата на страната MD , која минува низ темето A и ја сече кружницата C во уште една точка k . Според тоа, $KA \perp DM$. Понатаму, $\triangle OAK$ е рамнокрак, па затоа правата DM е симетрала на отсечката KA , што значи дека $\triangle DAK$ е рамнокрак ($\overline{DK} = \overline{DA}$). Но, тоа значи дека $\angle ADK = 2\omega = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$, па затоа $\angle KAD = \angle AKD = \frac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 60^\circ$, т.е. $\triangle DAK$ е рамностран. Според тоа, $\overline{KA} = \overline{KD}$. Од друга страна K припаѓа на симетралата на страната DM , па затоа $\overline{KM} = \overline{KD}$, што заедно со претходно изнесеното повлекува $\overline{KM} = \overline{KD} = \overline{KA}$, т.е. K е центар на опишаната кружница околу $\triangle AMD$.

8. (Теорема на Микел). Четири прави кои по парови не се паралелни определуваат четири триаголници. Докажи, дека опишаните кружници околу овие триаголници минуваат кон една точка.

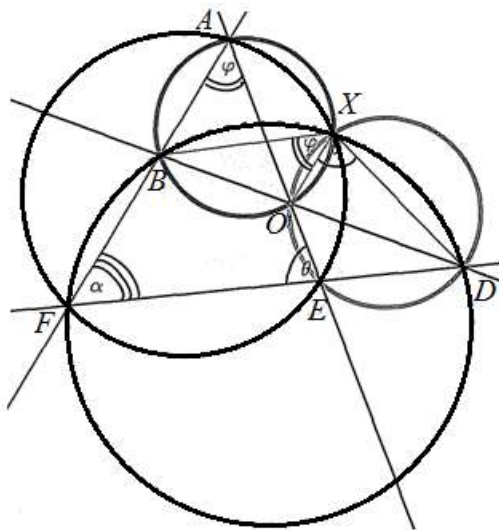
Решение. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека пресечните точки на правите се означени со A, B, C, D, E и F , а аглите се

$$\angle AFE = \angle BFD = \alpha,$$

$$\angle BAC = \varphi \text{ и}$$

$$\angle AEF = \angle CEF = \theta,$$

види цртеж. Нека претпоставиме дека опишаните кружници околу $\triangle ABC$ и $\triangle CDE$ се сечат уште во



точката X . Ќе докажеме дека опишаните кружници околу $\triangle BDF$ и $\triangle AFE$ минуваат низ точката X .

За да докажеме дека опишаната кружница околу $\triangle BDF$ минува низ точката X , доволно е да докажеме дека четириаголникот $BXDF$ е тетивен. Четириаголникот $ABCX$ е тетивен, па затоа $\angle BXC = \angle BAC = \varphi$, како периферни агли над тетивата BC . Четириаголникот $CXDE$ е тетивен, па затоа $\angle CXD = \angle CEF = \theta$. Оттука следува дека

$$\angle BXD = \angle BXC + \angle CXD = \varphi + \theta.$$

Понатаму, збирот на аглите во $\triangle AEF$ е 180° , па затоа

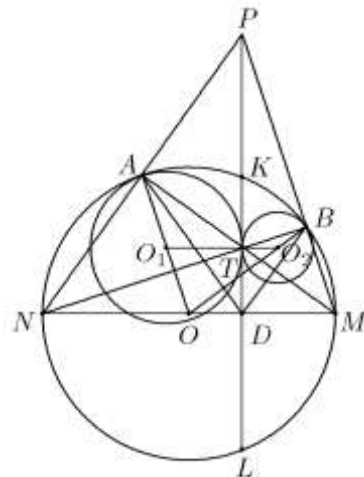
$$\angle BFD + \angle BXD = \alpha + (\varphi + \theta) = 180^\circ.$$

Последното значи, дека опишаната кружница околу $\triangle BDF$ минува низ точката X .

Аналогно се докажува дека и опишаната кружница околу $\triangle AFE$ минува низ точката X , со што тврдењето е докажано.

9. Кружниците C_1 и C_2 со центри соодветно O_1 и O_2 надворешно се допираат во точката T . Нека C е кружница со центар O таква што C_1 и C_2 се допираат внатрешно со C соодветно во точките A и B . Заедничката тангента на C_1 и C_2 во точката T ја сече C во точките K и L . Ако D е средината на отсечката KL , докажи дека $\angle O_1 O O_2 = \angle ADB$.

Решение. Нека правите AT и BT по вторпат ја сечат кружницата C соодветно во точките M и N . Тогаш од рамнокракиот триаголник ATO_1 добиваме $\angle O_1 TA = \angle O_1 AT$, од рамнокракиот триаголник AMO добиваме $\angle OMA = \angle OAT$, а точките A, O_1 и O лежат на една права. Според тоа, $\angle O_1 TA = \angle OMA$, па затоа $O_1 O_2 \parallel OM$. Аналогно $O_1 O_2 \parallel ON$, т.е. точките O, M и N лежат на една права. На истата права лежи и точката D , бидејќи $KL \perp O_1 O_2$, па затоа дијаметарот MN е нормален на тетивата KL , а D е средина на KL . Бидејќи MN е дијаметар, важи $\angle NBM =$



$\angle NAM = 90^\circ$, па затоа темињата на $\triangle ABD$ се подножјата на висините во $\triangle MNP$, каде P е пресечната точка на NA и NB . Тогаш $\angle NDA = \angle MBD = \angle MPN$ и затоа

$$\begin{aligned}\angle O_1 O O_2 &= \angle AOB = 180^\circ - \angle AON - \angle BOM \\ &= 180^\circ - (180^\circ - 2\angle ANM) - (180^\circ - 2\angle BMN) \\ &= 2(\angle ANM + \angle BMN) - 180^\circ = 180^\circ - 2\angle MPN \\ &= 180^\circ - \angle NDA - \angle MDB = \angle ADB.\end{aligned}$$

10. Нека BC е дијаметар на кружница k со центар O , A е точка од k таква што $0^\circ < \angle AOB < 120^\circ$, а D е средината на лакот AB на кружницата k кој не ја содржи точката C . Нека правата која минува низ O и е паралелна со DA ја сече правата AC во точката J , а симетралата на отсечката OA ја сече кружницата k во точките E и F . Докажи, дека J е центар на впишаната кружница во триаголникот CEF .

Решение. Од

$$\angle BCA = \frac{1}{2} \angle BOA = \angle BOD$$

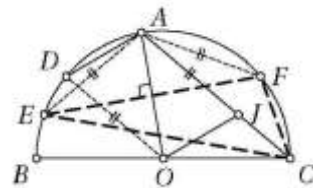
следува дека правите CA и OD се паралелни. Според тоа, четириаголникот $JADO$ е паралелограм. Оттука следува дека

$$\overline{AJ} = \overline{OD} = \overline{OE} = \overline{AE} = \overline{AF},$$

па затоа

$$\angle JFE = \angle JFA - \angle EFA = \angle AJF - \angle ECA = \angle AJF - \angle ACF = \angle CFJ.$$

Сега од $\overline{AE} = \overline{AF}$ следува дека CJ е симетрала на $\angle ECF$, па затоа J е центар на впишаната кружница во триаголникот CEF .



11. Нека S е точка во внатрешноста на $\angle pOq$ и нека кружницата k која минува низ точката S ги допира краците Op и Oq во точките P и Q , соодветно така што S припаѓа на помалиот лак PQ . Правата s која минува низ точката S и е паралелна со Op ја сече Oq во точката R . Нека T е втората пресечна точка на правата PS и опишаната кружница околу $\triangle SQR$. Докажи, дека $OT \parallel SQ$ и дека OT е тангента на опишаната кружница околу $\triangle SQR$.

Решение. Нека k_1 е опишаната кружница околу $\triangle SQR$. Имаме

како периферни агли над тетивата SQ во кружницата k_1 . Понатаму,

како агли со паралелни краци. Според тоа,

па затоа четириаголникот $OPQT$ е тетивен. Оттука следува дека

$$\angle OTR + \angle RTP = \angle OQS + \angle SQP.$$

$$\angle RTP = \angle RTS = \angle RQS = \angle OQS,$$

како агли со паралелни краци и $\angle RSQ = \angle RQT$ како периферни агли над тетивата RT во кружницата k_1 . Од оваа низа равенства следува дека $\angle OTR = \angle RQT$, па затоа OT е тангентата на кружницата k_1 во точката T .

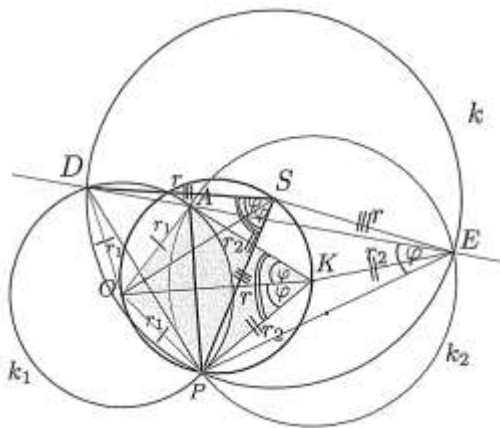
$$\angle OQS = \angle QPS = \angle QPT,$$

12. Нека A и P се пресечните точки на кружниците k_1 и k_2 со центри O

и K , соодветно. Права низ A по втор пат ги сече k_1 и k_2 во точките D и E , соодветно. Докажи дека центарот на опишаната кружница околу $\triangle DEP$ лежи на опишаната кружница околу $\triangle OKP$.

Решение. Нека S е центарот на опишаната кружница околу $\triangle DEP$ и нека $\angle DEP = \varphi$. Од $\overline{AK} = \overline{KP}$ и $\overline{OA} = \overline{OP}$ следува дека четириаголникот $OAKP$ е делтоид.

Имаме $\angle AKP = 2\varphi$, како централен агол над тетивата AP во k_2 . Во делтоидот $OAKP$ дијагоналата OK е симетрала на $\angle AKP$ па затоа $\angle OKP = \varphi$. Понатаму, $\angle DSP = 2\varphi$, како централен агол над тетивата DP во опишаната кружница околу $\triangle DEP$. Од друга страна, бидејќи $\overline{DO} = \overline{OP}$ и



$\overline{DS} = \overline{SP}$, како радиуси во кружницата k_1 и опишаната кружница околу $\triangle DEP$, соодветно, добиваме дека SO е симетрала на отсечката DP и $\angle OSP = \varphi$. Сега, од $\angle OSP = \varphi = \angle OKP$ следува дека четириаголникот $OSKP$ е тетивен, со што тврдењето е докажано.

13. Нека A и B се пресечните точки на кружниците k_1 и k_2 . Права l која минува низ точката B по вторпат ги сече k_1 и k_2 во точките X и Y , соодветно. Тангентата на k_1 во точката X и тангентата на k_2 во точката Y се сечат во точката C . Докажи, дека

а) $\angle XAC = \angle BAY$,

б) ако точката B е средина на отсечката XY , тогаш $\angle XBA = \angle XBC$.

Решение. а) Нека $\angle CXY = \varphi$ и $\angle CYX = \phi$. Тогаш

$$\angle XCY = 180^\circ - \varphi - \phi.$$

Понатаму, $\angle CXY = \angle XAB = \varphi$ како тангентен и периферен агол на кружницата k_1 и $\angle CYX = \angle YAB = \phi$ како тангентен и периферен агол на кружницата k_2 . Затоа

$$\angle XAY = \angle XAB + \angle YAB = \varphi + \phi \text{ што значи}$$

$$\angle XCY + \angle XAY = 180^\circ,$$

т.е. четириаголникот $AHCY$ е тетивен.

Според тоа, $\angle HAC = \angle HYC$, како периферни агли на тетивата XC и како $\angle CYH = \angle YAB$, добиваме $\angle HAC = \angle BAY$.

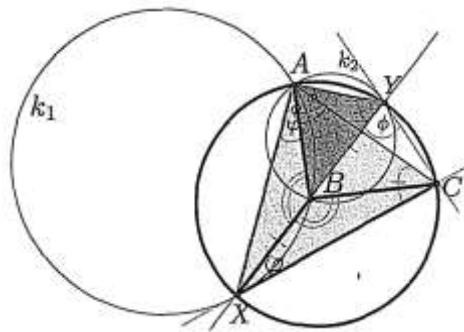
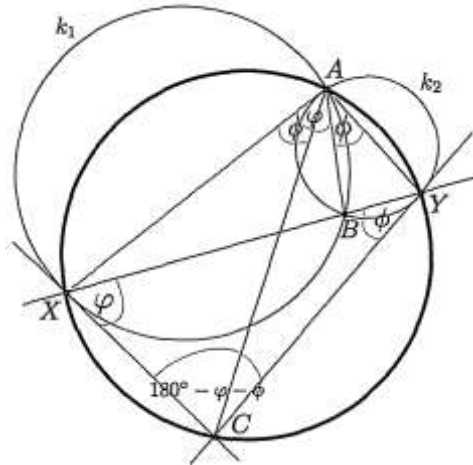
б) Имаме,

$$\angle XCA = \angle XYA = \angle BYA$$

како периферни агли над тетивата XA . Претходно докажавме дека $\angle HAC = \angle BAY$, па затоа $\triangle HAC \sim \triangle BAY$, и као B е средина на XY добиваме

$$\frac{HA}{XC} = \frac{AB}{BY} = \frac{AB}{BX}.$$

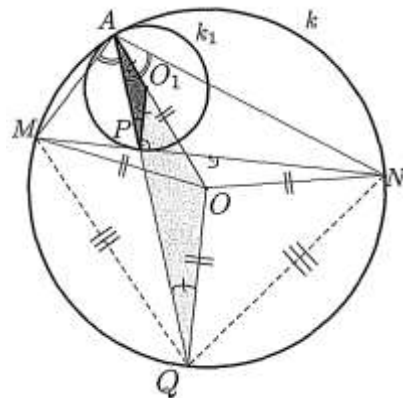
Во решението под а) докажавме дека $\angle CHY = \angle HAB$ и бидејќи важи $\frac{HA}{XC} = \frac{AB}{BX}$, добиваме дека $\triangle CHB \sim \triangle HAB$, од каде следува $\angle HBA = \angle HBC$, што и требаше да се докаже.



14. Кружниците $k(O, r)$ и $k_1(O_1, r_1)$, $r > r_1$ внатрешно се допираат во точката A . Тетивата MN на кружницата k ја допира кружницата k_1 во точката P . Докажи, дека правата AP е симетрала на $\angle MAN$.

Решение. Нека $AP \cap k = Q$. Доволно е да докажеме дека Q е средина на лакот MN .

Кружниците k и k_1 се допираат во точката A , па затоа точките A, O_1, O се колинеарни. Понатаму, $\overline{AO_1} = \overline{PO_1}$ и $\overline{AO} = \overline{QO}$. Според тоа, рамнокраките триаголници AO_1P и AOQ имаат еднакви агли



при основата, т.е. $\angle APO_1 = \angle AQO$, па затоа $O_1P \parallel OQ$. Но, според условот на задачата $O_1P \perp MN$, па затоа $OQ \perp MN$. Меѓутоа, центарот O припаѓа на симетралата на тетивата MN , па затоа правата OQ е симетрала на тетивата MN , т.е. Q е средина на лакот MN , што и требаше да докажеме

15. Кружниците $k(O, r)$ и $k_1(O_1, r_1)$, $r > r_1$ внатрешно се допираат во точката A . Тетивата BE на кружницата k ја сече кружницата k_1 во точките C и D . Докажи, дека $\angle BAD = \angle CAE$.

Решение. Нека

$$AC \cap k = M \text{ и } AD \cap k = N.$$

Точките A, O_1, O се колинеарни.

$$\text{Понатаму, } \overline{AO_1} = \overline{CO_1} \text{ и } \overline{AO} = \overline{MO}$$

. Според тоа, рамнокраките триаголници AO_1C и AOM имаат еднакви агли при основата, т.е.

$$\angle ACO_1 = \angle AMO,$$

па затоа $O_1C \parallel OM$. Аналогно се

докажува дека $O_1D \parallel ON$. Според

тоа, $\angle MON = \angle CO_1D$, како агли со паралелни краци. Но, триаголниците CO_1D и MON се рамнокраки, па затоа $\angle O_1CD = \angle OMN$.

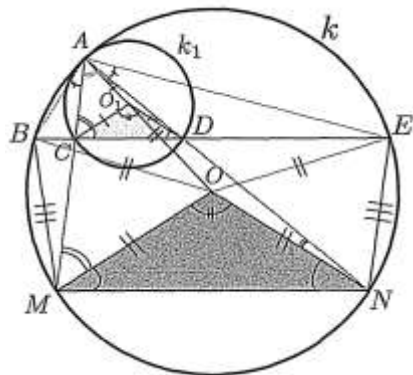
Според тоа,

$$\angle ACD = \angle ACO_1 + \angle O_1CD = \angle AMO + \angle OMN = \angle AMN$$

па затоа $MN \parallel CD$, што значи дека $MN \parallel BE$.

Од досега изнесенот следува дека четириаголникот $BENM$ е тетивен трапез. Меѓутоа, единствен тетивен трапез е рамнокракиот трапез, па затоа $\overline{BM} = \overline{EN}$, т.е. $\angle BAM = \angle EAN$, т.е.

$$\angle BAD = \angle BAC + \angle CAD = \angle CAD + \angle DAE = \angle CAE.$$



16. Дадени се кружница ω со центар I и две прави кој ја допираат ω во точките A и B и се сечат во точката O . Нека C е точка на помалиот лак AB на ω , различна од средината на лакот. Правите AC и OB се сечат во точката D , а правите BC и OA се сечат во точката E . Докажи, дека центрите на опишаните кружници околу триаголниците

ACE , BCD и OCI лежат на една права.

Решение. Нека M е втората пресечна точка на кружниците опишани околу триаголниците ACE и BCD (ако тие кружници се допираат, тогаш правите AE и BD ќе бидат паралелни). Доволно е да докажеме, дека кружницата опишана околу $\triangle OCI$ ја содржи точката M , бидејќи во тој случај центрите на трите кружници од условот на задачата ќе лежат на симетралата на отсечката CM .

Да означиме $\angle CAB = \alpha$ и $\angle CBA = \beta$. Без ограничување на општоста можеме да сметаме дека $\beta > \alpha$. Тогаш $\angle OBE = \alpha$ и $\angle DAE = \beta$. Бидејќи четириаголникот $OBIA$ е тетивен, имаме

$$\angle OIA = \angle OBA = \alpha + \beta.$$

Според тоа,

$$\begin{aligned}\angle CIO &= \angle CIA - \angle OIA \\ &= 2\angle CBA - (\alpha + \beta) = \beta - \alpha.\end{aligned}$$

За да докажеме, дека точката M лежи на кружницата опишана околу $\triangle OCI$ доволно е да докажеме дека $\angle CMO = \beta - \alpha$.

Бидејќи четириаголниците $AECM$ и $DBMC$ се тетивни, добиваме

$$\begin{aligned}\angle BME &= \angle BMC + \angle CME = (180^\circ - \angle CDB) + \angle CAE \\ &= \angle ODA + \angle DAO = 180^\circ - \angle EOB,\end{aligned}$$

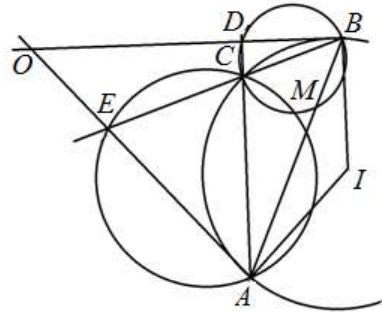
т.е. четириаголникот $EOBM$ исто така е тетивен и важи

$$\angle OME = \angle OBE = \alpha.$$

Според тоа,

$$\angle CMO = \angle CME - \angle OME = \angle CAE - \alpha = \beta - \alpha,$$

со што доказот е завршен.



17. Нека AM и BN се заемно нормални тетиви на кружница k кои се сечат во точката K и ја делат кружницата на четири лаци со различни должини, при што лакот AB е со најмала должина. Нека C и D се точки од кружницата, различни од M и N , такви што $AD \parallel BC$. Ако $L = DN \cap MC$ и $T = DC \cap KL$, докажи дека $\angle KTC = \angle KNL$.

Решение. Прво ќе докажеме дека $NL \perp MC$. Од тетивните четириаголници $ADCM$ и $DNCB$ следува $\angle DCL = \angle DAM$ и $\angle CDL = \angle CBN$. Затоа

$$\angle DCL + \angle CDL = \angle DAM + \angle CBN.$$

Нека $Z = AM \cap BC$. Од $AD \parallel BC$, следува $\angle DAM = \angle BZA$ како агли со паралелни краци. Според тоа,

$$\begin{aligned}\angle DCL + \angle CDL &= \angle BZA + \angle CBN \\ &= 90^\circ,\end{aligned}$$

т.е. $NL \perp MC$.

Од $\angle MKN = 90^\circ = \angle MLN$ следува дека четириаголникот $MKNL$ е тетивен. Оттука и бидејќи четириаголникот $AMCD$ е тетивен добиваме

$$\begin{aligned}\angle KNL &= 180^\circ - \angle KML \\ &= 180^\circ - \angle AMC = \angle ADC.\end{aligned}$$

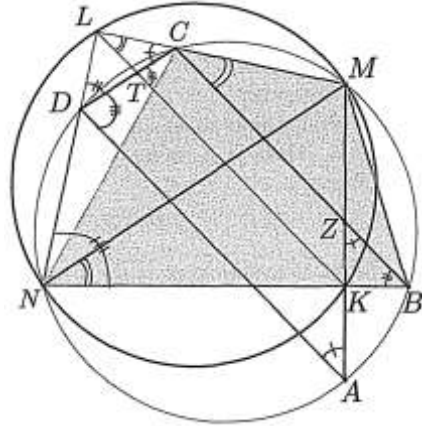
Од тетивните четириаголници $MKNL$ и $MCNB$ добиваме

$$\angle MLK = \angle MNK = \angle MNB = \angle MCB,$$

како периферни агли над тетивите MK и MB . Затоа $KL \parallel BC$ и бидејќи $BC \parallel AD$ добиваме $KL \parallel AD$. Затоа $\angle KTC = \angle ADC$, како агли со паралелни краци. Од претходно изнесеното следува

$$\angle KNL = \angle ADC = \angle KTC,$$

со што задачата е решена.



18. Нека A, B, C и O се четири точки во рамнината такви што $\angle ABC > 90^\circ$ и $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$. Нека точката D припаѓа на правата AB , $AC \perp DC$ и правата l е таква што $D \in l$ и $l \perp AO$. Правата l ја сече AC во точката E и опишаната кружница околу $\triangle ABC$ во точката F . Докажи, дека опишаните кружници околу триаголниците BEF и CFD се допираат во точката F .

Решение. Од условот на задачата следува дека O е центар на опишаната кружница околу $\triangle ABC$. Нека G е дијаметрално спротивната точка на точката A на опишаната кружница околу $\triangle ABC$. Бидејќи AG е дијаметар добиваме $\angle ACG = 90^\circ$ и бидејќи според условот на задачата $\angle ACD = 90^\circ$ добиваме дека точките D, C и G се колинеарни.

Понатаму, од $AE \perp DG$ и $DE \perp AG$ следува дека E е ортоцентар на $\triangle ADG$ и $GE \perp AD$. Но, $\angle ABG = 90^\circ$, па затоа $GB \perp AD$. Од досега изнесеното следува дека точките G, E и B се колинеарни.

Имаме

$$\angle CAG = 90^\circ - \angle AGC = \angle EDG \text{ и } \angle CAG = \angle GFC,$$

како периферни агли над тетивата CG . Затоа,

$$\angle GFC = \angle EDG = \angle FDC$$

и GF е тангента на опишаната кружница околу $\triangle CFD$.

Доволно е да докажеме дека GF е тангента и на опишаната кружница околу $\triangle BEF$, т.е. дека $\angle EFG = \angle EBF = \angle GBF$.

Нека F' е втората пресечна точка на правата l и опишаната кружница околу $\triangle ABC$. Важи

$$\angle GBF = \angle GF'F$$

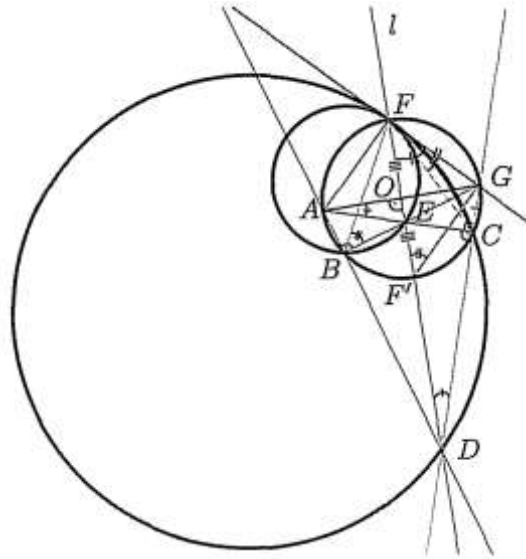
како периферни агли над тетивата GF и бидејќи AG е симетрала на отсечката FF' (AG е дијаметар, $FF' \perp AG$) добиваме

$$\angle GF'F = \angle GFF' = \angle GFE$$

Оттука следува

$$\angle GBF = \angle EFG,$$

со што задачата е решена.



IV МНОЖЕСТВА, ЛОГИКА И КОМБИНАТОРИКА

IV1 МНОЖЕСТВА

1. Нека $F = \{E_1, E_2, \dots, E_s\}$ е фамилија од r – елементни множества. Докажи, дека ако пресекот на секои $r + 1$ множества од оваа фамилија е непразно множество, тогаш и пресекот на целата фамилија е непразно множество.

Решение. Нека претпоставиме дека $\bigcap_{i=1}^s E_i = \emptyset$ и нека $E_1 = \{x_1, \dots, x_r\}$.

Од $\bigcap_{i=1}^s E_i = \emptyset$ следува дека за секој $x_i \in E_1$, $i = 1, 2, \dots, r$ постои $F_i \in F$ таков што $x_i \notin F_i$. Последното значи дека $F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_r \cap E_1 = \emptyset$, што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува дека $\bigcap_{i=1}^s E_i \neq \emptyset$.

2. Докажи дека множеството $\{1, 2, 3, \dots, 23, 24, 25\}$ не може да се подели на две подмножества A со 2 елементи и B од 23 елементи, така што збирот од броевите во множеството B да биде еднаков на производот од елементите од множеството A .

Решение. Нека таква поделба е можна и нека A се состои од броевите x и y , $x < y$. Тогаш, збирот на броевите во B е еднаков на

$$1 + 2 + 3 + \dots + 24 + 25 - x - y = \frac{25(25+1)}{2} = 325 - x - y.$$

Затоа $xy = 325 - x - y$, т.е. $(x+1)(y+1) = 326$. Единствени делители на бројот 326 се: 1, 2, 163 и 326, па затоа од последната равенка и фактот дека $x < y$ ги добиваме системите

$$\begin{cases} x+1=1 \\ y+1=326 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x+1=2 \\ y+1=163 \end{cases}$$

од каде наоѓаме $x=0, y=325$ или $x=1, y=162$. Последното не е можно бидејќи $1 \leq x < y \leq 25$.

3. Нека M е подмножество од $\{1, 2, 3, \dots, 2008\}$ такво што збирот на било кои два различни броја од M не е делив со 82. Определи го најголемиот можен број на елементи на M .

Решение. Даденото множество да го поделиме на 82 подмножества $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{80}, A_{81}$ такви што сите елементи од множеството A_i при делење со 82 даваат остаток i . Множествата $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{40}$ имаат по 25, а останатите имаат по 24 елементи. Од секое од множествата A_0 и A_{41} во множеството M може да биде избран најмногу по еден елемент. За секој $i \neq 0$ и $i \neq 41$ важи дека ако некој елемент од подмножеството A_i е во M , тогаш ниту еден елемент од множеството A_{82-i} не смее да биде во M . Понатаму, ако $i + k \not\equiv 0 \pmod{82}$, тогаш збир на елемент од A_i и елемент од A_k не е делив со 82. Тоа значи дека ако за $i \neq 0$ и $i \neq 41$ елемент од A_i припаѓа на M , тогаш и целото множество A_i може да припаѓа на M . Затоа M има најголем можен број на елементи ако во M се подмножествата $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{40}$ и по еден елемент од A_0 и A_{41} , што значи дека најголемиот можен број на елементи на M е $40 \cdot 25 + 2 = 1002$.

4. Ако $A = \{1, 2, \dots, 4s-1, 4s\}$ и $S \subset A$ е такво што $|S| = 2s+2$, тогаш во множеството S постојат три различни броја x, y, z такви што $x + y = 2z$. Докажи!

Решение. Јасно, во множеството во множеството S постојат најмалку $s+1$ елемент со иста парност. Нека $1 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_{s+1} \leq 4s$ се елементи од S со иста парност и нека $x_{s+2}, x_{s+3}, \dots, x_{2s+2}$ се преостанатите елементи на S . Броевите

$$x_1 + x_2 < x_1 + x_3 < \dots < x_1 + x_{s+1} < x_2 + x_{s+1} < \dots < x_s + x_{s+1}$$

се парни, лежат во интервалот $[2, 8s]$ и ги има $2s-1$. Понатаму, броевите

$$\{2x_i \mid i=1, 2, \dots, 2s+2\}$$

се парни, лежат во интервалот $[2, 8s]$ и ги има $2s+2$. Бидејќи

$$(2s-1) + (2s+2) = 4s+1 > 4s$$

а во интервалот $[2, 8s]$ има $4s$ парни броеви, постојат i и j такви што $x_1 + x_j = 2x_i$ или $x_j + x_{s+1} = 2x_i$, со што тврдењето е докажано.

5. За едно множество природни броеви X ќе велиме дека е добро, ако за секои $a, b \in X$ точно еден од броевите $a+b$ и $|a-b|$ припаѓа на X (броевите a и b може да бидат еднакви). Определи го максималниот број добри множества кои го содржат бројот 2008.

Решение. Ќе дадеме целосен опис на добрите множества.

Нека X е добро множество и a е најмалиот елемент на X . Тогаш $0 = |a-a| \notin X$, па затоа $2a = a+a \in X$. Оттука и од условот, применет на a и $2a$, бидејќи $a = |2a-a| \in X$ заклучуваме дека $3a = a+2a \notin X$. Сега со индукција следува дека за секој природен број k важи $(3k-2)a, (3k-1)a \in X$ и $3ka \notin X$.

Нека претпоставиме дека X има и броеви кои не се деливи со a и нека b е најмалиот меѓу нив. Тогаш $b > a$ и бројот $b-a = |b-a| \notin X$, бидејќи ако $b-a \in X$, добиваме противречност со изборот на b . Според тоа, $a+b \in X$. Сега, ако условот го примениме на a и $a+b$, заклучуваме, дека $2a+b \in X$. Понатаму, ако условот го примениме на $2a$ и b добиваме дека $|2a-b| \in X$, што не е можно бидејќи $|2a-b| < b$ не е делив со b .

Според тоа, секое добро множество е наполно определено со својот најмал елемент. Тоа може да го содржи бројот 2008, кога најмалку еден негов елемент е делител на 2008. Бидејќи бројот $2008 = 2^3 \cdot 5001$ има 8 природни делители, заклучуваме дека постојат точно 8 добри множества кои го содржат бројот 2008.

6. Нека A е множество природни броеви со следново својство: за секои $m, n \in A, m \neq n$ точно е неравенството $10|m-n|+50 \geq mn$. Определи го најголемиот можен број елементи на A .

Решение. Нека $m, n \in A$ и без ограничување на општоста можеме да земеме дека $m > n$. Тогаш даденото неравенство можеме да го запишеме во видот $mn+10n-10m \leq 50$, т.е. во видот $(m+10)(n-10) \leq -50$. Од последното неравенство следува $n < 10$. Според тоа, A има најмногу еден број поголем од 9. Освен тоа, лесно се гледа, дека не е можно броевите 8 и 9 истовремено да се во A , па затоа $|A| \leq 9$.

Множеството $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 15\}$ го има саканото својство и тоа има 9 елементи. Јасно е како се добиваат првите 8 елементи, а бројот 15 е најмалиот број кој заедно со бројот 8 го задоволува условот на задачата.

7. На еден математички натпревар секој од натпреварувачите има најмногу $d \geq 1$ познаници. Нека d_1 и d_2 се ненегативни цели броеви такви што $d_1 + d_2 = d - 1$. Докажи, дека натпреварувачите можат да бидат распределени во две простории така што секој ученик од првата просторија има најмногу d_1 познаници во неговата просторија и секој ученик од втората просторија има најмногу d_2 познаници во неговата просторија.

Решение. Учениците ќе ги поделиме во две групи V_1 и V_2 . Нека $e_i, i=1,2$ е бројот на паровите познаници во $V_i, i=1,2$, соодветно. Меѓу сите можни поделби по простории, кои ги има конечно многу, да разгледаме таква поделба (таа може и да не е единствена), за која бројот $e_1(d_2 + 1) + e_2(d_1 + 1)$ е најмал.

Ќе докажеме, дека ваквата поделба (разбивање) го задоволува условот на задачата. Нека го претпоставиме спротивното, т.е. дека во една од групите, да кажеме V_1 , има натпреварувач x кој има $d'_x \geq d_1 + 1$ познаници во групата. Со d''_x да го означиме бројот на познаниците на x во V_2 . Ако x го преместиме во V_2 , тогаш за бројот на познанствата во V_1 и V_2 добиваме $e'_1 = e_1 - d'_x \leq e_1 - d_1 - 1$ и

$$e'_2 = e_2 + d''_x \leq e_2 + d - d'_x \leq e_2 + (d_1 + d_2 + 1) - (d_1 + 1) = e_2 + d_2,$$

соодветно. Според тоа,

$$e'_1(d_2 + 1) + e'_2(d_1 + 1) - e_1(d_2 + 1) - e_2(d_1 + 1) \leq -d_1 - 1 < 0,$$

што е противречи на изборот на $e_1(d_2 + 1) + e_2(d_1 + 1)$. Конечно, од добиената противречност следува дека оваа поделба го задоволува условот на задачата.

8. Докажи, дека постојат по парови дисјунктни множества $A_1, A_2, \dots, A_{2014}$, чија унија е множеството природни броеви и за кои важи следниов услов: за секои природни броеви a и b , најмалку два од броевите $a, b, \text{NZD}(a, b)$ припаѓаат на едно од множествата $A_1, A_2, \dots, A_{2014}$.

Решение. Нека $v_2(n)$ е најголемиот цел број таков што $2^{v_2(n)}$ е делител на n . Тогаш, $v_2(\text{NZD}(a, b)) = \min\{v_2(a), v_2(b)\}$. Според тоа, најмалку барем два од броевите $v_2(a)$, $v_2(b)$ и $v_2(\text{NZD}(a, b))$ се еднакви.

Дефинираме множества $A_{i+1} = \{n \mid v_2(n) \equiv i \pmod{2014}\}$, за $0 \leq i \leq 2013$. Очигледно множества $A_1, A_2, \dots, A_{2014}$ се по парови дисјунктни, нивната унија е $\mathbb{N}$ и два од броевите $a, b, \text{NZD}(a, b)$ се наоѓаат во множеството A_{i+1} , каде i е остатокот при делење на $v_2(\text{NZD}(a, b))$ со 2014.

9. Дадено е множеството $A = \{3, 5, 7, 9\}$. Определи го бројот на конечните множества природни броеви B такви што за множествата

$$X = \{2a + b \mid a \in A, b \in B\} \text{ и } Y = \{a + 2b \mid a \in A, b \in B\}$$

е исполнет условот: за секој елемент на X (соодветно на Y) постои елемент на Y (соодветно на X) таков што разликата на двата елементи е 1.

Решение. Да забележиме дека сите елементи на множеството Y се непарни броеви. Тоа значи дека во множеството X нема непарни броеви, т.е. елементите на множеството X се парни броеви.

Ако M е најголемиот елемент на B , тогаш $9 + 2M$ и $2 \cdot 9 + M$ се најголемите елементи на Y и X , соодветно. Од условот следува дека овие два елементи се разликуваат за 1, од каде наоѓаме $M = 8$ или $M = 10$. Аналогно за најмалиот елемент m на B имаме $m = 2$ или $m = 4$. Според тоа, елементи на B се парни броеви, при што најголемиот од нив е 8 или 10, а најмалиот е 2 или 4.

Множества со ова својство се:

$$\begin{aligned} &\{2, 4, 6, 8, 10\}, \{2, 6, 8, 10\}, \{2, 4, 8, 10\}, \{2, 4, 6, 10\}, \{2, 8, 10\}, \\ &\{2, 6, 10\}, \{2, 4, 10\}, \{2, 10\}, \{2, 4, 6, 8\}, \{2, 6, 8\}, \{2, 4, 8\}, \{2, 8\}, \\ &\{4, 6, 8, 10\}, \{4, 8, 10\}, \{4, 6, 10\}, \{4, 10\}, \{4, 6, 8\}, \{4, 8\}. \end{aligned}$$

Со непосредна проверка се покажува дека 5 од овие множества не го задоволуваат условот на задачата и тоа семножествата:

$$\{2, 8, 10\}, \{2, 4, 10\}, \{2, 10\}, \{2, 8\}, \{4, 10\}.$$

Значи, постојат 13 множества кои го задоволуваат условот на задачата.

10. Докажи, дека за секој сложен природен број $n \geq 6$ постои множество A од n различни природни броеви, со следново својство: за секој вистински делител d на n , елементите на A можат на два различни начини да се поделат на $\frac{n}{d}$ по парови дисјунктни подмножества секое со по d елементи така, што збирот на елементите на секое множество од едната поделба е еднаков на збирот на елементите на некое множество од другата поделба.

Решение. Нека $d = 2$. Бидејќи $1+5=2+4$, $3+4=1+6$ и $6+2=3+5$, добиваме дека елементите на множеството $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ може да се поделат на два начина, така што е исполнет условот на задачата. Според тоа, кога $d = 2$ за добивање на множеството A кон елементите на множеството B треба да додадеме произволни $n-6$ различни природни броеви поголеми од 6. Во двете поделби овие $n-6$ елементи ги групираме на еден ист начин во двоелементни подмножества.

Ќе докажеме дека ако во A имаме четири елементи a, b, c, d за кои $a+b=c+d$, тогаш за секој $d \geq 3$ бараната поделба постои. Навистина, нека првите две множества од првата поделба ги содржат множествата $\{a, b\}$ и $\{c, d\}$, соодветно и уште $d-2$ различни елементи. Останатите елементи ги групираме на произволен начин во останатите $\frac{n}{d}-2$ множества. При втората поделба во првите две множества ги заменуваме местата на $\{a, b\}$ и $\{c, d\}$, а се останато е непроменето. Лесно се гледа дека во случајов условот на задачата е исполнет. Конечно, од претходните разгледувања следува дека е доволно да избереме множество A од n различни природни броеви кое ги содржи броевите 1, 2, 3, 4, 5, 6.

11. Нека n е природен број и $S = \{n, n+1, n+2, \dots, 5n\}$.

а) Докажи, дека ако множеството S е поделено на две дисјунктни множества, тогаш постојат три броја x, y, z (не задолжително различни) кои припаѓаат на исто подмножество на S и за кое важи $x+y=z$.

б) Дали тврдењето под а) важи ако наместо множеството S го разгледуваме множеството $S' = \{n, n+1, n+2, \dots, 5n-1\}$.

Решение. а) Нека множеството S е поделено на подмножествата A и B . Нека претпоставиме дека тврдењето не е точно. Нека $n \in A$. Тогаш $n+n=2n \in B$. Понатаму, мора да важи $2n+2n=4n \in A$, па затоа $n+4n=5n \in B$. Сега, бројот $3n$ припаѓа или на множеството A или на множеството B . Ако $3n \in A$, тогаш $n+3n=4n$, а ако $3n \in B$, тогаш $2n+3n=5n \in B$. И во двата случаја добиваме противречност со претпоставката, од што следува точноста на тврдењето.

б) Ако наместо множеството S го разгледуваме множеството S' , тогаш тврдењето не важи.

Навистина, доволно е да ја разгледаме поделбата на S' на множествата

$$A = \{n, n+1, \dots, 2n-1\} \cup \{4n, 4n+1, \dots, 5n-1\} \text{ и } B = \{2n, 2n+1, \dots, 4n-1\}.$$

12. Определи ги сите елементи $n \in A = \{2, 3, \dots, 2016\} \subset \mathbb{N}$ со следново својство: секој број $m \in A$ кој е помал од n и е заемно прост со n , мора да биде прост број.

Решение. Со M да го означиме бараното множество. Нека $n \in M$. Ако $p^2 < n$ за некој прост број p , тогаш p мора да е делител на n . Имено, ако n и p се заемно прости, тогаш бидејќи $n \in M$ бројот p^2 треба да е прост број. Значи, ако $n \in M$ и $p^2 < n$, тогаш p е делител на n .

Бидејќи $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 2310 > 2016$, заклучуваме дека броевите од M не може да се поголеми од $11^2 = 121$.

Ако $n \in M$ и $49 < n \leq 121$, тогаш n е делив со 2, 3, 5 и 7, што не е можно бидејќи $n \leq 121$. Значи, мора да е $n \leq 49$,

Ако $n \in M$ и $25 < n \leq 49$, тогаш n е делив со 2, 3 и 5, од каде заклучуваме дека $n = 30$.

Ако $n \in M$ и $9 < n \leq 25$, тогаш n е делив со 2 и 3, од каде следува $n \in \{12, 18, 24\}$.

Конечно, за $n \in M$ и $4 < n \leq 9$ бројот n мора да е делив со 2, од што следува $n \in \{6, 8\}$. Очигледно, $2, 3, 4 \in M$, па затоа

$$M = \{2, 3, 4, 6, 8, 12, 18, 24, 30\}.$$

13. Нека A е множество со n^2 , ($n \geq 2$) елементи, $\mathcal{F}$ е фамилија подмножества од A такви што секое од нив има n елементи и секои две различни множества од $\mathcal{F}$ имаат најмногу еден заеднички елемент. Докажи, дека

а) фамилијата $\mathcal{F}$ има најмногу $n^2 + n$ елементи,

б) фамилијата $\mathcal{F}$ има $n^2 + n$ елементи за $n = 3$.

Решение. а) За фиксиран елемент $x \in A$ со $k(x)$ да го означиме бројот на множествата $B \in \mathcal{F}$ кои го содржат елементот x . Овие множества да ги означиме со $B_1, B_2, \dots, B_{k(x)}$. Тогаш множествата

$$B_1 \setminus \{x\}, B_2 \setminus \{x\}, \dots, B_{k(x)} \setminus \{x\}$$

се дисјунктни подмножества на множеството $A \setminus \{x\}$.

Бидејќи секое од овие множества има $n-1$ елемент, а множеството A има n^2-1 елементи, заклучуваме дека важи

$$k(x) \leq \frac{n^2-1}{n-1} = n+1.$$

Постапката ја повторуваме за секој елемент $x \in A$ и ако ги собереме добиените неравенства наоѓаме

$$\sum_{x \in A} k(x) \leq n^2(n+1).$$

Меѓутоа,

$$\sum_{x \in A} k(x) = \sum_{B \in \mathcal{F}} |B| = n |\mathcal{F}|,$$

па затоа $|\mathcal{F}| \leq n^2 + n$.

б) Да ги распределите елементите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 во табела:

1	2	3
4	5	6
7	8	9

и множествата на фамилијата $\mathcal{F}$ да ги оформиме како редици, колони и “дијагонали” на оваа фамилија. Така ги добиваме множествата

$$\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}, \{7, 8, 9\}, \{1, 4, 7\}, \{2, 5, 8\}, \{3, 6, 9\}, \\ \{1, 6, 8\}, \{2, 4, 9\}, \{3, 5, 7\}, \{3, 4, 8\}, \{2, 6, 7\}, \{1, 5, 9\}.$$

14. Докажи, дека за секој природен број $n \geq 2$ постои множество од n природни броеви такво што за секои два броја a и b од тоа множество важи $(a-b)^2 \mid ab$.

Решение. Тврдењето ќе го докажеме со индукција по n .

За $n=2$ множеството $\{1, 2\}$ ги задоволува условите на задачата.

Нека претпоставиме дека за природниот број $n \geq 2$ постои множество $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ кое ги задоволува условите на задачата. Ќе докажеме дека множеството $\{A, A+a_1, A+a_2, \dots, A+a_n\}$, каде $A = a_1 a_2 \dots a_n$ ги задоволува условите на задачата. Од индуктивната претпоставка и фактот дека $a_i \mid A$ за $i=1, 2, \dots, n$ следува дека за секои $i, j, i \neq j$ важи

$$((A+a_i) - (A+a_j))^2 = (a_i - a_j)^2 \mid a_i a_j \mid (A+a_i)(A+a_j).$$

и за секој $i=1, 2, \dots, n$ важи $((A+a_i) - A)^2 = a_i^2 \mid A a_i$. Според тоа, тврдењето важи и за $n+1$, па од принципот на математичка индукција следува дека важи за секој природен број $n \geq 2$.

15. Даден е природен број $n \geq 3$. Определи го најмалиот природен број k за кој постојат множество A од k реални броеви и n различни броеви $x_1, x_2, \dots, x_n$ за кои броевите $x_1 + x_2, x_2 + x_3, \dots, x_{n-1} + x_n, x_n + x_1$ се од A .

Решение. Да ставиме

$$m_1 = x_1 + x_2, m_2 = x_2 + x_3, \dots, m_{n-1} = x_{n-1} + x_n, m_n = x_n + x_1.$$

Јасно, $m_i \neq m_{i+1}$, за $i = 1, 2, \dots, n$, бидејќи во спротивно ќе важи $x_i = x_{i+2}$. Според тоа, $k \geq 2$. Ако $k = 2$, тогаш $A = \{a, b\}$ и затоа

$$a = x_1 + x_2, b = x_2 + x_3, \dots, a = x_{n-1} + x_n, b = x_n + x_1$$

кога n е парен и

$$a = x_1 + x_2, b = x_2 + x_3, \dots, b = x_{n-1} + x_n, a = x_n + x_1$$

кога n е непарен. Во вториот случај добиваме $x_n = x_2$, што е противречност, а во првиот случај добиваме

$$\begin{aligned} \frac{n}{2}a &= (x_1 + x_2) + (x_3 + x_4) + \dots + (x_{n-1} + x_n) \\ &= (x_2 + x_3) + (x_4 + x_5) + \dots + (x_n + x_1) = \frac{n}{2}b \end{aligned}$$

од каде следува $a = b$, што повторно е противречност. За $k = 3$ го конструираме следниов пример: нека $x_{2k-1} = k, k \geq 1$ и $x_{2k} = n + 1 - k$. За парно n имаме

$$x_i + x_{i+1} = \begin{cases} n+1, & \text{за непарно } i, \\ n+2, & \text{за парно } i < n, \\ \frac{n}{2} + 2, & \text{за } i = n. \end{cases}$$

За непарно n имаме

$$x_i + x_{i+1} = \begin{cases} n+1, & \text{за непарно } i < n, \\ n+2, & \text{за парно } i, \\ \frac{n-1}{2} + 2, & \text{за } i = n. \end{cases}$$

16. Дадена е низа од природни броеви $1 = x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n < \dots$ таква што $x_{n+1} \leq 2n$, за секој $n \in \mathbb{N}$. Дали постојат два члена на низата x_i и x_j такви што $x_i - x_j = 2017$?

Решение. Ќе го докажеме следново поопшто тврдење.

За секој природен број k постојат членови на низата x_i и x_j такви што $x_i - x_j = k$.

Нека $k \in \mathbb{N}$ и да претпоставиме дека $x_i - x_j \neq k$, за секои $i, j \in \mathbb{N}$. Да го разгледаме множеството $A_k = \{1, 2, 3, \dots, 2k-1, 2k\}$, за кое ќе го формираме множеството од сите подредени парови $(i, k+i), i=1, 2, \dots, k$, т.е. множеството $B_k = \{(1, k+1), (2, k+2), \dots, (k, 2k)\}$,

Нека претпоставиме дека секој подреден пар на множеството B_k содржи најмногу еден член на низата $\{x_i\}$. Тоа значи дека во множеството A_k се содржат најмногу k членови на низата $\{x_i\}$ и како $\{x_i\}$ е монотono растечка низа природни броеви добиваме дека $x_{k+1} \notin A_k$. Последното значи, дека $x_{k+1} < 2k$, што е противречност. Од добиената противречност следува дека постои подреден пар од множеството B_k таков што $x_i = t$, $x_j = k+t$. Тоа значи дека постојат членови на низата x_i и x_j такви што $x_j - x_i = (k+i) - i = k$, со што тврдењето е докажано.

Конечно, за $k = 2017$ добиваме дека постојат два члена на низата x_i и x_j такви што $x_i - x_j = 2017$

17. Ги разгледуваме сите подмножества на множеството $\{1, 2, \dots, N\}$ кои не содржат два соседни броја. Докажи, дека збирот од квадратите на производите на броевите од овие множества е еднаков на $(N+1)!-1$.

Решение. Тврдењето ќе го докажеме со индукција по N . За $N=1$ и $N=2$ точноста на тврдењето се проверува непосредно. Да претпоставиме дека тврдењето е точно за сите природни броеви помали од N . Сите подмножества на множеството $\{1, 2, \dots, N\}$ кои не содржат два соседни броја ќе ги поделиме во три групи: во првата група се сите подмножества кои не го содржат бројот N , во втората група се сите подмножества кои го содржат бројот N и содржат уште некој од првите $N-1$ броеви и во третата група е едноелементното множество $\{N\}$. Според индуктивната претпоставка збирот на квадратите на производите на броевите од подмножествата во првата група е еднаков на $N!-1$. Сите подмножества од втората група се добиваат ако на сите подмножества на $\{1, 2, \dots, N-1\}$ кои не содржат два соседни броја се додаде бројот N . Затоа збирот од квадратите на производите од подмножествата од втората група е еднаков на $N^2((N-1)!-1)$. За третата група збирот од квадратите на производите од броевите е N^2 .

