V олимпијада

1. Во множеството реални броеви реши ја равенката

$$\sqrt{x^2-p}+2\sqrt{x^2-1}=x,$$

каде p е реален параметар.

Решение. Ако ги квадрираме двете страни на равенката

$$\sqrt{x^2-p}=-2\sqrt{x^2-1}+x$$

по средувањето добиваме

$$4x^2+p-4=4x\sqrt{x^2-1}.$$

Со повторно квадрирање добиваме

$$x^2=\frac{(p-4)^2}{8(2-p)},\ p<2, \text{ т.е. } x=\pm\frac{p-4}{2\sqrt{2(2-p)}}.$$

1° Нека $x=\frac{-p+4}{2\sqrt{2(2-p)}}$. Тогаш равенката го добива обликот

$$|3p-4|+2|p|=-p+4.$$

(a) $3p-4\geq 0$, $p\geq 0$, т.е. $p=\frac{4}{3}$, $x=\frac{2}{\sqrt{3}}$.

(b) $3p-4\geq 0$, $p\leq 0$. Ниту еден број p не ги задоволува овие услови.

(c) $3p-4\leq 0$, $p\geq 0$, т.е. $0\leq p\leq\frac{4}{3}$. Во овој случај $x=\frac{-p+4}{2\sqrt{2(2-p)}}$.

(d) $3p-4\leq 0$, $p\leq 0$, т.е. $p\leq 0$. Во тој случај $p=0$ и $x=1$.

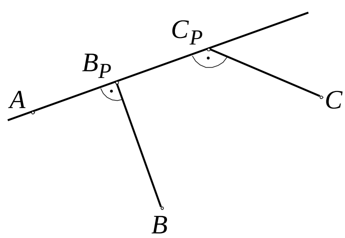
Случаите (a) и (d) се содржани во (c).

2° Не постои ниту едно решение од облик $x=\frac{p-4}{2\sqrt{2(2-p)}}$.

Според тоа сите решенија се дадени во 1° (c).

2. Во просторот најди го геометриското место на темињата на правите агли за кои едниот крак минува низ дадена точка A, а другиот има барем една заедничка точка со отсечката BC.

Решение. Разгледуваме произволна права p во просторот која минува низ точката A. Нека B_p и C_p се ортогонални проекции на точките B и C на правата p. На бараното геометриско место точки на правата p припаѓаат сите точки од отсечката B_pC_p и ниту една друга точка.



Црт. 5.1.

Точките B_p и C_p припаѓаат на сферите S_{AB} и S_{AC} со дијаметри $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, соодветно. Отсечките AB_p и AC_p припаѓаат на топките K_{AB} и K_{AC} соодветно. Отсечката $\overline{B_pC_p}$ е дел од правата p, која се наоѓа во една од споменатите сфери, но не и во двете истовремено. Секоја точка од бараното геометриско место точки се наоѓа на права која што минува низ точката A. Затоа бараното геометриско место на точки е

$$S_{AB} \cup S_{AC} \cup (K_{AB} \Delta K_{AC}).$$

3. Даден е $n-$аголник кај кој сите внатрешни агли се еднакви и чии последователни страни ги задоволуваат неравенствата

$$a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_n..$$

Докажи дека $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

Решение. Да го разгледаме случајот кога $n = 2k+1$. Симетралата на аголот со теме A_1, меѓу a_1 и a_n е нормална на страната $A_{k+1}A_{k+2}$.

На оваа симетрала ги проектираме искршените линии $A_1A_2...A_{k+1}$ и $A_1A_nA_{n-1}...A_{k+2}$. Двете проекции имаат еднаква должина. Аглите меѓу страните A_iA_{i+1} и $A_{n-i+2}A_{n-i+1}$ $(i \leq k)$ и симетралата се еднакви. Затоа должината на проекцијата на страната A_iA_{i+1} не е помала од должината на проекцијата на страната $A_{n-i+2}A_{n-i+1}$. Ако во низата неравенства

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq ... \geq a_n$$

постои строго неравенство, тогаш ќе имаме строго неравенство и во должините на проекциите на $A_1A_2...A_{k+1}$ и $A_1A_nA_{n-1}...A_{k+2}$, што противречи на добиеното равенство.

Случајот $n = 2k$ се разгледува аналогно, со таа разлика што проекциите се на права која е нормална на правата A_1A_{n+1}.

4. Во множеството реални броеви реши го системот

$$\begin{cases} x_5 + x_2 = yx_1 \\ x_1 + x_3 = yx_2 \\ x_2 + x_4 = yx_3 \\ x_3 + x_5 = yx_4 \\ x_4 + x_1 = yx_5 \end{cases}$$

каде y е реален параметар.

Решение. Од првата и втората равенка добиваме

$$x_2 = yx_1 - x_5$$

$$x_3 = yx_2 - x_1$$

односно

$$x_3 = (y^2 - 1)x_1 - yx_5 \tag{1}$$

Слично, од четвртата и петтата равенка добиваме

$$x_3 = (y^2 - 1)x_5 - yx_1 \tag{2}$$

Понатаму, од (1) и (2) следува

$$(y^2 + y - 1)(x_1 - x_5) = 0$$

Разгледуваме два случаи.

(a) Ако $y^2 + y - 1 \neq 0$, тогаш $x_1 = x_5$. Ако наместо првата, втората, четврата и петтата равенка ги разгледаме втората, третата, петата и првата равенка и расудувајќи аналогно, добиваме дека $x_2 = x_1$. Со аналогни разгледувања наоѓаме

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x\ .$$

За $y = 2$, x е било кој реален број, а за $y \neq 2$ добиваме $x = 0$.

