

### III олимпијада

1. Реши го системот равенки

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ x^2 + y^2 + z^2 = b^2 \\ xy = z^2 \end{cases}$$

каде  $a$  и  $b$  се реални параметри.

Кои услови треба да ги задоволуваат параметрите  $a$  и  $b$  за да системот има позитивни и по парови различни решенија.

**Решение.** Имаме

$$x + y + z = a \quad (1)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = b^2 \quad (2)$$

$$xy = z^2 \quad (3)$$

Од (2) и (3) добиваме

$$(x + y)^2 = b^2 + z^2,$$

а од (1),  $(x + y)^2 = (a - z)^2$ , од што следува  $a^2 - 2az = b^2$ . Ако  $a = 0$  тогаш и  $b = 0$  па од (2) се добива решението  $(0, 0, 0)$ . Кога  $a \neq 0$  тогаш

$$z = z_0 = \frac{a^2 - b^2}{2a} \quad (4)$$

Ако од (4) замениме во (1) и (3) добиваме

$$x + y = \frac{a^2 + b^2}{2a} \quad \text{и} \quad xy = \frac{(a^2 - b^2)^2}{4a^2} \quad (5)$$

што значи дека  $x$  и  $y$  се решенија на квадратната равенка

$$t^2 - \frac{a^2 + b^2}{2a}t + \frac{(a^2 - b^2)^2}{4a^2} = 0 \quad (6)$$

т.е.  $x$  и  $y$  се

$$t_{1/2} = \frac{a^2 + b^2 \pm \sqrt{(3a^2 - b^2)(3b^2 - a^2)}}{4a}.$$

Значи, ако  $a \neq 0$ , тогаш системот има две решенија  $(t_1, t_2, z_0)$  и  $(t_2, t_1, z_0)$ .

Системот (1) – (3) има позитивни и различни решенија ако и само ако равенката (6) има позитивни и различни решенија и ако  $z_0 > 0$ .

За да равенката (6) има позитивни и различни решенија потребно и доволно е

$$(3a^2 - b^2)(3b^2 - a^2) > 0,$$

(решенијата се реални и различни) и

$$x + y = \frac{a^2 + b^2}{2a} > 0, \quad xy = \frac{(a^2 - b^2)^2}{4a^2}$$

(решенијата се позитивни).

Од условот  $z_0 > 0$  следува дека  $a^2 > b^2$ . Од овде се добива бараниот потребен и доволен услов  $3b^2 > a^2 > b^2$  односно

$$|b| < a < \sqrt{3}|b|.$$

2. Даден е триаголник со должини на страни  $a$ ,  $b$  и  $c$  и плоштина  $S$ . Докажи дека

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4S\sqrt{3}.$$

Кога важи знак за равенство?

**Решение.** Ќе ја користиме Хероновата формула за плоштина на триаголник

$$S = \sqrt{\frac{a+b+c}{2} \frac{a+b-c}{2} \frac{a-b+c}{2} \frac{-a+b+c}{2}}.$$

Секој од множителите под коренот е позитивен па за оценка на производот  $(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)$  ќе го искористиме неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина  $\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}$ , т.е. неравенството

$$xyz \leq \frac{(x+y+z)^3}{27}.$$

Ако ставиме  $x = a+b-c$ ,  $y = a-b+c$ ,  $z = -a+b+c$ , добиваме

$$\begin{aligned} 4S &= \sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)} \leq \sqrt{(a+b+c) \frac{(a+b+c)^3}{27}} \\ &= \frac{(a+b+c)^2}{3\sqrt{3}} = \frac{3a^2+3b^2+3c^2-(a-b)^2-(b-c)^2-(c-a)^2}{3\sqrt{3}} \leq \frac{a^2+b^2+c^2}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Знак за равенство важи ако и само ако  $a = b = c$ .