Конечно, за збирот од квадратите на производите на броевите од сите разгледувани подмножества на $\{1, 2, \dots, N\}$ е еднаков на

$$N! - 1 + N^2((N-1)! - 1) + N^2 = N! - 1 + N! \cdot N = (N+1)! - 1,$$

па од принципот на математичка индукција следува дека тврдењето важи за секој природен број N .

18. Нека O_{xyz} е правоаголен координатен систем во просторот, S е конечно множество точки во него, а S_x, S_y и S_z се множествата ортогонални проекции на точките од S на O_{yz}, O_{zx}, O_{xy} , соодветно. Докажи дека

$$|S|^2 \leq |S_x| \cdot |S_y| \cdot |S_z|.$$

Решение. Нека $|S_x| = a, |S_y| = b, |S_z| = c$. Доказот ќе го дадеме со индукција по $|S|$.

За едноелементно множество S тврдењето важи.

Да претпоставиме дека тврдењето важи за секое S , такво да $|S| < n$.

Да го разгледаме множеството S за кое $|S| = n$. Постои рамнина паралелна со некоја од координатните рамнини која не содржи ниту една точка од S и која го дели тоа множество на две непразни подмножества S_1 и S_2 , така што $n = |S_1| + |S_2|, |S_1| < n, |S_2| < n$. Од индуктивната претпоставка следува

$$|S_1|^2 \leq a_1 b_1 c_1, \quad |S_2|^2 \leq a_2 b_2 c_2.$$

Можеме да претпоставиме дека таа рамнина е паралелна со xy -рамнината. Тогаш

$$a_1 + a_2 = a, \quad b_1 + b_2 = b, \quad c_1 \leq c, \quad c_2 \leq c.$$

Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува дека

$$\begin{aligned} |S|^2 &= (|S_1| + |S_2|)^2 \leq (\sqrt{a_1 b_1 c_1} + \sqrt{a_2 b_2 c_2})^2 \leq (\sqrt{a_1 b_1} \cdot \sqrt{c} + \sqrt{a_2 b_2} \cdot \sqrt{c})^2 \\ &= c(\sqrt{a_1 b_1} + \sqrt{a_2 b_2})^2 \leq c(a_1 + a_2)(b_1 + b_2) = abc \end{aligned}$$

со што е докажана точноста на даденото неравенство.

19. Нека A е подмножество на множеството $S = \{1, 2, \dots, 1000000\}$, кое содржи точно 101 елемент. Докажи, дека постојат броеви $t_1, t_2, \dots, t_{100} \in S$ такви што множествата

$$A_i = \{x + t_i \mid x \in A\}, \quad i = 1, 2, \dots, 100$$

се по парови дисјунктни.

Решение. Да го разгледаме множеството $D = \{x - y \mid x, y \in A\}$. Јасно, множеството D има најмногу $101 \cdot 100 + 1$ елемент. Понатаму, множествата $A_i = t_i + A$ и $A_j = t_j + A$ се дисјунктни ако и само ако $t_i - t_j \notin A$. Бараните броеви $t_1, t_2, \dots, t_{100}$ ќе ги избереме индуктивно.

Прво, да земеме произволен број $t_1 \in S \setminus D$. Нека претпоставиме дека сме одбрале $k \leq 99$ броеви $t_1, t_2, \dots, t_k \in D$ такви што разликата на било кои два од овие броеви не припаѓа на множеството D . За t_{k+1} е доволно да се избере било кој број од S кој не припаѓа на множествата $t_1 + D, t_2 + D, \dots, t_k + D$. Последното може да се направи бидејќи за секој i важи $|t_i + D| \leq 101 \cdot 100 + 1$, па затоа

$$\left| \bigcup_{i=1}^k (t_i + D) \right| \leq 99 \cdot (101 \cdot 100 + 1) = 999999 < 1000000.$$

20. Нека затворениот интервал $[0, 1]$ е поделен на две дисјунктни множества A и B , т.е. нека $A \cup B = [0, 1]$ и $A \cap B = \emptyset$. Дали постои реален број a таков што $A + a = B$, каде $A + a = \{y, y = x + a, x \in A\}$.

Решение. Без ограничување на општоста ќе претпоставиме дека $a > 0$ (во спротивно наместо со a ќе работиме со $-a$ и ќе ги смениме улогите на множествата A и B). Најмала вредност која може да припаѓа на B е a , бидејќи ако $0 < x < a, x \in B$, тогаш $x - a < a - a = 0$ и $x - a \in A$ што не е можно. Според тоа $[0, a) \subseteq A$. Но, тогаш интервалот $[a, 2a)$ е подмножество од B , и според тоа, тој е дисјунктен со A . Нека $y \in [2a, 3a) \cap B$. Тогаш постои $x \in A$ таков што $y = x + a$, т.е. $x = y - a$. Сега, од $2a \leq y < 3a$ следува $a \leq y - a < 2a$, односно $x = y - a \in [a, 2a) \subseteq B$, што противречи на $A \cap B = \emptyset$. Значи,

$$[2a, 3a) \cap [0, 1] \subseteq A.$$

Нека претпоставиме дека $3a > 1$. Тогаш $[2a, 1] \subseteq A$ и од $1 \in A$ следува $1 + a \in B$, што не е можно бидејќи $B \subseteq [0, 1]$ и важи $1 + a > 1$. Значи, $[2a, 3a) \subseteq A$. Повторувајќи ја постапката добиваме дека

$$[4a, 5a), [6a, 7a), \dots, [2ka, (2k+1)a), \dots \subseteq A.$$

Од друга страна, за секој позитивен реален број a , постои $k_0 \in \mathbb{N}$ таков што $2k_0 a > 1$. Значи, $1 < 2k_0 a \in [2k_0 a, (2k_0 + 1)a) \subseteq A \subseteq [0, 1]$, што е противречност.

Конечно, од добиената противречност следува дека за произволна поделба на интервалот $[0,1]$ на две дисјунктни подмножества A и B не постои реален број a со саканите својства.

III2 ЛОГИЧКИ ЗАДАЧИ

1. На еден натпревар учествувале 2016 ученици. Докажи дека меѓу нив може да се изберат 45 ученици така да сите се од ист град или сите се од различни градови.

Решение. Нека претпоставиме дека на натпреварот има ученици од најмногу 44 градови и дека од секој град има најмногу 44 ученици. Тогаш на натпреварот може да има најмногу $44 \cdot 44 = 1936$ ученици. Но, на натпреварот има 2016 ученици и ако претпоставиме дека некој од останатите натпреварувачи е од некој од овие 44 градови, тогаш тој би бил 45. натпреварувач од тој град. Ако претпоставиме дека некој од преостанатите натпреварувачи не е од разгледуваните 44 градови, тогаш тој припаѓа на 45. град што значи дека имаме натпреварувачи од 45 градови, па ако од секој град земеме по еден натпреварува, добиваме дека имаме 45 ученици кои се од различни градови.

2. Иво нумерирал 100 картички со природните броеви од 1 до 100 и на Јана и дал дел од нив. Познато е дека за секоја картичка на Иво и секоја картичка на Јана, збирот на броевите со кои се означени не е запишан на картичка кај Иво и производот не е запишан на картичка кај Јана. Колку картички има Јана, ако картичката со број 13 не е кај неа?

Решение. Јана има барем една картичка k . Ако 1 е кај Иво, тогаш производот на 1 и k е кај Јана, што противречи на условот. Значи, 1 е кај Јана.

Ако 12 е кај Иво, тогаш збирот на 1 и 12 е кај Иво, што е противречност. Значи, 12 е кај Јана.

Бидејќи збирот на 6 и 7 е кај Иво, тие се кај еден човек. Но, ако се кај Иво, тогаш збирот на 1 и 6 е кај Иво, што е противречност. Значи, 6 и 7 се кај Јана.

Бидејќи збирот на 3 и 10 е кај Иво, тие се кај еден човек. Но, ако се кај Иво, тогаш збирот на 3 и 7 е кај Иво, што е противречност. Значи, 3 и 10 се кај Јана.

Бидејќи збирот на 5 и 8 е кај Иво, тие се кај еден човек. Но, ако се кај Иво, тогаш збирот на 3 и 5 е кај Иво, што е противречност. Значи, 5 и

8 се кај Јана.

Бидејќи збирот на 4 и 9 е кај Иво, тие се кај еден човек. Но, ако се кај Иво, тогаш збирот на 4 и 5 е кај Иво, што е противречност. Значи, 4 и 9 се кај Јана.

Бидејќи збирот на 2 и 11 е кај Иво, тие се кај еден човек. Но, ако се кај Иво, тогаш збирот на 2 и 9 е кај Иво, што е противречност. Значи, 2 и 11 се кај Јана.

Според тоа, броевите од 1 до 12 се кај Јана. Тогаш броевите од видот $13k$, $k=1,2,\dots,7$ се кај Иво, а нивните зборови со броевите од 1 до 12 се кај Јана. Според тоа, кај Јана се картичките означени со броевите кои не се делат со 13, што значи дека Јана има $100-7=93$ картички.

3. Дадени се три карти и на секоја од нив е запишан по еден природен број. Овие броеви p, q и r го задоволуваат условот $0 < p < q < r$. Три играчи A, B и C играат игра во која еден круг се состои во следното: картите се мешаат и се делат така што секој играч добива по една карта и потоа секој играч добива онолку топчиња колку што е бројот на неговата карта, после што картите се враќаат, а топчињата остануваат кај играчите. Играта има N кругови, $N \geq 2$. На крајот на играта, играчот A имал вкупно 20 топчиња, B – 10 топчиња, а C – 9 топчиња. Познато е дека во последниот круг играчот B добил r топчиња. Кој од играчите добил q топчиња во првиот круг?

Решение. Вкупниот број на поделени топчиња во играта е

$$N(p+q+r) = 20+10+9 = 39.$$

Од $N \geq 2$ и $p+q+r \geq 1+2+3=6$, добиваме $N=3$ и $p+q+r=13$. Бидејќи B во последниот круг добил r топчиња, а вкупно биле 10 и затоа што $p+q+r=13 > 10$, тој во првите два круга мора да добил по p топчиња. Тоа значи, дека C во првите два круга добил барем по q топчиња. Ако тој во еден круг добие r топчиња, тогаш вкупно би ги имал барем $r+q+p=13$, што не е можно, бидејќи вкупно добил само 9 топчиња.

Да забележиме дека распоредот на топчињата е:

$$A-r, r, q; B-p, p, r; C-q, q, p.$$

Броевите p, q и r може да се одредат со следниот систем линеарни равенки:

$$q+2r=20, \quad 2p+r=10, \quad p+2q=9$$

т.е. $p=1, q=4$ и $r=8$.

4. Природниот број x е таков што се точни две од тврдењата

- 1) $x+7$ е точен квадрат,
- 2) цифрата на единиците на x е 5,
- 3) $x-12$ е точен квадрат.

Опреди го бројот x .

Решение. Не е можно тврдењата 1) и 2) да се точни. Навистина, тогаш $x+7$ треба да биде точен квадрат кој завршува на 2, а точните квадрати завршуваат на една од цифрите 0, 1, 4, 5, 6 или 9. Аналогно, не е можно тврдењата 2) и 3) да се точни, бидејќи тогаш $x-12$ треба да е точен квадрат кој завршува на цифрата 3. Според тоа, точни се тврдењата 1) и 3). Нека $x+7=m^2$ и $x-12=n^2$. Тогаш, $m^2-n^2=19$, т.е. $(m-n)(m+n)=19$. Но, 19 е прост број, а $m-n$ и $m+n$ се негови природни делители, па бидејќи $m-n < m+n$ добиваме $m-n=1$, $m+n=19$. Според тоа, $m=10$ и $n=9$. Конечно, бараниот број е $x=m^2-7=93$.

5. Докажи, дека броевите од 1 до 16 може да се наредат во низа така што збирот на секои два соседни броеви е точен квадрат на природен број.

Решение. Бројот 16 има барем еден соседен број, па збирот во случајов ќе биде поголем од 16. Ако до бројот 16 е запишан бројот a , тогаш $17 \leq 16+a \leq 31$, па за да збирот биде точен квадрат мора да биде $a=9$ и притоа бројот 16 може да има само еден соседен број. Значи, подредувањето на низата мора да почне од бројот 16 или низата треба да заврши со бројот 16. Ако прво го запишеме бројот 16, тогаш од условот на задачата лесно се добива следново подредување:

16, 9, 7, 2, 14, 11, 5, 4, 12, 13, 3, 6, 10, 15, 1, 8.

6. Дали постои природен број n кој има точно 49 природни делители и тие делители да може да се подредат во табела со димензии 7×7 , но така што збиравите на броевите запишани во секој ред и во секоја колона се еднакви?

Решение. Нека претпоставиме дека постои природен број со бараното својство. Со S да го означиме збирот на броевите запишани во секој ред. Бидејќи бројот n е запишан во табелата добиваме дека $S > n$. Сега, S е збир на седум различни броеви, па затоа во секој ред постои број кој е поголем од $\frac{S}{7} > \frac{n}{7}$. Меѓутоа, најмногу шест делители на n може да бидат поголеми од $\frac{n}{7}$ (такви може да бидат само броевите

$\frac{n}{q}$, $q = 1, 2, 3, 4, 5, 6$). Конечно, од добиената противречност следува дека не постои природен број со саканото својство.

7. На кружница се запишани 100 по парови различни броеви. Докажи, дека може да се избераат 4 последователни од дадените броеви така што збирот на двата крајни броја е строго поголем од збирот на двата средни.

Решение. Нека дадените броеви ги означиме со $a_1, a_2, \dots, a_{100}$, при што ќе сметаме дека $a_{100+n} = a_n$ и нека го претпоставиме спротивното, т.е. дека важи $a_n + a_{n+3} \leq a_{n+1} + a_{n+2}$, односно дека $a_{n+3} - a_{n+2} \leq a_{n+1} - a_n$, за $n = 1, 2, \dots, n$. Според тоа,

$$a_{100} - a_{99} \leq a_{98} - a_{97} \leq \dots \leq a_2 - a_1 \leq a_{100} - a_{99},$$

што значи дека неравенствата всушност се равенства. Нека $a_{2n} - a_{2n-1} = k$, $n = 1, 2, \dots, 50$ и аналогно $a_{2n+1} - a_{2n} = l$, $n = 1, 2, \dots, 50$. Ако ги собереме добиените сто равенства добиваме $50k + 50l = 0$, па затоа $k = -l$. Според тоа, $a_3 - a_2 = l = -k = -(a_2 - a_1) = a_1 - a_2$, од каде добиваме $a_1 = a_3$, што е противречност.

8. Природните броеви од 1 до 2011 се запишани во произволен редослед еден до друг. Се реализира следнава следната операција (*): ако k , $1 \leq k \leq 2011$ е најлевиот број, првите k броеви се бришат и на нивно место се запишуваат истите броеви, но во обратен редослед (останатите броеви во записот не се менуваат). Докажи, дека:

а) за секој природен број n , $1 \leq n \leq 2011$ постои почетен запис, таков што ако операцијата (*) се примени последователно n пати, на првата позиција ќе се најде бројот 1.

б) за секој почетен запис постои природен број n таков што ако операцијата (*) се примени последователно n пати, на првата позиција ќе се најде бројот 1.

Решение. а) Да разгледаме таков запис на броевите од 1 до 2011, во кој природниот број m , $1 \leq m \leq 2011$ се наоѓа точно на m -тото место од лево на десно. За таквиот запис ја применуваме следнава нова операција $\{m\}$: ги запишуваме броеви од првото до m -тото место во обратен редослед и не ги менуваме останатите броеви. Јасно, од новиот запис, со примена на операцијата (*) се добива почетниот запис. Нека n , $1 \leq n \leq 2011$ е произволен. Го разгледуваме природниот ред на

броевите: 1, 2, 3, 4, 5,..., 2011. Бројот 2 се наоѓа на второто место и можеме да ја примениме операцијата {2}. Добиваме: 2, 1, 3, 4, 5,..., 2011. Во овој запис бројот 3 е на третото место и можеме да ја примениме операцијата {3}. Добиваме: 3, 1, 2, 4, 5, ..., 2011. Тука бројот 4 е на четвртото место и можеме да ја примениме операцијата {4}. Добиваме: 4, 2, 1, 3, 5, ... , 2011. Продолжуваме понатаму, додека стигнеме до бројот n , кој се наоѓа на n – то место и ја применуваме операцијата $\{n\}$. Бројот n доаѓа на прво место и добиениот запис е решение на задачата, бидејќи од претходно кажаното следува, дека ако сега n пати ја примениме операцијата $(*)$, ќе го добиеме записот: 1, 2, 3, 4, 5, ..., 2011.

б) Да разгледаме произволен почетен запис на броевите од 1 до 2011. Ако единицата е на прво место, за n можеме да избереме произволен природен број. На разгледуваниот запис почнуваме последователно да ја применуваме операцијата $(*)$. Нека A е множеството од сите броеви, кои се појавуваат на прво место во последователните записи. Во A има најмногу 2011 броеви. Да го разгледаме најголемиот од нив. Кога тој број е на прво место, следната примена на операцијата $(*)$ го носи на ново место и тој никогаш не може да се врати повторно на првото место, бидејќи броевите кои последователно се појавуваат на прво место се помали од него. Сега ги разгледуваме следните броеви и го применуваме истото расудување за вториот по големина број во A . Кога тој број е на прво место, следната примена на операцијата $(*)$ го носи на ново место и тој никогаш не може повторно да се врати на прво место. Постапката ја продолжуваме, се додека на прво место не се појави најмалиот број в A . Да допуштиме, дека тоа не е единицата. Но тогаш следната примена на операцијата $(*)$ ќе го однесе најмалиот број на ново место и тој никогаш не може повторно да се појави на прво место. Значи, на прво место ќе се појави број, кој е помал од најмалиот и тоа е противречност. Заклучаваме, дека единицата сигурно ќе се појави на прво место. Бројот n на применување на операцијата $(*)$ до појавата на единицата е бараниот број.

9. Секое од 1000 цуциња има капа, која е сина однадвор и црвена одвнатре или обратно. Цуцето кое носи црвена (однадвор) капа може само да лаже, а цуцето со сина (однадвор) капа може само да ја говори вистината. Во текот на еден ден секое цуце на секое друго цуце му

кажало: “Ти си со црвена капа!”, после што некои цуциња ја превртеле капата наопаку во текот на тој ден. Определи го минималниот број превртувања на капите.

Решение. Цуцето ќе го наречеме *црвено* или *сино*, ако носи (во даден момент) капа со соодветната боја.

Да забележиме, дека едно цуце може да му каже на друго “Ти си со црвена капа!” ако и само ако кога тие две цуциња се разнобојни и притоа синото цуце ја кажало вистината, а црвеното излагало. Ако постојат три цуциња кои не ги превртеле капите, тогаш две од нив биле еднобојни целиот ден и не е можно да си кажале “Ти си со црвена капа!”. Според тоа, имаме најмалку $1000 - 2 = 998$ превртувања на капите.

Ќе дадеме пример со точно 998 превртувања на капите. Ќе велиме дека две цуциња разговарале ако секое од нив на другото цуце му кажало “Ти си со црвена капа!”. Ќе опишеме пример со точно 998 превртувања, кога на почетокот цуцето Лутко е сино, а сите останати се црвени. На почетокот на денот секое цуце разговарало со Лутко. После тоа сите црвени цуциња последователно ги превртувале капите, при што после секое превртување сите останати црвени цуциња разговарале со цуцето кое тукушто ја превртело капата. Кога ќе остане едно црвено цуце, т.е. после 998 превртувања секој пар цуциња веќе разговарале.

Забелешка. Пример со 998 превртувања на капите е можен во секоја ситуација во која не се сите цуциња еднобојни.

10. На тениски турнир секој тенисер играл по еден натпревар со секој друг тенисер (во тенисот ниту еден натпревар не завршува нерешено). Се покажало, дека најголемиот број играчи кои можат да седнат околу тркалезна маса, но така што секој играч да го победил играчот кој се наоѓа од неговата десна страна е еднаков на четири. Докажи, дека бројот на начините сите играчи да се подредат во редица, но така што секој играч да го победил играчот кој се наоѓа од неговата десна страна е делив со пет.

Решение. Група тенисери кои можат да седнат околу тркалезна маса така што секој да го победил играчот кој се наоѓа од неговата десна страна ќе ја нарекуваме *цикл*, а редица од играчи во која секој го победил играчот кој стои од неговата десна страна ќе ја нарекуваме *патека*.

Нека A, B, C и D формираат (во овој редослед) еден цикл од четири тенисери (нив ќе ги нарекуваме *централни*).

Нека X е произволен играч кој го победил A . Ако D го победил X , тогаш $X-A-B-C-D$ ќе биде цикл кој содржи повеќе од четири тенисери, што е противречност. Според тоа, X го победил D . На потполно ист начин, последователно заклучуваме дека X ги победил и C и B . Секој таков играч ќе го нарекуваме *силен*.

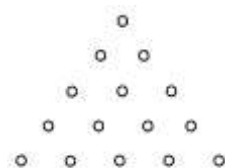
Аналогно се заклучува дека секој играч кој е победен од A е победен и од B, C и D . Секој таков играч ќе го нарекуваме *слаб*.

Нека претпоставиме дека некој слаб тенисер X победил некој силен тенисер Y . Тогаш $X-Y-A-B-C-D$ ќе биде цикл кој содржи повеќе од четири тенисери, што е противречност.

Според тоа, секој силен тенисер ги победил сите централни и сите слаби тенисери. Оттука следува дека во секоја патека прво треба да стојат силните тенисери, потоа централните и на крајот слабите.

Нека P, Q и R е бројот на начините на кои силните, централните и слабите играчи, соодветно, можат да бидат распоредени во патека (можно е воопшто да нема силни или слаби играчи и тогаш ставаме $P=1$ или $Q=1$, соодветно). Тогаш бројот на начините на кои сите играчи можат да бидат распоредени во патека е еднаков на PQR . Но, $Q=5$, независно од резултатите на натпреварите $A-C$ и $B-D$, со што задачата е решена.

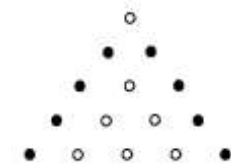
11. Дадени се 15 сијалици кои се подредени во форма на рамностран триаголник, како што е прикажано на цртежот десно. На почетокот сијалиците се изгаснати.



а) Докажи, дека може да се запалат 8 сијалици така што меѓу нив нема три кои се темиња на рамностран триаголник.

б) Докажи, дека како и да се запалат 9 сијалици, тогаш меѓу нив има три кои се темиња на рамностран триаголник.

Решение. а) Да запалиме 8 сијалици како што е прикажано на цртежот десно, каде исполнетите кручиња се запалените сијалици. Јасно, никои три од нив не се темиња на рамностран триаголник.

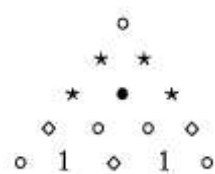


б) Ќе докажеме, дека ако имаме ситуација при која не постојат три запалени сијалици кои се темиња на рамностран триаголник, тогаш има најмалку 7 сијалици кои не се запалени, од што ќе следува дека

кога се запалени 9 произволни сијалици, барем 3 од нив се темиња на рамностран триаголник. За таа цел ќе го разгледуваме бројот на запалени сијалици во централниот триаголник од 3 сијалици.

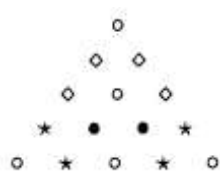
Прв случај. Нека централниот триаголник не содржи запалена сијалица, т.е. сите запалени сијалици се на периферијата. Тогаш ќе имаме барем уште 4 сијалици кои не се запалени, по една во секој од рамностраните триаголници при темињата на големиот триаголник и една во триаголникот формиран од средините на страните. Значи, ќе имаме најмалку 7 сијалици кои не се запалени.

Втор случај. Нека имаме една запалена сијалица во централниот триаголник. Без ограничување на општоста можеме да сметаме дека тоа е сијалицата означена со пополнетото крукче на цртежот десно.



Тогаш, освен двете незапалени во централниот триаголник, ќе имаме најмалку две незапалени сијалици меѓу сијалиците означени со $\star$, најмалку уште една меѓу означените со $\diamond$, најмалку уште една меѓу означените со 1 и најмалку уште една меѓу темињата на големиот триаголник, т.е. вкупно најмалку 7 незапалени сијалици.

Трет случај. Нека имаме точно две запалени сијалици во централниот триаголник. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека тоа се сијалиците кои на цртежот десно се означени со пополнетите крукчиња.



Тогаш освен едната незапалена во централниот триаголник, ќе имаме најмалку две незапалени меѓу сијалиците означени со $\star$, најмалку уште две меѓу означените со $\diamond$, најмалку уште една една меѓу темињата на големиот триаголник и сијалицата под двете запалени со сигурност не е запален, што значи вкупно 7 незапалени сијалици.

12. На почетокот на масата се поставени 111 парчиња пластелин со еднакви тежини. Во еден чекор можеме да избереме неколку групи (може и една) со еднаков број парчиња во секоја група и од секоја група со слепување на парчињата кои се во неа да формираме ново парче пластелин. Определи го најмалиот број чекори за да се добијат 11 парчиња пластелин, кои по парови имаат различна тежина.

Решение. Нека тежината на секое од почетните парчиња е 1. Ако во првиот чекор во секоја група има по k парчиња, тогаш после реализирањето на првиот чекор во секоја група ќе има парчиња со тежина

или 1 или k . Според тоа, после првиот чекор не е можно да се добијат 11 парчиња со различна тежина.

Ќе докажеме дека два чекори се доволни. Во првиот чекор да избереме 37 групи со по 2 парчиња. Бидејќи $111 = 3 \cdot 37$ ќе добиеме 37 парчиња со тежина 1 и 37 парчиња со тежина 2. Во вториот чекор да избереме 9 групи со по 8 парчиња во секоја на следниот начин: во i -тата група ($1 \leq i \leq 9$) избираме $i-1$ парчиња со тежина 2 и $9-i$ парчиња со тежина 1. Притоа нема да искористиме две парчиња кои имаат тежина 1 и 2. Според тоа, i -тата група тежи $9-i+2(i-1) = 7+i$, па затоа добиваме 11 парчиња со тежини 1, 2, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 и 16, што и требаше да се докаже.

13. Емилија и Весна го пребарувале таванот на дедо Марко и нашле вага и кутија со тегови. Кога теговите ги распределе по маси, констатирале дека има 5 различни групи тегови. Играјќи се со вагата и теговите, констатирале дека ако на едната страна на вагата стават било кои два тега, тогаш е можно во кутијата да се најдат други два тега такви што со нивно ставање на другата страна на вагата, вагата е во рамнотежа.

Опреди го најмалиот можен број тегови во кутијата.

Решение. Според условот на задачата, за секој пар тегови (x, y) постои пар тегови (u, v) таков што $x + y = u + v$. Во овој случај ќе велиме дека парот (u, v) го *урамнотежува* парот (x, y) .

Нека a, b, c, d, e се различни тежини на теговите од ова множество. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека

$$a < b < c < d < e.$$

Да го разгледаме парот (a, b) . Бидејќи

$$2a < a + b < 2b \text{ и } a + b < x + y$$

за секои x и y различни од a и b , заклучуваме дека овој пар го урамнотежува само ист таков пар, т.е. парот (a, b) . Затоа во множеството од сите тегови S мора да има два тега со маса a и два тега со маса b . Бидејќи во S постојат најмалку два тега со маса a , треба да го разгледаме парот (a, a) . Вкупната маса на овој пар е $a + a = 2a$. Секој пар $(x, y) \neq (a, a)$ има поголем збир на маси од парот (a, a) . Според претпоставката постои пар тегови кој го урамнотежува, а тоа единствено е можно ако урамнотежувачкиот пар е (a, a) . Тоа значи дека имаме најмалку 4 тегови со маса a .

Сега да го разгледаме парот (d, e) . Единствен пар кој го урамнотежува е ист таков пар, што значи дека имаме 2 тега со маса d и 2 тега со маса e . Парот (e, e) има најголема вкупна маса, па единствен пар кој го урамнотежува е ист таков пар. Значи, имаме 4 тегови со маса e . Според условот на задачата постои тег чија маса е поголема од b и е помала од d . Масата на тој тег ја означивме со c .

Од досега изнесеното следува дека бројот на теговите не може да биде помал од $4 + 2 + 1 + 2 + 4 = 13$. Ќе докажеме дека тоа е најмалиот број елементи на множеството S . Последното може да го докажеме, ако конструираме множество S со 13 елементи кои го задоволуваат условот на задачата. Такво множество се состои од 4 тегови со маса 1, 2 тега со маса 2, 1 тег со маса 3, 2 тега со маса 4 и 4 тегови со маса 5.

14. Нека N е природен број. Дадено е множество тегови кое ги задоволува следниве услови:

- 1) Секој тег од множеството има некоја од тежините $1, 2, \dots, N$;
- 2) За секој $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ постои тег со тежина i .
- 3) Збирот на тежините на сите тегови од даденото множество е парен број.

Докажи дека даденото множество тегови може да се разбие на две подмножества кои имаат еднакви тежини.

Решение. Нека $2S$ е збирот на тежините на сите тегови. Нека T е најголем збир на тежини кој можеме да го добиеме во едната група, но таков да $T \leq S$. Ако $T = S$, тогаш тврдењето е докажано. Нека $T < S$. Нека A е група која има збир на тежини T , а нека B е групата која има збир на тежини $2S - T$. Ако некој тег со тежина 1 се наоѓа во групата B , тогаш можеме да го префрлиме во групата A , па тогаш групата A ќе има тежина поголема од T која и понатаму е помала или еднаква на S , што противречи на претпоставката дека T е најголемиот збир на тежини кој е помал или еднаков на S . Значи, сите тегови со тежина 1 се наоѓаат во групата A . Понатаму, ако некој тег со тежина 2 се наоѓа во групата B , тогаш овој тег го префрламе во A и еден од теговите со тежина 1 од групата A го префрламе во групата B , и повторно групата A ќе има тежина поголема од T која е помала или еднаква на S , што е противречност. Значи, сите тегови со тежина 2 се наоѓаат во групата A . Продолжувајќи ја постапката, после $N - 1$ чекори, добиваме дека сите тегови со тежина $N - 1$ се наоѓаат во групата A , па затоа во групата B се наоѓаат само тегови со тежина

N . Ако сега тег со тежина $N-1$ од групата A замениме со тег со тежина N од групата B , повторно групата A ќе има тежина поголема од T која е помала или еднаква на S , што е противречност со претпоставката дека T е најголемиот збир на тежини кој е помал или еднаков на S . Конечно, претпоставката дека $T < S$ доведува до противречност, па затоа $T = S$.

15. Дадени се 2005 тегови со маси $1g, 2g, 3g, \dots, 2005g$. Дали може овие тегови да се поделат во пет групи така, што во секоја група да има ист број на тегови и нивната вкупна тежина да биде иста.

Решение. Одговорот на задачата е позитивен. Навистина десет тегови со маси $n+1, n+2, n+3, \dots, n+9, n+10$ грама можат да се поделат во пет групи со по два тега, така што во секоја група теговите да имаат маса од $2n+11$ грама. Начинот на поделба на овие тегови е даден во табелата:

Група	прва	втора	трета	четврта	петта
Маса на теговите во групата	$n+1$ $n+10$	$n+2$ $n+9$	$n+3$ $n+8$	$n+4$ $n+7$	$n+5$ $n+6$

Според дадената шема да ги распределите теговите со маси од $16g$ до $25g$, од $26g$ до $35g$, ..., од $2001g$ до $2005g$. Останатите 15 тегови во овие пет групи ќе ги распределите на следниот начин:

Група	прва	втора	трета	четврта	петта
Маса на теговите во групата	1, 10, 13	2, 7, 15	3, 9, 12	4, 6, 14	5, 8, 11

16. Определи го најмалиот позитивен реален број α , за кој е точно следново тврдење: ако вкупната тежина на конечен број тикви е еден тон и секоја од тиквите тежи најмногу α тони, тогаш тиквите може да се распределат во 50 вреќи (некои од вреќите може да бидат и празни) така што во секоја вреќа има најмногу α тони тикви.

Решение. Ќе докажеме дека бараниот број е $\alpha = \frac{2}{51}$. Нека претпоставиме дека $\alpha < \frac{2}{51}$ и нека избереме ненегативен цел број k таков што $\frac{1}{51 \cdot 2^k} \leq \alpha < \frac{1}{51 \cdot 2^{k-1}}$. Да го разгледаме множеството од $51 \cdot 2^k$ тикви, секоја од кои тежи $\frac{1}{51 \cdot 2^k}$ тони. Тогаш како и да ги распределите тик-

вите во 50 вреќи, барем една од вреќите содржи најмалку две тикви и затоа таа вреќа ќе тежи $\frac{1}{51 \cdot 2^{k-1}} \geq \alpha$ тони.

Ќе докажеме дека условот на задачата е исполнет за $\alpha = \frac{2}{51}$. Да ја ставиме секоја тиква во посебна вреќа и потоа додека е можно да ја применуваме следнава операција: ако двете најлесни вреќи заедно содржат најмногу $\frac{2}{51}$ тони тикви, тогаш содржината од едната вреќа ја претураме во другата вреќа и се ослободуваме од празната вреќа. Нека во првиот момент, во кој оваа операција не може повеќе да се применува имаме n вреќи, кои содржат $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ тони тикви, соодветно. Тогаш $x_1 + x_2 > \frac{2}{51}$, па затоа $x_2 > \frac{1}{51}$. Оттука добиваме

$$1 = x_1 + x_2 + \dots + x_n > \frac{2}{51} + \frac{n-2}{51},$$

па затоа $n < 51$. Така, тиквите се распределени во најмногу 50 вреќи и секоја вреќа содржи најмногу $\frac{2}{51}$ тони тикви. Останува само да го додадеме потребниот број празни вреќи и да добиеме вкупно 50 вреќи.

17. Меѓу 9^k на изглед исти монети една е полесна од останатите. Дадени се три ваги без тегови, едната од кои е неисправна (при секое мерење таа може случајно да биде како точна, така и неточна). Како може со најмногу $3k+1$ мерења да се определи неисправната монета?

Решение. Неисправната монета да ја означиме со НМ. Ќе ја докажеме следнава лема.

Лема. Меѓу 9^k монети со $3k$ мерења можеме или да ја определиме НМ, или да најдеме три монети, една од кои е НМ. Во вториот случај можеме да најдеме и една исправна вага.

Доказ. Ќе користиме индукција по k .

Нека $k=1$. Да ги распоредиме монетите во форма на 3×3 квадрат и да ги нумерираме редовите и колоните од 1 до 3, а монетите со нивните координати.

Ги мериме монетите од првиот и вториот ред на првата вага, а потоа монетите од втората и третата колона на втората вага.

Да претпоставиме дека и двете ваги се во рамнотежа. Бидејќи барем една од вагите е исправна, НМ е во третиот ред или третата колона. Со третото мерење со третата вага ги споредуваме тежините

$(3,1) + (3,2)$ и $(1,3) + (2,3)$. Ако вагата е во рамнотежа, тогаш НМ е $(3,3)$, но не знаеме која вага е неисправна (зошто?). Нека една од тежините е помала, на пример $(3,1) + (3,2)$. Тоа значи, дека резултатот од мерењето на третата вага противречи на резултатот од мерењето на втората вага. Според тоа, првата вага е исправна и НМ е меѓу монетите од третиот ред.

Другите два случаи: една од првите две ваги не е во рамнотежа или и двете не се во рамнотежа, се разгледуваат аналогно.

Нека тврдењето важи за $k-1$ и нека имаме 9^k монети. Монетите да ги поделиме во групи од по 9 монети и секоја од групите да ја наречеме *нова монета*. Согласно индуктивната претпоставка со $3(k-1) = 3k - 3$ мерења можеме или да ја најдеме неисправната *нова монета* или да ја најдеме неисправната *нова монета* или да најдеме исправна вага и три *нови монети*, едната од кои е НМ.

Во првиот случај имаме 9 монети и трите ваги, па сега тврдењето следува од базата на индукцијата за $k=1$.

Во вториот случај имаме исправна вага и 27 монети од кои едната е НМ. Тогаш со три мерења, при што прво ги делиме монетите во групи од по 9 монети и вршиме споредување со кое ја наоѓаме групата во која е НМ, а потоа таа група ја делиме во три групи од по 3 монети и вршиме споредување со кое повторно ја наоѓаме групата во која е НМ, за на крај да споредиме две монети со што ја наоѓаме НМ.

Конечно од принципот на математичка индукција следува точноста на лемата. ■

Сега лесно можеме да ја решиме задачата. Да реализираме $3k$ мерења како во лемата. Ако после овие мерења не сме ја откриле НМ, тогаш сме нашле исправна вага и 3 монети меѓу кои е НМ. Јасно, со последното мерење ја наоѓаме НМ.

18. Народната банка сака да пушти во употреба 12 различни монети, секоја со номинална вредност природен број. Дали може монетите да имаат таква номинални вредности што секоја сума од 1 до 6543 денари може да се плати со најмногу 8 монети. (При плаќањето на сумата може да се користат неколку монети со една иста номинална вредност.)

Решение. Да забележиме дека $9^4 = 6561 > 6543$. Ќе докажеме дека може да се изберат 12 различни видови монети така што со помош на најмногу осум монети може да се плати секоја сума од 6560 денари.

Со монети од 1, 3 и 4 денари може да се плати секоја сума од 1 до 8 денари, при што ќе се користат најмногу две монети

$$1=1, 2=1+1, 3=3, 4=4, 5=1+4, 6=3+3, 7=4+3 \text{ и } 8=4+4.$$

Да разгледаме монети од 9^k , $3 \cdot 9^k$ и $4 \cdot 9^k$ денари, за $k = 0, 1, 2, 3$. Секој број n од 1 до 6560 на единствен начин може да се претстави во видот

$$n = a_3 \cdot 9^3 + a_2 \cdot 9^2 + a_1 \cdot 9 + a_0, \text{ каде } a_i \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}, \text{ за } i = 0, 1, 2, 3,$$

(тоа е разложувањето на бројот n во систем со основа 9). Но, збирот $a_k \cdot 9^k$ може да се добие со најмногу две монети, па затоа бројот n може да се добие со најмногу $4 \cdot 2 = 8$ монети.

19. Во еден град има вкупно 151 спортски клубови, при што во секој клубуваат точно по 12 жители на градот. Познато е дека секои два клуба имаат точно по еден заеднички член, а градоначалникот членува во клубовите “Спортист” и “Фудбалер”. Во уште колку клубови членува градоначалникот?

Решение. Нека $a_1, a_2, \dots, a_{12}$ се членовите на клубот “Спортист” и нека $a_i, i = 1, 2, \dots, 12$ членува во уште n_i клубови. Од условот на задачата следува дека $n_1 + n_2 + \dots + n_{12} = 150$. Бидејќи $12^2 = 144 < 150$, заклучуваме дека барем еден од членовите на “Спортист” членува во барем уште 13 клуба. Нека тоа е a_k и нека $K_1, K_2, \dots, K_{13}$ се 13 од клубовите, различни од “Спортист”, во кои членува a_k . Ќе докажеме, дека a_k членува во сите клубови од градот. Нека го претпоставиме спротивното и нека X е клуб, во кој a_k не членува. Сега да ги разгледаме заедничките членови на $K_1, K_2, \dots, K_{13}$ и X . Бидејќи во еден клуб има точно 12 членови, заклучуваме дека барем еден од членовите на X членува во барем уште 2 од клубовите $K_1, K_2, \dots, K_{13}$. Притоа, тој жител, кој членува во X и во барем два од клубовите $K_1, K_2, \dots, K_{13}$ е различен од a_k . Но, во тие 2 клуба членува и a_k , т.е. имаат два заеднички члена, што противречи на условот на задачата дека секои два клуба имаат точно еден заеднички член. Според тоа, a_k членува во сите клубови од градот. Тоа е можно само ако a_k е градоначалникот, бидејќи во спротивно “Спортист” и “Фудбалер” ќе имаат повеќе од еден заеднички член. Значи, градоначалникот членува во уште $151 - 2 = 149$ клубови.

20. Автобуските линии во еден град се такви што секои две линии имаат точно една заедничка постојка и на секоја линија има барем 4 постојки. Докажи, дека сите постојки може да се распределат меѓу две компании така што на секоја линија има постојка и од двете компании.

Решение. Да разгледаме две произволни линии l_1 и l_2 и нека A е нивната заедничка постојка. Ако A е постојка на сите линии, тогаш можеме да ја дадеме на едната компанија, а сите останати постојки да ги дадеме на другата компанија и задачата е решена.

Да претпоставиме дека постои линија l_3 која не минува низ постојката A . Нека B и C се нејзините заеднички постојки со l_1 и l_2 , соодветно. Јасно, B и C се различни од A и $B \neq C$, бидејќи во спротивно l_1 и l_2 ќе имаат две заеднички постојки.

Да ги распределиме постојките на следниов начин: постојките A, B, C ги даваме на првата компанија, сите други постојки на линиите l_1, l_2 и l_3 ги даваме на втората компанија и сите останати постојки (кои не се на линиите l_1, l_2 и l_3) одново ги даваме на првата компанија. Ќе докажеме дека ваквата распределба го има саканото својство. Јасно, секоја од линиите l_1, l_2 и l_3 минува низ постојка и на двете компании. Од останатите да разгледаме произволна линија l . Со секоја од линиите l_1, l_2 и l_3 таа има само една заедничка постојка. Значи, l има најмногу три постојки од втората фирма, па затоа таа има постојка и од првата фирма. Освен тоа, l не може да минува низ две од постојките A, B и C , бидејќи ќе има две заеднички постојки со некоја од линиите l_1, l_2 и l_3 . Без ограничување на општоста можеме да земеме дека l не минува низ B и C . Тогаш заедничката постојка на l и l_3 е некоја постојка X , различна од B и C . Таа постојка припаѓа на втората компанија. Со тоа доказот е завршен.

21. Множеството темиња на правилен 30-аголник е разбиено на 15 парови, кои определуваат 15 отсечки. Докажи, дека барем две од 15-те отсечки имаат еднакви должини.

Решение. Нека $A_1, A_2, \dots, A_{30}$ е дадениот правилен 30-аголник. На отсечката $A_i A_j$ да и го придружime бројот $|i - j|$ ако $|i - j| \leq 15$ и $30 - |i - j|$, ако $|i - j| \geq 16$. Тогаш доволно е да докажеме, дека барем два од броевите придружени на 15-те отсечки се еднакви.

Да го допуштиме спротивното, т.е. дека тоа се броевите 1, 2, 3 ..., 15. Соодветно со $A_1, A_2, \dots, A_{15}$ да ги означиме краевите со помал индекс на отсечките со должини 1, 2, 3, ..., 15. Тогаш вторите краеве се соодветно A_{i+1} или A_{i+30-1} , A_{i+2} или A_{i+30-2} итн. Оттука следува дека збирот на сите индекси е еднаков на

$$M = 2(i_1 + i_2 + \dots + i_{15}) + 30m + (a_1 + a_2 + \dots + a_{15}),$$

каде m е цел број, а $|a_i| = i$, за $i = 1, 2, \dots, 15$. Според тоа, M има иста парност како и бројот $a_1 + a_2 + \dots + a_{15}$, а тоа е парноста на бројот

$$1 + 2 + \dots + 15 = 120.$$

Значи, M е парен број. Од друга страна

$$M = 1 + 2 + \dots + 30 = \frac{30 \cdot 31}{2} = 465,$$

што е противречност.

Конечно, од добиената противречност следува, дека барем две од 15-те отсечки имаат еднакви должини.

22. Растојание меѓу две единечни полиња на бесконечна шаховска табла го нарекуваме минималниот број чекори потребни кралот да стигне од едното до другото поле. На таблата се означени три полиња, такви што растојанието меѓу секои две од нив е еднакво на 100. Определи го бројот на полињата кои од обележените полиња се наоѓаат на растојание еднакво на 50.

Решение. Да разгледаме две произволни полиња A и B . Нека разликата меѓу апцисите на нивните центри е $x \geq 0$, а разликата меѓу ординатите е $y \geq 0$. Лесно се покажува, дека растојанието $\rho(A, B)$ меѓу тие две полиња е еднакво на $\max\{x, y\}$.

Нека обележените полиња се A, B, C . Тогаш за секои две од овие три полиња постои координата во која тие се разликуваат за 100. Јасно, за две од полињата тоа ќе биде една иста координата. Нека, на пример, паровите (A, B) и (A, C) се разликуваат во апцисата. Тогаш апцисите на B и C или се оддалечени за 200 или се совпаѓаат. Првиот случај не е можен, бидејќи $\rho(B, C) = 100$. Според тоа, нивните апциси се совпаѓаат, а ординатите се разликуваат за 100. Тогаш (со точност до симетрија) можеме да сметаме дека полињата имаат координати $B(0, 0), C(0, 100)$ и $A(100, x)$. Притоа, $0 \leq x \leq 100$, бидејќи во спротивно $\rho(A, B)$ или $\rho(A, C)$ е поголем од 100.

Да разгледаме точка X за која $\rho(X, A) = \rho(X, B) = \rho(X, C) = 50$. Нејзината апциса е 50, бидејќи во спротивно или $\rho(X, B) > 50$ или $\rho(X, A) > 50$. Аналогно, нејзината ордината е 50, бидејќи во спротивно или $\rho(X, B) > 50$ или $\rho(X, C) > 50$. Според тоа, координатите на точката X се $(50, 50)$ и притоа важи

$$\rho(X, A) = \rho(X, B) = \rho(X, C) = 50.$$

Конечно, постои само една точка со саканото својство.

23. Овошна 50×50 градина е поделена на 1×1 области. Во некои 1×1 области се засадени јаболкови, портокалови и праскини дрва. Познато е дека секое портокалово дрво е соседно со барем едно јаболково дрво, секое праскино дрво е соседно со барем едно јаболково дрво и едно портокалово дрво и секое празно место е соседно со барем едно јаболково дрво, едно портокалово и едно праскино дрво. Докажи, дека бројот на празните области е помал или еднаков на 1000.

Решение. Нека a_1, a_2 и a_3 е бројот на јаболковите, портокаловите и праскините дрва соодветно, а a_4 е бројот на празните места.

Бројот на соседствата на јаболковите дрва со останатите дрва не надминува $4a_1$, а од условот следува дека тој број е помал или еднаков на $a_2 + a_3 + a_4$. Затоа, $4a_1 \geq a_2 + a_3 + a_4$.

Бројот на соседствата на портокаловите со праскините дрва и празните места не надминува $3a_2$ (портокаловото дрво има за сосед јаболково), а од друга страна тој е помал или еднаков на $a_3 + a_4$ (бидејќи секое праскино дрво и секоја празна област имаат за соседи портокалови дрва). Според тоа, $3a_2 \geq a_3 + a_4$.

Аналогно, $2a_2 \geq a_4$. Според тоа,

$$3a_2 \geq a_3 + a_4 \geq \frac{a_4}{2} + a_4,$$

па затоа $2a_2 \geq a_4$. Оттука добиваме

$$4a_1 \geq a_2 + a_3 + a_4 \geq \frac{a_4}{2} + \frac{a_4}{2} + a_4$$

и затоа $2a_1 \geq a_4$. Сега

$$2500 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \geq \frac{a_4}{2} + \frac{a_4}{2} + \frac{a_4}{2} + a_4 = \frac{5}{2}a_4,$$

од каде наоѓаме $a_4 \leq 1000$.

IV3 БРОЕЊА

1. За даден природен број $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ да се определи бројот на негови делители $d(n)$, (вклучувајќи ги 1 и n).

Решение. Секој делител на $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ е од облик $p_1^{x_1} p_2^{x_2} \dots p_k^{x_k}$, каде $0 \leq x_1 \leq \alpha_1$, $0 \leq x_2 \leq \alpha_2$, ..., $0 \leq x_k \leq \alpha_k$. Според тоа, за секој делител постои единствена подредена k -торка $(x_1, x_2, \dots, x_k)$, која е елемент на множеството $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k$, каде $A_i = \{0, 1, \dots, \alpha_i\}$, $i = 1, 2, \dots, k$ и секоја ваква k -торка од определува точно еден делител на n . Конечно, од принципот на производ следува дека бројот на делители на бројот $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ е еднаков на

$$d(n) = |A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots \cdot |A_k| = (1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \dots (1 + \alpha_k).$$

2. Од 100 ученици: 24 ученици не учат ниту еден од јазиците англиски, француски и германски, 48 учат англиски, 8 учат и англиски и француски, 26 учат германски, 8 учат и германски и англиски, 13 учат и германски и француски и 28 учат француски. Колку ученици ги учат сите три јазици?

Решение. Нека со A , B и C ги означиме множествата од ученици кои учат англиски, германски и француски, соодветно. Тогаш од условот на задачата следува

$$|A \cup B \cup C| = 100 - 24 = 76, |A| = 48, |B| = 26, |C| = 28,$$

$$|A \cap B| = 8, |A \cap C| = 8 \text{ и } |B \cap C| = 13.$$

Од принципот на вклучување имаме

$$\begin{aligned} |A \cap B \cap C| &= |A \cup B \cup C| - |A| - |B| - |C| + |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| \\ &= 76 - 48 - 26 - 28 + 8 + 8 + 13 = 3. \end{aligned}$$

Според тоа, 3 ученици ги учат сите три јазици.

3. Определи го бројот четирицифрени броеви кои може да се формираат од цифрите 0, 1, 2, 3, 4 и 5, ако:

а) цифрите не се повторуваат

б) дозволено е повторување на цифри.