(b) $y^2 + y - 1 = 0$. Ги множиме првата, втората и третата равенка со 1, y и $-y$, соодветно и ако добиените равенки ги собереме добиваме

$$x_5 + x_2 + yx_1 + yx_3 - yx_2 - yx_4 = yx_1 + y^2x_2 - y^2x_3\ ,$$

односно

$$x_5 + (y^2 + y)x_3 = yx_4 + (y^2 + y - 1)x_2\ .$$

Ако го искористиме условот $y^2 + y = 1$, тогаш последната равенка ја сведуваме на четвртаа равенка. Според тоа, од првите три равенки ја добиваме четвртата равенка. Аналогно, петтата равенка ја добиваме од втората, третата и четвртата равенка.

Според тоа, дадениот систем е еквивалентен на системот

$$x_2 = yx_1 - x_5 \tag{3}$$

$$x_3 = -y(x_1 + x_5) \tag{4}$$

$$x_4 = yx_5 - x_1 \tag{5}$$

каде x_1 и x_5 се произволни реални броеви.

Освен очигледното решение $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$, дадениот систем ги има и следниве решенија:

- ако $y = 2$, $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x$ за секој $x \in \mathbb{R}$.
- ако $y^2 + y - 1 = 0$, т.е. $y = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$, тогаш x_1 и x_5 се произволни реални броеви а x_2, x_3 и x_4 се дадени со равенките (3)-(5).

5. Докажи го равенството

$$\cos\tfrac{\pi}{7}-\cos\tfrac{2\pi}{7}+\cos\tfrac{3\pi}{7}=\tfrac{1}{2}\,.$$

Решение. Го множиме и делиме изразот од левата страна на равенството со $2\cos\frac{\pi}{14}$ и ако ја искористиме формулата $2\cos x\cos y=\cos(x+y)+\cos(x-y)$ добиваме:

$$\begin{aligned}\cos\tfrac{\pi}{7}-\cos\tfrac{2\pi}{7}+\cos\tfrac{3\pi}{7}&=\tfrac{1}{2\cos\frac{\pi}{14}}2\cos\tfrac{\pi}{14}(\cos\tfrac{\pi}{7}-\cos\tfrac{2\pi}{7}+\cos\tfrac{3\pi}{7})\\&=\tfrac{1}{2\cos\frac{\pi}{14}}(\cos\tfrac{3\pi}{14}+\cos\tfrac{\pi}{14}-\cos\tfrac{5\pi}{14}-\cos\tfrac{3\pi}{14}+\cos\tfrac{7\pi}{14}+\cos\tfrac{5\pi}{14})\\&=\tfrac{1}{2\cos\frac{\pi}{14}}\cos\tfrac{\pi}{14}=\tfrac{1}{2}.\end{aligned}$$

6. Учениците A,B,C,D и E учествувале на натпревар. Еден гледач се обидел да ги погоди резултатите на натпреварот и претпоставил дека редоследот ќе биде A,B,C,D,E, но тој не го погодил пласманот на ниту еден ученик и ниту еден пар ученици кои се пласирале еден по друг. Друг гледач претпоставил дека резултатот ќе биде D,A,E,C,B и тој го погодил точното место на двајца ученици, а исто така и на два пара ученици кои се пласирале еден по друг. Кој е резултатот на натпреварувањето?

Решение. Прво да забележиме дека, ако пласманот на двајца натпреварувачи е точно предвиден и ако е точно предвиден пласманот на едниот натпреварувач, тогаш точно е предвиден и пласманот на другиот натпреварувач.

Да го разгледаме предвидувањето на вториот гледач. Во ова предвидување имаме четири парови: DA, AE, EC и CB. Два од овие пара се точно предвидени.

Нека претпоставиме дека точно се предвидени паровите кои имаат заеднички елемент (DA, AE или AE, EC или EC, CB). Тогаш ниту едно од точно предвидените места не може да припаѓа на некој од точно предвидените парови, бидејќи во овој случај ќе имаме барем три точно предвидени места. Ако двете погодени места се надвор од тројката со погоден редослед, тогаш би биле погодени сите пет места (бидејќи трите преостанати места ги пополнуваат на точен начин трите преостанати натпреварувачи). Затоа точно предвидените парови се дисјунктни.

Според тоа кои парови се точно предвидени, можни се следните случаи:

(a) DA и EC. Барем едно погодено место припаѓа на подреден пар, па тој пар претставува две погодени места, а другиот пар погрешно предвидени места. Ако двете места од парот DA се точно предвидени резултатот на натпреварувањето би бил $DABEC$, што не е можно, бидејќи првата личност ќе има точно погоден пар. Ако парот EC е точен, тогаш и парот DA треба да е точно предвиден (во однос на местата) што не е можно.

(b) AE и CB. Ако двете места на паротот AE се точно предвидени, тогаш и паротот CB (во однос на местата) е точно предвиден, што не е можно. Ако двете места на паротот CB се точно предвидени, тогаш резултатот ќе биде $AEDCB$, што не е можно, бидејќи предвидувањето за A би било како и кај првата личност.
(c) DA и CB. Ако двете места на DA се точно предвидени, тогаш резултатот би бил $DACBE$, што не е можно бидејќи C е на третото место како исто како и кај првата личност. Ако двете места на паротот CB се точни, тогаш резултатот е $EDACB$ и се исполнети сите услови на задачата.