3. Реши ја равенката

$$\cos^n x - \sin^n x = 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

**Решение.** 1) Ако  $n = 2m$ , тогаш  $\cos^{2m} x = 1 + \sin^{2m} x$ .

Бидејќи  $\cos^{2m} x \leq 1 \leq 1 + \sin^{2m} x$ , добиваме дека  $\sin x = 0$  и  $\cos x = \pm 1$ , т.е.  $x = k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

2) За  $n = 1$  равенката го добива обликот  $\cos x - \sin x = 1$ , т.е. обликот

$$1 = \cos x - \cos(x - \frac{\pi}{2}) = -2 \sin \frac{\pi}{4} \sin(x - \frac{\pi}{4}) = -\sqrt{2} \sin(x - \frac{\pi}{4}).$$

Според тоа  $x = 2k\pi$  или  $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

3) Нека  $n = 2m+1$ ,  $m \geq 1$ . За  $x \neq \frac{k\pi}{2}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  добиваме

$$1 = \cos^{2m+1} x - \sin^{2m+1} x = \cos^{2m+1}(-x) + \sin^{2m+1}(-x).$$

Оттука  $1 < \cos^2(-x) + \sin^2(-x) = 1$ , што не е можно. Затоа решенијата можат да бидат од облик  $x = \frac{k\pi}{2}$ . Во овој случај равенката ја задоволуваат случаи

кога едниот собирок е 1 а вториот 0 или првиот собирок е 0 а вториот  $-1$ .  
Решенија се  $x = 2k\pi$  и  $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

4. Во внатрешноста на триаголникот  $P_1P_2P_3$  дадена е точка  $P$ . Нека  $Q_1, Q_2, Q_3$  се пресечните точки на правите  $P_1P$  и  $P_2P_3$ ,  $P_2P$  и  $P_1P_3$ ,  $P_3P$  и  $P_1P_2$ , соодветно. Докажи дека меѓу количниците

$$\frac{\overline{P_1P}}{\overline{PQ_1}}, \frac{\overline{P_2P}}{\overline{PQ_2}}, \frac{\overline{P_3P}}{\overline{PQ_3}}$$

постои барем еден кој не е поголем од 2 и барем еден кој не е помал од 2.

**Решение.** Нека  $S$  е тежиште на триаголникот  $P_1P_2P_3$ , а  $P_1S_1$ ,  $P_2S_2$  и  $P_3S_3$  се неговите тежишни линии.

Ако  $P = S$  тогаш сите спомнати коефициенти се еднакви на 2 и тврдењето е точно.

Нека  $P \neq S$ . Тогаш точката  $P$  лежи во внатрешноста или на некој раб од шесте триаголници на кои е разделен триаголникот со тежишните линии. Нека тоа е триаголникот  $P_1S_3S$ .

Избираме точки  $S_{12}$  и  $S_{31}$  кои ги делат страните  $P_1P_2$  и  $P_3P_1$  во однос 2:1, соодветно. Тогаш  $S_{12}S \parallel P_2P_3$  и  $S_{31}S \parallel P_1P_2$ . Триаголникот  $P_1S_3S$  лежи во трапезот  $P_1S_3SS_{31}$ . Правата  $P_3Q_3$  ја сече отсечката  $S_{31}S$  во точка  $A_2$  која е меѓу точките  $P_3$  и  $P$ . Според тоа

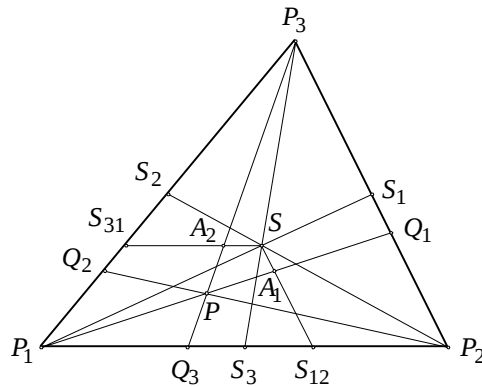
$$\overline{P_3P} : \overline{PQ_3} \geq \overline{P_3A_2} : \overline{A_2Q_3} = 2:1$$

На сличен начин, триаголникот  $P_1S_3S$  лежи во триаголникот

$P_1S_{12}S$ . Правата  $P_1P$  ја сече правата  $SS_{12}$  во точка  $A_1$  која е внатрешна точка на отсечката  $PQ_1$ . Според тоа

$$\overline{P_1P} : \overline{PQ_1} \leq \overline{P_1A_1} : \overline{A_1Q_1} = 2:1$$

што и требаше да се докаже.