Решение. а) 1234 и 1324 се две различни можности, т.е. распоредот е важен, што значи станува збор за варијации без повторување. Имаме вкупно $V_6^4 = \frac{6!}{(6-4)!} = 360$ можности, во кои се опфатени и случаите

кога цифрата 0 е на прво место и тогаш немаме четирицифрен број. Значи, од овој број треба да го одземеме бројот кога цифрата 0 е на прво место, кој е еднаков на $V_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = 60$. Конечно, бараниот број е $360 - 60 = 300$.

б) Со аналогни размислувања заклучуваме дека во случајов станува збор за варијации со повторување од 6 елементи од класа 4. Повторно од сите можности треба да ги отфрлиме случаите кога цифрата 0 е на прво место, па затоа бараниот број е еднаков на

$$\bar{V}_6^4 - \bar{V}_6^3 = 6^4 - 6^3 = 5 \cdot 6^3 = 1080.$$

4. Определи го бројот на зборовите запишани со n букви во кои учествуваат буквите a, b и c , такви што во секој збор секоја од буквите a, b и c се јавува најмалку еднаш. (Под збор ја подразбираме секоја низа со должина од n букви.)

Решение. Со M да го означиме множеството од сите зборови со должина n над азбуката $\{a, b, c\}$. Тогаш $|M| = 3^n$. Ако со A, B и C ги означиме множеството зборови со должина n во кои не учествува буквата a, b и c , соодветно, тогаш

$$|A| = |B| = |C| = 2^n, |A \cap B| = |A \cap C| = |B \cap C| = 1 \text{ и } |A \cap B \cap C| = 0,$$

па од принципот на вклучување, за множеството $A \cup B \cup C$ добиваме

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \\ = 3 \cdot 2^n - 3.$$

Конечно, од принципот на исклучување за бараниот број зборови добиваме

$$|M \setminus (A \cup B \cup C)| = |M| - |A \cup B \cup C| = 3^n - 3 \cdot 2^n + 3.$$

5. На одбојкарски турнир учествувале 10 екипи. Секоја екипа одиграла по еден натпревар со секоја друга екипа. На крајот на турнирот првата екипа имала x_1 победи и y_1 порази, втората екипа имала x_2 победи и y_2 порази итн. Докажи, дека

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{10}^2 = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_{10}^2.$$

Решение. Вкупниот број на одиграни натпревари е еднаков на

$$\frac{10 \cdot 9}{2} = 45. \text{ Ако земеме секој натпревар да вреди 1 поен, добиваме дека}$$

секоја екипан се бори за вкупно 9 поени, при што важи $x_i + y_i = 9$, за

$i = 1, 2, \dots, 10$. Понатаму, бидејќи секој натпревар завршува со победа на една од екипите добиваме дека вкупниот број поени е еднаков на збирот на сите победи на екипите, т.е. дека $x_1 + x_2 + \dots + x_{10} = 45$.

Според тоа,

$$\begin{aligned} y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_{10}^2 &= (9 - x_1)^2 + (9 - x_2)^2 + \dots + (9 - x_{10})^2 \\ &= 10 \cdot 81 - 18(x_1 + x_2 + \dots + x_{10}) + x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{10}^2 \\ &= 10 \cdot 81 - 18 \cdot 45 + x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{10}^2 \\ &= x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{10}^2. \end{aligned}$$

6. Определи го бројот на седумцифрените броеви запишани со цифрите 0, 1, 2, 3 и 4, во кои единицата се јавува трипати, а секоја од останатите цифри се јавува по еднаш.

Решение. Ако прво од седумте места избереме три места за единиците, а потоа останатите четири цифри ги разместиме на преостанатите четири места, ос принципот на производ следува дека на седумте места вкупниот број на распоредувања на 3 единици и по 1 нула, двојка, тројка и четворка е еднаков на

$$C_3^7 P_4 = \frac{7!}{3!(7-3)!} \cdot 4! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840.$$

За да добиеме седумцифрен број нулата не смее да биде на прво место, што значи дека треба да одземеме

$$C_3^6 P_3 = \frac{6!}{3!(6-3)!} \cdot 3! = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$$

распоредувања. Значи, бараниот број е еднаков на $840 - 120 = 720$.

7. Определи го бројот на пресликувањата $f: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{2016, 2017\}$ такви што $f(1) + f(2) + \dots + f(n)$ е парен број.

Решение. Првите $n-1$ броеви ги пресликуваме произволно. Ако бројот $f(1) + f(2) + \dots + f(n-1)$ е непарен, тогаш n мора да се пресликува во 2017, а ако бројот $f(1) + f(2) + \dots + f(n-1)$ е парен, тогаш n мора да се пресликува во 2016. Според тоа, бараниот број е еднаков на бројот на пресликувањата $g: \{1, 2, \dots, n-1\} \rightarrow \{2016, 2017\}$, а овој број е еднаков на 2^{n-1} (зошто?).

8. Претставувањето на природниот број n како збир на природни броеви, при што редоследот на собирците е важен, го нарекуваме *подредено разбивање* на бројот n . На пример, имаме 8 подредени разбивања на бројот 4 и тоа:

$$4=1+1+1+1=1+1+2=1+2+1=2+1+1=1+3=3+1=2+2.$$

Докажи, дека бројот на подредените разбивања на бројот n е еднаков на 2^{n-1} .

Решение. Да разгледаме n единици запишани во редица. Меѓу секои две соседни единици можеме да ставиме или да не ставиме преграда (вертикална црта). На секое поставување на прегради меѓу единиците соодветствува единствено подредено разбивање на бројот n и обратно, на секое подредено разбивање соодветствува единствено поставување на прегради меѓу единиците (ги собираме единиците меѓу две прегради, со што се добива собирокот во претставувањето). Според тоа, бројот на подредените разбивања е еднаков на бројот на поставувањата на преградите меѓу единиците. Бидејќи преграда може да се постават или да не се постават на $n-1$ место, добиваме дека вкупниот број на поставувања на прегради е еднаков на 2^{n-1} , што значи дека бројот на подредените разбивања на бројот n е еднаков на 2^{n-1} .

9. На еден шаховски турнир, на кој секои два учесника одиграле точно по една партија, секој шахист освоил цел број поени. На турнирот сите шахисти, освен победникот, освоиле ист број поени. Докажи дека бројот на учесниците на турнирот е парен.

Забелешка. Во шахот за победа се добива 1 поен, за нерешено половина поен, за пораз 0 поени.

Решение. Нека на турнирот учествувале n шахисти и со a да го означиме бројот на поените кои ги освоил победникот на турнирот, а со b бројот на поените кои ги освоил секој од останатите учесници на турнирот. Бидејќи секои два учесника одиграле точно една партија, добиваме дека на турнирот се одиграни вкупно $\frac{n(n-1)}{2}$ партии, т.е. се освоени $\frac{n(n-1)}{2}$ поени. Од друга страна бројот на освоените поени е еднаков на $a + (n-1)b$, па затоа

$$\frac{n(n-1)}{2} = a + (n-1)b$$

т.е.

$$n(n-1) = 2a + 2b(n-1). \quad (1)$$

Бидејќи $n, a, b \in \mathbb{N}$ од (1) следува дека $(n-1) \mid 2a$. Меѓутоа победникот може да освои најмногу $n-1$ поен, па затоа $a \leq n-1$ т.е. $2a \leq 2(n-1)$ и

како $(n-1) \mid 2a$ добиваме или $2a = n-1$ или $2a = 2(n-1)$. Ако $2a = n-1$, тогаш со замена (1) после средувањето добиваме $n-1 = 2b$, па затоа $2a = 2b$ т.е. $a = b$ што противречи на условот на задачата т.е. на $a > b$.

Значи $2a = 2(n-1)$ и ако замениме во (1) после средувањето добиваме $n = 2 + 2b$ т.е. $n = 2(1+b)$ што и требаше да се докаже.

10. На еден универзитет има 10001 студент. Некои студенти формирале клубови (еден студент може да биде член во повеќе клубови). Некои клубови се групирале во здруженија (еден клуб може да биде во повеќе здруженија). Вкупно има k здруженија. Притоа се исполнети следниве услови:

- i) Секој пар студенти припаѓа на точно еден клуб.
- ii) За секој студент и секое здружение важи дека тој студент членува во точно еден клуб од тоа здружение.
- iii) Секој клуб има непарен број студенти. Клуб со $2m+1$ студент се наоѓа во точно m здруженија.

Опреди ги сите можни вредности на k .

Решение. За подредената тројка (a, K, Z) ќе велиме дека прифатлива, ако a е студент, K е клуб и Z е здружение, при што $a \in K$, $K \in Z$.

Од една страна, за секој студент a и секое здружение Z според условот ii) постои точно еден клуб K таков што тројката (a, K, Z) е прифатлива. Затоа имаме $10001k$ прифатливи тројки.

Од друга страна, за секој клуб K нека со $|K|$ го означиме бројот на членовите на тој клуб. Според условот iii) K се наоѓа во точно $\frac{|K|-1}{2}$

здруженија. Значи, постојат точно $\frac{|K|(|K|-1)}{2}$ прифатливи тројки со K како втора координата. Нека G е множеството од сите клубови. Тоа значи дека имаме $\sum_{K \in G} \frac{|K|(|K|-1)}{2}$ прифатливи тројки. Според условот i)

овој број е еднаков на бројот парови од студенти, т.е. е еднаков на $10001 \cdot 5000$. Затоа имаме

$$10001k = \sum_{K \in G} \frac{|K|(|K|-1)}{2} = 10001 \cdot 5000,$$

што значи дека $k = 5000$.

11. За едно множество точки во рамнината ќе велиме дека е слободно ако не постои рамностран триаголник чии темиња припаѓаат на тоа множество. Докажи дека секое множество од n точки во рамнината содржи подмножество со најмалку $\lceil \sqrt{n} \rceil$ точки.

Решение. Нека X е множество од n точки во рамнината. Множеството од една или две точки е слободно, па затоа постои слободно подмножество Y од X со најголем број елементи. Нека Y има m елементи. Тогаш секоја точка од $X \setminus Y$ со некој пар точки од X определува рамностран триаголник, бидејќи во спротивно Y нема да биде максимално слободно подмножество.

За произволни точки од Y постојат точно 2 точки кои со овие точки определуваат рамнострани триаголници. Оттука следува дека $X \setminus Y$ има најмногу $2 \cdot \frac{m(m-1)}{2}$ елементи, т.е. дека

$$n - m = |X \setminus Y| \leq m^2 - m, \text{ т.е. } \sqrt{n} \leq m.$$

Според тоа, $\lceil \sqrt{n} \rceil \leq m$, што и требаше да седокаже.

12. Нека X е множество такво што $|X| = n$. Определи го бројот на подредените парови (A, B) такви што A и B се дисјунктни множества и $A \subseteq X, B \subseteq X$.

Решение. *Прв начин.* За секој елемент $x \in X$ имаме три можности. Првата е $x \notin A$ и $x \in B$, втората е $x \in A$ и $x \notin B$ и третата е $x \notin A$ и $x \notin B$. Последното важи за секој од n -те елементи на множеството, па затоа бројот на подредените парови кои го задоволуваат условот на задачата е еднаков на 3^n .

Втор начин. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $X = \{1, 2, \dots, n\}$. Со a_n да го означиме бројот на подредените парови дисјунктни подмножества од X . Да го разгледаме множеството $X \cup \{n+1\}$ и со a_{n+1} да го означиме бројот на подредените парови дисјунктни подмножества од $X \cup \{n+1\}$. Да разгледаме пар (A, B) од новото множество. Елементот $n+1$ може да биде или само во A или само во B или ниту во A и ниту во B . Ако го отфрлиме елементот $n+1$ ќе добиеме две множества кои се дисјунктни и се подмножества на почетното множество. Од друга страна било кој подреден пар дисјунктни подмножества на почетното множество ќе даде три подредени парови дисјунктни подмножества на новото множество (са-

миот тој пар и со додавање на елементот $n+1$ во едно од множествата A и B). Затоа важи $a_{n+1} = 3a_n$, за секој $n \in \mathbb{N}$. Но, множеството $\{1\}$ има со три подредени парови дисјунктни подмножества, па затоа $a_1 = 3$. Конечно,

$$a_n = 3a_{n-1} = \dots = 3^{n-1}a_1 = 3^n.$$

13. На почетокот на учебната година во едно одделение од прва година, при запознавањето на учениците, се покажало дека:
- секој ученик има точно 20 познаници,
 - секои два ученика кои се познаваат имаат по точно 13 заеднички познаници,
 - секои два ученика кои не се познават имаат по точно 12 заеднички познаници.

Определи го бројот на учениците во ова одделение.

Решение. Нека n е бројот на учениците во тоа одделение и нека x е произволен ученик од тоа одделение. Со S_x да го означиме множеството од сите подредени парови (y, z) каде y е ученик кој се познава со x , а z е ученик кој не се познава со x но се познава со y . Ќе го определиме бројот на елементите на множеството S_x . Тоа ќе го направиме така што прво ќе го најдеме бројот на начините на избор на ученикот y , а потоа бројот на начините на избор на ученикот z . Потоа прво ќе го најдеме бројот на начините на избор на ученикот z , а потоа бројот на начините на избор на ученикот y .

Ако прво го избираме y , тоа може да се направи на 20 начини, бидејќи секој ученик има точно по 20 познаници. При изборот на ученикот z мора да водиме сметка дека тој не го познава ученикот x и го познава ученикот y . Ученикот y има 20 познаници и меѓу нив е и ученикот x . Ученикот y е заеднички познаник на учениците x и z кои не се познаваат. Значи, при изборот ученикот z мора да го избереме меѓу 20 заеднички пријатели на ученикот y кој не е ученикот x и кој не е меѓу 13 заеднички познаници на x и y . Според тоа, ученикот z може да го избереме на $20 - 1 - 13 = 6$ начини. Значи, има $20 \cdot 6 = 120$ подредени парови (y, z) .

Ако прво го избираме ученикот z , тогаш го избираме меѓу оние ученици кои не го познаваат ученикот x . Бидејќи во одделението има n ученици, кога ќе го избереме ученикот x , тогаш меѓу преостанатите $n - 1$ ученик има 20 кои го познаваат x , па затоа има $n - 1 - 20 = n - 21$

ученик кој не го познава x . Според тоа, ученикот z можеме да го избереме на $n - 21$ начин. Кои својства ги има бараниот ученик? Тој е меѓу учениците кои се заеднички познаници на учениците x и z кои меѓусебно не се познаваат. Такви ученици има 12. Значи, имаме $(n - 21) \cdot 12$ подредени парови (y, z) .

Од досега изнесеното следува дека S_x има $12(n - 21) = 120$ елементи, од каде наоѓаме $n = 31$. Според тоа, во одделението има 31 ученик.

14. Канаста и игра со карти која ја играат пет играчи. Во една населба 25 лица сакаат да играат канаста, но имаат само еден комплет карти. После секоја игра петте играчи се караат и секој играч решава дека повеќе нема да игра со ниту еден од останатите четири играчи. Колку игри најмногу може да се одиграат?

Решение. Вкупниот број на парови играчи е $\frac{25 \cdot 24}{2} = 300$ и после секоја игра губиме по $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ парови играчи. Според тоа, најмногу може да се одиграат $300 : 10 = 30$ игри.

Ќе докажеме дека 30 игри се можни. Играчите ги нумерираме со парови природни броеви (m, n) , $m, n \leq 5$, т.е. ги претставуваме во 5×5 табела.

Во играта со број i , $1 \leq i \leq 5$ играат петтемина за кои $m = i$ (од редот со број i во табелата). Во играта со број $6 + 5k + i$, $0 \leq i \leq 4$, $0 \leq k \leq 4$ играат играчите (m, n) за кои $mk + n$ дава остаток i при делење со 5. Јасно, за секои конкретни k, i, m имаме единствен n со саканиот остаток. Така од секој ред од табелата има по еден играч, т.е. имаме 5 играчи и тие не играле меѓу себе во првите 5 игри.

За секои два играчи (m, n) и (m', n') , $m' \neq m$, броевите $k(m - m')$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$ даваат различни остатоци при делење со 5. Според тоа, постои единствен k за кој $k(m - m') \equiv n - n' \pmod{5}$. Тоа значи, дека $km - n$ и $km' - n'$ даваат ист остаток при делње со 5 и добиените k и i определуваат единствена игра во која учествувале играчите (m, n) и (m', n') .

Конечно, од претходноизнесеното следува дека со ваквата организација ќе се одиграат точно 30 игри.

15. Низа од четири парни цифри се нарекува допустлива, ако меѓу цифрите нема три еднакви.

- 1) Определи го бројот на допустливите низи.
- 2) За секој природен број $n > 2$ со d_n да го означиме бројот на начините на кој со парни цифри може да се пополни табела со n редови и 4 колони така што секој ред е допустлив и низата 2, 0, 0, 8 се среќава точно еднаш. Определи ги сите природни броеви n за кои d_n е делител на d_{n+1} .

Решение. 1) Бидејќи парни цифри се пет, добиваме дека има $5^4 = 625$ редови со парни цифри. Меѓу нив пет имаат четири еднакви цифри и $5 \cdot 4^2 = 80$ редови имаат точно три еднакви цифри. Според тоа, бројот S на допустливи редови е $625 - 5 - 80 = 540$.

2) Имаме n можности за ред на редицата 2, 0, 0, 8. Останатите $n-1$ редови можат да бидат пополнети на $S-1$ начини. Според тоа, $d_n = n(S-1)^{n-1} = n \cdot 539^{n-1}$. Значи, $\frac{d_{n+1}}{d_n} = 539 \cdot \frac{n+1}{n}$ е природен број.

Последното е можно ако $n \geq 2$ е делител на $539 = 7^2 \cdot 11$, па затоа $n \in \{7, 11, 49, 77, 539\}$.

16. За еден број со 2017 цифри ќе велиме дека е *лош*, ако секој број формиран од три негови последователни цифри не е делив со 3. Определи го бројот на лошите броеви во чиј декаден запис учествуваат само цифрите 1, 6 и 8.

Решение. Нека $\overline{a_1 a_2}$ е двоцифрен број запишан со цифрите 1, 6 и 8. Јасно,

- ако $\overline{a_1 a_2} = 3k$, тогаш $3 \mid \overline{a_1 a_2 6}$, $3 \nmid \overline{a_1 a_2 1}$ и $3 \nmid \overline{a_1 a_2 8}$,
- ако $\overline{a_1 a_2} = 3k + 1$, тогаш $3 \mid \overline{a_1 a_2 8}$, $3 \nmid \overline{a_1 a_2 1}$ и $3 \nmid \overline{a_1 a_2 3}$, и
- ако $\overline{a_1 a_2} = 3k + 2$, тогаш $3 \mid \overline{a_1 a_2 1}$, $3 \nmid \overline{a_1 a_2 6}$ и $3 \nmid \overline{a_1 a_2 8}$.

Според тоа, два од броевите $\overline{a_1 a_2 1}$, $\overline{a_1 a_2 6}$ и $\overline{a_1 a_2 8}$ се лоши, а еден не е лош. Значи, од еден двоцифрен број (лош или не) запишан со цифрите 1, 6 и 8 со додавање на една од цифрите 1, 6 и 8 може да се добијат точно два трицифрени лоши броја. Нека сега $\overline{a_1 a_2 \dots a_n}$, $n > 1$ е лош n -цифрен број запишан со цифрите 1, 6 и 8. На потполно иста начин, разгледувајќи ги двоцифрените завршетоци $\overline{a_{n-1} a_n}$ добиваме дека со додавање на цифрите 1, 6 и 8 од бројот $\overline{a_1 a_2 \dots a_n}$ може да се добијат точно два лоши броја.

Конечно, бидејќи со цифрите 1, 6 и 8 може да се запишат $3^2 = 9$ различни двоцифрени броеви, а за да добиеме број запишан со 2017 цифри, треба да допишеме 2015 цифри, заклучуваме дека бројот на лошите 2017-цифрени броеви е еднаков на $9 \cdot 2^{2015}$.

17. На кружница се засадени n дрва, $11 < n < 2012$. На секое дрво со боја е запишан број, еднаков на вкупниот број листови на тоа дрво и на следните 11 дрва во насока на стрелката на часовникот. Секој од тие броеви, освен еден од нив, е за 1 помал од бројот запишан на следното дрво во насока на стрелката на часовникот. Определи го бројот на сите n , за кои е тоа можно.

Решение. Да ги нумерираме дрвата во насока на стрелката на часовникот со $1, 2, \dots, n$, почнувајќи од дрвото, на кое е запишна најмалиот број. Нека листовите на соодветните дрва се $a_1, a_2, \dots, a_n$, а броевите на нив се $b_1, b_2, \dots, b_n$. Дадениот услов $b_{i+1} = 1 + b_i$ е еквивалентен на $a_{i+12} = 1 + a_i$ за секој $i = 2, 3, \dots, n$ (секаде нумерацијата е по модул n).

Ако n не е делив на 2 или 3, тогаш броевите $12, 24, \dots, 12n$ даваат различни остатоци при делење со n . Навистина, ако допуштиме, дека $n \mid (i - j)12$ за некои $1 \leq j < i \leq n$, тогаш бидејќи n е заемно прост со 12, треба $n \mid (i - j)$, што не е можно. Тогаш, ако $a_{12i} = i$, за секој $i = 1, 2, \dots, n$, тоа ги опишува листовите на сите дрва и условот на задачата е исполнет.

Ако $n = 2k$, тогаш

$$b_1 + b_3 + \dots + b_{2k-1} = 6(a_1 + a_2 + \dots + a_n) = b_2 + b_4 + \dots + b_{2k}.$$

Од друга страна, $b_{2i-1} < b_{2i}$, за секој $i = 1, \dots, k$, што е противречност.

Ако $n = 3k$, тогаш

$$b_1 + b_4 + \dots + b_{3k-2} = 4(a_1 + a_2 + \dots + a_n) = b_3 + b_6 + \dots + b_{3k}.$$

Од друга страна, $b_{3i-2} < b_{3i}$, за секој $i = 1, \dots, k$, што е противречност.

Значи, условот е возможен само кога n не е делив ниту со 2, ниту со 3. Меѓу броевите 12, 13, ..., 2011 има $2000 : 2 = 1000$ парни и $2001 : 3 = 667$ деливи со 3, од кои 334 се парни. Бараниот број е

$$2000 - 1000 - 667 + 334 = 667.$$

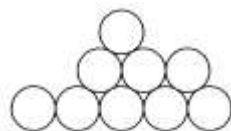
18. Дадени се неколку еднакви монети, кои се наредени во редици на следниов начин:

- монетите во првиот ред се допираат една до друга,

- монетите во секој ред формираат непрекинат блок, и
- монетите во секој ред допираат точно две монети во долниот ред.

Едно допустливо подредување со 5 монети во првиот ред е дадено на цртежот десно.

Нека $A(n)$ е бројот на можните конфигурации, кога имаме n монети во првиот ред. Определи го најмалиот n , за кој



$$A(n) > 10^4.$$

Решение. Ако во вториот ред имаме k монети, тогаш тие во еден непрекинат блок можат да бидат поставени на $n - k$ начини. Според тоа,

$$A(n) = \sum_{k=1}^{n-1} A(k)(n - k) + 1.$$

Оттука, користејќи ги очигледните почетни услови $A(1) = 1$, $A(2) = 2$ ги добиваме првите членови на низата $A(n)$, $n = 1, 2, 3, 4, \dots$

$$1, 2, 5, 13, 34, 89, 233, 610, 1597, 4181, 5778, 9959,$$

од каде добиваме $n = 13$.

Забелешка. Пресметувањата може да се упростат, ако забележиме, дека

$$A(n + 1) = 3A(n) - A(n - 1).$$

Може да се докаже дека добиената низа е всушност низата од непарни членови на низата на Фибоначи.

19. Дадена е табела со димензии $n \times n$ чии колони се нумерирани од 1 до n . Во секое поле од табелата е запишан природен број од 1 до n така што во секој ред и во секоја колона броевите се различни. Едно поле се нарекува добро ако бројот запишан во него е поголем од бројот на колоната во која тоа се наоѓа. Определи ги сите природни броеви n за кои сите редови содржат ист број добри полиња.

Решение. Јасно, во колоната со број i има $n - i$ добри полиња, па затоа вкупниот број добри полиња е еднаков на

$$(n - 1) + (n - 2) + \dots + 1 = \frac{n(n - 1)}{2}.$$

Според тоа, во секој ред има по $\frac{n - 1}{2}$ добри полиња, од каде следува дека n е непарен број.

$2k+1$	$2k$	$2k-1$	...	1
1	$2k+1$	$2k$	...	2
2	1	$2k+1$	...	3
...	...	...	...	...
$2k$	$2k-1$	$2k-2$	...	$2k+1$

Во горната табела е даден пример за произволен непарен број $n=2k+1$. Во секој ред имаме циклична пермутација на $2k+1, 2k, 2k-1, \dots, 2, 1$. Лесно се гледа, дека во $2i$ -тиот ред добри се првите $i-1$ поле и полињата од $2i$ до $k+i$, а во $(2i-1)$ -од ред добри се првите $i-1$ поле и полињата од $2i-1$ до $k+i-1$. Според тоа, во секој ред имаме k добри полиња.

20. Определи го бројот на триелементните подмножества на множеството $S = \{1, 2, 3, \dots, 19, 20\}$ такви што производот на нивните елементи е делив со 4.

Решение. Нека A е множеството од сите триелементни подмножества а множеството S , а

$$B = \{\{a, b, c\} \mid \{a, b, c\} \in A, 4 \nmid abc\}.$$

Нека $\{x, y, z\} \in A \setminus B$. Тогаш $4 \nmid xyz$ и $\{x, y, z\} \in S$. Производот на три природни броја не е делив со 4 ако:

- сите броеви се непарни,
- два броја се непарни, а третиот број е парен број кој не е делив со 4.

Во множеството S парни броеви кои не се деливи со 4 се 2, 6, 10, 14 и 18. Според тоа, имаме 5 парни броеви кои се деливи со 2, а не се деливи со 4 и имаме 10 непарни броеви. Триелементни подмножества на S во кои сите три членови се непарни броеви има

$$\binom{10}{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120.$$

Понатаму, два броја од множеството од 10 непарни броеви можеме да избереме на

$$\binom{10}{2} = \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} = 45$$

начини и за секој ваков избор имаме 5 можности за третиот број кој треба да е парен и да не е делив со 4. Според тоа, триелементни подмножества во кои еден елемент е парен број кој не е делив со 4, а другите два елементи се непарни броеви има $5 \cdot 45 = 225$. Конечно,

множеството $A \setminus B$ има $120 + 225 = 345$ елементи. Множеството A е множеството од сите триелементни подмножества на S , па затоа A има

$$\binom{20}{3} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 1140$$

елементи. Значи, $|A| = 1140$ и $|A \setminus B| = 345$, па од принципот на исклучување следува

$$|B| = |A| - |A \setminus B| = 1140 - 345 = 795.$$

21. Една држава има 2012 градови. Некои од градовите се директно поврзани со патишта, но така што од секој град да може да се стигне до секој друг град. Познато е дека ако два града се поврзани со пат, тогаш вкупниот број патишта кои излегуваат од тие градови е непарен број. Колкав е најголемиот број патишта?

Решение. Градовите да ги поделиме во две групи P и Q на следниов начин. Во P влегуваат сите градови од кои излегуваат парен број патишта, а во Q влегуваат сите градови од кои излегуваат непарен број патишта. Нека $|P| = p$ и $|Q| = q$, при што важи $p + q = 2012$. Според условот на задачата не постои пат кој поврзува два града од P или два града од Q . Тоа значи дека секој пат поврзува град од P со град од Q . Бидејќи од секој град од P излегуваат парен број патишта, заклучуваме дека вкупниот број патишта е парен број. Оттука и од условот дека од секој град од Q излегуваат непарен број патишта следува дека q е парен број.

Бидејќи $p + q = 2012$, заклучуваме дека p исто така е парен број. Според тоа, од секој град од Q излегуваат најмногу $p - 1$ патишта. Значи, ако $p = 2p_0$, $q = 2q_0$, тогаш имаме најмногу $2q_0(2p_0 - 1)$ патишта. Бидејќи $2q_0 + (2p_0 - 1) = 2011$, заклучуваме дека најголемата вредност на $2q_0(2p_0 - 1)$ се достигнува кога $2q_0$ и $2p_0 - 1$ се скоро еднакви, т.е. кога $2q_0 = 1006$ и $2p_0 - 1 = 1005$. Тогаш имаме

$$1005 \cdot 1006 = 1011030 \text{ патишта.}$$

Ќе дадеме пример во кој патиштата се точно $1005 \cdot 1006$. Нека $A_1, A_2, \dots, A_{1006}$ и $B_1, B_2, \dots, B_{1006}$ се градовите во P и Q , соодветно. Го поврзуваме секој од градовите $B_1, B_2, \dots, B_{1004}$ со секој од градовите $A_1, A_2, \dots, A_{1005}$. Ги поврзуваме градовите B_{1005} и B_{1006} со секој од

градовите $A_2, A_3, \dots, A_{1006}$. Јасно, бројот на патиштата е $1005 \cdot 1006$ и од секој град може да се стигне до секој друг град.

22. На одбојкарскиот турнир на Евро-африканскиот куп учествувале екипи од Европа и Африка. Од Европа учествувале 9 пати повеќе екипи отколку од Африка и тие освоиле 9 пати повеќе бодови од африканските екипи (секоја екипа играла со секоја друга екипа по еден натпревар, при што за победа се добива 1 бод, а за загубен натпревар се добиваат 0 бодови). Колку најмногу бодови може да освои најдобрата африканска екипа?

Решение. Нека x е бројот на африканските екипи. Тогаш бројот на европските екипи е $x+9$. Африканските екипи меѓу себе одиграле $\frac{x(x-1)}{2}$ натпревари и освоиле $\frac{x(x-1)}{2} + k$ бодови, каде k е бројот на победите на африканските екипи над европските. Тоа значи дека бројот на освоените бодови на европските екипи е $\frac{(x+8)(x+9)}{2} + x(x+9) - k$. Според тоа,

$$9\left(\frac{x(x-1)}{2} + k\right) = \frac{(x+8)(x+9)}{2} + x(x+9) - k,$$

од каде наоѓаме $3x^2 - 22x + 10k - 36 = 0$. Последната равенка треба да има корен природен број, па затоа дискриминантата треба да е точен квадрат, т.е.

$$121 - 3(10k - 36) = 229 - 30k$$

е точен квадрат. Значи, $k \leq 7$ и со непосредна проверка добиваме дека точен квадрат се добива само за $k = 2$ или $k = 6$. За $k = 2$ имаме $x = 8$ и затоа најдобрата африканска екипа може да освои најмногу $7 + 2 = 9$ бодови. За $k = 6$ имаме $x = 6$ и затоа најдобрата африканска екипа може да освои најмногу $5 + 6 = 11$ бодови и тоа е случајот кога ги победува сите африкански екипи и победува уште 6 европски екипи.

Конечно, најдобрата африканска екипа може најмногу да освои 11 бодови.

23. Определи го бројот на подмножествата на множеството $\{1, 2, \dots, n\}$ кои не содржат два соседни броја.

Решение. Нека $n > 1$. Со a_n да го означиме бројот на подмножествата на множеството $\{1, 2, \dots, n\}$ кои не содржат два соседни броја.

Да разгледаме подмножество A на множеството $\{1, 2, \dots, n, n+1\}$ кое не содржи два соседни броја. Ако $n+1 \in A$, тогаш $n \notin A$, па затоа $A \setminus \{n+1\}$ е подмножество од множеството $\{1, 2, \dots, n-1\}$ кое не содржи два соседни броја. Според тоа, бројот на подмножествата на множеството $\{1, 2, \dots, n, n+1\}$ кои не содржат два соседни броја и го содржат бројот $n+1$ е еднаков на a_{n-1} . Ако $n+1 \notin A$, тогаш $A \subset \{1, 2, \dots, n\}$ и не содржи два соседни броја, па затоа вакви подмножества има a_n . Значи, за $n > 1$ важи

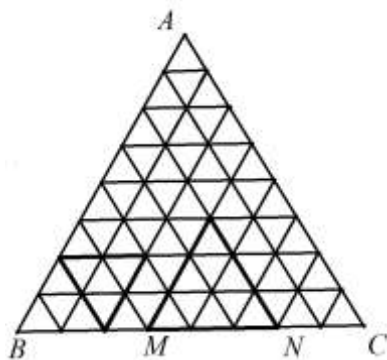
$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}. \quad (1)$$

Лесно се гледа дека $a_1 = 2$ и $a_2 = 3$, што значи дека бараниот број е $(n+1)$ -виот член на низата на Фибоначи, која се задава со релацијата (1) и $a_0 = 1$, $a_1 = 2$.

24. Рамностран триаголник со должина на страна 10 со прави паралелни на страните на триаголникот е поделен на 100 единечни рамнострани триаголници. Определи го бројот на сите рамнострани триаголници во оваа конфигурација, чии страни се паралелни на страните на почетниот триаголник.

Решение. Со a_n да го означиме бројот на рамнострани триаголници формирани од n паралелни прави кои ги делат страните на триаголникот на n еднакви делови.

Разгледуваме рамностран триаголник чии страни се поделени на $n+1$ еднакви отсечки од кои на секоја страна се повлечени по n паралелни прави (цртеж десно). Има a_n



рамнострани триаголници кои немаат темиња на страната BC .

Да го пресметаме бројот на темињата кои имаат е темиња на страната BC . За две произволно избрани точки на страната BC , на пример M и N , постои точно еден рамностран триаголник кој има темиња M и N (се добива со повлекување на паралелни прави низ M и N на AB и AC , соодветно. Според тоа, имаме $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ такви триаголници.

Сега да го определиме бројот на рамнострани триаголници кои имаат едно теме на страната BC . За секоја од n -те делбени точки

добиваме по еден единечен рамностран триаголник, потоа за $n-2$ средишни делбени точки добиваме $n-2$ рамностранни триаголници со должина на страна 2 итн. Затоа

$$a_{n+1} = a_n + \frac{(n+1)(n+2)}{2} + n + (n-2) + (n-4) + \dots$$

Ако во последното равенство ставиме $n+1$ наместо n добиваме

$$a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{(n+2)(n+3)}{2} + (n+1) + (n-1) + (n-3) + \dots$$

Со замена во последното равенство добиваме

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= a_n + \frac{(n+1)(n+2)}{2} + \frac{(n+2)(n+3)}{2} + (n+1) + n + (n-1) + (n-2) + \dots \\ &= a_n + \frac{(n+1)(n+2)}{2} + \frac{(n+2)(n+3)}{2} + \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\ &= a_n + \frac{(n+2)(3n+5)}{2}. \end{aligned}$$

Понатаму, бидејќи $a_1 = 1$ и $a_2 = 5$ (цртеж десно), последователно добиваме

$$a_4 = a_2 + \frac{4 \cdot 11}{2} = 5 + 22 = 27,$$

$$a_6 = a_4 + \frac{6 \cdot 17}{2} = 27 + 51 = 78,$$

$$a_8 = a_6 + \frac{8 \cdot 23}{2} = 78 + 92 = 170,$$

$$a_{10} = a_8 + \frac{10 \cdot 29}{2} = 170 + 145 = 315.$$



25. Во компанијата Креативност работат научни работници. Во текот на осумчасовен работен ден тие ја посетуваат библиотеката (можно е и по неколку пати). Познато е дека за секој пар научници вкупното време во кое само еден од нив е во библиотеката не е помало од x часови ($x > 4$). Определи го најголемиот можен број на научни работници (во зависност од x)?

Решение. Нека n е бројот на научниците. Според условот за секој пар научници вкупното време во кое само еден од нив е во библиотеката не е помало од x . Ако ги собереме овие времиња по сите парови ќе добиеме број $S \geq \frac{n(n-1)}{2}x$. Ќе го оцениме овој број.

Да ги забележиме моментите кога некој влегува или излегува од библиотеката. Со овие моменти работниот ден може да се раздели на m интервали со должини $t_1, t_2, \dots, t_m$. Нека во i -тиот интервал во библиотеката имало k_i научници. Овој интервал се брои за тие парови научници од кои само еден е во бифето. Бројот на овие парови е

$k_i(n - k_i)$, па затоа придонесот на овој интервал во S е $t_i k_i(n - k_i)$.
Понатаму, изразот $k(n - k)$ прима најголема вредност за $k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ и затоа неговиот придонес во S на надминува $t_i \lfloor \frac{n}{2} \rfloor (n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor)$. Но,

$$t_1 + t_2 + \dots + t_m = 8,$$

од каде следува

$$8 \lfloor \frac{n}{2} \rfloor (n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor) \geq S \geq \frac{n(n-1)}{2} x.$$

Ќе разгледаме два случаја.

Случај 1. Нека $n = 2l$. Тогаш имаме $8l^2 \geq l(2l - 1)x$, т.е. $x \geq (2x - 8)l$, од каде добиваме $l \leq \frac{x}{2x-8}$, односно $n \leq 2 \lfloor \frac{x}{2x-8} \rfloor$.

Случај 2. Нека $n = 2l + 1$. Тогаш

$$8l(2l + 1) \geq l(2l + 1)x, \text{ т.е. } (2x - 8)l \leq x - 8,$$

од каде добиваме $l \leq \frac{x-8}{2x-8}$, па затоа

$$n = 2l + 1 \leq 2 \lfloor \frac{x-8}{2x-8} \rfloor + 1 = 2 \lfloor \frac{x}{2x-8} - 1 \rfloor + 1 = 2 \lfloor \frac{x}{2x-8} \rfloor - 1.$$

Според тоа, и во двата случаја важи $n \leq 2 \lfloor \frac{x}{2x-8} \rfloor$.

Ќе покажеме дека, оваа оценка се достигнува. Нека ставиме $n = 2l = 2 \lfloor \frac{x}{2x-8} \rfloor$. Од $n = 2l$ научници на $K = \binom{2l}{l}$ начини може да се изберат l научници. Осумчасовниот работен ден да го разделиме на K интервали, секој со должина $\frac{8}{K}$. На секој интервал да му придружине група од l научници и нека во тоа време точно тие биле во библиотеката. Заради симетрија е јасно, дека за секои двајца научници времето во кое точно еден од нив бил во библиотеката е едно исто, на пример y . Тогаш сите неравенства во претходните разгледувања преминуваат во равенства и затоа

$$8l(2l - 1) = S = \frac{2l(2l-1)}{2} y.$$

Според тоа, $y = \frac{8l}{2l-1} \geq x$. Последното неравенство е еквивалентно со неравенството $l \leq \frac{x}{2x-8}$, што и требаше да се докаже.

26. Определи го бројот на низите $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ од цели броеви такви што

$$a_n + a_{n+1} = 2a_{n+2}a_{n+3} + 2005, \text{ за секој } n \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

Решение. Ако ги одземеме равенствата

$a_n + a_{n+1} = 2a_{n+2}a_{n+3} + 2005$ и $a_{n+1} + a_{n+2} = 2a_{n+3}a_{n+4} + 2005$
добиваме

$$a_{n+2} - a_n = 2a_{n+3}(a_{n+4} - a_{n+2}).$$

Ако последната рекурзија ја примениме k пати добиваме

$$\begin{aligned} a_{n+2} - a_n &= 2a_{n+3}(a_{n+4} - a_{n+2}) = 2^2 a_{n+3}a_{n+5}(a_{n+6} - a_{n+4}) = \dots \\ &= 2^k a_{n+3} \dots a_{n+2k+1}(a_{n+2k+2} - a_{n+2k}). \end{aligned}$$

Според тоа, за секој $n \in \mathbb{N}$ бројот $a_{n+2} - a_n$ е делив со 2^k за секој $k \in \mathbb{N}$. Последното е можно само ако $a_{n+2} - a_n = 0$, за секој $n \in \mathbb{N}$, што значи $a_1 = a_3 = \dots = a_{2n-1} = \dots$ и $a_2 = a_4 = \dots = a_{2n} = \dots$. Сега, од (1) последователно следува

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 &= 2a_1a_2 + 2005 \\ 4a_1a_2 - a_1 - a_2 + 1 &= -4009 \\ (2a_1 - 1)(2a_2 - 1) &= -19 \cdot 211. \end{aligned}$$

Од последното равенство следува $2a_1 - 1 = \pm 1, \pm 19, \pm 211$, што значи дека постојат 8 низи кои го задоволуваат условот на задачата.

27. Дадена е бесконечна табела, формирана според следниве правила:

- 1) во горниот лев агол е запишан бројот 4,
- 2) броевите во секој ред и секоја колона се запишани во растечки редослед при што разликата меѓу секои два соседни броја во i -тиот ред е $2i+1$, а разликата меѓу секои два соседни броја во j -тата колона е $2j+1$.

4	7	10	13	16	...
7	12	17	22	27	...
10	17	24	31	38	...
13	22	31	40	49	...
16	27	38	49	60	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

На колку места во табелата се појавува бројот $N = \frac{2013^{2013}-1}{2}$?

Решение. Забележуваме дека во пресекот на i -тиот ред и j -тата колона е запишан бројот $2ij + i + j$. Според тоа, ако бројот M се појавува во табелата важи $2M + 1 = (2i + 1)(2j + 1)$, за некои $i, j \in \mathbb{N}$. Обратно, ако $2M + 1 = ab$ и $a \neq 1, b \neq 1$, тогаш a и b се непарни броеви и бројот M се јавува во пресекот на редот $i = \frac{a-1}{2}$ и колоната $j = \frac{b-1}{2}$. Според тоа, бројот на јавувањата на N во табелата е еднаков на бро-

јот на подредените парови (a, b) за кои $2N + 1 = ab$, $a \neq 1, b \neq 1$. Овој број е за 2 помал од бројот на делителите на бројот $2N + 1$. Така, за $N = \frac{2013^{2013} - 1}{2}$ имаме

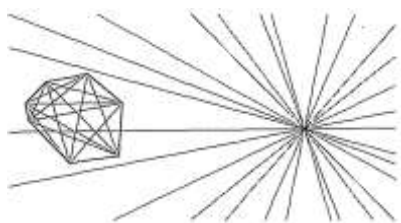
$$2N + 1 = 2013^{2013} = 3^{2013} \cdot 11^{2013} \cdot 61^{2013},$$

кој има $(2013 + 1)^3 = 2014^3$ делители, па затоа бараниот број на појавувања на бројот

$$N = \frac{2013^{2013} - 1}{2} \text{ е } 2014^3 - 2.$$

28. Докажи, дека во секој конвексен седумаголник постојат две дијагонали кои формираат агол помал од 13° .

Решение. Ако седумаголникот има две паралелни дијагонали, тогаш нема што да се докажува. Нека претпоставиме дека седумаголникот не содржи две паралелни дијагонали. Да земеме точка надвор од седумаголникот и низ оваа точка да ги



повлечеме правите кои се паралелни на дијагоналите. Вкупно повлекуваме $\frac{7 \cdot 4}{2} = 14$ прави и ови прави формираат $2 \cdot 14 = 28$ агли, чиј

збир е еднаков на 360° . Ако сите агли се поголеми или еднакви на 13° , тогаш збирот на аглите ќе биде поголем или еднаков на $28 \cdot 13^\circ = 364^\circ > 360^\circ$, што е противречност.

29. Определи множество S со најмал број точки со кои се определени седум различни прави.

Решение. Нека S е множество точки кои определуваат 7 различни прави и нека $|S| = n$.

Ако во множеството S не постојат три колинерани точки, тогаш тоа множество определува $\frac{n(n-1)}{2}$ различни прави. Ако ова множество определува 7 прави, тогаш $\frac{n(n-1)}{2} = 7$, т.е. $n(n-1) = 14$, што не е можно, бидејќи бројот 14 не е производ на два последователни природни броја. Според тоа, ниту едно множество во кое нема барем една тројка колинеарни точки не определува 7 различни прави.

Значи, во множеството S постои најмалку едно триелементно подмножество колинеарни точки. Ако имаме само едно триелементно подмножество колинеарни точки, тогаш со ова множество се определени $\frac{n(n-1)}{2} - 2$ различни прави. Имено, триелементното подмножество колинеарни точки определува само една права, а триелементното подмножество содржи три двоелементни подмножества, што значи дека една иста права сме ја броеле трипати. Затоа од $\frac{n(n-1)}{2}$ треба да одземеме 2. Така имаме $\frac{n(n-1)}{2} - 2 = 7$, т.е. $n(n-1) = 18$, што повторно не е можно.

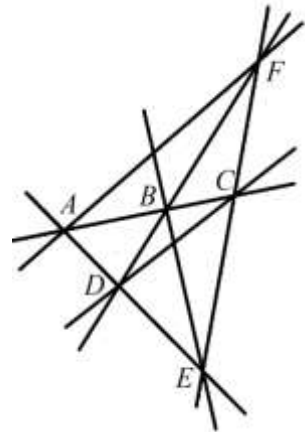
Ако имаме точно две триелементни подмножества колинеарни точки, тогаш со ова множество се определени $\frac{n(n-1)}{2} - 2 \cdot 2$ различни прави. Значи, треба да важи $\frac{n(n-1)}{2} - 2 \cdot 2 = 7$, т.е. $n(n-1) = 22$, што повторно не е можно.

Ако имаме точно три триелементни подмножества колинеарни точки, тогаш со ова множество се определени $\frac{n(n-1)}{2} - 3 \cdot 2$ различни прави. Значи, треба да важи $\frac{n(n-1)}{2} - 3 \cdot 2 = 7$, т.е. $n(n-1) = 26$, што повторно не е можно.

Ако имаме точно четири триелементни подмножества колинеарни точки, но немаме подмножество од четири колинеарни точки (четири колинеарни точки определуваат четири триелементни подмножества колинеарни точки), тогаш со ова множество се определени $\frac{n(n-1)}{2} - 3 \cdot 2$ различни прави.

Значи, треба да важи $\frac{n(n-1)}{2} - 4 \cdot 2 = 7$, т.е. $n(n-1) = 30$. Од последната равенка наоѓаме $n = 6$. Според тоа, множество S од 6 точки, во кое постојат точно четири триелементни подмножества колинеарни точки и не постојат четири колинеарни точки определува точно 7 прави. Нека

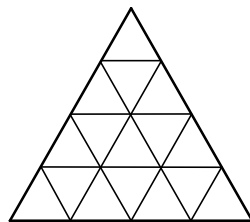
$$S = \{A, B, C, D, E, F\}, S_1 = \{A, B, C\},$$



$$S_2 = \{A, D, E\}, S_3 = \{B, D, F\}, S_4 = \{C, E, F\}.$$

Ова множество ги определува правите $AB, AE, AF, BF, BE, CD, CE$ (види цртеж).

30. Нека $n > 3$ е природен број. Рамностранниот триаголник ABC е поделен на n^2 идентични рамностранни триаголници со прави паралелни на неговите страни. Таква поделба е илустрирана на цртежот за $n=4$. Нека m е бројот на ромбови составени од 2 мали триаголници, а d е бројот на ромбови составени од 8 мали триаголници. Изрази ја разликата $m-d$ преку n .



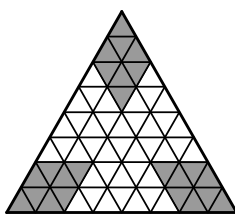
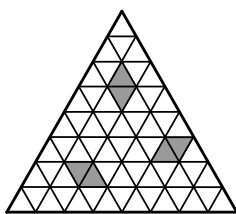
Решение. Со M ќе го означиме множеството ромбови составено од два делбени триаголници, а со D ќе го означиме множеството ромбови кои се составени од осум делбени триаголници.

Секоја делбена отсечка (страна на делбен триаголник, која не е дел од страна на почетниот триаголник) е дијагонала на еден и само еден ромб од множеството M . Такви делбени отсечки, паралелни со една страна на триаголникот има

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n-2) + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

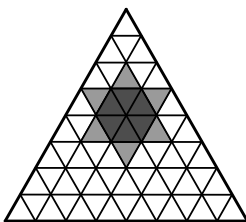
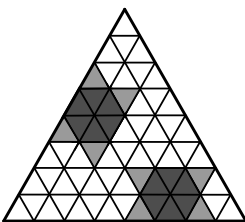
Според тоа, вкупниот број на елементи од множеството M е

$$m = 3 \frac{n(n-1)}{2}.$$



За да ги преброиме елементите од множеството D , точките кои се темиња на делбени триаголници ќе ги поделиме во три групи.

Во првата група се точките кои се центри (пресек на дијагоналите) на точно еден ромб од типот D . Такви точки има точно три, за секој природен број n (види цртеж).



Во втората група се точките кои се центари на точно два ромба од множеството ромбови D . Таквите точки припаѓаат на делбена отсечка која е дел од делбена права

и е на најмало растојатние од страните на триаголникот. Такви

отсечки има три, а на секоја од нив има по $n-4$ точки (на цртежот е даден пример на такви точки во случајот $n=8$).

Во третата категорија се точки кои се центри на три ромбови од множеството D (на цртежто е даден пример на таква точка во случајот $n=8$). Вкупниот број на такви делбени точки е

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n-5) = \frac{(n-5)(n-4)}{2}.$$

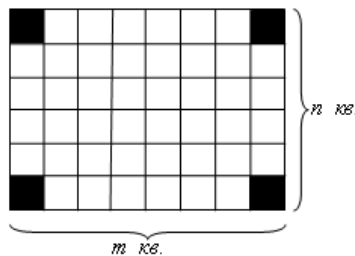
Според тоа, вкупниот број на елементи на множеството D е

$$d = 3 + 6(n-4) + 3 \frac{(n-5)(n-4)}{2} = \frac{3}{2}[2 + (n-1)(n-4)].$$

Сега не е тешко да се пресмета дека $m-d = 3(2n-3)$.

