Републички натпревари во средното образование
1978-2019

ПМЗ АРМАГАНКА
Скопје, ноември 2021 година

Издавач: ПМЗ АРМАГАНКА
Адреса: ул 2 бр 107/А
Скопје, Република Македонија

Рецензенти

Ана Димовска, професор по математика
Златко Петковски, професор по математика

Предговор

aleksa.malceski@gmail.com

XXI Републички натпревар 1978

I година

1.Докажи дека $(x+y)^4 \le 8(x^4+y^4)$.

Решение.Ќе го искористиме равенството $2ab \le a^2+b^2$, кое важи за кои било a и b, а следува од очигледното неравенство $(a-b)^2 \ge 0$. Имаме

$$(x+y)^4 = [(x+y)^2]^2 = (x^2+2xy+y^2)^2 \le (x^2+x^2+y^2+y^2)^2 = 4(x^2+y^2)^2 =$$
$$= 4(x^4+2x^2y^2+y^4) = 4(x^4+y^4)+4\cdot 2x^2y^2 \le 4(x^4+y^4)+4(x^4+y^4) = 8(x^4+y^4)$$

2.Докажи дека бројот 3^k не може да се претстави како збир од квадратите од два природни броја, за ниеден природен број k.

Решение. Да го разгледаме изразот a^2+b^2, каде што a и b се природни броеви. Секој од броевите a и b може да се претстави во еден од облиците $3s, 3s+1, 3s+2$.

Ако a и b се од облик $3s$, на пример $a=3a_1$, $b=3b_1$ тогаш

$$a^2+b^2 = 3^2(a_1^2+b_1^2),$$

па, ако $a^2+b^2=3^k$, тогаш $a_1^2+b_1^2=3^{k-2}$. Значи, можеме да претпоставиме дека a и b не се од облик $3s$. Во тој случај имаме

$$\left.\begin{array}{l} a=3a_1,\ b=3b_1+1 \\ a=3a_1,\ b=3b_1+2 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad a^2+b^2=3A+1$$

$$\left.\begin{array}{l} a=3a_1+1,\ b=3b_1+1 \\ a=3a_1+1,\ b=3b_1+2 \\ a=3a_1+2,\ b=3b_1+2 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad a^2+b^2=3A+2,$$

што значи дека $a^2+b^2 \ne 3^k$.

3.Иста е со задача 3 втора година

4.Во три садови има вода. Ако една половина од водата во првиот сад се прелие во вториот, а потоа една третина од водата што се нашла во вториот сад се прелие во тртиот сад, а најпосле една четвртина од водата во третиот сад се прелие во првиот сад, тогаш во секој сад ќе има по $6l$.(Притоа, садовите се доволно големи за да се извршат споменатите преливања). Колку вода имало во секој сад пред почетокот на ова постапка?

Решение. Ако во првиот сад има $x\ l$, во вториот $y\ l$, во третиот сад $z\ l$, тогаш по првото преливање, во првиот сад ќе има $x-\frac{x}{2}=\frac{x}{2}\ l$, во вториот сад ќе има $y+\frac{x}{2}\ l$, додека по преливањето од вториот сад во третиот, во вториот сад ќе остане

$$y+\frac{x}{2}-\frac{1}{3}\left(y+\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{3}(2y+x), \qquad (1)$$

а во третиот сад ќе има

$$z+\frac{1}{3}\left(y+\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{6}(6z+2y+x)$$

литри. По преливањето од третиот во првиот сад, во третиот сад ќе остане

$$\frac{1}{6}(6z+2y+x)-\frac{1}{24}(6z+2y+x)=\frac{1}{8}(6z+2y+x) \qquad (2)$$

литри вода, а во првиот ќе има

$$\frac{x}{2}+\frac{1}{24}(6z+2y+x)=\frac{1}{24}(6z+2y+13x)\,. \qquad (3)$$

Имајќи го предвид условот на задачата и (1), (2) и (3) , го добиваме следниот систем равенки

$$\begin{cases} x+2y=6\cdot 3 \\ x+2y+6z=6\cdot 8 \\ 13x+2y+6z=6\cdot 24 \end{cases}$$

чие решение е: $x=8, y=5, z=5$. Според тоа, во првиот сад имало $8\,l$ вода, а во вториот и третиот- по $5\,l$ вода.

II година

1.Да се најдат сите природни броеви n , такви што бројот

$$1!+2!+3!+\ldots+n!$$

да е полн квадрат.(Притоа: $k!=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k$, $1!=1$)

Решение. Од тоа што $5!=120$ заклучуваме дека $n!$ завршува на нула за секој $n\geq 5$. Според тоа, бројот $1!+2!+3!+\ldots+n!$ завршува на 3 за $n\geq 5$, (бидејќи бројот $1!+2!+3!+4!=33$ завршува на 3). Ако еден број завршува на 3, тогаш тој број не е квадрат на ниеден број, бидејќи квадратот на било кој број завршува или на еден, или на четири, или на пер, или на шест, или на девет, или на нула. Значи, за ниту еден природен број $n\geq 5$ бројот $1!+2!+3!+\ldots+n!$ не е полн квадрат. Останува да се испита дали за некој природен број $n\leq 4$ бројот $1!+2!+3!+\ldots+n!$ е полн квадрат. Притоа:

-за $n=1$, $1!+2!+3!+\ldots+n!=1=1^2$
-за $n=2$, $1!+2!+3!+\ldots+n!=1!+2!=3$,
-за $n=3$, $1!+2!+3!+\ldots+n!=1!+2!+3!=9=3^2$
-за $n=4$, $1!+2!+3!+\ldots+n!=1!+2!+3!+4!=33$

Значи, единствени природни броеви n за кои бројот $1!+2!+3!+\ldots+n!$ е полн квадрат на некој природен број се 1 и 3 .

2.Да се пресмета збирот

$$\sum_{k=1}^{n} i^k\ ,$$

каде што n е природен број, а i е имагинарна единица.

Решение. Да воочиме дека

$$i^{4s}=(i^4)^s=1^s=1$$
$$i^{4s+1}=(i^4)^s i=1^s i=1\cdot i=i$$
$$i^{4s+2}=(i^4)^s i^2=1^s i^2=1\cdot(-1)=-1$$
$$i^{4s+3}=(i^4)^s i^3=1^s i^3=1\cdot(-i)=-i\,,$$

и затоа за сумата

$$\sum_{k=1}^{n} i^k=i+i^2+i^3+i^4+\ldots+i^n$$

ќе имаме

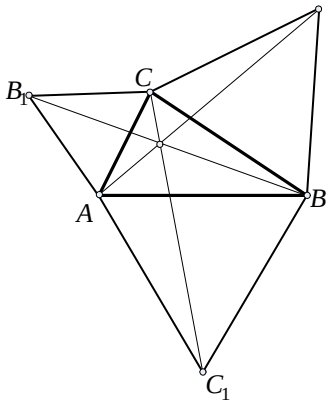
а) $n=4s$, $i+i^2+i^3+i^4+\ldots+i^{4s}=(i-1-i+1)+(i-1-i+1)+\ldots+(i-1-i+1)=0$

б) $n=4s+1$ $i+i^2+i^3+i^4+\ldots+i^{4s}+i^{4s+1}=(i-1-i+1)+(i-1-i+1)+\ldots+(i-1-i+1)+i=i$

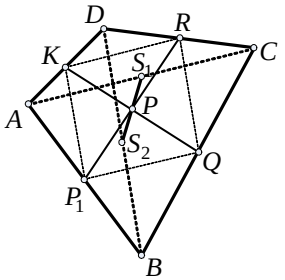
в) $n=4s+2$ $i+i^2+i^3+i^4+\ldots+i^{4s}+i^{4s+1}+i^{4s+2}=(i-1-i+1)+(i-1-i+1)+\ldots+(i-1-i+1)+i-1=i-1$

г) $n=4s+3$ $i+i^2+i^3+i^4+...+i^{4s}+i^{4s+1}+i^{4s+2}+i^{4s+3}=(i-1-i+1)+(i-1-i+1)+...+(i-1-i+1)+i-1-i=-1.$

3.Над страните BC, CA и AB оде ден произволен триаголник ABC, надвор од него, конструирани се рамностранни триаголници BCA_1, CAB_1 и ABC_1. Да се докаже дека со отсечките AA_1, BB_1 и CC_1 може да се формира рамностран триаголник.



Решение.Од претпоставките на задачата (види цртеж) следува дека $\overline{B_1C}=\overline{AC}$, $\overline{CA_1}=\overline{BC}$, $\measuredangle ACA_1=60^\circ+\measuredangle ACB$, $\measuredangle BCB_1=60^\circ+\measuredangle ACB$, што значи дека $\measuredangle ACA_1=\measuredangle BCB_1$. Со тоа е докажано дека $\Delta BB_1C\cong\Delta AA_1C$, од каде што добиваме дека $\overline{BB_1}=\overline{AA_1}$. На ист начин се покажува дека $\Delta CBC_1\cong\Delta ABA_1$, од каде што следува дека $\overline{CC_1}=\overline{AA_1}$. Со тоа покажавме дека $\overline{AA_1}=\overline{BB_1}=\overline{CC_1}$, т.е. од отсечките $\overline{AA_1}, \overline{BB_1}, \overline{CC_1}$ може да се конструира рамностран триаголник.



4.Нека S_1 и S_2 се средините на дијагоналите на еден произволен четириаголник $ABCD$. Да се докаже дека отсечката S_1S_2 минува низ пресекот P на средните линии на $ABCD$ и дека P е средина на отсечката S_1S_2.

Решение. Прво ќе покажеме дека средишните точки на страните на произволен четириаголник се темиња на параллелограм(види цртеж). Од тоа што P_1Q е средишница на триаголникот ABC добиваме $\overline{P_1Q}=\frac{1}{2}\overline{AC}$ и $P_1Q\parallel AC$, а од тоа што KR е средишница на триаголникот ACD добиваме $\overline{KR}=\frac{1}{2}\overline{AC}$ и $KR\parallel AC$, од што следува $\overline{P_1Q}=\overline{QR}$ и $P_1Q\parallel KR$. Аналогно се покажува дека $\overline{P_1K}=\overline{QR}$ и $P_1K\parallel QR$.

Бидејќи четириаголникот P_1QRK е паралелограм, неговите дијагонали се преполовуваат. Од тоа што RS_1 е средишница на ΔADC добиваме дека $\overline{RS_1}=\frac{1}{2}\overline{AD}$ и $RS_1\parallel AD$, а пак од тоа што P_1S_2 е средишница на ΔABD се добива $\overline{P_1S_2}=\frac{1}{2}\overline{AD}$ и $P_1S_2\parallel AD$. Значи, добиваме дека $\overline{RS_1}=\overline{P_1S_2}$ и $RS_1\parallel P_1S_2$. Следствено, четириаголникот $P_1S_2RS_1$ е паралелограм, а бидејќи S_1S_2 и P_1R се негови дијагонали, тие се преполовуваат, што значи, P е средина на отсечката S_1S_2.

III година

1.Да се реши равенката

$$(\sqrt{3-\sqrt{8}})^x+(\sqrt{3+\sqrt{8}})^x=6.$$

Решение. Ако во равенката наместо $\sqrt{8-\sqrt{3}}$ ставиме $\frac{1}{\sqrt{3+\sqrt{8}}}$ ќе добиеме еквивалентна равенка

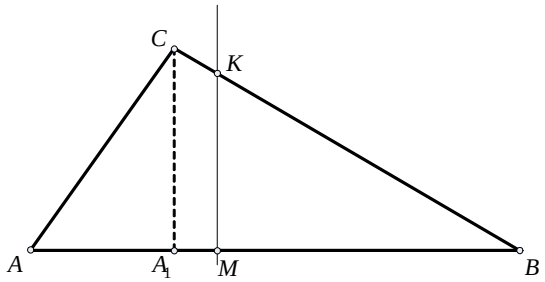
$$(\sqrt{3+\sqrt{8}})^{2x}-6(\sqrt{3+\sqrt{8}})^x+1=0.$$

Ако ставиме $(\sqrt{3+\sqrt{8}})^x = y$, ќе ја добиеме следната квадратна равенка

$$y^2 - 6y + 1 = 0,$$

чии решенија се $y = 3 + 2\sqrt{2}$ и $y = 3 - 2\sqrt{2}$. Од $(\sqrt{3+\sqrt{8}})^x = 3 + 2\sqrt{2}$ се добива $x = 2$, а од $(\sqrt{3+\sqrt{8}})^x = \frac{1}{3+2\sqrt{2}} = (3+2\sqrt{2})^{-1}$, се добива $x = -2$.

Значи, равенката има две решенија $x_1 = 2$ и $x_2 = -2$.



2.Во триаголникот ABC, висината h_c ја дели страната AB на делови p и q. На страната AB е повлечена нормала, којашто го дели триаголникот ABC на два дела со еднакви плоштини. Нека M е пресечна точка на таа нормала со AB. Да се најде $\overline{AM}$ и $\overline{BM}$.

Решение.Од претпоставките на задачата имаме $\Delta C_1BC \sim \Delta MBK$ (види цртеж). Навистина и двата триаголници се правоаголни и имаат еден заеднички агол, кај темето B.

Од сличноста на триаголниците се добива следната пропорција

$$\overline{CC_1} : \overline{KM} = \overline{C_1B} : \overline{MB},$$

од каде што се добива

$$\overline{KM} = \frac{h_c \overline{MB}}{q}. \qquad (1)$$

Бидејќи плоштината на четириаголникот $AMKC$ е еднаква нап лоштината на триаголникот MBK, добиваме дека плоштината P на триаголникот ABC е

$$P = 2\frac{1}{2}\overline{MB} \cdot \overline{KM} = \overline{MB} \cdot \overline{KM}. \qquad (2)$$

Од друга страна за плоштината P на триаголникот ABC важи

$$P = \frac{1}{2}(p+q)h_c \qquad (3)$$

Равенствата (1), (2) и (3) го даваат следното равенство

$$\frac{1}{2}(p+q)h_c = \overline{MB}\frac{h_c \cdot \overline{MB}}{q}. \qquad (4)$$

Користејќи го равенството (4) и очигледното равенство $\overline{AM} = \overline{AB} - \overline{MB}$, се добива

$$\overline{AM} = p + q - \sqrt{\frac{q(p+q)}{2}}.$$

3.Да се реши равенката

$$\sin^2 x \sin^2 2x + \sin^2 3x = 1. \qquad (1)$$

Решение.Користејќи ја формулата

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha),$$

равенката (1) се трансформира во

$$2 - \cos 2x - \cos 4x + 2\cos^2 3x = 2, \qquad (2)$$

а потоа, имајќи предвид дека

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

од (2) добиваме

$$-2\cos 3x\cos x + 2\cos^2 3x = 0,$$

т.е.

$$(-\cos x + \cos 3x)\cos 3x = 0. \qquad (3)$$

Бидејќи $\cos 3x - \cos x = -2\sin 2x \sin x$, равенката (3) добива вид

$$\sin x \sin 2x \cos 3x = 0,$$

па

$$\sin x = 0, \qquad \sin 2x = 0, \qquad \cos 3x = 0. \qquad (4)$$

Решенијата на првата, втората, третата равенка од (4) се соодветно:

$$x = k\pi, \qquad x = k\frac{\pi}{2}, \qquad x = (2k+1)\frac{\pi}{2}, \qquad (k \in \mathbb{Z}), \qquad (5)$$

па тоа се сите решенија на дадената равенка (1).

4.Иста како задачата 1 од четврта година.

IV година

1.Да е докаже дека еден цел број c може да се претстави како збир на квадратите на два цели броја ако и само ако бројот $2c$ го има истото својство.

Решение.Нека бројот c може да се претстави како збир на од квадратите на два цели броја x и y, т.е. $c = x^2 + y^2$. Броевите $x - y$ и $x + y$ се цели и користејќи го очигледното равенство $(x-y)^2 + (x+y)^2 = 2c$, заклучуваме дека и бројот $2c$ е збир од квадратите на два цели броја.

Обратно, нека $2c = a^2 + b^2$ за некои цели броеви a и b. Бидејќи бројот $a^2 + b^2$ е парен, следува дека a^2 е парен и b^2 е парен, или a^2 е непарен и b^2 е непарен. Квадратот на било кој парен број е парен, и квадратот на било кој непарен број е непарен, па заклучуваме дека a и b се парни броеви, или a и b се непарни броеви. Разликата и збирот на парни (непарни) броеви е парен број. Затоа $\frac{a+b}{2}$ и $\frac{a-b}{2}$ се цели броеви. Користејќи го овој резултат и претпоставката $2c = a^2 + b^2$ добиваме

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + 2ab + b^2 + a^2 - 2ab + b^2}{4} = \frac{2(a^2+b^2)}{4} = \frac{2\cdot 2c}{4} = c,$$

Значи, и бројот c е збир на квадратите на два цели броја.

2.Нека ψ е пермутација на множеството $\{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$ каде што $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ се дадени позитивни реални броеви. Да се докаже дека

$$\frac{a_1}{\psi(a_1)} + \frac{a_2}{\psi(a_2)} + ... + \frac{a_n}{\psi(a_n)} \geq n$$

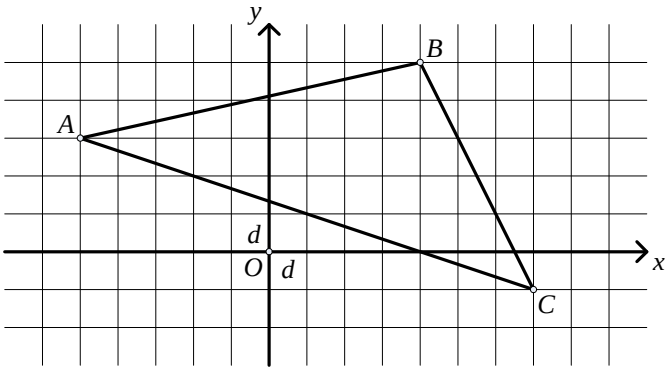
Решение. Од тоа што ψ е пермутација на множеството $\{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$ заклучуваме дека

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot ... \cdot a_n = \psi(a_1)\cdot\psi(a_2)\cdot\psi(a_3)\cdot ... \cdot \psi(a_n).$$

Користејќи ја познатата особина дека аритемтичката и геометриската средина на ненегативни реални броеви е поголема или еднаква на нивната геометриска средина, добиваме

$$\frac{1}{n}\left[\frac{a_1}{\psi(a_1)} + \frac{a_2}{\psi(a_2)} + ... + \frac{a_n}{\psi(a_n)}\right] \geq \sqrt[k]{\frac{a_1}{\psi(a_1)}\cdot\frac{a_2}{\psi(a_2)}\cdot ....\frac{a_n}{\psi(a_n)}} = \sqrt[k]{1} = 1.$$

3.Да се докаже дека рамностран триаголник не може да се впише во квадратна мрежа, така што темињата на триаголникот да лежат во пресеците на хоризонталните и вертикалните линии на мрежата.



Решение. Нека вертикалните линии од мрежата се паралелни со ординатната оска, а хоризонталните линии од мрежата се паралелни со апсцисната оска во еден правоаголен декартов координатен сsстем. Да претпоставиме дека во таа мрежа може да се впише рамностран триаголник чии темиња се во пресеците на хоризонталните И вертикалните линии во мрежата(види цртеж).

Нека $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ и $C(x_3, y_3)$. Јасно е дека постојат цели броеви $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$, такви што

$$x_i = a_i d\,, \quad y_i = b_i d \qquad (\,i = 1, 2, 3\,),$$

каде што d е означено растојанието меѓу хоризонталните(вертикалните) линии (види цртеж).

Од познатата формула, за плоштината P на триаголникот ABC добиваме

$$P = \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]\,,$$

т.е.

$$P = \frac{d^2}{2}[a_1(b_2 - b_3) + b_2(b_3 - b_1) + a_3(b_1 - b_2)]\,. \tag{1}$$

Од друга страна, од $P = \frac{c^2\sqrt{3}}{4}$, каде што $c^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$, добиваме

$$P = \frac{d^2\sqrt{3}}{4}[(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2]\,. \tag{2}$$

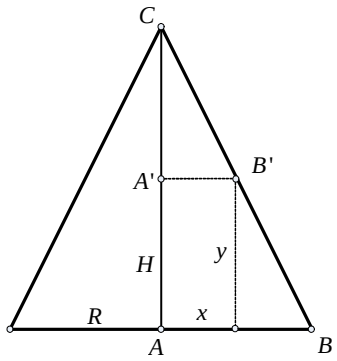
Ако ги споредиме равенствата (1) и (2), ќе добиеме

$$a_1(b_2 - b_3) + b_2(b_3 - b_1) + a_3(b_1 - b_2) = \frac{(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2}{2} \cdot \sqrt{3} \tag{3}$$

што не е можно, бидејќи левата страна од равенството (3) е рационален број, а десната страна од тоа равенство е ирационален број (производ од рационален број различен од нула и ирационален број е ирационален број).

4.Во даден кружен конус, со висина H и радиус на основата R впишан е цилндар со максимален волумен. Во цилиндарот е впишан конус и во тој конус пак е впишан цилндар со максимален волумен, итн (основите на цилндрите и конусите се во иста рамнина). Да се најде сумата на волумените на впишаните цилиндри.

Решение.Да го означиме со x радиусот на основата на впишаниот цsлиндер, а со y неговата висина. Јасно е дека $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C$ (види цртеж; двата триаголници имаат еден заеднички остар агол и двата се правоаголни). Од нивната сличност се добива



$$x = \frac{R}{H}(H - y). \qquad (1)$$

Го бараме оној цилиндар којшто има максимален волуме $V = \pi x^2 y$, т.е. ќе најдеме за кој y функцијата

$$\Phi(y) = \frac{R^2}{H^2}(H - y)^2 y$$

има максимална вредност. Од

$$\Phi'(y) = \pi \frac{R^2}{H^2}[2(H - y)(-1)y + (H - y)^2] = 0,$$

ја добиваме равенката

$$3y^2 - 4Hy + H^2 = 0,$$

чии решенија се $y_1 = H$ и $y_2 = \frac{H}{3}$. Поради

$$\Phi''(y) = \pi \frac{R^2}{H^2}[2(-1)(-1)y + 12(H - y)(-1) + 2(h - y)(-1) = \pi \frac{R^2}{H^2}(-4H + 6y),$$

имаме

$$\Phi''(y_1) = \pi \frac{R^2}{H^2} 2H > 0,$$

што значи дека $\Phi(y_1)$ е минимум на функцијата $\Phi(y)$ (цилиндарот дегенерира во висината на конусот), а $\Phi''(y_2) = \pi \frac{R^2}{H^2}(-2H) < 0$, што значи дека за $y = \frac{H}{3}$ се добива дека максимум на $\Phi(y)$ (“максималност на волуменот”). За ова вредност на y, од равенството (1) добиваме $x = \frac{2}{3}R$ И максималниот волуме ќе биде

$$\Phi(y_1) = 4\pi \frac{R^2 H}{27}.$$

Ако сега, во добиениот цилиндер впишеме конус(висината на тој конус е висината на цилиндерот, $\frac{H}{3}$, а радиусот на основата на конусот е радиусот на основата на цилиндарот, $\frac{2}{3}R$) и во тој конус впишеме цилиндер со максимален волумен, тогаш висината на нововпишаниот цилиндар ќе биде $\frac{1}{3}\left(\frac{H}{3}\right) = \frac{1}{3^2}H$, а радиусот на неговата основа ќе биде

$$\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}R\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 R,$$

додека неговиот волумен е $\pi R^2 H \left(\frac{2}{3}\right)^4 \left(\frac{1}{3}\right)^2$; третиот впишан цилиндар ќе има висина $\left(\frac{1}{3}\right)^3 H$, радиус на основата $\left(\frac{2}{3}\right)^3 R$ и волумен $\pi R^2 H \left(\frac{2}{3}\right)^6 \left(\frac{1}{3}\right)^3$ и аналогно, за секој нареден впишан цилиндар. На овој начин добиваме една низа броеви(волумени) која претставува геметриска низа со количник $q = \frac{4}{27} < 1$ и затоа сумата на бескрајниот геометриски ред ќе биде

$$\frac{4\pi R^2 H \frac{1}{27}}{1 - \frac{4}{27}} = \frac{4}{23}\pi R^2 H.$$

XXII Републички натпревар 1979

I година

1.Да се пресмета вредноста на изразот

$$A=\frac{1}{a(a-b)(a-c)}+\frac{1}{-b(b-a)(b-c)}+\frac{1}{c(c-a)(c-b)},$$

ако $abc=1$ и $a\neq b\neq c\neq a$.

Решение.Имаме

$$A=\frac{bc(b-c)-ac(a-c)+ab(a-b)}{abc(a-b)(a-c)(b-c)}=\frac{b^2c-bc^2-a\ c+ac^2+a^2b-ab^2}{abc(a-b)(a-c)(b-c)}=$$

$$=\frac{b^2(c-a)-b(c^2-a^2)+ac(c-a)}{abc(a-b)(a-c)(b-c)}=\frac{(c-a)[b^2-b(c+a)+ac]}{abc(a-b)(a-c)(b-c)}=$$

$$=\frac{(c-a)(b^2-bc-ba+ac)}{abc(a-b)(a-c)(b-c)}=\frac{(c-a)[b(b-c)-a(b-c)]}{abc(a-b)(a-c)(b-c)}=$$

$$=\frac{(c-a)(b-c)(b-a)}{abc(a-b)(a-c)(b-c)}=\frac{1}{abc}=\frac{1}{1}=1.$$

2.Да се докаже дека производот од три последователни непарни природни броеви е делив со 3.

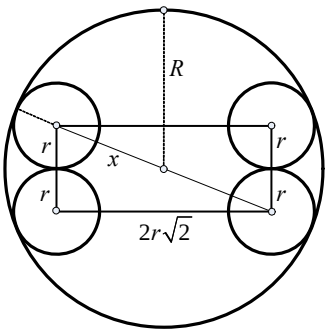
Решение.Треба да се докаже дека бројот $(2n-1)(2n+1)(2n+3)$ е делив со 3. Природниот број n е или од облик $3k$, или од облик $3k+1$ или од облик $3k+2$.

Ако $n=3k$, тогаш $(2n-1)(2n+1)(2n+3)=3(6k-1)(6k+1)(2k+1)$.

Ако $n=3k+1$, тогаш $(2n-1)(2n+1)(2n+3)=6k(6k+3)(6k+5)$.

Ако $n=3k+2$, тогаш $(2n-1)(2n+1)(2n+3)=3(6k-3)(2k+1)(6k+7)$.

Значи, во секој случај $(2n-1)(2n+1)(2n+3)$ е делив со 3.



3.Во сфера T со радиус R, впишани се осум сфери со еднакви радиуси r, така што центрите на впишаните сфери се темиња на една коцка и секоја од впишаните сфери ја допира сферата T и три од впишаните сфери. Да се најде радиусот r на впишаните сфери.

Решение.Ако се направи пресек на топката и коцката по просторната дијагонала на клоцката, ќе се добие слика како на цртежот. Притоа со x е означена половината од просторната дијагонала на коцката, работ на коцката е $2r$, а просторната дијагонала на коцката е еднаква на $2r\sqrt{3}$. Од сликата се гледа дека $R=r+x$, т.е. $R=r\sqrt{3}+r$, од каде што се добива дека

$$r=\frac{R}{1+\sqrt{3}}.$$

4.Секоја од буквите од збирот

$$\begin{array}{r} F\ O\ R\ T\ Y \\ T\ E\ N \\ +\quad T\ E\ N \\ \hline S\ I\ X\ T\ Y \end{array}$$

да се замени со една од цифрите $0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$ така што исти букви букви се означени со исти цифри, а различни букви се означени со различни цифри, и собирањето да биде точно.

Решение. Бидејќи $Y+N+N$ е број чија цифра на единиците е Y, $2N$ треба да биде број чија цифра на единиците е 0. Тоа е можно за $N=0$ или $N=5$. Ако $N=5$, тогаш кај збирот на десетиците ќе треба $E+E+1$ да биде број чија цифра на единиците е 0, што не е можно. Според тоа, добиваме $N=0$ и $E=5$. Да го разгледаме сега збирот на цифрите на стотките, $R+2T+1$. Тој збир е помал од 30, бидејќи неговата најголема вредност е 27, а имено за $R=8$ и $T=9$. Според тоа, го имаме равенството

$$R+2T+1=10x+X,$$

каде што $x=0,1$ или 2. Да го разгледаме секој случај посебно.

1.Ако $x=0$, тогаш имаме $R+2T+1=X$, што значи дека не додаваме цифра кај иљадниците, па би добиле дека O и I се заменети со исти цифри. Значи, $x=0$ не е можно.

2.Ако $x=1$ тогаш имаме $R+2T+1=10+X$, што значи дека кај илјадите додаваме цифра 1. Добиваме дека I е цифра на единиците за бројот $O+1$. Во овој случај не е можно $O\le 8$ бидејќи треба да додадеме цифра кај децтилјаите за F и S да бидат различни цифри. Според тоа, $O=9$ и би добиле $I=O$ што не е можно бидејќи $N=0$. Значи, случајот $x=1$ не е можен.

3. Останува дека е точно $x=2$. Тогаш $R+2T+1=20+X$, т.е. кај илјадите додаваме цифра 2. Сега, не е можно $O\le 7$ и $O=8$ бидејќи во првиот случај не би имал да додадеме цифра кај десетилјадите, а во вториот би добиле $I=O$. Според тоа, добиваме: $O=9$, $I=1$ и $S=F+1$. Понатаму $R+2T+1$ треба да биде број меѓу 20 и 27 што е можно ако R и T имаат вредности $6,7$ или 8.

Значи, ги имаме следните можности: $R=6$ и $T=7$; $R=7$ и $T=8$; $R=8$ и $T=6$ или $R=8$ и $T=7$. Втората и четвртата можност ги исклучуваме бидејќи би добиле $X=1$ што не е можно. Првата и третата можност ги исклучуваме бидејќи би добиле $X=3$, па за F,S и Y остануваат цифрите $2,4$ и 6 што не е можно, зошто F и S треба да се последователни броеви. Според тоа, добиваме $R=7,T=8$ и, на крајот, $F=2,S=3$, $Y=6$. Значи, решение е таблицата

$$\begin{array}{r} 29786 \\ 850 \\ +\quad 850 \\ \hline 31486 \end{array}$$

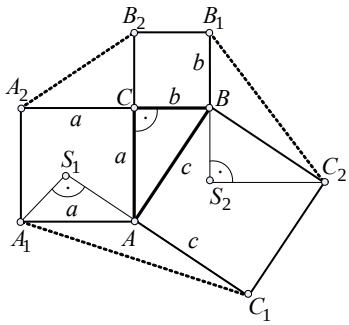
II година

1.Ако $\alpha=\frac{1}{2}(-1\pm i\sqrt{3})$, да се докаже дека $\alpha^2+\alpha+1=0$ и $\alpha^3=1$. Потоа да се одреди реалниот и имагинарниот дел на бројот $\frac{a\alpha^2+b}{a+b\alpha}$, каде што a и b се реални броеви.

Решение. Решенијата на квадратната равенка $x^2+x+1=0$ се броевите $\frac{1}{2}(-1\pm i\sqrt{3})$, што значи дека $\alpha^2+\alpha+1=0$. Така

$$\alpha^3=\left[\frac{1}{2}(-1\pm i\sqrt{3})\right]=\frac{1}{8}[-1\pm 3i\sqrt{3}+3(-1)i^2\cdot 3\pm i^3(\sqrt{3})^3]=\frac{1}{8}(-1\pm 3i\sqrt{3}+9\mp 3i\sqrt{3})=1.$$

$$\frac{a\alpha^2+b}{a+b\alpha}=\frac{a\alpha^2+b}{a+b\alpha}\frac{\alpha}{\alpha}=\frac{a+b\alpha}{(a+b\alpha)\alpha}=\frac{1}{\alpha}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}.$$



(треба да забележиме дека во именителот на дропката $\frac{a\alpha^2+b}{a+b\alpha}$ мора да биде различен од нула, што ќе биде исполнето ако $a^2+b^2\neq 0$).

2.Над страните на еден правоаголен триаголник со катети a и b, конструирани се квадрати и потоа соседните слободни темиња на квадратите се поврзани со се поврзани со отсечки. Да се најде плоштината на добиениот шестаголник.

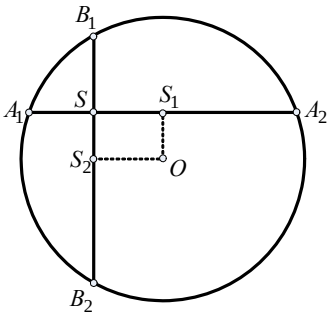
Решение. Од цртежот се гледа дека

$$P_{A_1A_2B_2B_1C_2C_1}=P_{A_1CA_1}+P_{BC_2B_1}+P_{A_1AC_1}+b^2+c^2+\frac{ab}{2}$$

$$P_{A_2CB_2}=\frac{ab}{2},\qquad P_{BC_2B_1}=\frac{1}{2}b\overline{S_2C_2}.$$

Бидејќи $\Delta BC_2S_2\cong\Delta ABC$ (имаат по една страна еднаква, двата се правоаголни и $\measuredangle S_2BC_2=\measuredangle CBA$ како агли со заемно нормални краци), следува дека $\overline{S_2C_2}=a$. Според тоа, $P_{BC_2B_1}=\frac{ab}{2}$. Слично се добива дека $P_{A_1AC_1}=\frac{ab}{2}$, па бараната плоштина ќе биде $2(a^2+b^2+ab)$.

3.Тетивите A_1A_2 и B_1B_2 од кружницата $k(O,r)$ се заемно нормални. Ако $S=A_1A_2\cap B_1B_2$, да се покаже дека $\overrightarrow{SA_1}+\overrightarrow{SA_2}+\overrightarrow{SB_1}+\overrightarrow{SB_2}=2\overrightarrow{SO}$.



Решение. Ако S_1 е средината на тетивата A_1A_2, S_2 е средината на тетивата B_1B_2 (види цртеж), ќе имаме

$$\overrightarrow{SO}=\overrightarrow{SS_1}+\overrightarrow{SS_2}, \qquad (1)$$

$$\overrightarrow{SS_1}=\overrightarrow{SA_1}+\overrightarrow{A_1S_1}=\overrightarrow{SA_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{A_1A_2}=$$

$$=\overrightarrow{SA_1}+\frac{1}{2}\left(-\overrightarrow{SA_1}+\overrightarrow{SA_2}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{SA_1}+\overrightarrow{SA_2}\right)$$

Слично се добива равенството

$$\overrightarrow{SS_2}=\frac{1}{2}(\left(\overrightarrow{SB_1}+\overrightarrow{SB_2}\right).$$

Ако најдените равенства ги замениме во равенството (1) ќе го добиеме бараното равенство.

4.При множење на два позитивни броеви од кои едниот е за 9 поголем од другиот, ученикот направил грешка ставајќи на местото на десетките број, за три помал од точниот. При делењето на тој број со помалиот множител ученикот добил количник 42 и остаток 4. Кои броеви ги множел ученикот?

Решение. Нека помалиот множител е x, а бројот што го добил ученикот е y. Тогаш условите од задачата даваат:

$$x(x+9)=y+30$$

$$y=42x+4$$

Решавајќи го системот по x се добива $x_1=34$ и $x_2=-1$. Значи, броевите се 34 и 43.

III година

1.Да се определи за кои ϕ важи неравенството $1+\text{ctg}\phi \le \text{ctg}\frac{\phi}{2}$.

Решение.Бидејќи $\text{ctg}\phi = \frac{\text{ctg}^2\frac{\phi}{2}-1}{2\text{ctg}\frac{\phi}{2}}$, дадената неравенка добива облик

$$1+\frac{\text{ctg}^2\frac{\phi}{2}-1}{2\text{ctg}\frac{\phi}{2}} \le \text{ctg}\frac{\phi}{2}.$$

Ако $\text{ctg}\frac{\phi}{2} > 0$, од горната неравенка се добива следнава неравенка

$$2\text{ctg}\frac{\phi}{2}+\text{ctg}^2\frac{\phi}{2}-1 \le 2\text{ctg}^2\frac{\phi}{2},$$

т.е.

$$\left(\text{ctg}\frac{\phi}{2}-1\right)^2 \ge 0$$

која важи за секој ϕ.

Ако $\text{ctg}\frac{\phi}{2} < 0$, од неравенката (1) се добива следнава неравенка

$$\left(\text{ctg}\frac{\phi}{2}-1\right)^2 \le 0,$$

којашто важи само за оние ϕ за кои $\text{ctg}\frac{\phi}{2}=1$, но за тие ϕ не е $\text{ctg}\frac{\phi}{2}<0$.

Според тоа, решенијата на дадената неравенка се оние ϕ за кои $\text{ctg}\frac{\phi}{2}>0$, т.е.

$$0+2k\pi < \phi < \pi+2k\pi,\ k=0,\pm1,\pm2,\ldots.$$

2. Два круга со радиуси R и r се допираат во точката M. На кругот со радиус r е дадена точка N, дијаметрално спротивна на M и во таа точка е повлечена тангента. Да се најде радиусот на кругот којшто ги допира двата круга и тангентата што минува низ точката N.