Црп. 3.1.

5. Конструирај триаголник  $ABC$  ако е дадено:  $\overline{AC} = b$ ,  $\overline{AB} = c$  и  $\angle BMA = \omega$ , ( $\omega < 90^\circ$ ), каде  $M$  е средина на страната  $BC$ . Докажи дека задачата има решение ако и само ако  $\text{btg } \frac{\omega}{2} \leq c < b$ .

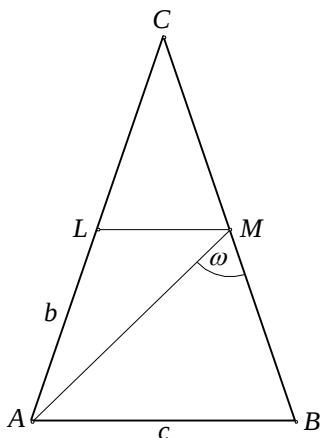
Кога важи знакот за равенство?

**Решение.** *Анализа.* Нека  $ABC$  е бараниот триаголник,  $\angle AMC = \pi - \omega > \frac{\pi}{2}$ ,  $L$  е средина на страната  $AC$ . Отсечката  $ML$  е средна линија на триаголникот  $ABC$  и нејзината должина е  $\frac{c}{2}$ , (црт. 3.2.).

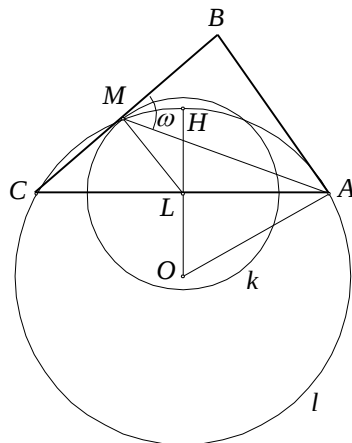
*Конструкција.* Над отсечката  $AC$  конструираме кружен лак  $l$  од кој таа се гледа под агол  $\angle AMC$ , а во точката  $L$ , која е средина на отсечката  $AC$ , опишуваме кружница  $k$  со радиус  $\frac{c}{2}$ . Точката  $M$  е пресечната точка на кружницата  $k$  и лакот  $l$ . Потоа ја конструираме отсечката  $BC$  за која  $M$  е средина (црт. 3.3.).

*Доказ.* Непосредно следува од анализата и конструкцијата. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

*Дискусија.* За да постои решение, потребно и доволно е кружницата  $k$  да го сече лакот  $l$ . Нека  $O$  е центар на кружницата на која лежи лакот  $l$ . Бидејќи



Црт. 3.2.



Црт. 3.3.

$\omega < \frac{\pi}{2}$ , точката  $O$  лежи надвор од  $\triangle AMC$ . Нека  $OH \perp AC$  е радиус кој го преполовува кружниот лак  $AC$ , а  $M$  бараната точка на лакот  $AH$  (или  $CH$ ). Од  $\triangle OML$  имаме  $R = \overline{OM} \leq \overline{OL} + \overline{LM} = R - \overline{HL} + \frac{c}{2}$ , т.е.  $\frac{b}{2} \tan \frac{\omega}{2} \leq \frac{c}{2}$  каде  $\overline{HL} = \frac{b}{2} \tan \frac{\omega}{2}$  е висина на лакот.