31. Четирите аголни квадратчиња на квадратна $m \times n$ мрежа, каде $m > n > 6$ се природни броеви, се обоени во црно.

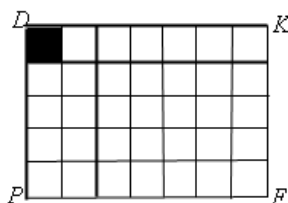
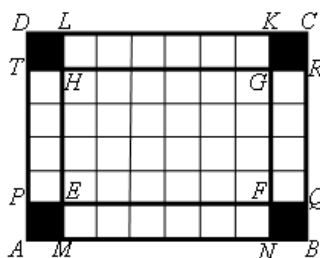
Ги разгледуваме правоаголниците со темиња во темињата на мрежата и страни по линиите на мрежата. Ако бројот на правоаголниците кои содржат барем едно црно квадратче, е еднаков на 2013, најди го бројот на правоаголниците без црни квадратчиња.



Решение. Прво го пресметуваме бројот на правоаголниците со барем 1 црно квадратче. Да ги означиме темињата на црните аголни квадратчиња соодветно со A, M, E, P ; N, B, Q, F ; G, R, C, K и T, H, L, D (види цртеж). Сите правоаголници со точно едно црно квадратче, се наоѓаат во правоаголниците

$PFKD$, $EQCL$, $ANGT$ и $MBRH$.

Оние во $PFKD$ ги наоѓаме на следниот начин. Бројот на правоаголниците со црно квадратче во првиот ред е еднаков на $m-1$. На секој правоаголник од првиот ред му ја придружуваме колона во која се наоѓа. Без разлика на нејзината ширина, повторно како погоре пресметуваме, дека во неа се содржат $n-1$ правоаголници со ширина, еднаква на ширината на колоната со црно квадратче. Следствено



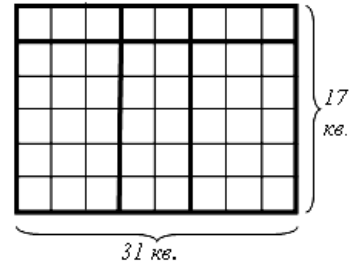
бројот на сите правоаголници кои не интересираат е $(m-1)(n-1)$.

Аналогно наоѓаме, дека секој еден од правоаголниците $EQCL$, $ANGT$ и $MBRH$ содржи исто толку правоаголници со точно 1 црно квадратче. Така бројот на сите правоаголници со точно едно црно квадратче е $4(m-1)(n-1)$. Сега ќе го најдеме бројот на правоаголниците со точно 2 црни квадратчиња. Тоа се оние правоаголници, кои са распоредени $PQCD$, $ABRT$ и оние – во $ANKD$ и $MBCL$. Јасно, во првите два има по $n-1$ правоаголници (види цртеж, а во вторите два – по $m-1$. Ако го земеме предвид и единствениот правоаголник со точно 4 црни квадратчиња (со точно 3 нема), тогаш за бројот на сите правоаголници од условот на задачата добиваме:

$4(m-1)(n-1) + 2(n-1) + 2(m-1) + 1 = 4mn - 2m - 2n + 1 = (2m-1)(2n-1)$.
И така $(2m-1)(2n-1) = 2013$. Но, $2013 = 1 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 61$ и ако го земеме предвид условот $m > n > 6$, ја добиваме единствената можност

$$\begin{cases} 2n-1=33 \\ 2m-1=61 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=17 \\ m=31. \end{cases}$$

Сега ќе го пресметаме бројот на правоаголниците од условот на задачата во правоаголна мрежа со димензии 31×17 . Да го разгледаме само првиот ред од мрежата. Бројот на правоаголниците во него со димензии 1×1 е 31, бројот на тие со димензии 2×1 е 30, а бројот на правоаголниците со димензии 3×1 е 29.



Воопшто бројот на сите правоаголници во првиот ред е

$$31 + 30 + 29 + \dots + 2 + 1 = \frac{31(31+1)}{2} = 16 \cdot 31 = 496.$$

На секој правоаголник од првиот ред му соодветствува колона. Без разлика на нејзината ширина, одново на горниот начин пресметуваме, дека во неа се содржат $\frac{17(17+1)}{2} = 153$ правоаголника со ширина, еднаква на ширината на колоната. Според тоа, бројот на сите правоаголници е еднаков на бројот на колоните, помножен со бројот на правоаголниците во една колона, т.е. $496 \cdot 153 = 75888$. Одговорот на задачата е $75888 - 2013 = 73875$.

32. Град има форма на квадрат $n \times n$ и е поделен на квартави 1×1 . Во некои од кварталите има предаватели на еден од трите мобилни опе-

ратори A, B и C . Секој предавател го опслужува квартот во кој се наоѓа, како и соседните квартави (соседни се квартовите кои имаат заедничка страна или теме). Еколошките стандарди забрануваат монтирање на повеќе од еден предавател во кварт. Монтирани се помалку од 2010 предаватели и секој кварт е опслужен од секој оператор. Определи ја најголемата можна вредност на n .

Решение. Позицијата на даден кварт ќе ја означуваме со подредениот пар координати (i, j) , $i, j = 1, 2, \dots, n$. Бидејќи има помалку од 2010 предаватели, заклучуваме дека некој оператор, да кажеме A има помалку од $2010 : 3 = 670$ предаватели. Да забележиме дека ако координатите на два кварта се разликуваат за повеќе од 2, тогаш тие немаат заеднички соседен кварт, па затоа не може да бидат опслужени од еден предавател. Нека $n \geq 76$ и да ги разгледаме кварталите $(3i-2, 3j-2)$, за $i, j = 1, 2, \dots, 26$. Координатите на секои два од овие квартави се разликуваат барем за 3 (при соседни вредности на i и j тие се разликуваат точно за 3), па затоа овие квартави треба да бидат опслужувани од различни предаватели на операторот A . Но, тоа не е можно, бидејќи бројот на тие квартави е $26 \cdot 26 = 676$, а $676 > 670$. Според тоа, $n < 76$.

Ако $n = 75$, тогаш предавателите може да се монтираат на следниов начин:

- предавателите на операторот A во квартовите $(3i-1, 3j-1)$, за $i, j = 1, 2, \dots, 25$,
- предавателите на операторот B во квартовите $(3i, 3j-1)$, за $i, j = 1, 2, \dots, 25$ и во кварталите $(1, 3j-1)$, за $j = 1, 2, \dots, 25$, и
- предавателите на операторот C во квартовите $(3i-1, 3j)$, за $i, j = 1, 2, \dots, 25$ и во кварталите $(3i-1, 1)$, за $j = 1, 2, \dots, 25$.

Тогаш секој кварт од градот ќе биде опслужен од сите три оператори. Навистина, квартовите

$$(3i-1, 3j-1), (3(i+1)-1, 3j-1), (3i-1, 3(j+1)-1)$$

и

$$(3(i+1)-1, 3(j+1)-1), \text{ за } i, j = 1, 2, \dots, 24$$

се аголни за квадрат 4×4 и во секој од нив има предавател на операторот A . Овие четири предаватели ги опслужуваат сите квартави од квадратот 4×4 , па затоа секој кварт од градот се опслужува од операторот A .

Аналогно се покажува дека предавателите на операторите B и C , распоредени на опишаниот начин, ги опслужуваат сите квартави на градот. Притоа, вкупниот број на предаватели е

$$3 \cdot 25 \cdot 25 + 2 \cdot 25 = 1925 < 2010.$$

Според тоа, најголемата можна вредност е $n = 25$. На долниот цртеж е прикажан распоредот на предавателите за $i, j = 1, 2, 3, 4, 5$.

IV4 ПРИНЦИП НА ДИРИХЛЕ

1. На меѓународна средба учествувале 1985 лица. Меѓу секои три лица има двајца кои зборуваат еден ист јазик. Докажи, дека ако секој учесник зборува најмногу на 5 јазици, тогаш има барем 200 лица кои знаат еден ист јазик.

Решение. Ќе докажеме дека има учесник кој се разбира со најмалку 992 од преостанатите учесници. Ако има учесник, кој се разбира со сите останати учесници, тогаш тој се разбира со $1984 > 992$ учесници. Нека претпоставиме дека два учесника A и B не се разбираат. Од условот на задачата следува дека секој од останатите 1983 учесници се разбира или со A или со B . Од принципот на Дирихле следува дека еден од нив (на пример A) се разбира со 992 учесници. Бидејќи тој говори најмногу 5 јазици и $\frac{992}{5} > 198$, заклучуваме дека барем 199 говорат еден ист јазик. Овие 199 учесници заедно со A ја формираат бараната група од најмалку 200 лица кои говорат еден ист јазик.

2. На таблата се запишани неколку ирационални броеви. Познато е дека за секои два броја a и b запишани на таблата, барем еден од броевите $\frac{a}{b+1}$ и $\frac{b}{a+1}$ е рационален. Определи колку нјамногу броеви може да се запишани на таблата.

Решение. На таблата да нацртаме стрелки според следново правило: ако $\frac{a}{b+1}$ е рационален, тогаш цртаме стрелка од a кон b , а ако $\frac{b}{a+1}$ е рационален, тогаш цртаме стрелка од b кон a (се разбира, ако $\frac{a}{b+1}$ и $\frac{b}{a+1}$ се рационални, цртаме стрелки и во двете насоки).

Нека претпоставиме дека на таблата има 4 броеви и нека a е најмалиот меѓу нив. Тогаш од a излегуваат барем две стрелки или во a

влегуваат барем две стрелки (принцип на Дирихле). Да го разгледаме првиот случај (вториот е аналоген), т.е. имаме стрелки од a кон b и c . Меѓу b и c има стрелка и без ограничување на општоста можеме да сметаме дека таа е од b кон c . Тогаш бројот

$$1 + \frac{1}{b} = \frac{b+1}{b} = \frac{a}{c+1} \cdot \frac{c+1}{b} \cdot \frac{b+1}{a}$$

е рационален, бидејќи трите дробки во последниот производ се рационални броеви. Но, тоа значи дека бројот b е рационален, што е противречност.

Еден пример на три броја, кои ги имаат саканите својства, е следниов:
 $b = -2a - 2$, $c = -2a - 1$, каде a е произволен ирационален број.

3. Нека $p_1, p_2, \dots, p_{2005}$ се различни прости броеви. Нека S е множеството природни броеви такви што сите прости делители на броевите од S се некои од броевите $p_1, p_2, \dots, p_{2005}$ и производот на било кои два броја од S не е точен квадрат. Определи го најголемиот можен број елементи на множеството S .

Решение. Секој елемент на множеството S може да се запише во видот $p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_{2005}^{a_{2005}}$. Нека $p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_{2005}^{a_{2005}}$ и $p_1^{b_1} p_2^{b_2} \dots p_{2005}^{b_{2005}}$ се произволни броеви од S . За да нивниот произв не е точен квадрат мора да постои барем еден $i, 1 \leq i \leq 2005$ таков што $a_i + b_i \equiv 1 \pmod{2}$. На секој елемент од множеството S можеме да му придружине низа од 2005 цифри кои се или нули или единици, така што на i -тото место во низата ставаме 0 ако $a_i \equiv 0 \pmod{2}$, односно 1 ако $a_i \equiv 1 \pmod{2}$. Вакви низи имаме точно 2^{2005} . Ако множеството S има $2^{2005} + 1$ елемент, тогаш од принципот на Дирихле следува дека два елемента имаат исти придружени низи, што значи дека соодветните степени им се со иста парност, па затоа нивниот производ ќе биде точен квадрат. Значи, S има најмногу 2^{2005} . Ако тргнеме од 2^{2005} различните низи, можеме да формираме множество од 2^{2005} броеви така што во производот $p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_{2005}^{a_{2005}}$ на местото на a_i е цифрата која се наоѓа на i -тото место во соодветната низа. Јасно, производот на било кои два од овие броеви не е точен квадрат, што значи дека множеството S може да има најмногу 2^{2005} елементи.

4. Дадени се 37 двоцифрени броеви кои не се деливи со 10. Докажи, дека меѓу овие 37 броеви постојат 5 броја такви што за секои два од овие

броеви цифрите на десетките се различни и цифрите на единиците се различни.

Решение. Дадените броеви ќе ги поделиме во 9 групи, при што во секоја група се наоѓаат броевите кои имаат иста цифра на десетките. Според принципот на Дирихле во некоја од овие групи ќе има најмалку 5 броја (во спротивно ќе имаме најмногу $4 \cdot 9 = 36$ броеви). Според тоа, меѓу дадените броеви има барем 5 броја кои имаат една и иста цифра – да кажеме a . Да ги разгледаме броевите кај кои цифрата на десетките е различна од a . Имаме најмалку $37 - 9 = 28$ броеви. Повторно од принципот на Дирихле следува дека меѓу овие броеви има барем 4 броја кои имаат иста цифра на десетките (во спротивно би имале најмногу $8 \cdot 3 = 24$ броеви). Значи, барем 4 од дадените броеви имаат цифра на десетките b различна од a . Сега да ги разгледаме броевите кои имаат цифра на десетките различна од a и b . Такви броеви има најмалку $28 - 9 = 19$. Како и досега меѓу овие броеви има најмалку 3 броја со иста цифра на десетките c која е различна од a и b ($2 \cdot 7 = 14 < 19$). Останаа најмалку $19 - 9 = 10$ броеви. Јасно меѓу овие броеви има најмалку два броја кои имаат иста цифра на десетките d , различна од a, b и c , и затоа останува најмалку $10 - 9 = 1$ број кој има цифра на десетките e различна од a, b, c и d . Сега се враќаме наназад. Земаме број со цифра на десетките e . Од два броја кои имаат цифра на десетките d избираме број чија цифра на единиците е различна од цифрите на единиците на веќе избраниот број. Понатаму од три од броевите кои имаат цифра на десетките c избираме број чија цифра на единиците е различна од цифрите на единиците на веќе избраните броеви итн.

5. Определи го најголемиот број A со следново својство: ако броевите $1, 2, \dots, 1000$ се запишат во произволен редослед, тогаш постојат 50 последователни броеви такви што нивниот збир е поголем или еднаков на A .

Решение. Нека $x_1, x_2, \dots, x_{1000}$ е произволно подредување на броевите од 1 до 1000. Да означиме

$$\begin{aligned} S_1 &= x_1 + x_2 + \dots + x_{50}, \quad S_2 = x_{51} + x_{52} + \dots + x_{100}, \dots, \\ S_{20} &= x_{951} + x_{952} + \dots + x_{1000} \end{aligned}$$

Бидејќи

$$S_1 + S_2 + \dots + S_{20} = \frac{1000 \cdot 1001}{2} = 500500,$$

од принципот на Дирихле следува дека постои i таков што

$$S_i \geq \frac{500500}{20} = 25025.$$

Од друга страна, ако бројот B го има саканото својство тогаш $B \leq 25025$. Навистина, за подредувањето 1000, 1, 999, 2, 998, 3, ..., 500, 501 важи: ако првиот меѓу последователните 50 броеви е поголем од 500, тогаш нивниот збир е 25025, а ако првиот меѓу последователните 50 броеви е помал од 500, тогаш нивниот збир е 25000.

6. На едно тестирање учествувале 67 ученици. Тестот се состоел од 6 прашања. Ученик кој точно одговорил на k – тото прашање добива k бодови, а додека ученик кој неточно одговорил на k – тото прашање добива $-k$ бодови.

а) Докажи, дека постојат најмалку два ученика кои идентично одговорице на сите прашања.

б) Докажи, дека постојат најмалку четири ученици кои освоиле ист број на бодови.

Решение. а) Вкупниот број начини на кои еден ученик може да одговори на прашањата, точно или неточно, е $2^6 = 64$. Бидејќи имаме 67 ученици, од принципот на Дирихле следува дека постојат најмалку два ученика кои идентично одговорице на сите прашања.

б) Да забележиме дека максималниот број бодови кои еден ученик може да ги освои (ако точно ги одговорил сите прашања) е $1+2+3+4+5+6=21$, а минималниот $-1-2-3-4-5-6=-21$. Сега да забележиме дека секој ученик точно 3 пати добива непарен број бодови (на првото, третото и петтото прашање). Збир на три непарни и произволен број парни броеви е непарен број, па затоа вкупниот број бодови на секој ученик ќе биде непарен број. Според тоа, вкупниот број бодови на секој ученик ќе биде некој од броевите $-21, -19, -17, \dots, 17, 19, 21$, што значи дека имаме 22 можности за освоени бодови. Бидејќи на тестирањето учествувале $66 = 3 \cdot 22 + 1$ ученик, од принципот на Дирихле следува дека постојат најмалку четири ученици кои освоиле ист број на бодови.

7. Нека A е множество од 65 цели броеви кои даваат различни остатоци при делење со бројот 2016. Докажи, дека постои подмножество $B = \{a, b, c, d\}$ на множеството A такво што $2016 \mid (a + b - c - d)$.

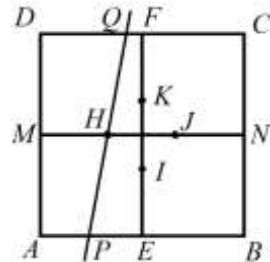
Решение. Доволно е да докажеме дека постојат две двоелементни множества $\{a, b\}$ и $\{c, d\}$ за кои сите елементи се различни и такви

што $a + b \equiv c + d \pmod{2016}$. Затоа ќе ја разгледаме фамилијата од сите двоелементни подмножества на множеството A . Вакви множества има $\frac{65 \cdot 64}{2} = 2080$. За секои две множества кои имаат точно еден ист елемент, зборовите на елементите се конгруентни со различни броеви по модул 2016. Значи, не постојат две двоелементни подмножества на множеството A такви што зборовите на нивните елементи се конгруентни со ист број по модул 2016 и кои имаат точно еден ист елемент. Значи, ако за множествата $\{a, b\}$ и $\{c, d\}$ важи $a + b \equiv c + d \pmod{2016}$, тогаш елементите a, b, c, d на множеството A мора да се различни. Бидејќи вкупниот број на двоелементни подмножества од A е еднаков на $2080 > 2016$, од принципот на Дирихле следува дека постојат две множества такви што зборовите на нивните елементи се конгруентни по модул 2016.

8. Дадени се 9 прави такви што секоја од нив дели даден квадрат $ABCD$ на два трапези, чии плоштини се однесуваат како $2:3$. Докажи дека најмалку три од дадените девет прави минуваат низ иста точка.

Решение. Нека дадениот квадрат е $ABCD$.

Јасно, секоја од дадените прави сече по две спротивни страни на квадратот. Нека a е една од дадените 9 прави и нека таа го дели квадратот на два трапеза чии плоштини се однесуваат како $2:3$. Нека таа права ги сече страните AB и CD во точките P и Q , соодветно. Таа го дели квадратот на трапезите $APQD$ и $PBCQ$. Овие два трапези имаат исти висини, па затоа нивните плоштини се однесуваат како должините на соодветните средни линии. Нека M и N се средините на страните AD и BC , соодветно. Нека правата a ја сече отсечката MN во точката H . Тогаш H е средина на отсечката PQ , па затоа MH и HN се средни линии на трапезите $APQD$ и $PBCQ$, соодветно. Бидејќи плоштините се однесуваат како $2:3$, добиваме дека $\overline{MH} : \overline{HN} = 2:3$. Нека J е симетричната точка на точката H во однос на центарот на квадратот. Тогаш секоја права која минува низ точката J и го дели квадратот на два трапези има својство дека плоштините на тие два трапези се однесуваат како $2:3$. Аналогно се заклучува дека постојат уште две точки со саканото својство (на цртежот тоа се точките I и K). Според тоа, секоја од деветте прави минува низ една од четирите



точки: H, I, J и K . Од принципот на Дирихле следува дека барем низ една од овие точки минуваат најмалку три од дадените девет прави.

9. Даден е правилен шестаголник со должина на страна 1. Во внатрешноста на шестаголникот дадени се m точки такви што никои три од нив не се колинеарни. Шестаголникот е разделен на триаголници, при што секоја од дадените m точки и секое од темињата на шестаголникот е теме на делбен триаголник. Делбени триаголници немаат заедничка внатрешна точка. Докажи дека постои делбен триаголник чија плоштина не е поголема од $\frac{3\sqrt{3}}{4(m+2)}$.

Решение. Ќе го определиме вкупниот број на делбени триаголници на кои е поделен дадениот шестаголник. Нека A е произволна точка од внатрешните m точки. Збирот од сите агли во точката A е 360° (збир од сите агли во A на сите триаголници кои таа точка ја имаат за свое теме). Од друга страна, збирот од сите агли во теме на шестаголникот е 120° . Бидејќи збирот на аглите во секој триаголник е 180° , бројот на делбени триаголници е:

$$\frac{m \cdot 360^\circ + 6 \cdot 120^\circ}{180^\circ} = 2m + 4.$$

Плоштината на дадениот шестаголник е еднаква на $\frac{3\sqrt{3}}{2}$, па од принципот на Дирихле следува дека постои делбен триаголник чија плоштина не е поголема од $\frac{3\sqrt{3}}{2} : (2m + 4) = \frac{3\sqrt{3}}{4(m+2)}$.

10. Во правилен шестаголник $ABCDEF$ со должина на страна еднаква на 1 избрани се различни точки $P_1, P_2, \dots, P_{2556}$. Ако никои три точки од множеството $S = \{A, B, C, D, E, F, P_1, P_2, \dots, P_{2556}\}$ не лежат на една права, докажи дека постои триаголник со темиња од S чија плоштина е помала од $\frac{1}{1700}$.

Решение. Да разгледаме триангулација на правилниот шестаголник и дадените точки. Збирот на сите агли од таа триангулација е еднаков на

$$2556 \cdot 360^\circ + 6 \cdot 120^\circ = 2556 \cdot 2 \cdot 180^\circ + 4 \cdot 180^\circ,$$

па затоа вкупниот број на триаголници е еднаков на $2556 \cdot 2 + 4 = 5116$

Ако секој од овие триаголници има плоштина поголема од $\frac{1}{1700}$, тогаш

$$5116 \cdot \frac{1}{1700} > 3 > \frac{3\sqrt{3}}{2} = P_{ABCDEF},$$

што е противречност.

11. Во круг со дијаметар 5 земени се 10 произволни точки. Докажи дека меѓу овие 10 точки постојат две точки такви што растојанието меѓу нив е помало од 2.

Решение. Да го поделиме кругот на 9 делови како на цртежот десно. Малиот круг е со радиус 1, а останатите 8 делови се добиени со поделба на кружниот прстен со 4 прави кои полниот агол го делат на 8 агли од по 45° .

Очигледно најголемото растојание во внатрешноста на овие 8 делови е една од отсечките AB, BC или CA . Лесно се гледа дека $\overline{BC} = 1,5$. Од Питагоровата теорема за $\triangle ABD$ следува

$$\overline{AB}^2 = \left(\frac{5\sqrt{2}}{4} - 1\right)^2 + \left(\frac{5\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{29}{4} - \frac{5\sqrt{2}}{2} < 4,$$

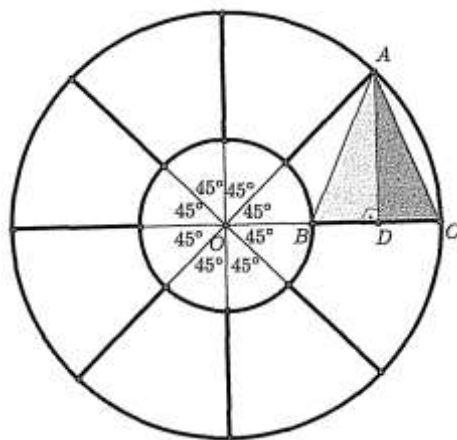
т.е. $\overline{AB} < 2$. Слично од Питагоровата теорема за $\triangle ADC$ следува

$$\overline{AC}^2 = \left(\frac{5}{2} - \frac{5\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \left(\frac{5\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{50}{4} - \frac{25\sqrt{2}}{4} < 4,$$

т.е. $\overline{AC} < 2$. Според тоа, во сите 9 делови растојанието меѓу било кои две точки е помало од 2. Сега од принципот на Дирихле следува дека еден од деловите содржи 2 од десетте избрани точки и растојанието меѓу нив е помало од 2.

12. Во табела со димензии $2n \times 2n$ се запишани природни броеви кои се помали или еднакви на 10, при што броевите кои се запишани во квадрати со заеднички теме се заемно прости. Докажи, дека постои број кој се појавува барем $\frac{2n^2}{3}$ пати.

Решение. Да ја поделиме табелата на n^2 квадрати со димензија 2×2 . Бидејќи секој од овие квадрати може да содржи најмногу 2 од броевите 2, 3, 4, 5, 8, 9 и 10, заклучуваме дека секој од овие квадрати со-



држи барем два од броевите 1, 5 и 7. Но, вакви квадрати има n^2 , па затоа броевите 1, 5 и 7 во табелата ќе се појават $2n^2$. Конечно, од принципот на Дирихле следува дека некој од броевите 1, 5 и 7 ќе се појави најмалку $\frac{2n^2}{3}$ пати.

13. Квадрат $n \times n$ е поделен на n^2 единечни квадратчиња. Некои од квадратчињата се обоени со црна боја, а останатите се обоени со бела боја. За секои два реда и секои две колони четирите квадратчиња кои се наоѓаат во тие два реда и тие две колони не се обоени со иста боја. Определете ја најголемата можна вредност на n .

Решение. Ќе докажеме дека бараната најголема вредност е $n = 4$. Табелата дадена на цртежот десно, квадратчињата означени со X се обоени во црна боја, докажува дека $n \geq 5$.

		X	X
	X	X	
X	X		
X			X

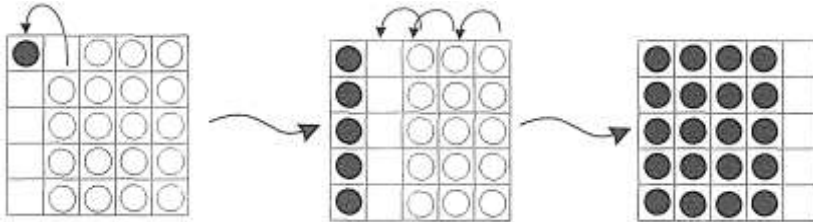
Нека претпоставиме дека квадрат со страна $n \geq 5$ го има саканото својство. Тогаш постои и квадрат со страна $n = 5$ со саканото својство. Од принципот на Дирихле следува дека барем три од квадратчињата во првиот ред се обоени со иста боја (нека тие квадратчиња се црни). Без ограничување на општоста можеме да земеме дека тоа се првите три квадратчиња. Ако во првите три квадратчиња на произволен ред од останатите четири реда има барем две црни квадратчиња, тогаш постојат два реда и две колони за кои четирите пресечни квадратчиња се еднобојни (црни), што е противречност.

Според тоа, меѓу првите три квадратчиња на секој ред освен првиот има најмногу едно црно квадратче, а останатите две се бели. Но, на три места две бели квадратчиња може да се распоредат на три различни начини, а имаме 4 редови, па затоа во два реда ќе имаме ист распоред на белите квадратчиња, што повторно е противречност.

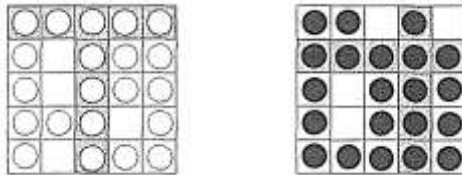
14. На табла со димензии 5×5 поставени се n бели жетони, секој во различно единечно поле на таблата. Илија добил идеја да ги обои сите жетони во црна боја почитувајќи го следново правило: зема бел жетон од таблата, го пребојува во црна боја, па потоа го става во празно поле на таблата такво што ниту едно негово соседно поле не содржи бел жетон (полињата се соседни ако имаат заедничка страна). Дали постои почетен распоред на n жетони таков што Илија може да ја реализира својата идеја, ако

а) $n = 20$ б) $n = 21$.

Решение. а) Ако гледано од лево жетоните се поставени во полињата од втората до петтата колона, тогаш почитувајќи го зададеното правило може да се пребојат жетоните. Земаме жетон од втората од лево колона, го боиме и го ставаме во истиот ред од првата колона. Потоа опишаната постапка последователно ја повторуваме со белите жетони во третата, четвртата и петтата колона (види цртеж).



б) Да претпоставиме дека постои распоред на 21 жетон од која според опишаното правило може да се добие распоред во кој сите жетони се црни. Од принципот на Дирихле следу-



ва дека во секој распоред постои колона со 5 жетони и постои ред со 5 жетони. Да ги штрафираме овие редови и колони и добиената фигура да ја наречеме крст (на пример, види цртеж десно). Според даденото правило, во секој распоред, на две соседните полиња на таблата не може да се наоѓаат разнобојни жетони, па заклучуваме дека секој крст е еднобоен. На почетокот, кога сите жетони се бели имаме бели крстови, а на крајот сите крстови се црни. Забележуваме дека било кои два крста имаат најмалку две заеднички полиња. Тоа значи дека дека со боење на едно поле не е можно од таблата да исчезне бел крст, а да се формира црн крст. Според тоа, во случај на 21 жетон не постои почетен распоред таков што Илија може да ја реализира својата идеја.

IV5 ИГРИ И СТРАТЕГИИ

1. Дадени се три купчиња со a, b и c бонбони, соодветно. Иван и Петар ја играат следнава игра: играчите влечат потези наизменично и играчот кој е на потег отстранува едно од купчињата и, а бонбоните од другите две купчиња ги дели на три купчиња, секое од кои содржи

најмалку по една бонбона. Играчот кој не може да направи три купчиња или ќе направи три купчиња со по една бонбона ја губи играта. Ако играта ја почнува Иван, определи ги сите тројки (a,b,c) за кои Петар има добитна стратегија.

Решение. Со A да го означиме играчот кој е на потег, а со B другиот играч. Нека n е бројот на бонбоните кои играчот A треба да ги подели. Со индукција по n ќе докажеме дека играчот A ја губи играта ако n е непарен број, а победува ако $n > 2$ е парен број. За 3 и 4 бонбони тврдењето е очигледно. Нека тоа е точно за $n \leq k$. Ако $k+1$ е парен број, тогаш A може да ја направи поделбата $1,1,k-1$ и B треба да направи купчиња кои заедно имаат k бонбони. Бидејќи k е непарен број, играчот B ја губи играта. Ако $k+1$ е непарен број, тогаш играчот A бонбоните може да ги раздели на три купчиња така што секое содржи непарен број бонбони или две купчиња да содржат парен и едно непарен број бонбони. Јасно, и во двата случаи постојат две купчиња кои заедно имаат непарен број бонбони поголем од 2. Од индуктивната претпоставка следува дека играта ја добива играчот B . Ќе докажеме, дека Петар има победничка стратегија само кога два од броевите a, b и c се еднакви на 1, а третиот број е парен (на пример $a=b=1$ и c е парен). Тогаш Иван треба да раздели вкупно $c+1$ бонбона и бидејќи $c+1$ е непарен број, тој ја губи играта. Во сите останати случаи во трите купчиња ќе има или два парни броја (и тогаш Иван ќе го отстрани купчето со непарен број бонбони и на три купчиња ќе раздели парен број бонбони) или две непарни купчиња, едното од кои содржи повеќе од една бонбона (и тогаш Иван ќе го отстрани купчето со парен број бонбони и на три купчиња ќе раздели парен број бонбони). Притоа, и во двата случаи бројот на бонбоните е поголем од 2.

2. Дадени се природни броеви M и $n \geq 3$. Двајца играчи A и B , (прв на потег е играчот A) последователно го заменуваат бројот M со еден од броевите $M-1, M-2$ или $M-n$. Играчот кој прв ќе добие негативен број ја губи играта. Определи го најголемиот природен број k за кој постои n и k последователни вредности на M , за секоја од кои играта ја добива играчот A .

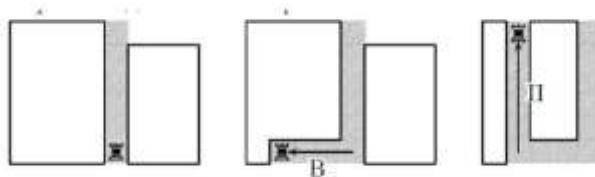
Решение. Ќе докажеме дека $k=3$. Нека претпоставиме дека постои n за кој има 4 последователни вредности на M (нека тоа се $t, t+1,$

$t+2, t+3$) за секоја од кои играта ја добива играчот A . Тоа значи дека за $M=t+2$ играчот A треба да го замени M со $M-n$ (бидејќи во спротивен случај бројот ќе биде t или $t+1$ и играта ќе ја добие играчот B), бидејќи при $M-n=t+2-n$ играта ја добива играчот кој не е на потег. Аналогно, за да играчот A ја добие играта кога $M=t+3$, тој треба M да го замени со $M-n$, бидејќи кога $M-n=t+3-n$ играта ја добива играчот кој не е на потег. Добивме две последователни вредности $t+2-n$ и $t+3-n$, за кои играта ја добива играчот кој не е на потег. Но, тоа не е можно, бидејќи при $t+3-n$ играчот кој е потег може бројот да го замени со $t+2-n$ (ако одземе од него 1) и да ја добие играта. Од добиената противречност следува дека $k \leq 3$. Останува да забележиме дека за $n=3$ вредностите $M=1, 2, 3$ се добитни за играчот A .

3. Павел и Васил играат игра на $n \times n, n > 1$ табла. На почетокот едно од аголните полиња е црно и на него се наоѓа шаховски топ, а останатите полиња се бели. Играта ја почнува Павел, а потоа играчите наизменично се менуваат. Во секој потез соодветниот играч го преместува топот хоризонтално или вертикално и во тој момент сите полиња, преку кои поминува топот (вклучувајќи го полето на кое потезот завршува) стануваат црни. Топот не може да преминува преку црни полиња или да застане на црно поле. Играта ја губи играчот кој не може да направи потез. Кој од играчите има добитна стратегија?

Решение. Една од добитните стратегии на Павел е следнава: секогаш да прави во моментот најдолг вертикален чекор (во случајов, при првиот потез ќе отиде по вертикала на другиот крај на таблата). Ќе докажеме, дека ова навистина води до победа.

Едно бело поле ќе го нарекуваме *достижно*, ако од моменталната положба на топот може да се достигне до тоа поле после неколку направени потези. Ќе докажеме, дека во секој момент Павел може да игра, така што после секој негов потез сите достижни полиња формираат не повеќе од два правоаголници и во секој од овие два правоаголници бројот на редовите е поголем од бројот на колоните. Притоа,



топот се наоѓа на поле соседно со аголно по хоризонтала поле на секој од правоаголниците. Ова е точно за првиот чекор на Павел.

Понатаму, ако претходно кажаното е исполнето после некој потез на Павел, Васил е принуден топот да го помести во еден од добиените правоаголници по хоризонтала. Нека тоа е правоаголник со r редици и c колони и нека хоризонталниот потез на Васил нека е за $v \leq c$ полиња. После тој потез полињата на другиот правоаголник (ако воопшто имало друг) веќе нема да бидат достижни.

Бидејќи $r \geq c + 1 \geq 2$, Павел има можност да направи вертикален потез. После тој потез достижните полиња ќе формираат правоаголници $r \times (c - v)$ и $(r - 1) \times (v - 1)$. Во секој од овие правоаголници редиците се повеќе од колоните, бидејќи $r > c > c - v$ и $r - 1 > c - 1 \geq v - 1$. При тоа топот е во поле, кое е соседно по хоризонтала со аголно поле на секој од правоаголниците.

Во случајов докажавме, дека Павел секогаш може да направи потез. Бидејќи бројот на белите полиња постојано се намалува, играта ќе заврши после конечен број потези, при што последниот потез ќе го направи Павел. Значи, Павел има победничка стратегија.

4. Дваесет монети се распоредени во круг. Двајца играчи последователно земаат по три монети, се додека не останат две монети. Ако преостанатите монети не се соседни, играта ја добива првиот играч, а ако се соседни, тогаш играта ја добива вториот играч. Кој од двајцата играчи има добитна стратегија?

Решение. Вториот играч има добитна стратегија и таа е следната.

Прво тој ги дели сите монети на парови од соседни монети, т.е. ако монетите се нумерираат последователно, на пример во насока на движењето на стрелките на часовникот, со броевите од 1 до 20, парови се на пример (1,2), (3,4), ..., (19,20). После тоа на секој потез на првиот играч вториот одговара на следниот начин.

- Ако првиот играч земе три монети од различни парови, тогаш вториот играч ги зема останатите три монети од истите парови.
- Ако првиот играч земе две монети од еден пар и една монета од друг пар, тогаш вториот играч ја зема останатата монета од вториот пар и било кои две монети од ист пар.

Така, на крајот после третиот чекор, последните две монети ќе бидат од еден ист пар, што значи дека тие ќе бидат соседни.

Забелешка. Ваквата стратегија е добитна за вториот играч ако бројот на монетите е од облик $6n + 2$, $n = 1, 2, 3, \dots$.

5. Даден е природен број k и бесконечна решетка од правилни шестаголници. Двајца играчи A и B наизменично играат на решетката, а прв почнува играчот A . На почетокот сите полиња на решетката се празни. Играчот A има право да избере две празни соседни полиња и да стави жетони на нив, а играчот B има право да отстрани еден од веќе поставените жетони. Играчот A победува ако успее во една линија да постави жетони во k последователни полиња. Определи ја најмалата вредност за k , за која играчот A не може да победи со конечен број чекори или докажи дека, таква најмала вредност не постои.

Решение. Ќе докажеме, дека ако играчот B избере правилна стратегија, тогаш минималната вредност на k , за која A не може да победи со конечен број чекори е еднаква на 6.

Прво ќе докажеме, дека за $k=6$ играчот B има стратегија со која ќе го оневозможи играчот A да победи со конечен број чекори. Решетката да ја обоиме “шаховски” со три бои и да избереме една од боите, на пример бела. Тогаш играчот B игра на следниот начин: го отстранува секој жетон кој што играчот A туку што го поставил на бело поле, а ако нема таков жетон, тогаш игра на произволен начин. Бидејќи во еден чекор A може да постави најмногу еден жетон на бело поле, оваа стратегија гарантира дека во секој момент на решетката ќе има најмногу едно поле со бел жетон. Но, секоја група од 6 последователни полиња на една линија содржи по две бели полиња (поточно, по две полиња од секоја боја), па затоа A не може да има добитна позиција.

Сега ќе докажеме, дека A секогаш може да стигне до 5 последователни жетони во еден ред. Да разгледаме “правоаголник” со ширина 2 полиња и должина 10 полиња. Нека A игра на тој “правоаголник”, додека е тоа можно, и да го разгледаме моментот, во кој A не може понатаму да игра на правоаголникот. Ако A се уште не победил, во правоаголникот за секои две соседни полиња има барем по еден жетон и нема 5 последователни жетони во еден ред. Ако во горниот ред има две низи од жетони со заедничка должина (т.е. $0+4, 1+3$ или $2+2$) и празно поле меѓу нив, тогаш A победува со чекор во тоа празно поле и полето над него. Во спротивен случај не е тешко да се провери (со разгледување на неколку едноставни случаи), дека постои жетон во горниот ред, чии соседни полиња се празни. Тогаш четирите соседи на тие две полиња од вториот ред имаат жетони и A победува со чекор на било кој од краевите на таа група.

6. За позитивен број n , двајца играчи A и B ја играат следнава игра: Даден е куп од s камчиња, играчите играат наизменично и A игра прв. Во секој потез играчот има право да земе или едно камче, или прост број на камчиња, или $nk, k \geq 1$ камчиња. Победник е оној кој ќе го земе последното камче. Под претпоставка дека играчите A и B играат перфектно, за колку вредности на s играчот A не може да победи?

Решение. Со k ќе го означиме бараниот број и нека $\{s_1, s_2, \dots, s_k\}$ се соодветните вредности на s . Секој s_i ќе го нарекуваме губитнички број, а секој друг ненегативен цел број е победнички број.

Јасно, секој број од видот $nk, k \geq 1$ е победнички број.

Да претпоставиме дека постојат два различни губитнички броеви $s_i > s_j$, кои се конгурентни по модул n . При својот прв потег, играчот A може да острани $s_i - s_j$ камчиња (бидејќи $n | (s_i - s_j)$), оставајќи куп со s_j камчиња за B . Последното противречи на фактот дека броевите s_i и s_j се губитнички. Сега од принципот на Дирихле следува дека постојат најмногу $n - 1$ губитнички броеви, т.е. $k \leq n - 1$.

Да претпоставиме дека постои цел број $r \in \{1, 2, \dots, n - 1\}$, таков што $mn + r$ е победнички број за секој $m \in \mathbb{N}_0$. Со u да го означиме најголемиот губитнички број (ако $k > 0$) или 0 (ако $k = 0$), и нека $s = \text{NZS}(2, 3, \dots, u + n + 1)$. Да забележиме дека сите броеви $s + 2, s + 3, \dots, s + u + n + 1$ се сложени. Нека земеме $m' \in \mathbb{N}_0$, така што

$$s + u + 2 \leq m'n + r \leq s + u + n + 1.$$

За да $m'n + r$ биде победнички број, мора да постои цел број p , кој е или еден, или прост број или број од видот $nk, k \geq 1$, таков што $m'n + r - p$ е губитнички број или 0, и притоа помал или еднаков на u . Бидејќи

$$s + 2 \leq m'n + r - u \leq p \leq m'n + r \leq s + u + n + 1,$$

добиваме p мора да биде сложен, што значи дека p е делив со n , на пример $p = qn$. Но, тогаш според претпоставката,

$$m'n + r - p = (m' - q)n + r$$

мора да биде победнички број. Ова противречи на претпоставката дека сите броеви $mn + r, m \in \mathbb{N}_0$ се победнички. Според тоа, сите ненулни класи по модул n содржат губитнички број.

Од претходно изнесеното следува дека постојат точно $n-1$ губитнички броеви.

7. Нека n е позитивен број. Двајца играчи, Марија и Горјан, ја играат следната игра:

- Марија избира n природни броеви, не секогаш различни
- Марија ги запишува сите по парови зборови на лист хартија и листот му го дава на Горјан (постојат $\frac{n(n-1)}{2}$ вакви зборови, не секогаш различни),
- Горјан победува ако само со едно погодување ги погоди n -те броеви кои на почетокот ги избрала Марија.

Дали Горјан може да победи во следниве случаи?

- а) $n=5$ б) $n=6$ в) $n=8$

Решение. а) Да. Нека $a \leq b \leq c \leq d \leq e$ се броевите избрани од Марија. Бидејќи сите броеви се појавуваат во добиените по парови зборови точно 4 пати, со собирање на сите 10 по парови добиени зборови и делење на резултатот со 4, Горјан го добива збирот $a+b+c+d+e$. Со одземање на најмалиот и најголемиот по парови збир $a+b$ и $d+e$ тој го добива c . Со одземање на c од вториот најголем по парови збир $c+e$ тој го добива e . Одземајќи го e од најголемиот по парови збир $d+e$ тој го добива d . На ист начин може да ги добие и a и b .

б) Да. Нека $a \leq b \leq c \leq d \leq e \leq f$ се броевите избрани од Марија. Бидејќи сите броеви се појавуваат во добиените по парови зборови точно 5 пати, со собирање на добиените 15 по парови зборови и делење на резултатот со 5, Горјан ја добива збирот $a+b+c+d+e+f$. Со одземање на најмалиот и најголемиот добиен по парови збир $a+b$ и $e+f$ тој го добива збирот $c+d$.

Со одземање на најмалиот и вториот најголем по парови збир $a+d$ и $d+f$ од $a+b+c+d+e+f$ тој го добива збирот $c+e$. На сличен начин може да го добие $b+d$. Тој ги користи нив за да ги добие $a+f$ и $b+e$.

Сега $a+d$, $a+e$, $b+c$ се трите најмали меѓу останатите шест добиени по парови зборови. Ако Горјан ги собере овие три пара и притоа од нив ги одземе $c+d$ и $b+e$ и добиениот резултат го подели со 2, тој го добива a . Потоа тој може да ги одреди останатите броеви.

в) Не. Ако Марија ги избере осумте броеви 1, 5, 7, 9, 12, 14, 16, 20 тогаш Горјан не може да биде сигурен дека точно ќе ги погоди осумте броеви, бидејќи броевите 2, 4, 6, 10, 11, 15, 17, 19 ги дават точно истите 28 по парови добиени зборови како и претходните броеви.

8. Дадени се две купчиња со по 2010 монети. Двајца играчи Иван и Горјан играат игра при што наизменично повлекуваат потези, а Иван игра прв. Во секој потез играчот или зема барем една монета од некое купче (може да земе колку сака вклучувајќи ги сите мнети од едно купче) или зема по една монета од секое од двете купчиња. Победува играчот кој последен ќе земе монета. Кој играч има победничка стратегија, ако и двајцата играат на најдобар можен начин?

Решение. Ќе докажеме дека Горјан има победничка стратегија ако вкупниот број монети е делив со 3 и разликата меѓу бројот на монетите во купчињата е најмногу 1. Ваквата состојба во играта ќе ја наречеме балансирана состојба. Да забележиме дека во еден потез не е можно да се премине од една во друга балансирана состојба. Стратегијата на Горјан се состои од враќање на Игор во балансирана состојба (почетната состојба исто така е балансирана).

Имаме два вида балансирана позиција и за секој од нив ќе го разгледаме потезот на Игор и одговорот на Горјан на овој потез. Првиот вид е кога во две купчиња имаме барем по еден жетон чиј збир е делив со 3.

- Ако Игор од едно купче земе $3n$ монети, тогаш Горјан од другото купче зема $3n$ монети.
- Ако Игор од едно купче земе $3n+1$ монета, тогаш Горјан од другото зема $3n+2$ монети.
- Ако Игор од едно купче земе $3n+2$ монета, тогаш Горјан од другото зема $3n+1$ монети.
- Ако Игор од двете купчиња земе по 1 монета, тогаш Горјан од едното купче зема 1 монета.

Вториот тип е кога во едно купче (ќе го наречеме прво) има $3m+1$ монета, а во второто има $3m+2$ жетони.

- Ако Игор од едно купче земе $3n$ монети, тогаш Горјан од другото купче зема $3n$ монети.
- Ако Игор од првото купче земе $3n+1$ ($n \leq m$) монета, тогаш Горјан од второто зема $3n+2$ монети.
- Ако Игор од второто купче земе $3n+2$ ($n \leq m$) монета, тогаш Горјан од првото зема $3n+1$ монети.

- Ако Игор од првото купче земе $3n+2$ ($n \leq m-1$) монета, тогаш Горјан од второто зема $3n+4$ монети.
- Ако Игор од второто купче земе $3n+1$ ($n \leq m$) монета, тогаш Горјан од првото зема $3n-1$ монети.
- Ако Игор од двете купчиња земе по 1 монета, тогаш Горјан од второто купче зема 1 монета

Ако игра на овој начин, Горјан постојано го враќа Игор во балансирана состојба. Бидејќи бројот на монетите после секој потез се намалува и бидејќи состојбата 0 монети во првото купче и 0 монети во второто купче е балансирана, заклучуваме дека после конечен број потези после потезот на Горјан нема да останат монети. Според тоа, Горјан има победничка стратегија.

IV6 МЕТОД НА ИНВАРИЈАНТИ

1. Во секој збор составен од буквите a и b можеме да ги извршиме следниве замени: $aba \rightarrow b, b \rightarrow aba, bba \rightarrow a, a \rightarrow bba$. Дали може со помош на овие замени од зборот $\underset{2003}{baa\dots a}$ да се добие зборот $\underset{2003}{aa\dots ab}$?

Решение. Ќе докажеме дека при примена на било која од дозволените операции бројот на буквите a на парни (соодветно непарни) позиции ја запазува парноста. Навистина, да ја разгледаме замената $aba \rightarrow b$, применета кон зборот $uabav$. Во новодобиениот збор ubv сите букви a од u остануваат на своите места, а сите букви a од v се поместиле за две позиции, па затоа за запазуваат парноста на позициите. Бришењето на две букви a од aba го намалува бројот на буквите a на парни или непарни позиции за два.

Аналогно, при примена на $bba \rightarrow a$ кон зборот $ubav$ го добиваме зборот uav и лесно се гледа дека својството е исполнето.

Бидејќи операциите $a \rightarrow aba$ и $a \rightarrow bba$ се обратни на претходно разгледаните, следува дека својството важи и за овие операции.

Во првиот збор $\underset{2003}{baa\dots a}$ бројот на буквите a на парни позиции е 1002,

а во вториот збор $\underset{2003}{aa\dots ab}$ тој број е 1001. Според тоа, со дозволените

операции од првиот збор не може да се добие вториот збор.

2. Правоаголник е поделен (расечен) на четири помали правоаголници. Потоа се зема произволен број од новодобиените правоаголници и секој од нив се дели на четири правоаголници итн. Дали е можно со повторување на наведената операција да се добијат 2006 правоаголници?

Решение. Во случајов не интересира вкупниот број правоаголници кој се добива со наведената трансформација, т.е. со избирање на произволен број правоаголници и расекување на секој од нив на четири нови правоаголници. Забележуваме дека со расекување на еден од избраните правоаголници на четири нови, вкупниот број правоаголници се зголемува за 3 (од еден правоаголник добиваме четири нови). Според тоа, ако во некој чекор имаме n правоаголници и ако избереме k правоаголници, после нивното расекување бројот на правоаголниците ќе биде $n+3k$. Понатаму, броевите n и $n+3k$ при делење со 3 даваат ист остаток, па бидејќи на почетокот имаме еден правоаголник заклучуваме дека со секоја примена на дозволената операција бројот на правоаголниците ќе биде од видот $1+3k$ и истиот има својство да при делење со 3 дава остаток 1. Од друга страна $2006=3\cdot 668+2$, што значи дека со повторување на наведената операција не може да се добијат 2006 правоаголници.