Решение.I случај: кружниците се допираат однадвор(види цртеж). Имаме:

$$(R+2r-x)+y^2=(R+x)^2$$

$$(x-r)^2+y^2=(r+x)^2,$$

од каде што, со елиминација на y, се добива $x=\frac{r(R+r)}{R}$.

Другата кружница која ги допира двете дадени кружници и тангентата има центар во точката S и радиус $\frac{R+r}{2}$.

II случај. Кружинците се допираат однатре. (Во овој случај може да се претпостави дека $R>r$).

Од цртежот се гледа дека има три такви кружници. Едната од нив има центар во точката P и радиус $x=\frac{R-r}{2}$, а другите две се симетрични меѓу себе. Нивните радиуси се добиваат од следните релации

$$(r-x)^2+y^2=(r+x)^2$$

$$(R-2r-x)^2+y^2=(R-x)^2,$$

од каде што добиваме дека

$$x=\frac{r(R-r)}{R}.$$

3.Да се реши системот равенки

$$\begin{cases} x^y=y^x \\ a^x=b^y \end{cases},$$

$a\neq 1$, $b\neq 1$. Да се изврши дискусија.

Решение.Можните решенија на системот можат да бидат само $x>0$ и $y>0$. Од тоа И од втората равенка следува дека $a>1$ и $b>1$, или $0<b<1$ и $0<a<1$. Ако е $0<a<1$ и $b>1$ или $0<b<1$ и $a>1$, тогаш системот нема решение.

Затоа, нека $a>1$ и $b>1$ (или $0<b<1$ и $0<a<1$). Логаритмирајќи ги дадените равенки по произволна основа, добиваме сsстем равенки, еквивалентен на дадениот:

$$y\log x=x\log y,$$
$$x\log a=y\log b.$$

Множејќи ги левите и десните страни на добиенјот систем и кратејќи со $xy>0$, го добиваме системот

$$\log a\cdot\log x=\log b\cdot\log y$$
$$x\log a=y\log b$$

којшто, исто така, е еквивалентен на дадениот систем. Од првата равенка на последниот систем наоѓаме, дека

$$x=y^{\frac{\log b}{\log a}},$$

па заменувајќи во втората равенка:

$$y^{\frac{\log b-\log a}{\log a}}=\frac{\log b}{\log a}.$$

Од тоа, ако $\log b-\log a\neq 0$, имаме

$$y=\left(\frac{\log b}{\log a}\right)^{\frac{\log a}{\log b-\log a}},\ x=\left(\frac{\log b}{\log a}\right)^{\frac{\log a}{\log b-\log a}}.$$

Ако, пак, $\log b-\log a=0$, тогаш $a=b$ и од второто равенство добиваме $x=y$. Во тој случај сиситемот е задоволен од произволен пар броеви x и y еднакви меѓу себе.

4.Ако p и q се непарни броеви, да се докаже дека равенката

$$x^2+px+q=0$$

нема рационални корени.

Решение.Една квадратна равенка да има рационални корени, треба нејзината дискриминанта да биде квадрат на некој цел број, па ако претпоставиме дека дадената квадратна равенка има рационални корени, треба $p^2-4q=a^2$ за некој цел број a. Бидејќи p и q се непарни броеви и бројот p^2-4q е непарен(како разлика од непарен и парен број),

следува дека и a^2 е непарен број, па и a е непарен број. Значи, треба да провериме дали равенката $p^2 - 4q = (2k+1)^2$ може да важи за $p = 2m+1$, $q = 2n+1$ и k цел број. Притоа

$$(2m+1)^2 - 4(2n+1) = (2k+1)^2$$

$$4m^2 + 4m + 1 - 8n - 4 = 4k^2 + 4k + 1$$

$$m(m+1) - (2n+1) = k(k+1)$$

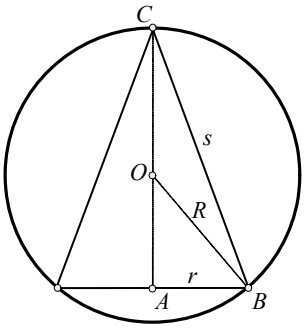
Бројот $k(k+1)$ е парен како производ на два последователни цели броеви, бројот $m(m+1) - (2n+1)$ е непарен како разлика на еден парен и еден непарен број, па добиваме дека последната равенка не може да важи, односно дека дадената квадратна равенка нема рационални корени.

IV година

1.Да се докаже дека во таблицата

1
2 3
3 4 5 6 7
4 5 6 7 8 9 10
. . . .
. . . .

Збирот на сите членови во секоја редица е еднаков на квадратот на средниот број.



Решение. Да забележиме дека n-тата редица во горната таблица има облик

$$n \quad n+1 \quad n+2 \quad \ldots \quad 2n-1 \quad \ldots \quad 3n-2 .$$

Членовите на ова редица формираат аритметичка низа и ако S е збирот од сите тие членови(ги има $2n-1$) добиваме

$$S = \frac{2n-1}{2}(n + 3n - 1) = (2n-1)^2 ,$$

што требаше да се докаже.

2.Да се најде висината на конусот со најголема бочна површина, којшто може да се впише во топка со радиус R.

Решение. Да ја означиме висината на конусот со x. Плоштината на бочната површина на конусот е $y = rs\pi$ (види цртеж). Од триаголникот OAB имаме

$$\overline{OA} = x - R$$

$$r^2 = R^2 - (x-R)^2 = 2Rx - x^2 .$$

Од триаголникот ABC имаме

$$s^2 = x^2 + r^2 = x^2 + 2Rx - x^2 = 2Rx$$

од каде што добиваме

$$y = \pi\sqrt{4R^2x^2 - 2Rx^3} .$$

Максимумот на ова функција го бараме преку нејзиниот прв извод:

$$y' = \frac{8R^2x - 6Rx^2}{2\sqrt{4R^2x^2 - 2Rx^2}}$$

$$y' = 0 \;\Rightarrow\; 8R^2x - 6Rx^2 = 0 \;\Rightarrow\; x = 0 \text{ или } x = \frac{8R^2}{6R} = \frac{4R}{3} ,$$

($x = 0$ не спаѓа во решението на задачата);

$$y'(R)=\pi\frac{R}{\sqrt{2}},\ y'(\frac{3R}{2})=-\pi\frac{R}{2};$$

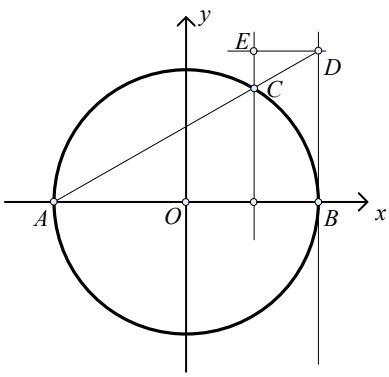
Според тоа, првиот извод на функцијата лево од точката $x=\frac{3}{4}R$ е позитивен, а десно од таа точка е негативе, што значи во таа точка функцијата има максимум.

3. Ако p е прост број и m е цел број, да се докаже дека m^p-m е делив со p.

Решение. Ќе ја искористиме биномната формула и математичката индукција. За $m=1$ тврдењето важи, бидејќи $m^p-1=0$ е делив со секој број. Да претпоставиме дека тврдењето е точно за $m=n$. Тогаш за $m=n+1$ ќе имаме:

$$(n+1)^p-(n+1)=n^p+\binom{p}{1}n^{p-1}+\binom{p}{2}n^{p-2}+...+\binom{p}{p-1}n-n=$$
$$=n^p-n+\binom{p}{1}n^{p-1}+\binom{p}{2}n^{p-2}+...+\binom{p}{p-2}n^2+pn.$$

Изразите $\binom{p}{k}=\frac{p!}{k!(p-k)!}=\frac{p[(p-1)!]}{k!(p-k)!}$, за $k=1,2,3,...,p-2$ се деливи со p бидејќи p е прост број. Заради индуктивната претпоставка, добиваме дека и $(n+1)^p-(n+1)$ е делив со p.



4.Дадена е кружница со радиус r и еден негов дијаметар AB. Во точката B е повлечена тангента на кружницата и низ точката A една права, која ја сече кружницата во точката C, а тангентата-во точката D. Низ C е повлечена права паралелна со тангентата BD, а низ D-права паралелна со дијаметарот AB. Тие две прави се сечат во точката E. Да се одреди геометриското место на точката E, ако тетивата AC ротира околу A.

Решение. Да избереме координатен систем така што равенката на кружницата да биде $x^2+y^2=r^2$. Дијаметарот AB го избираме да лежи на Ox-оската(види цртеж) Тогаш равенката на тангентата е $x=r$, а равенката на тетивата AC е $y=k(x+r)$. Точката C ќе има координати

$$x_C=r\frac{1-k^2}{1+k^2},\qquad y_C=\frac{2rk}{1+k^2},$$

а точката D ќе има координати $x_D=r$, $y_D=2rk$. Равенката на правата DE ќе биде

$$y=2rk, \tag{1}$$

а равенката на правата CE ќе биде

$$x=r\frac{(1-k)^2}{1+k^2} \tag{2}$$

Ако од (1) и (2) го елиминираме параметарот k, ќе добиеме

$$y^2=4r^2\frac{r-x}{r+x};$$

тоа е равенка на бараното геометриско место.

XXIII Републички натпревар 1980

I година

1.За обележување(нумерирање) на страниците на еден речник употребени се 6869 цифри. Колку страници има речникот?

Решение.За обележување на првите 999 страници потребни се $9+2\cdot 90+3\cdot 900=2889$ цифри. Остануваат уште $6869-2829=3980$ цифри. Со нив можат да се обележат уште $3980:4=995$ страници. Според тоа, вкупниот број на страници на речникот е $999+995=1994$.

2.Да се докаже дека кубот на најголемиот од три последователни природни броеви е различен од збирот на кубовите од другите два.

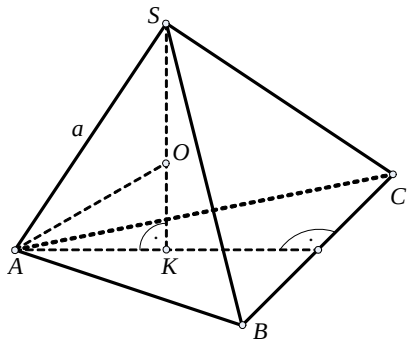
Решение.Да претпоставиме дека за некој број x е точно равенството

$$(x-1)^3+x^3=(x+1)^3.$$

Горното равенство е еквивалентно со равенството

$$x^2(x-6)=2,$$

кое е невозможно во множеството на природни броеви, бидејќи левата страна на тоа равенство за $1\le x\le 6$ е помала или еднаква на нула, а за $x>6$ таа е поголема од 36.



3.Во еден тетраедар со раб a е впишана сфера и околу него е опишана сфера. Да се најдат соодветните радиуси и волуменот на пирамидата со темиња во точките во кои впишаната сфера го допира тетраедарот.

Решение. Центрите на впишаната и опишаната сфера во и околу правилниот тетраедар $ABCS$ (види цртеж) се совпаѓаат и се наоѓаат во пресекот на висините на тетраедарот. Нека тоа биде точката O.

Јасно е дека:

$$\overline{SO}+\overline{OK}=\frac{a\sqrt{6}}{3}, \qquad (1)$$

(висина на правилен тетраедар со раб a),

$$\overline{OK}^2=\overline{OA}^2=\overline{AK}^2. \qquad (2)$$

Бидејќи $\overline{AK}=\frac{a\sqrt{3}}{3}$, од равенството (2) добиваме

$$\overline{OK}^2=\overline{SO}^2-\frac{a^2}{3},$$

па ако се искористи равенството (1), се добива дека радиусот на впишаната сфера е $\overline{OK}=\frac{a\sqrt{6}}{12}$, а радиусот на опишаната сфера е $\overline{OS}=\frac{a\sqrt{6}}{4}$.

Работ на пирамидата, со темиња во допирните точки на впишаната сфера во тетраедарот со раб a и тој тетраедар изнесува $\frac{a}{3}$ и затоа волуменот на пирамидата е

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{a}{3}\right)^2\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{1}{3}\frac{a}{3}\sqrt{6}=\frac{a^2\sqrt{3}}{324}.$$

4.На еден шаховски турнир учесниците играле секој со секого по еднаш и ниедна партија не завршила реми. Да се покаже дека меѓу учесниците постои шахист A со следното својство: ако B е некој друг учесник на турнирот, тогаш A го победил B, или постои шахист C којшто е победен од A и го победил B.

Решение. Во првиот случај кој било од учесниците е бараниот шахист A, бидејќи ако B е некој друг учесник, тогаш или A го победил B и тогаш навистина сме го нашле учесникот A, или A изгубил од B, во кој случај мора да постои шахист C кој изгубил од A и го победил B, оти ако таков нема, сите други шахисти или го победиле A, па A би имал најмал број поени што не е можно, или изгубиле од B, па B би имал најмногу поени што исто така не е можно.

Во вториот случај, кој било од тие неколку кои имаат најмногу, но ист број поени е бараниот шахист A. Проверката за тоа е слична како и во случајот 1.

Во третиот случај бараниот шахист A е победникот на турнирот кој има најмногу поени. И тука проверката е слична како и во случајот 1.

II година

1.Чамец тргнува надолу по реката во 10 часот. Истиот момент од него е пуштена топка. По 15 минути чамецот се враќа по топката. Во колку часот чамецот ќе ја сретне топката?

Решение. Нека брзината на реката е v, а брзината на чамецот е v_1. Ако чамецот тргнал од точката A и по $15\,\text{min}$ стинал во точката B (види цртеж), тој поминал пат $\overline{AB} = \frac{1}{4}(v + v_1)\ \text{km}$.

За тоа исто време топката A дошла во C и поминала пат $\overline{AC} = \frac{1}{4}v$. Од точката B чамецот се враќа назад. Да претпоставиме дека по x часови ја сретнал топката во точката E. Тогаш

$$\overline{BE} = x(v_1 - v)$$

$$\overline{CE} = x \cdot v\ ,$$

па од $\overline{AC} + \overline{CE} + \overline{EB} = \overline{AB}$ и од претходните равенки добиваме $x = \frac{1}{4}$ час $= 15$ минути. Според тоа, чамецот ќе ја сретне топката во 10 часот и 30 минути.

2.Да се најде најмалиот природен број $n > 1$ со следново својство: постои множество M од n точки во рамнината такви што секоја права AB ($A, B \in M$) е паралелна со некоја друга права CD ($C, D \in M$).

Решение. Очигледно е дека $n \neq 2,3$. Исто така не постои множество M од четири точки во рамнината со бараното својство, бидејќи во произволен четириаголник дијагоналата не е паралелна со другата дијагонала, ниту со која било страна.

Множеството M составено до темињата на еден правилен петаголник го има бараното својство. Според тоа, $n = 5$.

3.Да се реши системот равенки

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 19^2 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0 \\ x - y + z = 11 \end{cases}.$$

Решение. Дадениот систем е еквивалентен со системот

$$\begin{cases} (x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx) = 19^2 \\ xy + yz + za = 0 \\ x - y + z = 11 \end{cases}$$

од каде што добиваме

$$\begin{cases}(x+y+z)^2=19^2\\ x-y+z=11\end{cases}.$$

Последниов систем е еквивалетен со следниве два система

$$\begin{cases}x+z=15\\ y=4\end{cases} \qquad (1)$$

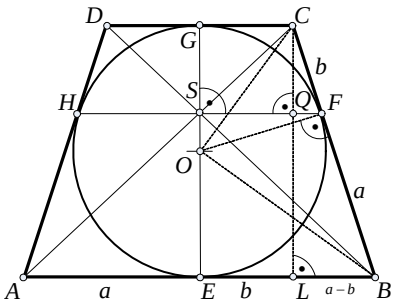
$$\begin{cases}x+z=-4\\ y=-15\end{cases} \qquad (2)$$

Од системот (1) и која било од равенките на дадениот систем ги добивме следниве две решенија:

$$\left(\frac{15+\sqrt{465}}{2},4,\frac{15-\sqrt{465}}{2}\right) \quad \text{и} \quad \left(\frac{15-\sqrt{465}}{2},4,\frac{15+\sqrt{465}}{2}\right).$$

Од системот (2) и било која од дадените равенки на дадениот csстем се добиваат следниве две решенија:

$$(6,-15,-10) \quad \text{и} \quad (-10,-15,6).$$



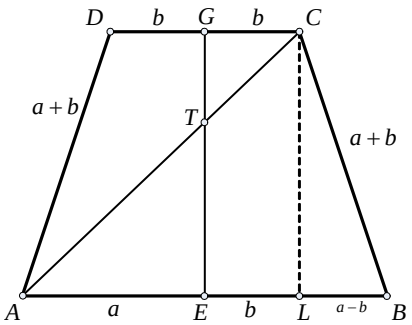
4.Нека $ABCD$ е рамнокрак трапез опишан околу кружницата k и нека E,F,G,H се допирните точки на страните AB,BC,CD,DA со k соодветно. Покажи дека пресекот на правите AC и BD се совпаѓа со пресекот на правите EG и HF.

Решение.Нека S е пресекот на отсечките HF и EG, а O е центарот на впишаната кружница во трапезот $ABCD$ (види цртеж). Имаме

$$\Delta SOF \sim \Delta CQF \quad \Rightarrow \quad \frac{\overline{SO}}{\overline{OF}}=\frac{\overline{QF}}{\overline{CF}},$$

$$\Delta CQF \sim \Delta CLB \quad \Rightarrow \quad \frac{\overline{QF}}{\overline{CF}}=\frac{\overline{LB}}{\overline{CB}}=\frac{a-b}{a+b}.$$

Притоа OF е висина на правоаголниот триаголник BCO и затоа $\overline{OF}=\sqrt{ab}$. Затоа добиваме $\overline{SO}=\sqrt{ab}\,\frac{a-b}{a+b}$, додека од $\overline{OE}=\overline{OF}$ и $\overline{SE}=\overline{SO}+\overline{OE}$ се добива $\overline{SE}=\frac{2a\sqrt{ab}}{a+b}$.



Ако T е пресекот на дијагоналата AC на трапезот и отсечката EG (види цртеж), тогаш од $\Delta ATE \sim \Delta ACL$ се добива $\overline{TE}=\frac{2a\sqrt{ab}}{a+b}$. Значи, добиваме дека отсечките SE и TE се еднакви, од каде што следува дека точките T и S се поклопуваат што требаше и да се докаже.

III година

1.За кои вредности на a равенката

$$1+\sin^2 ax=\cos x$$

има единствено решение?

Решение.Од дадената равенка и од $\sin^2 ax \geq 0$, $\cos x \leq 1$, добиваме $\sin^2 ax = 0$ и $\cos x = 1$, од каде што се добива дека

$$ax = k\pi, \quad x = 2k\pi,$$

каде што k и m се цели броеви.

Ако a е ирационален број, тогаш од $a \cdot 2m = k$ се добива $m = k = r$, па дадената тригонометриска равенка ќе го има единственото решение $x = 0$.

Ако a е рационален број, од $ax = k\pi$ и $x = 2m\pi$, јасно дека равенката ќе има бесконечно многу решенија.

Според тоа, равенката ќе има единствено решение ако a е ирационален број.

2.Да се реши системот равенки

$$\begin{cases} |\log_2(x+y)| + |\log_2(x-y)| = 3 \\ xy = 3 \end{cases}$$

Решение.Од $xy = 3$ заклучуваме дека $x > 0$ и $y > 0$, или $x < 0$ и $y < 0$. Од дефинираноста на $\log_2(x+y)$ и погоре кажаното следува дека $x, y > 0$.

Исто така, $x + y > 1$, бидејќи x или y е поголемо од 1, кое се добива од позитивноста на x и y и од $xy = 3$.

Од сето тоа следува дека дадениот систем е еквивалентен со системот

$$\begin{cases} \log_2(x+y) + |\log_2(x-y)| = 3 \\ xy = 3 \end{cases}$$

Ако е $0 < x - y < 1$, тогаш горниот систем се трансформира во системот

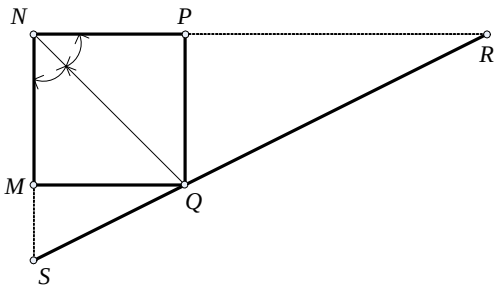
$$\frac{x+y}{x-y} = 8, \; xy = 3,$$

и решавајќи го него го добиваме решението $\left(\frac{3}{7}\sqrt{21}, \frac{1}{3}\sqrt{21}\right)$.

Ако $x - y > 1$, се доаѓа до системот

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 8 \\ xy = 3 \end{cases},$$

и решение на овој систем кој ги задоволува условите $x - y > 1$ и $x, y > 0$, е $x = 3, y = 1$.



3.Да се конструира квадрат така што сите негови страни да минуваат низ три колинеарни точки.

Решение.Нека дадените три колинеарни точки се S, Q и R. Од условот на задачата веднаш следува дека едно теме од квадратот што треба да се конструира мора да биде во една од дадените три точки. Нека тоа биде точката Q. Ако темињата на бараниот квадрат ги обележиме со M, N, P и Q, тогаш ако ја конструираме точката N, јасно е како Ќе се добијат и останатите темиња M и P (види цртеж).

Точката N се добива како пресек на следниве две геометриски места на точки:

-геометриско место на точки од кои отсечката RS се гледа под прав агол.

-геометриско место на точки од кои отсечката SQ (QR) се гледа под агол од 45°.

Познато е како се конструираат тие две геометриски места.

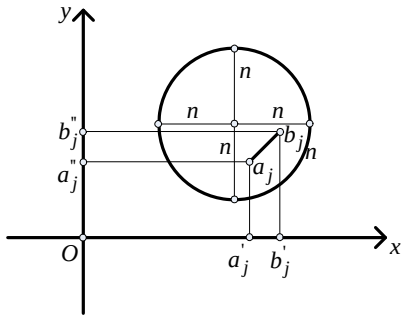
4. Во рамнината е дадена кружница со радиус $n\,\text{cm}$ ($n \in \mathbb{N}$) и произволна права. Во кружницата се наоѓаат $4n$ отсечки со должини $1\,\text{cm}$. Докажи дека постои права, паралелна или нормална на дадената, која има заеднички точки со најмалку две од дадените отсечки.

Решение.Да го сместиме кругот и $4n$-те отсечки $a_k b_k$, $k = 1,2,3,...,4n$ во правоаголен сsстем, при што апсцисната оска ја положуваме на дадената права. Нека $a_k^{'} b_k^{'}$ и $a_k^{''} b_k^{''}$ се проекциите на отсечките $a_k b_k$ на Ox и Oy-оската, соодветно. Ќе покажеме дека не може проекциите на Ox-оската да бидат дисјунктни меѓу себе и исто така дека проекциите на Oy оската да бидат дисјунктни меѓу себе. Ако споменатите проекции се дисјунктни, тогаш очигледните неравенства $\sum_{k=1}^{4n} a_k^{'} b_k^{'} < 2n$, $\sum_{k=1}^{4n} a_k^{''} b_k^{''} < 2n$, го даваат неравенството

$$\sum_{k=1}^{4n} [a_k^{'} b_k^{'} + a_k^{''} b_k^{''}] < 4n . \qquad (3)$$

Можеме да претпоставиме дека барем една отсечка $a_k b_k$ зафаќа остар агол со Ox-оската, т.е. можеме да претпоставиме дека за барем еден j е исполнето неравенството

$$a_j^{'} b_j^{'} + a_j^{''} b_j^{''} > a_j b_j , \qquad (4)$$



зошто ако сите отсечки $a_k b_k$ се паралелни со Ox-оската или сите отсечки $a_k b_k$ се паралелни со Oy-оската, тогаш очигледно е дека ќе постои права со бараното својство.

Од неравенствата $a_k^{'} b_k^{'} + a_k^{''} b_k^{''} \geq a_k b_k$, $k = 1,2,3,...,4n$ и од неравенствата (3) и (4) се доаѓа до невозможното неравенство $4n < 4n$ (неравенството $a_j^{'} b_j^{'} + a_j^{''} b_j^{''} > a_j b_j$ следува од тоа што збирот на две страни на еден триаголник е поголем од третата страна;види цртеж).

IV година

1.Нека a,b,c се три различни броеви и нека за нив важат равенствата:

$$a^3 + pa + q = 0,$$
$$b^3 + pb + q = 0,$$
$$c^3 + pc + q = 0.$$

Да се докаже дека $a + b + c = 0$.

Решение. Од првата равенка ја одземаме втората и од првата ја одземаме третата равенка на дадениот сsстем; така ги добиваме равенствата:

$$a^2 + ab + b^2 + p = 0$$
$$a^2 + ac + c^2 + p = 0$$

од каде што, пак со одземање на едната од другата, добиваме $a + b + c = 0$.

2.Дадени се две кружници кои се допираат и имаат радиуси r и $2r$. Да се најде геометриското место на точките еднакво оддалечени од дадените кружници.

Решение. Да ги сместиме дадените кружници во правоаголниот координатен систем така што нивните центри да лежат на Ox-оската, а допирната точка се наоѓа во координатниот почеток.

I случај: кеужинците се допираат однадвор(види цртеж).

Ако $T(x,y)$ е точка, надвор од кружинците, која припаѓа на бараното геометриско место, тогаш од условот $\overline{TT_1}=\overline{TT_2}$, т.е. $\overline{TO_1}-2r=\overline{TO_2}-r$, се добива

$$8\left(x+\frac{r}{2}\right)^2-y^2=2r^2$$

што претставува равенка на хипербола.

Очигледно е дека сите точки од отсечката O_1O_2 исто така припаѓаат на геометриското место.

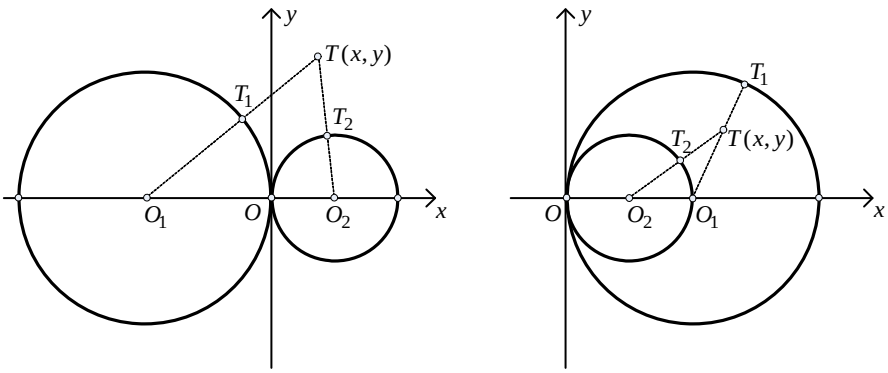
II случај: кружинците се допираат однатре (види цртеж).

И во овој очигледно е дека сите точки од негативниот дел на Ox-оската припаѓаат на бараното геометриско место на точки.

Дали има други точки од тоа геометриско место? Ако $T(x,y)$ е таква точка, тогаш јасно е дека T мора да биде надвор од помалата, а внатре, во поголемата кружница. Тогаш, од условот на задачата добиваме $\overline{TT_1}=\overline{TT_2}$, т.е. $2r-\overline{TO_1}=\overline{TO_2}-r$, од каде што се добива

$$8\left(x-\frac{3r}{2}\right)^2+9y^2=18r^2$$

што претставува равенка на елипса.



3.Дадени се четири топки кои имаат еднакви радиуси r, и кои се допираат две по две. Околу нив е опишана петта топка. Да се најде радиусот на петтата топка.

Решение.Центрите на четирите топки се темиња на правилен тетраедар со раб $2r$. Центарот на петтата топка се наоѓа во пресекот на висините на тој тетраедар, па бидејќи растојанието од пресекот на висините на еден правилен тетраедар со раб a до кое било негово теме изнесува $\frac{a\sqrt{6}}{4}$ $\frac{a\sqrt{6}}{4}$, радиусот на петтата топка ќе биде

$$\frac{2r\sqrt{6}}{4}+r=\frac{r}{2}\left(2+\sqrt{6}\right)$$

4. Во рамнината е дадена кружница со радиус $n\,\text{cm}$ ($n\in\mathbb{N}$) и произволна права. Во кружницата се наоѓаат $4n$ отсечки со должини $1\,\text{cm}$. Докажи дека постои права, паралелна или нормална на дадената, која има заеднички точки со најмалку две од дадените отсечки.

Решение.Иста како задача 4 од трета година.

XXIV Републички натпревар 1981

I година

1.Да се разложи на прости множители изразот

$bc(b+c)+ca(c-a)-ab(a+b)$.

Решение.Имаме

$$bc(b+c)+ca(c-a)-ab(a+b)=bc(b+c)+a(c^2-ac-ab-b^2)=$$
$$=bc(b+c)+a[(c-b)(c+b)-a(c+b)]=$$
$$=bc(b+c)+a(b+c)(c-b-a)=(b+c)(bc+ac-ab-a^2)=$$
$$=(b+c)[c(b+a)-(a(b+a)]=(a+b)(b+c)(c-a)$$

2.Да се докаже дека

$$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=\begin{cases}2\text{, за } 1\le x\le 2\\ 2\sqrt{x-1}\text{, за } \quad x\ge\ 2\end{cases}$$

Решение.Левата страна на даденото равенство да ја означиме со $P(x)$. Да забележиме дека $P(x)\ge 0$. Имаме

$$[P(x)]^2=x+2\sqrt{x-1}+x-2\sqrt{x-1}+2\sqrt{x^2-4(x-1)}=2x+2\sqrt{(x-2)^2}=2x+2|x-2|.$$

Ако $1\le x\le 2$, тогаш $[P(x)]^2=2x-2x+4=4$, т.е. $P(x)=2$; ако $x\ge 2$, тогаш

$$[P(x)]^2=2x+2x-4=4x-4=4(x-1),$$

т.е.

$$P(x)=2\sqrt{x-1}.$$

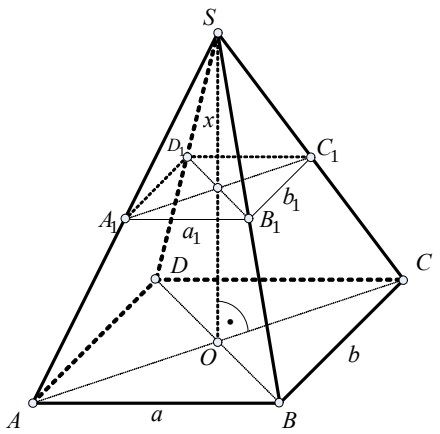
3. Куче се наоѓало во местото A кога почнало да трча по лисица на растојание $30\,\text{m}$ од A. Скокот на кучето е $2\,\text{m}$, а на лисицата е $1\,\text{m}$. Во исто време додека кучето прави два скока, лисицата прави три скока. На кое растојание од A кучето ќе ја стигне лисицата?

Решение. Нека x е растојанието од A кога кучето ќе ја стигне лисицата; тогаш од условот на задачата ќе имаме:

$$\frac{x}{4}=\frac{x-30}{3},$$

од каде што добиваме $x=120$.

Значи, кучето ќе ја стигне лисицата на растојание $120\,\text{m}$ од A.



4.Основата на една пирамида е правоаголник со страни a и b, а бочните рабови се еднакви на c. Пирамидата е пресечена со рамнина, паралелна со основата, на два дела со еднакви волумени. Да се најде растојанието од рамнината до врвот на пирамидата.

Решение.Нека $A_1B_1C_1D_1$ е правоаголникот што се добива како пресек на рамнината со пирамидата (види цртеж). Да го означиме со V волуменот на пирамидата $ABCDS$, а со V_1 волуменот на пирамидата $A_1B_1C_1D_1S$. Од условот на задачата имаме

$$V=2V_1. \qquad (1)$$

Двете пирамиди се слични, па ќе имаме $P:P_1=H:x$, т.е. $P_1=\frac{xP}{H}$. Од (1) добиваме $P_1=\frac{P\cdot H}{2x}$; според тоа $x=\frac{H}{2}\sqrt[3]{4}$. Да ја најдеме висината H на дадената пирамида.

Од триаголникот SOC добиваме

$$H^2=c^2-\frac{a^2+b^2}{4}=\frac{1}{4}(4c^2-a^2-b^2),$$

т.е.

$$H=\frac{1}{2}\sqrt{4c^2-a^2-b^2}.$$

Следствено,

$$x=\frac{H\sqrt[4]{4}}{2}=\frac{\sqrt[3]{4}}{4}\sqrt{4c^2-a^2-b^2}.$$

II година

1.Да се докаже дека

$$\sqrt{1+i\sqrt{3}}+\sqrt{1-i\sqrt{3}}=\sqrt{6}.$$

Решение.Имаме

$$\left(\sqrt{1+i\sqrt{3}}+\sqrt{1-i\sqrt{3}}\right)^2=1+i\sqrt{3}+1-i\sqrt{3}+2\sqrt{1+3}=6.$$

Според тоа,

$$\sqrt{1+i\sqrt{3}}+\sqrt{1-i\sqrt{3}}=\sqrt{6}.$$

2.Двајца работници, работејќи истовремено, извршуваат одредена работа за еден ден. Кога би работеле еден по друг, секој по толкав дел од денот колку што изнесува делот од работата што ја извршил за еден ден, тогаш би бил завршен k-ти дел од работата. Колку време му е потребно на секој работник сам да ја заврши работата?

Решение. Нека првиот работник ја завршува работата за време од x единици; тогаш вториот работник ќе ја заврши работата за време $\frac{x}{x-1}$. Според условот на задачата, ќе имаме

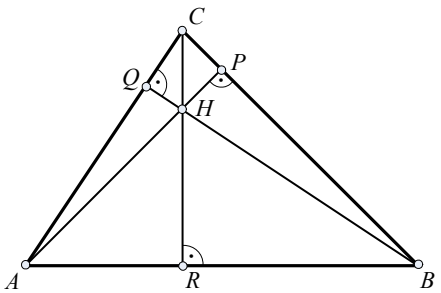
$$\frac{1}{x^2}+\frac{(x-1)^2}{x^2}=\frac{1}{k},$$

од каде што добиваме

$$(k-1)x^2-2kx+2k=0. \qquad (1)$$

Решенијата на ова равенка се $x_{1/2}=\frac{1}{k-1}(k\pm\sqrt{2k-k^2})$.

Равенката (1) треба да има реални решенија, па, значи $2k-k^2\geq 0$, т.е. $k\in[0,2]$, а бидејќи k е природен број, добиваме дека $k=1$ или $k=2$.



За $k=1$, од (1) добиваме $x=1$, т.е. првиот работник би ја завршил целата работа, а вториот работник не би имал што да работи, што не е фер при заедничка работа. За $k=2$ имаме $x=y=2$, т.е. и двајцата работници ќе ја завршат работата за исто време.

3.Нека AP, BQ и CR се висините во триаголникот ABC. Да се докаже дека

$$\overline{AR}^2+\overline{BP}^2+\overline{CQ}^2=\overline{RB}^2+\overline{PC}^2+\overline{QA}^2$$

Решение.Од цртежот се гледа дека важат следните равенства

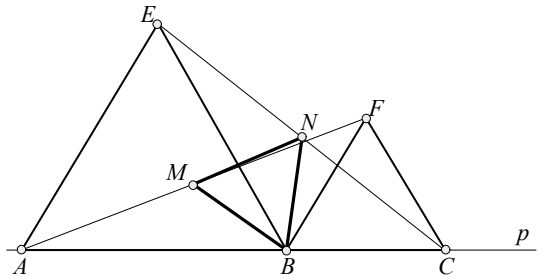
$$\overline{AC}^2-\overline{AR}^2=\overline{BC}^2-\overline{RB}^2$$
$$\overline{AB}^2-\overline{BP}^2=\overline{AC}^2-\overline{PC}^2$$
$$\overline{BC}^2-\overline{CQ}^2=\overline{AB}^2-\overline{QA}^2 .$$

Ако ги собереме овие равенства, ќе добиеме

$$\overline{AC}^2-\overline{AR}^2+\overline{AB}^2-\overline{BP}^2+\overline{BC}^2-\overline{CQ}^2=\overline{BC}^2-\overline{RB}^2+\overline{AC}^2-\overline{PC}^2+\overline{AB}^2-\overline{QA}^2 ,$$

т.е. $\overline{AR}^2+\overline{BP}^2+\overline{CQ}^2=\overline{RB}^2+\overline{PC}^2+\overline{QA}^2$, што требаше да се докаже.

4.На правата P дадени се точките A,B и C, така што B е меѓу A и C. На иста страна од правата p конструирани се рамностранитриаголници ABE и BCF. Нека M е средината на отсечката AF, а N е средината на отсечката CE. Да се докаже дека триаголникот BMN е рамностран.