Според условите од задачата  $\angle BMA = \omega < 90^\circ < 180^\circ - \omega = \angle AMC$ , па затоа  $b = \overline{AC} > \overline{AB} = c$ . Условот  $\frac{b}{2} \tan \frac{\omega}{2} \leq \frac{c}{2} < \frac{b}{2}$  е потребен. Ако  $\overline{LM} = \frac{c}{2} < \frac{b}{2} = \overline{LA}$ , тогаш крајната точка  $A$  на лакот  $l$  лежи надвор од кружницата  $k$  и ако уште висината на лакот е  $h = \frac{b}{2} \tan \frac{\omega}{2} < \frac{c}{2}$ , темето  $H$  на лакот  $l$  лежи во кружницата  $k$ . Лакот  $l$  и кружницата  $k$  се сечат меѓу точките  $A$  и  $H$ . Истото го

добиваме и за пресекот меѓу точките  $C$  и  $H$ . Ако  $h = \frac{c}{2}$ , тогаш кружницата и лакот се допираат,  $M \equiv H$ ,  $\triangle AMC$  е рамнокрак,  $AB \parallel LM \perp AC$  и во овој случај триаголникот  $ABC$  е правоаголен со прав агол во темето  $A$ .

6. Дадена е рамнина  $\varepsilon$  и три неколинеарни точки  $A, B, C$  кои лежат на иста страна од рамнината, такви што рамнината определена со овие точки не е паралелна со рамнината  $\varepsilon$ . Нека  $A', B'$  и  $C'$  се произволни точки во рамнината  $\varepsilon$  и  $L, M$  и  $N$  се средините на отсечките  $AA', BB'$  и  $CC'$ , соодветно. Најди го геометриското место на тежиштето  $G$  на триаголникот  $LMN$  (ако тој не е дегенериран), кога точките  $A', B'$  и  $C'$  независно се менуваат во рамнината  $\varepsilon$ .

**Решение.** Во просторот поставуваме координатен систем така што оските  $OX$  и  $OY$  лежат во рамнината  $\varepsilon$ , а оската  $OZ$  е нормална на  $XOY$ . Точките  $A, B$  и  $C$  имаат координати  $A(x_1, y_1, 2a)$ ,  $B(x_2, y_2, 2b)$ ,  $C(x_3, y_3, 2c)$  соодветно, и барем два од броевите  $a, b$  и  $c$  се различни меѓу себе. Координатите на тежиштето на триаголникот  $ABC$  се

$$S\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}, \frac{2(a+b+c)}{3}\right).$$

Точките  $A', B'$  и  $C'$  имаат координати  $A'(x'_1, y'_1, 0)$ ,  $B'(x'_2, y'_2, 0)$ ,  $C'(x'_3, y'_3, 0)$ , а средини на отсечките  $AA', BB', CC'$  се точките  $L, M, N$  соодветно,

$$L\left(\frac{x_1+x'_1}{2}, \frac{y_1+y'_1}{2}, a\right), \quad M\left(\frac{x_2+x'_2}{2}, \frac{y_2+y'_2}{2}, b\right), \quad N\left(\frac{x_3+x'_3}{2}, \frac{y_3+y'_3}{2}, c\right).$$

Тежиштето  $G$  на триаголникот  $LMN$  има координати

$$S\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x'_1+x'_2+x'_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3+y'_1+y'_2+y'_3}{3}, \frac{a+b+c}{3}\right).$$

Бараното геометриско место на точки е во рамнината

$$z = \frac{a+b+c}{3} \quad (*),$$

која е паралелна со рамнината  $\varepsilon$  и која го полови нормалата повлечена од тежиштето на триаголникот  $ABC$  и рамнината  $\varepsilon$ . Ќе докажеме дека секоја точка од оваа рамнина припаѓа на бараното множество точки. Нека  $G(\bar{x}, \bar{y}, \frac{a+b+c}{3})$  е точка од рамнината (\*). Координатите  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  и  $(x_3, y_3)$  се дадени. Секогаш кога ќе избереме  $x'_2$ ,  $x'_3$ , според горната релација за тежиште  $G$  можеме да го одредиме  $x'_1$ , а исто така, секогаш кога ќе избереме  $y'_2$ ,  $y'_3$  можеме да го одредиме  $y'_1$ .

*Забелешка.* Условот рамнината која минува низ точките  $A, B$  и  $C$  да не е паралелна со рамнината  $\varepsilon$  не е важен за решавање на задачата.