3. На таблата се запишани броевите 0, 1, 2, 1, 2 и 1. Дозволено е да се изберат кои било три броеви и секој од нив да се зголеми за 1. Дали е можно со повторување на оваа операција да се добијат шест еднакви броеви?

Решение. После секој чекор, независно од тоа кои три броеви се зголемени, збирот на сите запишани броеви се зголемува за 3, што значи дека остатокот при делење со 3 на збирот на сите шест броеви е инваријанта на опишаната трансформација. Бидејќи на почетокот збирот на броевите е 7 и овој број не е делив со 3, со секој следен чекор ќе добиваме броеви чиј збир не е делив со 3. Меѓутоа, збирот на шест еднакви броеви е делив со 3, па затоа со опишаната постапка не е можно да се донијат шест еднакви броеви.

4. Во еден чекор е дозволено подредената тројка цели броеви (a,b,c) да се замени со подредената тројка $(a-b,b-c,c-a)$. Докажи, дека од произволна почетна подредена тројка (a,b,c) , после најмалку три чекори никогаш не може да се добие подредена тројка во која ќе се појави некој од броевите 2017 или -2017 .

Решение. Нека е дадена подредената тројка (a, b, c) , $a, b, c \in \mathbb{Z}$. После првиот чекор ја имаме тројката $(a-b, b-c, c-a)$. После вториот чекор ја имаме тројката $(a-2b+c, b-2c+a, c-2a+b)$ и после треиот чекор ја добиваме тројката $(3(c-b), 3(a-c), 3(b-a))$. Според тоа, за произволна тројка после три чекори добиваме тројка во која сите броеви се деливи со 3. Јасно, во секој натамошен чекор сите броеви во добиените тројки ќе бидат деливи со 3. Но, броевите 2017 и -2017 не се деливи со 3, па затоа после најмалку три чекори никогаш не може да се добие подредена тројка во која ќе се појави некој од броевите 2017 или -2017 .

5. Седум пирати се на различна возраст. Заедно имаат 2009 златници и секој од нив има 1 златник повеќе од пиратот кој е непосредно помлад од него (освен најмладиот). Секој ден се избира пират кој на останатите пирати им дава по 1 златник. Определи го најголемиот можен број златници кои во даден момент може да ги има еден пират.

Решение. Нека најмладиот пират има x златници. Тогаш од условот на задачата следува $7x+1+2+\dots+6=2009$, т.е. $x=284$. Според тоа, на почетокот пиратите имаат 284, 285, ..., 290 златници. Броевите 284, 285, ..., 290 даваат различни остатоци по модул 7. Бидејќи во првиот потез бројот на златниците кај 6 пирати се зголемува за 1, а кај еден пират се намалува за 6, заклучуваме дека после овој потез броевите на златници на пиратите даваат различни остатоци по модул 7. Затоа некој пират ќе има најмногу златници кога останатите шест пирати ќе имаат 0, 1, 2, 3, 4 и 5 златници. Последното може да се постигне на следниов начин. Првиот пират ги дели своите златници се додека е тоа можно, потоа вториот, па третиот итн. до шестиот пират. Потоа овој циклус го повторуваме се додека тоа е можно. Бидејќи бројот на златниците кај седмиот пират постојано се зголемува, а бројот на златниците е конечен, тој ќе има најмногу златници ако и само ако во некој распоред останатите шест пирати имаат од 0 до 5 златници. Оттука следува дека максималниот број златници кои може да ги има

$$\text{еден пират е } 2009 - \sum_{i=0}^5 i = 1994.$$

6. Во еден чекор е дозволено подредената тројка реални броеви (a, b, c) да се замени со подредената тројка $(\frac{a+b}{\sqrt{2}}, \frac{a-b}{\sqrt{2}}, c)$. Дали после конечно

многу чекори од подредената тројка $(2, \sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ може да се добие подредената тројка $(1, \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$.

Решение. Забележуваме дека при дадената трансформација на тројката (a, b, c) во тројката $(\frac{a+b}{\sqrt{2}}, \frac{a-b}{\sqrt{2}}, c)$ важи

$$(\frac{a+b}{\sqrt{2}})^2 + (\frac{a-b}{\sqrt{2}})^2 + c^2 = \frac{a^2+2ab+b^2}{2} + \frac{a^2-2ab+b^2}{2} + c^2 = a^2 + b^2 + c^2,$$

т.е. при дадената трансформација збирот на квадратите на броевите во почетната и новата тројка не се менува. Меѓутоа,

$$2^2 + (\sqrt{2})^2 + (\frac{1}{\sqrt{2}})^2 = \frac{13}{2} \neq 6 + 2\sqrt{2} = 1^2 + (\sqrt{2})^2 + (1 + \sqrt{2})^2,$$

што значи дека после конечно многу чекори од тројката $(2, \sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ не може да се добие тројката $(1, \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$.

7. На еден остров живеат 2016 камелеони. Во еден момент имало 1007 сини, 402 црвени и 607 жолти камелеони. Ако се сретнат два истобојни камелеони, тогаш тие не ја менуваат сојата боја, но ако се сретнат два разнобојни камелеони, тогаш тие истовремено својата боја ја менуваат во преостанатата трета боја (на пример, син и црвен камелеон стануваат жолти итн.). Дали е можно после извесно време сите камелеони да бидат истобојни.

Решение. Нека во даден момент имаме a - сини, b - црвени и c - жолти камелеони. Тогаш подредената тројката (a, b, c) може да премине во некоја од следниве подредени тројки

$$(a-1, b-1, c+2), (a-1, b+2, c-1) \text{ или } (a+2, b-1, c-1).$$

Забележуваме дека при секоја промена на боите на камелеоните разликите на бројот на камелеоните со различни бои се инваријантни по модул 3. Имено,

$$a-1-(b-1) \equiv a-b \pmod{3},$$

$$a-1-(c+2) \equiv a-c \pmod{3},$$

$$b-1-(c+2) \equiv b-c \pmod{3} \text{ итн.}$$

На почетокот ја имаме тројката $(1007, 402, 607)$, за која важи

$$1007-402 \equiv 2 \pmod{3}, 1007-607 \equiv 1 \pmod{3} \text{ и } 607-402 \equiv 1 \pmod{3},$$

а додека за тројките $(2016, 0, 0)$, $(0, 2016, 0)$, $(0, 0, 2016)$ важи

$$2016-0 \equiv 0-0 \equiv 0-2016 \equiv 0 \pmod{3},$$

т.е. не е можно после извесно време сите камелеони да бидат истобојни.

8. Со подредени парови природни броеви на Илија му е дозволено да ги реализира само следниве операции:

1) од подредениот пар (a, b) да го добие подредениот пар $(a+1, b+1)$,

2) ако a и b се парни броеви, тогаш од подредениот пар (a, b) може да го добие подредениот пар $(\frac{a}{2}, \frac{b}{2})$, и

3) од подредените парови (a, b) и (b, c) може да го добие подредениот пар (a, c) .

Дали е можно, со помош на дозволените операции Илија од подредениот пар $(5, 19)$ да го добие подредениот пар $(17, 2016)$. Во постапката Илија може да ги користи само претходно добиени подредени парови.

Решение. При првата операција $(a, b) \rightarrow (a+1, b+1)$, имаме

$$(a+1) - (b+1) = a - b. \quad (1)$$

При втората $(a, b) \rightarrow (\frac{a}{2}, \frac{b}{2})$ имаме

$$\frac{a}{2} - \frac{b}{2} = \frac{a-b}{2}, \quad (2)$$

и при третата операција $(a, b), (b, c) \rightarrow (a, c)$ имаме

$$a - c = (a - b) + (b - c). \quad (3)$$

Нека е даден подреден пар (x, y) . Ако $p \neq 2$ е прост делител на $x - y$, тогаш од (1), (2) и (3) следува дека $p \mid a - b$ каде (a, b) е било пар кој со помош на операции 1) 2) и 3) е добиен од парот (x, y) .

За подредениот пар $(5, 19)$ важи $7 \mid 5 - 19$, па ако може да се добие подредениот пар $(17, 2016)$ треба да важи $7 \mid 17 - 2016$, што не е точно.

Според тоа, со помош на дозволените операции Илија од подредениот пар $(5, 19)$ не може да го добие подредениот пар $(17, 2016)$.

9. На табла е запишана конечна низа од броевите 1 и 2. Во еден чекор дозволено е да избришеме два броја, а наместо нив на таблата запишуваме 1, ако избраните броеви се еднакви и 2 ако избраните броеви не се еднакви. Ако постапката ја реализираме се додека е можно, кој број на крајот ќе биде запишан на таблата?

Решение. Во низата секој член кој е еднаков на бројот 2 ќе го замениме со бројот -1 и на новодобиената низа ја применуваме истата постапка.

Нека во некој момент на таблата имаме a броеви еднакви на $+1$, и b броеви еднакви на -1 . Тогаш производот на сите броеви е еднаков на

$(-1)^b$. После бришењето на два броја со ист знак или два броја со различни знаци, производот на новодобиените броеви ќе биде еднаков на

$$1^{a-1}(-1)^b = (-1)^b, 1^{a+1}(-1)^{b-2} = (-1)^{b-2} = (-1)^b \text{ или} \\ 1^{b-1}(-1)^{b-1}(-1) = (-1)^b$$

што значи дека производот на броевите на таблата не се менува после било кој чекор, т.е. тој е инваријантен во однос на разгледуваната трансформација. Според тоа, во почетната задача инваријанта е парен број двојки, па затоа ако во почетната низа бројот на двојките е парен, тогаш последниот запишан број е 1, а во спротивно тоа е бројот 2.

10. За произволен квадратен тринوم $ax^2 + bx + c$, каде $a, b, c \in \mathbb{R}$ се дозволени следниве операции:

- 1) a и c да ги заменат местата и
- 2) променливата x може да се замени со $x + t$, каде t е произволен реален број.

Дали со помош на овие операции од полиномот $x^2 - x - 2$ може да се добие полиномот $x^2 - 2x - 1$?

Решение. За произволен полином $ax^2 + bx + c$, каде $a, b, c \in \mathbb{R}$ да го разгледаме изразот $D = b^2 - 4ac$.

Со операција 1) го добиваме полиномот $cx^2 + bx + a$, за кој соодветниот израз е $D = b^2 - 4ac$, т.е. тој е инваријантен во однос на оваа операција.

Со операцијата 2) го добиваме полиномот

$$a(x+t)^2 + b(x+t) + c = ax^2 + (2at + b)x + at^2 + bt + c,$$

каде $t \in \mathbb{R}$, за кој соодветниот израз е

$$D = (2at + b)^2 - 4a(at^2 + bt + c) = b^2 - 4ac,$$

т.е. тој е инваријантен во однос на оваа операција.

Според тоа, при реализирање на дозволените операции изразот D е инваријантен. Меѓутоа, за полиномот $x^2 - x - 2$ имаме

$$D_1 = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 9,$$

а за полиномот $x^2 - 2x - 1$ имаме

$$D_2 = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 8$$

што значи дека со помош на овие операции од полиномот $x^2 - x - 2$ не може да се добие полиномот $x^2 - 2x - 1$.

11. Шаховска табла со димензии 8×8 е обоена на стандарден начин. Во еден чекор можеме да ги пребоиме:

а) Сите полиња на произволно избран ред или колона.

б) Сите полиња на произволно избран квадрат со димензии 2×2 .

Дали после конечен број на чекори, може на таблата да остане само едно црно поле.

Решение. а) Со пребојување на произволен ред (колона) со x црни и $8 - x$ бели полиња добиваме $8 - x$ црни и x бели полиња. Според тоа, бројот на црни полиња се менува за $|(8 - x) - x| = |8 - 2x|$ т.е. за парен број. Последното значи, дека во секој парноста на бројот на црните полиња не се менува. Бидејќи на почетокот имаме 32 црни полиња, заклучуваме дека после секој чекор ќе има парен број црни полиња, што значи дека после конечен број чекори не може да остане само едно црно поле.

б) Постапи аналогно на решението под а).

12. Правоаголна таблица има 30 редици и 67 колони. Во секое квадратче на таблицата е запишан еден ист природен број. Соседни квадратчиња ги нарекуваме квадратчињата кои имаат заедничка страна. Ја реализираме следнава операција: избираме произволно квадратче и ако тоа има парен број соседни квадратчиња, тогаш додаваме 1 на секој од броевите запишани во нив, а ако има непарен број соседни квадратчиња, додаваме 2 на секој од броевите запишани во нив. Дали може после повеќекратно повторување на оваа операција бројот на парните и непарните броеви запишани во таблицата да е еднаков?

Решение. Има три вида квадратчиња – со 2 соседни (четирите аголни квадратчиња), со 3 соседни (квадратчињата кои се наоѓаат на страните на таблицата) и со 4 соседни (квадратчињата кои се во внатрешноста на таблицата). При реализирање на операцијата соодветно додаваме 2, 6 или 4. Оттука следува дека парноста на збирот на броевите запишани во таблицата не се менува. Сега, ако на почетокот сите броеви запишани во таблицата се еднакви на a , тогаш нивниот збир ќе биде еднаков на $30 \cdot 67a = 2010a$. Значи, збирот на сите броеви е парен и тој ќе биде парен после секоја реализација на операцијата. Бројот на квадратчињата во таблицата е 2010 и ако може да се постигне сака-

ната цел, тогаш точно 1005 ќе содржат парен број и 1005 ќе содржат непарен број. Но, збир на 1005 непарни и 1005 парни броеви е непарен број, што значи дека не може да се достигне саканата цел.

IV7 БОЕЊЕ НА БРОЕВИ, ТОЧКИ И ОТСЕЧКИ

1. Природните броеви се обоени во две бои.

а) Докажи, дека постојат бесконечно многу парови од различни еднобојни броеви x и y за кои бројот $x + y$ е точен квадрат.

б) Дали постојат два различни еднобојни броеви x и y чиј збир е степен на бројот 2.

Решение. а) За секој природен број $x > 1$ е точно равенството

$$(2x+1)^2 - (2x^2 - 2) + (2x+2)^2 - (2x^2 - 2) = (2x+3)^2. \quad (1)$$

Ако $(2x+1)^2 - (2x^2 - 2)$ или $(2x+2)^2 - (2x^2 - 2)$ е во бојата на $2x^2 - 2$, тогаш го имаме потребното претставување (првиот и третиот или вториот и третиот). Во спротивно,

$$(2x+1)^2 - (2x^2 - 2) \text{ и } (2x+2)^2 - (2x^2 - 2)$$

се еднобојни броеви и претставувањето е дадено со (1).

б) Не! Да ги обоиме сите броеви од видот $2^m(4t+3)$ во боја A , а сите броеви од видот $2^n(4k+1)$ во боја B . Да претпоставиме дека збир на два различни броја со боја A е степен на бројот 2. Тогаш

$$2^{m_1}(4t_1+3) + 2^{m_2}(4t_2+3) = 2^l.$$

Ако $m_1 \neq m_2$, добиваме противречност по модул 2, а ако $m_1 = m_2$, тогаш $2[2(t_1+t_2+1)+1]$ треба да е степен на бројот 2, што не е можно. Аналогно се докажува дека збир на два различни броја обоени во бојата B не е степен на бројот 2.

2. Реалните броеви поголеми од 1 се обоени во две бои, при што се искористени и двете бои. Докажи, дека постојат реални броеви a и b , за кои броевите $a+b$ и ab се обоени во различни бои.

Решение. При боењето се искористени и двете бои, па затоа постојат броеви $d_1 > 1$ и $d_2 > 1$ такви што d_1 е обоен во првата, а d_2 во втората боја. Јасно, постојат a и b такви што $d_1 = ab$ и нека $x = a + b > 1$.

Тогаш $x \geq 2\sqrt{d_1}$, па ако тврдењето на задачата не е точно, добиваме дека сите броеви кои се поголеми или еднакви на $2\sqrt{d_1}$ се обоени со првата боја. Аналогно, ако тврдењето на задачата не е точно се добива дека сите броеви кои се поголеми или еднакви на $2\sqrt{d_2}$ се обоени со втората боја. Според тоа, сите броеви кои се поголеми или еднакви на $\max\{2\sqrt{d_1}, 2\sqrt{d_2}\}$ треба да се обоени и во двете бои, што е противречност.

3. Секоја точка во рамнината е обоена во црвена или плава боја. Докажи дека постои триаголник со должини на страни 1,2 и $\sqrt{3}$ чии темиња се еднобојни.

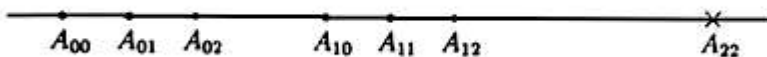
Решение. Барем две од темињата на рамностран $\triangle ABC$ со страна 2 се еднобојни. Нека тоа се темињата B и C и нека тие се црвени. Ако D и E се средините на страните BC и CA , тогаш секој од триаголниците BCD и CBE има должини на страни 1,2 и $\sqrt{3}$, што значи дека ако некоја од точките D или E е црвена, тогаш постои триаголник со саканото својство. Нека D и E се плави. Ако D' и E' се симетричните точки соодветно на D и E во односна на страната BC , тогаш аналогните разгледувања покажуваат дека точките D' и E' се исто така сини. Но, тогаш $\triangle D'DE$ е со саканото својство.

4. Дали е можно во рамнината да се обележат 10 црвени, 10 сини и 10 зелени точки (сите различни) така што се исполнети условите:
- за секоја црвена точка A постои сина точка која е поблиска до точката A од било која зелена точка,
 - за секоја сина точка B постои зелена точка која е поблиска до точката B од било која црвена точка, и
 - за секоја зелена точка C постои црвена точка која е поблиска до точката C од било која сина точка.

Решение. Нека претпоставиме дека бараното обележување на точки е можно. Меѓу сите парови различно обоени точки да избереме еден од оние со најмало растојание меѓу точките. Нека се тоа црвена точка C и сина точка S . Тогаш од условот на задачата постои зелена точка Z таква што $\overline{SZ} < \overline{SC}$, што е противречност. Од добиената противречност следува дека во рамнината не може да се обележа 10 црвени, 10 сини и 10 зелени точки такви што се исполнети бараните услови.

5. Права е обоена во две бои. Докажи, дека постои отсечка чии крајни точки и средина се монохроматски (обоени во иста боја).

Решение. *Прв начин.* На правата земаме девет тројки на точки чии координати имаат вид $(x, x+1, x+2)$, (за девет различни вредности на



x). Секоја тројка на точки може да се обои во две бои на $2^3 = 8$ различни начини и како имаме 9 тројки на точки, од принципот на Дирихле следува дека постојат две тројки кои се обоени на ист начин. Од друга страна во секоја тројка постојат две монохроматски точки. На таков начин добивме четири точки A_{00}, A_{01}, A_{10} и A_{11} кои се монохроматски, да кажеме во бела боја, при што $\overline{A_{00}A_{01}} = \overline{A_{10}A_{11}}$ (види цртеж).

Нека точките A_{02} и A_{12} ги избереме така што точките A_{01} и A_{11} се средини на отсечките $A_{00}A_{02}$ и $A_{10}A_{12}$, соодветно. Ако било која од овие точки е бела, тогаш бараната тројка точки е најдена. Ако и двете точки A_{02} и A_{12} се црни, тогаш избираме точка A_{22} така што точката A_{12} е средина на отсечката $A_{02}A_{22}$. Ако точката A_{22} е црна, тогаш бараната тројка е (A_{02}, A_{12}, A_{22}) , а ако е бела, тогаш бараната тројка е (A_{00}, A_{11}, A_{22}) .

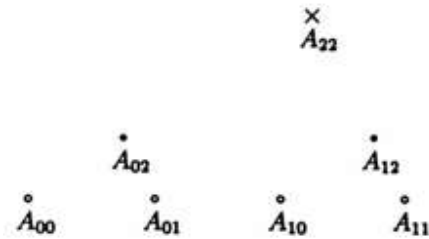
Втор начин. Нека AB е отсечка чии крајни точки се обоени во бела боја. Нека D и E се точки од правата такви што A е меѓу D и B , B е меѓу A и E и важи $\overline{AD} = \overline{AB} = \overline{BE}$. Тогаш ако некоја од точките D и E е обоена во бела боја, бараните точки се A, B и таа точка. Нека точките D и E се обоени во црна боја. Средината F на отсечката AB е средина и на отсечката DE , и F е обоена или во бела или во црна боја. Во првиот случај точките A, B и F се бараните точки, а во вториот случај тоа се точките D, E и F .

6. Рамнина е обоена во две бои. Докажи, дека постои триаголник кој е сличен на даден триаголник и чии темиња се монохроматски.

Решение. *Прв начин.* Во рамнината да разгледаме произволна права и на неа да најдеме четири монохроматски точки A_{00}, A_{01}, A_{10} и A_{11} , распоредени како во првиот начин од решението на задача 5, да кажеме сите се обоени во бела боја. Точките A_{02}, A_{12} и A_{22} ги избираме така што триаголниците

$A_{00}A_{01}A_{02}, A_{10}A_{11}A_{12}, A_{02}A_{12}A_{22}$

се слични на дадениот триаголник, при што распоредот на темињата е суштествен (цртеж десно). Јасно, ако една од точките A_{02}, A_{12} и A_{22} е бела, тогаш еден од триаголниците



$A_{00}A_{01}A_{02}, A_{10}A_{11}A_{12}$ и $A_{00}A_{11}A_{22}$

го задоволува условот на задачата, а во спротивно тоа е триаголникот $A_{02}A_{12}A_{22}$.

Втор начин. Според задача 5 постојат три бели точки A, B и C такви што B е средина на AC . Од иста страна на правата AC конструираме триаголници ABD, BCE и ACF слични на дадениот триаголник. Можни се следниве случаи:

- 1) Ако една од точките D, E или F е бела, тогаш бараниот триаголник е ABD, BCE или ACF , соодветно.
- 2) Ако трите точки D, E или F се црни, тогаш бараниот триаголник е DEF .

7. Секоја од дијагоналите на правилен 2014-аголник е обоена во некоја од дадени n бои. Познато е дека, секои две дијагонали, кои се сечат во внатрешна точка, се обоени во различни бои. Кој е најмалиот n за кој тоа е можно?

Решение. Да ја наречеме *главна дијагонала* секоја дијагонала, која поврзува спротивни темиња на 2014-аголникот. Бидејќи има 1007 главни дијагонали и секоја од нив се сече со сите останати во центарот на 2014-аголникот, потребни се барем 1007 бои.

Да ги обоиме главните дијагонали во 1007 бои, а секоја од останатите дијагонали да ја обоиме во бојата на главната дијагонала, со која има заедничко теме и тоа заедничко теме, второто теме на нашата дијагонала и второто теме на главната дијагонала се распоредени во овој редослед во насока на движењето на стрелките на часовникот. Лесно се гледа дека ова боење е дефинирано коректно и го има саканото својство.

8. Докажи, дека меѓу секои шест ирационални броеви може да се избераат три броја a, b, c такви што броевите $a+b, b+c, c+a$ се ирационални.

Решение. Прво ќе ја докажеме следнава лема.

Лема. Дадени се шест точки во рамнината, меѓу кои нема три колинеарни. Ако сите отсечки, чии крајни точки се шесте дадени точки ги обоиме во две бои, тогаш постои барем еден монокроматски триаголник (страните на триаголникот се обоени со иста боја).

Доказ. Нека отсечките се обоени во сина и црвена боја. Да земеме една од дадените точки. Оваа точка со останатите точки формира 5 отсечки. Од принципот на Дирихле следува дека постојат најмалку три еднобојни отсечки. Нека овие три отсечки се обоени во сина боја. Ако било која од останатите отсечки чии крајни точки се крајните точки на трите сино обоените отсечки е обоена сино, тогаш имаме монокроматски (син) триаголник. Во спротивно, трите отсечки чии крајни точки се крајните точки на трите сино обоени отсечки се обоени црвено и тогаш повторно имаме монокроматски (црвен) триаголник. ■

Да ги обоиме отсечките кои поврзуваат два ирационални броја со сина боја, ако збирот на тие два броја е ирационален број. Ако збирот на два такви броја е рационален број, отсечката ја боиме со црвена боја. Според лемата, секогаш постои барем еден монокроматски триаголник. Ако триаголникот е син, тогаш тврдењето е докажано. Нека монокроматскиот триаголник е црвен. Нека рабовите на тој триаголник се $a+b, b+c, c+a$. Сега да го разгледаме изразот

$$(a+b) + (b+c) - (c+a) = 2b.$$

Оттука следува дека b е рационален број, што е противречност. Од добиената противречност следува дека броевите $a+b, b+c, c+a$ се ирационални.

9. Во целобројна решетка е даден 10×10 квадрат. Единечните отсечки на квадратот се обоени во неколку бои. Познато е дека контурата на секој квадрат со страни на целобројната решетка е обоена најмногу во две бои. (Не е задолжително таков квадрат да се содржи во дадениот.) Определи го максималниот број искористени бои?

Решение. Прво ќе докажеме дека за боење кое соодветствува на условите на задачата се потребни не повеќе од 11 бои.

Контурата на дадениот квадрат е обоена во најмногу две бои. Овие бои (или оваа боја) да ги наречеме *стари (стара)*, а останатите бои да ги наречеме *нови*. Доволно е да докажеме дека се потребни најмногу 9 нови бои.

Лема 1. На секоја хоризонтална (вертикална) права има најмногу една нова боја.

Доказ. Да разгледаме хоризонтална (вертикална) отсечка од дадениот квадрат, која поврзува две спротивни страни. Оваа отсечка е страна на 10×10 квадрат, кој содржи и отсечки од дадениот квадрат, кои се обоени со најмалку една од старите бои. Според тоа, на неговата контура, во случајов на разгледуваната отсечка, може да има најмногу една нова боја. ■

Лема 2. Ако вертикална и хоризонтална единечна отсечка се обоени со нови бои, тогаш тие бои се исти.

Доказ. Не е тешко да се види дека постои квадрат со страни на целобројната решетка, кој ги содржи рагледуваните две отсечки и дел од контурата на дадениот квадрат. Тогаш на неговата контура, што значи и на двете отсечки може да има најмногу една нова боја. ■

Од Лема 2 следува, дека ако постојат вертикални и хоризонтални отсечки, обоени во нови бои, тогаш имаме најмногу една нова боја. Понатаму, ако новите бои се само на вертикалните (или само на хоризонталните) отсечки, тогаш од лема 1 следува дека може да имаме најмногу 9 нови бои.

Пример, во кој се искористени точно 11 бои е следниов: единечните отсечки кои ги поврзуваат темињата (i, i) и $(i+1, i)$ ги боиме во бојата $i = 1, 2, \dots, 10$, а сите останати се обоени во 11-тата боја. Лесно се гледа дека контурата на произволен квадрат со страни на целобројната решетка содржи најмногу една отсечка со боја од 1 до 10, па затоа содржи најмногу две бои.

10. Марко во конвексен $2n-1$ -аголник последователно повлекува дијагонали така што секоја нова дијагонала сече во внатрешна точка најмногу една од претходно повлечените дијагонали. Колку дијагонали најмногу може да повлече Марко?

Решение. *Прв начин.* Ќе докажеме дека во конвексен n -аголник максималниот број дијагонали кои може да се повлечат на опишаниот начин е $2n-6$. Нека $A_1 A_2 \dots A_n$ е даден многуаголник. Тогаш Марко може последователно да ги повлече дијагоналите $A_2 A_4, A_3 A_5, \dots, A_{n-2} A_n$, а потоа $A_1 A_3, A_1 A_4, A_1 A_5, \dots, A_1 A_{n-1}$, што значи вкупно $2n-6$ дијагонали.

Сега со индукција ќе докажеме дека на опишаниот начин во конвексен n -аголник не може да се повлечат повеќе од $2n-6$ дијагонали.

Јасно, тврдењето важи за $n = 3$. Да ја разгледаме постапката на повлекување на дијагонала во многуаголникот $A_1A_2...A_n$. Нека, за определеност A_1A_k е последната повлечена дијагонала. Според условот таа во внатрешна точка сече најмногу една од претходно повлечените дијагонали и ако има таква дијагонала да ја означиме со d .

Да забележиме дека сите дијагонали освен A_1A_k и евентуално d се повлечени или во k -аголникот $A_1A_2...A_k$ или во $(n+2-k)$ -аголникот $A_kA_{k+1}...A_nA_1$, при што во секој од овие многуаголници е запазен опишаниот начин. Според индуктивната претпоставка во случајов имаме најмногу $(2k-6) + (2(n+2-k)-6) = 2n-8$ дијагонали. Ако ги земеме предвид и дијагоналите A_1A_k и d , добиваме дека имаме најмногу $2n-8+2 = 2n-6$ дијагонали, што и требаше да докажеме.

Втор начин. Повлечените дијагонали ќе ги обоиме во црвено и сина боја на следниов начин. Првата дијагонала ја боиме во сино. Ако некоја веќе повлечена дијагонала пресекува сина дијагонала, тогаш неа ја боиме во црвено, а во спротивно во сино.

Ќе докажеме дека во секоја боја се обоени најмногу $n-3$ дијагонали, па затоа вкупно се повлечени најмногу $2(n-3)$ дијагонали. Навистина, нека имаме k еднобојни дијагонали. Бидејќи тие немаат заеднички точки, заклучуваме дека тие го делат n -аголникот на $k+1$ многуаголници. Секој од овие многуаголници има барем три страни, па затоа вкупниот број S на нивните страни е помал или еднаков на $3(k+1)$. Од друга страна, страните на тој многуаголник се повлечените дијагонали (секоја броена по двапати) и страните на дадениот n -аголник (броени по еднаш). Значи, $S = n + 2k$. Значи, $n + 2k \geq 3(k+1)$ т.е. $k \leq n-3$, што и требаше да докажеме.

11. Во рамнината се дадени 109 точки такви што меѓу нив нема три точки кои лежат на една права. Секоја точка е обоена во една од седум можни бои и во секоја боја се обоени најмалку осум точки. За еден триаголник ќе велиме дека е еднобоен ако сите темиња му се обоени со иста боја. Докажи, дека со дадените точки се определени најмалку 2015 еднобојни разностранни триаголници.

Решение. Ако има n точки обоени со иста боја тогаш тие формираат $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ триаголници. На симетралата на секоја пар од дадените

точки може да има најмногу две од дадените точки, па затоа рамно-
краките триаголници кои се обоени во таа боја се најмногу

$$\frac{n(n-1)}{2} \cdot 2 = n(n-1).$$

Според тоа, имаме најмалку

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{6} - n(n-1) = \frac{n(n-1)(n-8)}{6}$$

разностранни триаголници со темиња обоени во таа боја. Да означиме

$$S(n) = \frac{n(n-1)(n-8)}{6}.$$

Нека претпоставиме дека водруга боја се обоени m точки и $n-1 > m$.
Ќе докажеме дека

$$S(n) + S(m) > S(n-1) + S(m+1).$$

Со еквивалентни трансформации добиваме

$$S(n) - S(n-1) > S(m+1) - S(m)$$

$$n(n-1)(n-8) - (n-1)(n-2)(n-9) > (m+1)m(m-7) - m(m-1)(m-8)$$

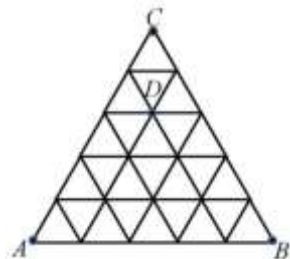
$$(n-1)(n-6) > m(m-5).$$

Последното неравенство непосредно следува од тоа што $n-1 > m > 0$
и $n-6 > m-5$. Според тоа, доволно е тврдењето да го докажеме во
случај кога броевите точки кои се обоени во различни бои се разли-
куваат најмногу за 1. Бидејќи $109 = 7 \cdot 15 + 4$, во тој случај ќе имаме
по 16 точки обоени во 4 од боите и по 15 точки обоени во останатите
три бои. Сега тврдењето следува од тоа што

$$S(15) = 245, S(16) = 320 \text{ и } 4 \cdot 320 + 3 \cdot 245 = 2015$$

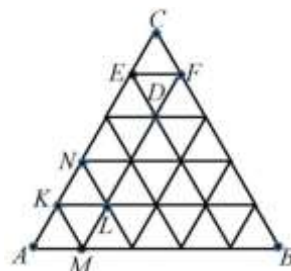
12. Рамностран триаголник ABC со должина на
страна n ($n \geq 3$), со прави кои се паралелни

на страните на $\triangle ABC$, е поделен на n^2 рам-
ностранни триаголници со должина на страна
1. Во темињата на единечните триаголници
се запишани броеви. Во еден чекор се зголе-
муваат или се намалуваат за 1 броевите во
темињата на ромб, формиран од два единеч-
ни триаголници со заедничка страна. На почетокот во темињата A , B ,
 C и D се запишани единици, а во сите останати темиња се запишани
нули. Дали е можно со повторување на чекорите броевите во сите те-
миња на единечните триаголници да бидат нули?



Решение. Можно е, ако n е непарен број. Да ги намалиме за 1

броевите запишани во темињата на ромбот $AMLK$ (цртеж десно). После тоа да ги зголемиме за 1 броевите во темињата на ромбот $KMLN$. На тој начин единицата од A се преместува во N а во сите останати темиња ќе бидат запишани почетните вредности. Бидејќи $n-1$ е парен број, после $\frac{n-1}{2}$ парови чекори единицата од A ќе се



премести во E . После уште толку чекори единицата од B ќе се премести во F . Сега е доволно за 1 да ги намалиме броевите во темињата на ромбот $EDFC$.

Ако n е парен број, не е можно со повторување на чекорите броевите во сите темиња на единечните триаголници да станат нули. За ова да го докажеме, ќе ги обоиме во четири бои темињата на единечните триаголници така, што темињата на секој ромб од разгледуваниот вид се разнобојни. Тоа може да го направиме на следниов начин: ги боиме темињата по страната AC последователно со црвена и сина боја, почнувајќи со црвена боја од A ; ги боиме темињата по отсечката MF последователно со зелена и жолта боја, почнувајќи со зелена боја од M ; за следната надесно паралелна отсечка ги боиме темињата по неа одново последователно со црвена и сина боја, тргнувајќи со црвена боја од точката на AB десно од M итн., додека стигнеме до темето B , кое сигурно ќе биде црвено. Бидејќи темињата A , B и C се црвени, а темето D е зелено, заклучуваме дека разликата на почетниот збир на броевите запишани во црвените темиња на единечните триаголници и збирот на броевите запишани во зелените темиња на единечните триаголници е еднаква на 2. Очигледно при ова бојење таа разлика се запазува после секој чекор и затоа не може да добиеме нули во сите темиња.

13. На табла има n шајки секоја со секоја поврзана со конец. Секој конец е обоен со една од n дадени различни бои. За секои три различни бои, постојат три шајки поврзани меѓу себе со конци во овие три различни бои. Може ли n да биде
а) 6? б) 7?

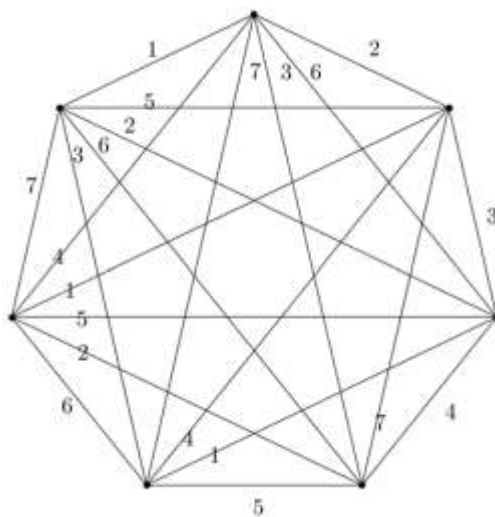
Решение. а) Одговорот е не.

Да претпоставиме дека тоа е можно. Да земеме една боја, да речеме сина. Секој син конец е страна на 4 триаголници формирани во теми-

ња за дадена точка. Бидејќи постојат $\binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ парови на бои, во кои немаме сина, и за секој пар на бои заедно со сината боја постои триаголник со конци во овие бои, можеме да заклучиме дека постојат најмалку три сини конци (во спротивно бројот на триаголници со сини конци како една страна ќе биде најмалку $2 \cdot 4 = 8$, што е противречност). Истото е точно за секоја друга боја, па сите заедно имаат $6 \cdot 3 = 18$ конци, но ние имаме само $\binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ конци.

б) Одговорот е да.

Да ги распоредиме шајките така да секоја од нив е теме на правилен седумаголник и да ја обоиме секоја негова страна со различна боја. Сега да ја обоиме секоја секоја дијагонала на овој седумаголник со боја која е иста со неговата страна која е паралелна на дијагоналата. Може директно да се провери дека тројка од бои се појавува кај секој триаголник (заради симетрија, доволно е да се провери само тројката која ја содржи првата боја).



Забелешка. Аргументот во а) може да се примени на секој парен број n . Аргументот во б) може да се примени за секој непарен број $n = 2k + 1$ како што следи: прво означи ги шајките со $0, 1, 2, \dots, 2k$ и исто така означи ги боите со $0, 1, 2, \dots, 2k$. Потоа поврзи ја шајката x со шајката y со конец со боја $x + y \pmod{n}$. За секоја тројка од бои (p, q, r) постојат темиња x, y, z кои се поврзани со овие три бои. Навистина, треба да го решиме

$$x + y \equiv p, x + z \equiv q, y + z \equiv r \pmod{n} \quad (*)$$

Ако ги собереме трите конгруенции ќе добиеме

$$2(x + y + z) \equiv p + q + r \pmod{n}$$

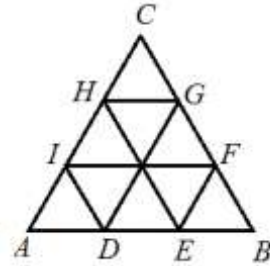
и доколку ги помножиме со $k + 1$ ќе добиеме

$$x + y + z \equiv (k + 1)(p + q + r) \pmod{n}.$$

Сега можеме да ги најдеме x, y, z од (*).

14. Секоја точка од страните на даден рамностран $\triangle ABC$ е обоена во една од две бои. Дали постои правоаголен триаголник чии темињата се три точки од страните на $\triangle ABC$ (вклучувајќи ги и темињата на дадениот триаголник), кои се монохроматски.

Решение. Со точките D, E, F, G, H и I секоја страна на $\triangle ABC$ ја делиме на три еднакви дела (види цртеж). Точките D, E, F, G, H, I се темиња на правилен шестаголник.



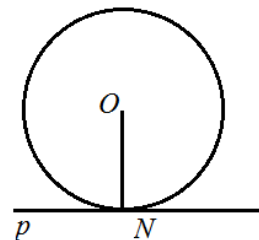
Нека постојат две спротивни темиња на шестаголникот кои се обоени во иста боја, на пример нека H и E се обоени во црна боја. Тогаш ако една од точките D или G е обоена во црна боја, добиваме монохроматски $\triangle HDE$ или $\triangle EGH$, соодветно. Затоа нека точките D и G да се обоени во бела боја. Понатаму, ако точката I е обоена во црна боја имаме монохроматски црн $\triangle HIE$, а ако е обоена во бела боја имаме монохроматски бел $\triangle GID$.

Нека сите парови спротивни темиња се обоени во различни бои. Понатаму, постојат две соседни темиња на шестаголникот кои се обоени во различни бои (зошто?). Нека G е бела и H е црна точка. Тогаш D е црна точка, а E е бела точка. Сега, ако една од точката A е бела го добиваме монохроматскиот бел $\triangle AGE$, а ако точката A е црна го добиваме монохроматскиот црн $\triangle AHD$.

15. Докажи, дека рамнината може да се обои во црвена и сина боја така што секоја права која лежи во рамнината содржи бесконечно многу црвени и бесконечно многу сини точки.

Решение. Земаме произволна точка O и истата да ја обоиме црвено. Понатаму, ако q е рационален број, тогаш кружницата $k(O, q)$ ја боиме црвено, а ако r е ирационален број, тогаш кружницата $k(O, r)$ ја боиме сино. Јасно, на овој начин целата рамнина е обоена во црвена и сина боја.

Да разгледаме произволна права p . Ако $O \in p$, тогаш правата p ги сече сите кружници со центар во O , па значи содржи бесконечно многу црвени и бесконечно многу сини точки. Затоа нека претпоставиме дека

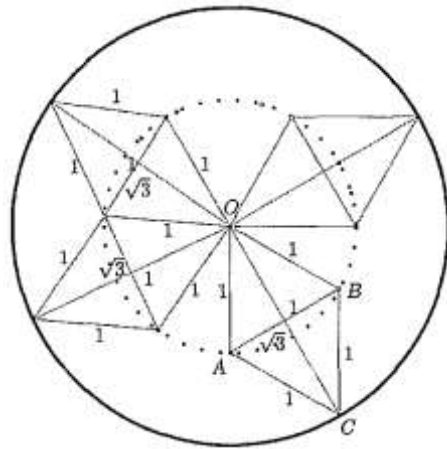


$O \notin p$. Нека N е подножјето на нормалата повлечена од точката O на правата p и нека $a = \overline{ON}$. Од својствата на реални броеви следува дека постојат бесконечно многу рационални броеви кои се поголеми од a и постојат бесконечно многу ирационални броеви кои се поголеми од a . Јасно, ако $b > a$, тогаш кружницата $k'(O, b)$ ја сече правата p во две точки, па од претходно изнесеното следува дека p содржи бесконечно многу црвени и бесконечно многу сини точки.

16. Секоја точка од рамнината е обоена во една од три бои: црвена, зелена или сина. Докажи, дека во рамнина постојат две монохроматски точки кои се на растојание 1.

Решение. Да избереме точка

O која да кажеме е обоена во црвена боја. Конструираме кружница $k(O, 1)$. Ако на оваа кружница има црвена точка, тогаш тврдењето е докажано. Затоа нека сите точки на k се обоени во сина и зелена боја. Да ги разгледаме тетивите на k кои имаат должина 1. Ако меѓу овие тетиви има таква чии крајни точки се монохро-



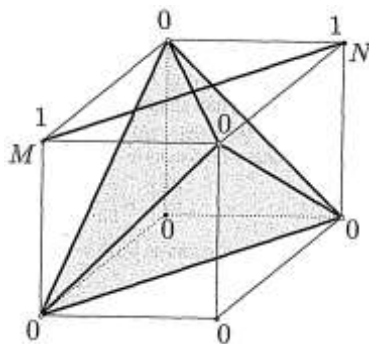
матски, тогаш тврдењето е докажано. Затоа секоја тетива на k која има должина 1 нека има една зелена и една сина крајна точка. Сега да ја разгледаме кружницата $k_1(O, \sqrt{3})$. Да земеме произволна точка C од k_1 и да го повлечеме радиусот OC . Симетралата на OC ја сече кружницата k во точките A и B и притоа важи $\overline{AB} = 1$ (зошто?). Според тоа, на пример, точката A е зелна а точката B е сина. Јасно, ако точката C е обоена во зелена или сина боја, тогаш тврдењето е докажано (зошто?). Затоа, точката C е обоена во црвена боја. Сега, од произволноста на C следува дека сите точки на кружницата k_1 се обоени во црвена боја, па ако на k_1 земеме тетива со должина 1, тогаш таа има монохроматски крајни точки.

17. Нека M и N се две темиња на коцка во кои е запишан бројот 1, а во останатите шест темиња е запишан бројот 0. Дозволено е да се земе

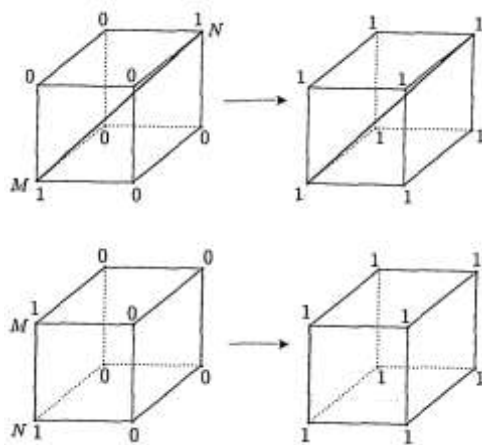
произволно теме на коцката и за 1 да се зголемат броевите во сите три темиња кои со раб се поврзани со ова теме. Докажи, дека со дозволените потези може да се постигне во сите темиња да се запишани исти броеви ако и само ако MN не е дијагонала на страна на коцката.

Решение. Темињата на коцката да ги обоиме со црна и бела боја така што 4 темиња на коцката кои формираат правилен тетраедар се обоени со иста боја. Забележуваме дека секое теме е различно обоено со неговите три соседни темиња. Тоа значи дека во еден потез применет на црно теме збирот на броевите придружени на белите темиња се зголемува за 3. Доволно е да ги разгледаме следниве три случаи.

Прв случај. Нека MN е дијагонала на некоја страна на коцката. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека M и N се обоени во црна боја. Да претпоставиме дека постои низа потези после која некој број n е запишан во сите темиња на коцката. Нека k_1 и k_2 се броевите на потезите применети на белите и црните темиња. Оттука следува дека збирот на црните полиња е $4n = 3k_1 + 2$, а збирот на белите полиња е $4n = 3k_2$. Според тоа, $3k_1 + 2 = 3k_2$, што не е можно.



Втор случај. Нека MN е дијагонала на коцката. Со примена на потезот во темето M постигнуваме во останатите три црни полиња да се запише бројот 1, а со примена на потезот во темето N постигнуваме во останатите темиња да се запише бројот 1.

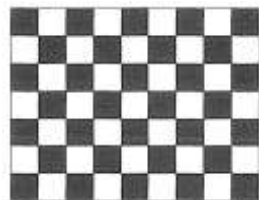


Трет случај. Нека MN е раб на коцката. Да го воочиме неговиот спротивен паралелен раб и на секое негово теме да го примениме дозволениот потез. Очигледно на овој начин во секое теме ќе биде запишан бројот 1.

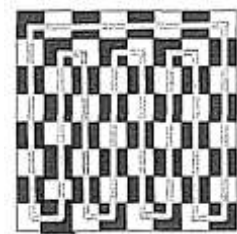
IV4 БОЕЊА И ПОКРИВАЊА

1. Баронот Минхаузен тврди дека дека направил дворец со димензии 2007×2009 (секое квадратче претставува една соба) така што секоја соба има точно две врати кои водат во различни соби и ниту една врата не води надвор од дворецот. Дали баронот Минхаузен ја говори вистината? Дали може при истите услови да се направи дворец со димензии 2008×2008 ?

Решение. Таблата со димензии 2007×2009 да ја обоиме шаховски. Да претпоставиме дека баронот Минхаузен ја говори вистината. Секоја врата поврзува црна и бела соба, па затоа вкупниот број врати е еднаков на двократниот број на црните соби, а исто така и на двократниот број на бели соби. Но, табла со димензии 2007×2009 има повеќе црни од бели соби, што значи дека баронот Минхаузен не ја говори вистината.



Да може да се направи дворец со димензии 2008×2008 кој ги задоволува условите на задачата. Имено, аналогно како на цртежот десно може да се повлече затворена искршена линија која поминува низ секое поле на таблата само еднаш. Јасно, оваа искршена линија покажува и како може да се постават вратите во дворецот.



Да забележиме дека постојат и други начини за поставување на вратите. Обиди се да најдеш некои од нив.

2. На колку начини од квадрат со димензии 2011×2011 може да се отсече квадрат со димензии 11×11 така што делот кој останува да може да се покрие со домина (правоаголници со димензии 1×2)?

Решение. Големiot квадрат да го обоиме како шаховската табла, при што согласно стандардниот договор долното лево аголно поле е обоено со црна боја. Тогаш имаме едно црно поле повеќе од бели, па ако малиот квадрат го отсечеме така што тој има едно црно поле повеќе од бели, не е тешко останатиот дел од таблата да се покрие со домина (докажи!). Во спротивно, покривањето не е можно, бидејќи ќе ни останат две црни полиња повеќе од бели, а секое домино покрива по едно црно и едно бело поле. Сега останува да го определиме бројот

на малите квадрати чии долни леви (десни) аголни полиња се црни. Лесно се гледа дека нивниот број е $2 \cdot 1000^2 + 2 \cdot 1000 + 1 = 2002001$.

3. Квадратна 4×4 табла е разделена на 16 единечни квадратчиња, кои ги нарекуваме полиња. Таблата е покриена со 13 домина со димензии 1×2 така што секое од двете полиња на домината покрива точно едно поле на таблата. Докажи, дека едно од домината може да се отстрани и таблата да остане покриена.

Решение. Бидејќи $13 \times 2 = 26 > 16$, очигледно е дека некои од полињата на домината се препокриваат. Од таа гледна точка постојат два случаја на распоредување на домината. Ако меѓу 13-те домина има едно, чии две половинки се препокриваат со други домина, тогаш очигледно тоа домино може да биде отстрането и задачата е решена. Во вториот случај важи спротивното, т.е. за секое од 13-те домина барем едната половина не се препокрива со друго домино. Значи, сега имаме 13 половинки, кои покриваат точно 13 полиња на таблата и не се препокриваат со други половинки. Останатите 3 полиња на таблата ($4 \cdot 4 = 16$ и $16 - 13 = 3$) се покриваат со другите 13 половинки. Од принципот на Дирихле следува, дека барем едно од тие 3 полиња е покриено со најмалку 5 половинки, т.е. во покривањето на такво поле од таблата учествуваат најмалку 5 домина. Но, едно поле од таблата може со домина да се покрие најмногу на четири различни начина и тоа: слободната половина на доминото е налево, надесно, нагоре или надолу. Значи, барем две домина целосно се препокриваат и едното од нив може да биде отстрането.

4. Квадрат со димензии $n \times n$, $n \geq 2$ е поделен на n^2 единечни квадратчиња. Секое единечно квадратче е обоено во бела или црна боја така што за секој правоаголник (со најмалку 4 квадратчиња) во квадратот барем две од единечните квадратчиња во четирите негови агли се разнобојни. Определи ја најголемата можна вредност на n .