Решение.Нека ρ е ротацијата со центар B и агол 60°. Тогаш имаме $\rho(A)=E$, $\rho(F)=C$, па значи, отсечката AF со ρ се пресликува во отсечката EC, од каде што следува дека средината M на отсечката A со ρ ќе се преслика во средината N на отсечката EF, т.е. $\rho(M)=N$. Од $\rho(M)=N$ следува дека $\measuredangle MBN=60^\circ$ и $\overline{BM}=\overline{BN}$, т.е. триаголникот BMN е рамностран.

III година

1.Да се најдат сите вредности на m од интервалот $(-1,1)$ за кои равенката $4^{\sin x}+m2^{\sin x}+m^2-1=0$ има решенија.

Решение. Да ставиме $y=2^{\sin x}$. Така ја добиваме равенката

$$y^2+my+m^2-1=0 . \qquad (1)$$

Дискриминантата $D=4-3m^2$ на равенката (1) за $m\in(-1,1)$ е позитивна, што значи дека за секој $m\in(-1,1)$ равенката (1) има реални решенија. Решенијата се $y_{1/2}=\frac{1}{2}(-m\pm\sqrt{4-3m^2})$.

Од $y=2^{\sin x}>0$ следува дека решение може да биде само $y_1=\frac{1}{2}(-m+\sqrt{4-3m^2})$. За $m\in(-1,1)$ имаме $4-3m^2>m^2$, што значи дека $y_1>0$.

Сега имаме: $2^{\sin x}=\frac{1}{2}(-m+\sqrt{4-3m^2})$, т.е.

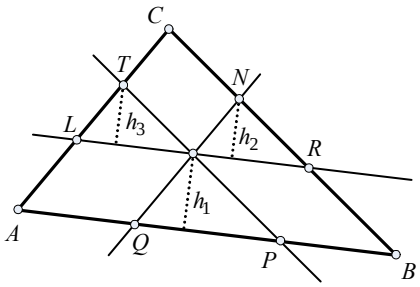
$$\sin x=\log_2\left[\frac{1}{2}(-m+\sqrt{4-3m^2})\right], \qquad (2)$$

$$\sin x=\log_2(-m+\sqrt{4-3m^2})-1 .$$

За равенката (2) да има решение, потребно е да биде исполнето $-1\le\log_2(-m+\sqrt{4-3m^2})-1\le 1$, т.е. $1\le -m+\sqrt{4-3m^2})\le 4$,

а тоа е задоволено за секој $m\in\left[\frac{-1-\sqrt{13}}{4},\frac{-1+\sqrt{13}}{4}\right]$.

Следствено, дадената равенка има решение за секој $m \in \left(-1, \frac{-1+\sqrt{13}}{4}\right]$.

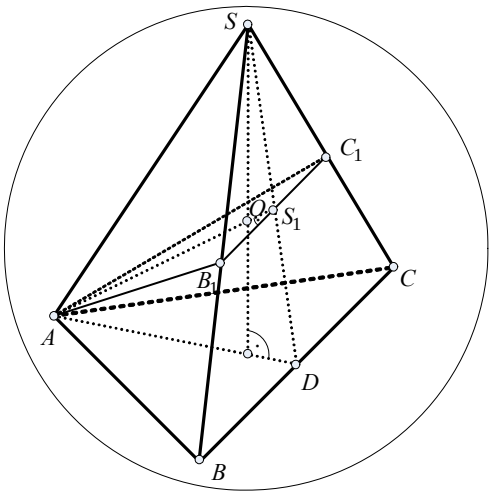


2.Во триаголникот ABC дадена е точка M; низ M се повлечени три прави p,q и r паралелни со AB, BC и CA соодветно. Нека $R = p \cap BC$, $L = p \cap AC$, $P = q \cap AB$, $T = q \cap AC$, $Q = r \cap AB$, $N = r \cap BC$. Ако се познати плоштините $P_1 = P_{PQM}$, $P_2 = P_{MRN}$ и $P_3 = P_{LMT}$, да се најде плоштината P на триаголникот ABC.

Решение. Лесно се увидува дека $h_1 + h_2 + h_3 = h$ (види цртеж). Триаголниците ABC и QPM се слични, па имаме $P_1 : P = h_1^2 : h^2$. Слично имаме $P_2 : P = h_2^2 : h^2$ и $P_3 : P = h_3^2 : h^2$, од каде што добиваме:

$$P = \frac{h^2(P_1+P_2+P_3)}{h_1^2+h_2^2+h_3^2} = \frac{(h_1+h_2+h_3)^2}{h_1^2+h_2^2+h_3^2}(P_1+P_2+P_3) = \left[1+\frac{h_2}{h_1}+\frac{h_3}{h_1}\right]^2 \frac{P_1+P_2+P_3}{\left[1+\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2+\left(\frac{h_3}{h_1}\right)^2\right]} =$$

$$= \left(1+\sqrt{\frac{P_2}{P_1}}+\sqrt{\frac{P_3}{P_1}}\right)^2 \frac{P_1+P_2+P_3}{1+\frac{P_2}{P_1}+\frac{P_3}{P_1}} = (\sqrt{P_1}+\sqrt{P_2}+\sqrt{P_3})^2$$



3. Во сфера со центар O е впишан правилен тетраедар $SABC$ со раб a. Низ темето A, поставена е рамнина што минува низ O и го сече ѕидот SBC по права, паралелна со работ BC. Да се најде плоштината на делот од рамнината што е во топката, а е надвор од тетраедарот.

Решение. Центарот O на сферата е центар на опишаната кружница околу триаголникот AB_1C_1. Бараната плоштина P ќе биде

$$P = r^2\pi - P_{AB_1C_1}, \qquad (1)$$

каде што r е радиусот на сферата. Триаголникот AB_1C_1 е рамнокрак со основа B_1C_1 и висина $\overline{AS_1} = H$ -висината на тетраедарот. Од триаголникот ASS' (види цртеж) имаме

$$H^2 = a^2 - \left(\frac{2}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{2}{3}a^2, \text{ т.е. } H = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Од триаголникот AOS' имаме: $r^2 = (H-r)^2 + \left(\frac{2}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2$, т.е. $r = \frac{a\sqrt{6}}{4}$. Заменувајќи во (1) добиваме

$$P = r^2\pi - \frac{1}{2}\overline{B_1C_1}\cdot\overline{AS_1} = \frac{3a^2}{8}\pi - \frac{1}{2}\frac{2}{3}a\frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{3a^2}{8}\pi - \frac{a^2\sqrt{6}}{9} = \frac{a^2}{72}(27\pi - 8\sqrt{6}).$$

4. За кои цели броеви a и b системот $\begin{cases} m^2 + n^2 = b \\ \dfrac{m^n - 1}{m^n + 1} = a \end{cases}$ има решение (по m и n) во множеството $\mathbb{Z}$ од целите броеви.

Решение. Од првата равенка добиваме $m^n = \frac{1+a}{1-a} = 1 + \frac{2a}{1-a}$, што значи дека бројот $\frac{2a}{1-a}$ треба да биде цел. Бидејќи a и $a-1$ се заемно прости за $a \neq 0$, бројот $\frac{2a}{1-a}$ е цел ако и само ако $a = -1, 2, 3$.

За $a = -1$ имаме $m^n = 0$, па добиваме дека $m = 0$ и n е произволен цел број различен од 0.

За $a = 2$ добиваме $m^n = -3$, па $m = -3, n = 1$.

За $a = 3$, добиваме $m^n = -2$, па $m = -2$, $n = 1$.

Од друга страна за $a = 0$ имаме $m^n = 1$, од каде што добиваме $n = 0$, m е било кој цел број различен од нула или $m = 1$ и n произволен цел број.

Следствено, системот има решение во множеството од целите броеви за: $a = -1, b = n^2, n \neq 0$, $b = m^2, m \neq 0$, $a = 0, b = 1 + n^2$; $a = 2, b = 10$; $a = 3, b = 5$.

IV година

1.Ако корените на равенката $x^4 + px^2 + q = 0$ образуваат аритметичка прогресија, тогаш $100q = 9p^2$. Докажи!

Решение.Ако корените на дадената равенка образуваат аритметичка прогресија, тогаШ тие може да се запишат во обликот: $a - d, a, a + d, a + 2d$. Според Виетовите правила, прво, ќе имаме

$$a - d + a + a + d + a + 2d = 0,$$

од каде што добиваме $d = -2a$. Значи, корените на дадената равенка ќе бидат $3a, a, -a, -3a$. Ако пак ги примениме Виетовите правила, ќе имаме $9a^4 = q$. Заменувајќи во дадената равенка, добиваме $\frac{q}{9} + p\sqrt{\frac{q}{9}} + q = 0$, од каде што добиваме $100q = 9p^2$.

2. Да се најде 1981-от член на низата

$1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, \ldots$.

Решение. Нека 1981-от член на низата е бројот k. Да забележиме дека последното појавување на бројот: 2 има редден број 3, 3 има редден број 6, 4 има редден број 10 итн.; последното појавување на бројот k во низата има редден број $1 + 2 + 3 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}$.

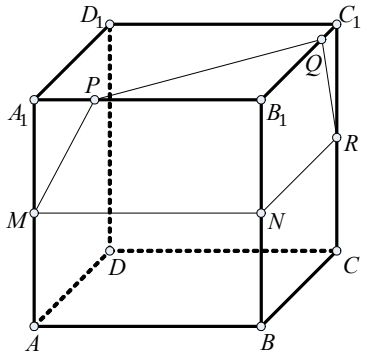
Според тоа, $\frac{k(k+1)}{2} \geq 1981$, од каде што добиваме дека $k^2 + k \wedge -3962 \geq 0$, т.е.

$$k \in \left(-\infty, \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{15849})\right] \cup \left[\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{15849}), +\infty\right).$$

Бидејќи $k > 0$, следува дека k е најмалиот број што му припаѓа на интервалот $\left[\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{15849}), +\infty\right)$. Имаме: $\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{15849}) \approx 62,4$, па според тоа, $k = 63$.

Следствено, 1981-от член во дадената низа е бројот 63.

3. Во средината на еден од бочните рабови на една коцка се наоѓа мравка. Ако мравката по бочните ѕидови се движи со брзина 6, а по основите $5\sqrt{2}$, да се најде бројот на различните патишта (до симетрија) за мравката најбргу да стигне до средината на спротивниот раб.



Решение. Нека мравката се наоѓа во средината M на работ AA_1, а треба да стигне во средината R на работ CC_1 (види цртеж). Очигледно, еден од најкратките патишта од M до R е патот MNR, каде што N е средина на работ BB_1. По овој пат мравката ќе стигне до R за време $t = \frac{2a}{6} = \frac{a}{3}$.

Но мравката може да се движи и по основните ѕидови. Нека $MPQR$ е еден таков пат(види цртеж). Поради симетрија имаме $\overline{MP} = \overline{QR}$ и $\overline{PB_1} = \overline{B_1Q}$. Да ставиме $x = \overline{A_1P}$; тогаш имаме:

$$\overline{MP} = \sqrt{x^2 + \frac{a^2}{4}}\ , \quad \overline{PQ} = (a-x)\sqrt{2}\ .$$

Ако t_2 е времето за кое мравката ќе го помине патот $MPQR$, тогаш

$$t_2 = \frac{\overline{MP}}{6} + \frac{\overline{PQ}}{5\sqrt{2}} + \frac{\overline{QR}}{6} = \frac{\sqrt{4x^2+a^2}}{6} + \frac{a-x}{5}\ .$$

Од $t_2 \le t_1$ добиваме

$$\frac{\sqrt{4x^2+a^2}}{6} + \frac{a-x}{5} \le \frac{a}{3}\ , \qquad 5\sqrt{4x^2+a^2} \le 4a + 6x\ , \qquad (8x-3a)^2 \le 0\ ,$$

т.е. $8x - 3a = 0$, од каде што добиваме $x = \frac{3a}{8}$. Соодветното време е $t_2 = t_1 = \frac{a}{3}$.

Следствено, постојат (до симетрија) два такви патишта.

4.Нека $S = \{1,2,3,...,n\}$ и нека

$$T_k = \{x_1 + x_2 + ... + x_k \ / \ x_i \in S,\ x_i \ne x_j \ \text{ за } \ i \ne j\}\ .$$

Ако t_k е бројот на елементите во множеството T_k, да се докаже дека

$$\sum_{k=1}^{n} t_k = \frac{n}{6}(n^2+5)\ .$$

Решение. Да го најдеме на почеток бројот t_k. Најмалиот број во T_k е бројот

$$1 + 2 + 3 + ... + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

а најголемиот е:

$$(n-k+1) + (n-k+2) + ... + n = \frac{k}{2}(2n-k+1)\ .$$

Според тоа, ќе имаме:

$$t_k = \frac{k}{2}(2n-k+1) - \frac{k(k+1)}{2} + 1 = k(n-k) + 1\ .$$

На крајот ќе имаме:

$$\sum_{k=1}^{n} t_k = n + \sum_{k=1}^{n} k(n-k) = n + n \cdot \sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} k^2 = n + \frac{n^2(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n}{2}(n^2+5)\ .$$

XXV Републички натпревар 1982

I година

1. Збирот на 5 природни броеви е 1982. Која најголема вредност може да ја прими нивниот најголем заеднички делител?

Решение. Нека a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 се тие броеви и нека d е нивниот најголем заеднички делител. Тогаш $a_i = k_i d$, $i = 1,2,3,4,5$ и, притоа,

$$d(k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5) = 1982,$$

т.е.

$$ds = 2 \cdot 991,$$

каде што $s = k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5$. Бидејќи $s \geq 5$, имаме: $s = 991$, $d = 2$ или $s = 1982$, $d = 1$.

2.а) Да се докаже дека за кои било позитивни реални броеви x и y важи неравенството

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2. \qquad (*)$$

б) Ако a,b,c се позитивни реални броеви и ако $a + b + c = 1$, тогаш $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 9$. Докажи!

Решение. а) Од $(x-y)^2 \geq 0$ добиваме $x^2 + y^2 \geq 2xy$, па ќе имаме

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{x^2 + y^2}{xy} \geq \frac{2xy}{xy} = 2.$$

б) Од $a + b + c = 1$ имаме:

$$\frac{1}{a} = 1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a}, \qquad \frac{1}{b} = 1 + \frac{a}{b} + \frac{c}{b}, \qquad \frac{1}{c} = 1 + \frac{a}{c} + \frac{b}{c}.$$

Собирајќи ги овие равенства, имајќи го предвид (*), добиваме:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) \geq 3 + 2 + 2 + 2 = 9.$$

Да забележиме дека равенството ќе важи за

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{b}{c} + \frac{c}{b} = \frac{c}{a} + \frac{a}{c} = 2, \text{ т.е. } a = b = c = \frac{1}{3}.$$

3. Тројца луѓе A, B и C се допишуваат меѓу себе, така што:

- A му пишува на B секој трет ден, а на C секој втор ден;
- B му пишува на A по добиени четири писма од A и C, а на C секој трет ден;
- C му пишува на A по добиени три писма од A и B, а на B секој четврти ден.

По колку дена A ќе добие 61 писмо, ако писмата патуваат по еден ден?

Решение. Со x да го означиме бројот на деновите за кои на A му е испратено 61 писмо. За тоа време B добил од A $\frac{x-1}{3}$ писма, а од C $\frac{x-1}{4}$ писма, или вкупно од A и C: $\frac{7(x-1)}{12}$ писма. Исто така, C добил од A $\frac{x-1}{2}$ писма, а од B добил $\frac{x-1}{3}$ писма, или вкупно од A и B: $\frac{5(x-1)}{6}$ писма.

Значи, за x дена B ќе му испрати на A $\frac{7(x-1)}{12 \cdot 4}$ писма, а C ќе му испрати на A $\frac{5(x-1)}{6 \cdot 3}$ писма, т.е. на A ќе му бидат испратени вкупно $\frac{7(x-1)}{48} + \frac{5(x-1)}{18} = 61$ писмо. Решението на

ова равенка е $x=145$. Бидејќи последното испратено писмо треба да патува еден ден, A ќе добие 61 писмо за 146 дена.

4. Нека M е произволна внатрешна точка за правилниот тетраедар $ABCD$. Да се докаже дека збирот на растојанието од M до ѕидовите на тетраедарот е константен.

Решение. Правилниот тетраедар $ABCD$ го разбиваме на четири тетраедри: $ABCM$, $BCDM$, $CDAM$ и $DABM$. Тогаш имаме

$$V_{ABCM}+V_{BCDM}+V_{CDAM}+V_{DABM}=V_{ABCD}.$$

Растојанието од точката M до ѕидот XYZ да го означиме со d_{XYZ}; тогаш имаме

$$V_{ABCM}=\frac{1}{3}P_{ABC}d_{ABC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{12}d_{ABC}, \qquad V_{BCDM}=\frac{1}{3}P_{BCD}d_{BCD}=\frac{a^2\sqrt{3}}{12}d_{BCD}$$

$$V_{CDAM}=\frac{1}{3}P_{CDA}d_{CDA}=\frac{a^2\sqrt{3}}{12}d_{CDA}, \qquad V_{DABM}=\frac{1}{3}P_{DAB}d_{DAB}=\frac{a^2\sqrt{3}}{12}d_{DAB}.$$

Бидејќи $V_{ABCD}=\frac{a^2\sqrt{3}}{12}H$, од (1) добиваме

$$d_{ABC}+d_{BCD}+d_{CDA}+d_{DAB}=H.$$

II година

1. Нека z_1, z_2 и z_3 се комплексни броеви со модул 1 и нека $z_1+z_2+z_3=0$. Да се докаже дека

$$|z_1-z_2|=|z_2-z_3|=|z_3-z_1|.$$

Решение. Од $z_1+z_2+z_3=0$ и $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$ добиваме

$$|z_1+z_2|=|z_2+z_3|=|z_3+z_1|=1.$$

Нека $z_k=x_k+iy_k$, $k=1,2,3$. Од $|z_k+z_j|=1$ за $k\neq j$ добиваме

$$(x_k^2+x_j^2)+(y_k^2+y_j^2)+2(x_kx_j+y_ky_j)=1$$
$$2+2\cdot(x_kx_j+y_ky_j)=1$$
$$2(x_kx_j+y_ky_j)=-1.$$

Користејќи го тоа, за модулот на z_k-z_j ($k,j\in\{1,2,3\}$, $k\neq j$) добиваме

$$|z_k-z_j|^2=(x_k-x_j)^2+(y_k-y_j)^2=(x_k^2+x_j^2)+(y_k^2+y_j^2)-2(x_kx_j+y_ky_j)=2+1=3,$$

т.е. $|z_1-z_2|=|z_2-z_3|=|z_3-z_1|=1$.

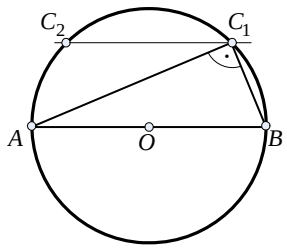
2.Од местото A кон местото B истовремено тргнуваат две групи туристи. Првата група тргнала со автобус движејќи се со просечна брзина од $20\,km/s$ и стигнала до местото C што е на половина пат меѓу A и B, а потоа тргнале пешки. Втората група тргнала пешки, а по 1 час се качила на автобус, кој се движел со просечна од $30\,km/h$. Во местото C, првата група стигнала 35 минути порано од втората, а во местото B - 1 час и 25 минути подоцна. Колку се оддалечени местата A и B и колкава е просечната брзина групите, кога одат пешки, ако просечната брзина на првата група е за $1\,km/h$ поголема од просечната брзина на втората група?

Решение. Со x да ја означиме просечната брзина на првата група(кога одат пешки); тогаш просечната брзина на втората група (кога одат пешки) ќе биде $y=x-1$. Ако со s го означиме растојанието меѓу местата A и B, тогаш, од условите на задачата, добиваме:

$$\frac{\frac{s}{2}}{20}+\frac{7}{12}=1+\frac{\frac{s}{2}(x-1)}{30}$$
$$\frac{\frac{s}{2}}{x}=\frac{\frac{s}{2}}{30}+2$$

од каде што добиваме $x_1=6$, $x_2=67$, $s_1=30$, $s_2=-215$.

Значи, просечната брзина на првата група(кога одат пешки) е 6 km/h, на втората 5 km/h, а местата A и B се оддалечени 30 km.

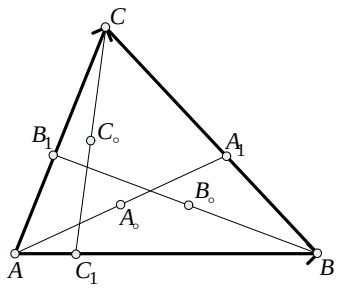


3. Да се конструира правоаголен триаголник ABC, со прав агол кај темето C, ако е дадена хипотенузата c, а тежишната линија t_c е геометриска средина на катетите.

Решение.По услов имаме $t_c^2=ab$; но, $t_c=\frac{c}{2}$, па, значи, $c^2=4ab$. За висината h_c имаме $h_c=\frac{ab}{c}=\frac{c}{4}$, па триаголникот ABC (со дадени c и h_c) може да се конструира.

Конструкција. 1) $\overline{AB}=c$; 2) O средина на AB; 3) права p, паралелна со AB и на растојание $h_c=\frac{c}{4}$ од неа; 4) кружница $k(O,\overline{OA})$; 5) темето C припаѓа на $P\cap k$ (види цртеж).

4. Нека A_1,B_1 и C_1 се произволни внатрешни точки соодветно од страните BC,CA и AB на триаголникот ABC и нека $A_\circ,B_\circ$ и $C_\circ$ се средини на отсечките AA_1,BB_1 и CC_1 соодветно. Да се докаже дека точките $A_\circ,B_\circ$ и $C_\circ$ не се колинеарни.



Решение.Да ставиме $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ (види цртеж); тогаш $\overrightarrow{BC}=\vec{c}-\vec{b}$. Точката C_1 лежи на страната AB што значи дека векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC_1}$ се колинерани, па постои реален број λ $(0<\lambda<1)$, така што $\overrightarrow{AC_1}=\lambda\vec{b}$. Исто така, постојат реални броеви μ и ν $(0<\mu,\nu<1)$, така што $\overrightarrow{BA_1}=\mu(\vec{c}-\vec{b})$, $\overrightarrow{AB_1}=\nu\vec{c}$.

За да докажеме дека точките $A_\circ,B_\circ,C_\circ$ не се колинеарни, доволно е да докажеме дека векторите $\overrightarrow{A_\circ B_\circ}$ и $\overrightarrow{A_\circ C_\circ}$ не се колинеарни, т.е. не постои реален број x така што $\overrightarrow{A_\circ C_\circ}=x\overrightarrow{A_\circ B_\circ}$. За таа цел, прво да ги најдеме векторите $\overrightarrow{A_\circ B_\circ}$ и $\overrightarrow{A_\circ C_\circ}$. Имаме

$$\overrightarrow{A_\circ B_\circ}=\overrightarrow{A_\circ A}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB_\circ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BB_1}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{A_1B}+\overrightarrow{BA})+\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB_1})=$$
$$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{A_1B}+\overrightarrow{AB_1})=\frac{1}{2}(\mu\overrightarrow{BC}+\nu\overrightarrow{AC})=\frac{1}{2}(\mu\vec{b}+(\nu-\mu)\vec{c})$$
$$\overrightarrow{A_\circ C_\circ}=\overrightarrow{A_\circ A}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CC_\circ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CC_1}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{A_1C}+\overrightarrow{BA})+\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AC_1})=$$
$$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{A_1C}+\overrightarrow{AC_1})=\frac{1}{2}((1-\mu)\overrightarrow{BC}+\lambda\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}((1-\mu)(\vec{c}-\vec{b})+\lambda\vec{b})=\frac{1}{2}((\lambda+\mu-1)\vec{b}+(1-\mu)\vec{c}).$$

Да ја разгледаме, сега, равенката $\overrightarrow{A_\circ C_\circ}=x\overrightarrow{A_\circ B_\circ}$, т.е.

$$(\lambda+\mu-1-x\mu)\vec{b}+(1-\mu-x\nu+x\mu)\vec{c}=\vec{0}.$$

Векторите $\vec{b}$ и $\vec{c}$ не се колинеарни, па, ќе имаме

$$\lambda+\mu-1-x\mu=0$$
$$1-\mu-x\nu+x\mu=0$$

Бидејќи $0<\mu<1$, првата равенка има единствено решение $x=\frac{\lambda+\mu-1}{\mu}$. Втората равенка има решение ако $\mu-\nu\neq 0$, или, пак, $\mu-\nu=0$ и $\mu-1=0$. Во вториот случај имаме $\mu=\nu=1$, што не е можно. Значи, и втората равенка има единствено решение

$$x=\frac{\mu-1}{\mu-\nu}.$$

За равенката $\overrightarrow{A_\circ C_\circ}=x\overrightarrow{A_\circ B_\circ}$ да има решение, треба $\frac{\lambda+\mu-1}{\mu}=\frac{\mu-1}{\mu-\nu}$, е од каде што добиваме $\lambda=-1+\frac{\mu(1-\nu)}{\mu-\nu}<0$, што не е можно.

Следствено, не постои реален број x, така што да важи $\overrightarrow{A_\circ C_\circ}=x\overrightarrow{A_\circ B_\circ}$, т.е. точките $A_\circ, B_\circ$ и $C_\circ$ не се колинеарни.

III година

1. Да се најде збирот на коефициентите при непарните степени на x на полиномот

$$p(x)=(x^2+2x+2)^{1982}+(x^2-3x-3)^{1982}.$$

Решение. Ако $f(x)=a_\circ+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$ е полином од n-ти степен, тогаш

$$f(1)=a_\circ+a_1+a_2+...+a_n \text{ и } f(-1)=a_\circ-a_1+a_2-...+(-1)^n a_n,$$

па, значи $\frac{1}{2}(f(1)+f(-1))$ е збирот на коефициентите пред парните степени на x, а $\frac{1}{2}(f(1)-f(-1))$ е збирот на коефициентите пред непарните степени на x.

Според тоа, збирот на непарните степени на x на полиномот $p(x)$ ќе биде:

$$\frac{1}{2}[p(1)-p(-1)]=\frac{1}{2}(5^{1982}+5^{1982}-1-1)=5^{1982}-1.$$

2. Нека α,β и γ се агли на еден триаголник ABC. Да се докаже дека:

а) $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma>2$ ако и само ако триаголникот ABC е остроаголен,

б) $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma<2$ ако и само ако триаголникот ABC е тапоаголен,

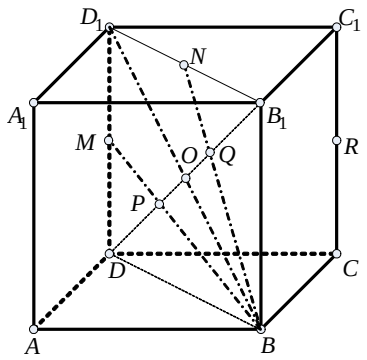
в) $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=2$ ако и само ако триаголникот ABC е правоаголен.

Решение. За изразот $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma$ имаме:

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=\frac{1-\cos^2\alpha}{2}+\frac{1-\cos^2\beta}{2}+\sin^2(\alpha+\beta)=1-\frac{1}{2}(\cos 2\alpha+\cos 2\beta)+1-\cos^2(\alpha+\beta)=$$
$$=2-\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)-\cos^2(\alpha+\beta)=2-[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]\cos(\alpha+\beta)=$$
$$=2-\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta)=2+\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$$

Според тоа $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma>2$ ако и само ако $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma>0$, т.е. ако и само ако триаголникот ABC е остроаголен; $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma<2$ ако и само ако $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma<0$, т.е. ако и само ако триаголникот ABC е тапоаголен; $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=2$ ако и само ако $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=0$, т.е. ако и само ако еден од аглите α,β,γ е прав.

3. Рамнините ACD_1 и DC_1A_1 ја сечат дијагоналата DB_1 на коцката $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ($AA_1 \parallel BB_1$) во точките P и Q. Да се докаже дека $\overline{DP}=\overline{PQ}=\overline{QB_1}$.



Решение.Да го разгледаме триаголникот DBD_1 (види цртеж). Точката M е средина на страната DD_1, а точката O е средина на страната BD_1 и $P = BM \cap DO$. Значи, P е тежиште на триаголникот DBD_1, од каде што следува дека:

$$\overline{DP} = \frac{2}{3}\overline{DO} = \frac{2}{3}\frac{1}{2}\overline{DB_1} = \frac{1}{3}\overline{DB_1}.$$

На ист начин, од триаголникот BB_1D_1, добиваме дека $\overline{QB_1} = \frac{1}{3}\overline{DB_1}$, па значи: $\overline{DP} = \overline{PQ} = \overline{QB_1} = \frac{1}{3}\overline{DB_1}$.

4. Нека A и B се n-цифрени броеви, n-непарен, коишто при делењето со k даваат ист остаток $r \neq 0$. Да се најде барем еден број k, што не зависи од n, така што бројот C, добиен со допишување на цифрите од A и B, да е делив со k.

Решение.Нека $A = ka + r$, $B = kb + r$, $0 < r < k$; тогаш имаме:

$$C = 10^n A + B = 10^n(ka + r) + (kb + r) = k(10^n a + b) + (10^n + 1)r.$$

бројот C е делив со k ако и само ако бројот $10^n + 1$ е делив со k. Бидејќи $n = 2m + 1$, имаме

$$10^n + 1 = 10^{2m+1} + 1 = (10 + 1)(10^{2m} - 10^{m-1} + ... + 1) = 11D,$$

што значи дека еден број k што го задоволува условот на задачата е бројот 11.

IV година

1.Да се најде збирот на сите трицифрени броеви што може да се формираат од цифрите $1,2,3$ и 4.

Решение. Од цифрите $1,2,3$ и 4 може да се формираат $4^3 = 64$ трицифрени броеви. Секоја цифра на последното место се јавува ист број пати, т.е. секоја од цифрите $1,2,3,4$ како последна се јавува во 16 трицифрени броеви. Затоа, збирот на едниците е:

$$16(1 + 2 + 3 + 4) = 160,$$

а збирот на десетките и стотките ќе биде 1600 и 16000 соодветно. Според тоа, збирот на сите трицифрени броеви ќе биде

$$160 + 1600 + 16000 = 17760.$$

2. Четири броја a_1, a_2, a_3, a_4 формираат аритметичка прогресија. Производот од првиот и четвртиот член е еднаков на поголемиот корен на равенката $x^{1+\log x} = 0,001^{-\frac{2}{3}}$, а збирот на квадратите на вториот и третиот член е петпати поголем од редниот број на членот во развојот на $\left(\frac{1}{\sqrt[4]{y}} + \sqrt[6]{y}\right)^{20}$ што не зависи од y. Да се најдат тие броеви.

Решение. Да ја решиме, прво, дадената равенка. Неа можеме да ја напишеме во обликот

$$x^{1+\log x} = 10^2,$$

Од каде што добиваме $(1 + \log x)\log x = 2$, т.е. $\log x = 1$ и $\log x = -2$ или $x = 10$ и $x = 10^{-2}$.

Да го најдеме, сега, членот на развојот на дадениот бином што не зависи од y. Притоа $(k+1)$-от член е: $\binom{20}{k} y^{\frac{k-20}{4} + \frac{k}{6}}$, а ако тој не зависи од y, мора да биде $\frac{k-20}{4} + \frac{k}{6} = 0$,т..е. $k = 12$. Значи, 13-от член не зависи од y.

Од условот на задачата имаме

$$a_1a_4 = 10\,, \qquad a_2^2 + a_3^2 = 5\cdot 13\,,$$

т.е.

$$a_1(a_1+3d) = 10\,, \qquad 2a_1^2 + 5d^2 + 6a_1d = 65\,,$$

од каде што добиваме $d = \pm 3$, $a_1 = \mp 10$. Значи, бараните броеви се $-10, -7, -4, -1$ или $10, 7, 4, 1$.

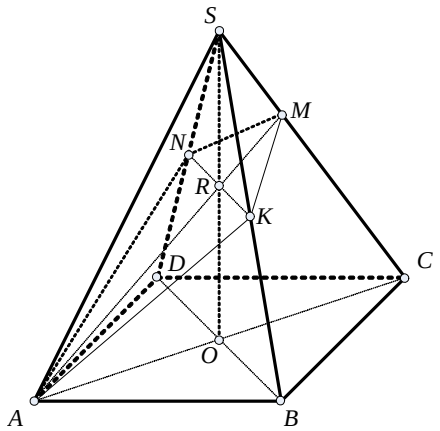
3. Да се докаже дека $S = \mathrm{tg}a_1\mathrm{tg}a_2 + \mathrm{tg}a_2\mathrm{tg}a_3 + \ldots + \mathrm{tg}a_n\mathrm{tg}a_{n+1} = \dfrac{\sin(a_{n+1}-a_1)}{\cos a_1 \cos a_{n+1}\mathrm{tg}\alpha} - n$, каде што $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$ се последователни членови на артиметичка прогресија со разлика α.

Решение. Имаме $\mathrm{tg}(a_{k+1}-a_k) = \dfrac{\mathrm{tg}a_{k+1} - \mathrm{tg}a_k}{1+\mathrm{tg}a_{k+1}\mathrm{tg}a_k}$, $k = 1, 2, 3, \ldots, n$, т.е.

$$\mathrm{tg}a_{k+1}\mathrm{tg}a_k = \frac{\mathrm{tg}a_{k+1} - \mathrm{tg}a_k}{\mathrm{tg}\alpha} - 1\,, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots, n\,.$$

Собирајќи ги овие равенства за k од 1 до n добиваме

$$S = \frac{\mathrm{tg}a_{n+1} - \mathrm{tg}a_1}{\mathrm{tg}\alpha} - n = \frac{\sin(a_{n+1}-a_1)}{\cos a_1 \cos a_{n+1}\mathrm{tg}\alpha} - n\,.$$



4. Должините на сите рабови на правилна четиристрана пирамида $SABCD$ (со врв S) се еднакви на a. Низ точката A, поставена е рамнина Σ што е нормална на рамнината ACS и минува низ средината M на работ SC. Да се најде волуменот на четиристраната пирамида, отсечена од дадената пирамида со рамнината Σ.

Решение. Според условот на задачата, треба да го најдеме волуменот V на пирамидата $SAKMN$ (види цртеж). Триастраните пирамиди $KSAM$ и $NSAM$ имаат еднакви волумени. Ако SAM ја земеме како основа на овие пирамиди, тогаш тие имаат еднакви висини, KR и NR. Според тоа, $V = \dfrac{2}{3}P_{ASM}\cdot\overline{KR}$.

Бидејќи $\measuredangle ASM = 90^\circ$, следува дека

$$P_{ASM} = \frac{1}{2}\overline{AS}\cdot\overline{MS} = \frac{a^2}{4}\,.$$

Точката R е тежиште на триаголник ACS, па ќе имаме

$$\overline{SO} : \overline{SO} = 2:3\,.$$

Од сличноста на триаголниците SRK и SOB добиваме:

$$\overline{RK} = \frac{\overline{SR}}{\overline{SO}}\overline{OB} = \frac{2}{3}\cdot\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{3}\,.$$

На крајот, бараниот волумен ќе биде:

$$V = \frac{2}{3}P_{ASM}\cdot\overline{RK} = \frac{a^3\sqrt{2}}{18}\,.$$

XXVI Републички натпревар 1983

I година

1.Да се најдат сите цели броеви броеви x и y такви што разликата од нивните квадрати да биде 203.

Решение. Ако парот (x,y) е решение на равенката

$$x^2 - y^2 = 203, \qquad (1)$$

тогаш и паровите $(-x,y)$, $(x,-y)$, $(-x,-y)$ се , исто така, решенија на равенката (1). Затоа, доволно е да ги најдеме само позитивните решенија на равенката.

Од $203 = 1\cdot 203 = 7\cdot 29$ и од $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$, добиваме

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 203 \end{cases} \qquad (2)$$

или

$$\begin{cases} x - y = 7 \\ x + y = 29 \end{cases}. \qquad (3)$$

Решение на системот (2) е парот $(x=102, y=101)$, а решение на системот (3) е парот $(x=18, y=11)$. Според тоа, решенија на равенката (1) се паровите

$(102,101)$, $(-102,101)$, $(102,-101)$, $(-102,-101)$

$(18,11)$, $(-18,11)$, $(18,-11)$, $(-18,-11)$.

2.Еден камион чија брзина е $60\,km/h$ тргнал од градот A кон градот B. По некое време, од градот A кон градот B тргнал и автомобил со брзина $90\,km/h$. Било предвидено автомобилот да го стаса камионот во градот B. Меѓутоа, откако поминал $\frac{2}{3}$ од патот, камионот морал да ја намали брзината на $30\,km/h$ (поради неисправност). Заради тоа, автомобилот го стасал камионот $50\,km$ пред градот B. Да се одреди должината на патот меѓу градовите A и B.

Решение.Нека должината на патот меѓу двата града е x km.

Кога камионот би се движел по целиот пат со 60 km/h, нему би му требало $\frac{x}{60}$ часови за да стигне во градот B. Но, тој првите $\frac{2}{3}$ од патот, $\frac{2}{3}x$, ги поминал со брзина 60 km/h а остатокот (до средбата) $\frac{1}{3}x - 50$ со брзина 30 km/h. Значи, до средбата поминале $\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{x}{60} + \frac{\frac{1}{3}x-50}{30}\right) = \frac{50}{90}$, чие решение е $x = 200$. Значи, должината на патот од A до B е 200 km.

3. Нека x, y и z се броеви такви што

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 1. \\ x^3 + y^3 + z^3 &= 1 \end{aligned} \qquad (1)$$

Да се докаже дека $xyz = 0$.

Решение. Ако левата и десната страна на првата равенка од (1) ги квадрираме и ја искористиме втората равенка од (1), ќе добиеме

$$xy + yz + zx = 0 . \qquad (2)$$

Ако ги помножиме соодветните страни на првата и втората равенка од (1) и ја искористиме третата равенка од (1), ќе добиеме

$$xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x) = 0 \qquad (3)$$

Од првата равенка на (1), добиваме $y+z=1-x$, $x+y=1-z$, $x+z=1-y$. Па равенката (3) ќе добие облик

$$xy + yz + zx - 3xyz = 0 .$$

Од последната равенка, користејќи ја равенката (2), го добиваме бараниот услов $xyz = 0$.

4. Антрополозите, за време на своите истражувања на архипелагот "Куку-Муку", откриле постоење на примитивно општество во кое постоеле три брачни групи J, G и R. Во тоа општество важеле следните правила (1)-4)):

1) Еден маж и една жена можат да склучат брак ако и само ако припаѓаат на иста група.

2)Синовите на оние родители што припаѓаат на групата J, припаѓаат на групата R; ќерките, пак, припаѓаат на групата G.

3)Синовите на оние родители што припаѓаат на групата G, припаѓаат на групата J; ќерките, пак, припаѓаат на групата R.

4)Синовите на оние родители кои припаѓаат на групата R, припаѓаат на групата G; ќерките припаѓаат на групата J.

а)На кои групи може да припаѓаат внуците на брачната двојка од групата J?

б)Кои од Следниве видови тетки може еден човек да ожени:

I. Сестра од неговата мајка

II. Сестра на неговиот татко

III. Вдовица од братот на татко му.

в)Во согласност со првилата на општеството, дали еден човек може да се ожени со својата внука(се мисли на внука од сестра, брат итн., не на внук од дете)?

II година

1. При кои вредности на параметарот c корените на равенката x_1 и x_2 на равенката $x^2 + x + c = 0$ го задоволуваат неравенството $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} \geq 2$.

Решение.Според Виетовите правила, имаме $x_1 + x_2 = -1$, $x_1 x_2 = c$ и, притоа, $c \neq 0$, коешто произлегува од условот (1) и $x_1 x_2 = c$. Користејќи го тоа, добиваме

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{x_1 x_2} = \frac{1-2c}{c} .$$

Сега неравенството (1) е еквивалентно со неравенството $\frac{1-2c}{c} \geq 2$, т.е. $0 < c < \frac{1}{4}$.

2. Нека a и b се дадени реални броеви, така што $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a \neq b$ и $a \neq -b$. Да се реши равенката $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+a} + \frac{1}{x+b} + \frac{1}{x+a+b}$.

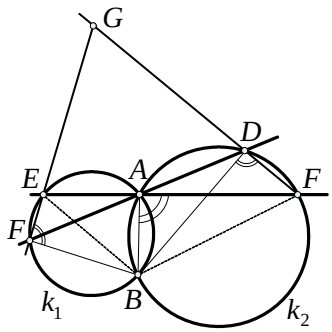
Решение. За изразот L од левата страна на равенката имаме:

$$L = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+a+b}\right) + \left(\frac{1}{x+a} + \frac{1}{x+b}\right) = \frac{2x+a+b}{x(x+a+b)} + \frac{2x+a+b}{(x+a)(x+b)} = \frac{(2x+a+b)[x^2 + 2(a+b)x + ab]}{x(x+a)(x+b)(x+a+b)}$$

Според тоа, дадената равенка е еквивалентна со равенката

$$(2x+a+b)[2x^2+2(a+b)x+ab]=0\ ,$$

чии решенија се : $x_1=-\frac{a+b}{2}$, $x_{2/3}=\frac{1}{2}\left[-(a+b)+\sqrt{a^2+b^2}\right]$. Од претпоставките за a и b, дадени во задачата, следува дека корените x_1,x_2,x_3 се различни од нула, од $-a$, од $-b$ и од $-(a+b)$.



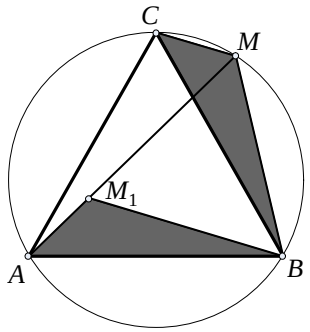
3. Две кружници k_1 и k_2 се сечат во точките A и B. Низ точката A повлечени се две прави p и q. Вторите пресечни точки на правата p со кружинците k_1 и k_2 се точките E и F соодветно, а на правата q се точките C и D соодветно. Нека $G=EC\cap DF$. Да се докаже дека точките B,C,D и G лежат на една кружница.

Решение. Од цртежот гледаме дека: $\measuredangle FDB=\measuredangle BAF$ (како периферискі агли над ист лак); $\measuredangle BAF=180^\circ-\measuredangle EAB$; $\measuredangle EAB=180^\circ-\measuredangle ECB$ (зошто четириаголникот $ABCE$ е тетивен). Според тоа, добиваме дека $\measuredangle FDB=\measuredangle ECB$.

Од друга страна имаме $\measuredangle GDB=180^\circ-\measuredangle FDB$, па користејќи го претходното, добиваме дека

$$\measuredangle GDB+\measuredangle GCB=180^\circ\ ,$$

што значи дека четириаголникот $BCGD$ е тетивен, т.е. точките B,C,D и G лежат на иста кружница.



4.Во една кружница впишан е рамностран триаголник ABC. На лакот BC земена е произволна точка M. Да се докаже дека $\overline{MA}=\overline{MB}+\overline{MC}$.

Решение.Нека M_1 е точка од отсечката AM, така што важи $\overline{AM_1}=\overline{CM}$ (види цртеж). Тогаш $\measuredangle M_1AB=\measuredangle MCB$ (како периферискі агли на ист лак), па, значи $\Delta AM_1B\cong\Delta CMB$. Затоа, имаме $\overline{BM_1}=\overline{BM}$ и $\measuredangle ABM_1=\measuredangle CBM$. Од ова следува дека $\measuredangle M_1BM=60^\circ$. Исто така, $\measuredangle M_1MB=\measuredangle ACM=60^\circ$ (како периферискі агли над ист лак). Значи, ΔBMM_1 е рамностран, па имаме $\overline{MA}=\overline{MM_1}+\overline{M_1A}=\overline{MB}+\overline{MC}$, што требаше да се докаже.

III година

1.При кои вредности на параметарот a системот

$$\begin{aligned} x^3-ay^3&=\frac{1}{2}(a+1)^2\\ x^3+ax^2y+xy^2&=1 \end{aligned} \qquad (1)$$

има барем едно решение (x,y) што го задоволува условот $x+y=0$?

Решение. Да претпоставиме дека системот (1) има решение (x,y) кое го задоволува условот $x+y=0$; значи, $y=-x$, па, заменувајќи во двете равенки, ги добиваме равенките

$$(1+a)x^3=\frac{1}{2}(a+1)^2 \qquad (2)$$

$$(2-a)x^3=1\ . \qquad (3)$$

Од равенката (2) добиваме $a=-1$ или $x=\frac{1}{2}(a+1)$, при $a\neq -1$. Ставајќи $a=-1$ во (3) добиваме $x=\frac{1}{3}\sqrt[3]{9}$, а ставајќи $x=\frac{1}{2}(a+1)$ при $a\neq -1$ добиваме $\frac{1}{2}(a+1)=\frac{1}{2-a}$, т.е. $a=0$ и $a=1$. Според тоа, при $a=0, a=1$ и $a=-1$ системот (1) може да има решение од обликот $(x,-x)$.

Да видиме, сега, дали за овие вредности на a системот (1) има решение од тој облик.

За $a=0$, од првата равенка на (1) добиваме $x=\frac{1}{2}\sqrt[3]{4}$, а за ова вредност на x, од втората равенка на (1) добиваме $y=\pm\frac{1}{2}\sqrt[3]{4}$. Значи, во овој случај решение на системот е парот $\left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{4},-\frac{1}{2}\sqrt[3]{4}\right)$.

За $a=1$ го добиваме системот $\begin{cases} x^3-y^3=2 \\ x^3+x^2y+xy^2=1 \end{cases}$, т.е. $\begin{cases} (x-y)(x^2+xy+y^2)=2 \\ x(x^2+xy+y^2)=1 \end{cases}$, чие едно решение е парот $(1,-1)$.

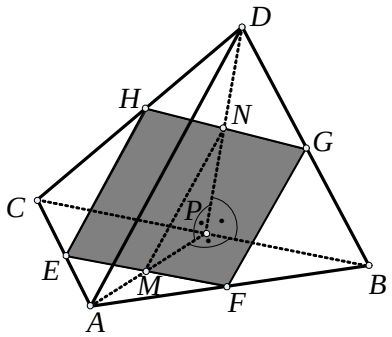
За $a=-1$ го добиваме системот $\begin{cases} x^3+y^3=0 \\ x^3+x^2y+xy=1 \end{cases}$ чие(едно) решение е $\left(\frac{1}{3}\sqrt[3]{9},-\frac{1}{3}\sqrt[3]{9}\right)$.

Следствено, системот (1) има решение од обликот $(x,-x)$ само за $a=0;-1;1$.

2. Еден полином $p(x)$ при делењето со полиномот $x-1$ дава остаток 2 а при делењето со полиномот $x-2$ дава остаток 1. Да се најде остатокот што се добива при делењето на полиномот $p(x)$ со $(x-1)(x-2)$.

Решение. Според условите на задачата имаме $p(x)=q_1(x)(x-1)+2$ и $p(x)=q_2(x)(x-2)+1$, од каде што следува дека $p(1)=2$ и $p(2)=1$. Нека $q(x)$ е количникот, а $rx+s$ остатокот што се добива при $p(x)=q(x)(x-1)(x-2)+rx+s$, од каде што следува дека $p(1)=r+s$, $p(2)=2r+s$. Бидејќи $p(1)=2$, $p(2)=1$, добиваме $r+s=2$, $2r+s=1$, т.е. $r=-1$, $s=3$.

Значи, остатокот што се добива при делење на $p(x)$ со $(x-1)(x-2)$ е $-x+3$.



3. Дадена е тристрана пирамида $DABC$ чија основа ABC е рамностран триаголник, а ѕидот DBC е рамнокрак триаголник со крак b и е нормален на основата. Да се најде плоштината на квадратот што се добива како пресек на пирамидата со рамнината паралелна на рабовите DA и BC.

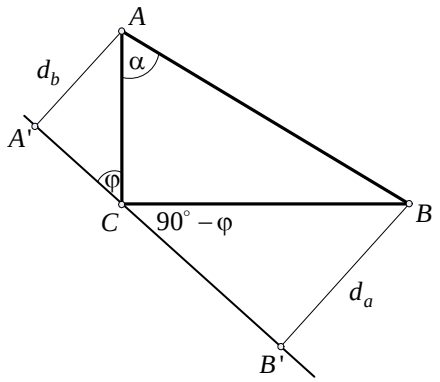
Решение. Работ DA е нормален на работ BC, па секоја рамнина што е паралелна со овие два раба ја сече пирамидата во правоаголник. Се прашаме, дали при некоја положбан а рамнината овој правоаголник може да биде квадрат. Ако тоа е можно, треба да ја најдеме неговата страна.

Да претпоставиме дека тоа е можно и нека тоа биде квадратот $EFGH$ (види цртеж) со страна x. Ако O е средината на работ BC, тогаш имаме $\overline{DO}^2=b^2-\frac{a^2}{4}$, $\overline{DA}^2=b^2+\frac{a^2}{2}$. Ако M и N се прободните точки на рамнината со правите AO и DO соодветно, тогаш од тоа што триаголникот AEF е рамностран добиваме $\overline{AM}=\frac{x\sqrt{3}}{2}$, т.е.

$\overline{OM} = \overline{OA} - \overline{AM} = \frac{\sqrt{3}}{2}(a - x)$. Од сличноста, пак, на триаголниците OAD и OMN следува дека $\overline{DA} : x = \overline{OA} : \overline{OM}$, од каде што добиваме

$$x = a\sqrt{2b^2 + a^2} : (a\sqrt{2} + \sqrt{2b^2 + a^2}). \qquad (1)$$

Значи, правоаголникот може да е квадрат со страна x е дадена со (1), и плоштина $P = x^2$



4. Даден е правоаголен триаголник ABC со катети $\overline{AC} = b$ и $\overline{BC} = b$. Низ темето C да се повлече права, таква што збирот од растојанијата од темињата A и B до оваа права да е најголем.

Решение. Правата што треба да се повлече низ темето C, наполно е определена со аголот ϕ што таа права го зафаќа со катетата AC (види цртеж).

Од правоаголните триаголници ACB, $AA'C$ и $BB'C$ добиваме $a = b\,\mathrm{tg}\alpha$, $d_b = b\sin\alpha$ и $d_a = a\cos\phi$. Затоа имаме:

$$d_a + d_b = a\sin\phi + b\cos\phi = b\,\mathrm{tg}\alpha\sin\phi + b\cos\phi = b\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\sin\phi + \cos\phi\right) = b\frac{\cos(\alpha - \phi)}{\cos\alpha}.$$

Според тоа, $d_a + d_b$ ќе биде најголем ако $\cos(\alpha - \phi) = 1$, т.е. за $\phi = \alpha$.

IV година

1. Да се најдат сите природни броеви n за кои бројот $7^n - 1$ се дели со 6 и 8.

Решение. Бидејќи

$$7^n - 1 = (7-1)(7^{n-1} + 7^{n-2} + \ldots + 7^2 + 7 + 1)$$

Следува дека бројот $7^n - 1$ е делив со 6 за секој природен број n. Ставајќи $8 - 1$ наместо 7, добиваме

$$7^n - 1 = (8-1)^n - 1 = 8^n - \binom{n}{1}8^{n-1} + \binom{n}{2}8^{n-2} + \ldots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}8 + (-1)^n - 1 =$$
$$= 8\left[8^{n-1} - \binom{n}{1}8^{n-2} + \binom{n}{2}8^{n-3} + \ldots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}\right] + [(-1)^n - 1].$$

Според тоа, бројот $7^n - 1$ е делив со 8 ако и само ако $(-1)^n - 1 = 0$, т.е. ако и само ако n е парен број. Од сето тоа следува дека бројот $7^n - 1$ е делив со 6 и 8 за секој парен природен број n и само за нив.

2. Да се најде најголемиот член во развојот на $(1 + \sqrt{2})^{50}$.

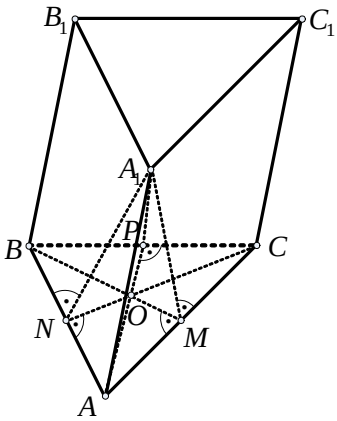
Решение. Според биномната формула, n-тиот член на развојот на $(1 + \sqrt{2})^{50}$ е

$$T_{n+1} = \binom{50}{n}\sqrt{2^n}.$$

Така, имаме $T_1 = 1$, $T_2 = 50\sqrt{2}$, $T_3 = 255$, што значи дека $T_1 < T_2 < T_3$. Исто така, $T_{50} = 2^{25}$, $T_{49} = 50 \cdot 2^{24} \cdot \sqrt{2}$, $T_{48} = 1225 \cdot 2^{24}$, што значи $T_{50} < T_{49} < T_{48}$. Според тоа, низата $T_1, T_2, T_3, \ldots, T_{50}$ донекаде расте, а потоа опаѓа. За да го најдеме најголемиот член на таа низа, ќе го испитаме односот $T_{n+1} : T_n$. Имаме:

$$T_{n+1}:T_n=\binom{50}{n}\sqrt{2^n}:\binom{50}{n-1}\sqrt{2^{n-1}}=\frac{51-n}{n}\sqrt{2}\ .$$

За да биде $T_{n+1}<T_n$, треба да е $\frac{51-n}{n}\sqrt{2}<1$, т.е. $n>51(2-\sqrt{2})$. Најмалиот природен број што е поголем од $51(2-\sqrt{2})$ е 30, што значи дека $T_{30}>T_{31}>T_{32}>...>T_{50}$ и $T_1<T_2<T_3<...<T_{30}$. Според тоа, најголемиот член во развивањето на $(1+\sqrt{2})^{50}$ е членот $T_{n+1}=\binom{50}{29}\sqrt{2^{29}}$.



3. Дадена е коса призма, чија основа е рамностран триаголник со страна $10\ dm$, а бочен раб $13\ dm$. Едно од темињата на горната основа нормално се проектира во центарот на долната основа на призмата. Да се пресмета плоштината на призмата.

Решение. Нека точката O е ортогонална проекција од темето A_1 на призмата $ABCA_1B_1C_1$ врз нејзината основа ABC (види цртеж).

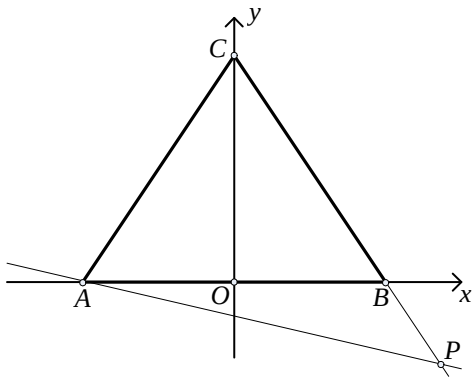
Ќе докажеме дека ѕидот BCC_1B_1 е правоаголник.

Бидејќи O е ортогонална проекција на A_1 врз рамнината ABC, добиваме дека рамнината APA_1 е нормална на работ BC (P е средина на работ BC). Затоа, од $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$ следува дека $BB_1 \perp BC$ и $CC_1 \perp BC$, што требаше и да се докаже.

Од правоаголните триаголници A_1NA и A_1MA (N е средина на AB и M е средина на AC) добиваме $\overline{NA_1}=12$ и $\overline{MA_1}=12$. За плоштината P на призмата ќе имаме:

$$P=2B+M=2\cdot\frac{\overline{AB}^2}{4}\sqrt{3}+\overline{AB}\cdot\overline{NA_1}+\overline{AC}\cdot\overline{MA_1}+\overline{BB_1}\cdot\overline{BC}=$$
$$=50\sqrt{3}+10\cdot12+10\cdot12+10\cdot13=50\sqrt{3}+370\ .$$

4. Нека ABC е рамнокрак триаголник со основа $\overline{AB}=2a$ и нека P е пресечна точка на правата BC со правата p што минува низ темето A и е нормална на страната AC. Да се најде геометриското место на точките P кога точките A и B се фиксни, а точката C се движИ, така што триаголникот ABC секогаш да е рамнокрак.



Решение. Од условите на задачата следува дека точката C се движи по симетралата на отсечката AB. Затоа, да избереме координатен систем, така што правата AB да е x-оската, а симетралата на отсечката AB да е y-оската(види цртеж). Тогаш имаме $A(-a,0)$, $B(a,0)$ и $C(0,c)$, при што $c\neq0$ се менува. Равенките на правите BC и p се:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{c}=1 \quad \text{и} \quad y=-\frac{a}{c}(x+a)$$

Соодветно. Со елиминација на параметарот c се добива равенката $x^2-y^2=a^2$ што претставува врска меѓу координатите x и y на точката P. Значи, геометриското место на точките P е хипербола.

XXVII Републички натпревар 1984

I година

1. Да се докаже дека за секој цел број x, $p(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+\frac{x}{6}$ е, исто така, цел број.

Решение. Имаме

$$p(x)=\frac{2x^3+3x^2+x}{6}=\frac{x(x+1)(2x+1)}{6}.$$

Значи, треба да докажеме дека бројот $f(x)=x(x+1)(2x+1)$ е делив со 6, а за тоа е доволно да се докаже дека $f(x)$ е делив со 2 и со 3, зошто 2 и 3 се заемно прости.

Производ од два последователни цели броја е делив со 2, па, значи, $x(x+1)$ е делив со 2, т.е. $f(x)$ е делив со 2.

Секој цел број е од облик $3k, 3k+1$ или $3k+2$. Ако $x=3k$, тогаш x е делив со 3; ако $x=3k+1$, тогаш $2x+1=3(2k+1)$, па $2x+1$ е делив со 3; ако $x=3k+2$, тогаш $x\%+1=3(k+1)$, па $x+1$ е делив со 3. Значи, за кој било цел број x, $f(x)=x(x+1)(2x+1)$ е делив со 3.

2.Која најмала вредност може да ја има најмалиот заеднички содржател на четири природни броја чиј произзвод е 1984.

Решение. Нека $abcd=2^6\cdot 31$ и нека $M=\text{НЗС}(a,b,c,d)$. Бидејќи 31 е прост број, еден од броевите е делив со 31, па, значи, и M е делив со 31. Бидејќи $abcd$ е делив со 2^6, следува дека барем еден од броевите е делив со $2^2=4$. Според тоа, M е делив со $2^2\cdot 31=124$. За $a=b=c=4$ и $d=31$ имаме $M=124$; следствено, најмалата вредност што може да ја има M е 124.

3. На шаховска табла, 8×8, поставени се 63 монети од по 5 денари и една монета од 10 денари, така што во секое поле е поставена точно една монета. Дадени се на располагање доволен број монети од по $5,10$ и 20 денари. Можни се следниве замени на три монети од таблата со други три монети:

$(5,5,5)\leftrightarrow(10,10,10)$, $(5,5,10)\leftrightarrow(5,10,20)\leftrightarrow(20,20,10)$, $(5,10,10)\leftrightarrow(10,10,20)$,
$(5,20,20)\leftrightarrow(5,5,20)\leftrightarrow(20,20,20)$

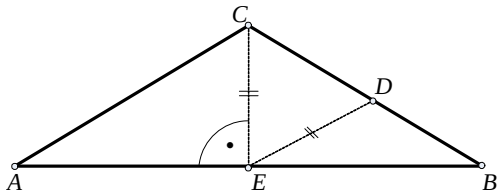
при што редоследот не е битен.

Дали е можно, после конечно многу замени на таблата да бидат поставени 60 монети од по 10 денари, 3 монети од по 20 денари и 1 монета од 5 денари?

Решение. Да забележиме дека со замена на три монети од таблата со други три монети збирот на од вредностите на парите се менува за 15 или 30. Значи, разликата меѓу збировите на вредностите од парите на таблата на почетокот и по неколку замени е делива со 15.

Збирот на вредностите од монетите на почетокот е $63\cdot 5+10=325$, додека на крајот на бараниот распоред е $60\cdot 10+3\cdot 20+1\cdot 5=665$. Нивната разлика е 340, а тој број не е делив со 15.

Значи, одговорот е не.



4. Даден е рамнокрак триаголник со основа $6\,cm$. Да се пресмета плоштината на триаголникот, ако се знае дека средините на краците и врвот лежат на кружница со центар во средината на основата.

Решение. Нека AB основата на рамнокракиот триаголник ABC и нека E и D се средините на AB и BC соодветно(види цртеж).

Тогаш $\overline{CE}=\overline{DE}$; но, DE е средна линија, па $\overline{DE}=\frac{1}{2}\overline{AC}=\frac{1}{2}\overline{BC}=\overline{CD}$. Според тоа, ΔCDE е рамностран. Значи, $\measuredangle ECD=\measuredangle ACE=60^\circ$, $\measuredangle EAC=30^\circ$, па $\overline{CE}=\overline{AE}\mathrm{tg}30^\circ=\frac{1}{2}\overline{AB}\frac{\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}$. Следствено, $P=3\sqrt{3}$.

II година

1. Да се докаже дека за секој природен број n важи равенството

$$\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2n-3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2n-5}+\ldots+\frac{1}{2n-1}\cdot\frac{1}{1}=\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1}\right)$$

Решение. За левата страна L на равенството имаме:

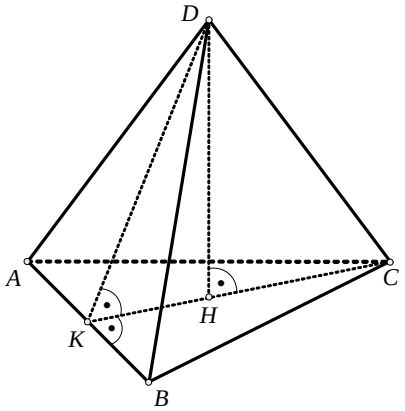
$$\begin{aligned}L&=\frac{2n}{2n}\left(\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{3(2n-3)}+\ldots+\frac{1}{3(2n-3)}+\frac{1}{2n-1}\right)=\\&=\frac{1}{2n}\left(\frac{2n}{2n-1}+\frac{2n}{3(2n-3)}+\ldots+\frac{2n}{3(2n-3)}+\frac{2n}{2n-1}\right)=\\&=\frac{1}{2n}\left(\frac{2n-1+1}{2n-1}+\frac{2n-3+3}{3(2n-3)}+\ldots+\frac{2n-3+3}{3(2n-3)}+\frac{2n-1+1}{2n-1}\right)=\\&=\frac{1}{2n}\left(1+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2n-3}+\ldots+\frac{1}{2n-3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2n-1}+1\right)=\\&=\frac{1}{2n}\cdot 2\cdot\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1}\right)\end{aligned}$$

2. Дадена е квадратната равенка $a^4x^2+5a^2bx+4b^2=0$, $a,b\neq 0$.

а) Да се докаже дека ова равенка има реални и различни корени за кои било a и b .

б) Ако корените x_1 и x_2 на равенката го задоволуваат условот $4(x_1+x_2)=5(x_1x_2+1)$, тогаш тие не зависат од a и b . Докажи!

Решение.а)Имаме $D=9a^4b^2>0$, што значи дека корените на равенката се реални и меѓусебно различни за кои било a и b .



б)Според Виетовите правила, равенството $4(x_1+x_2)=5(x_1x_2+1)$ добива облик $2b+c^2=0$, при кој услов равенката се сведува на равенката

$$2x^2-5x+2=0\ ,$$

чии корени се $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=2$.

3. Ортогоналната проекција на едно теме на тетраедарот $ABCD$ врз спротивниот ѕид се совпаѓа со ортоцентарот на тој ѕид. Да се докаже дека важат равенствата: $\overline{AD}^2+\overline{BC}^2=\overline{AC}^2+\overline{BD}^2=\overline{AB}^2+\overline{CD}^2$.

Решение.Нека ортогоналната проекција на темето D е ортоцентарот H на триаголникот ΔABC и нека K е ортогоналната проекција на D врз работ AB (види цртеж). Тогаш точките K,H и C се колинеарни. Имаме:

$$\begin{aligned}\overline{AD}^2+\overline{BC}^2&=\overline{AK}^2+\overline{KD}^2+\overline{BC}^2=\overline{AC}^2-\overline{CK}^2+\overline{BC}^2+\overline{KD}^2=\overline{AC}^2+\overline{BK}^2+\overline{KD}^2=\\&=\overline{AC}^2+\overline{BD}^2\ .\end{aligned}$$

Аналогно се добива и другото равенство.

4. Дадена е коцка со раб a. Ѕидовите на коцката се основи на шест пирамиди чиј зеднички врв е центарот на коцката. Во секој од пирамидите е впишана сфера. Да се најде волумненот на телото чии темиња се центрите на сферите.

Решение. Телото чии темиња се центрите на сферите е составено од две складни пирамиди слепени со основите. Основата на пирамидата е квадрат со страна $2R$ и висина $\frac{a}{2}-R$, каде што R е радфиусот на сферите. Според тоа, ќе имаме

$$V=\frac{8R^2}{3}\left(\frac{a}{2}-R\right). \qquad (1)$$

Значи, за да го најдеме волуменот на телото потребно е да го најдеме радиусот R на сферите.

На цртежот е претставена една од шесте пирамиди, а на цртеж 4 е претставен пресекот ABC, каде што D е центарот на сферата. Имаме:

$$P_{ACD}+P_{BCD}+P_{ABD}=P_{ABC}\text{, т.е. } \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}R}{2}+\frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}R}{2}+\frac{aR}{2}=\frac{a\cdot\frac{a}{2}}{2},$$

од каде што добиваме $R=\frac{a}{2(\sqrt{2}+1)}$. Заменувајќи во (1) добиваме $V=\frac{a^3\sqrt{2}}{3(\sqrt{2}+1)^3}$.

III година

1. Иста како задача 1 втора година.

2. Да се реши неравенката $\log_2\frac{6x+2}{x-2}>2$

Решение.Дадената неравенка е еквивалентна со неравенката $\frac{6x+2}{x-2}>4$, а таа е, пак, еквивалентна со неравенката $(6x+2)(x-2)>4(x-2)^2$, т.е. со $x^2+3x-10>0$, од каде што добиваме дека $x\in(-\infty,-5)\cup(2,+\infty)$.

3. Да се докаже дека постои единствен триаголник чии страни се последователни природни броеви и еден од аглите е двапати поголем од еден од преостанатите два агли.

Решение. Нека страните на триаголникот се $a=n-1$, $b=n$ и $c=n+1$; тогаш $\alpha<\beta<\gamma$, па можни се следниве случаи: (i) $\beta=2\alpha$, (ii) $\gamma=2\beta$, (iii) $\gamma=2\alpha$. Ќе ги разгледаме посебно сите три случаи.

(i) Според синусната теорема, имаме

$$\frac{n-1}{\sin\alpha}=\frac{n}{\sin\beta},\qquad \frac{n-1}{\sin\alpha}=\frac{n}{\sin 2\alpha},\qquad \frac{n-1}{\sin\alpha}=\frac{n}{2\sin\alpha\cos\alpha},$$

од каде што добиваме

$$\cos\alpha=\frac{n}{2(n-1)}. \qquad (1)$$

Според косинусна теорема, имаме $(n-1)^2=n^2+(n+1)^2-2n(n+1)\cos\alpha$, т.е.

$$\cos\alpha=\frac{n+4}{2(n+1)}. \qquad (2)$$

Од (1) и (2) го добиваме равенството

$$\frac{n}{2(n-1)}=\frac{n+4}{2(n+1)},$$

т.е. $n=2$, па страните на триаголникот се $a=1$, $b=2$, $c=3$, што не е можно, зошто $a+b=c$.

(ii) Слично како во (1), користејќи ги синусната и косинусната теорема, добиваме

$$\cos\beta = \frac{n+1}{2n} = \frac{n^2+2}{2(n^2-1)},$$

т.е. $n^2 - 3n - 1 = 0$, чии што корени не се природни броеви.

(iii) Во овој случај го добиваме равенството $\frac{n+1}{2(n-1)} = \frac{n+4}{2(n+1)}$, т.е. $n = 5$, па страните на триаголникот се $a = 4, b = 5, c = 6$.

4. Дали постои просторен петаголник чии страни се меѓусебно еднакви и чии агли меѓу две соседни страни се прави. Дали постои таков шестаголник?

Решение. Нека $ABCDE$ е таков петаголник (види цртеж); тогаш A, B, C се темиња на квадратот $OABC$, а D и E лежат во рамнини нормални на $OABC$, т.е. $D \in \Sigma_1, E \in \Sigma_2$ (види цртеж). Можеме да претпоставиме дека петаголникот е со страна 1 (еден); тогаш $D \in k_1$, $E \in k_2$, каде што

- k_1 е кружница во Σ_1 со центар во C и радиус 1,
- k_2 е кружница во Σ_2 со центар во A и радиус 1.

Од ΔEDA добиваме дека $\overline{AD} = \sqrt{2}$, а потоа од ΔAOD, добиваме дека $\overline{OD} = 1$. Слично добиваме дека $\overline{OE} = 1$. Значи, $D \in k_1'$, $E \in k_2'$, каде што k_i', $i = 1,2$ е кружница во Σ_i, $i = 1,2$, со центар O и радиус 1. Нека D е над рамнината $OABC$; тогаш $E \in k_2' \cap k_2 = \{E_1, E_2\}$. Со пресметување добиваме $\overline{DE_1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \neq 1$, $\overline{DE_2} = \sqrt{\frac{7}{2}} \neq 1$. Значи, таков петаголник не постои.

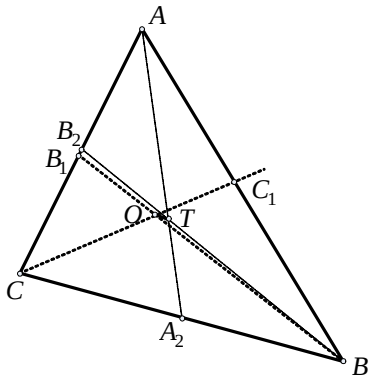
Таков шестаголник постои; тој е претставен на цртежот.

IV година

1. Да се најдат сите реални броеви a и b

$$\begin{cases} \left|\frac{x^y - 1}{x^y + 1}\right| = a \\ x^2 + y^2 = b \end{cases} \qquad (1)$$

при условот $x > 0$, има единствено решение.



Решение. Нека $S \subseteq \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ е множеството парови (x, y) што го задоволуваат системот (1) при што $x > 0$. Од $x^2 + y^2 = b$ следува дека $b > 0$. Ако $(x, y) \in S$, тогаш и $(x, -y) \in S$, што значи дека за системот (1) да има единствено решение, при услов $x > 0$, мора да биде $y = 0$ и $a = 0$. За $a = 0$ и $b > 1$ системот (1) има решенија $(\sqrt{b}, 0)$, $(1, \sqrt{b-1})$, $(1, -\sqrt{b-1})$. Според тоа, системот (1) има единствено решение, при услов $x > 0$, за $a = 0$ и $0 < b \leq 1$, и решението е $(\sqrt{b}, 0)$.

2. Должините на страните на еден триаголник образуваат аритметичка прогресија. Да се докаже дека центарот на впишаната кружница и тежиштето лежат на права паралелна со една од страните на триаголникот.

Решение. Нека $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a + x$, $\overline{CA} = a + 2x$ и нека r е радиусот на впишаната кружница; тогаш $r = \frac{2P}{3(a+x)}$, $P = P_{ABC}$. Нека D е ортогоналната проекција од A врз

страната BC (види цртеж); тогаш растојанието од T до страната BC е: $d=\frac{1}{2}\overline{AD}=\frac{1}{3}\cdot\frac{2P}{\overline{BC}}=\frac{2P}{3(a+x)}=r$. Значи, центарот на впишаната кружница и тежиштето се еднакво оддалечени од страната BC, па тие лежат на права паралелна со страната BC.

3. Природните броеви се групирани на следниов начин:

$\{(1,2),(3)\}$, $\{(4,5,6),(7,8)\}$, $\{(9,10,11,12),(13,14,15)\}$, $\{(16,17,18,19,20),(21,22,23,24)\}$, …

Да се докаже дека групирањето на броевите во секоја од големите загради е извршено така што збировите на броевите во малите загради се исти.

Решение. Да забележиме дека првиот број во првата мала заграда од k-тата голема заграда е k^2, а последниот е k^2+k; значи, во првата мала заграда има $k\neq 1$ број, а во втората k броеви. Според тоа, за збировите S_1 и S_2 на броевите во првата и втората мала заграда соодветно ќе имаме:

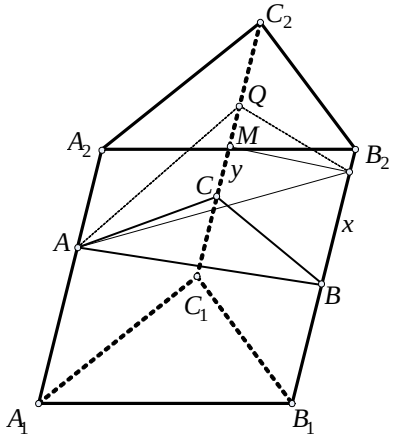
$$S_1=k^2+(k^2+1)+...+(k^2+k)=(k+1)k^2+(1+2+3+...+k)=(k+1)k^2+\frac{k(k+1)}{2}=\frac{k(k+1)(2k+1)}{2}$$

$$S_2=(k^2+k+1)+(k^2+k+2)+...+(k^2+2k)=[\underbrace{(k^2+k)++...+(k^2+k)}_{k}]+(1+2+...+k)=$$

$$=k(k^2+k)+\frac{k(k+1)}{2}=\frac{k(k+1)(2k+1)}{2}$$

Следствено, $S_1=S_2$

4. Нормалниот пресек на тристрана призма $A_1B_1C_1A_2B_2C_2$ е рамностран триаголник ABC со страна a. На бочните рабови B_1B_2 и C_1C_2 се земени две произволни точки P и Q. Нека $\overline{BP}=x$ и $\overline{CQ}=y$.