Решение. Ќе докажеме дека бараната вредност е 4.

Нека (i, j) е единечното квадратче кое се наоѓа во i -тиот ред и j -тата колона на 4×4 квадрат. Лесно се проверува дека ако квадратчињата $(1,1), (1,2), (2,1), (2,3), (3,2), (3,4), (4,2), (4,4)$ ги обоиме во црна, а останатите во бела боја, тогаш условот на задачата е исполнет.

За да докажеме дека кога $n \geq 5$ немаме соодветно боење, доволно е да го разгледаме случајот $n = 5$. Да разгледаме произволно боење на

1) Еден ред содржи само црни квадратчиња. Тогаш меѓу останатите

- Решение.** Да разгледаме произволни две полиња со заедничка страна. Бидејќи на почетокот овие полиња се различно обоени, а на крајот се обоени со иста боја, заклучуваме дека при некој чекор нивната заедничка страна треба да биде дел од границата на соодветниот правоаголник од тој чекор (зошто?). Има $4(n-1)$ полиња кои граничат со работ на таблата и тие меѓу себе имаат $4(n-1)$ заеднички страни. Лесно се гледа дека границата на

секој правоаголник со страни паралелни на страните на таблата може да содржи најмногу четири од тие заеднички страни (по две од крајните редови или по две од крајните колони). Според тоа, потребни ни се барем $\frac{4(n-1)}{4} = n-1$ чекори.

Таблата може да стане еднобојна со следните $n-1$ чекори: последователно ги пребојуваме $2, 4, \dots, (n-1)$ – от ред, а потоа $2, 4, \dots, (n-1)$ – та колона. Во тој момент сите полиња се обоени со почетната боја на аголните полиња. Сега со еден чекор на целата табла ја добиваме другата боја.

Според тоа, за да ја пребоиме таблата во црна боја ни се потребни $n-1$ чекори (на почетокот аголните полиња се црни) и за бела боја потребни ни се n чекори.

6. На колку начини табла со димензии $2 \times n$ може да се покрие со домина (плочки со димензии 2×1)?

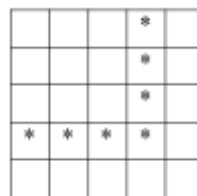
Решение. Нека $n > 2$ и таблата со димензии $2 \times n$ може да се покрие со домина на a_n начини. Да го разгледаме горното лево поле. Тоа може да се покрие со вертикално домино и тогаш останува да покриеме табла со димензии $2 \times (n-1)$, која може да се покрие на a_{n-1} начини (цртеж десно). Ако горното лево поле го покриеме со хоризонтално домино, тогаш полето под него може да го покриеме единствено со хоризонтално домино, па затоа останува да покриема табла со димензии $2 \times (n-2)$ начини, која може да се покрие на a_{n-2} начини (цртеж десно). Сега, од принципот на збир следува дека за секој $n > 2$ важи

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}. \quad (1)$$

Понатаму, лесно се гледа дека $a_1 = 1$ и $a_2 = 2$ (цртеж горе). Според тоа, бараниот број на покривања е еднаков на n -тиот член на низата на Фибоначи, која е зададена со релацијата (1) и $a_1 = 1$, $a_2 = 2$.

7. Дали е можно од 5×5 квадрат да бидат избрани 16 единечни квадратчиња така, што при нивно боење секој 2×2 квадрат од дадениот квадрат ќе содржи не повеќе од две обоени единечни квадратчиња?

Решение. Одговорот е негативен. Нека го претпоставиме спротивното и да го разгледаме горниот лев 4×4 квадрат од дадениот квадрат. Тој може да се подели на четири 2×2 квадрати кои не се сечат и согласно претпоставката во секој од нив ќе има најмногу по 2 обоени единечни квадратчиња. Значи, бројот на обоени единечни квадратчиња во 4×4 квадратот не е поголем од 8. Во останатиот дел од почетниот квадрат, кој содржи 9 единечни квадратчиња (тоа е аголниот дел, составен од најдолниот ред и најдесната колона), има не помалку од 8 обоени единечни квадратчиња. Има точно 8, бидејќи ако се 9, тогаш сите единечни квадратчиња во тој дел ќе бидат обоени и тогаш долниот десен 2×2 квадрат ќе содржи 3 обоени единечни квадратчиња, што не е можно. Притоа трите единечни квадратчиња од аголниот дел, кои припаѓаат на долниот десен 2×2 квадрат, не се истовремено обоени. Оттука следува, дека првите три единечни квадратчиња одлево надесно во најдолниот ред, како и првите три единечни квадратчиња одгоре надолу во најдесната колона, се обоени. Сега да ги разгледаме обележените со ѕвездички единечни квадратчиња на цртежот. Може да се тврди, дека ниту едно од нив не е обоено. За долното најдесно квадратче тоа е јасно, бидејќи тоа се содржи во долниот десен 2×2 квадрат, кој веќе има две обоени единечни квадратчиња. Останатите учествуваат во 2×2 квадрати исто со по две обоени единечни квадратчиња. Заклучуваме, дека во горниот лев 4×4 квадрат има точно 8 обоени единечни квадратчиња и тие се наоѓаат во горниот лев 3×3 квадрат. Сега е очигледно, дека во секој 2×2 квадрат од 3×3 квадратот има барем три обоени единечни квадратчиња и одново добиваме противречност.



8. Во полињата на табела со димензии 100×100 се запишани $100^2 - 1$ знаци плус и еден знак минус (по еден знак во едно поле). Во еден чекор се менуваат сите знаци во даден ред или дадена колона. Дали може после конечен број чекори да се добие табела во која има точно 2011 минуси?

Решение. Нека x (соодветно y) е бројот на редиците (соодветно колоните), со кои се направени непарен број потези. За момент да заборавиме на минусот и да го сметаме за плус. Тогаш бројот на минусите е еднаков на $x(100 - y) + y(100 - x)$ и тоа е непарен број. Спо-

ред тоа, 2011 минуси може да се добијат само ако горниот број е 2010 или 2012 и ако се земе предвид почетниот минус ќе имаме зголемување или намалување за 1. Ќе докажеме, дека

$$x(100 - y) + y(100 - x) \neq 2010, 2012.$$

Ако

$$x(100 - y) + y(100 - x) = 2010,$$

тогаш

$$(x - 50)(y - 50) = 1495 = 5 \cdot 13 \cdot 23.$$

Бидејќи $0 \leq x, y \leq 100$, множителите на левата страна од последното равенство се по апсолутна вредност помали од 50, а во производот $5 \cdot 13 \cdot 23$ секои два множители даваат производ поголем од 50. Аналогно, од $x(100 - y) + y(100 - x) = 2012$ добиваме

$$(x - 50)(y - 50) = 1494 = 2 \cdot 9 \cdot 83$$

и останува да забележиме дека множителите на левата страна на последното равенство по апсолутна вредност се помали од 50, а 83 е поголем од 50.

Според тоа, после конечен број чекори не може да се добијат 2011 минуси.

9. Даден е квадрат со димензии 4×4 , составен од 16 единечни квадратчиња. Во секое единечно квадратче на големиот квадрат е запишан ненегативен цел број така што збирот на било кои пет од нив кои може да се покријат со фигура прикажана на цртежот десно (фигурата може да се ротира и превртуваат) е еднаков на 5. Колку најмногу различни броеви може да се употребат за пополнување на квадратот?



Решение. За секој правоаголник со димензии 3×4 , види цртеж, е исполнето

$$\begin{aligned} a + (e + f + g + h) &= d + (e + f + g + h) \\ &= i + (e + f + g + h), \\ &= l + (e + f + g + h) \end{aligned}$$

a	b	c	d
e	f	g	h
i	j	k	l

a	b	c	d
e	f	g	h
i	j	k	l
m	n	o	p

од каде следува дека $a = d = i = l$. Нека квадратот е пополнет како на цртежот лево.

Тогаш од претходната дискусија следува дека

$$\begin{aligned} a = c = m = o, \quad b = d = n = p, \quad a = d = i = l \quad \text{и} \\ e = h = m = p. \end{aligned}$$

Според тоа,

$$a=b=c=d=h=l=p=o=n=m=i=e=X,$$

и квадратот е од обликот прикажан на цртежот десно, каде X, f, g, j, k се ненегативни цели броеви. Сега е јасно дека важи $5X=5$, од каде добиваме $X=1$. Од друга страна,

$$f+g+3X=j+k+3X=f+j+3X=g+k+3X=5X$$

односно

$$f+g=j+k=f+j=g+k=2X.$$

Од првата и четвртата, односно втората и четвртата равенка следува дека $f=k=Y$ и $j=g=Z$. Според тоа, квадратот е од облик

X	X	X	X
X	f	g	X
X	j	k	X
X	X	X	X

и притоа важи $Y+Z=2$, каде Y и Z се ненегативни цели броеви. Можни се следниве три случаи:

1) $Y=0, Z=2$,

2) $Y=1, Z=1$ и

3) $Y=2, Z=0$.

Според тоа, најмногу три различни броеви може да се употребат за пополнување на квадратот (случај 1 или случај 3).

1	1	1	1
1	Y	Z	1
1	Z	Y	1
1	1	1	1

10. Фигурата добиена од квадрат со димензии 2×2 со отстранување на една негова клетка ја нарекуваме триклеточен агол. Дали е можно единечните клетки на табла со димензии 3000×3000 да бидат обоени во црна и бела боја, но така што како и да се ресече таблата на 3000000 триклеточни агли, секој од нив да содржи точно по една црна клетка?

Решение. Нека претпоставиме дека такво боење постои. Тоа треба да содржи точно 3000000 црни единечни клетки.

Да ја расечеме таблата на 1500^2 квадрати со димензии 2×2 . Нека претпоставиме дека секој од тие квадрати, кој не граничи со работ на таблата, содржи најмногу една црна клетка. Тогаш вкупно имаме $1498^2 + 4 \cdot 1499 \cdot 4 < 3000000$, што е противречност.



Да разгледаме еден внатрешен квадрат s , кој содржи барем две црни клетки. Нека S е правоаголник со димензии 4×3000 , составен од

квадратот s , сите други 2×2 квадрати во истите два реда и сите 2×2 квадрати во следните два реда. Делот од таблата кој лежи надвор од S можеме да го расечеме на правоаголници со димензии 2×3 , па според тоа и на триклеточни агли. Од друга страна, правоаголникот S , можеме да го расечеме на триклеточни агли и правоаголници 2×3 на следниве три начини:

Лесно се гледа, дека барем едно од овие три расекувања може да се доврши на таков начин што две црни клетки од s ќе бидат во еден ист триклеточен агол, што е противречност.

Од досега изнесеното следува дека бараното боење на таблата не е можно.

11. Петар покрил шаховска табла со димензии 600×600 со правоаголници со димензии 2×3 така што секое единечно квадратче од таблата е покриено со точно еден правоаголник. Потоа тој ги расекол сите правоаголници на три помали правоаголници со димензии $1 \times 1, 1 \times 2, 1 \times 3$ и му го покажал добиеното покривање на Никола. Дали може Никола според покривањето со помалите правоаголници еднозначно да го определи почетното покривање со правоаголниците 2×3 ?

Решение. Нека претпоставиме дека постојат две покривања A и B со правоаголници 2×3 , кои при соодветни расекувања доведуваат до едно исто покривање со помалите правоаголници. Тогаш постои правоаголник P_1 со димензии 1×3 таков што правоаголникот Q_1 со димензии 2×3 , од кој P_1 е дел во A , е поставен различно од правоаголникот R_1 со димензии 2×3 , од кој P_1 е дел во B . Без ограничување на општоста, можеме да земеме дека P_1 се содржи во i -тиот ред од таблата, Q_1 се содржи во i -тиот и $(i-1)$ -виот, а R_1 се содржи во i -тиот и $(i+1)$ -виот ред од таблата.

Нека P_2 е правоаголникот 1×2 , добиен од R_1 во B и нека Q_2 е правоаголникот 2×3 од кој P_2 е дел во A . Тогаш P_2 се содржи во $(i+1)$ -виот ред на таблата и Q_2 се содржи во $(i+1)$ -виот и $(i+2)$ -риот ред на таблата.

Аналогно, нека P_3 е правоаголникот 1×3 , добиен од Q_2 во A и нека R_2 е правоаголникот 2×3 од кој P_3 е дел во B . Тогаш P_3 се содржи во $(i+2)$ -риот ред на таблата и Q_2 се содржи во $(i+2)$ -риот и

$(i + 3)$ – тиот ред на раблата.

Продолжувајќи ја постапката, ќе добиеме правоаголник P_n кој треба да лежи надвор од таблата, што е противречност.

Според тоа, меѓу сите покривања со правоаголници 2×3 само од почетното може да се добие покривањето со помали правоаголници, кое Петар му го покажал на Никола. Значи, Никола може еднозначно да го определи почетното покривање, за што е доволно да ги провери сите можни почетни покривања и сите можни нивни расекувања.

12. Дадена е шаховска табла со димензии 300×300 . Ќе велиме дека едно нејзино покривање со плочки со димензии 1×3 е добро, ако не постојат две плочки кои ја формираат буквата Т, во било која нејзина положба.

Определи го бројот на добрите покривања на таблата.

Решение. Поставуваме координатен систем така што долната лева клетка има координати $(1,1)$, а горната десна клетка координати $(300,300)$.

Нека клетката $(1,1)$ е покриена со вертикална плочка. Нека претпоставиме дека $(2,1)$ е покриена со хоризонтална плочка. За да избегне формирање на буквата Т, $(2,2)$ треба да биде покриена со вертикална плочка, $(3,2)$ - со хоризонтална итн. Продолжувајќи ја постапката ќе стигнеме до десниот или горниот раб на таблата, после што буквата Т сепак ќе биде добиена, што е противречност. Според тоа, $(2,1)$ исто така е покриена со вертикална плочка. Аналогно, $(3,1)$ е покриена со вертикална плочка итн, т.е. сите клетки $(i,1)$, $1 \leq i \leq 300$ се покриени со вертикални плочки. Пота, ако некоја клетка од видот $(i,4)$ е покриена со хоризонтална плочка, тогаш одново ја добиваме буквата Т. Аналогно, сите клетки од видот $(i,7)$, сите клетки од видот $(i,10)$ итн. се покриени со вертикални плочки. Значи, сите плочки во покривањето се вертикални.

На ист начин, ако $(1,1)$ е покриена со хоризонтална плочка, тогаш сите плочки во покривањето се хоризонтални.

Конечно, бројот на добрите покривања е еднаков на 2.

13. Во квадратна мрежа се дадени два квадрати кои не се сечат и кои се составени од m^2 и n^2 единечни квадратчиња на мрежата, соодветно.

Ако $m^2 + n^2 = 2017$, докажи, дека:

а) такви квадрати постојат;

б) единечните квадратчиња на точно еден од двата квадрати може да се обојат во црвена или сина боја така, што секое квадратче има непарен број соседни квадратчиња со иста боја. (Две единечни квадратчиња се соседни, ако имаат барем едно заедничко теме.)

Решение. а) При делење со 3 бројот 2017 дава остаток 1. Оттука следува, дека еден од броевите m и n сигурно е делив со 3. Освен тоа, бројот 2017 при делење со 5 дава остаток 2. Затоа остатоците на m^2 и n^2 при делење со 5 се еднакви на 1. Нека n е делив со 3. Тогаш бидејќи $44^2 < 2017 < 45^2$, добиваме дека можните вредности на n се: 6, 9, 21, 24, 36 и 39. Непосредно се проверува дека од овие броеви само за бројот 9 важи $44^2 + 9^2 = 2017$, а останатите броеви не даваат решение на равенката $m^2 + n^2 = 2017$. Според тоа, претставувањето на 2017 како збир на два квадрати е единствено.

б) Квадратот со 44^2 единечни квадратчиња може да се обои на саканиот начин. Доволно е со црвена боја да ги обоиме редовите со редни броеви $4k+1, 4k+2, k=0,1,2,\dots,10$, а останатите редови да ги обоиме сино.

Да претпоставиме, дека и вториот квадрат може да се обои на саканиот начин. Тогаш во една од боите е обоен непарен број единечни квадратчиња. Нека, на пример, имаме непарен број црвени единечни квадратчиња. Да го разгледаме множеството од подредени парови различни црвени квадратчиња кои немаат црвени соседи. Јасно, ова множество има парен број елементи (паровите се подредени). Од друга страна, за секое црвено квадратче бројот на црвените квадратчиња, кои не му се соседни, е непарен, т.е. секое квадратче учествува како прв елемент во непарен број парови. Но тоа значи, дека бројот на подредените парови е непарен, што е противречност.

14. Во секое единечно поле на квадрат со димензии 100×100 е запишан цел број. За правоаголникот составен од единечни полиња на квадратот ќе велиме дека е добар ако збирот на броевите запишани во него е делив со 17. Дозволено е истовремено да се обојат сите единечни полиња во добар правоаголник, но не смее едно поле да се бои двапати. Определи го најголемиот број на единечни полиња кои може да се обојат при произволни запишани цели броеви.

Решение. Одговор: $9744 = 100^2 - 16^2$.

Лема. Во правоаголник $1 \times k$ може да се обојат неколку дисјунктни добри правоаголници кои содржат најмалку $k - 16$ единечни полиња.

Доказ. Тврдењето ќе го докажеме со индукција по k . За $k \leq 16$ нема потреба ништо да боиме. Нека $k \geq 17$ и во седумнаесетте полиња од лево нека се запишани броевите $a_1, a_2, \dots, a_{17}$. Меѓу броевите $0, a_1, a_1 + a_2, \dots, a_1 + a_2 + \dots + a_{17}$ постојат два броја кои при делење со 17 даваат ист остаток. Тогаш нивната разлика е од видот $a_i + a_{i+1} + \dots + a_j$ и се дели со 17. Од дадениот правоаголник да ги отстраниме полиња од i -тата до j -тата позиција заклучно. Останатите полиња дефинираат нов правоаголник $1 \times (k - (j - i + 1))$ во кој согласно индуктивната претпоставка можеме да обоиме неколку дисјунктни правоаголници така што ќе останат најмногу 16 необоени полиња. Тогаш во почетниот правоаголник ќе се обоени барем $k - 16$ полиња. ■

Ќе докажеме, дека е можно може да оставиме најмногу $16^2 = 256$ необоени полиња. Лемата да ја примениме на правоаголник 1×100 во чии полиња се запишани зборовите на броевите од колоните на почетниот квадрат. Добиваме неколку добри правоаголници и можеме да ги обоиме соодветните правоаголници со висина 100 во почетниот квадрат. После тоа ќе останат необоени најмногу 16 колони и согласно лемата за секоја од нив имаме необоени најмногу 16 полиња, што значи дека ќе имаме најмногу $16^2 = 256$ необоени полиња.

На читателот му оставаме да покаже дека ако во квадрат 16×16 се запишани единици, а во сите останати полиња се запишани нули, тогаш не е можно да останат помалку од 256 необоени полиња.

15. Во некои полиња од табла со димензии 100×100 се поставени жетони (по еден жетон во поле). За полето ќе велиме дека е *убаво* ако има жетони во парен број негови соседни полиња (соседни се полињата кои имаат заедничка страна). Дали може точно едно поле да е убаво?

Решение. Прво ќе ја докажеме следнава лема.

Лема. За секое поле X од таблата постои множество S од парен број полиња, кое го содржи X и е такво што секое поле од таблата има парен број соседни полиња од S .

Доказ. Таблата да ја обоиме шаховски. Можеме да сметаме дека X е

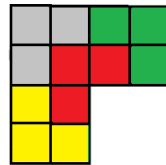
црно поле. Ја разгледуваме едната дијагонала низ X . Нека A и B се центрите на двете крајни полиња на таа дијагонала, а C и D се нивните симетрични точки во однос на центарот на таблата. Со S да го означиме множеството од сите црни полиња чии центри лежат внатре или на границата на правоаголникот $ABCD$. Ова множество содржи парен број полиња (зошто?). Понатаму, црните полиња немаат соседи од S , секое бело поле внатре во $ABCD$ граничи со 4 полиња од S , а секое бело поле надвор од $ABCD$ граничи со 0 или 2 полиња од S . Според тоа, множеството S ги исполнува сите услови. Со тоа лемата е докажана. ■

Нека претпоставиме дека постои точно едно убаво поле X . За тоа поле го разгледуваме множеството S од лемата. Во секое поле од тоа множество го запишуваме бројот на жетоните во неговите соседни полиња и со g да го означиме збирот на запишаните броеви. Бидејќи S содржи парен број полиња, при што само едно поле е убаво, заклучуваме дека g е непарен број. Од друга страна, секое поле кое содржи жетон има парен број соседи од S , па значи неговиот допринос во g е парен број. Значи и g е парен број, што е противречност.

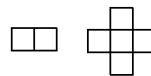
16. Покривањето на правоаголник со димензии $m \times n$ со аголни тетрамина (цртеж десно) го нарекуваме правилно ако внатре во тоа покривање не постои правоаголник со страни помали од m и n кој е покриен со аголните тетрамина. Докажи, дека ако за некои m и n постои правилно покривање на правоаголникот со димензии $m \times n$, тогаш правилно покривање постои и за правоаголникот со димензии $2m \times 2n$.



Решение. Двапати да ја зголемиме покриената табла со димензии $m \times n$, а потоа секое дуплирано аголно тетрамино да го покриеме како што е прикажано на цртежот десно. Очигледно дека во вакво покривање не може да се појави покриен правоаголник со димензии помали од $2m \times 2n$ (Зошто?).



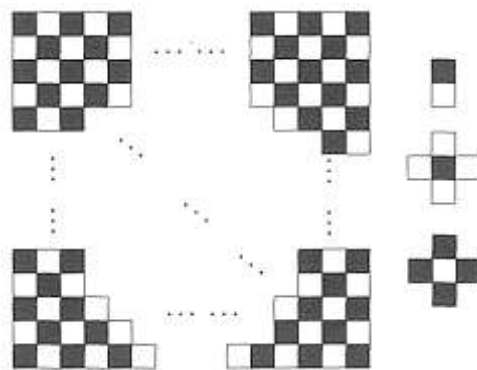
17. Дали може табла со димензии 75×75 да се покрие со фигури прикажани на цртежот десно?



Решение. Нека претпоставиме дека табла со димензии 75×75 може да се покрие со дадените фигури (домино и крст).

Таблата да ја обоиме шаховски така што горното лево аголно поле е црно. Тогаш имаме $\frac{75^2+1}{2}$ црни полиња.

Понатаму, секое домино покрива точно едно црно и едно бело поле, а додека фигурата крст покрива 1 црно и 4 бели или 1 бело и 4 црни полиња. Нека x е бројот на домината кои учествуваат во покрива-



њето, y е бројот на крстовите кои покриваат 1 црно и 4 бели полиња, а z е бројот на крстовите кои покриваат 1 бело и 4 црни полиња. Тогаш вкушниот број полиња на таблата ќе биде

$$2x + 5y + 5z = 75^2$$

а додека вкупниот број на црни полиња ќе биде

$$x + y + 4z = \frac{75^2+1}{2}.$$

Ако ги собереме овие две равенства добиваме

$$3x + 6y + 9z = \frac{3 \cdot 75^2 + 1}{2}.$$

Но, $3 \mid 3x + 6y + 9z$, а $3 \nmid 3 \cdot 75^2 + 1$, па затоа последното равенство не е можно. Конечно, од добиената противречност следува дека не е можно табла со димензии 75×75 да се покрие со домина и крстови.

18. Табла со димензии $(2n+1) \times (2n+1)$ е шаховски обоена (горното лево поле е црно). За квадрат од оваа табла со димензии $m \times m$, $1 \leq m \leq 2n+1$ ќе велиме дека е *добар* ако содржи повеќе црни од бели единични квадратчиња. Изрази го бројот на добрите квадрати како функција од n .

Решение. Табла со димензии $m \times m$ има повеќе црни од бели полиња ако нејзиното горно лево поле е црно и ако m е непарен број. Таква табла содржи вкупно $\frac{m^2+1}{2}$ црни полиња.

Нека T_i е вкупниот број добри квадрати со димензии $(2i+1) \times (2i+1)$. Да забележиме дека еден $(2i+1) \times (2i+1)$ квадрат е напълно определен со своето горно лево аголно поле. Заради должината на страната тоа поле не може да се наоѓа ниту во долните $2i$ редови, ниту во десните $2i$ колони. Значи, бојот T_i е еднаков на бројот на црните полиња на

таблата со димензии $2(n-i)+1 \times 2(n-i)+1$, која ја добиваме отфрлајќи ги долните $2i$ редици и десните $2i$ колони. Според тоа,

$$T_i = \frac{(2(n-i)+1)^2 + 1}{2} = 2(n-i)^2 + 2(n-i) + 1.$$

Очигледно, вкупниот број на добри квадрати е еднаков на збирот на броевите $T_0, T_1, \dots, T_n$, па затоа бараниот број е еднаков на

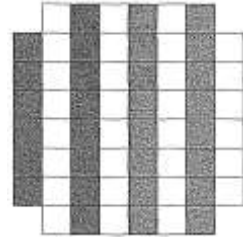
$$\begin{aligned} T &= \sum_{i=0}^n T_i = \sum_{i=0}^n 2(n-i)^2 + \sum_{i=0}^n 2(n-i) + \sum_{i=0}^n 1 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{3} + n(n+1) + n = \frac{(n+1)(2n^2+4n+3)}{3}. \end{aligned}$$

19. Докажи, дека табла со димензии $n \times n$ од која се отстранети аголните полиња може да се покрие со L-тетрамина (види цртеж), ако и само ако $4 \mid n-2$.



Решение. Бидејќи секое тетрамино покрива по 4 полиња, вкупниот број на полиња $n^2 - 4$ мора да биде делив со 4. Според тоа, n мора да биде парен број.

Нека $n = 4k$ и да претпоставиме дека постои покривање. Таблата да ја обоиме како на цртежот десно. Секое тетрамино покрива или точно 1 или точно 3 црни полиња. Нека бројот на тетрамината кои покриваат точно едно црно поле е еднаков на x , а кои покриваат 3 црни полиња е еднаков на y . Тогаш вкупниот број на таблата е



$$4x + 4y = 16k^2 - 4,$$

а вкупниот број црни полиња е

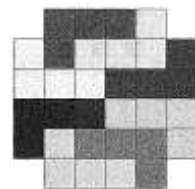
$$x + 3y = 8k^2 - 2.$$

Ако првата равенка ја поделиме со 4 и ја собереме со втората равенка добиваме

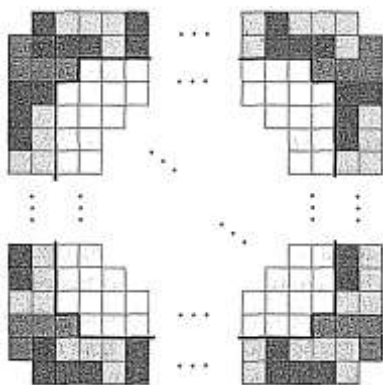
$$2x + 4y = 12k^2 - 3,$$

што не е можно бидејќи левата страна е парен, а десната страна е непарен број.

Ќе докажеме дека за $n = 4k + 2$ таблата може да се покрие. Доказот ќе го спроведеме со индукција по k .



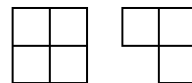
За $k=1$ едно можно покривање е дадено на претходниот цртеж.



Нека претпоставиме дека тврдењето важи за некој $k \geq 1$ и да докажеме дека важи за $k+1$. На таблата да воочиме појас со ширина 2. Надвор од овој појас останува табла со димензија $(4k+2) \times (4k+2)$ од која се отстранеи аголните полиња и која согласно индуктивната претпоставка може да се покрие со L-тетрамина. Понатаму појасот се состои од по 2 траки со димензии $2 \times (4k+4)$, 2

траки со димензии $4k \times 2$, кои лесно се покриваат со правоаголници 2×4 и 4×2 (а овие лесно се покриваат со L-тетрамина) и 4 L-тетрамина (цртеж лево).

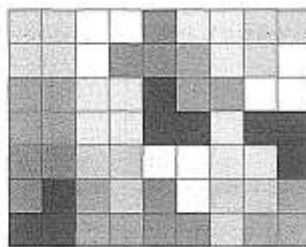
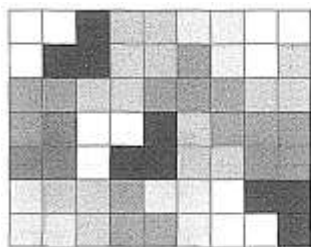
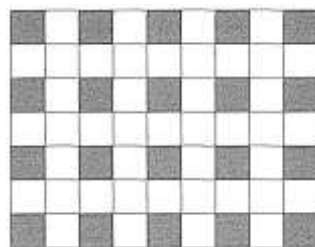
20. Табла со димензии 9×7 е покриена со тетрамина и тримина прикажани на цртежите десно. Нека n е бројот тетрамината кои учествуваат во покривањето. Определи ги сите можни вредности на n .



Решение. Со m да го означиме бројот на тримината кои учествуваат во покривањето. Тогаш за вкупниот број важи

$$4n + 3m = 63,$$

па затоа $3 \mid n$. Таблата да ја обоиме како на цртежот десно. Тогаш секое тетрамино покрива точно едно црно поле, додека секое тримино покрива едно ли ниедно црно поле. Затоа бројот на тримината и тетрамината е поголем од бројот на црните полиња, т.е. $m + n \geq 20$. Оттука следува дека $3m + 3n \geq 60$, па ако искористиме дека $3m = 63 - 4n$ добиваме дека $n \leq 3$. Но, $3 \mid n$, па затоа $n = 0$ или $n = 3$.



Примерите дадени на горните цртежи покажуваа покривања за $n = 0$ и $n = 3$, што значи дека тоа се и решенија на задачата.

21. Табла со димензии 30×30 е покриена со прави тримина со димензии 1×3 . Во секое вертикално тримино е запишан бројот на колоната во која се наоѓа, а во секое хоризонтално тримино е запишан бројот на редот во кој се наоѓа (редовите и колоните се нумерирани со броевите од 1 до 30). Докажи дека збирот на сите запишани броеви е делив со 3.

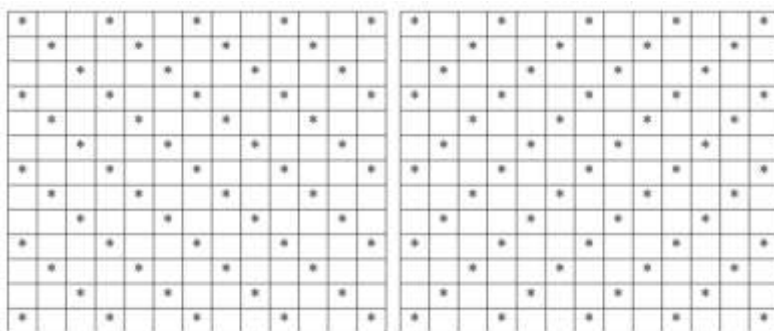
Решение. Во единечните квадратчиња на таблата ги запишуваме броевите 0 и 1 како на цртежот десно. Забележуваме дека збирот на запишаните броеви во секое тримино е конгруентен по модул 3 со редот, односно колоната во која се наоѓа. Оттука следува дека збирот на сите броеви запишани на тримината е конгруентен со збирот на сите броеви запишани во

	1	2	3	4	5	6	7		26	27	28	29	30
1	0	0	1	0	0	1	0		0	1	0	0	1
2	0	1	1	0	1	1	0		1	1	0	1	1
3	1	1	1	1	1	1	1	...	1	1	1	1	1
4	0	0	1	0	0	1	0		0	1	0	0	1
5	0	1	1	0	1	1	0		1	1	0	1	1
6	1	1	1	1	1	1	1		1	1	1	1	1
	:								:				
25	0	0	1	0	0	1	0		0	1	0	0	1
26	0	1	1	0	1	1	0		1	1	0	1	1
27	1	1	1	1	1	1	1	...	1	1	1	1	1
28	0	0	1	0	0	1	0		0	1	0	0	1
29	0	1	1	0	1	1	0		1	1	0	1	1
30	1	1	1	1	1	1	1		1	1	1	1	1

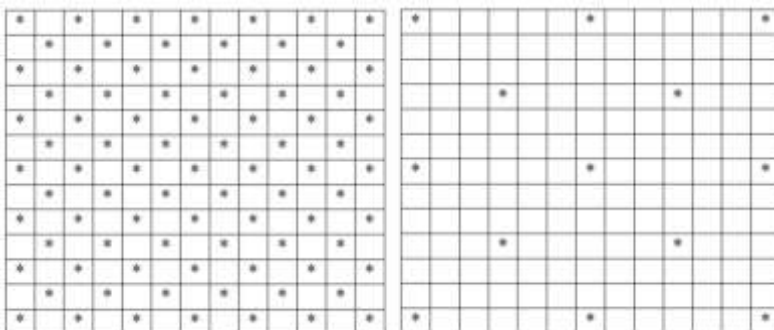
единечните полиња. Таблата со димензии 30×30 ја делиме на 100 табли со димензии 3×3 во кои збирот на запишаните броеви во единечните квадратчиња е еднаков на 6, па затоа збирот на сите броеви запишани во единечните квадратчиња на целата 30×30 табла е еднаков на $100 \cdot 6 = 600$, Овој број е делив со 3, што значи дека збирот на сите броеви запишани на тримината е конгруентен со 0 по модул 3, т.е. е делив со 3.

22. Квадрат 13×13 е поделен на единечни квадратчиња и е покриен со 28 правоаголници 3×2 кои не се преклопуваат така, што точно едно единечно квадратче не е покриено. Определи ги можните положби на непокриеното единечно квадратче.

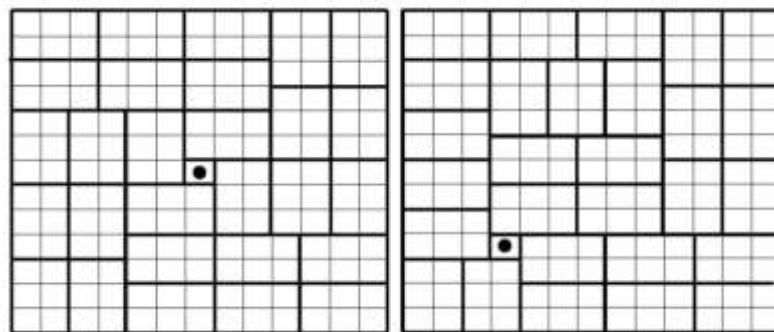
Решение. Да го обоиме квадратот дијагонално на покажаните два начина. При секое од овие бојења бројот на обоените единечни квадратчиња е 57. Од друга страна, како и да се постави правоаголник 3×2 , тој покрива точно 2 обоени квадратчиња. Следствено единечното квадратче кое останува непокриено е обоено.



Ќе искористиме и трето боење, кое е како на шаховска табла. При ова боење бројот на обоените единечни квадратчиња е 85. Од друга страна, како и да се постави правоаголник 3×2 , тој покрива точно 3 обоени квадратчиња. Следствено останува непокриено единечно квадратче кое е обоено.



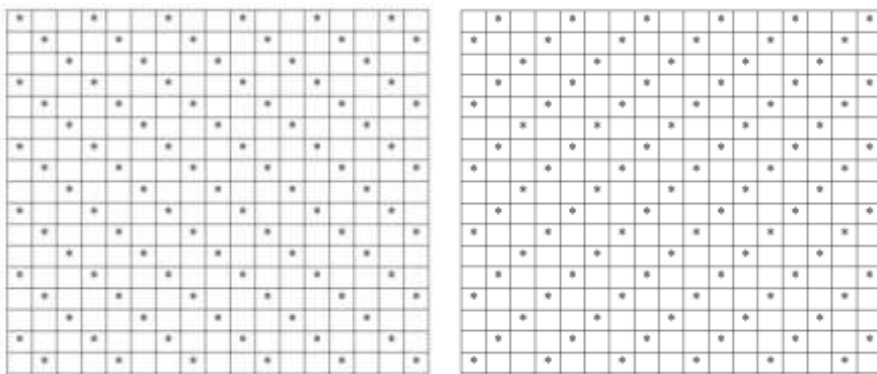
Ако трите боења ги преклопиме едно на друго забележуваме, дека дел од заедничките обоени единечни квадратчиња се наоѓаат на периферијата на квадратот и очигледно не можат да останат непокриени. Останатите заеднички квадратчиња се централното и четирите квадратчиња во внатрешноста (види го четвртиот цртеж горе). Задачата има пет решенија. Реализациите на тие случаи се покажани на долните цртежи:



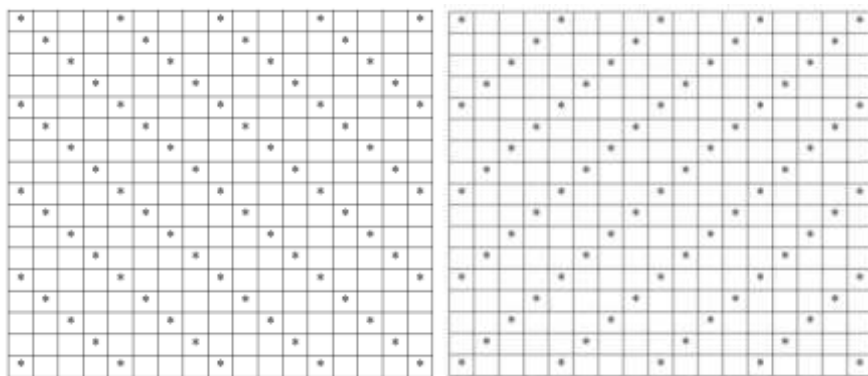
Ако последователно за агол од 90° го ротираме последниот цртеж ги добиваме останатите три решенија.

23. Квадрат 17×17 е разделен на единечни квадратчиња и е покриен со 24 правоаголници 4×3 кои не се преклопуваат така, што точно едно единечно квадратче не е покриено. Определи ги можните положби на непокриеното единечно квадратче.

Решение. Квадратот ќе го обоиме дијагонално на прикажаните два начина. Забележуваме, дека при секое од двете боења бројот на обоените единечни квадратчиња е 97. Од друга страна, како и да се постави правоаголник 4×3 , тој покрива точно 4 обоени квадратчиња. Следствено покриените обоени квадратчиња се $24 \cdot 4 = 96$, што значи, дека останува непокриено обоено единечно квадратче.

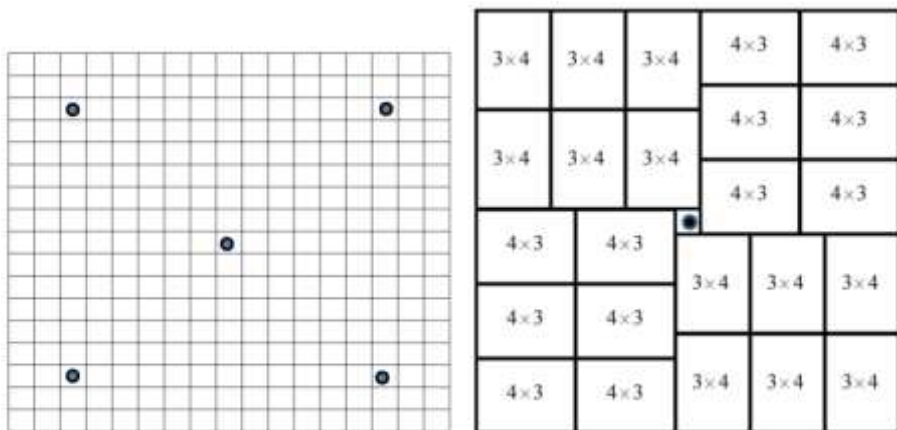


Сега квадратот го боиме дијагонално на уште два начина.



Забележуваме, дека овој пат при секое од двете боења бројот на обоените единечни квадратчиња е 73. Од друга страна, како и да се постави правоаголник 4×3 , тој покрива точно 3 обоени квадратчиња. Следствено имаме $24 \cdot 3 = 72$ покриени обоени квадратчиња, па затоа непокриеното единечно квадратче е обоено.

Ако ги преклопиме четирите боења едно врз друго забележуваме, дека заеднички обоени единечни квадратчиња се централното квадратче и уште четири квадратчиња, како што е прикажано на левиот цртеж долу. Јасно е, дека тие четири квадратчета не можат да останат непокриени. Едно покривање на случајот со централното единечно квадратче е дадена на долниот цртеж десно.



24. За дадено множество S од 2014 точки во рамнината нека l е најмалиот природен број за кој постојат l прави такви што секоја точка од S лежи на некоја од тие прави. Нека c е најмалиот природен број за кој постојат c кружници такви што секоја точка од S лежи на некоја од тие кружници. Дали постои множество S за кое

- а) $l=15$ и $c=67$, б) $l=19$ и $c=53$.

Решение. а) Да разгледаме едно покривање на S со c кружници.

Тогаш на кружницата со најмногу точки од S има барем $\frac{2014}{c}$ точки

и за да ги покриеме овие точки со прави, потребни ни се најмалку $\frac{2014}{2c} = \frac{1007}{c}$ прави (секоја права покрива најмногу две од точките).

Според тоа, треба да важи $l \geq \frac{1007}{c}$, односно $cl \geq 1007$. Но,

$$15 \cdot 67 = 1005 < 1007,$$

па затоа не постои множество S за кое $l=15$ и $c=67$.

б) Да разгледаме 19 паралелни прави и 53 кружници, секоја од кои ја сече секоја од деветнаесетте прави во по две различни точки и не постојат две кружници кои се сечат на правите. Добиваме множество од вкупно $19 \cdot 53 \cdot 2 = 2014$ точки, за кои ќе докажеме дека го има

саканото својство.

Нека претпоставиме дека $s < 53$. Тогаш ќе постои кружница на која лежат повеќе од 38 точки и некоја од деветнаесетте паралелни прави треба таа кружница да ја сече во најмалку три точки, противречност. Аналогно, ако претпоставиме дека $l < 19$, тогаш постои права која содржи повеќе од 111 точки, па затоа некоја од педесет и трите кружници треба оваа права да ја сече во најмалку три точки, што повторно е противречност.

25. Нека A и B се два идентични конвексни многуаголници, со плоштина 2015. Многуаголникот A е разделен на многуаголници со плоштини $A_1, A_2, \dots, A_{2015}$, а многуаголникот B на многуаголници со плоштина $B_1, B_2, \dots, B_{2015}$. Со 2015 бои се обоени $A_1, A_2, \dots, A_{2015}$, $B_1, B_2, \dots, B_{2015}$ така што A_i е различно обоен од A_j и B_i е различно обоен од B_j , за $i \neq j$. После поклопувањето на многуаголниците A и B , пресметан е збирот на плоштините на деловите кои што имаат иста боја.

Докажи дека постои боење на многуаголниците за кое овој збир е најмалку 1.

Решение. После поклопувањето на дадените многуаголници ги добиваме многуаголниците

$$C_{ij} = A_i \cap B_j, \quad i, j \in \{1, 2, \dots, 2015\}.$$

Многуаголниците $B_1, B_2, \dots, B_{2015}$ може да се обојат на 2015! начини.

Нека е дадено едно боење на $A_1, A_2, \dots, A_{2015}$. За произволно боење на $B_1, B_2, \dots, B_{2015}$ кое го означуваме со n , нека O_n го означува збирот на плоштината на деловите обоени со иста боја од двата многуаголници. Тогаш

$$O_n = \sum_{i,j=1}^{2015} c_{ij} P(C_{ij}),$$

каде $c_{ij} = 1$ ако A_i и B_j се обоени со иста боја и $c_{ij} = 0$ во останатите случаи. Добиваме дека

$$\sum_{n=1}^{2015!} O_n = \sum_{i,j=1}^{2015} d_{ij} P(C_{ij}),$$

каде што d_{ij} е бројот на боења на $B_1, B_2, \dots, B_{2015}$ во кои A_i и B_j имаат иста боја. Очигледно е дека $d_{ij} = 2014!$. Според тоа,

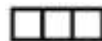
$$\sum_{n=1}^{2015!} O_n = \sum_{i,j=1}^{2015} d_{ij} P(C_{ij}) = 2014! \cdot 2015 = 2015!.$$

Конечно, од

$$O_1 + O_2 + \dots + O_{2015!} = 2015!$$

следува дека постои $k \in \{1, 2, \dots, 2015!\}$ за кое што $O_k \geq 1$, што и требаше да се докаже.

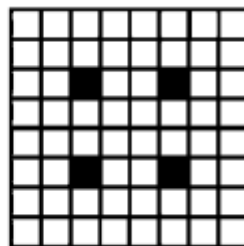
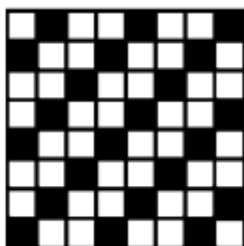
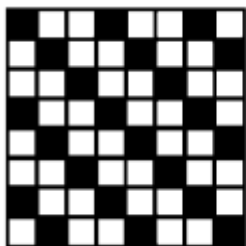
26. На шаховска 8×8 табла со 64 полиња (единечни квадратчиња) се поставени 21 право тримино (види цртеж десно).



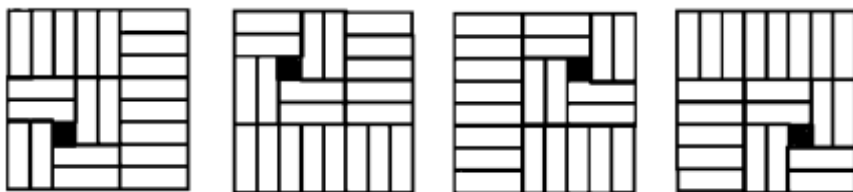
Тримината не се преклопуваат и нивните единечни квадратчиња покриваат цели полиња на таблата. Дали постои поле на шаховската табла кое не е покриено од тримино? Ако одговорот е позитивен, определете ги сите такви полиња.

Решение. *Прв начин.* Сите 21 тримино покриваат точно $21 \times 3 = 63$ поле од таблата. Таблата има 64 полиња, па затоа постои барем едно поле кое не е покриено со тримино.

Да разгледаме боењето на таблата во две бои, црна и бела, кое е прикажано на левиот цртеж долу. Јасно, секое тримино покрива 2 бели и 1 црно поле. Така, дадените 21 тримино покриват најмногу 21 црно поле. Бидејќи во разгледуваното боење имаме 22 црни полиња, заклучуваме дека барем едно од нив нема да биде покриено со тримино. Сега да го разгледаме боењето дадено на средниот цртеж долу. Јасно, при ова боење останува непокриено најмалку едно црно поле.

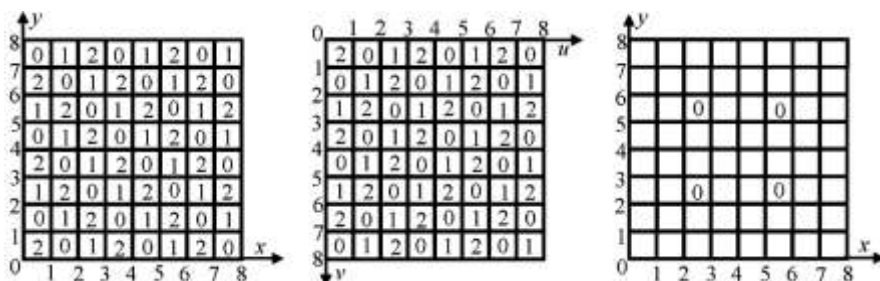


Нека сега ги поставиме сите 21 тримино на десниот цртеж, а потоа тримината на ист начин ги поставиме на средниот цртеж. Притоа, и во двата случаја едно поле останува непокриено и тоа е црно поле. Според тоа, за да видиме кои полиња може да бидат непокриени, доволно е двете боења да ги преклопиме и да ги најдеме заедничките црни полиња. Можните 4 црни полиња кои остануваат непокриени се дадени на десниот цртеж горе.



На претходните четири цртежи е прикажано поставувањето на 21 тримино при кое непокриени остануваат најдените 4 полиња.

Втор начин. Да го разгледаме координатниот систем даден на левиот цртеж долу, чиј координатен почеток е долниот лев агол на таблата, а должината на единичната отсечка е еднаква со должината на страната на единелנותите полиња на таблата. На секое поле му придружуваме подреден пар $(x; y)$, каде x и y се координатите на горното десно теме на полето.