а) Да се најде врската меѓу x и y за триаголникот APQ да биде правоаголен со прав агол кај темето P.

б) Да се определат x и y, така што триаголникот APQ да биде рамнокрак правоаголен со прав агол кај темето P.

Решение. а) Од правоаголните триаголници ABP и ACQ (види цртеж) добиваме $\overline{AP}^2=x^2+y^2$ и $\overline{AQ}=a^2+y^2$. Нека M е точка од работ C_1C_2, така што $PM\parallel BC$; тогаш триаголникот PMQ е правоаголен, па имаме $\overline{PQ}^2=a^2+(y-x)^2$, $y>x$. Ако триаголникот APQ е правоаголен со прав агол кај темето P, тогаш: $\overline{AP}^2+\overline{PQ}^2=\overline{AQ}^2$, т.е.

$$2x^2-2xy+a^2=0. \qquad (1)$$

б) Според условот на задачата, за триаголникот APQ важат релациите $\overline{AP}=\overline{PQ}$ и $\overline{AP}^2+\overline{PQ}^2=\overline{AQ}^2$, т.е. $y^2-2xy=0$ и $2x^2-2xy+a^2=0$.

При претпоставката $y\neq 0$ добиваме $x=\frac{a\sqrt{2}}{2}$, $y=a\sqrt{2}$.

XXVIII Републички натпревар 1985

I година

1. Да се најдат сите подмножества S од множеството цели броеви $\mathbb{Z}$, такви што:

(1) $m,n \in S \quad \Rightarrow \quad m+n \in S$

(2) $m,n \in S \quad \Rightarrow \quad m \cdot n \in S$

(3) $(\forall m \in \mathbb{Z})\ \ m \in S$ или $-m \in S$ или $m=0$.

Решение. Нека $S \subseteq \mathbb{Z}$ ги задоволува условите од задачата. Бидејќи $1 \in \mathbb{Z}$, од условот (3) следува дека $1 \in S$ или $-1 \in S$. Ако $-1 \in S$, тогаш од (2) $1=(-1)(-1) \in S$. Значи $1 \in S$, што заедно со (1) повлекува дека множеството природни броеви $\mathbb{N}$ е содржано во S. Ако $-1 \in S$ и $0 \in S$ тогаш $S=\mathbb{N}$. Ако $-1 \notin S$ и $0 \in S$, тогаш $S=\mathbb{N} \cup \{0\}$. Според тоа, единствени подмножества S од $\mathbb{Z}$ што го задоволуваат условот од задачата се $\mathbb{N}$, $\mathbb{N} \cup \{0\}$ и $\mathbb{Z}$.

2. Да се најдат сите природни броеви a,b,c,d,e такви што

(1) $a \neq 2$,

(2) $a<b<c<d<e$

(3) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}=1$.

Решение. Нека a,b,c,d,e ги задоволуваат условите од задачата; тогаш $a=3$, бидејќи : $a \neq 2$ според (1); $a \neq 1$, зошто $a=1$ повлекува $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}>1$; $a \geq 4$ повлекува

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e} \leq \frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}<1.$$

Слично, $b=4$, бидејќи: $b>4$, според (2), а $b \geq 5$ повлекува

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e} \leq \frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}<1.$$

Ако $c \geq 7$, тогаш

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e} \leq \frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}<1$$

Според тоа, c може да биде 5 или 6. Ако $c=6$, тогаш $\frac{1}{d}+\frac{1}{e}=1-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}=\frac{1}{4}$. Ако $d \geq 8$, тогаш $\frac{1}{d}+\frac{1}{e} \leq \frac{1}{8}+\frac{1}{9}<\frac{1}{4}$, што заедно со $d>c=6$ повлекува дека $d=7$. Но $\frac{1}{e}=\frac{1}{4}-\frac{1}{7}$ нема решение во $\mathbb{N}$. Значи, $c=5$. Тогаш

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{e}=1-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=\frac{13}{60},$$

и $5<d<e$. Ако $d \geq 9$ тогаш $\frac{1}{d}+\frac{1}{e} \leq \frac{1}{9}+\frac{1}{10}<\frac{13}{60}$, што заедно со $5<d$ повлекува дека $d=6$, $d=7$ или $d=8$. Ако $d \geq 7$, тогаш $\frac{1}{e}=\frac{13}{60}-\frac{1}{d}$ нема решение во $\mathbb{N}$. Според тоа, $d=6$. Од $\frac{1}{e}=\frac{13}{60}-\frac{1}{6}=\frac{1}{20}$ добиваме $e=20$. Значи, бараните броеви се: $3,4,5,6,20$.

3. Дедото на Филип е роден во овој век. Ученикот Филип забележал дека збирот на цифрата од годината на раѓањето на дедому е еднаков со збирот на цифрите од бројот на годините што дедому ги имал во 1985. Во која година е роден дедото на ученикот Филип?

Решение. Нека дедото на ученикот Филип е роден во $19xy$ година за $0 \le y \le 9$ и $0 \le x \le 9$. Цифрите на бројот на годините на дедото во 1985 година се: $8-x$ и $5-y$ или $7-x$ и $15-y$. Тогаш $1+9+x+y=8-x+5-y$ или $1+9+x+y=7-x+15-y$, т.е. $2(x+y)=3$ или $2(x+y)=12$. Бидејќи 3 не се дели со 2, $x+y=6$. Ако $x \ge 1$, тогаш дедото во 1985 година има помалку од 71 година, а збирот на цифрите на секој природен број помал од 71 е помал од $16=1+9+x+y$. Значи $x=0$ и $y=6$, т.е. дедото е роден во 1906 година.

4. Нека $A_1, A_2, A_3, ..., A_{11}, A_{12}$ се последователни темиња на правилен 12-аголник. Да се докаже дека дијагоналите A_1A_9, A_2A_{11} и A_4A_{12} се сечат во една точка.

Решение. Нека O е центарот на опишаната кружница околу дадениот правилен 12-аголник. Со помош на: својството за еднаквост на периферискиагли над ист лак, својството на централен и периферискиагол над ист кружен лак и тоа што $\measuredangle A_1OA_2 = 30^\circ$, се докажува дека $\measuredangle A_1A_{12}A_4 = \measuredangle A_{12}A_1A_9 = 45^\circ$ и $\measuredangle A_1A_2A_{11} = \measuredangle A_{12}A_{11}A_2 = 30^\circ$. Нека A и B се точки од A_1A_9 и A_4A_{12} соодветно, така што A_1B и $A_{12}A$ се нормални на A_1A_{12} (види цртеж). Вака формираниот четириаголник ABA_1A_{12} е квадрат со центар во пресекот на дијагоналите A_1A_9 и A_4A_{12}. Понатаму, триаголниците A_1A_2B и $AA_{11}A_{12}$ се рамностранитчии висини спуштени од A_2 и A_{11} се делови од дијагоналата A_2A_{11}. Според тоа, A_2A_{11} минува низ средните точки на спротивните страни на квадратот ABA_1A_{12}, што значИ дека минува И низ центарот на тој квадрат.

II година

1. Да се реши равенката:

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1.$$

Решение.Со помош на равенствата

$$x+3-4\sqrt{x-1}=(\sqrt{x-1}-2)^2$$

и

$$x+8-6\sqrt{x-1}=(\sqrt{x-1}-3)^2$$

Дадената равенка се сведува на равенката

$$|\sqrt{x-1}-2|+|\sqrt{x-1}-3|=1. \qquad (1)$$

Можни се следните случаи:

1)

2. Да се најдат сите четирицифрени броеви m за кои се знае дека:

i) m е квадрат од природен број;

ii) првата и втората цифра на m се еднакви; и

iii) третата и четвртата цифра на m се еднакви.

Решение. Нека x е првата, а y е третата цифра на m и нека $m=k^2$. Тогаш

$$k^2=1000x+100x+10y+y=11(100x+y),$$

од каде што следува дека 11 е делител на k, т.е. $k=11n$. Од $11\cdot 11n^2=11(100x+y)$ следува дека 11 е делител на $x+y$. Бидејќи $1 \le x \le 9$ и $0 \le y \le 9$, добиваме дека $1 \le x+y \le 18$, што значи дека $x+y=11$. Тогаш $n^2=9x+1$, што е можно само за $x=7$. Според тоа, бараниот број m е $7744=88^2$.

3. Во рамнокрак правоаголен триаголник ABC впишан е рамнокрак правоаголен триаголник $A_1B_1C_1$. Да се најде најмалата вредност на односот $P_{A_1B_1C_1} : P_{ABC}$.

Решение. Нека C и C_1 се темиња кај правите агли. Можни се два случаи:

Прв случај:

4. . Нека $A_1, A_2, A_3, ..., A_{11}, A_{12}$ се последователни темиња на правилен 12 - аголник со страна $a = 2\ cm$. Нека дијагоналите A_1A_{10}, A_2A_{11} и A_3A_{12} се сечат во точките A, B и C. Да се најде плоштината P_{ABC}.

Решение.Н

III година

1. Нека $P_1, P_2, P_3, ..., P_6, P_7$ се седум различни точки од дадена кружница. Да се докаже дека постојат барем пет агли $\measuredangle P_iP_jP_k$, $i \neq j \neq k \neq 1$, што се помали од 30°.

Решение.К

2. Колку решенија има равенката

$$||...||\,|x|-1|-1|-...|-1|=\frac{1}{1985}.$$

Решение.Д

3. Даден е конвексен четириаголник $ABCD$ со агли α, β, γ и δ различни од 90°. Да се докаже дека

$$\frac{tg\alpha + tg\beta + tg\gamma + tg\delta}{tg\alpha \cdot tg\beta \cdot tg\gamma \cdot tg\delta} = ctg\alpha + ctg\beta + ctg\gamma + ctg\delta .$$

Решение. Од тоа што $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$ и четириаголникот е конвексен, следува дека $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ може да се поделат на два пара чии збирови се различни од 90° и 270°. Да претпоставиме дека

4. Рамнината ги сече бочните рабови од правилна четиристрана пирамида со врв S во точките A, B, C и D. Притоа A и C се точки од спротивни рабови и ниедна од точките A, B, C, D не се совпаѓа со S. Да се докаже дека

$$\frac{1}{\overline{AS}} + \frac{1}{\overline{CS}} = \frac{1}{\overline{BS}} + \frac{1}{\overline{DS}} .$$

Решение.Нека рамнината што ја сече пирамидата, ја сече, висината на пирамидата во точка M. Тогаш SM е симетрала на аголот кај темето S и во двата триаголници ASC и BSD. Од друга страна, бидејќи пирамидата е правилна, $\measuredangle ASC = \measuredangle BSD$. Нека $\measuredangle ASM = \alpha$. Тогаш

$$2P_{ASC} = \overline{SM} \cdot \overline{SA} \sin\alpha + \overline{SM} \cdot \overline{SC} \sin\alpha$$

и

$2P_{ASC} = \overline{SA} \cdot \overline{SC} \sin 2\alpha$.

Според тоа, $\frac{\overline{SA}+\overline{SC}}{\overline{SA}\cdot\overline{SC}} = \frac{2\cos\alpha}{\overline{SM}}$. Слично, и $\frac{\overline{SB}+\overline{SD}}{\overline{SB}\cdot\overline{SD}} = \frac{2\cos\alpha}{\overline{SM}}$. Значи,

$\frac{1}{\overline{SA}} + \frac{1}{\overline{SC}} = \frac{\overline{SA}+\overline{SC}}{\overline{SA}\cdot\overline{SC}} = \frac{\overline{SB}+\overline{SD}}{\overline{SB}\cdot\overline{SD}} = \frac{1}{\overline{SB}} + \frac{1}{\overline{SD}}$ (види цртеж).

IV година

1. Нека A и B се подмножества од $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ определени со:

$$A = \left\{(x,y) / \text{за секој } a \in \mathbb{R}, y \neq \frac{x-a}{ax-1}\right\}$$

$$A = \left\{(x,y) / \text{постои } a \in \mathbb{R}, a(1+xy) = x+y\right\}.$$

Да се најде $A \cap B$, а потоа да се претстави графички.

Решение. Нека $(x,y) \in A \cap B$. Бидејќи $(x,y) \in B$, постои $a \in \mathbb{R}$ така што $a(1+xy) = x+y$, т.е. $y(ax-1) = x-a$. Ако $ax-1 \neq 0$, тогаш $y = \frac{x-a}{ax-1}$, што е спротивно со $(x,y) \in A$. Значи, $ax = 1$ и $x = a$, од што следува дека $x^2 = 1$. За $x = 1$ имаме $-1 = \frac{1-a}{a-1}$ а за $x = -1$, $1 = \frac{-1-a}{-a-1}$, што значИ дека $xy \neq -1$. Следствено,

$$A \cap B = \{(x,y) / x^2 = 1, xy \neq 1\},$$

и графички е претставено на цртежот.

2. Да се најде збирот $a_1 + a_2 + ... + a_{1985}$, ако

$$a_{k-1} = \frac{3k^2 - 3k + 1}{(k^2-k)^3} \text{ за } k \geq 2 .$$

Решение. За $k \geq 2$, $a_{k-1} = \frac{3k^2-3k+1}{(k^2-k)^3} = \frac{k^3-(k-1)^3}{k^3(k-1)^3} = \frac{1}{(k-1)^3} - \frac{1}{k^3} = b_{k-1} - b_k$, каде што $b_n = \frac{1}{n^3}$ за $n \geq 1$. Тогаш

$$a_1 + a_2 + ... + a_{1985} = b_1 - b_2 + b_2 - b_3 + ... + b_{1984} - b_{1985} + b_{1985} - b_{1986} = b_1 - b_{1985} =$$
$$= 1 - \frac{1}{1986^3} = \frac{1986^3 - 1}{1986^3} .$$

3. Нека $S_k(n) = \sum_{j=1}^{n} j^k$, за $k, n \in \mathbb{N}$. Да се покаже дека за секои $k, n \in \mathbb{N}$

$$n \cdot S_k(n) = S_{k+1}(n) + \sum_{i=1}^{n-1} S_k(i)$$

Решение.Н

4.Иста како и задача четири од трета година.

XXIX Републички натпревар 1986

I година

1. На колку нули завршува бројот 1986!? Одговорот да се образложи. ($1986! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot ...\cdot 1985\cdot 1986$).

Решение. Нека $1986! = 2^m \cdot 5^n \cdot k$, каде што k не е делив ниту со 2 ниту со 5. Бидејќи во броевите од 1 до 1986, 2 се појавува почесто отколку 5, следува дека $m > n$. Бидејќи $10 = 2\cdot 5$, следува дека 1986 завршува на n нули. Меѓу броевите $1,2,3,...,1986$ постојат $\left[\frac{1986}{5}\right] = 397$ броеви кои завршуваат на 5, $\left[\frac{1986}{25}\right] = 79$ броеви деливи со 5^2, $\left[\frac{1986}{125}\right] = 15$ броеви деливи со 5^3, $\left[\frac{1986}{625}\right] = 3$ броеви деливи со 5^4 и не постојат броеви делив со 5^5. Погоре, $[x]$ означува цел дел од бројот x. Според тоа, бројот на нулите е

$$n = 397 + 79 + 15 + 3 = 494.$$

2. Еден човек патува со чамец по реката Дрим од Струга до Глобочица и обратно. Растојанието меѓу струга и Глобочица е $18\,km$, а тој патувал вкупно 5 часа. Колкава е брзината на реката Дрим, ако човекот за исто време патувал $4\,km$ низводно, а $2\,km$ во обратна насока?

Решение.Нека брзината на реката е x km/h, а на чамецот во мирна вода е y km/h. Од условот на задачата следува следува дека

$$\frac{18}{y+x} + \frac{18}{y-x} = 5 \quad \text{и} \quad \frac{4}{y+x} = \frac{2}{y-x}.$$

Нека $\frac{1}{y+x} = u$, $\frac{1}{y-x} = v$. Тогаш се добива системот равенки

$$\begin{cases} 18u + 18v = 5 \\ 4u = 2v \end{cases}.$$

Негово решение е $u = \frac{5}{54}$, $v = \frac{5}{27}$. Според тоа, го добиваме системот

$$\begin{cases} x + y = \frac{54}{5} \\ x - y = \frac{27}{5} \end{cases},$$

т.е. $x = 2{,}7$ km/h, $y = 8{,}1$ km/h. Значи, брзината на реката Дрим е $2{,}7$ km/h.

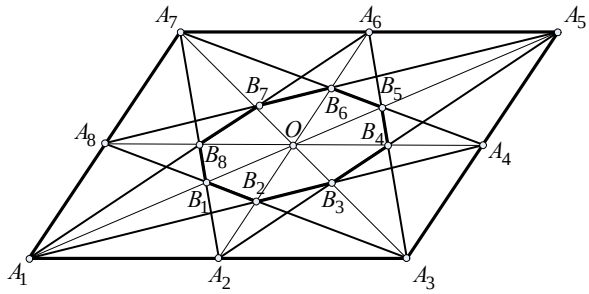
3. Средините на страните во даден паралелограм се поврзани со спротивните темиња. Така добиените отсеки заградуваат еден осумаголник. Да се покаже дека неговата плоштина е шест пати помала од плоштината на паралелограмот.

Решение. Нека A_2, A_4, A_6, A_8 се средини на страните, а O центар на паралелограмот $A_1A_3A_5A_7$. Нека $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6, B_7, B_8$ се темиња на осумаголникот(види цртеж).

Бидејќи пресекот на дијагоналите во параллелограм е негов центар на симетрија, следува дека A_8, B_8, O, B_4, A_4, а исто така и A_6, B_6, O, B_2, A_2 се колинеарни.

Нека M е пресекот на A_4A_6 и OA_5. Бидејќи M е средина на A_4A_6 (види цртеж) следува дека B_5 е тежиштен а триаголникот OA_4A_6 и O, B_5, N, A_5 се колинеарни. Слично се покажува дека A_1, B_1, O, B_5, A_5 , а исто така и A_3, B_3, O, B_7, A_7 се колинеарни.

Нека P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 се плоштините на триаголниците OA_4A_5, OA_4B_5, OB_4B_5, $A_4B_5B_4$, $A_4A_5B_5$ соодветно. Бидејќи триаголниците OB_4B_5 и $B_4A_4B_5$ имаат еднакви страни и висини, следува дека $P_3 = P_4$. Бидејќи триаголниците OA_4B_5 и $B_5A_4A_5$ имаат еднакви висини спуштени од A_4 и $\overline{A_5B_5} = 2\overline{OB_5}$ (B_5 е тежиште на триаголникот OA_4A_6), следува дека $P_5 = 2P_2$. Од тоа што $P_2 = P_3 + P_4 = 2P_3$, следува дека $P_1 = P_2 = P_5 = 3P_2 = 6P_3$.



Оваа дискусија се спроведува на ист начин за секој од паровите триаголници (OB_1B_2, OA_1A_2) , (OB_2B_3, OA_2A_3) ,…, (OB_8B_1, OA_8A_1) (види цртеж), од што следува дека плоштината на осумаголникот е шест пати помала од плоштината на паралелограмот.

4.Во секое поле од шаховската табла е запишан број. Збирот на броевите запишани на било кои четири полиња што формираат патека на коњ (во облик на буквата Г) е константен. Колку различни броеви се запишани на таблата? Одговорот да се образложи.

a_1	a_2	a_3
a_4	a_5	a_6
a_7	a_8	a_9

a	c	a
c	a	c
a	c	a

Решение. Да разгледаме произволен 3×3 дел од таблата(види цртеж). Според условот од задачата следува дека $a_1 + a_4 + a_5 + a_6 = a_4 + a_5 + a_6 + a_3$, од каде што следува дека $a_1 = a_3$. Слично се докажува дека $a_4 = a_6$, $a_7 = a_9 = a_3 = a_1$ и $a_2 = a_8$.

Потоа, од $a_1 + a_2 + a_5 + a_2 = a_1 + a_2 + a_5 + a_8 = a_1 + a_4 + a_5 + a_6 = a_1 + a_5 + a_4 + a_4$ следува дека $a_2 = a_4$. Слично се покажува дека $a_1 = a_3 = a_5 = a_7 = a_9 = a$ и $a_2 = a_4 = a_6 = a_8 = c$. Според тоа, броевите запишани на истобојни полиња(црни или бели) се еднакви. Нека наб елите полиња е запишан бројот a, а на црните полиња е запишан бројот c. Ако $a = c$, тогаш одговорот е еден, а ако $a \neq c$, тогаш одговорот е два.

II година

1. Да се покаже дека за секој природен број k

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdot\ldots\cdot\frac{2k}{2k+1} > \frac{1}{\sqrt{2k+1}}.$$

Решение.За секој $k \geq 1$, од $4k^2 - 1 < 4k^2$ делејќи со позитивниот број $2k(2k+1)$ следува дека $\frac{2k-1}{2k} < \frac{2k}{2k+1}$. Според тоа, даденото неравенство следува од неравенството

$$\frac{1}{2k+1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2k-1}{2k}\cdot\frac{2k}{2k+1}=\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdot\ldots\cdot\frac{2k}{2k+1}\right)\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot\ldots\cdot\frac{2k-1}{2k}\right)<$$
$$<\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdot\ldots\cdot\frac{2k}{2k+1}\right)^2 .$$

(Забелешка: Задачата може да се реши и со математичка индукција.)

2.Следната равенка да се реши во множеството природни броеви $2^x+2^y+2^z=2336$.

Решение. Ако една подредена тројка природни броеви е решение на равенката, тогаш и секоја нејзина пермутација е исто така решение на равенката.

Нека x,y,z е решение на равенката природни броеви. Ќе покажеме дека $x\neq y\neq z\neq x$, покажувајќи дека ако два броеви од x,y,z се еднакви, тогаш x,y,z не е решение. Нека $x=y$. Тогаш е можно: 1) $z=x$; 2) $z<x$; 3) $z=x+1$ или 4) $z>x+1$.

1)Ако $z=x$, тогаш $2^x+2^y+2^z=3\cdot 2^x$ е делив со 3, а 2336 не е делив со 3.

2)Ако $z=x+1$, тогаш 2336 е делив со 73, а $2^x+2^y+2^z=2^{x+2}$ не е.

3)Нека $z>x+1$, т.е. $z=x+1+k$ за некој природен број k. Тогаш $2^x+2^y+2^z=2^{x+1}(1+2^k)$ не е еднаков на 2336 од исти причини како и во 2).

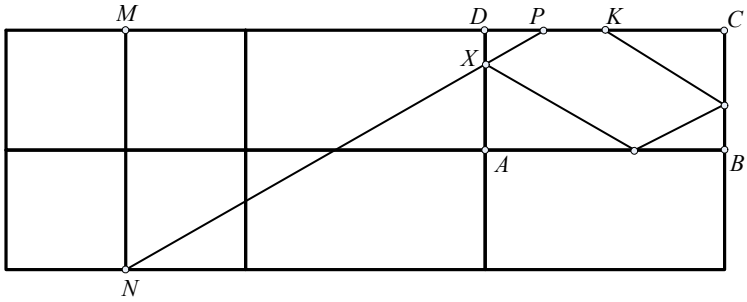
На ист начин се покажува дека $x\neq z$ и $y\neq z$.

Нека $x<y<z$, т.е. $y=x+p$, $z=y+s=x+p+s$. Тогаш од

$$2^x+2^y+2^z=2^x[1+2^p(1+2^s)]=2^5[1+2^3(1+2^3)]=2336,$$

следува дека $x=5, y=8$ и $z=11$. Значи, решенија на равенката се сите пермутации на тројката $5,8,11$.

3.На маса за играње на билијард во облик на правоаголник $ABCD$, поставена е билијардна топка на растојание $1m$ од ќошот D и $3m$ од ќошот C. Страните на масата се $\overline{AB}=\overline{CD}=4\ m$ и $\overline{BC}=\overline{AD}=2\ m$. Топката е удрена така што првото одбивање е од страната AD. После три одбивања топката удира во средината на страната CD. Да се определи точката од страната AD во која топката се одбила првиот пат.



Решение. Бараната топка е на растојание $\frac{4}{7}$ m од ќошот D. Тоа следува од сличноста на триаголниците MNP и DXP (види цртеж).

4.На секое поле од една 100×100 "шаховска" табле запишан е знак $+$. Се дозволува со една операција да се заменат сите знаци во некој ред или

колона со нивните спротивни знаци($+$ со $-$ или $-$ со $+$). Дали е можно после конечно многу операции на таблата да бидат запишани точно 1986 знаци со $-$? Одговорот да се образложи.

Решение.После конечен број на операции, нека x_k е бројот на операции применети на k -тиот ред, а y_k е бројот на операции применети на k -тата колона, за $k=1,2,...,100$. Нека меѓу броевите $x_1,x_2,...,x_{100}$ има p, а меѓу $y_1,y_2,...,y_{100}$ има q непарни броеви. БидејќИ парен број операции на дадена колона или ред не ги менува знаците, следува дека, после конечниот број на операции, на табелата ќе има точно

$$100p+100s-2pq=p(100-q)+q(100-p)$$

знаци $-$. Според тоа, задачата се сведува на прашањето: Дали постојат непарни броеви p и q така што $0\le p\le 100$, $0\le q\le 100$ и $p(1000-q)+q(100-p)=1986$? Последното равенство е еквивалентно со равенството

$$(50-p)(50-q)=1507=11\cdot 137 .$$

Бидејќи 11 и 137 се прости броеви, а $-50\le 50-p\le 50$ и $-50\le 50-q\le 50$, следува дека такви броеви p и q не постојат.

III година

1. Да се докаже дека равенката

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{p},\ p\in\mathbb{N}$$

има единствено решение во $\mathbb{N}$ ако и само ако p е прост број.

Решение. Ако парот (x,y) е решение на равенката, тогаш $\frac{1}{x}>\frac{1}{p}$, па $x<p$. Значи, за $p=1$ равенката нема решение во множеството природни броеви.

Нека $p>1$. Ако постои решение во $\mathbb{N}$, тогаш $x=p-k$ за некој природен број $0<k<p$ од што следува дека $\frac{1}{p-k}-\frac{1}{p}=\frac{1}{y}$, т.е. $y=\frac{p(p-k)}{k}$. За $k=1$ се добива едно решение: $x=p-1$, $y=p(p-1)$.

Нека p е прост број. Тогаш за секој $1<k<p$, НЗД$(p,k)=1$ и НЗД$(p-k,k)=1$. Според тоа $\frac{p(p-k)}{k}$ не е природен број, па единствено решение е: $x=p-1$, $y=p(p-1)$.

Обратно, ако p не е прост број, т.е. $p=m\cdot n$, $m\ne 1\ne n$, тогаш решение на равенката е и парот $x_1=p-m$, $y_1=n(p-m)$.

2. Да се реши равенката

$$(1+x)^8+(1+x^2)^4=2x^4 .$$

Решение. Бидејќи $x=0$ не е решение на равенката, таа е еквивалентна со равенката

$$\left(\frac{x^2+2x+1}{x}\right)^4+\left(\frac{x^2+1}{x}\right)^4-2=0 .$$

Со смената , $\frac{x^2+2x+1}{x}=p$, ја добиваме равенката

$$(p-1)^4+(p+1)^4-2=0\,,$$

чии решенија се $p_1=p_2=0$, $p_3=i\sqrt{6}$ и $p_4=-i\sqrt{6}$.

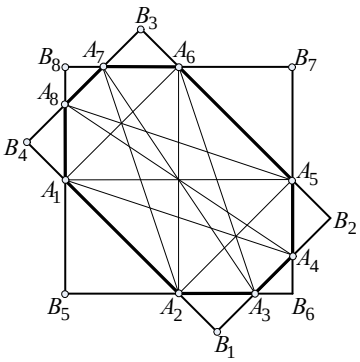
За $p_1=p_2=0$, се добива $x^2+x+1=0$, т.е. $x_1=x_2=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, $x_3=x_4=\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$.

За $p_3=i\sqrt{6}$ се добива равенката $x^2+(1-i\sqrt{6})x+1=0$, т.е.

$$x_{5/6}=\frac{-1+i\sqrt{6}\pm\sqrt{-9-2i\sqrt{6}}}{2}\,,$$

За $p_3=-i\sqrt{6}$, се добива равенката $x^2+(1+i\sqrt{6})x+1=0$, т.е.

$$x_{7/8}=\frac{-1-i\sqrt{6}\pm\sqrt{2i\sqrt{6}-9}}{2}\,.$$



3. Ако еден осумаголник има еднакви агли и должините на страните му се рационални броеви, тогаш тој осумаголник има центар на симетрија. Да се докаже.

Решение. Бидејќи збирот на аглите на осумаголникот е 1080° следува дека аглите на дадениот осумаголник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ се еднакви на 135°. Ако над секоја страна од осумаголникот доцртаме од надворешна страна рамнокрак правоаголен триаголник, ќе добиеме два правоаголници $B_1B_2B_3B_4$ и $B_5B_6B_7B_8$ (види цртеж). Со пресметување се добива дека

$$\overline{B_1B_4}=\overline{A_1A_2}+\frac{\sqrt{2}}{2}(\overline{A_1A_9}+\overline{A_2A_3}) \qquad \text{и} \qquad \overline{B_2B_3}=\overline{A_5A_6}+\frac{\sqrt{2}}{2}(\overline{A_4A_5}+\overline{A_6A_7})\,.$$

Од тоа што $\overline{B_1B_4}=\overline{B_2B_3}$; должините на страните на осумаголникот се рационални броеви; и $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ е ирационален број, следува дека $\overline{A_1A_2}=\overline{A_5A_6}$. Слично се покажува дека $\overline{A_2A_3}=\overline{A_6A_7}$, $\overline{A_3A_4}=\overline{A_7A_8}$ и $\overline{A_4A_5}=\overline{A_8A_1}$. Бидејќи $A_1A_2\parallel A_5A_6$, $A_2A_3\parallel A_6A_7$, $A_3A_4\parallel A_7A_8$ и $A_4A_5\parallel A_8A_1$ следува дека четириаголниците $A_1A_2A_5A_6$, $A_2A_3A_6A_7$, $A_3A_4A_7A_8$, $A_4A_5A_8A_1$ се паралелограми. Од тоа што: A_1A_5 е дијагонала на $A_1A_2A_5A_8$ и $A_1A_2A_5A_6$; A_2A_6 е дијагонала на $A_1A_2A_5A_6$ и $A_2A_3A_6A_7$; A_3A_7 е дијагонала на $A_2A_3A_6A_7$ и $A_3A_4A_7A_8$; и A_4A_8 е дијагонала на $A_3A_4A_7A_8$ и $A_1A_4A_5A_8$, следува дека горните четири паралелограми имаат ист центар на симетрија за осумаголникот

4. Членовите на едно племе живеат не повеќе од 79 години и само оние кои наполниле 20 години можат да создаваат потомство. Во племето има 1986 луѓе. Да се докаже дека постојат 497 членови на племето од кои никој не е потомок на друг.

Решение. Бидејќи $\dfrac{79}{20}<4$, следува дека секој член од тоа племе може да има најмногу три колена потомци. Членовите на племето можат да се разделат во четири дисјунктни класи. Во првата класа се сите членови кои немаат потомци. Во втората класа се сите членови кои имаат точно едно колено потомци. Во третата класа се сите членови кои имаат точно две

колена потомци. Во четвртата класа се останатите членови на племето, т.е. оние членови кои имаат точно три колена потомци. Во секој од тие класи ниеден член не е потомок на друг член од истата класа, затоа што во спротивно, тие двајца би имале различен број на колена на потомци. Бидејќи $4 \cdot 496 < 1986$, следува, според принципот на Дирихле, дека постои барем една класа во кој има барем 497 членови.

IV година

1. Да се докаже дека за секој природен број $k > 1$, збирот

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{k},$$

не е природен број.

Решение. Нека е најголемиот природен број за кој 2^n е делител на некој од броевите $2,3,4,\ldots,k$. Ако 2^n е делител на два од тие броеви, тогаш тие броеви се од облик $2^n p$ и $2^n q$ за p и q непарни броеви. Бидејќи меѓу секои два непарни природни броеви постои парен број, следува дека меѓу $2^n p$ и $2^n q$, па значи и помеѓу $2,3,4,\ldots,k$, постои природен број од облик $2^n r$ за r парен број. Според тоа 2^{n+1} е делител на некој од броевите $2,3,4,\ldots,k$. Значи, постои само еден број од броевите $2,3,4,\ldots,k$ кој е делив со 2^n. Нека m е тој број. Најмалиот заеднички содржател на броевите $2,3,4,\ldots,k$ е од облик $2^n s$, каде што s е непарен број. Нека $x_i = \frac{2^n s}{i}$, за $i = 2,3,4,\ldots,k$. Тогаш x_i е парен број за секој $i \neq m$ и x_m е непарен. Дадениот збир е

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{k}=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_k}{2^n s}=\frac{A}{B},$$

каде што A е непарен, а B е парен природен број. Според тоа, тој збир не е природен број.

2. Нека f е функција со својството

$$f(x+2)+f(x)=\sqrt{2}f(x+1).$$

Да се докаже дека f е периодична функција.

Решение. Од условот на задачата следува дека

$$f(x+2)+f(x)=\sqrt{2}f(x+1)=\sqrt{2}(\sqrt{2}f(x)-f(x-1))=2f(x)-\sqrt{2}f(x-1),$$

т.е.

$$f(x+2)=f(x)-\sqrt{2}f(x-1).$$

Според тоа,

$$f(x+4)=f(x+2)-\sqrt{2}f(x+1)=f(x)-\sqrt{2}[f(x+1)+f(x-1)]=-f(x).$$

Значи, за секој реален број x,

$$f(x+8)=-f(x+4)=f(x),$$

од штпо следува дека f е периодична функција.

3.Иста како задача 3 од трета година

4. Иста како задача 4 од трета година

XXX Републички натпревар 1987

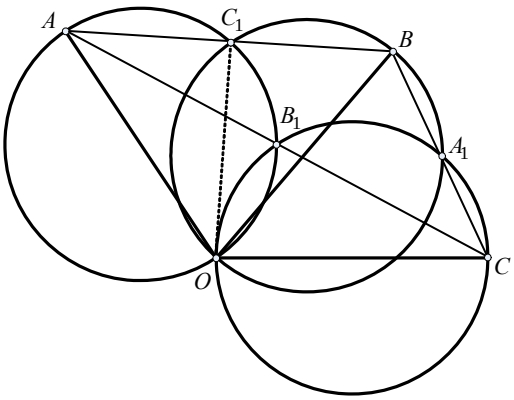
I година

1.Да се докаже дека при каков и да е избор на знаците "+" или "–" помеѓу броевите $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},...,\frac{1}{11},\frac{1}{12}$, добиената сума ќе биде различна од нула.

Решение. Добиената сума ќе ја запишеме во обликот: $\left(1\pm\frac{1}{2}\pm\frac{1}{3}\pm...\pm\frac{1}{12}\right)\pm\frac{1}{11}$. Еден заеднички именител за сите дропки во изразот е бројот $12!=1\cdot2\cdot3\cdot...\cdot12$. По сведувањето на дропките под овој заеднички именител и собирањето на дропките во заградата добиваме број $\frac{A}{12!}$, каде што A е број делив со 11(како сума на броеви деливи со 11). Сега сумата е еднаква со $\frac{A\pm12\cdot10!}{12!}$. Овој број е различен од нула, бидејќи бројот $12\cdot10!$ не е делив со 11, а збир или разлика на два броја од кои едниот е делив со 11, а другиот не е делив со 11 никогаш не е нула.

Забелешка: Наместо 11 во решението може да се користи и бројот 7.

2.Во рамнина се дадени три еднакви по должина отсечки OA,OB и OC при што точката B лежи во внатрешноста на помалиот агол AOC. Тие се дијаметри на три кружници кои освен во точката O се сечат и во точките A_1,B_1 и C_1. Докажи дека плоштината на криволинискиот трапез $A_1B_1C_1$ е половина од плоштината на триаголникот ABC.



Решение.Според ознаките од цртежот, триаголниците OAC_1 и OC_1B се складни бидејќи имаат една заедничка страна OC_1, $\overline{OA}=\overline{OB}$ и $\measuredangle OC_1B=\measuredangle AC_1O=90^\circ$. Значи, C_1 е средина на страната AB. Слично се покажува дека B_1 и A_1 се средини на AC и BC соодветно, т.е. C_1B_1 и B_1A_1 се средни линии на триаголникот ABC. Оттука, $\overline{A_1B}=\overline{B_1C_1}$, па плоштината на кружниот отсечок ограничен со лакот $\widehat{B_1C_1}$ и отсечката B_1C_1 е еднаква на плоштината на кружниот отсечок ограничен со A_1B и $\widehat{A_1B}$. Слично се добива и за плоштните на кружните отсечоци чии лаци се $\widehat{BC_1}$ и $\widehat{A_1B_1}$.

Значи плоштината на криволинискиот триаголник $A_1B_1C_1$ е иста со плоштината на паралелограмот $A_1B_1C_1B$ што е половина од плоштината на триаголникот ABC.

3. Да се определи најголемиот природен број помал од бројот

$$\sqrt{6+\sqrt{6+...+\sqrt{6}}}+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+...+\sqrt[3]{6}}}$$

знаејќи дека $\sqrt[3]{6}>1,6$.

Решение. Знаејќи дека $\sqrt{6}>2,4$ и $\sqrt[3]{6}>1,6$ добиваме

$$4<\sqrt{6}+\sqrt[3]{6}<\sqrt{6+\sqrt{6+...+\sqrt{6}}}+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+...+\sqrt[3]{6}}}\ .$$

Од друга страна

$$\sqrt{6+\sqrt{6+...+\sqrt{6}}}<\sqrt{6+\sqrt{6+...+\sqrt{6+3}}}=3$$

$$\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+...+\sqrt[3]{6}}}<\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+...+\sqrt[3]{6+2}}}=2\,,$$

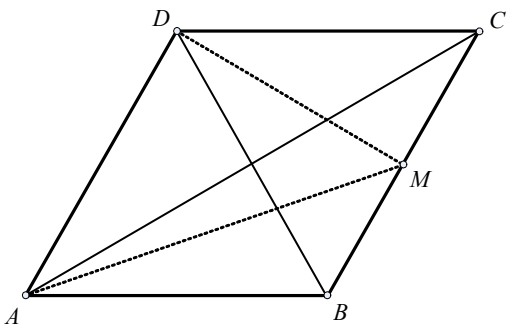
Односно

$$\sqrt{6+\sqrt{6+...+\sqrt{6}}}+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+...+\sqrt[3]{6}}}<3+2=5\,.$$

Значи, бараниот број е 4.

4.Даден е ромб $ABCD$. Пресечната точка на симетралите на аглите $\measuredangle BAC$ и $\measuredangle BDC$ лежи на една негова страна. Да се определат аглите на ромбот.

Решение.Пресекот на симетралите на аглите $\measuredangle BAC$ и $\measuredangle BDC$ го означуваме со M, при што M лежи на страната BC. Според теоремата за симетрали на внатрешни агли на триаголник, важат односите:



$$\overline{BM}:\overline{MC}=\overline{AB}:\overline{AC}$$

$$\overline{BM}:\overline{MC}=\overline{BD}:\overline{CD}\,.$$

Оттука се добива дека

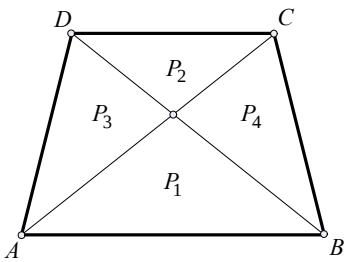
$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{CD}$, т.е. $\overline{AC}\cdot\overline{BD}=\overline{AB}\cdot\overline{CD}$.

Ако страната на ромбот ја означиме со a, а висината со h, тогаш последното равенство го добива обликот: $2ah=a^2$, т.е. $a=2h$, што значи дека аглите на ромбот изнесуваат 60° и 120°.

II година

1. Даден е трапез $ABCD$ со основи AB и CD. Дијагоналите на трапезот се сечат во точката T. Ако P_1 и P_2 се плоштините на триаголниците ABT и CDT, а P е плоштината на трапезот, да се докаже дека:

$$P=(\sqrt{P_1}+\sqrt{P_2})^2\,.$$



Решение. Да го означиме односот $\overline{AB}:\overline{CD}$ со k. Триаголниците TAC и TCD се слични, па за нивните висини h_1 и h_2 соодветно важи $k=h_1:h_2$. Оттука за плоштината P на трапезот добиваме

$$P=\frac{1}{2}h(\overline{AB}+\overline{CD})=\frac{1}{2}(k\cdot\overline{CD}+\overline{CD})(kh_1+h_1)$$

$$P=\frac{1}{2}(k+1)^2h_2\cdot\overline{CD}$$

$$P=(k+1)^2P_2\,. \qquad (1)$$

Триаголниците ABD и ABC имаат еднаква плоштина бидејќи имаат еднаква основа и висина. Оттука и триаголниците ABT и BCT имаат еднаква плоштина означена како P_3. Бидејќи

$$P_{ABC}=\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot h=P_1+P_3 \qquad (2)$$

$$P_{ACD}=\frac{1}{2}\overline{CD}\cdot h=P_2+P_3 \qquad (3)$$

добиваме

$$P_1 + P_3 = k(P_2 + P_3) \tag{4}$$

Ако во равенството

$$P = P_1 + P_2 + 2P_3 \tag{5}$$

се примени (4), се добива

$$P = (k+1)(P_2 + P_3) \tag{6}$$

Од (1) и (6) се добива $P_3 = kP_2$, и заменувајќи во (6) се добива дека $P_3 = \frac{1}{k}P_2$, па според тоа

$$P = P_1 + P_2 + 2\sqrt{k \cdot P_2 \cdot \frac{1}{k} \cdot P_1} = P_1 + P_2 + 2\sqrt{P_1 P_2} = (\sqrt{P_1} + \sqrt{P_2})^2 .$$

2. Ако $\frac{x}{y-z} + \frac{y}{z-x} + \frac{z}{x-y} = 0$, тогаш $\frac{x}{(y-z)^2} + \frac{y}{(z-x)^2} + \frac{z}{(x-y)^2} = 0$. Докажи!

Решение. Воведуваме ознаки

$$A = \frac{x}{y-z} + \frac{y}{z-x} + \frac{z}{x-y} \text{ и } \frac{x}{(y-z)^2} + \frac{y}{(z-x)^2} + \frac{z}{(x-y)^2} = 0 .$$

Ако A се помножи со изразот $C = \frac{1}{y-z} + \frac{1}{z-x} + \frac{1}{x-y}$, се добива

$$AC = B + \frac{x+y}{(z-x)(y-z)} + \frac{x+z}{(y-z)(x-y)} + \frac{y+z}{(z-x)(x-y)} =$$
$$= B + \frac{(x+y)(x-y) + (z-x)(x+z) + (y-z)(y+z)}{(x-y)(y-z)(z-x)} = B$$

Според тоа, ако $A = 0$, тогаш и $B = 0$.

3. Не постои полином $P(x)$ со целобројни коефициенти таков што $P(7) = 11$ и $P(11) = 13$. Докажи!

Решение. Нека претпоставиме дека полиномот $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_\circ$ ги испонува условите од задачата. Ако ставиме $x = 7$ и $x = 11$ соодветно, од условите на задачата се добива

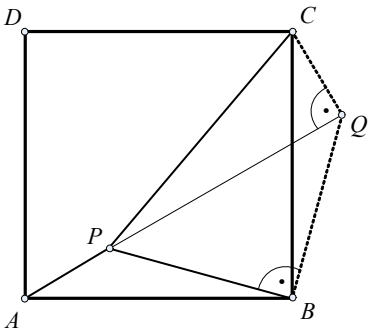
$$11 = a_n 11^n + a_{n-1}11^{n-1} + ... + a_1 \cdot 11 + a_\circ$$

$$13 = a_n 13^n + a_{n-1}13^{n-1} + ... + a_1 \cdot 13 + a_\circ .$$

Ако од второто равенство го извадиме првото равенство, се добива

$$2 = a_n(13^n - 7^n) + a_{n-1}(13^{n-1} - 7^{n-1}) + ... + a_1 \cdot (13 - 7) .$$

Бидејќи за секој $n \geq 1$, $11^n - 7^n$ се дели со 4, изразот од десната страна на последното равенство е делив со 4. Бидејќи изразот од левата страна на истото равенство не е делив со 4 добиваме противречност.



4. Даден е квадрат $ABCD$ и точка P во внатрешноста на квадратот така што $\overline{AP} : \overline{BP} : \overline{CP} = 1:2:3$. Да се пресмета аголот $\measuredangle APB$!

Решение. Триаголникот ABP го ротираме околу темето B се додека темето B не се совпадне со темето C. Со Q да ја означиме новата положбан а темето P по ротацијата. Бидејќи $\measuredangle QBC = \measuredangle PBA$ следува дека $\measuredangle QPB = 90^\circ$. Заради ова, бидејќи $\overline{BP} = \overline{BQ}$ имаме

$\measuredangle PQB = 45^\circ$ и $\overline{PQ}^2 = 2\overline{BP}^2$.

Од условот на задачата имаме $\overline{BP} = 2\overline{AP}$, $\overline{CP} = 3\overline{AP}$ па оттука и од претходното равенство добиваме:

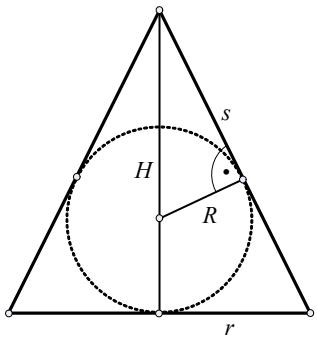
$$\overline{PQ}^2 + \overline{CQ}^2 = 8\overline{AP}^2 + \overline{AP}^2 = \overline{CP}^2 .$$

Бидејќи за триаголникот CQP важи теоремата на Питагора, $\measuredangle CQP = 90^\circ$. Конечно

$$\measuredangle APB = \measuredangle CQB = \measuredangle PQB + \measuredangle CQP = 45^\circ + 90^\circ = 135^\circ .$$

III година

1. Да се најде односот $k = \dfrac{M}{B}$, каде M е плоштината на обвивката на конусот, а B плоштината на неговиот базис, ако се знае дека волуменот на конусот е двапати поголем од волуменот на впишаната топка во него.



Решение. Нека H, s и r се соодветно висината, генератрисата и радиусот на базаисот на конусот и нека R е радиусот на впишаната топка. Од сличноста на триаголниците на цртежот, имаме:

$$\frac{r}{s} = \frac{R}{H - R} .$$

Оттука, бидејќи $H = \sqrt{s^2 - r^2}$ добиваме $R = r\sqrt{\dfrac{s-r}{s+r}}$.

Сега, ако со V_k и V_t ги означиме соодветно волуменот на конусот и топката, имаме:

$$\frac{V_k}{V_t} = \frac{\dfrac{\pi r^2 H}{3}}{\dfrac{4\pi r^3}{3}} = \frac{r^2\sqrt{s^2 - r^2}}{4r^3\dfrac{s-r}{s+r}\sqrt{\dfrac{s-r}{s+r}}} = \frac{(s+r)^2}{4r(s-r)} .$$

Од условот на задачата $\dfrac{V_k}{V_t} = 2$, па од првиот и последниот член на горното равенство, добиваме: $8r(s-r) = (s+r)^2$, $9r^2 - 6rs + s^2 = 0$, $(3r - s)^2 = 0$.

Оттука $s = 3r$, па $K = \dfrac{M}{B} = \dfrac{\pi rs}{\pi r^2} = \dfrac{s}{r} = 3$.

2. Да се покаже дека не постои полином со целобројни коефициенти таков што $P(a) = b$, $P(b) = c$, $P(c) = a$, каде a, b и c се три различни цели броеви.

Решение. Нека $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_\circ$. Воочуваме дека

$$\frac{P(a) - P(b)}{a - b} = \frac{a_n(a^n - b^n) + a_{n-1}(a^{n-1} - b^{n-1}) + ... + a_1(a - b)}{a - b} ,$$

и ова е цел број бидејќи коефициентите a_k се цели броеви и $a^k - b^k$ е деливо со $a - b$ ($k = 1, 2, 3, ..., n$). Од исти причини и $\dfrac{P(b) - P(c)}{b - c}$ и $\dfrac{P(c) - P(a)}{c - a}$ се цели броеви.

Да претпоставиме дека за гормиот полином P важи $P(a) = b, P(b) = c$ и $P(c) = a$, каде a, b и c се различни цели броеви. Заради претходната дискусија имаме дека

$$\frac{b-c}{a-b}, \ \frac{c-a}{b-c} \text{ и } \frac{a-b}{c-a}$$

се цели. Но бидејќи нивниот производ е еднаков на 1, секојод нив е еднаков на 1 или -1. Ако првиот број е еднаков на -1 добиваме $a=c$ што противречи на претпоставката. Од исти причини и останатите два броја не можат да бидат еднакви на -1. Затоа сите три броја се днакви на 1. Од овде добиваме

$$b-c=a-b$$
$$c-a=b-c\ .$$
$$a-b=c-a$$

Со одземање на второто равенство од првото се добива $b=c$, а ова противречи на претпоставката. Значи, не постои полином со бараните особини.

3. Нека $\mathbb{R}$ е множеството реални броеви, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ функција за која се исполнети следниве два услови:

а) за било кои 2 реални броја x и y $f(x+y)=f(x)f(y)$

б) постои единствен реален број $x_\circ$ таков што $f(x_\circ)=1987$.

Да се докаже: ако за два реални броја x и y важи $f(x)=f(y)$, тогаш мора $x=y$ (т.е. функцијата е инјективна).

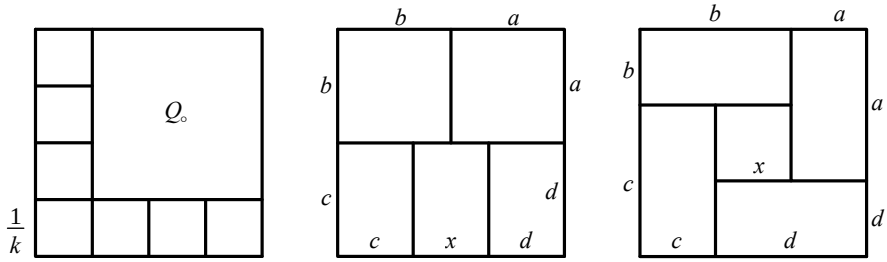
Решение.Според првиот услов на задачата, имаме $f(x_\circ)=f(x_\circ+0)=f(x_\circ)+f(0)$, Од каде следува $f(0)=1$. Оттука $1=f(x+(-x))=f(x)f(-x)$, од каде следува дека за секој x, $f(x)\neq 0$ и $f(-x)=\dfrac{1}{f(x)}$. Сега, нека $f(x)=f(y)$, односно $\dfrac{f(x)}{f(y)}=1$. Од овде и заради претходниот заклучок добиваме $f(x)f(-y)=1$, $f(x-y)=1$, $f(x_\circ)f(x-y)=1987$, $f(x_\circ+x-y)=1987$.
Бидејќи постои единствен број $x_\circ$ така што $f(x_\circ)=1987$, добиваме $x_\circ+x-y=x_\circ$, односно $x=y$.

4. Да се докаже дека секое множество од шест различни едноцифрени броеви содржи две подмножества без заеднички елементи, такви што збирот на елементите на првото подмножество е еднаков на збирот на елементите од второто подмножество.

Решение.Бројот на непразни подмножества на множество од шест елементи е $2^6-1=63$ и ниедна од сумите на елементите вон ив не е поголема од $6\cdot 9=54$, што значи дека со 63 различни подмножества можеме да формираме најмногу 54 различни збира. Според тоа, барем две подмножества ќе имаат еднаков збир на елементите. Ако тие подмножетва не се дисјунктни, тогаш од нив ќе ги извадиме заедничките елементи.

IV година

1. Да се докаже дека за секој природен број n, $n\geq 6$, квадрат може да се рздели на n помали квадрати (така што плоштината на квадратот е збир од



плоштините на помалите квадрати), но не може да се раздели на 5 помали квадрати.

Решение. Можеме да претпоставиме дека квадратот Q има страница 1. Ако $k \geq 2$, тогаш лентите со ширина $\frac{1}{k}$ до 2 соседни страни на квадратот можеме да ги поделиме на $2k-1$ квадрати со страна $\frac{1}{k}$, како на цртежот. Остатокот од површината на Q е пак квадрат (означен на цртежот со $Q_\circ$). Со ова покажавме дека квадратот може да се подели на $2k$ ($k \geq 2$) квадрати.

Ако пак квадратот $Q_\circ$ го поделиме на 4 еднакви квадрати, тогаш тие заедно со квадратите со страна $\frac{1}{k}$ ќе дадат поделба на квадратот Q на $2k+3$ квадрати ($k \geq 2$). Со ова покажавме дека Q може да се подели и на произволен непарен број (≥ 7) квадрати.

Сега да претпоставиме дека квадратот Q може да се подели на 5 помали квадрати. Јасно е дека овие квадрати мора да имаат страна паралелна со страните на квадратот. Можни се следниве два случаи:

1) Ниеден од квадратите да не биде целосно во внатрешноста на Q како што е прикажано на цртежот. Ова не е возможно бидејќи $a+b=b+c=d+a=c+d+x$, повлекува дека страната на средниот квадрат е $x=0$.

2) Некој од квадратите (а возможно е само еден) да биде исцело во внатрешноста на квадратот Q (како на цртежот) што повторно не е можно бидејќи

$$a+b=b+c=c+d=d+a$$

повлекува дека $a=c$ и $b=d$, па понатаму бидејќи плоштината на квадратот Q е еднаква на збирот од плоштините на помалите квадраати имаме $(a+b)^2=a^2+b^2+a^2+b^2+x^2$, т.е. $x^2=-(a-b)^2$, од каде $x=0$.

2.Неколку луѓе треба да ископаат еден канал. Ако започнат со работа истовремено, тогаш ќе го ископаат каналот за 24 часа. Меѓутоа тие на работа доаѓале еден по друг во еднакви временски интервали, а потоа секој работел до завршувањето на работата. Колку време работел работникот кој прв дошол на работа ако тој работел 5 пати подолго од работникот кој последен дошол на работа?

Решение.Со z да го означиме бројот на сите работници, x бројот на часови што ги поминал на работа работникот што последен дошол на работа и со y бројот на часовите на временскиот интервал на доаѓање на двата работника кои еден по друг дошле на работа. Тогаш за копање на каналот се потрошени вкупно $x+(x+y)+(x+2y)+...+(x+(z-1)y)$ работни часа, што по услов на задачата се еднакви на $24z$, т.е.

$$x+(x+y)+(x+2y)+...+[x+(z-1)y]=24z$$

Со оглед на тоа дека сумата на низа од првите $z-1$ природни броја е $\frac{(z-1)z}{2}$ се добива $xz+\frac{yz(z-1)}{2}=24z$, т.е.

$$2x+y(z-1)=48. \qquad (1)$$

Знаејќи дека првиот работник поминал на работа пет пати подолго време од последниот, мора да важи и равенството

$$x+y(z-1)=5x. \qquad (2)$$

Од (1) и (2) се добива дека $6x=48$, т.е. $x=8$.

Според тоа, првиот работник работел 40 часа.

3.Иста како задача 3 од трета година

4. Иста како задача 4 од трета година

XXXI Републички натпревар 1988

I година

1. Нека A и B се два природни броја кои имаат исти цифри. Ако $A+B=10^{10}$, да се докаже дека A е делив со 10.

Решение. Бидејќи 10^{10} е најмалиот природен број со 11 цифри, следува дека A и B се десетцифрени броеви. Нека $A=\overline{a_{10}a_9...a_2a_1}$ и $B=\overline{b_{10}b_9...b_2b_1}$. Од $A+B=10^{10}$, следува дека постои некој $i\in\{1,2,3,...,10\}$, така што: $a_1+b_1=0$, $a_2+b_2=0$,…, $a_{i-1}+b_{i-1}=0$, $a_i+b_i=10$, $a_{i+1}+b_{i+1}=9$,…, $a_{10}+b_{10}=9$. Бидејќи цифрите на A и B се еднакви, сумирајќи ги горните равенства, добиваме:

$$2(a_1+a_2+...+a_9+a_{10})=10+(10-i)9,$$

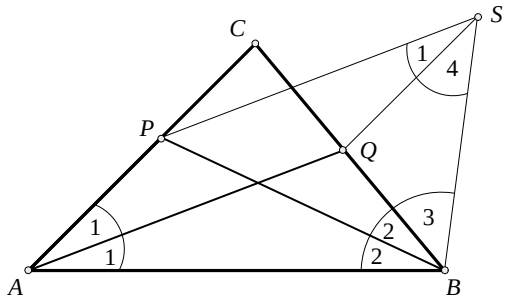
при што искористивме дека $a_1+a_2+...+a_9+a_{10}=b_1+b_2+...+b_9+b_{10}$. Од тоа што $2(a_1+a_2+...+a_9+a_{10})$ следува дека и $10-i$ е парен, т.е. $i\neq 1$. Значи $a_1+b_1=0$, од каде што следува дека $a_1=b_1=0$. Според тоа A (а исто така и B) е делив со 10.

2. Даден е триаголник ABC и во него произволна точка M. Нека правите MA, MB, MC ги сечат страните BC, AC и AB соодветно, во точките P, Q, R. Да се докаже дека меѓу односите $\overline{AM}:\overline{MP}$, $\overline{BM}:\overline{MQ}$ и $\overline{CM}:\overline{MR}$ има барем еден не поголем од 2 и барем еден не помал од 2.

Решение. Нека T е тежиштето на триаголникот ΔABC и нека U,V,W се соодветно средините на страните BC, CA и AB. Ако $M\equiv T$, тогаш $P\equiv U$, $Q\equiv V$, $R\equiv W$, па $\overline{AM}:\overline{MP}=\overline{AT}:\overline{TU}=2:1=2$.

Нека $M\neq T$. Да ги разделиме страните CA и AB во однос $2:1$ со точките N и L соодветно(види цртеж). Тогаш $TN\parallel AB$ и $TL\parallel BC$. Правата CR ја сече TN во точката D (види цртеж) што се наоѓа помеѓу C и M, од каде што следува дека $\overline{CM}:\overline{MR}\geq\overline{CD}:\overline{DR}=2:1=2$. Аналогно, AP ја сече TL во точката E (види цртеж), која е меѓу M и P, па според тоа $\overline{AM}:\overline{MP}\leq\overline{AE}:\overline{EP}=2:1=2$.

3. Да се докаже дека ако должините на симетралите на два внатрешни агли на триаголник се еднакви, тогаш триаголникот е рамнокрак.



Решение. Нека AP е симетралата на аголот кај темето A, а BQ симетралата на аголот кај темето B (види цртеж). Според условот на задачата $\overline{AP}=\overline{BQ}$. Треба да се докаже дека $\measuredangle CAB=\measuredangle ABC$. Да претпоставиме дека важи спротивното, т.е. дека $\measuredangle CAB\neq\measuredangle ABC$. Без губење на општост, можеме да претпоставиме дека $\measuredangle CAB<\measuredangle ABC$. Тогаш $\measuredangle 1<\measuredangle 2$ (види цртеж). Триаголниците ABQ и BAP имаат по две еднакви страни, $\overline{AB}=\overline{BA}$, $\overline{BQ}=\overline{AP}$, па од $\measuredangle 1<\measuredangle 2$ следува дека $\overline{AQ}>\overline{BP}$. Нека S е точка, таква што $APSB$ е паралелограм (види цртеж). Тогаш од $\overline{BP}<\overline{AQ}=\overline{PS}$, следува дека $\measuredangle 3>\measuredangle 4$ (види цртеж), па, $\measuredangle QBS=\measuredangle 2+\measuredangle 3>\measuredangle 1+\measuredangle 4=\measuredangle BSQ$. Оттука се добива дека $\overline{AP}=\overline{QS}>\overline{BQ}$, што е спротивно со условот $\overline{AP}=\overline{BQ}$.

4. Да се докаже дека природен број z не може да се запише на два различни начини во вид $z = x! + y!$, каде што x и y се природни броеви кои го задоволуваат условот $x \le y$. ($x! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (x-1) \cdot x$.)

Решение. Нека x_1, y_1, x_2, y_2 се природни броеви за кои $x_1 \le y_1$, $x_2 \le y_2$ и $z = x_1! + y_1! = x_2! + y_2!$ и нека $x_1 < x_2$. Ако $y_1 < x_2$, тогаш би имале

$$z = x_1! + y_1! < x_2! + x_2! \le x_2! + y_2! = z,$$

т.е. $z < z$ што не е можно. Значи, $y_1 \ge x_2$. Тогаш $x_2 \le y_1$ и $x_2 \le y_2$, па според тоа $x_2! + y_2! - y_1!$ е делив со $x_2!$. Бидејќи $x_2! + y_2! - y_1! = x_1!$, следува дека $x_1!$ е делив со $x_2!$, што значи дека $x_1 \ge x_2$, што противречи на претпоставката $x_1 < x_2$. Симетрично, претпоставката $x_2 < x_1$ воид до противречност. Значи, $x_1 = x_2$, а од $x_1! + y_1! = x_2! + y_2!$ следува дека и $y_1 = y_2$.

II година

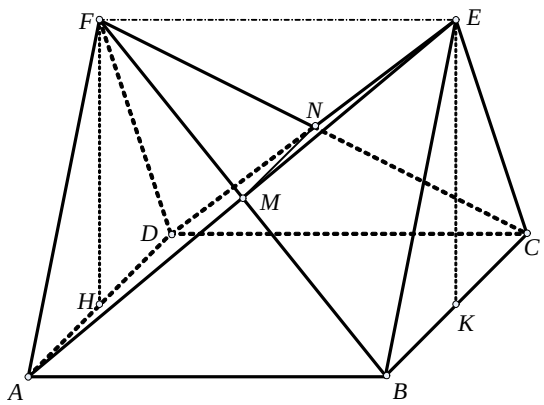
1.Да се реши равенката $\sqrt[3]{2-x} + \sqrt{1-x} = 1$.

Решение.Воведувајќи смени $y = \sqrt[3]{2-x}$ и $z = \sqrt{x-1}$, го добиваме системот равенки $y^3 + x = 2$, $z^2 + 1 = x$, $y + z = 1$. Од првата и втората равенка, со елиминација на x, добиваме $y^3 + z^2 = 1$. ЗаменувајќИ $z = 1 - y$, добиваме $y^3 + y^2 - 2y + 1 = 1$, т.е $y(y^2 + y - 2) = 0$. Решенија на $y^3 + y^2 - 2y = 0$ се $y_1 = 0$ и $y_{2/3} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$, т.е. $y_1 = 0$, $y_2 = 1$, $y_3 = -2$. Од $x = 2 - y^3$, се добиваат бараните решенија $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 10$.

2. Да се покаже дека постојат само конечно многу подредени тројки $(x-y, y-z, z-x)$ од комплексни броеви кои ги задоволуваат равенствата

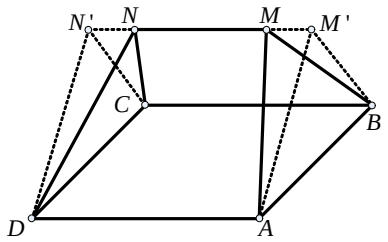
$$x(x-1) + 2yz = y(y-1) + 2xz = z(z-1) + 2xy.$$

Решение. Нека $a = x - y$, $b = y - z$, $c = z - x$. Тогаш $x = a + y$, $z = y - b$, $c = -(a-b)$, па равенствата од задачата се трансформираат во: $a^2 - a = -2ab = b^2 + b$. Ако $a \ne 0$, тогаш $b = \frac{1-a}{2}$, па со решавање на равенката $a^2 - a = \left(\frac{1-a}{2}\right)^2 + \frac{1-a}{2}$, се добива $a = 1$ или $a = -1$, од каде што ги добиваме тројките $(1,0,-1)$ и $(-1,1,0)$. Ако $a = 0$, тогаш од $b^2 + b = 0$, се добива $b = 0$ или $b = -1$, со што ги добиваме тројките $(0,0,0)$ и $(0,-1,1)$.



3. Две пирамиди имаат заедничка основа-квадрат со страна a. Пирамидите се на иста страна од рамнината на квадратот. Висините на двете пирамиди минуваат низ средините на две спротивни страни на квадратот и се еднакви на b. Да се најде волуменот на заедничкиот дел на двете пирамиди.

Решение.Нека $ABCDF$ и $ABCDE$ се дадените пирамиди(види цртеж). Заедничкиот дел се добива кога од правата призма $ABCDN'M'$ (види ги цртежите) се извадат двете пирамиди $CDN'N$ и $ABM'M$.



Од правоаголникот $ABEF$ (види цртеж) следува дека M е средна точка на AE. Слично, N е средна точка на CF. Според тоа $\overline{AB}=a$, и висината на $\Delta ABM'$, спуштена од M' е $\frac{b}{2}$. Од друга страна, бидејќи MN е средна линија во триаголникот ADE, следува дека $\overline{MN}=\frac{a}{2}$. Според тоа: $\overline{MM'}=\overline{NN'}=\frac{a}{4}$, и:

$$V_{ABCDMN}=V_{ABCDM'N'}-2V_{CDNN'}=\frac{1}{2}\cdot a\cdot\frac{b}{2}\cdot a-2\cdot\frac{1}{3}\cdot a\cdot\frac{b}{2}\cdot\frac{a}{4}=\frac{a^2b}{4}-\frac{a^2b}{24}=\frac{5}{24}a^2b\,.$$

4. Да се најдат најголемата и најмалата вредност на функцијата $f(x)=x^2-2x-1$, за оние реални броеви x кои го задоволуваат условот $x^4+36\le 13x^2$. Одговорот да се образложи.

Решение. Најпрво ги наоѓаме сите x за кои важи неравенството $x^4-13x^2+36\le 0$. Решенија на биквадратната равенка $x^4-13x^2+36=0$ се: $-3,-2,2,3$. Неравенството е точно за $x\in[-3,-2]$ и $x\in[2,3]$.

Параболата $f(x)=x^2-2x-1$ има минимум во точката $x=1$. Значи, таа опаѓа на интервалот $[-3,-2]$, па $14=f(-3)\ge f(x)\ge f(-2)=7$ за $x\in[-3,-2]$, а расте на интервалот $[2,3]$, па $-1=f(2)\le f(x)\le f(3)=2$ за $x\in[2,3]$.

Според тоа, најмала вредност на $f(x)$ за оние x за кои важи $x^4+36\le 13x^2$, е -1, а најголема вредност е 14.

III година

1. Во секое поле на 103×103 таблица се впишани реални броеви кои што по апсолутна вредност не се поголеми од 1. Во произволен 2×2 квадрат од таа таблица збирот на броевите е еднаков на нула. Да се докаже дека збирот на сите броеви од таблицата не е поголем од 103.

Решение. Да ја разделиме таблицата на 52 области: првата е полето од левиот горен агол, втората е 3×3 квадратот во левиот горен агол без полето во аголот. Третата е 5×5 квадратот без првите две области итн.(види го цртежот за 8×8 квадрат). Во секоја од 51-та област почнувајќи од втората, збирот не е поголем од 2, бидејќи: ако во секоја област формираме 2×2 квадрати(на цртежот тоа е прикажано за четвртата област), едно поле од областа, да го означиме со a ќе се јави во два квадрати, а друго поле, да го означиме со b, нема да се јави во ниеден квадрат. Бидејќи збирот на броевит во секој 2×2 квадрат е еднаков на 0, збирот на броевите од секоја област ќе биде $b-a\le 2$. Така збирот на броевите во таблицата не е поголем од $1+51\cdot 2=103$.

2. Основата на дадена пирамида е рамностран триаголник со страна a а бочните рабови имаат должина b. Конструирана е сфера што ги допира сите (продолжени) рабови на пирамидата. Да се најде нејзиниот радиус.

Решение. Нека T е тежиштето на основата ABC со страна a. Нека бараната сфера има радиус R и нека нејзиниот центар O се наоѓа на растојание x од T (види цртеж). Ако H е висината на тетраедарот, тогаш

$$H=\sqrt{b^2-\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2}=\sqrt{b^2-\frac{a^2}{3}}\ .$$

Од сличноста на $\Delta DTC \sim \Delta DSO$ (види цртеж), добиваме

$$\frac{\frac{a}{\sqrt{3}}}{b}=\frac{R}{H-x}\text{, т.е. }\frac{a}{\sqrt{3}\,b}=\frac{R}{\sqrt{b^2-\frac{a^2}{3}}-x}\ ,$$

од каде што добиваме $x=\sqrt{b^2-\frac{a^2}{3}}-\frac{Rb\sqrt{3}}{a}$. Потоа, од правоаголниот триаголник PTO, (види цртеж) добиваме, $R^2=x^2+\left(\frac{a}{2\sqrt{3}}\right)^2=\left(\sqrt{b^2-\frac{a^2}{3}}-\frac{Rb\sqrt{3}}{a}\right)^2+\frac{a^2}{12}$. РешавајќИ ја ова квадратна равенка по R, добиваме

$$R=\frac{(2b\pm a)a}{2\sqrt{3b^2-a^2}}\ .$$

(Забелешка. Кога $R=\frac{(2b-a)a}{2\sqrt{3b^2-a^2}}$, центарот O на сферата е во внатрешноста на пирамидата, а во другиот случај во надворешноста на пирамидата).

3. Ако

$$\frac{\cos x}{a}=\frac{\cos(x+\phi)}{b}=\frac{\cos(x+2\phi)}{c}=\frac{\cos(x+3\phi)}{d}\ , \qquad (1)$$

да се докаже дека

$$\frac{a+c}{b}=\frac{b+d}{c}\ . \qquad (2)$$

Решение.Тргнувајќи од првиот и третиот однос на продолжената пропорција (1), имаме

$$\frac{\cos x+\cos(x+2\phi)}{a+c}=\frac{\cos(x+\phi)}{b}$$

од каде

$$\frac{a+c}{b}=\frac{\cos x+\cos(x+2\phi)}{\cos(x+\phi)}\ ,$$

односно, согласно тригонометрискиот идентитет

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\ ,$$

$$\frac{a+c}{b}=2\cos\phi\ . \qquad (3)$$

На сличен начин, од вториот и четвртиот однос на пропрцијата (1) се добива

$$\frac{b+d}{c}=2\cos\phi\ . \qquad (4)$$

Од точноста на (3) и (4) следува точноста на равенството (2).

4. Да се докаже дека од произволни четири реални броја секогаш може да се одберат два два броја x и y такви што

$$0\le\frac{x-y}{1+xy}\le 1\ .$$

Решение. Нека произволните четири броја се a,b,c,d подредени по големина. Тогаш постојат агли $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ така што $\mathrm{tg}\alpha = a$, $\mathrm{tg}\beta = b$, $\mathrm{tg}\gamma = c$, $\mathrm{tg}\delta = d$. Аглите $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ можеме да ги одбереме така што:

$$-\frac{\pi}{2} < \alpha \le \beta \le \gamma \le \delta < \frac{\pi}{2} < \alpha + \pi .$$

Значи, β,γ,δ ја разделуваат отсечката $[\alpha,\alpha+\pi]$ мна четири дела, од кои што барем еден не е поголем од $\frac{\pi}{4}$. Нека тоа е на пример интервалот $[\alpha,\beta]$. Бидејќи $0 \le \beta - \alpha \le \frac{\pi}{4}$ имаме дека и $0 \le \mathrm{tg}(\beta-\alpha) \le 1$, т.е.

$$0 \le \frac{\mathrm{tg}\beta - \mathrm{tg}\alpha}{1+\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta} \le 1 .$$

Ако ставиме $x = \mathrm{tg}\beta$ и $y = \mathrm{tg}\beta$ имаме $0 \le \frac{x-y}{1+xy} \le 1$ што требаше да се докаже.

За $\alpha + \pi - \delta \le \frac{\pi}{4}$, дискусијата е иста бидејќи

$$\mathrm{tg}(\alpha+\pi-\delta) = \mathrm{tg}(\alpha-\delta) .$$

IV година

1. Да се докаже дека за секој природен број n важи

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{3n+1} > 1 .$$

Решение. Нека $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{3n+1}$. Тогаш $a_{n+1} = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{3n+4}$, па

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{3n+2} + \frac{1}{3n+3} + \frac{1}{3n+4} - \frac{1}{n+1} = \frac{2}{(3n+2)(3n+3)(3n+4)} > 0 .$$

Значи, низата a_n е растечка. Освен тоа $a_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1$, па значи $a_n > 1$ за секој природен број.

2. Во текот на три месеци еден шахист играл најмалку една партија дневно, но притоа играл најмногу дванаесет партии неделно. Да се покаже дека можат да се најдат последователни денови во кои шахистот изиграл точно дваесет И една пратија.

Решение. Да претпоставиме дека првиот ден шахистот одиграл a_1 партии, заклучно со вториот ден одиграл a_2 партии, заклучно со третиот ден одиграл a_3 партии, итн заклучно со 77 ден одиграл a_{77} партии. Да ја разгледаме низата броеви

$$a_1, a_2, \ldots, a_{77}, a_1+21, a_2+21, \ldots, a_{77}+21 .$$

Во ова низа имаме $2 \cdot 77 = 154$ елементи, секој од нив е поголем од $11 \cdot 12 + 21 = 153$ (бројот a_{77} не е поголем од $11 \cdot 12 = 132$, бидејќи во 77 дена има точно 11 недели во секоја од кои шахистот играл најмногу по 12 партии). Според тоа, барем два од овие 154 броеви се еднакви меѓу себе. Но, помеѓу броевите $a_1, a_2, \ldots, a_{77}$ нема еднакви броеви(шахистот играл најмалку една партија дневно), што значи дека и помеѓу броевите $a_1+21, a_2+21, \ldots, a_{77}+21$ нема еднакви броеви. Според тоа, постојат броеви k и l за кои е исполнето $a_k = a_l + 21$, односно $a_k - a_l = 21$, т.е. од $(l+1)$-от до k-от ден шахистот изиграл точно 21 партија.