Остатокот од делењето на збирот $x+y$ со 3 го запишуваме во соодветното поле. Секое тримино кое е поставено на таблата, согласно условот на задачата покрива 3 полиња со различни остатоци. Значи, сите 21 тримино покриваат 21 нула, 21 единица и 21 двојка. Бројот на нулите на првиот цртеж е 22, а додека на единиците и двојките е 21. Според тоа, ако ги поставиме тримината ќе остане непокриена една нула. За парот $(x; y)$, кој соодветствува на непокриеното поле важи $x+y \equiv 0 \pmod{3}$ и затоа $x+y \in \{3, 6, 9, 12, 15\}$, бидејќи $x+y \leq 16$. Сега да го разгледаме координатниот систем даден на средниот цртеж, чиј координатен почеток е во горниот десен агол на таблата, а ординатната оска е со спротивна насока. На секое поле му го придружуваме парот $(u; v)$, каде u и v се координатите на долното десно теме на полето. Остатокот од делењето на збирот $u+v$ со 3 повторно го запишуваме отово во полето. Како и погоре заклучуваме, дека при произволно поставување на 21 тримино, секогаш ќе остане една нула непокриена. За парот $(u; v)$, кој соодветствува

на непокриеното поле важи $u+v \equiv 0 \pmod{3}$ и $u+v \in \{3, 6, 9, 12, 15\}$, бидејќи $u+v \leq 16$. Да разгледаме едно поле од таблата, на кое во првиот координатен систем соодветствува парот $(x; y)$, а во вториот координатен систем парот $(u; v)$. Забележуваме, дека $u = x$ и $v = 9 - y$. Тогаш $u + v = x - y + 9 \in \{3, 6, 9, 12, 15\}$. Значи, потребен услов за броевите x и y , кои карактеризираат непокриено поле, е да са решение на еден од следните 25 системи:

$$\begin{array}{l} \begin{cases} x+y=3 \\ x-y+9=3 \end{cases} \begin{cases} x+y=3 \\ x-y+9=6 \end{cases} \begin{cases} x+y=3 \\ x-y+9=9 \end{cases} \begin{cases} x+y=3 \\ x-y+9=12 \end{cases} \begin{cases} x+y=3 \\ x-y+9=15 \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=6 \\ x-y+9=3 \end{cases} \begin{cases} x+y=6 \\ x-y+9=6 \end{cases} \begin{cases} x+y=6 \\ x-y+9=9 \end{cases} \begin{cases} x+y=6 \\ x-y+9=12 \end{cases} \begin{cases} x+y=6 \\ x-y+9=15 \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=9 \\ x-y+9=3 \end{cases} \begin{cases} x+y=9 \\ x-y+9=6 \end{cases} \begin{cases} x+y=9 \\ x-y+9=9 \end{cases} \begin{cases} x+y=9 \\ x-y+9=12 \end{cases} \begin{cases} x+y=9 \\ x-y+9=15 \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=12 \\ x-y+9=3 \end{cases} \begin{cases} x+y=12 \\ x-y+9=6 \end{cases} \begin{cases} x+y=12 \\ x-y+9=9 \end{cases} \begin{cases} x+y=12 \\ x-y+9=12 \end{cases} \begin{cases} x+y=12 \\ x-y+9=15 \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=15 \\ x-y+9=3 \end{cases} \begin{cases} x+y=15 \\ x-y+9=6 \end{cases} \begin{cases} x+y=15 \\ x-y+9=9 \end{cases} \begin{cases} x+y=15 \\ x-y+9=12 \end{cases} \begin{cases} x+y=15 \\ x-y+9=15 \end{cases} \end{array}$$

Од овие системи решение имаат осмиот, дванаесеттиот, четиринаесеттиот и осумнаесеттиот. Соодветните решенија

$$x=3, y=3; x=3, y=6; x=6, y=3 \text{ и } x=6, y=6.$$

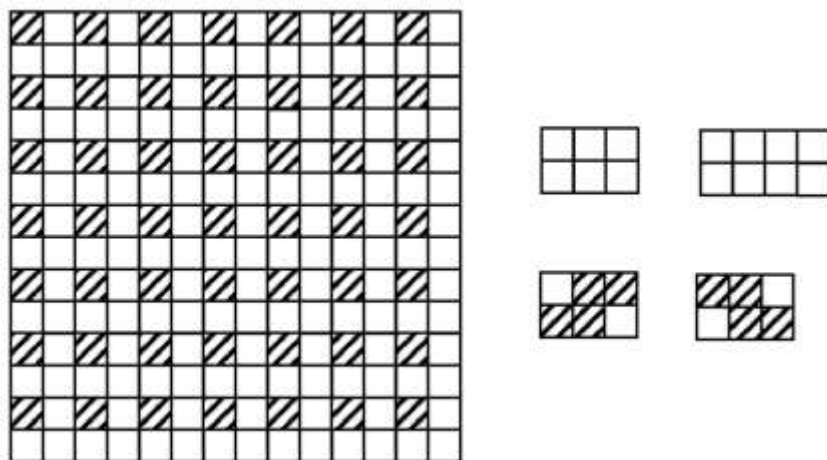
Полињата кои соодветствуваат на добиените решенија се прикажани на цртежот десно. Според тоа, добивме ист резултат, како и при првиот начин, при што реализациите на покривањата се исти како и при првиот начин.

27. Дадена е табла со димензии 14×14 , разделена на 196 единечни квадратчиња (полиња) и тетрамино прикажано на цртежот десно, составено од 4 единечни квадратчиња.



Опреди го најмалиот број полиња кој треба да се обои од таблата така што при произволно поставување на тетраминото на таблата тоа да покрива барем едно обоено поле. При поставувањето треба сите единечно полиња на тетраминото да се поклопуваат со единечни полиња на таблата. Дозволено е превртување и ротирање на тетраминото.

Решение. Подолу е прикажан пример со 49 обоени полиња, кој ги задоволува условите на задачата.



Ќе докажеме, дека целта не може да се постигне ако се обоени помалку од 49 полиња. Да забележиме дека на таблата секој правоаголник со димензии 2×3 треба да има барем едно обоено поле (било кое поле од средната колона), а секој правоаголник 2×4 треба да има барем две обоени полиња (по едно од двете средни колони). Сега таблата да ја поделиме на 7 правоаголници со димензии 2×14 . Секој од нив ќе го разгледуваме како да е составен од еден 2×2 квадрат и три 2×4 правоаголници. Ако во квадратот 2×2 има барем едно обоено поле, ќе истристиме дека во трите правоаголници 2×4 треба да има барем по 2 обоени полиња. Во случајов во правоаголникот 2×14 треба да има барем $1 + 2 \cdot 3 = 7$ обоени полиња. Меѓутоа, ако во квадратот 2×2 нема обоено поле, тогаш ќе го разгледуваме правоаголникот 2×14 кој е составен од два правоаголника 2×3 и два правоаголника 2×4 . Можеме да сметаме, дека квадратот 2×2 со необоените полиња е дел од правоаголник 2×3 . Тетраминото може да се постави во тој правоаголник на два различни начина, како што е прикажано на горните цртежи. Тогаш во разгледаниот правоаголник 2×3 треба да има барем 2 обоени полиња. Значи, во правоаголникот 2×14 треба да има барем $2 + 1 + 2 \cdot 2 = 7$ обоени полиња. За целата табла бројот на обоените квадрати треба да биде барем $7 \cdot 7 = 49$.

28. Колку најмногу скокачи (коњи) може да се распоредат на шаховска табла со димензии 5×5 така што секој од нив напаѓа точно по два од останатите скокачи (коњи).

Решение. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека полињата во аглиите на таблата се црни. Бидејќи секој скокач напаѓа

точно два други скокачи кои се наоѓаат на бели полиња, заклучуваме дека бројот на зафатените црни полиња е еднаков на бројот на зафатените бели полиња. Според тоа, ако бројот на празните бели полиња е еднаков на n , тогаш бројот на празните црни полиња е еднаков на $n+1$. Нека скокачот се наоѓа на централното поле кое е црно. Тогаш бројот на празните бели полиња е најмалку 6, па затоа бројот на празните црни полиња е најмалку 7. Според тоа, на таблата може да се постават најмногу $25-6-7=12$ скокачи.

Нека претпоставиме дека на централното поле нема скокач. Да ги поделиме празните полиња како на цртежот десно. Да претпоставиме дека на полињата означени со бројот 1 се наоѓаат скокачите a, b, c . Тогаш од долниот лев цртеж

	3		3	
1		4		2
	2		1	
1		3		2
	4		4	

следува: бидејќи скокачот од полето a мора да напаѓа два скокачи, а централното поле е празно, заклучуваме дека на e и d мора да има скокачи. Аналогно, ако го разгледуваме скокачот на полето b , тогаш мора да има скокачи на полињата f и g . Но, тогаш скокачот c

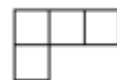
		d		
a	f			
			c	
b	e			
		g		

	S	S	S	
S	S		S	S
S				S
S	S		S	S
	S	S	S	

напаѓа 4 други скокачи, што е противречност. Заради симетрија на означувањето на полињата со броевите 1, 2, 3 и 4, заклучуваме дека меѓу полињата означени со ист број мора да има барем едно поле на кое нема скокач. Тоа значи, дека бројот на празните бели полиња е поголем или еднаков на 4, што значи дека бројот на празните црни полиња е поголем или еднаков на 5, а на таблата може да има најмногу $25-4-5=16$ скокачи.

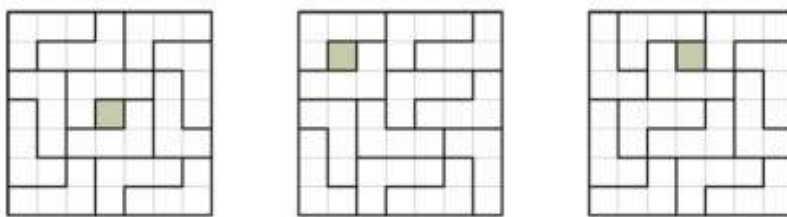
Бидејќи меѓу полињата означени со ист број треба едно да е празно, логично е тоа да биде полето на кое на вториот цртеж се наоѓа скокачот c , кој напаѓа 4 полиња и најмногу го нарушува условот. Сега ако ги оставиме празни четирите полиња означени со 1, 2, 3 и 4, кои се симетрични во однос на средните линии и дијагоналите на таблата, тогаш лесно се конструира распоредот прикажан на горниот десен цртеж.

29. Табла со димензии 7×7 е покриена со L фигури составени од 4 еднакви квадрати, но така да точно едно поле



останува непокриено. Најди ги сите полиња на таблата кои може да останат непокриени.

Решение. Таблата ја боиме црно бело, како шаховската табла. Притоа добиваме 25 црни и 24 бели полиња. Бидејќи L фигурата покрива 2 бели и 2 црни полиња, секогаш непокриено останува црно поле. Сега таблата да ја обоиме црно-бело по колони. Нека x е бројот на L фигурите кои покриваат три црни и едно бело поле, а y е бројот на фигурите кои покриваат три бели и едно црно поле. Во овој случај разликата на бројот меѓу црните и белите полиња може да биде 8 или 6, во зависност од тоа дали непокриено останува црно или бело поле. Бидејќи $x + y = 12$, заради парноста следува $x - y = 4$, па во случајов останува непокриено бело поле. Црни полиња од првото боење, кои при второто боење стануваат бели има вкупно девет и тоа: (2,2), (2,4), (2,6), (4,2), (4,4), (4,6), (6,2), (6,4) и (6,6) и со проба ги наоѓаме бараните покривања. Јасно, заради симетрија доволно е да ги разгледаме полињата (2,2), (2,4) и (4,4), види цртеж долу.



30. Кука ќе ја наречеме кука фигурата прикажана на цртежот десно, која составена од шест единечни квадрати, или било која друга фигура која е добиена од оваа фигура со примена на ротации и осни симетрии. Определи ги сите

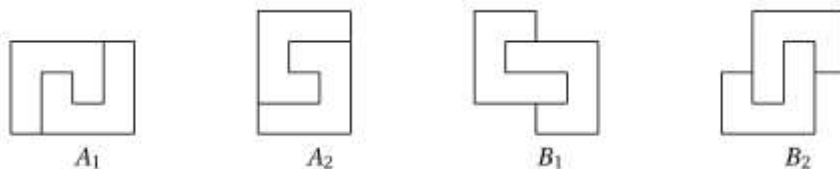


$m \times n$ правоаголници кои можат да се покријат со куки така што

- 1) правоаголникот е покриен без празнини и преклопувања,
- 2) ниту еден дел од некоја кука не е надвор од правоаголникот.

Решение. Одговор. Сите правоаголници $m \times n$ за кои $12 | mn$, барем еден од броевите m, n е делив со 4 и $m, n \in \{1, 2, 5\}$.

Нека претпоставиме дека правоаголникот $m \times n$ може да се покрие со куки. За секоја кука H нејзиниот “внатрешен” квадрат е покриен точно со една кука K . Од друга страна, H го покрива внатрешниот квадрат на K , па затоа сите куки можат да се поделат на парови $\{H, K\}$ кои формираат една од следниве фигури со плоштина 12.



Значи, нашиот правоаголник е покриен со вакви фигури. Тоа значи дека $12 \mid mn$.

Нека претпоставиме дека $4 \nmid m$ и $4 \nmid n$. Тогаш броевите m и n се парни, а вкупниот број фигури составен од две куки (цртеж горе) е непарен. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека вкупниот број фигури A_1, B_1 е непарен. Да ја обоиме секоја четврта колона на таблата $m \times n$ во црно. Тогаш секоја од фигурите A_1, B_1 покрива по три црни полиња, додека секоја од фигурите A_2, B_2 покрива по 2 или 4 црни полиња. Значи, бројот на покриените црни полиња е непарен, што не е можно, бидејќи има парен број црни полиња.

Сега нека претпоставиме дека, на пример, $4 \mid m$. Ако $3 \mid n$, тогаш правоаголникот $m \times n$ може да се подели на 4×3 правоаголници. Исто така, ако $12 \mid m$ и $n \in \{1, 2, 5\}$, тогаш $n = 3k + 4l$, за некои $k, l \in \mathbb{N}_0$, па затоа правоаголникот $m \times n$ може да се подели на правоаголници 12×3 и 12×4 , и оттука на правоаголници 4×3 и 3×4 . Од друга страна, ако $12 \mid m$ и $n \notin \{1, 2, 5\}$ лесно се гледа дека покривањето не е можно.

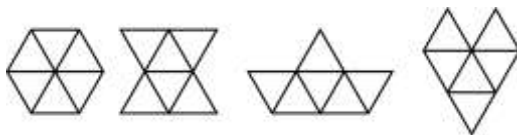
31. Квадратна табла со димензии 2004×2004 е покриена со тетрамина од облик 1×4 кои не се преклопуваат и не излегуваат надвор од таблата. Тетрамината се поставени хоризонтално и вертикално. Дали постои покривање во кое бројот на хоризонтално поставени тетрамина е еднаков на бројот на вертикално поставени тетрамина?

Решение. Нека претпоставиме дека постои покривање во кое бројот на хоризонтално поставените тетрамина и бројот на вертикално поставените тетрамина се еднакви. Вкупниот број на тетрамина е делив со 4 но не е делив со 8. Според тоа, бројот на вертикалните, односно бројот на хоризонталните тетрамина е делив со 2 но не и со 4.

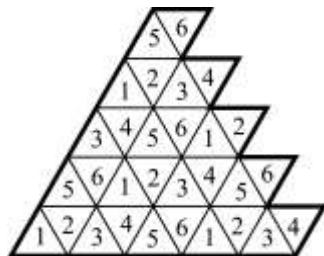
Почнувајќи од првиот најгорен ред секој четврти ред заедно со првиот ќе го обоиме со црвена боја. Според тоа, бројот на полиња кој е обоен во црвено е еднаков на $501 \cdot 2004$, односно бројот на црвени полиња е делив со 4.

Секоја хоризонтално поставено тетрамино покрива или 0 или 4 црвени полиња. Според тоа, бројот на црвени полиња кој е препокриен со хоризонтално поставените тетрамина е делив со 4. Секое вертикално поставено тетрамино покрива едно црвено поле. Бројот на вертикално поставените тетрамина е еднаков на 1002, па според тоа, бројот на вертикално поставени домина препокрива 1002 црвени полиња. Бројот 1002 е делив со 2 но не е делив со 4. Според тоа, бројот на црвени полиња кој е препокриен со домината е број делив со 2 но не е делив со 4. Тоа е контрадикција со почетната претпоставка.

32. Од рамнострани триаголник со страна 2014 е отсечен рамнострани триаголник со страна 214, така што едно теме им се совпаѓа и две од страните од отсечениот триаголник лежат на две од страните на почетниот. Дали оваа фигура може да се пополни со фигури како подолу без преклопување (дозволена е ротација), ако триаголниците во фигурите се рамно-страни со страна 1?



Решение. Најпрво ја разделуваме дадената фигура на рамнострани триаголници со страна 1. Ги обележуваме триаголничката во дадената фигура со броевите од 1 до 6, како на сликата десно (во првиот ред последователно од 1 до 6, па броевите се повторуваат, во вториот почнуваме од 5, во третиот од 3, потоа од 1 и постапката се повторува).



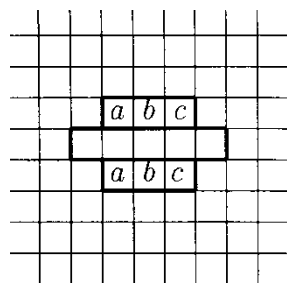
Лесно може да се забележи дека секоја од фигурите покрива по точно еден од броевите од 1 до 6. Според последното за фигурата да може да се покрие со дадените фигури, треба секој од броевите да се јавува еднаков број пати. Ако споредиме колку пати се јавува бројот 1 со колку пати се јавува бројот 2 ќе забележеме дека во првиот, четвртиот и секој ред од облик $3k+1$ имаме една единица повеќе отколку двојки, а во останатите бројот на единици и двојки е еднаков, според ова, следува дека бројот на единици и двојки не е еднаков, па не може секој од броевите да се јавува еднаков број пати. Следува дека фигурата не може да се покрие на бараниот начин.

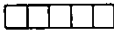
33. Нека рамнината е поделена со хоризонтални и вертикални прави на 1×1 квадратчиња, кои се обиеени во 5 бои така што секое квадратче во



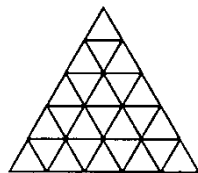
секој крст е обоено во различна боја. Докажи дека секое квадратче во секој 1×5 правоаголник  е обоено во различна боја.

Решение. Да претпоставиме дека во некој правоаголник отсуствува некоја од петте бие, да кажеме црвената (види цртеж). Тогаш едно од ква означени со исти букви ќе биде обоено со црвена боја (во спротивно црвената боја ќе отсуствува во соодветниот крст). Но, тогаш еден од двата крста кои вклучуваат ред означен со буквите a, b, c ќе има две квадратчиња обоени со црвена боја, што противречи на условот на задачата.



Значи секое квадратче во секој 1×5 правоаголник  е обоено во различна боја.

34. Рамностран триаголник со должина на страна n , $n \in \mathbb{N}$ е поделен со прави паралелни на страните на рамностранни триаголници со должина на страна 1 (за $n=5$ види цртеж).

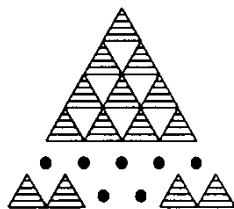


Колку најмногу отсечки со должина 1 и крајни точки во темињата на малите триаголници може да се отстранат така што да не постои триаголник со страни кои се наоѓаат меѓу отстранетите отсечки?

Решение. Бројот на отсечките со должина 1, паралелни на секоја страна од триаголникот е еднаков на

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

што значи дека вкупниот број на отсечки со должина 1 е еднаков на $\frac{3n(n+1)}{2}$. Секои две отсечки, паралелни со две страни на почетниот триаголник не формираат мал триаголник, бидејќи секој мал триаголник се состои од три отсечки кои се паралелни на сите три страни.



Според тоа, сигурно може да се отстранат $\frac{2}{3} \cdot \frac{3n(n+1)}{2} = n(n+1)$ отсечки со должина 1.

Ќе докажеме дека повеќе отсечки не може да се отстранат. Да штрафираме триаголници со должина на страна 1 како на горниот цртеж. Овие триаголници ги содржат сите отсечки со должина 1, при што секоја отсечка припаѓа само на еден триаголник. Затоа, за да не може да се состави ниту еден од штрафираните триаголници, во секој може да се отфрлат најмногу 2 отсечки. Според тоа, бројот на отстранетите отсечки не е поголем од $\frac{2}{3}$ од вкупниот број отсечки, т.е. не е поголем од $\frac{2}{3} \cdot \frac{3n(n+1)}{2} = n(n+1)$.

III9 ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ

1. Докажи, дека ако еден правоаголник може да биде поделен на 200 и на 288 еднакви квадратчиња, тогаш тој може да биде поделен и на 392 еднакви квадратчиња.

Решение. Со a и b да ги означиме страните на правоаголникот. Нека за да се добијат 200 еднакви квадратчиња овие страни се поделени на m_1 и n_1 делови, соодветно, а за да се добијат 288 еднакви квадратчиња – на m_2 и n_2 делови, соодветно. Имаме,

$$m_1 n_1 = 200, m_2 n_2 = 288, \frac{a}{m_1} = \frac{b}{n_1}, \frac{a}{m_2} = \frac{b}{n_2}.$$

Ставаме $m_3 = 2m_2 - m_1 > 0$ и $n_3 = 2n_2 - n_1 > 0$. Тогаш $\frac{a}{m_3} = \frac{b}{n_3}$. Бидејќи

$$m_1 n_2 = m_2 n_1 = \sqrt{200 \cdot 288} = 240,$$

добиваме дека

$$m_3 n_3 = 4m_2 n_2 + m_1 n_1 - 2m_1 n_2 - 2m_2 n_1 = 392.$$

Според тоа, ако страните на правоаголникот соодветно ги поделиме на m_3 и n_3 делови, тогаш ќе добиеме 392 еднакви квадратчиња.

2. Дадени се $2n$ кутии и $2n$ топчиња. Кутиите и топчињата се означени со броевите $1, 2, \dots, 2n$. Во секоја кутија е ставено по едно топче. Нека $x_i, i=1, 2, \dots, 2n$ е збирот на бројот на кутијата и бројот на топчето кое се наоѓа во неа. Докажи, дека барем два од броевите $x_i, i=1, 2, \dots, 2n$ даваат ист остаток при делење со $2n$.

Решение. Нека претпоставиме дека броевите $x_i, i=1, 2, \dots, 2n$ даваат различни остатоци при делење со $2n$. Тогаш за збирот S на овие броеви важи

$$S \equiv 0 + 1 + 2 + \dots + (2n-1) = \frac{2n(2n-1)}{2} = n(2n-1) \equiv n \pmod{2n}.$$

Од друга страна

$$S = 2(1 + 2 + \dots + 2n) = 2 \cdot \frac{2n(2n+1)}{2} = 2n(2n+1) \equiv 0 \pmod{2n},$$

што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува дека барем два од броевите $x_i, i=1, 2, \dots, 2n$ даваат ист остаток при делење со $2n$.

3. На низата од $n \geq 4$ реални броеви $x_1, x_2, \dots, x_n$ применуваме операција со која ги бришиме сите броеви кои немаат индекс $4k+3$ (на пример, од низата 4, 5, 9, 3, 6, 6, 1, 8 ја добиваме низата 9, 1, па во следниот чекор ги бришиме двата броја). На низата 1, 2, 3, ..., 1024 оваа операција е применета пет пати последователно. Определи ја низата која останала.

Решение. Бидејќи $4|1024$ од условот на задачата следува дека при првиот потез остануваат $1024 - 3 \cdot 1024 : 4 = 256$ броеви. Слично, после вториот потез остануваат $256 - 3 \cdot 256 : 4 = 64$ броеви, после третиот потез остануваат $64 - 3 \cdot 64 : 4 = 16$ броеви, после четвртиот потез остануваат $16 - 3 \cdot 16 : 4 = 4$ броеви и после петтиот потез останува само еден број.

После првиот број низата е 3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, ..., 1019 и разликата меѓу секои два последователни члена е еднаква на 4. После вториот потез првиот број кој останува е 11 и бидејќи бришиме три броја разликата меѓу секои два последователни членови е еднаква на $4 \cdot 4 = 16$, па низата која останува е 11, 27, 43, После третиот потез првиот број кој останува е 43 и бидејќи бришиме три броја разликата меѓу секои два последователни члена е еднаква на $4 \cdot 16 = 64$, па низата која останува е 43, 107, 171, ... После четвртиот потез првиот број кој останува е 171 и бидејќи бришиме три броја разликата меѓу секои два броја е еднаква на $4 \cdot 64 = 256$, па низата која останува е 171, 427, 683, 939. Конечно, после петтиот потез останува бројот 683.

4. Во квадратчињата на шаховска табла со димензии 10×10 се запишани броевите од 1 до 100, така што секој број е запишан точно по еднаш. За секои два броја поврзани со движењето на скокачот, ја пресметуваме нивната разлика така што од поголемиот број го одземаме помалиот. Колку најмалку различни броеви може да има меѓу добиените разлики?

Решение. Да ги нумерираме колоните на таблата одлево надесно и редовите одгоре надолу. Секое квадратче ќе го означиме со подредениот пар од бројот на редот и бројот на колоната во кои се наоѓа.

Оценка. Да разгледаме квадратче од кое можат да се направат 8 скокови (такви се сите квадратчиња во централниот 6×6 квадрат). Ако во разгледуваното квадратче е запишан бројот m , а во останатите 8 квадратчиња се запишани броевите a, b, c, d, e, f, g, h , тогаш меѓу разликите $a - m, b - m, c - m, d - m, e - m, f - m, g - m, h - m$ има најмалку четири кои се со ист знак и се различни меѓу себе (зошто?). Значи, меѓу добиените разлики има најмалку четири различни броеви.

Конструкција. Точно четири разлики имаме ако, на пример, квадратчињата се нумерирани одлево надесно и одгоре надолу, т.е. кога квадратчето (i, j) го содржи бројот $10(i-1) + j$.

5. Во квадрат 3×3 , составен од 9 мали квадратчиња се запишани броевите од 1 до 9. За секој од четирите 2×2 подквадрати е пресметан збирот од запишаните броеви. Најмалиот од четирите зборови го нарекуваме карактеристика на квадратот. Да се определи најголемата можна карактеристика на квадратот.

Решение. Нека x е карактеристиката на квадратот. Да ги пресметаме зборовите на броевите во четирите подквадрати и да ги собереме. Во добиениот збир броевите a_i , кои се во аглиите на квадратот,

a_1	b_1	a_2
b_2	c	b_3
a_3	b_4	a_4

учествуваат еднаш, броевите b_i , кои се во средините на страните – 2 пати и бројот c , кој е во центарот на квадратот – 4 пати. Бидејќи x е најмалиот збир имаме

$$4x \leq (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) + 2(b_1 + b_2 + b_3 + b_4) + 4c.$$

Но, ние ја бараме најголемата можна вредност на x , па затоа

1	7	2
8	9	6
3	5	4

$$4x \leq (1 + 2 + 3 + 4) + 2(5 + 6 + 7 + 8) + 4 \cdot 9 = 98,$$

т.е. $x \leq \frac{98}{4} = 24\frac{1}{2}$. Бидејќи x е природен број важи $x \leq 24$. Десно е покажан пример на квадрат со карактеристика 24.

6. Во единечните квадратчиња на квадратна табела 3×3 се запишуваат 9 различни природни броеви чиј збир е еднаков на S . Табелата ја нарекуваме “интересна”, ако при прецртување на било кој ред и било која колона збирот на двата броја во дијагонални полиња е еднаков на збирот на другите два броја во дијагоналните полиња.

а) Докажи дека за $S = 2018$ не постои интересна табела.

б) Најди го бројот на различните интересни табели кои ги содржат броевите 1, 2, 3, 5, 668 и за кои S е најмал можен број. (Две табели се различни, ако не се добиваат една од друга со вртење околу центарот на табелата.)

Решение. а) Да разгледаме една интересна табела. Ако ги прецртаме вториот ред и втората колона, од условот имаме $a_1 + a_9 = a_3 + a_7$ и ако на двете страни го додадеме a_5 , добиваме

a_1	a_2	a_3
a_4	a_5	a_6
a_7	a_8	a_9

$$a_1 + a_5 + a_9 = a_3 + a_5 + a_7,$$

т.е. збирот на броевите на секоја од дијагоналите е еднаков. Нека тој збир е еднаков на a . Сега да ги прецртаме третиот ред и третата колона. Добиваме $a_1 + a_5 = a_2 + a_4 = a - a_9$, т.е. $a_2 + a_4 + a_9 = a$. На сличен начин, ако ги прецртаме првиот ред и првата колона, имаме $a_6 + a_8 = a_5 + a_9 = a - a_1$, т.е. $a_6 + a_8 + a_1 = a$. Тогаш

$$S = (a_2 + a_4 + a_9) + (a_6 + a_8 + a_1) + (a_3 + a_5 + a_7) = 3a.$$

Бидејќи бројот 2017 не се дели со 3, следува дека интересна табела со $S = 2017$ не постои.

б) Ќе ги искористиме ознаките од а). Бидејќи бараме интересна табела со најмал можен збир S , задачата се сведува на наоѓање на најмалата вредност на a , каде a е некој од разгледуваните зборови во а). Природно е да работиме со броевите 1 и 666. Можеме да сметаме, дека $a_1 = 1$ и $a_9 = 668$. Тогаш задачата се сведува на наоѓање на најмалата можна вредност на a_5 . Од условот $a_1 + a_5 = a_2 + a_4$ следува, дека $a_5 \neq 2$ и $a_5 \neq 3$. Ќе докажеме, дека постои интересна табела со $a_5 = 4$. За неа $S = 3 \cdot (1 + 4 + 668) = 3 \cdot 671 = 2019$. Освен тоа е јасно, дека во тој случај $a_2 = 2$ и $a_4 = 3$ или обратно, т.е. $a_2 = 3$ и $a_4 = 2$. За бројот 5 има две можности: при првата $a_6 = 5$ или $a_8 = 5$, а при втората бројот 5 е во аголно единечно квадратче на табелата, т.е. $a_3 = 5$ или $a_7 = 5$. Првата можност се отфрла со непосредна проверка, а при втората ги добиваме следните две табели:

1	2	5
3	4	7
664	665	668

1	2	664
3	4	666
5	6	668

Во а) докажавме, дека

$$a_1 + a_5 + a_9 = a_3 + a_5 + a_7 = a_2 + a_4 + a_9 = a_6 + a_8 + a_1 = a.$$

На потполно аналоген начин може да се докаже дека

$$a_2 + a_6 + a_7 = a \text{ и } a_4 + a_8 + a_3 = a.$$

Така, добиваме 6 збирови, во секој од кои има по еден претставник на секој ред и секоја колона од табелата. Оттука следува, дека од секоја од горните 2 табели можеме да добиеме 9 табели во зависност од бројот во центарот на табелата, за што има вкупно 9 можности. На секоја од тие 9 табели соодветствува по една, која се добива со замена на броевите во аголните полиња на една од дијагоналите. Останатите разместувања не водат до различни табели. Следствено вкупниот број на различни интересни табели е $9 \cdot 2 + 9 \cdot 2 = 36$.

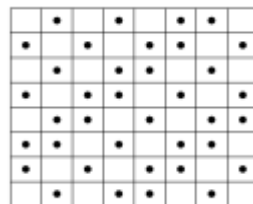
7. Во полињата на табла со димензии 8×8 се распоредени жетони така што:

- 1) Барем во едно поле на секој правоаголник со димензии 1×2 или 2×1 има барем еден жетон.
- 2) Во секој правоаголник со димензии 7×1 или 1×7 има барем два жетони кои се наоѓаат во соседни полиња.

Опреди го најмалиот можен број на жетони.

Решение. На цртежот десно е покажано како може да се постават 37 жетони, при што се исполнети условите 1) и 2). Ќе докажеме дека 37 е бараниот минимален број жетони.

Од 1) следува, дека секоја колона од таблата содржи барем по 4 жетони.



Да ги разгледаме колоните на таблата 6×6 добиена од дадената со отстранување на крајните редови и колони. Од 1) следува, дека секоја таква колона содржи барем три жетони.

Во ниту една од колоните 6×1 која е со три жетони не е можно тие жетони да се преку едно поле, бидејќи тогаш во соодветната колона на големата табла не е исполнет условот 2). Според тоа, во колоните со три жетони овие три жетони се наоѓаат во второто, третото и петтото, или во второто, четвртото и петтото поле.

Со k да го означиме бројот на колоните со три жетони. Останатите $6 - k$ мали колони и двете крајни големи колони содржат барем по 4 жетони. Уште да забележиме, дека од 1) следува дека колоните од големата табла кои содржат колони од малата табла со по 3 жетони, задолжително содржат по 5 жетони.

Нека претпоставиме дека две колони со по три жетони се соседни. Тогаш нивните први соседни полиња формираат 2×1 правоаголник во кој нема жетон, што е противречност. Бидејќи вкупно имаме 6 колони, најмногу 3 од нив содржат по 3 жетони, т.е. $k \leq 3$.

Да ги разгледаме двата 6×1 правоаголници кои се наоѓаат непосредно под и над малата табла. Можни се два случаја.

Прв случај. Ако еден од тие правоаголници содржи не повеќе од 3 жетони, тогаш на крајните колони на големата табла има најмалку по 5 жетони и затоа на целата табла има најмалку

$$5k + 2 \cdot 5 + 4(6 - k) + 2(k - 3) = 40 - k \geq 37$$

жетони.

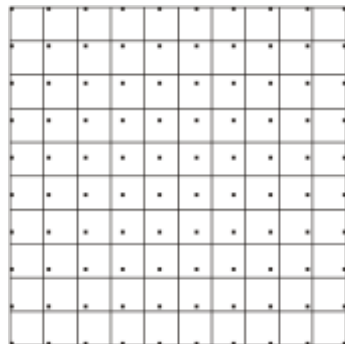
Втор случај. Ако и двата правоаголника содржат најмалку по 4 жетони, тогаш вкупниот број жетони е најмалку

$$5k + (4(8 - k) + 2(4 - k)) = 40 - k \geq 37.$$

8. Нека $ABCD$ е квадрат со должина на страната 10. Да се определи максималниот број точки, кои можат да бидат распоредени во внатрешноста на квадратот, така што секој квадрат со должина на страна 1 и страни, паралелни на страните на $ABCD$, да содржи (заклучно со неговата граница) најмногу 4 точки.

Решение. Да разгледаме координатен систем со почеток во точката A и таков што точката B има координати $(10, 0)$, точката C има координати $(10, 10)$, и точката D има координати $(0, 10)$. Да ги разгледаме квадратите со темиња во точките со координати (i, j) , $(i + 1, j)$, $(i + 1, j + 1)$ и $(i, j + 1)$, $i, j \in \mathbb{Z}$, $0 \leq i, j \leq 9$. Тие квадрати се со должина на страна еднаква на 1 и страните им се паралелни на страните на квадратот $ABCD$. Затоа секој од овие квадрати може да содржи најмногу 4 од точките. Бидејќи имаме вкупно 100 квадрати кои целосно го покриваат $ABCD$, во $ABCD$ не може да се распоредат повеќе од 400 точки, кои го задоволуваат условот на задачата.

Ќе докажеме, дека во $ABCD$ можат да бидат распоредени 400 точки, кои го задоволуваат условот на задачата. Да забележиме, дека еден квадрат со должина на страната 1 и страни паралелни на страните на $ABCD$, содржи две точки



E и F со координати соодветно (x_E, y_E) и (x_F, y_F) ако и само ако

$$|x_E - x_F| \leq 1 \text{ и } |y_E - y_F| \leq 1.$$

Да ги разгледаме квадратчињата со темиња во точките со координати, $(i + \frac{i}{10}, j + \frac{j}{10})$, $(i + \frac{i+1}{10}, j + \frac{j}{10})$, $(i + \frac{i+1}{10}, j + \frac{j+1}{10})$ и $(i + \frac{i}{10}, j + \frac{j+1}{10})$, $i, j \in \mathbb{Z}, 0 \leq i, j \leq 9$. Овие квадратчиња се вкупно 100 и имаат должина на страната $\frac{1}{10}$. Нека избереме по 4 точки од внатрешноста на секое од овие квадратчиња. Така сме избрале вкупно 400 точки од внатрешноста на $ABCD$.

Да допуштиме, дека квадрат со должина на страна 1 и со F $ABCD$ тр $(i + \frac{i}{10}, j + \frac{j}{10})$ $(k + \frac{k+1}{10}, s + \frac{s}{10})$ ани пар $(k + \frac{k}{10}, s + \frac{s+1}{10})$ алелни на страните на , содржи повеќе од 4 точки. Тогаш тој содржи точка E со координати (x_E, y_E) од квадратче со темиња

$$, (i + \frac{i+1}{10}, j + \frac{j}{10}), (i + \frac{i+1}{10}, j + \frac{j+1}{10}) \text{ и } (i + \frac{i}{10}, j + \frac{j+1}{10}),$$

и точка со координати (x_F, y_F) од квадратче со темиња

$$(k + \frac{k}{10}, s + \frac{s}{10}), , (k + \frac{k+1}{10}, s + \frac{s+1}{10}) \text{ и } ,$$

каде i, j, k и s се цели броеви и $(i, j) \neq (k, s)$. Според тоа, точни се неравенствата:

$$i + \frac{i}{10} < x_E < i + \frac{i+1}{10}, j + \frac{j}{10} < y_E < j + \frac{j+1}{10}, k + \frac{k}{10} < x_F < k + \frac{k+1}{10},$$

$$s + \frac{s}{10} < y_F < s + \frac{s+1}{10}, |x_E - x_F| \leq 1 \text{ и } |y_E - y_F| \leq 1.$$

Од првите 4 неравенства добиваме

$$i - k + \frac{i-k-1}{10} < x_E - x_F < i - k + \frac{i-k+1}{10}$$

$$j - s + \frac{j-s-1}{10} < y_E - y_F < j - s + \frac{j-s+1}{10}.$$

Оттука и од неравенствата $|x_E - x_F| \leq 1$ и $|y_E - y_F| \leq 1$, добиваме $|11(i-k)| < 11$ и $|11(j-s)| < 11$, од каде следува $i=k$ и $j=s$, што противречи на $(i, j) \neq (k, s)$. Според тоа, овие 400 избрани точки го задоволуваат условот на задачата.

9. Ќе велиме, дека едно пополнување со 0 и 1 на правоаголна таблица со 5 реда и n колони (n – природен број) е “добро”, ако можеме да избереме 3 реда и 3 колони од таблицата така, што во клетките, во кои тие се сечат, е запишан еден и ист број. Да се определи најмалиот m ,

за кој секое пополнување со 0 и 1 на таблица со 5 реда и n колони, каде $n \geq m$, е добро.

Решение. Ќе велíme, дека едно пополнување со 0 и 1 на таблица со 5 реда и n колони е “специјално”, ако во секоја колона на таблицата има точно 3 нули (и следствено 2 единици) или точно 3 единици (и следствено 2 нули). Јасно, едно специјално пополнување на таблица со 5 реда е добро ако и само ако во таблицата има барем 3 еднакви колони. Различни колони со 5 реда (клетки), во кои има точно 3 нули и 2 единици или точно 3 единици и 2 нули, имаме точно 20 (бројот на различни колони со точно 3 нули, како и на оние со точно 3 единици, е еднаков на 10). Следствено, ако во една таблица со 5 реда и 40 колони ја секоја од погоре опишаните 20 колони по двапати, ќе добиеме специјално пополнување на таблицата, кое не е добро.

Нека сега имаме таблица со 5 реда и $40 + s$ ($s \geq 1$) колони, пополнета со 0 и 1. Од даденото пополнување правиме ново на следниов начин: ако во дадена колона од таблицата има повеќе од 3 нули, тогаш ги заменуваме првите една или две со единици, така што во колоната да останат точно 3 нули. Соодветно, ако во дадена колона има повеќе од 3 единици, тогаш ги заменуваме првите една или две со нули, така што во колоната да останат точно 3 единици. Јасно, така добиеното пополнување е специјално. Уште повеќе: ако специјалното пополнување е добро, тогаш оригиналното пополнување исто така е добро. Навистина, ако во специјалното пополнување можеме да избереме 3 реда и 3 колони, кои се сечат во клетки, во кои, да кажеме е запишан бројот нула, тогаш избраните колони се добиени од оригиналното пополнување со отстранување на некои од нулите. Следствено нулите, во кои се сечат избраните редове и колони, се наоѓаат и во оригиналното пополнување.

Да ги поделиме колоните на специјалното пополнување на две групи: во едната се колони, кои содржат точно 3 нули, а во другата – тие, кои содржат точно 3 единици. Бидејќи вкупниот број на колони е $40 + s$, во едната група ќе имаме барем 21 од колоните на таблицата. Без ограничување на општоста нека тоа е групата колони кои содржат точно 3 нули. Бидејќи имаме 10 различни колони кои содржат 3 нули, а во таа група има барем 21 колона, некоја од колоните ќе се сретне барем 3 пати и следствено пополнувањето е добро.

Конечно, бараниот m е бројот 41.

10. На кружница се избрани 2012 точки, кои кружницата ја делат на еднакви лаци. Од овие 2012 точки се земени k точки и со нив е конструиран конвексен k -аголник. Кој е најголемиот број k , за кој е можно k -аголникот да нема паралелни страни?

Решение. Нека се избрани точките $A_1, A_2, \dots, A_{2012}$. Да ги разгледаме четворките точки

$(A_1, A_2, A_{1007}, A_{1008}), (A_3, A_4, A_{1009}, A_{1010}), \dots, (A_{1005}, A_{1006}, A_{2011}, A_{2012})$. Ако меѓу избраните точки се среќаваат сите точки од некоја четворка $(A_{2i-1}, A_{2i}, A_{2i+1005}, A_{2i+1006})$ (сметаме дека $A_{2013} = A_1, A_{2014} = A_2$), тогаш во добиениот многуаголник ќе има две паралелни страни $A_{2i-1}A_{2i}$ и $A_{2i+1005}A_{2i+1006}$, кои се симетрични во однос на центарот на кружницата и затоа се паралелни. Тоа значи, дека од секоја од горните 503 четворки може да се изберат најмногу три точки, т.е. $k \leq 503 \cdot 3 = 1509$.

Останува да најдеме пример на 1509-аголник со темиња во дадените точки, кој нема паралелни страни. Таков е, на пример, многуаголникот

$$A_1 A_2 \dots A_{1006} A_{1008} A_{1010} \dots A_{2012},$$

чии темиња се сите точки со индекси од 1 до 1006 и сите точки со парни индекси од 1008 до 2012. Навистина, страните $A_{2012}A_1, A_1A_2, \dots, A_{1005}A_{1006}$ се од иста страна на дијаметарот $A_{2012}A_{1006}$ и не можат да бидат паралелни. Аналогно, страните $A_{1006}A_{1008}, \dots, A_{2010}A_{2012}$ две по две не се паралелни. Конечно, дијагоналата A_jA_{j+2} на правилниот 2012-аголник не е паралелна на ниту една негова страна, па затоа никои две страни од видот A_iA_{i+1} и A_jA_{j+2} не се паралелни.

11. Квадрат 4×4 е поделен на 16 единечни квадратчиња и во секое квадратче е запишана нула или единица. Во еден чекор се избира ред или колона на квадратот и се менуваат броевите во квадратчињата во избраниот ред или колона (нулите стануваат единици, а единиците стануваат нули). Квадратот се нарекува *занулен*, ако бројот на нулите во него не може да се намали. Бројот на нулите во еден занулен квадрат се нарекува *степен на квадратот*. Определи ги сите можни вредности на степенот.

Решение. Да забележиме, дека во произволен ред или колона на занулен квадрат има најмногу две нули. Во спротивно во тој ред или

колона ќе ги промениме броевите и бројот на нулите ќе се намали. Ќе докажеме, дека бројот на нулите во занулен квадрат е помал или еднаков на 4. Ако го претпоставиме спротивното, тогаш ќе има ред со две нули. Со A и B да ги означиме колоните во кои се наоѓаат овие две нули. Можеме да сметаме, дека A и B содржат по две нули. Во спротивно ќе ги промениме броевите во избраниот ред и ќе добиеме две колони со по две нули. Петтата нула не е во A или B . Но, тогаш ќе ги промениме броевите во A и B и ќе добиеме ред со три нули, што противречи на фактот дека квадратот е занулен.

Степенот на занулен квадрат може да ги прима вредностите 0, 1, 2, 3 или 4. Пример на занулен квадрат со степен i ($i = 0, 1, 2, 3$ или 4) е квадратот кај кој сите нули се наоѓаат на една од неговите дијагонали. Дека квадратот со нули само на дијагонала е навистина занулен, следува од фактот, дека резултатот од повеќекратното повторување на чекорите не зависи од бројот на чекорите, туку тој зависи од парноста на тој број. Навистина да ги нумерираме последователно редовите на произволен квадрат одгоре-надолу и колоните одлево-надесно со броевите 1, 2, 3 и 4. Да го означиме бројот на чекорите за редот i , со кои се добива занулен квадрат, со r_i , а бројот на чекорите за колоната j , со кои се добива занулен квадрат, соодветно со s_j . Тогаш бројот во единечното квадратче (i, j) , кое се наоѓа во i -тиот ред и j -тата колона, ќе се смени $r_i + s_j$ пати. Ако r_i е парен број, можеме да земеме 0 наместо r_i и резултатот ќе биде ист. Ако r_i е непарен број, можеме да земеме 1 наместо r_i и резултатот ќе биде ист. Аналогно за s_j . Според тоа, за добивање на занулен квадрат можеме да сметаме, дека редовите и колоните на почетниот квадрат се менуваат најмногу по еднаш. Сега е јасно, дека ако нулите са само по дијагонала, нивниот број не може да биде намален.

12. Во квадратна табела со димензии 2017×2017 се запишани цели ненегативни броеви така што ако бројот во едно поле е 0, тогаш збирот на броевите во редот и колоната кои се сечат во тоа поле не е помал од 2017. Докажи, дека збирот на сите броеви запишани во табелата не е помал од 2034145.

Решение. Да ги разгледаме збиравите на броевите запишани во редовите и колоните. Нека најмалиот меѓу добиените збирови е еднаков на k . Да претпоставиме дека тој збир е добиен со собирање на броевите

во некој од редовите. Тогаш во тој ред има најмногу $2017 - k$ нули. Од условот следува, дека збирот на броевите во секоја колона која содржи една тие нули не е помал од $2017 - k$. Во секоја од останатите k колони збирот на броевите не е помал од k . Тогаш за збирот S на броевите запишани во табелата имаме:

$$\begin{aligned} S &\geq k^2 + (2017 - k)^2 = 2k^2 - 2 \cdot 2017k + 2017^2 \\ &= 2\left(k - \frac{2017}{2}\right)^2 + \frac{2017^2}{2} \geq 2034144,5 \end{aligned} \quad (1)$$

Ако најмалиот збир е во една од колоните, тогаш разгледувајќи ги редовите кои ги содржат се добива истиот резултат.

Конечно, бидејќи S е природен број, од (1) следува дека $S \geq 2034145$.

13. а) Во едно друштво третина од сите фудбалери се шахисти, а четвртина од сите шахисти се фудбалери. Дали во ова друштво има повеќе шахисти или фудбалери?

б) Интервалот $(0, 20)$ е покриен со 13 отворени подинтервали така што ниту еден не е подмножество на унијата од останатите интервали. Докажи, дека барем еден од овие подинтервали има должина помала или еднаква на 3.

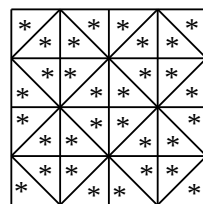
Решение. а) Нека f е бројот на фудбалерите и s е бројот на шахистите. Да го определиме бројот на фудбалери-шахисти. Од една страна, тој е еднаков на третина од бројот на фудбалерите, т.е. на $\frac{1}{3}f$, а од друга страна е еднаков на четвртина од бројот на шахистите, т.е. на $\frac{1}{4}s$. Според тоа, $\frac{1}{3}f = \frac{1}{4}s$, т.е. $s = \frac{4}{3}f > f$, што значи дека во друштвото има повеќе шахисти.

б) Нека претпоставиме дека сите подинтервали се со должина поголема од 3. Подинтервалите да ги означиме со $I_1, \dots, I_{13}$. Ќе составиме табела 19×13 во која на редовите се означени со броевите 1, 2, ..., 19, а колоните со подинтервалите $I_1, \dots, I_{13}$. Во пресекот на i -тата редица и j -тата колона запишуваме 1 ако $i \in I_j$, а 0 во спротивен случај.

Ако некои три подинтервали имаат заедничка точка, тогаш едниот од нив е подмножество на другите два (провери!), што противречи на условот на задачата. Според тоа, секоја целобројна точка се наоѓа најмногу во два подинтервала, т.е. во секој ред се наоѓаат најмногу две единици. Значи, во табелата има најмногу 38 единици. Од друга страна, според претпоставката секој подинтервал содржи најмалку 3

целобројни точки, т.е. во секоја колона има најмалку три единици. Значи, во табелата има $3 \cdot 13 = 39$ единици, што е противречност.

14. На местото на ѕвездичките (цртеж десно) се запишани броевите од 1 до 32, така што секој број е запишан по еднаш. Дали може збиравите, на броевите запишани во секое квадратче кое не е поделено на помали квадратчиња, да се еднакви?



Решение. Збирот на сите броеви е $\frac{32 \cdot 33}{2} = 16 \cdot 33$.

Сите броеви се распределени во 16 мали квадрати.

Следува дека збирот на броевите во секој од овие

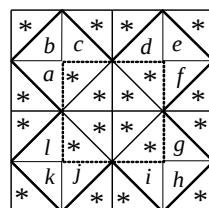
квадрати е 33. Фигурата ограничена со

задебелената линија се состои од пет квадрати кои

не се поделени на помали квадрати, па збирот на

броевите запишани во неа е $5 \cdot 33$. Понатаму,

збирот на броевите запишани во квадратот составен од четирите централни квадрати е еднаков на $4 \cdot 33$. Според тоа,



$$a + b + c + d + e + f + g + h + i + j + k + l = 33,$$

но тоа не е можно, бидејќи

$$33 = a + b + c + d + e + f + g + h + i + j + k + l \geq 1 + 2 + \dots + 12 = 78 > 33,$$

што значи дека одговорот на поставеното прашање е негативен.

15. Дадена е правоаголна табла со димензии 2017×2018 . Дали може да се повлече права која на таблата ќе пресекува 4035 единечни квадрати?

Решение. Да разгледаме правоаголна табла со димензии $m \times n$. Таа е формирана од $m+1$ хоризонтална и $n+1$ вертикална права. Притоа имаме 2 рабни и $m-1$ внатрешна хоризонтална права и 2 рабни и $n-1$ внатрешна вертикална права. Права која на таблата пресекува k единечни квадрати мора да сече $k-1$ внатрешни прави кои ги формираат овие квадрати (зошто?). Бидејќи таблата има $m-1+n-1 = m+n-2$ внатрешни прави, добиваме дека правата може да сече најмногу $k-1 = m+n-2$ прави, што значи дека таа може да пресекува најмногу $k = m+n-1$ единечни квадрати.