3.Иста како задача 3 од трета година

4. Иста како задача 4 од трета година

XXXII Републички натпревар 1989

I година

1. Ако $a,b,c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c},$$

тогаш меѓу нив постојат два броја чиј збир е еднаков на нула.

Решение. Даденото равенство можеме да го запишеме во обликот

$$(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc=0.$$

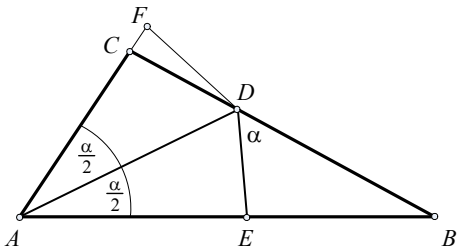
За левата страна L на ова равенство имаме

$$\begin{aligned}L &= a^2b+abc+ca^2+ab^2+b^2c+abc+abc+bc^2+c^2a-abc=\\ &=(a^2b+a^2c)+(ab^2+abc)+(abc+ac^2)+(b^2c+bc^2)=\\ &=a^2(b+c)+ab(b+c)+ac(b+c)+bc(b+c)=(b+c)(a^2+ab+ac+bc)=\\ &=(b+c)[a(a+b)+c(a+b)]=(a+b)(b+c)(c+a).\end{aligned}$$

2. Да се пресмета збирот на сите четирицифрени броеви во кои цифрата 0 не се јавува и сите цифри се различни.

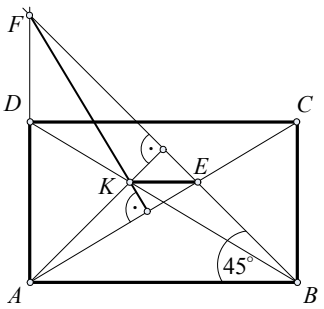
Решение. Бројот на сите такви броеви е $9\cdot 8\cdot 7\cdot 6=3024$. На секој број $\overline{abcd}$ му го придружуваме бројот $\overline{(10-a)(10-b)(10-c)(10-d)}$. Збирот на овие два броја е 11110, па збирот на сите броеви е

$$\frac{3024}{2}\cdot 11110=16789320.$$



3. Во триаголникот ABC симетралата на аголот во темето A ја сече страната BC во точката D. Нека E е точка од правата AB така што $\measuredangle BDE=\measuredangle BAC$. Да се докаже дека $\overline{DC}=\overline{DE}$.

Решение. Нека F е точка на страната AC, така што $\overline{AF}=\overline{AE}$ (види цртеж). Тогаш $\overline{FD}=\overline{DE}$. Бидејќи $\measuredangle BDE=\alpha$, следува дека $\measuredangle BED=\alpha=\measuredangle BCA$. Од друга страна имаме $\measuredangle CFD=\measuredangle BED$, па, значи, $\measuredangle FCD=\measuredangle BCA=\measuredangle BED=\measuredangle CFD$, т.е. триаголникот FCD е рамнокрак со основа FC. Следствено $\overline{CD}=\overline{FD}=\overline{DE}$.



4. Во правоаголникот $ABCD$, симетралата на аголот кај темето B ги сече правите AC и AD во точки E и F соодветно. Низ E е конструирана права паралелна со AB, која ја сече дијагоналата BD во точка K. Да се докаже дека $FK\perp AC$.

Решение. Според признакот ССС, следува дека $\Delta BEK\cong\Delta AKE$, па, значи, $\measuredangle BAK=45^\circ$ (види цртеж), т.е. правата AK е нормална на правата EF. Бидејќи и правата EK е нормална на правата AF, следува дека точката K е

ортоцентар на триаголникот AEF, т.е. $FK \perp AE$.

II година

1. Еден трговец имал 4 тегови со целобројни тежини. Со нив може да се измери било која тежина од $1\,kg$ до $40\,kg$. Кои се тежините на теговите, ако сите се различни и збирот им е 40?

Решение. Имаме

$$40 = 1 + 3 + 9 + 27 = 3^{\circ} + 3^{1} + 3^{2} + 3^{3},$$

па $40 = 1111_3$ (во систем со основа 3). Секој број од 1 до 40 може да го претставиме во сстем со основа 3 користејќи ги $0,1$ и 2 како цифри. Бидејќи $2 = -1$, следува дека секој број може да се претстави како број со цифри 1 и 0 или како разлика на броеви со цифри 1 и 0. Јасно е дека бројот на цифрите на секој број помал од 40 е најмногу 4.

Следствено, тежините на теговите биле: 1 кг, 3 кг, 9 кг и 27 кг.

2. Да се најде најмалата вредност на изразот $\dfrac{1+x^2}{1+x}$, за $x \geq 0$.

Решение. Ако $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x+1} = \dfrac{x^2-1+2}{x+1} = (x-1) + \dfrac{2}{x+1} = \left[(x+1) + \dfrac{2}{x+1}\right] - 2$. Користејќи го неравенството $a + b \geq 2\sqrt{ab}$, добиваме

$$f(x) \geq 2\sqrt{(x+1)\frac{2}{\sqrt{x+1}}} - 2 = 2\sqrt{2} - 2,$$

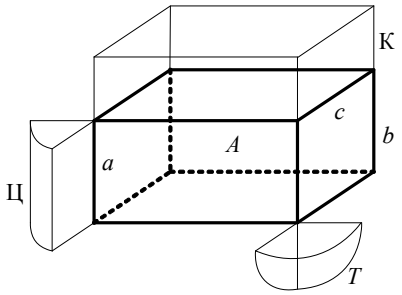
т.е. најмала вредност за изразот $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x+1}$ е $2(\sqrt{2}-1)$ и таа се добива за $x = \sqrt{2} - 1$.

3. За кои вредности на a, за произволно b постои барем едно c, така што системот $\begin{cases} 2x + by = ac^2 + c \\ bx + 2y = c - 1 \end{cases}$ да има барем едно решение?

Решение. Имаме:

$$\Delta = 4 - b^2 \qquad \text{и} \qquad \Delta_x = 2ac^2 + 2c - bc + b.$$

Ако $\Delta \neq 0$, т.е. $b \neq \pm 2$, тогаш системот има единствено решение за кои било a и c.



Ако $\Delta = 0$, тогаш за системот да има решение треба да биде и $\Delta_x = 0$. За $b = 2$ добиваме $ac^2 = -1$, па оваа равенка има решение по c за секое $a \in (-\infty, 0)$. За $b = -2$ ја добиваме равенката $ac^2 + 2c - 1 = 0$, којшто има решение по c за секое $a \in [-1, +\infty)$.

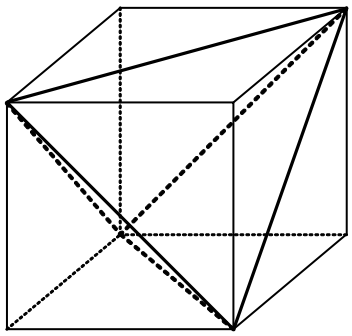
Следствено, дадениот систем има барем едно решение за произволно b и некое c ако И само ако $a \in [-1, 0]$.

4. Даден е квадар со рабови a, b, c; да го означиме со A. Нека $B = \{X \,/\, X \in \mathbb{R}^3, d(X, A) \leq 1\}$ претставува геометриско место на точки X од просторот за кои постои барем една точка од квадарот A која е на растојание не поголемо од 1 од точката X. Да се определи волуменот V_B, на B, со помош на a, b, c.

Решение.Геометриското место B на точки се состои од:
-квадарот A;
-квадари со висина 1 над секој од ѕидовите на A;
-четвртини цилиндри со радиус 1 и висина секој од рабовите на A.
-осмини топки со радиус 1 и центри во секое теме на A (види цртеж)
Според тоа,

$$V_B = V_A + V_k + V_{\text{ц}} + V_{\text{т}} =$$
$$= abc + 2(ab + bc + ca) + \pi(a + b + c) + \frac{4\pi}{3}\cdot$$

III година



1. Низ секој раб на еден тетраедар поставена е рамнина паралелна со спротивниот раб.

а) Каков полиедар определува делот од просторот ограничен со тие рамнини?

б) Да се најде односот на волуменот на добиениот полиедар со волуменот на тетраедарот.

Решение.а) Тетраедарот има три пара спротивни рабови, па, значи, се повлечени три пара паралелни рамнини, т.е. телото ограничено со рамнините е паралелопипед. Рабовите на тетраедарот се дијагонали од ѕидовите од паралелопипедот, па паралелопипедот е составен од дадениот тетраедар и четири пирамиди со основи половина од основата на паралелопипедот и висини колку и висината на паралелопипедот.

б) Нека V е волуменот на паралелопипедот, H неговата висина, B плоштина на неговата основа, $V_{\text{т}}$ волуменот на тетраедарот и нека $V_{\circ}$ е волуменот на една од останатите пирамиди. Тогаш

$$V = BH\,, \qquad V_{\circ} = \frac{1}{3}\left(\frac{B}{2}H\right) = \frac{BH}{6}$$

$$V = V_{\text{т}} + 4V_{\circ} = V_{\text{т}} + \frac{2}{3}V\,, \qquad V_{\text{т}} = \frac{1}{3}V\,,$$

т.е. $V : V_{\text{т}} = 3:1$.

2. Да се докаже дека: ако сумата

$$a_1\cos(x+\alpha_1) + a_2\cos(x+\alpha_2) + \ldots + a_n\cos(x+\alpha_n)$$

при $x = 0$ и $x = x_1 \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ е еднаква на нула, тогаш таа е нула за секој $x \in \mathbb{R}$.

Решение.Од условот на задачата, за $x = 0$, добиваме

$$a_1\cos\alpha_1 + a_2\cos\alpha_2 + \ldots + a_n\cos\alpha_n = 0 \qquad (1)$$

Нека $x_1 \neq k\pi$; тогаш имаме

$$a_1\cos(x_1+\alpha_1) + a_2\cos(x_1+\alpha_2) + \ldots + a_n\cos(x_1+\alpha_n) =$$
$$= (a_1\cos\alpha_1 + a_2\cos\alpha_2 + \ldots + a_n\cos\alpha_n)\cos x_1 - (a_1\sin\alpha_1 + a_2\sin\alpha_2 + \ldots + a_n\sin\alpha_n)\sin x_1 =$$
$$= -(a_1\sin\alpha_1 + a_2\sin\alpha_2 + \ldots + a_n\sin\alpha_n)\sin x_1 = 0$$

Но $\sin x_1 \neq 0$, од каде добиваме

$$a_1\sin\alpha_1 + a_2\sin\alpha_2 + \ldots + a_n\sin\alpha_n = 0\,. \qquad (2)$$

Сега, за произволен реален број x, ќе имаме

$$a_1\cos(x+\alpha_1)+a_2\cos(x+\alpha_2)+...+a_n\cos(x+\alpha_n)=$$
$$=(a_1\cos\alpha_1+a_2\cos\alpha_2+...+a_n\cos\alpha_n)\cos x-(a_1\sin\alpha_1+a_2\sin\alpha_2+...+a_n\sin\alpha_n)\sin x=0.$$

3. Да се реши равенката

$$\log_{3x+7}(9+12x+4x^2)+\log_{2x+3}(6x^2+23x+21)=4,$$

каде што $3x+7$ и $2x+3$ се позитивни реални броеви и различни од 1).

Решение. Од $3x+7>0$, $2x+3>0$, $3x+7\neq 1$, $2x+3\neq 1$ следува дека решение на равенката може да биде реален број $x\in\left(-\frac{3}{2},-1\right)\cup(-1,+\infty)$. Бидејќи

$$9+12x+4x^2=(2x+3)^2$$
$$6x^2+23x+21=(2x+3)(3x+7),$$

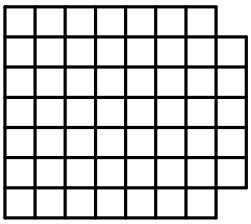
дадената равенка може да се запише во обликот

$$2[\log_{3x+7}(2x+3)]^2-3\log_{3x+7}(2x+3)+1=0$$

од каде што добиваме

$$\log_{3x+7}(2x+3)=1, \qquad 2\log_{3x+7}(2x+3)=1,$$

т.е. $x_1=-4, x_2=-2$ и $x_3=-\frac{1}{4}$. Бидејќи $x\in\left(-\frac{3}{2},-1\right)\cup(-1,+\infty)$, следува дека решение на равенката е $x_3=-\frac{1}{4}$.



4. Да се докаже дека следната фигура која е составена од 54 единечни квадрати, не може да се препокрие со правоаголници чии страни се 3 и 1.

Решение. Да претпоставиме дека дадената фигура може да се покрие со правоаголници чии страни се 3 и 1. Секое поле на ова фигура го биоме со една од боите: сина, жолта и црвена како што е покажано на цртежот. На секој правоаголник ќе има едно сино, жолто и црвено поле. Значи, на фигурате ќе има 18 сини, 18 жолти и 18 црвени полиња. Со непосредно броење на полињата се гледа дека има 19 сини, 17 жолти и 18 црвени полиња, што претставува противречност.

с	ж	ц	с	ж	ц	с
ж	ц	с	ж	ц	с	ж	ц
ц	с	ж	ц	с	ж	ц	с
с	ж	ц	с	ж	ц	с	ж
ж	ц	с	ж	ц	с	ж	ц
ц	с	ж	ц	с	ж	ц	с
с	ж	ц	с	ж	ц	с

IV година

1. Да се најде бројот на сите различни решенија на равенката

$$x_1+x_2+...+x_n=k$$

(k и n се дадени броеви) во множеството $\mathbb{N}$.

Решение. Јасно е дека треба да биде $n\leq k$. За $n=k$ равенката има единствено решение $x_1=x_2=x_3=...=x_n=1$. Затоа, да препоставиме дека $n<k$ и да ставиме

$$\underbrace{1+1+1+...+1}_{k}=k.$$

На секој знак "+" да му придружиме еден симбол. Бидејќи имаме $k-1$ знаци "+", на тој начин го добиваме множеството

$$A=\{a_1,a_2,...,a_{k-1}\}.$$

На секое подмножество B од A со $n-1$ елемент му одговара едно решение на дадената равенка, т.е. ако избришеме $n-1$ знака "+" ќе избришеме едно решение. Следствено, бројот

на сите решенија на равенката е еднаков со бројот на сите подмножества од A со $n-1$ елемент, а тој број е

$$\binom{k-1}{n-1}.$$

На пример, да ја разгледаме равенката $x_1+x_2+x_3=5$. Имаме:

$$1+1+1+1+1=5.$$

Бришејќи по два знака, добиваме $1,1,1+1+1;\ 1,1+1,1+1;\ 1,1+1+1,1;\ 1+1,1,1+1;\ 1+1,1+1,1;\ 1+1+1,1,1$, т.е. решенија на равенката се тројките $(1,1,3),(1,2,2),(1,3,1),(2,1,2),(2,2,1),(3,1,1)$. Нивниот број е 6 кој е еднаков со $\binom{4}{2}$.

2. Даден е триаголник $A_1B_1C_1$ со агли $\alpha_1,\beta_1,\gamma_1$. Со симетралите на надворешните агли е конструиран нов триаголник $A_2B_2C_2$ со агли $\alpha_2,\beta_2,\gamma_2$. На ист начин од триаголникот $A_2B_2C_2$ е конструиран триаголник $A_3B_3C_3$ со агли $\alpha_3,\beta_3,\gamma_3$, итн. Да се докаже дека

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n=\frac{\pi}{3},\qquad \lim_{n\to\infty}\beta_n=\frac{\pi}{3}\qquad \text{и}\qquad \lim_{n\to\infty}\gamma_n=\frac{\pi}{3}.$$

Решение.Доволно е да докажеме дека $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\frac{\pi}{3}$. Направи цртеж и согледај дека

$$\alpha_2=\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha_1}{2}=\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\left(\alpha_1-\frac{\pi}{3}\right).$$

Според тоа, имаме $\alpha_n=\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\left(\alpha_{n-1}-\frac{\pi}{3}\right)$, за секој $n\in\mathbb{N}$. Значи, низата $\alpha_1-\frac{\pi}{3}$, $\alpha_2-\frac{\pi}{3},\alpha_3-\frac{\pi}{3},\ldots,\alpha_n-\frac{\pi}{3},\ldots$ е геометриска прогресија со прв член $\alpha_1-\frac{\pi}{3}$ и коефициент $-\frac{1}{2}$, па имаме $\alpha_n=\frac{\pi}{3}+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\left(\alpha_1-\frac{\pi}{3}\right)$, од каде што добиваме дека $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\frac{\pi}{3}$.

3. Да се докаже дека единствено решение на системот

$$\begin{cases} a_1+a_2+a_3+a_4=0\\ a_2+a_3+a_4+a_5=0\\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\\ a_{1987}+a_{1988}+a_{1989}+a_1=0\\ a_{1988}+a_{1989}+a_1+a_2=0\\ a_{1989}+a_1+a_2+a_3=0\end{cases}$$

Решение.Собирајќи ги сите равенки добиваме

$$a_1+a_2+\ldots+a_{1989}=0, \tag{1}$$

т.е.

$$(a_1+a_2+a_3+a_4)+(a_5+a_6+a_7+a_8)+\ldots+(a_{1985}+a_{1986}+a_{1987}+a_{1988})+a_{1989=0}$$

од каде што следува дека $a_{1989}=0$. Тавенката (1) можеме да ја запишеме во облик

$$(a_{1989}+a_1+a_2+a_3)+(a_4+a_5+a_6+a_7)+\ldots+(a_{1984}+a_{1985}+a_{1986}+a_{1987})+a_{1988}=0$$

од каде што добиваме $a_{1988}=0$. На сличен начин добиваме дека

$$a_1=a_2=\ldots=a_{1989}=0$$

4. Иста како задача 4 од трета година.

XXXIII Републички натпревар 1990

I година

1. Докажи дека бројот $7^{1980^{1990}} - 3^{80^{90}}$ е делив со 5.

Решение. Да забележиме дека $7^4 \equiv 1 \pmod{10}$, а од овде и $7^{4k} \equiv 1 \pmod{10}$. Бидејќи $4 \mid 1980^{1990}$, следува дека

$$7^{1980^{1990}} \equiv 1 \pmod{10}.$$

Исто така да забележиме дека $3^4 \equiv 1 \pmod{10}$ и $3^{4k} \equiv 1 \pmod{10}$. Бидејќи $4 \mid 80^{90}$, добиваме

$$3^{80^{90}} \equiv 1 \pmod{10}.$$

Значи, бројот $7^{1980^{1990}} - 3^{80^{90}}$ е делив со 10 па, според тоа, е делив и со 5.

2. Ако $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ се позитивни реални броеви, такви што $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot ... \cdot a_n = 1$, тогаш

$$(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)...(1+a_n) \geq 2^n.$$

Докажи!

Решение.Од неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина добиваме

$$\frac{1+a_1}{2} \geq \sqrt{1 \cdot a_1} = \sqrt{a_1}$$

$$\frac{1+a_2}{2} \geq \sqrt{1 \cdot a_2} = \sqrt{a_2}$$

.....

$$\frac{1+a_n}{2} \geq \sqrt{1 \cdot a_n} = \sqrt{a_n}.$$

Ако ги помножиме овие n равенства добиваме

$$\frac{1+a_1}{2} \cdot \frac{1+a_2}{2} \cdot \frac{1+a_3}{2} \cdot ... \cdot \frac{1+a_n}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2 a_3 ... a_n} = 1,$$

т.е.

$$(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)...(1+a_n) \geq 2^n.$$

3. Остроаголен триаголник со страни што се последователни природни броеви има плоштина која е цел број. Најди барем еден таков триаголник!

Решение. Нека страните на триаголникот се $a-1$, a и $a+1$. Според Хероновата формула, добиваме

$$P = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}a\left(\frac{1}{2}a+1\right)\frac{1}{2}a\left(\frac{1}{2}a-1\right)}$$

$$P = \frac{1}{4}a\sqrt{3(a-2)(a+2)}.$$

Ако a е непарен број тогаш $a\sqrt{3(a-2)(a+2)}$ не може да биде парен природен број па P не може да биде природен број. Затоа мора a да е парен број. Ставајќи $a = 2k$ добиваме

$$P = k\sqrt{3(k+1)(k-1)}.$$

Поткореновата вредност е делива со 9. Затоа

1° $k+1 = 3m$, т.е. $k = 3m-1$, или

2° $k-1=3m$, т.е. $k=3m+1$.

Ва првиот случај се добива

$$P=3(3m-1)\sqrt{m(3m-2)}\ .$$

За $m=9$ се добива $P=1170$ а страните на триаголникот се $51{,}52$ и 53, па тој е остроаголен.

Во вториот случај се добива

$$P=3(3m+1)\sqrt{m(3m+2)}\ .$$

За $m=2$ се добива $P=84$ а страните на триаголникот се $13{,}14$ и 15 и тој е остроаголен.

4. Воз долг $110m$ се движи со брзина од $\frac{25}{3}\ m/s$. На патеката до пругата во $09.10h$ стигнал пешак што оди во истата насока и минувал крај него $15\sec$. Во $09.16\ h$ наишол на пешак што му оди во пресрет и минувал крај него $12\sec$. Во колку часот се сретнале пешаците?

Решение. Првиот пешак во 15 -те секунди нека поминал x метри. Тогаш

$$110+x=\frac{25}{3}\cdot 15$$

$$x=15\ .$$

Значи, првиот пешак поминал 15 метри за 15 секунди, па, неговата брзина е 1 m/s.

Вториот пешак нека поминал y метри за 12 секунди. Тогаш

$$110-y=\frac{25}{3}\cdot 12$$

$$y=10\ .$$

Значи, вториот пешак поминал 10 m за 12 секунди, па неговата брзаина е $\frac{5}{6}$ m/s.

Растојанието меѓу местото на средбата на првиот пешак совториот пешак е $360\cdot\frac{25}{3}=3000$ m. Нека пешаците се сретнале после t секунди по средбата со првиот. Тогаш

$$t\cdot 1+(t-360)\cdot\frac{5}{6}=3000$$

$$t+\frac{5}{6}t-300=3000$$

$$t=1800\ .$$

Значи, пешаците се сретнале после 30 минути, односно во 9^{40} часот.

II година

1. Замислен банкарски службеник ги сменил еврата и центите кога му раситнувал чек на еден муштерија, давајќи му центи наместо евра и евра наместо центи. Откако купил весник од 5 центи, муштеријата забележал дека му останала вредност точно двапати поголема отколку вредноста на неговиот чек. Колкава била вредноста на чекот?

Решение. Нека вредноста на чекот била k денари и y дени, каде x и y се ненегативни цели броеви и $y<100$. Банкарскиот службеник му дал x дени и y денари. Условот на задачата дека по купување на весник од 5 дени на муштеријата му останала двојно поголема сума на пари од вредноста на чекот може да се запише како

$$100y+(x-5)=2(100x+y)$$

$$199x=98y-5$$

$$(98\cdot 2+3x)x=98y-5$$

$98(y-2x)=3x+5$

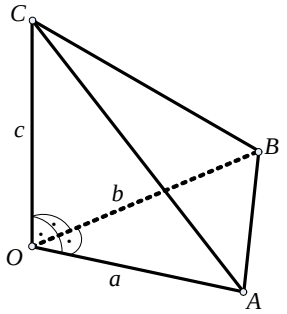
Ако $y-2x=1$, тогаш $3x+5=98$, па решение на овој систем е $x=31$, $y=63$.

Ако $y-2x\geq 2$, тогаш $3x+5\geq 2\cdot 98=196$. Од овде следува $x\geq \frac{191}{3}$,

$$y\geq 2+2x\geq 2+2\frac{191}{3}>100,$$

а ова не е можно бидејќи $y<100$.

Вредноста на чекот била 31 денар и 63 пари.



2. Нека $OABC$ е тетраедар, таков што $OA\perp OB\perp OC\perp OA$ и нека $\overline{OA}=a$, $\overline{OB}=b$, $\overline{OC}=c$. Да се докаже дека

$$\overline{ON}^2=\frac{a^2b^2c^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2},$$

каде што ON е висината на тетраедарот.

Решение. Страните на траиголникот ABC се

$$\overline{AB}=\sqrt{a^2+b^2},\qquad \overline{BC}=\sqrt{b^2+c^2},\qquad \overline{CA}=\sqrt{c^2+a^2}.$$

Да означиме

$$p=\overline{AB},\qquad q=\overline{BC},\qquad r=\overline{CA}.$$

Од Хероновата формула зап лоштината на триаголникот ΔABC добиваме

$$P_{\Delta ABC}=\sqrt{\frac{p+q+r}{2}\frac{p+q-r}{2}\frac{p-q+r}{2}\frac{-p+q+r}{2}}=\frac{1}{4}\sqrt{(p^2+q^2-r^2+2pq)(2pq+r^2-p^2-q^2)}=$$
$$=\frac{1}{4}\sqrt{(2b^2+2\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{b^2+c^2})(2\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{b^2+c^2}-2b^2)}=$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{(a^2+b^2)(b^2+c^2)-b^4}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$$

Очигледно е дека $V_{OABC}=\frac{1}{6}abc$, а од друга страна, пак,

$$V_{OABC}=P_{\Delta ABC}\frac{\overline{ON}}{3}=\frac{1}{6}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}\cdot\overline{ON},$$

од каде што со споредување лесно се добива дека

$$\overline{ON}^2=\frac{a^2b^2c^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}.$$

3. Да се докаже неравенството

$$\sqrt{(a_1+a_2+...+a_n)^2+(b_1+b_2+...+b_n)^2}\leq\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i^2+b_i^2},$$

каде $a_1,a_2,...,a_n,b_1,b_2,...,b_n\in\mathbb{R}$.

Решение. Да ги формираме комплексните броеви $z_1=a_1+ib_1$, $z_2=a_2+ib_2$,…, $z_n=a_n+ib_n$. Знаеме дека за комплексните броеви важи нравенството

$$|z_1+z_2+z_3+...+z_n|\leq|z_1|+|z_2|+|z_3|+...+|z_n|,$$

па кога ќе замениме $z_k=a_k+ib_k$, за $k=1,2,3,...,n$, се добива горното неравенство.

4. Дадена е правоаголна шема со $(n+1)\times(n+5)$ квадрати и во полето од едниот агол еден играч. Играчот се движи по полињата како коњот во шахот. Дали играчот може да стигне во полето од спротивниот агол за $2n+3$ скокови?

Решение. Квадратната шема да ја обоиме со црна и бела боја како шаховска табла. Да воочиме дека во произволна така обоена шаховска табла две дијагонални спротивни темиња имаат иста боја ако и само ако $m+k$ е парен број. Во нашиот случај $(n+1)+(n+5)$ е парен број, па не е можно играчот со непарен број на скокови $2n+3$ да стигне од едно во друго поле со иста боја, бидејќи при секој скок коњот во шахот ја менува бојата. Значи, одговорот на задачата е "не може".

III година

1. Да се најде полином $P(x)$ за кој важи

$$x\cdot P(x-1)=(x-1990)\cdot P(x).$$

Решение. Полиномот $P(x)(x-1990)$ е делив со x, па мора $P(x)$ да се дели со x, т.е. постои полином $P_1(x)$ така што $P(x)=xP_1(x)$. Заменувајќи го тоа во даденото равенство добиваме

$$x(x-1)P_1(x-1)=(x-1990)xP_1(x)$$
$$(x-1)P_1(x-1)=(x-1990)P_1(x).$$

Аналогно како пред малку, ќе постои полином $P_2(x)$ така што

$$P_1(x)=(x-1)P_2(x)$$

и ако тоа се замени се добива

$$(x-1)(x-2)P_2(x-1)=(x-1990)(x-1)P_2(x)$$
$$(x-2)P_2(x-1)=(x-1990)P_2(x).$$

Ако ова постапка се продолжи, се добиваат полиноми $P_3(x),P_4(x),...,P_{1990}(x)$, и за овој полином ќе важи

$$(x-1990)P_{1990}(x-1)=(x-1990)P_{1990}(x)$$
$$P_{1990}(x-1)=P_{1990}(x).$$

Од овде следува дека полиномот $P_{1990}(x)-P_{1990}(0)$ прима вредност 0 за секој цел број, а тоа е можно само ако $P_{1990}(x)-P_{1990}(0)$ е нулти полином. Нека $P_{1990}(0)=C$, тогаш

$$P(x)=xP_1(x)=x(x-1)P_2(x)=....=x(x-1)(x-2)...(x-1989)P_{1990}(x)=$$
$$=Cx(x-1)(x-2)...(x-1989)$$

2. Да се докаже дека

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2}<1,$$

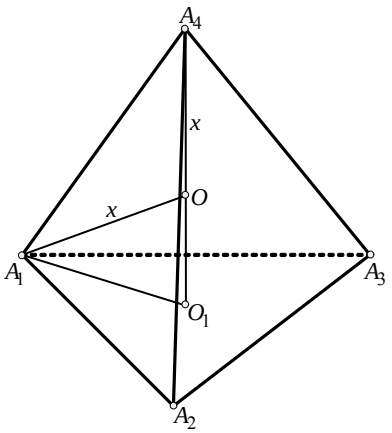
за секој природен број n.

Решение. За било кој природен број n имаме

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2}<\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k(k-1)}=\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)=1-\frac{1}{n}<1.$$

3.Дадени се четири еднакви сфери со радиус R секоја од кои се допира со останатите три. Да се определи радиусот на сферата што ги допира дадените сфери.

Решение. Центрите A_1, A_2, A_3 и A_4 на дадените сфери се темиња на правилен тетраедар со раб $2R$. Со x да го означиме радиусот на опишаната сфера околу тетраедарот $A_1A_2A_3A_4$, а со O нејзиниот центар. Нека O_1 е проекција на темето A_4 врз основата $A_1A_2A_3$. Тогаш $\overline{A_1O_1} = R\frac{2\sqrt{3}}{3}$, и



$$h^2 = \overline{A_4O_1}^2 = (2R)^2 - \left(\frac{2R\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \left(\frac{2R\sqrt{6}}{3}\right)^2.$$

Од правоаголниот триаголник ΔA_1O_1O добиваме

$$\overline{A_1O_1}^2 + \overline{OO_1}^2 = \overline{A_1O}^2$$

$$\frac{4R^2}{3} + \left(\frac{2R\sqrt{6}}{3} - x\right)^2 = x^2$$

$$x = R\frac{\sqrt{6}}{2}$$

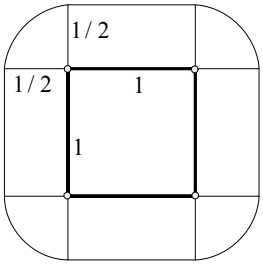
Радиусите на бараните сфери се

$$R_1 = x + R = R\left(\frac{\sqrt{6}}{2} + 1\right)$$

$$R_2 = x = R = R\left(\frac{\sqrt{6}}{2} - 1\right)$$

4. Во правоаголник 20×25 дадени се 120 квадрати од облик 1×1. Докажи дека при било каков распоред на квадратите во правоаголникот, останува слободно место за круг со дијаметар 1.

Решение. Секој квадрат ќе го замениме со поголема фигура како што е прикажано на цртежот. Плоштината на поголемата фигура е $1 + 4 \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \pi = 3 + \frac{\pi}{4}$. Плоштината на 120 такви фигури е еднаква на $P = 120\left(3 + \frac{\pi}{4}\right) = 360 + 30\pi$. Ако страните на правоаголникот го



поместуваме за $\frac{1}{2}$ кон внатрешноста добиваме нов правоаголник чија плоштина е

$$P_{\text{пр}} = 19 \times 24 = 456.$$

Забележуваме дека

$$P_{\text{пр}} > P,$$

па, затоа, постои точка во новиот правоаголник која е непокриена од сто и дваесетте нови фигури. Круг со центар во таа точка и радиус $\frac{1}{2}$ е одговор на задачата.

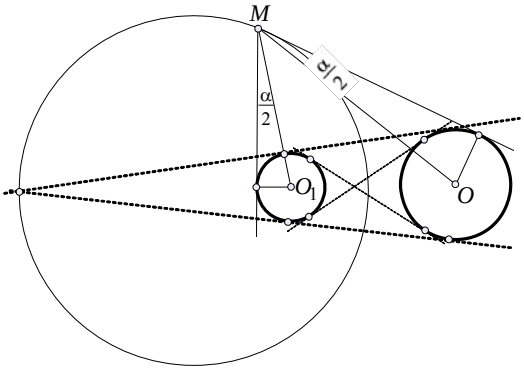
IV година

1. Иста како задача 1 од трета година.

2. Иста како задача 2 од трета година.

3. Нека се дадени две кружници кои не се сечат и ниедна од нив не ја содржи другата кружница. Да се најде геометриското место на точки од кои што двете кружници се гледаат под ист агол.

Решение. Нека радиусите на кружинците се R_1 и R_2. Координатниот сsстем го бираме така што центрите O_1 и O_2 имаат координати $(-a,0)$ и $(a,0)$ соодветно. Нека $M(x,y)$ припаѓа на бараното геометриско место на точки, а со α да го означиме аголот под кој се гледаат двете кружници од M. Тогаш



$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{R_1}{\sqrt{(x+a)^2+y^2}}$$

и

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{R_2}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}},$$

од каде добиваме

$$\frac{(x+a)^2+y^2}{R_1^2}=\frac{(x-a)^2+y^2}{R_2^2}$$

$$(R_2^2-R_1^2)(x^2+y^2)+2ax(R_2^2+R_1^2)+a^2(R_2^2-R_1^2)=0\ .$$

Затоа, ако $R_1=R_2$ тогаш бараното геометриско место на точки ќе биде y-оската, т.е. симетралата на отсечката O_1O_2, а ако $R_1\neq R_2$, тогаш геометриското место на точки е кружница со центар на правата O_1O_2 (Аполониева кружница за точките O_1 и O_2).

4. Да се реши равенката

$$1+x+x^2+x^3=2^y$$

во множеството цели броеви.

Решение. Дадената равенка да ја запишеме во обликот

$$(1+x)(1+x^2)=2^y\ .$$

Од овде следува дека $x+1=2^m$, $x^2+1=2^{y-m}$, т.е.

$$x=2^m-1 \quad \text{и} \quad x^2=2^{y-m}-1$$

$$x^2=2^{2m}-2^{m+1}+1$$

$$2^{y-m}+2^{m+1}-2^{2m}=2\ .$$

Можни се следниве два случаи:

(i) Нека $m=0$, тогаш единствено решение е $x=y=0$

(ii) Нека $m>0$. Тогаш се добива

$$2^{y-m-1}+2^m-2^{2m-1}=1$$

Бидејќи 2^m и 2^{2m-1} се парни броеви, следува дека 2^{y-m-1} е непарен број, а тоа е можно ако и само ако $2^{y-m-1}=1$, т.е. $y=m+1$. Заменувајќи го тоа, се добива

$$2^m=2^{2m-1},$$

од каде што следува дека $m=1$, $y=2$ и $x=1$.

Значи, единствено решение во овој случај е $x=1$ и $y=2$.

XXXIV Републички натпревар 1991

I година

1. На еден шаховски турнир учествувале 5 играчи, кои одиграле по една партија секој со секого, како што е вообичаено. За победа е доделуван по 1 поен, за реми $\frac{1}{2}$ поени и за пораз 0 поени. По завршувањето на турнирот:

-немало играчи со ист број на поени;
-победникот не ремизирал ниедна партија;
-второпласираниот играч не изгубил ниту една партија;
-играчот кој освоил четврто место не победил ни во една партија.
Да се одредат резултатите во сите партии.

	1	2	3	4	5
1		0	1	1	1
2	1		1/2	1/2	1/2
3	0	1/2		1/2	1
4	0	1/2	1/2		1/2
5	0	1/2	0	1/2	

Решение. Бидејќи победникот не ремизирал ниту една партија, а второпласираниот не загубил од никого, следува дека победникот загубил од второпласираниот. Бидејќи второпласираниот нема изгубено ниедна партија, може да има најмалку $2{,}5$ поени. Од овде следува дека првиот ги победил останатите натпреварувачи. Второпласираниот играч, заради првиот и третиот услов од задачата, ремизирал со третиот, четвртиот и петтиот играч. Првиот и вториот освоиле вкупно $5{,}5$ поени. Бидејќи се одиграни 10 партии, останатите играчи освоиле заедно $4{,}5$ поени. Користејќи дека немало играчи со ист број на поени, добиваме дека единствена можност е третиот да има 2 поени, четвртиот да има $1{,}5$ поен а петтиот 1 поен. Заклучуваме дека третиот ремизирал со четвртиот и го победил петтиот, а четвртиот и петтиот играч ремизирале заради последниот услов од задачата. На тој начин ја добиваме следната табела.