Од претходно изнесеното следува дека на табла со димензии 2017×2018 може да се повлече права која ќе пресекува најмногу $k = 2017 + 2018 - 1 = 4034$ единечни квадрати. Според тоа, не може да се повлече права која на таблата ќе пресекува 4035 единечни квадрати.

16. Некои од полињата на квадратна $n \times n$, $n \geq 2$ мрежа се минирани така што во секој 2×2 квадрат има барем едно минирано поле. Во секое поле е запишан бројот на минирани полиња кои имаат заеднички точки со тоа поле (тоа се самото поле и полињата кои имаат заедничка страна или заедничко теме со тоа поле). Нека M е најголемиот запишан број. Определи ја најмалата можна вредност на M .

Решение. Редиците и колоните на мрежата ги нумерираме така што секое поле се задава со подреден пар природни броеви (x, y) . Ако $n = 2$ или $n = 3$, тогаш доволно е да се минира само полето $(2, 2)$ и како со сигурност има барем едно минирано поле, тогаш најмалата вредност е $M = 1$.

Нека $n \geq 4$. Ако ги минираме полињата за кои $x + y$ е делив со 3, тогаш во секој 2×2 квадрат има барем едно минирано поле, а во секој 3×3 квадрат има три минирани полиња (по едно во секој ред), што значи дека $M = 3$. Нека претпоставиме дека е можно $M \leq 2$. Тогаш во сите полиња запишаните броеви се помали или еднакви на 2. Да разгледаме произволен 4×4 квадрат. Во неговиот централен 2×2 квадрат, кој го означуваме со K , има поле P кое не е минирано. Бидејќи во 2×2 квадратите кои го содржат P има барем по едно минирано поле, а бројот во P не е поголем од 2, заклучуваме дека P се наоѓа меѓу две минирани полиња, соседни со страна со P , а останатите полиња соседни на P не се минирани. Во K постои поле T , кое е соседно со страна со P и кое не е минирано. Да го разгледаме 3×3 квадратот со центар во T . Во него има барем три минирани полиња: двете соседни на P и барем уште едно во 2×2 квадратот кој го содржи T и не го содржи P . Според тоа, бројот запишан во T е поголем или еднаков на 3, што противречи на претпоставката дека $M \leq 2$. Конечно, кога $n \geq 4$ најмалата можна вредност на M е 3.

Според тоа, одговорот е 1 кога $n \leq 3$ и 3 кога $n \geq 4$.

17. Табла со димензии $n \times n$, ($n \geq 3$) е поделена на n^2 единечни квадратчиња, во кои се запишани цели броеви поголеми или еднакви на 0 и помали или еднакви на n така што збирите на броевите во секој 2×2 квадрат од таблата се различни.
- а) Определи ги сите природни броеви n , за кои постои $n \times n$ табла со тоа својство.
- б) Определи ја најмалата можна разлика меѓу најголемиот и најмалиот

запишан број во табла со тоа својство.

Решение. а) Бројот на 2×2 квадратите на $n \times n$ табла е еднаков на $(n-1)^2$. Од друга страна можните зборови на броевите запишани во овие квадрати се $0, 1, \dots, 4n$. Потребен услов за постоење на табла со саканото својство е $4n+1 \geq (n-1)^2$ и оттука добиваме $n(n-6) \leq 0$. Заклучаваме дека $n \leq 6$. На долните цртежи се дадени примери кои покажуваат дека за секој $3 \leq n \leq 6$ постои $n \times n$ табла со саканото својство.

Figure 1 shows five 3x3 grids of numbers arranged in a staircase pattern. The grids contain the following numbers:

1	1	1
1	0	0
0	0	0

0	0	2	0
0	0	0	2
0	1	2	2
2	2	2	2

0	0	2	0	4
0	0	0	2	1
0	1	2	2	4
2	2	3	3	4
4	3	4	4	4

6	6	6	6	5	5
6	6	5	5	5	5
1	2	3	4	4	5
3	5	0	5	0	5
1	0	2	1	0	0
1	0	1	0	0	0

б) За $n=3$ минималната разлика очевидно е еднаква на 1.

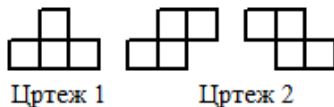
За $n = 4$ примерот покажува дека разликата меѓу најголемиот и најмалиот број во таблата е еднаква на 2. Ќе докажеме дека минималната можна разлика е 2. Ако претпоставиме дека разликата на најголемиот и најмалиот број за 4×4 табла со саканото својство не е поголема од 1, тогаш најголемиот збир на четирите броја во 2×2 квадрат се разликува од соодветниот најмал збир најмногу за 4. Од друга страна бројот на 2×2 квадратите на 4×4 табла е 9 и бидејќи $4 < 9$, добиваме дека некои од збирите треба да се еднакви, што противречи на условот на задачата.

За $n=5$ примерот покажува дека разликата меѓу најголемиот и најмалиот број во таблата е еднаков на 4. Ќе докажеме дека најмалата можна разлика е 4. Ако претпоставиме дека разликата на најголемиот и најмалиот број за 5×5 табла со саканото својство не е поголема од 3, тогаш најголемиот збир на четирите броеви во 2×2 квадрат се разликува од соодветниот најмал збир најмногу за $4 \cdot 3 = 12$. Од друга страна бројот на 2×2 квадрати на 5×5 табла е 16 и како $12 < 16$, добиваме дека некои од збирите треба да се еднакви, што противречи на условот на задачата.

Конечно, за $n = 6$ примерот покажува дека разликата меѓу најголемиот и најмалиот број во таблата е еднаков на 6. Ќе докажеме дека најмалата можна разлика е 6. Ако претпоставиме дека разликата на нај-

големиот и најмалиот број на 6×6 табла со саканото својство не е поголема од 5, тогаш најголемиот збир на четирите броја во 2×2 квадрат се разликува од соодветниот најмал збир најмногу за $4 \cdot 5 = 20$. Од друга страна бројот на 2×2 квадрати на 6×6 табла е 25 и како $20 < 25$, добиваме дека некои зборови треба да се еднакви, што противречи на условот на задачата.

18. Дали е можно во шаховска табла 8×8 да се запишат броевите од 1 до 64 (секој број е запишан точно еднаш) така да збирот на броевите во секоја фигура F е делив со 4.

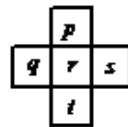


- а) фигурата F е од облик како на цртеж 1
б) фигурата F е од облик како на цртеж 2.

Решение. Збирот на броевите запишани во фигурата F е делив со 4 ако и само ако збирот на остатоците при делењето на овие броеви со 4 е делив со 4. Според тоа, наместо да го разгледуваме запишувањето на броевите од 1 до 64, доволно е да го разгледуваме распоредувањето на броевите 0, 1, 2 и 3 и деливост на соодветните зборови со 4.

Да забележиме дека точно по 16 броеви од множеството броеви $\{1, 2, 3, \dots, 64\}$ имаат еден ист остаток при делење со 4 кој може да е еден од броевите 0, 1, 2, 3

- а) Нека имаме стандардно црно-бело боење на шаховската табла. Ќе разгледаме дел од таблата прикажан на цртежот 3, при што сметаме дека во неа се запишани броеви $p, q, r, s, t \in \{1, 2, 3, \dots, 64\}$. Според условот на задачата имаме



Цртеж 3

$$p + q + r + s \equiv p + r + s + t \equiv q + r + s + t \equiv q + p + r + t \pmod{4}$$

Од својствата на на конгруенции следува

$$p \equiv q \equiv r \equiv s \equiv t \pmod{4}.$$

Според тоа, броевите кои се наоѓаат во белите полиња, освен оние кои се наоѓаат во ќошевите на таблата, имаат еден ист остаток при делење со 4. Но такви броеви има $30 > 16$, а ние треба да имаме најмногу 16 исти остатоци. Според тоа, не постои запишување на броевите од 1 до 64 кое го задоволува бараниот услов.

1	0	3	2	1	0	3	2
2	3	0	1	2	3	0	1
3	2	1	0	3	2	1	0
0	1	2	3	0	1	2	3
1	0	3	2	1	0	3	2
2	3	0	1	2	3	0	1
3	2	1	0	3	2	1	0
0	1	2	3	0	1	2	3

б) Можно е. Еден таков распоред е даден на цртежот десно.

19. Даден е конвексен n – аголник, $n \geq 5$. Докажи, дека постојат најмногу $\frac{n(2n-5)}{3}$ триаголници со плоштина 1 чии темиња се темиња на дадениот n – аголник.

Решение. Нека $A_1, A_2, \dots, A_n$ се темињата на многуаголникот. За секоја отсечка $A_i A_j$ постојат најмногу две темиња A_k и A_p кои се од иста страна на отсечката $A_i A_j$ и плоштините на $\triangle A_i A_j A_k$ и $\triangle A_i A_j A_p$ се еднакви на 1 (ако постои и трето теме A_r со ова својство, тогаш точките A_k, A_p и A_r ќе бидат на исто растојание од правата $A_i A_j$, т.е. ќе бидат колинеарни, што не е можно).

Од претходно изнесеното следува дека секоја од n – те страни на конвексниот n – аголник е страна на најмногу 2 триаголника со плоштина 1, па значи имаме најмногу $2n$ такви триаголници. Секоја од n – те дијагонали $A_i A_{i+2}$ е страна на најмногу 3 триаголници со плоштина 1, бидејќи и $\triangle A_i A_{i+1} A_{i+2}$ може да има плоштина 1. Понатаму, да ги разгледаме останатите $\frac{n(n-5)}{2}$ дијагонали на конвексниот n – аголник.

Секоја е страна на најмногу 4 триаголници со плоштина 1.

На овој начин ги идентификувавме сите триаголници со плоштина 1 и како секој триаголник го броевме трипати, заклучуваме дека најмногу имаме

$$\frac{1}{3}(2n + 3n + 4 \cdot \frac{n(n-5)}{2}) = \frac{n(2n-5)}{3}$$

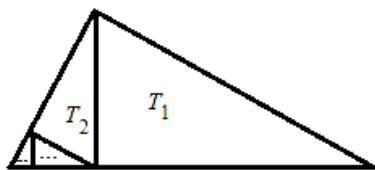
триаголници со плоштина 1, чии темиња се темиња на дадениот n – аголник.

20. Даден е правоаголен триаголник T . Дали е можно тој да се раздели на 2008 триаголници кои ги исполнуваат условите:

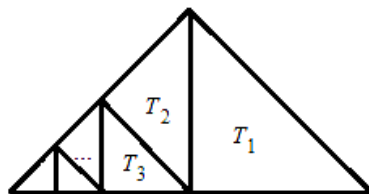
- Секој од делбените триаголниците е сличен на триаголникот T .
- Не постојат два триаголници од делбените кои се складни.

Решение. Ќе разгледаме два случаи, и тоа кога T е рамнокрак и кога T не е рамнокрак.

- Нека T е правоаголен триаголник кој не е рамнокрак. Од темето на правиот агол ќе спуштиме висина на хипотенузата. Двата делбени триаголници се правоаголни и се слични со дадениот и не се еднакви меѓу себе. Поголемиот по плоштина ќе го означиме со T_1 .



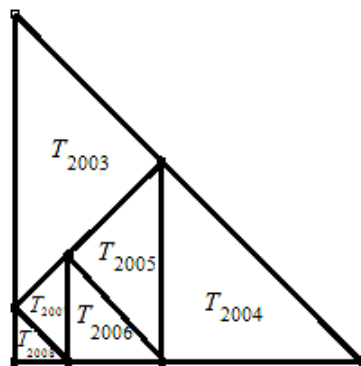
Цртеж 1



Цртеж 2

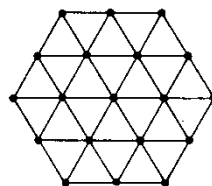
За помалиот од добиените триаголници ќе ја повториме постапката како и за триаголникот T . По повторување на оваа постапка 2007 пати (спуштање на висина 2007 пати) ќе добиеме 2008 правоаголни триаголници кои се слични на дадениот и било кои два не се складни (цртеж 1).

б) Во вториот случај т.е. кога триаголникот е рамнокрак правоаголен постапката од делот под а) ќе ја повториме 2002, при што ќе добиеме 2003 триаголници кои се слични со почетниот, а не се складни помеѓу себе освен последните два кои се складни (цртеж 2). Притоа 2003-от триаголник кој е складен со 2002 ќе го поделиме како на цртежот 3. Односот на страните на триаголниците е: $1:\sqrt{2}:2:2\sqrt{2}:4:3\sqrt{2}$.

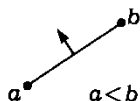


Цртеж 3

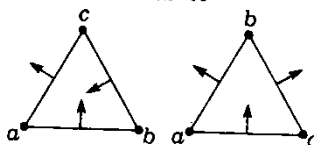
21. Правилен шестаголник е поделен на 24 рамностранни триаголници како што е прикажано на цртежот десно. На 19-те темиња на триаголниците им се придружени 19 различни броеви. Докажете, дека меѓу 24-те триаголници постојат најмалку 7 такви, што за броевите a, b, c придружени на темињата на овие триаголници и земени во редослед спротивно од движењето на стрелките на часовникот важи $a < b < c$.



Решение. На секоја страна на триаголник од дадената поделба и придружуваме стрелка насочена лево од страната, ако по страната се



$$a < b < c$$



движиме од теме со помал број кон теме со поголем број (цреч долу лево). Ако броевите, запишани во темињата на некој триаголник, растат кога темињата ги обиколуваме во насока спротивна од насоката на стрелките на часовникот, тогаш кон внатрешноста на тој триаголник се насочени две стрелки, а ако се движиме во насока на стрелките на часовникот тогаш кон внатрешноста на триаголникот е насочена една стрелка (цртеж долу десно). Нека имаме n триаголници од првит тип и m триаголници од вториот тип, $m + n = 24$. Бидејќи вкупниот број на стрелки насочени кон внатрешноста на шестаголникот е $N = 2n + m = 24 + n$ доволно е да докажеме дека $N \geq 31$.

Стрелките кои соодветствуваат на 30 внатрешни отсечки на поделбата на шестаголникот лежат во внатрешноста на шестаголникот. Од останатите дванаесет стрелки, соодветни на страните на триаголниците кои лежат на контурата на шестаголникот барем една мора да е насочена кон внатрешноста на шестаголникот. Во спротивно, за броевите $a_1, a_2, \dots, a_{12}$ соодветни на темињата кои лежат на контурата треба да важи $a_1 < a_2 < \dots < a_{12} < a_1$, што не е можно. Значи, $N \geq 30 + 1 = 31$.

ДОДАТОК

ОСНОВНИ КОМБИНАТОРНИ ПРИНЦИПИ И КОНФИГУРАЦИИ

Решавањето на комбинаторните задачи претпоставува познавање на основните комбинаторни принципи и конфигурации, кои во преходните книги од оваа серија ги користевме, без притоа истите теориски да ги разгледуваме. За усвојување на истите неопходни се соодветни предзнаења за множествата и операциите со истите. Сметаме дека читателот е запознаен со поимот множество и операциите пресек, унија, разлика, комплемент и Декартов производ на множества, па затоа во овој додаток на истите нема да се задржуваме.

1. ПРЕСЛИКУВАЊА

1.1. Дефиниција. Нека A и B се две непразни множества. Ако на секој елемент $x \in A$ му е придружен, по некое правило f , еднозначно определен елемент $y \in B$, тогаш велиме дека f е *пресликување (функција)* од A во B и пишуваме $f : A \rightarrow B$.

За елементот $y \in B$ велиме дека е *слика на елементот* $x \in A$ и пишуваме $y = f(x)$. Множеството A го нарекуваме *домен*, а множеството B - *кодомен* на пресликувањето f .

1.2. Дефиниција. Нека A е непразно множество. Пресликувањето $I_A : A \rightarrow A$ определено со $I_A(x) = x$, за секој $x \in A$ го нарекуваме *идентично пресликување*.

1.3. Дефиниција. За две пресликувања $f : A \rightarrow B$ и $g : C \rightarrow D$ ќе велиме дека *се еднакви* ако $A = C$, $B = D$ и $f(x) = g(x)$ за секој $x \in A$.

1.4. Дефиниција. Нека $f : A \rightarrow B$ и $g : B \rightarrow C$ се две пресликувања. За секој $x \in A$ ставаме $h(x) = g(f(x))$ и добиваме пресликување $h : A \rightarrow C$ кое го нарекуваме *композиција на пресликувањата* f и g и го означуваме со $h = g \circ f$.

1.5. Теорема. а) Ако $f : A \rightarrow B$, тогаш $f \circ I_A = f$ и $I_B \circ f = f$.

б) Ако $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ и $h : C \rightarrow D$, тогаш

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Доказ. а) Пресликувањата $f \circ I_A$ и f имаат исти домени и кодомени и притоа за секој $x \in A$ важи $(f \circ I_A)(x) = f(I_A(x)) = f(x)$, па затоа $f \circ I_A = f$.

Аналогно се докажува дека $I_B \circ f = f$.

б) Пресликувањата $h \circ (g \circ f)$ и $(h \circ g) \circ f$ имаат ист домен A и кодомен D и притоа за секој $x \in A$ важи

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))) = (h \circ g)(f(x)) = ((h \circ g) \circ f)(x)$$

од што следува $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$. ■

1.6. Дефиниција. Нека $f: A \rightarrow B$ и $A_1 \subset A$. Пресликувањето $h: A_1 \rightarrow B$ определено со $h(x) = f(x)$ за секој $x \in A_1$ го нарекуваме *рестрикција на пресликувањето f на множеството A_1* и го означуваме со $h = f|_{A_1}$.

2. ИНЈЕКЦИЈА, СУРЈЕКЦИЈА И БИЕКЦИЈА. ИНВЕРЗНО ПРЕСЛИКУВАЊЕ

2.1. Дефиниција. За пресликувањето $f: A \rightarrow B$ ќе велиме дека е *инјекција* ако од $x_1 \neq x_2$ следува $f(x_1) \neq f(x_2)$, т.е. различни елементи имаат различни слики.

2.2. Теорема. Ако $f: A \rightarrow B$ и $g: B \rightarrow C$ се инјекции, тогаш и $g \circ f$ е инјекција.

Доказ. Нека f и g се инјекции. Ако $x_1, x_2 \in A$ се такви што $x_1 \neq x_2$, тогаш бидејќи f е инјекција, добиваме $f(x_1) \neq f(x_2)$. Понатаму, од $f(x_1) \neq f(x_2)$ и фактот дека g е инјекција имаме $g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$, односно

$$(g \circ f)(x_1) \neq (g \circ f)(x_2),$$

што значи дека $g \circ f$ е инјекција. ■

2.3. Дефиниција. За пресликувањето $f: A \rightarrow B$ ќе велиме дека е *сурјекција* ако за секој $y \in B$ постои $x \in A$ таков што $y = f(x)$, т.е. секој елемент на B е слика на барем еден елемент на A .

2.4. Теорема. Ако $f: A \rightarrow B$ и $g: B \rightarrow C$ се сурјекции, тогаш и $g \circ f$ е сурјекција.

Доказ. Нека f и g се сурјекции и нека $z \in C$ е произволен. Бидејќи g е сурјекција, добиваме дека за секој $z \in C$ постои барем еден $y \in B$ таков што $z = g(y)$. Може да постојат и повеќе елементи во B со ова својство. Избираме еден од овие елементи y и бидејќи f е сурјекција, следува дека постои елемент $x \in A$ таков што $y = f(x)$. Според тоа, за секој $z \in C$ постои $x \in A$ таков што $g(f(x)) = g(y) = z$, што значи дека $g \circ f$ е сурјекција. ■

2.5. Дефиниција. За пресликувањето $f: A \rightarrow B$ ќе велиме дека е *биекција* ако тоа е и инјекција и сурјекција.

Според тоа, f е биекција ако секој елемент $y \in B$ е слика на барем еден елемент $x \in A$ и различни елементи од A со f се пресликуваат во различни елементи од B .

2.6. Теорема. Ако пресликувањата $f: A \rightarrow B$ и $g: B \rightarrow C$ се биекции, тогаш и нивната композиција $g \circ f$ е биекција.

Доказ. Нека f и g се биекции. Тоа значи дека f и g се инјекции, па од теорема 2.2 следува дека $g \circ f$ е инјекција. Понатаму, f и g се сурјекции, па од теорема 2.4 следува дека $g \circ f$ е сурјекција.

Конечно, $g \circ f$ е инјекција и сурјекција, па значи тоа е биекција. ■

2.7. Дефиниција. Ако $f: A \rightarrow B$ е биекција, тогаш со $g(y) = x$, за секој $y \in B$ ако и само ако $y = f(x)$ е определено пресликување $g: B \rightarrow A$ кое го нарекуваме *инверзно* на пресликувањето f .

За инверзното пресликување ја прифаќаме ознаката $g = f^{-1}$.

2.8. Теорема. Ако $f: A \rightarrow B$ е биекција, тогаш инверзното пресликување $f^{-1}: B \rightarrow A$ е биекција.

Доказ. Од дефиниција 2.7 следува дека f^{-1} е пресликување од B во A .

Ако $y_1 \neq y_2$, тогаш $f^{-1}(y_1) \neq f^{-1}(y_2)$ бидејќи во спротивно еден ист елемент од A со f ќе се преслика во два различни елементи од B , што не е можно бидејќи f е пресликување. Значи f^{-1} е инјекција.

Ако $x \in A$, тогаш $x = f^{-1}(y)$ каде што $y = f(x)$, што значи дека f^{-1} е сурјекција.

Конечно, f^{-1} е инјекција и сурјекција, па значи е биекција. ■

3. ЕКВИВАЛЕНТНИ МНОЖЕСТВА

3.1. Дефиниција. За множествата A и B велиме дека се *еквивалентни*, со ознака $A \sim B$, ако постои биекција f од A во B .

3.2. Теорема. За секои множества A , B и C важи:

- i) $A \sim A$,
- ii) Ако $A \sim B$, тогаш $B \sim A$, и
- iii) Ако $A \sim B$ и $B \sim C$, тогаш $A \sim C$.

Доказ. i) Идентичното пресликување $I_A: A \rightarrow A$ е биекција, па затоа $A \sim A$.

ii) Нека $A \sim B$. Тоа значи дека постои биекција $f : A \rightarrow B$. Сега, од теорема 2.8 следува дека инверзното пресликување $f^{-1} : B \rightarrow A$ е биекција, па затоа $B \sim A$.

iii) Нека $A \sim B$ и $B \sim C$. Тоа значи дека постојат биекции $f : A \rightarrow B$ и $g : B \rightarrow C$. Сега, од теорема 2.6 следува дека композицијата $g \circ f : A \rightarrow C$ е биекција, па затоа $A \sim C$. ■

3.3. Во следнава дефиниција ќе го воведеме поимот за конечно множество и во натамошните разгледувања под поимот множество ќе ги подразбираме конечните множества. За таа цел, за секој природен број k нека $\mathbb{N}_k = \{1, 2, 3, \dots, k\}$.

Дефиниција. Нека $k \in \mathbb{N}$. За множеството M ќе велиме дека се состои од k елементи ако $M \sim \mathbb{N}_k$. Притоа ќе пишуваме $|M| = k$. По дефиниција земаме дека $|\emptyset| = 0$.

За множеството M ќе велиме дека е *конечно* ако постои $k \in \mathbb{N}$ таков што $|M| = k$. Во спротивно ќе велиме дека множеството M е *бесконечно*.

3.4. Забелешка. Според теорема 3.2 i) имаме $\mathbb{N}_k \sim \mathbb{N}_k$, за секој $k \in \mathbb{N}$, па затоа од дефиниција 3.3 следува $|\mathbb{N}_k| = k$.

3.5. Теорема. Нека $k \neq 0$. Тогаш, $|M| = k$ ако и само ако M може да се запише во видот $M = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$.

Доказ. Нека $|M| = k$. Значи, $M \sim \mathbb{N}_k$, т.е. постои биекција $f : \mathbb{N}_k \rightarrow M$. Да означиме $f(1) = a_1, f(2) = a_2, \dots, f(k) = a_k$. Тогаш,

$$M = \{f(1), f(2), \dots, f(k)\} = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}.$$

Обратно, нека $M = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$. Тогаш пресликувањето $f : \mathbb{N}_k \rightarrow M$ определено со $f(i) = a_i, i = 1, 2, \dots, k$ е биекција. Навистина, за секој $a_i \in M$ постои $i \in \mathbb{N}_k$ таков што $f(i) = a_i$, што значи дека f е сурјекција. Понатаму, од $i \neq j$ следува $a_i \neq a_j$, па затоа $f(i) \neq f(j)$, т.е. f е и инјекција. Според тоа, $|M| = k$. ■

4. ПРИНЦИП НА ЕДНАКВОСТ, ЗБИР, ПРОИЗВОД, ВКЛУЧУВАЊЕ И ИСКЛУЧУВАЊЕ

4.1. Теорема (принцип на еднаквост). а) Ако $|M| = k$ и $M \sim L$, тогаш $|L| = k$.

б) Ако $|M| = |L| = k$, тогаш $M \sim L$.

Доказ. а) Од $|M| = k$ имаме $\mathbb{N}_k \sim M$. Понатаму, бидејќи $\mathbb{N}_k \sim M$ и $M \sim L$, од теорема 3.2 iii) следува дека $\mathbb{N}_k \sim L$, што значи дека $|L| = k$.

б) Нека $|M| = |L| = k$. Тогаш $\mathbb{N}_k \sim M$ и $\mathbb{N}_k \sim L$, па од теорема 3.2 iii) следува дека $M \sim L$. ■

4.2. Теорема (принцип на збир). Ако A и B се конечни множества такви што $A \cap B = \emptyset$, тогаш $|A \cup B| = |A| + |B|$.

Доказ. Нека $A \cap B = \emptyset$ и $f: A \rightarrow \mathbb{N}_n$, $g: B \rightarrow \mathbb{N}_m$ се биекции. Ќе докажеме дека пресликувањето $h: A \cup B \rightarrow \mathbb{N}_{n+m}$ определено со $h(a) = f(a)$, $a \in A$ и $h(b) = g(b) + n$, $b \in B$ е биекција. Нека $x, y \in A \cup B$ и $x \neq y$. Можни се два случаи и тоа:

а) x и y му припаѓаат на едно од множествата A и B , да кажеме A . Тогаш, од дефиницијата на пресликувањето h следува дека $h(x) = f(x)$ и $h(y) = f(y)$ и бидејќи f е биекција, имаме $f(x) \neq f(y)$, што значи $h(x) \neq h(y)$.

б) x и y му припаѓаат на различни множества, да кажеме $x \in A$ и $y \in B$. Тогаш $h(x) = f(x) \leq n < n+1 \leq g(y) + n = h(y)$, т.е. $h(x) \neq h(y)$.

Според тоа, во секој случај од $x \neq y$ следува $h(x) \neq h(y)$, т.е. h е инјекција.

Нека $p \in \mathbb{N}_{n+m}$. Можни се два случаја и тоа:

а) $p \leq n$ и во тој случај бидејќи f е биекција, постои $z \in A$ таков што $f(z) = p$. Но тоа, значи дека постои $z \in A \cup B$ таков што $h(z) = f(z) = p$.

б) $p > n$ и во овој случај $1 \leq p - n \leq m$. Но g е биекција, па затоа постои $z \in B$ таков што $g(z) = p - n$. Значи постои $z \in A \cup B$ таков што

$$p = (p - n) + n = g(z) + n = h(z).$$

Според тоа, во секој случај постои $z \in A \cup B$ таков што $h(z) = p$, т.е. h е сурјекција.

Конечно, h е инјекција и сурјекција, па значи е биекција. Значи, $A \cup B \sim \mathbb{N}_{n+m}$ од што следува $|A \cup B| = n + m = |A| + |B|$. ■

4.3. Последица. Ако $A_1, A_2, \dots, A_k$ е фамилија од k , $k \geq 2$ по парови дисјунктни конечни множества, т.е. множества за кои важи $A_i \cap A_j = \emptyset$, за $i \neq j$, тогаш

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_k|. \blacksquare$$

4.4. Теорема (принцип на производ). За секои конечни множества A и B важи $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

Доказ. Нека A и B се конечни множества такви што $|A| = m$ и $|B| = n$. Тогаш, од теорема 3.5 имаме $A = \{a_1, \dots, a_m\}$ и $B = \{b_1, \dots, b_n\}$.

За множеството $A \times B$ имаме

$$\begin{aligned} A \times B &= \{(a_1, b_1), \dots, (a_m, b_1), (a_1, b_2), \dots, (a_m, b_2), \dots, (a_1, b_n), \dots, (a_m, b_n)\} \\ &= \{(a_1, b_1), \dots, (a_m, b_1)\} \cup \{(a_1, b_2), \dots, (a_m, b_2)\} \cup \dots \cup \{(a_1, b_n), \dots, (a_m, b_n)\} \quad (1) \\ &= (A \times \{b_1\}) \cup (A \times \{b_2\}) \cup \dots \cup (A \times \{b_n\}). \end{aligned}$$

Понатаму, $A \times \{b_i\} \cap A \times \{b_j\} = \emptyset$, за $i \neq j$ и бидејќи $|A \times \{b_i\}| = m$ за $i = 1, 2, \dots, n$ од (1) и од принципот на збир добиваме

$$|A \times B| = |A \times \{b_1\}| + |A \times \{b_2\}| + \dots + |A \times \{b_n\}| = \underbrace{m + m + \dots + m}_{n \text{ пати}} = mn = |A| \cdot |B|. \blacksquare$$

4.5. Последица. Нека $k \geq 2$. Тогаш

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots \cdot |A_k|$$

за секои конечни множества $A_i, i = 1, 2, \dots, k$. ■

4.6. Теорема. а) (принцип на исклучување). Ако M е конечно множество и $A \subseteq M$, тогаш $|M \setminus A| = |M| - |A|$.

б) (принцип на вклучување). За произволни конечни множества A и B важи $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Доказ. а) Од $M = A \cup (M \setminus A)$ и $A \cap (M \setminus A) = \emptyset$, според принципот на збир следува $|M| = |A| + |M \setminus A|$, односно $|M \setminus A| = |M| - |A|$.

б) Нека $M = A \cup B$. Тогаш од принципот на исклучување следува дека $|M| = |A| + |M \setminus A|$. Но, бидејќи $M \setminus A = B \setminus (A \cap B)$, т.е.

$$B = (M \setminus A) \cup (B \cap A) \text{ и } (M \setminus A) \cap (B \cap A) = \emptyset$$

од принципот на збир следува дека $|B| = |M \setminus A| + |A \cap B|$. Според тоа,

$$|A \cup B| = |A| + |M \setminus A| = |A| + |B| - |A \cap B|. \blacksquare$$

4.7. Забелешка. Во случај на три и четири множества, принципот на вклучување го има следниов облик:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

и

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C \cup D| = & |A| + |B| + |C| + |D| - |A \cap B| - |A \cap C| - |A \cap D| - |B \cap C| \\ & - |B \cap D| - |C \cap D| + |A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap D| + |A \cap C \cap D| \\ & + |B \cap C \cap D| - |A \cap B \cap C \cap D|. \end{aligned}$$

5. ГРУПИРАЊЕ НА ЕЛЕМЕНТИ НА КОНЕЧНО МНОЖЕСТВО

5.1. Дефиниција. Нека е дадено конечното множество од n елементи $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ и нека $k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Секоја подредена k -торка од видот

$$(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}), \text{ каде што } a_{i_p} \neq a_{i_t}, \text{ за } p \neq t \text{ и } a_{i_p} \in A, \text{ за } p = 1, 2, \dots, k$$

ја нарекуваме *варијација без повторување од n елементи од класа k* .

Според тоа, варијација без повторување од n елементи од класа k е подредена k -торка составена од елементи од множеството $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ во која сите елементи се различни.

5.2. Забелешка. Во практиката, скоро сите проблеми поврзани со варијациите без повторување се сведуваат на определување на нивниот број, па затоа во следната теорема ќе ја докажеме формулата за определување на бројот на варија-

циите без повторување од n елементи од класа k , кој го означуваме со V_n^k , $n=1,2,\dots$; $k=1,2,\dots,n$.

5.3. Теорема. а) Ако $k < n$, тогаш

$$V_n^{k+1} = (n-k)V_n^k. \quad (1)$$

б) Ако $n \in \mathbb{N}$, тогаш

$$V_n^k = n(n-1)\dots(n-k+1), \text{ за } k=1,2,\dots,n. \quad (2)$$

Доказ. а) Од секоја варијација без повторување од n елементи од класа k , т.е. од секоја подредена k -ка од облик $(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k})$, со додавање на уште еден елемент

$$a_{i_{k+1}} \neq a_{i_p}, \text{ за } p \neq k+1, p=1,2,\dots,k,$$

кои вкупно ги има $n-k$, може да се добијат $n-k$ варијации без повторување од n елементи од класа $k+1$ од вид $(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}, a_{i_{k+1}})$. Притоа се добиваат сите варијации од n елементи од класа $k+1$ и секоја од новодобиените варијации се добива само по еднаш, па затоа од принципот на производ следува формулата (1).

б) Очигледно е дека $V_n^1 = n$. Нека за $k=i < n$ важи формулата (2), т.е.

$$V_n^i = n(n-1)\dots(n-i+1).$$

Сега, од (1) и од претпоставката добиваме

$$V_n^{i+1} = (n-i)V_n^i = n(n-1)\dots(n-i+1)(n-i),$$

т.е. формулата важи и за $k=i+1$. Конечно, од принципот на математичка индукција следува дека формулата (2) важи за $k=1,2,\dots,n$. ■

5.4. Дефиниција. Нека е дадено конечното множество од n елементи $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ и нека $k \in \mathbb{N}$. Секоја подредена k -торка од облик

$$(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}), \text{ каде што } a_{i_p} \in A, \text{ за } p=1,2,\dots,k$$

ја нарекуваме *варијација со повторување од n елементи од класа k* .

Според тоа, варијација со повторување од n елементи од класа k е подредена k -ка составена од елементи од множеството $A = \{a_1, \dots, a_n\}$.

5.5. Забелешка. Во практиката, скоро сите проблеми поврзани со варијациите со повторување се сведуваат на определување на нивниот број, па затоа во следната теорема ќе ја докажеме формулата за определување на бројот на варијациите со повторување од n елементи од класа k , кој го означуваме со $\bar{V}_n^k$, $n, k \in \mathbb{N}$.

5.6. Теорема. Ако $n, k \in \mathbb{N}$, тогаш

$$\bar{V}_n^k = n^k. \quad (3)$$

Доказ. Нека е дадено множеството $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ и нека $(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k})$ е произволна варијација со повторување од класа k од неговите елементи. Тогаш, на местото на првата координата може да се запише секој од елементите на множеството A , т.е. имаме n можности. За секоја од овие можности за местото на втората координата имаме n можности, па затоа за првите две координати имаме $n \cdot n = n^2$ можности. Продолжувајќи ја постапката со секоја нова координата бројот на можностите се зголемува n пати и како имаме k координати од принципот на производ следува дека $\bar{V}_n^k = n^k$, т.е. точна е формулата (3). ■

5.7. Дефиниција. Нека е дадено конечното множество од n елементи $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Секоја варијација без повторување од n елементи од класа n ја нарекуваме *пермутација без повторување од n елементи*.

5.8. Според тоа, пермутација без повторување од n елементи на множеството $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ е подредена n -торка во која сите елементи се различни меѓу себе. Понатаму, бројот на пермутациите без повторување од n елементи го означуваме со P_n . Од теорема 5.3 б) добиваме

$$P_n = V_n^n = n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-n+1) = n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot 1 = n!,$$

т.е. точна е следнава теорема.

Теорема. Бројот на пермутациите без повторување од n елементи е

$$P_n = n!. \quad \blacksquare \quad (4)$$

5.9. Дефиниција. Нека е дадено множеството $A = \{a_1, \dots, a_n\}$. Секое подмножество од k елементи, $k \leq n$ на множеството A го нарекуваме *комбинација без повторување од n елементи од класа k* .

Бројот на комбинациите без повторување од n елементи од класа k го означуваме со C_n^k , $n = 1, 2, 3, 4, \dots$, $k = 1, 2, \dots, n$. Често пати наместо ознаката C_n^k ја користиме ознаката $\binom{n}{k}$.

5.10. Теорема. За бројот на комбинациите без повторување од n елементи од класа k точна е формулата

$$C_n^k = \frac{V_n^k}{P_k}, \quad (5)$$

каде што $n = 1, 2, 3, 4, \dots$, $k = 1, 2, \dots, n$, т.е. формулата

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!}. \quad (6)$$

Доказ. Нека $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ е една комбинација без повторување од n елементи од класа k . Ако оваа комбинација ја пермутираме, ќе добиеме $P_k = k!$ пермутации, кои воедно се и сите варијации без повторување од n елементи од класа k кои се составени од елементите $a_1, a_2, \dots, a_k$. Понатаму, од сите варијации без

повторување на n елементи од класа k кои се составени од елементите $a_1, a_2, \dots, a_k$ со занемарување на редоследот на елементите се добива единствената комбинација без повторување $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ од n елементи од класа k . Според тоа, бројот на варијациите без повторување V_n^k од n елементи од класа k е $P_k = k!$ пати поголем од бројот C_n^k на комбинациите без повторување на n елементи од класа k , па затоа важи формулата $V_n^k = C_n^k P_k$, која е еквивалентна на формулата (5).

Точноста на формулата (6) непосредно следува од формулите (4) и (5) и фактот дека

$$V_n^k = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) \cdot \blacksquare$$

5.11. Забелешка. Ако броителот и именителот на десната страна во формулата (6) ги помножиме со $(n-k)!$, ја добиваме формулата

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) \cdot (n-k)(n-k-1)\dots 2 \cdot 1}{k!(n-k)(n-k-1)\dots 2 \cdot 1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (7)$$

Понатаму, за секој $k = 0, 1, 2, \dots, n$ од формулата (7) имаме

$$C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)![n-(n-k)]!} = \frac{n!}{(n-k)!(n-n+k)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = C_n^k, \quad (8)$$

што значи дека за секој $k = 0, 1, 2, \dots, n$ бројот на комбинациите без повторување од n елементи од класа k е еднаков на бројот на комбинациите без повторување од n елементи од класа $n-k$.

5.12. Дефиниција. Нека е дадено множеството $A = \{a_1, \dots, a_m\}$, $k_i \in \mathbb{N}$, за $i = 1, \dots, m$ и $n = k_1 + k_2 + \dots + k_m$. Подредената n -торка елементи на множеството A во која за секој $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ елементот a_i се јавува точно k_i пати, ја нарекуваме *пермутација од n елементи од тип $(k_1, k_2, \dots, k_m)$* или *пермутација со повторување*.

За бројот на пермутациите од n елементи од тип $(k_1, k_2, \dots, k_m)$, кој го означуваме со $P_n^{k_1, k_2, \dots, k_m}$ точна е следнава теорема.

5.13. Теорема. Ако $k_i \in \mathbb{N}$, за $i = 1, 2, \dots, m$ и $n = k_1 + k_2 + \dots + k_m$, тогаш

$$P_n^{k_1, k_2, \dots, k_m} = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m!} \cdot \blacksquare \quad (9)$$

Доказ. Од n -те места во подредената n -торка избираме k_1 места, што може да се направи на $C_n^{k_1} = \frac{n!}{k_1!(n-k_1)!}$ начини и на нив го ставаме елементот a_1 , потоа од преостанатите $n-k_1$ места избираме k_2 места, што може да се направи на $C_{n-k_1}^{k_2} = \frac{(n-k_1)!}{k_2!(n-k_1-k_2)!}$ начини и на нив го ставаме елементот a_2 итн., во $(m-1)$ -

от чекор од преостанатите $n - k_1 - k_2 - \dots - k_{m-2}$ места избираме k_{m-1} , што може да се направи на

$$C_{n-k_1-k_2-\dots-k_{m-2}}^{k_{m-1}} = \frac{(n-k_1-k_2-\dots-k_{m-2})!}{k_{m-1}!(n-k_1-k_2-\dots-k_{m-2}-k_{m-1})!} = \frac{(n-k_1-k_2-\dots-k_{m-2})!}{k_{m-1}!k_m!}$$

начини и на нив го ставаме елементот a_{m-1} , за да на крајот на преостанатите k_m места го ставиме елементот a_m . Од досега изнесеното следува дека

$$\begin{aligned} P_n^{k_1, k_2, \dots, k_m} &= C_n^{k_1} C_{n-k_1}^{k_2} C_{n-k_1-k_2}^{k_3} \dots C_{n-k_1-k_2-\dots-k_{m-2}}^{k_{m-1}} \\ &= \frac{n!}{k_1!(n-k_1)!} \cdot \frac{(n-k_1)!}{k_2!(n-k_1-k_2)!} \cdot \frac{(n-k_1-k_2)!}{k_3!(n-k_1-k_2-k_3)!} \cdot \dots \cdot \frac{(n-k_1-k_2-\dots-k_{m-2})!}{k_{m-1}!k_m!} = \frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_m!}. \blacksquare \end{aligned}$$

5.14. Дефиниција. Нека е дадено множеството $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ и нека за неговите елементи знаеме кој е прв, кој е втор итн., т.е. нека $a_1 < a_2 < \dots < a_n$. За подредената k -торка $(b_1, b_2, \dots, b_k)$, $b_i \in A$ ќе велиме дека е *комбинација со повторување од n елементи од класа k* ако $b_i \leq b_j$, за $i < j$. Бројот на комбинациите со повторување од n елементи од класа k ќе го означуваме со $\overline{C}_n^k$.

5.15. Теорема. Бројот на комбинациите со повторување од n елементи од класа k е

$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k. \quad (10)$$

Доказ. Да земеме една комбинација со повторување од n елементи од класа k и на истата да и ја придружиме низата од нули и единици формирана со следнава постапка: запишуваме онолку единици колку што во комбинацијата се јавува елементот a_1 , потоа запишуваме една 0, па запишуваме онолку единици колку што во комбинацијата се јавува елементот a_2 , па запишуваме една 0 итн., за на крајот да запишеме онолку единици колку што во комбинацијата се јавува елементот a_n , а во случај кога во комбинацијата не се јавува некој елемент a_i наместо единици запишуваме една нула. На овој начин на секоја комбинација ќе и соодветствува единствена низа составена од k единици и $n-1$ нула и обратно, на секоја ваква низа ќе и соодветствува единствена комбинација со повторување од n елементи од класа k .

Секоја од конструираниите низи е со должина $n+k-1$ и истата е определена со распоредот на $n-1$ нула на $n+k-1$ место, односно со распоредот на k единици на $n+k-1$ место. Според тоа, бројот на сите низи од разгледуваниот вид е еднаков на $C_{n+k-1}^{n-1} = C_{n+k-1}^k$ и како тој е еднаков на бројот на комбинациите со повторување од n елементи од класа k , добиваме дека важи формулата (10). $\blacksquare$

ЛИТЕРАТУРА

1. Andreescu, T., Feng, Z.: USA and International Mathematical Olympiads 2003, The Mathematical Association of America, Washington, 2003
2. Boyvalenkov, P., Kolev, E., Musharov, O., Nikolov, N.: Bulgarian Mathematical Competitions 2003-2006, GIL Publishing House, Zalău, 2007
3. Boyvalenkov, P., Kolev, E., Musharov, O., Nikolov, N.: Bulgarian Mathematical Competitions 2006-2008, GIL Publishing House, Zalău, 2009
4. Cîrtoaje, V.: Algebraic Inequalities, GIL Publishing house, Zalau, 2006
5. Feng, Z., Zhao, Y.: USA and International Mathematical Olympiads 2006-2007, The Mathematical Association of America, Washington, 2003
6. Grozdev, S., Kolev, E., Mushkarov, O., Nikolov, N.: Bulgarian Mathematical Competitions 1997-2002, SMB, Sofia, 2002
7. Kuczma, M. E., Mientka, W. E.: Problems of the Austrian-Polish Mathematics Competition, The Academic Distribution Center, Freeland, Maryland, 1994
8. Kuczma, M., Choczewski, B., Ger, R.: Iterative Functional Equations. Cambridge, UK, Cambridge University Press, 1990
9. Xiong, B., Lee Peng, Y.: Mathematical Olympiad in China – Problems and Solutions, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltgt., Singapore , 2007
10. Аневска, К., Малчески, Р.: Конгруенции во множеството на целите броеви II, Нумерус, Скопје, 2012
11. Баралић, Ђ.: 300 припремних задатака за Јуниорске математичке олимпијаде (искуство Србије), Klett, Београд, 2016
12. Бойваленков, П., Колев, Е., Мушкарров, О., Николов, Н.: Балкански олимпиади по математика 1984-2006, УНИМАТ СМБ, София, 2007
13. Бойваленков, П., Колев, Е., Мушкарров, О., Николов, Н.: Български математически състезания 2009-2011, УНИМАТ СМБ, София, 2012
14. Бойваленков, П., Колев, Е., Мушкарров, О., Николов, Н.: Български математически състезания 2012-2015, УНИМАТ СМБ, София, 2015
15. Бойваленков, П., Колев, Е., Мушкарров, О.: Български математически състезания 2003-2005, УНИМАТ СМБ, София, 2005
16. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2009, УНИМАТ СМБ, София, 2010

17. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2010, УНИМАТ СМБ, София, 2011
18. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2011, УНИМАТ СМБ, София, 2012
19. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2012, УНИМАТ СМБ, София, 2013
20. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2013, УНИМАТ СМБ, София, 2014
21. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2014, УНИМАТ СМБ, София, 2015
22. Бойваленков, П., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2008, УНИМАТ СМБ, София, 2008
23. Гроздев, С., Аневска, К.: Боиме броеви, Нумерус, Скопје, 2017
24. Гроздев, С., Малчески, А.: Малку математика на шаховска табла I, Нумерус, 2016
25. Гроздев, С., Малчески, А.: Малку математика на шаховска табла II, Нумерус, 2017
26. Гроздев, С.: Да побараме она што не се менува, Нумерус, Скопје
27. Гроздев, С.: Две елементарни неравенства и нивна примена, Нумерус, Скопје, 2015
28. Димовски, Д., Тренчевски, К., Малчески, Р., Јосифовски, Б.: Практикум по елементарна математика, Просветно дело, Скопје, 1993
29. Јанковић, З., Каделбург, З., Младеновић, П.: Меѓународне и балканске математичке олимпијаде 1984-1995, ДМС, Београд, 1995
30. Кртинић, Ђ.: Математичке олимпијаде средњошколаца 2007-2012 године, ДМ Србије, 2012
31. Малчески, А., Малчески, Р. и др.: Натпревари по математика во средното образование во учебната 1998/99 година, СММ, Скопје, 2000
32. Малчески, Р. и др.: Натпревари по математика '94, СММ, Скопје, 1995
33. Малчески, Р. и др.: Натпревари по математика '95, СММ, Скопје, 1996
34. Малчески, Р., Аневска, К.: Конгруенции во множеството на целите броеви I, Нумерус, Скопје, 2012
35. Малчески, Р., Аневска, К.: Мала теорема на Ферма, Нумерус, Скопје, 2016
36. Малчески, Р., Малчески, А. и др.: Натпревари по математика '96, СММ, Скопје, 1997

37. Малчески, Р., Малчески, А., Аневска, К., Маркоски, Ѓ., Стојковска, И.: Избрани задачи од елементарна алгебра (трето издание), СММ, Скопје, 2016
38. Малчески, Р., Малчески, А., Аневска, К.: Вовед во елементарна теорија на броеви, СММ, Скопје, 2015
39. Малчески, Р., Малчески, А., Аневска, К.: Решавање на текстуални задачи (трето издание), СММ, Скопје, 2016
40. Малчески, Р., Малчески, А., Малчески, С.: Подготвителни задачи за ЈБМО, БМО и ИМО 2017, СММ, Скопје, 2017
41. Малчески, Р., Малчески, А.: 241 подготвителна задача за АПМО и ЕМК, СММ, Скопје, 2017
42. Малчески, Р., Малчески, А.: 306 подготвителни задачи за математички олимпијади, СММ, Скопје, 2016
43. Малчески, Р., Малчески, А.: Избрани содржини од елементарна математика, СММ, Скопје, 1993
44. Малчески, Р., Малчески, А.: Функции и функционални равенки, Сојуз на математичари на Македонија, 2016
45. Малчески, Р.: Елементарна алгебра, Просветно дело, Скопје, 2002
46. Малчески, Р.: Елементарни алгебарски и аналитички неравенства, Сојуз на математичари на Македонија, 2016
47. Малчески, Р.: Енгелов принцип на минимум, Сигма, Скопје, 2016
48. Малчески, Р.: За докажување на условните неравенства, Plus, Тетово, 1998
49. Малчески, Р.: Линеарна Диофантова равенка, Нумерус, Скопје, 2012
50. Малчески, Р.: Неравенства меѓу средините и пресметување на квадратен корен од позитивен број, Математика+, София, 2003
51. Малчески, Р.: Неравенства меѓу средините, Нумерус, Скопје, 2012
52. Малчески, Р.: Неравенства меѓу средините, Сигма, Скопје, 2011
53. Малчески, Р.: Неравенство на Коши-Буњakovски-Шварц, Сигма, Скопје, 2011
54. Малчески, Р.: Функциите $[x]$ и $\{x\}$, Сигма, 2015
55. Тренчевски, К., Малчески, Р., Димовски, Д.: Занимлива математика, МММ, Скопје, 1994
56. Тренчевски, К., Урумов, В.: Меѓународни олимпијади по математика, Природно – математички факултет, Скопје, 2000