2. Да се докаже дека бројот $1+3+3^2+3^3+...+3^{1991}$ е делив со 41.

Решение. Прво да забележиме дека

$$1+3+3^2+...+3^{1991}=(1+3+3^2+...+3^7)(1+3^8+3^{10}+...+3^{1984})\,. \qquad (1)$$

Потоа, имаме

$$1\equiv 1 \pmod{41}\,, \qquad 3\equiv 3 \pmod{41} \qquad 3^2\equiv 9 \pmod{41} \qquad 3^3\equiv 27 \pmod{41}$$

$$3^4\equiv -1 \pmod{41}\,, \qquad 3^5\equiv -3 \pmod{41}\,, \qquad 3^6\equiv -9 \pmod{41} \qquad 3^7\equiv -27 \pmod{41}\,.$$

Значи,

$$1+3+3^2+3^3+3^4+3^5+3^6+3^7\equiv 0 \pmod{41}\,,$$

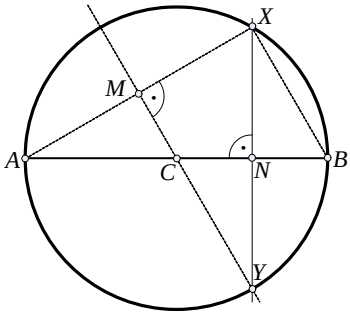
па, според (1), бројот $1+3+3^2+3^3+...+3^{1991}$ е делив со 41

3. Да се најде природен број n, така што $\frac{n(n+1)}{2}$ да е трицифрен број со исти цифри.

Решение. Од $\frac{n^2}{2}<\frac{n(n+1)}{2}\le 999$, следува дека $n<\sqrt{2\cdot 999}\approx 44{,}7$. Секој трицифрен број со исти цифри е делив со $111=3\cdot 37$. Затоа, $37\,|\,n$ или $37\,|\,(n+1)$. Но, бидејќи $n\le 44$, следува

дека $n=37$ или $n=36$. Со непосредна проверка се добива дека само $n=36$ го исполнува условот од задачата.

4. Нека k е кружница со дијаметар AB, и нека C е произволна точка од отсечката AB. Да се најдат две точки X и Y од кружницата k кои се симетрични во однос на AB и такви што правите AX и CY се заемно нормални.



Решение. Нека X е бараната точка и нека $AX \cap CY = M$, $AB \cap XY = N$. Тогаш $\measuredangle AMY = 90^\circ$ и $\measuredangle AXB = 90^\circ$, па $BX \parallel CY$. Освен тоа, $\overline{NX} = \overline{NY}$ и $BC \perp XY$, па N е средина на BC.

II година

1. Ако $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n$ се позитивни реални броеви такви што

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = ... = \frac{a_n}{b_n}.$$

Да се докаже дека

$$\sqrt{a_1 b_1} + \sqrt{a_2 b_2} + ... + \sqrt{a_n b_n} = \sqrt{a_1 + a_2 + ... + a_n}\sqrt{b_1 + b_2 + ... + b_n}.$$

Решение. Нека $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = ... = \frac{a_n}{b_n} = k$; тогаш $a_1 = kb_1$, $a_2 = kb_2, \ldots, a_n = kb_n$, па

$$\begin{aligned}\sqrt{a_1 b_1} + \sqrt{a_2 b_2} + ... + \sqrt{a_n b_n} &= b_1\sqrt{k} + b_2\sqrt{k} + b_3\sqrt{k} + ... + b_n\sqrt{k} = \\ &= (b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_n)\sqrt{k} = \sqrt{b_1 + b_2 + ... + b_n}\sqrt{b_1 + b_2 + ... + b_n}\sqrt{k} = \\ &= \sqrt{a_1 + a_2 + ... + a_n}\sqrt{b_1 + b_2 + ... + b_n}\end{aligned}$$

2. Множеството $\{1, 2, 3, ..., 20\}$ е поделено на две дисјунктни подмнбожества $A = \{a_1, a_2, ..., a_{10}\}$ и $B = \{b_1, b_2, ..., b_{10}\}$, така што

$$a_1 > a_2 > ... > a_{10} \qquad \text{и} \qquad b_1 < b_2 < ... < b_{10}.$$

Да се докаже дека

$$|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + |a_3 - b_3| + ... + |a_{10} - b_{10}| = 100.$$

Решение.//Јасно е

3. Да се докаже дека за било кои ненегативни броеви a и b важи

$$\frac{1}{2}(a+b)^2 + \frac{1}{4}(a+b) \geq a\sqrt{b} + b\sqrt{a}.$$

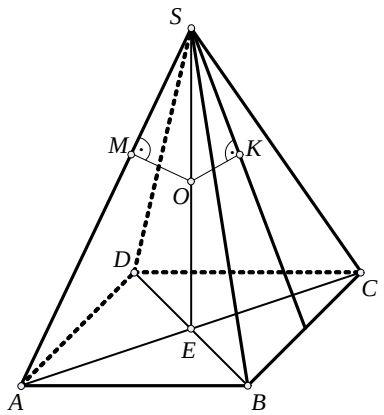
Решение. Од $\left(\sqrt{a} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{b} - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$ добиваме дека

$$a + b + \frac{1}{2} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$

Користејќи го ова неравенство, како и неравенството $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, добиваме дека

$$\frac{1}{2}(a+b)^2+\frac{1}{4}(a+b)=\frac{a+b}{2}\left(a+b+\frac{1}{2}\right)\geq\sqrt{ab}(\sqrt{a}+\sqrt{b})=a\sqrt{b}+b\sqrt{a}\,.$$

4. Од средината O на висината SE на права правилна четиристрана пирамида со врв S и подножје E на висината спуштени се нормали OM на бочниот раб и OK на бочниот ѕид на пирамидата. Ако должините на тие нормали се $\overline{OM}=p$ и $\overline{OK}=q$, да се пресмета волуменот на пирамидата.



Решение. Од сличноста на триаголниците MOS и EAS добиваме дека $\frac{H}{2}:P=s:\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Од триаголниците, пак, SOK и SFE добиваме $\frac{H}{2}:s=h:\frac{a}{2}$, каде H,h и s се висината, апотемата и бочниот раб на пирамидата. Заменувајќи ги $s^2=H^2+\frac{a^2}{2}$ и $h^2=H^2+\frac{a^2}{4}$ во горните пропорции, добиваме

$$\frac{aH}{4}\sqrt{2}=p\sqrt{H^2+\frac{a^2}{2}} \quad \text{и} \quad \frac{aH}{4}=q\sqrt{H^2+\frac{a^2}{4}}\,.$$

Од системот добиваме

$$a^2=\frac{8p^2q^2}{p^2-q^2} \quad \text{и} \quad H^2=\frac{4p^2q^2}{2q^2-p^2},$$

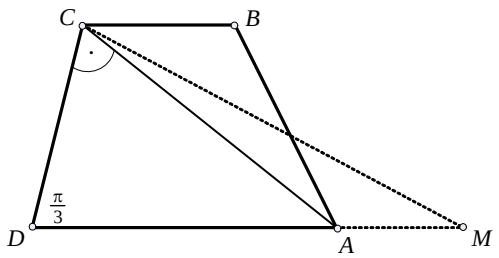
па

$$V=\frac{1}{3}a^2H=\frac{16}{3}\frac{p^3q^3}{(p^2-q^2)\sqrt{2q^2-p^2}}\,.$$

III година

1. Нека $ABCD$ е рамнокрак трапез ($AD\parallel BC$) со агол $\frac{\pi}{3}$ на поголемата основа AD и дијагонала $\overline{AC}=\sqrt{3}$. Една точка M е на растојание 1 од A и на растојание 3 од D. Да се најде $\overline{MC}$.

Решение. Од $\overline{AD}\geq\overline{MD}-\overline{AM}=3-1=2$ и $\overline{AD}\sin\frac{\pi}{3}\leq\sqrt{3}$ следува дека $\overline{AD}=2$ и $\measuredangle ACD=\frac{\pi}{2}$.



Значи, точката M лежи на правата AD и е на растојание 1 и 3 од A и D соодветно. Од правоаголниот триаголник ACD следува дека $\overline{CD}=1$. Од овде, пак, следува дека $\overline{BC}=1$ и

$$\overline{MC}=\sqrt{\left(1+2-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{7}\,.$$

2. Нека $a,b,c\in\mathbb{R}$ и нека за секој $x\in[-1,1]$ важи

$$|ax^2+bx+c|\leq 1\,.$$

Да се докаже дека за секој $x\in[-1,1]$ важи

$|cx^2+bx+a|\le 1$.

Решение.Нека $f(x)=ax^2+bx+c$ и $g(x)=cx^2+bx+a$. Очигледно е дека $|c|\le 1$, $|g(1)|=|f(1)|\le 1$ и $|f(-1)|=|g(-1)|\le 1$. Темето на параболата $g(x)$ е во точката $(p,g(p))$ каде што $p=-\frac{b}{2c}$. Ако $|p|>1$, функцијата $g(x)$ е монотона на интервалот $[-1,1]$ и задачата е решена. Затоа, нека $|p|\le 1$. Претходно да воочиме дека за произволни x и y важи

$$g(x)-g(y)=c(x^2-y^2)+b(x-y)=(x-y)[c(x+y)+b]=(x-y)\cdot 2c\cdot\left(\frac{x+y}{2}-p\right).$$

Можни се два случаја:

1. $0\le p<1$.

Тогаш

$$|g(1)-g(p)|=\left|(1-p)\cdot 2c\cdot\frac{1-p}{2}\right|\le|c|\le 1,$$

па, затоа, $|g(p)|\le 2$ и $|g(x)|\le 2$ за секој $x\in[-1,1]$.

2. $-1<p<0$.

Тогаш

$$|g(p)-g(-1)|=\left|(p+1)\cdot 2c\cdot\frac{-1-p}{2}\right|\le|c|\le 1,$$

па, затоа, $|g(p)|\le 2$ и $|g(x)|\le 2$ за секој $x\in[-1,1]$.

Направи цртеж!

3. Користејќи го фактот дека питагорините тројки го имаат обликот

$$\left(xy,\frac{x^2-y^2}{2},\frac{x^2+y^2}{2}\right),\ x>y,$$

каде што x и y се природни броеви со иста парност, да се одреди кој правоаголен триаголник со целобројни страни и катета 1000 има:

а) најголем периметар;

б) најмала плоштина.

Решение.Од $1000=pq$ добиваме дека

$$p=2^a5^b \quad \text{и} \quad q=2^{3-a}5^{3-b},$$

каде што $a\in\{1,2\}$ и $b\in\{0,1,2,3\}$. Значи, страните на триаголникот се

$$x=1000,\qquad y=2^{2a-1}5^{2b}-2^{5-2a}5^{6-2b},\qquad z=2^{2a-1}5^{2b}+2^{5-2a}5^{6-2b}$$

а)Периметарот $L=x+y+z=1000+2^{2a}5^{2b}$ ќе прима најголем авредност за најголемите вредности дозволени вредности на a и b, т.е. за $a=2$ и $b=3$. Следствено,

$$x=1000,\qquad y=124998,\qquad z=125002 \quad \text{и} \quad L=251000.$$

б)Плоштината на триаголникот ќе биде најмала за оние вредности на a и b за кои $y=\frac{1}{2}(p^2-q^2)$ ќе прими најмала позитивна вредност. Со непосредна проверка се добива дека тоа се постигнува за $a=1$ и $b=2$. Следствено

$$x=1000,\qquad y=1050,\qquad z=1450 \quad \text{и} \quad L=525000.$$

4. Да се реши системот

$$\begin{cases} \log_y x - 2\log_x y = 1 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

Решение. Нека $t = \log_y x$; тогаш првата равенка гласи $t - \frac{2}{t} = 1$, од каде што добиваме $t_1 = 2$ и $t_2 = -1$.

Од $\log_y x = 2$, добиваме $x = y^2$. Од втората равенка, $x - y = 2$ и $x = y^2$ следува дека $y = 2$, зошто $y = -1$ не се зема како решение. Значи, едно решение е $x = 4$ и $y = 2$.

Од $\log_y x = -1$ добиваме дека $x = \frac{1}{y}$. Од ова и втората равенка следува дека $y = \sqrt{2} - 1$ ($y > 0$). Значи, второто решение е $x = \sqrt{2} + 1$ и $y = \sqrt{2} - 1$.

IV година

1. Ако $0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$ и $\sin^2\alpha + \sin^2\beta = \sin(\alpha + \beta)$, тогаш $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$. Докажи!

Решение. Бидејќи $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ добиваме дека $\sin\alpha, \sin\beta, \cos\alpha, \cos\beta > 0$. Равенството $\sin^2\alpha + \sin^2\beta = \sin(\alpha + \beta)$ го запишуваме во следниот еквивалентен облик

$$(\sin\alpha - \cos\beta)\sin\alpha = (\cos\alpha - \cos\beta)\sin\beta.$$

Ако $\sin\alpha - \cos\beta > 0$, тогаш и $\cos\alpha - \sin\beta > 0$. Значи,

$$\sin\alpha > \cos\beta$$
$$\cos\alpha > \sin\beta.$$

Ако овие две равенства ги квадрираме и ги собереме добиваме $1 > 1$ што е противречност. Аналогно се исклучува и можноста да е $\sin\alpha - \cos\beta < 0$. Затоа, единствена можност останува да е $\sin\alpha - \cos\beta = 0$, а од ова следува дека $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$.

2. Иста како задача 2 од трета година.

3. На еден шаховски турнир на кој немало нерешени резултати, учествувале два ученика и неколку студенти. Играле секој со секого. Двајцата ученици освоиле заедно 8 поени, додека сите студенти освоиле по еднаков број на поени. Колку студенти учествувале на турнирот и колку поени освоиле. Да се најдат сите решенија.

Решение. Нека x е бројот на студенти што учествувале на турнирот и k е бројот на поени што секој од нив го освоил. Тогаш

$$\binom{x+2}{2} = kx + 8, \text{ т.е. } x^2 - (2k-3)x - 14 = 0.$$

Бидејќи $x, k \in \mathbb{N}$, дисриминантата на горната равенка мора да е потполн квадрат, т.е.

$$(2k-3)^2 + 56 = n^2,$$

односно $(2k-3)^2 - n^2 = -56$. Ова може да се запише во следниот облик

$$(n - 2k + 3)(n + 2k - 3) = 56 = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7.$$

Ги имаме следните можности:

1° $n-2k+3=1$ и $n+2k-3=56$

2° $n-2k+3=2$ и $n+2k-3=28$

3° $n-2k+3=4$ и $n+2k-3=14$

4° $n-2k+3=8$ и $n+2k-3=7$

5° $n-2k+3=56$ и $n+2k-3=1$

6° $n-2k+3=28$ и $n+2k-3=2$

7° $n-2k+3=14$ и $n+2k-3=4$

8° $n-2k+3=7$ и $n+2k-3=8$

Со директна проверка се гледа дека само системите под 2° и 3° даваат решенија кои одговараат на дадените услови.

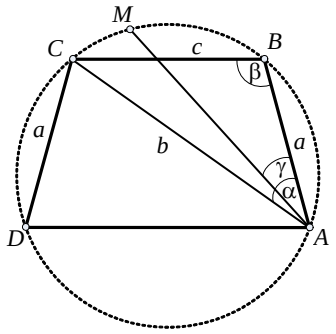
Во 2° се добива $n=15$, $k=8$ и $x=14$

Во 3° се добива $n=9$, $k=4$ и $x=7$.

4. даден е рамнокрак трапез со основа AD така што $\overline{AB}=\overline{CD}=a$, $\overline{AC}=\overline{BD}=b$ и $\overline{BC}=c$. Нека M е произволна точка од лакот BC од опишаната кружница околу трапезот $ABCD$. Да се изрази

$$\frac{\overline{BM}+\overline{MC}}{\overline{AM}+\overline{MD}},$$

преку a,b и c.



Решение. Нека R е радиусот на опишаната кружница околу трапезот $ABCD$; да означиме

$\measuredangle BAC=\alpha$, $\measuredangle ABC=\beta$, $\measuredangle BAM=\gamma$.

Од синусната теорема добиваме

$$\overline{BM}=2R\sin\gamma$$

$$\overline{MC}=2R\sin(\alpha-\gamma)$$

$$\overline{AM}=2R\sin(\gamma+\pi-(\alpha+\beta))=2R\sin(\alpha+\beta-\gamma)$$

$$\overline{MD}=2R\sin(\alpha-\gamma+\pi-\alpha-\beta)=2R\sin(\beta+\gamma).$$

Користејќи го тоа добиваме

$$\frac{\overline{BM}+\overline{MC}}{\overline{AM}+\overline{MD}}=\frac{\sin\gamma+\sin(\alpha-\gamma)}{\sin(\alpha+\beta-\gamma)+\sin(\beta+\gamma)}=\frac{2\sin\frac{\alpha+\gamma-\gamma}{2}\cos\frac{\gamma-\alpha+\gamma}{2}}{2\sin\frac{\alpha+\beta-\gamma+\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\alpha+\beta-\gamma-\beta-\gamma}{2}}=$$

$$=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\left(\gamma-\frac{\alpha}{2}\right)}{2\sin\left(\beta+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\gamma-\frac{\alpha}{2}\right)}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin\left(\beta+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)+\sin\beta}=$$

$$=\frac{2R\sin\alpha}{2R\sin[\pi-(\alpha+\beta)]+2R\sin\beta}=\frac{c}{a+b}.$$

XXXV Републички натпревар 1992

I година

1. Петар и Тошо дошле на гости кај Мишо во градот A. По извесно време решиле да се вратат во својот град B и за таа цел го организирале превозот на следниот начин: Тошо возел со велосипед од градот A до градот B. Мишо извесно време го возел Петар кон градот B со мотор и потоа го оставил да продолжи пеш, а самиот веднаш почнал да се враќа кон својот град A. Сите пошле од градот A истовремено и стигнале во своите градови истовремено. Ако Петар оди пеш со $6\,\text{km/h}$, а Тошо вози велосипед со $22\,\text{km/h}$, со колкава брзина Мишо го возел моторот?

Решение. Да го означиме со s растојанието од A до B и со t времето што им било потребно да стигнат до своите одредишта. Брзините на моторот, велосипедот и пешачењето, т.е. на Мишо, Тошо и Петар да ги означиме со v_M, v_T и $v_П$ соодветно. Тошо цело време вози со велосипед од A до B, па значи,

$$v_T \cdot t = s\,. \qquad (1)$$

Мишо за времето t извесно време возел кон B и потоа веднаш се вратил кон својот град A. Значи, тој половина од времето од времето возел кон B, а во втората половина се враќал кон A. Ова значи дека Петар половина од времето се возел на мотор со Мишо, а во втората половина од времето продолжил пеш кон B. Бидејќи Петар изминал пат s може да се запише

$$v_M \frac{t}{2} + v_П \frac{t}{2} = s \qquad (2)$$

десните страни на (1) и (2) се еднакви., па, значи

$$v_T \cdot t = v_M \frac{t}{2} + v_П \frac{t}{2}\,,$$

од каде што добиваме $v_M = 38$.

2. Да се определат пет природни броеви a,b,c,d,e (поголеми од 0), така што

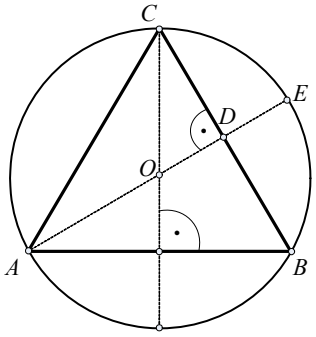
$$a+b+c+d+e=100\,, \qquad \text{НЗС}(a,b,c,d,e)=1992\,.$$

При тоа да не се земаат во предвид решенијата што се добиваат од друго решение со разместување на броевите.

Решение. Имаме $1992 = 2^3 \cdot 3 \cdot 83$, па значи мора барем еден од броевите a,b,c,d да е делив со 83., затоа што во спротивно 83 не би се јавил како прост множител во нивниот НЗС. Ако два од броевите се деливи со 83, тогаш тие даваат збир поголем за 100 што не е можно. Значи, точно еден од броевите a,b,c,d,e е делив со 83. Да ставиме $a = 83k$. k мора да е единица, затоа што во спротивно $a > 100$ што не е можно. Значи, $a = 83$. Од $b+c+d+e=17$ и НЗС$(83,a,b,c.d.e) = 2^3 \cdot 3 \cdot 83$ следува дека барем еден од броевите b,c,d,e е делив со $2^3 = 8$ затоа што во спротивен случај 2 би д ејавил во НЗС$(83,a,b,c,d,e)$ на понизок степен или воопшто не би се јавил. Ако два од броевите b,c,d,e се деливи со 8, тогаш нивниот збир со a е поголем или еднаков на 99, па за преостанатите два броја би имале дека имаат збир 1 што не е можно. Значи, точно еден од броевите b,c,d,e е делив со 8. Да ставиме $b = 8m$. Но m мора да е единица, затоа што во спротивно $a+b \geq 99$, т.е. $c+d+e \leq 1$ што не е можно. Значи, $b = 8$. Од $c+d+e=9$ и НЗС$(83,8,b,c,d,e) = 2^3 \cdot 3 \cdot 83$, следува дека барем еден од броевите c,d и e мора да е делив со 3, затоа што во спротивно 3 не би се

јавил како множител во НЗС$(83,8,b,c,d,e)=2^3\cdot 3\cdot 83$. Да ставиме $c=3n$. Ако $c=3$, тогаш $d+e=6$ и d,e имаат како можни делители само $1,2,3$ и 4; оттука се добиваат две решенија $d=e=3$ и $d=4,e=2$. Ако $c=6$, тогаш $d+e=3$ и d,e имаат како можни делители $1,2,3$ и 4 од кое што се добива решението $d=2,e=1$. Ако $c\geq 9$, тогаш $d+e\leq 0$ што не е можно. Значи, има три решенија и тоа

$a=83$; $b=8$; $c=3$; $d=3$; $e=3$
$a=83$; $b=8$; $c=3$; $d=4$; $e=2$
$a=83$; $b=8$; $c=6$; $d=2$; $e=1$



3. Да се докаже дека точките што се симетрични на ортоцентарот на триаголникот во однос на страните на триаголникот лежат на кружницата опишана околу триаголникот.

Решение. Доволно е да докажеме дека ова својство важи за една точка. Го посматраме триаголникот ΔABC околу кој е опишана кружницата. Имаме $\measuredangle ABC=\measuredangle DEC$ (како перифериски агли над ист кружен лак) и $\measuredangle COD=\measuredangle ABC$ (како агли со заемно нормални краци). Добиваме дека триаголниците ΔODC и ΔEDC се складни, па $\overline{OD}=\overline{DE}$. Според тоа, E е симетрична точка на O во однос на страната BC.

4.На еден шаховски турнир на кој немало нерешени резултати, учествувале 10 шахисти и притоа секој играл со секого. Нека a_i и b_i го означува бројот на победи и бројот на порази соодветно на i-тиот шахист. Докажи дека

$$\sum_{i=1}^{10} a_i^2=\sum_{i=1}^{10} b_i^2 .$$

Решение. На секоја победа одговара еден пораз и обратно. Затоа $\sum_{i=1}^{10} a_i=\sum_{i=1}^{10} b_i$. Освен тоа јасно е дека $a_i+b_i=9$ за секој $1\leq i\leq 10$. Оттука добиваме дека

$$\sum_{i=1}^{10} a_i^2-\sum_{i=1}^{10} b_i^2=\sum_{i=1}^{10}(a_i^2-b_i^2)=\sum_{i=1}^{10}(a_i-b_i)(a_i+b_i)=9\sum_{i=1}^{10}(a_i-b_i)=9\left(\sum_{i=1}^{10} a_i-\sum_{i=1}^{10} b_i\right)=9\cdot 0=0$$

II година

1. Да се најдат сите решенија на системот од 3 равенки со 3 непознати x_1,x_2,x_3:

$$\begin{cases} x_1|x_1|-(x_1-a)|x_1-a|=x_2|x_2| \\ x_2|x_2|-(x_2-a)|x_2-a|=x_3|x_3| \\ x_3|x_3|-(x_3-a)|x_3-a|=x_1|x_1| \end{cases},$$

каде што a е даден реален број.

Решение. Да забележиме дека ако $(x_1^\circ,x_2^\circ,x_3^\circ)$ е решение на системот со параметар a, $(-x_1^\circ,-x_2^\circ,-x_3^\circ)$ ќе биде решение со параметар $-a$. Затоа, доволно е да се разгледа само случајот кога $a\geq 0$.

Нека (x_1,x_2,x_3) е решение за кое $x_1 \le a, x_2 \le a, x_3 \le a$; тогаш $|x_i - a| = -(x_i - a)$ и ако ги собереме равенките добиваме

$$(x_1-a)^2+(x_2-a)^2+(x_3-a)^2=0,$$

од каде следува дека $x_1 = x_2 = x_3 = a$ е единствено решение.

Нека (x_1,x_2,x_3) е решение за кое $x_i \ge a$ за некој i. Тогаш од i-тата равенка добиваме

$$x_{i+1}|x_{i+1}| = x_i^2-(x_i-a)^2 = a(2x_i-a) \ge a^2.$$

Значи, $x_i \ge a$. За $i=3$ да замениме $i+1$ со 1; тогаш добиваме $x_1 \ge a, x_2 \ge a, x_3 \ge a$, па собирајќи ги равенките добиваме

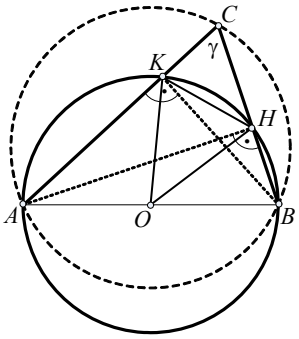
$$x_1 = x_2 = x_3 = a,$$

па според тоа, единствено решение е $x_1 = x_2 = x_3 = a$.

2. Ако $|a|=1$ или $|b|=1$, тогаш $\left|\frac{a-b}{1-\bar{a}b}\right|=1$. Докажи!

Решение. Нека $|a|=1$; тогаш

$$\left|\frac{a-b}{1-\bar{a}b}\right| = \frac{a-b}{|a|^2-\bar{a}b} = \frac{1}{|\bar{a}|} = 1.$$



3.Ако темињата A и B на триаголникот ABC се фиксни, а темето C се движи така што аголот $\measuredangle ACB$ останува константен, тогаш должината на отсечката што ги спојува подножјата H и K на висините на триаголникот повлечени од темињата A и B соодветно е константа. Докажи!

Решение. Бидејќи аглите $\measuredangle AKB$ и $\measuredangle AHB$ се прави, точките H и K лежат на кружницата со дијаметар AB. Триаголникот ACH е правоаголен, од каде следува дека $\measuredangle CAH = \frac{\pi}{2} - \gamma$, каде што γ е означен аголот ACB. Централниот агол кој одговара на тетивата HK е еднаков на $\pi - 2\gamma$ (Зошто).

При движењето на C точките H и K се поместуваат по споменатата кружница. Бидејќи централниот агол што одговара на тетивата HK е константен, следува дека должината KH е константен.

4.Шаховска табла со димензија 6×6 е покриена со 18 плочки со димензија 2×1 (секоја плочка покрива два квадрати). Да се покаже дека при секое такво покривање таблата може да се подели на два дела по хоризонтала или вертикала, при што не е пресечена ниедна од плочките 2×1.

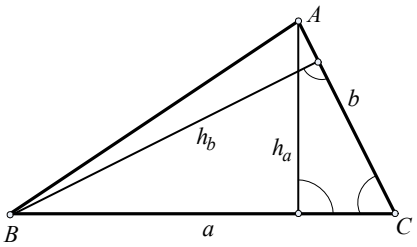
Решение.Да го претпоставиме обратното, т.е. плочките се така поставени што секоја од хоризонталите и секоја од вертикалите дели барем едно поле на два дела.

Имаме 10 такви линии. Секоја од тие линии ја дели таблата на два дела, составена од парен број на полиња. Целите плочки 2×1 покриваат парен број полиња, па затоа од поделените полиња имаме парен број, т.е. најмалку две 2×1 плочки се пресечени од хоризонтала или вертикала.

Ако се има предвид дека секоја 2×1 плочка може да е пресечена само од една хоризонтала (вертикала), тогаш добиваме дека бројот на пресечени плочки е $10\times 2 = 20$. Противречност, бидејќи такви плочки имаме 18.

III година

1.Во еден триаголник дадени се две страни a и b ($a \geq b$). Да се најде третата страна ако е познато дека $a + h_a \leq b + h_b$ каде што h_a и h_b се висините спуштени на a и b соодветно.



Решение. Нека γ е аголот меѓу страните a и b; тогаш имаме

$$a + b\sin\gamma \leq b + a\sin\gamma$$
$$(a-b)\sin\gamma \geq (a-b)$$
$$(a-b)(\sin\gamma - 1) \geq 0$$
$$\sin\gamma - 1 \geq 0,$$

од каде што добиваме $\gamma = 90^\circ$, т.е. $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

2. Нека $P(x)$ е полином со целобројни коефициенти

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_\circ .$$

Ако $P(a) = 1991$, $P(b) = 1992$ и $P(c) = 1993$ и $a,b,c \in \mathbb{Z}$, тогаш a,b,c се последователни броеви.

Решение. Имаме

$$1 = 1992 - 1991 = P(b) - P(a) = a_n(b^n - a^n) + a_{n-1}(b^{n-1} - a^{n-1}) + \ldots + a_2(b^2 - a^2) + a_1(b-a).$$

Десната страна е делива со $b - a$, па според тоа и левата страна е делива со $b - a$, т.е. $b - a$ е делив со 1. Понатаму

$$1 = 1993 - 1992 = P(c) - P(b) = a_n(c^n - b^n) + a_{n-1}(c^{n-1} - b^{n-1}) + \ldots + a_2(c^2 - b^2) + a_1(c-b).$$

Десната страна е делива со $c - b$, па, значи, и левата страна е делива со $c - b$, т.е. $c - b$ е делител на 1; следствено можни се следниве четири случаи:

1° $b - a = 1$, $c - b = 1$; 2° $b - a = -1$, $c - b = -1$

3° $b - a = 1$, $c - b = -1$; 4° $b - a = -1$, $c - b = 1$.

Во првиот случај добиваме $a = b - 1$, $c = b + 1$, а во вториот случај $a = b + 1, c = b - 1$. Во Во третиот и четвртиот случај добиваме $a = c$ што не е можно, зошто $P(a) \neq P(c)$.

Од сето тоа следува дека a,b,c (или c,b,a) се последователни цели броеви.

3.Да се докаже дека за кои било $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ од $[0,1]$ е точно неравенството

$$(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n)^2 \geq 4(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_n^2)$$

Решение. Од $x \in [0,1]$ следува дека $x_i^2 \leq x_i$. Нека $S = \sum_{i=1}^{n} x_i$. Од $(S-1)^2 \geq 0$, имаме

$$(S+1)^2 \geq 4S,$$

односно

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i + 1\right)^2 \geq 4\sum_{i=1}^{n} x_i \geq 4\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

4.На една 3×3 квадратна табла се поставени три црвени и три жолти жетони, а две полиња се празни како што е тоа прикажано на првиот цртеж. Секој жетон може да се помести за едно поле по хоризонтали или вертикала ако соседното поле е празно. Дали е можно после 1992 потези на таблата да се добие позиција како на другиот цртеж?

Ц	/	Ж
Ж	Ж	Ц
Ж	Ц	/

Ц	Ж	/
Ж	Ц	Ж
/	Ж	Ц

Решение. Да ги означиме сите девет полиња со a_{ij} ($i, j \in \{1,2,3\}$) како на дадениот цртеж. Нека по n -тиот потез празните места се a_{ij} и a_{kl} . Го разгледуваме збирот

$$S(n) = i + j + k + l .$$

a_{11}	a_{12}	a_{13}
a_{21}	a_{22}	a_{23}
a_{31}	a_{32}	a_{33}

За секој природен број n важи $|S(n) - S(n-1)| = 1$, па $S(n)$ и $S(n-1)$ се броеви со различна парност. Ако одговорот на задачата е позитивен, тогаш треба броевите $S(0)$ и $S(1992)$ да имаат иста парност. Но ова не важи зошто $S(0) = 1+2+3+3 = 9$ и $S(1992) = 1+3+3+1 = 8$ имаат различна праност.

Значи, одговорот на задачата е “не”.

IV година

1.Иста како задача 1 од трета година.

2.Множеството на природните броеви е разбиено на конечен број на артитметички прогресии. Да се докаже дека постои артитметичка прогресија во која првиот член е делив со разликата.

Решение. Со $d_1, d_2, ..., d_n$ да ги означиме разликите на аритметичките прогресии со кои е разбиено множеството од природните броеви. Тогаш $d_1 \cdot d_2 \cdot ... \cdot d_n$ е проироден број, па е член на некоја аритметичка прогресија, т.е. постои некој $i \in \{1,2,3,...,n\}$, така што

$$d_1 \cdot d_2 \cdot ... \cdot d_n = a_{i_1} + pd_i ,$$

каде што a_{i_1} е првиот член, а d_i е разликата на таа прогресија. Значи d_i е делител(фацтор) на a_{i_1} .

3.Иста како задача 3 од трета година.

4.Секоја страна на рамностран триаголник ја делиме на k еднакви дела. Низ точките на страните повлекуваме прави паралелни на страните на триаголникот. Повлекуваме искршена линија низ триаголникот, при што:

а)Ниеден триаголник не се јавува два пати;

б)Секој нареден триаголник на искршената линија има заедничка страна со претходниот.

Низ колклу триаголници минува искршената линија?

Решение. Да забележиме дека триаголникот е разбиен на k^2 мали триаголници. Да го обоиме триаголникот со две бои. Притоа црни триаголници има k повеќе од бели. Бројот наб елите триаголници е $\frac{k(k-1)}{2}$ а на црните е $\frac{k(k+1)}{2}$. Два триаголници со иста боја не се допираат.затоа, при поминувањето на искршената линија се менува бојата на триаголникот. Ако тргнеме од триаголникот со црна боја, тогаш можеме да ги опфатиме сите бели триаголници, т.е. $\frac{k(k-1)}{2}$ и уште $\frac{k(k-1)}{2}+1$ црни триаголници. Значи, сите опфатени триаголници се:

$$\frac{k(k-1)}{2} + \frac{k(k-1)}{2} + 1 = k^2 - k + 1 .$$

Случајот $k = 6$ е на цртежот.

XXXVI Републички натпревар 1993

I година

1. Нека a е непарен цел број. Докажете дека бројот

$$a^3+3a^2-a-3$$

е делив со 48.

Решение. Ако $a=2k+1$, каде што k е цел број, тогаш

$$\begin{aligned} a^3+3a^2-a-3 &= (2k+1)^3+3(2k+1)^2-(2k+1)-3= \\ &= 8k^3+12k^2+6k+1+12k^2+12k+3-2k-1-3= \\ &= 8k(k^2+3k+2). \end{aligned}$$

Ако k е парен број, тогаш $8k$ е делив со 16. Ако k е непарен број, тогаш k^2 и $3k$ се непарни броеви, а сумата k^2+3k+2 е парен број, па значи $8k(k^2+3k+2)$ е број делив со 16. Во двата случаја добиваме дека $8k(k^2+3k+2)$ е број делив со 16.

Бројот $a^3-a=(a-1)a(a+1)$ е производ од три последователни цели броеви, што значи дека е делив со 3, од што следува дека $3\,|\,(a^3+3a^2-a-3)$.

Бидејќи дадениот број е делив со 3 и 16, јасно е дека е делив со $3\cdot 16=48$.

2. Определете го четирицифрениот број $\overline{xyzt}$ чијшто збир на цифри е 17, ако сите цифри се различни и ги задоволуваат равенствата

$$2x=y-z \qquad \text{и} \qquad y=t^2.$$

Решение. Бидејќи $y\le 9$ и $y=t^2$, добиваме $t\le 3$.

За $t=0$ се добива $t=0=y$, што не е можно, а за $t=1$ се добива $t=1=y$, што исто така не е можно.

Нека $t=2$; тогаш $y=4$, па од $2x=y-z$ добиваме $2x=4-z$. Од тука е јасно дека z е парен број помал од 4. Можни се следните случаи:

1° $z=0$, но тогаш $x=2=t$

2° $z=2$, ова не е можно бидејќи мора $z\ne t$.

3° $z=4$, но тогаш $x=0$, па бројот не е четирицифрен.

Значи, не е можно $t=2$.

Нека $t=3$. Тогаш $y=9$, па од $2x=y-z$, добиваме $2x=9-z$. Оттука е јасно дека z е непарен број. Можни се следните случаи:

1° $z=1$, $x=4$, $\overline{xyzt}=4913$ и збирот на цифрите е 17;

2° $z=3$, $x=3$ што не е можно;

3° $z=5$, $x=2$, $\overline{xyzt}=2953$, но збирот на цифрите е 19;

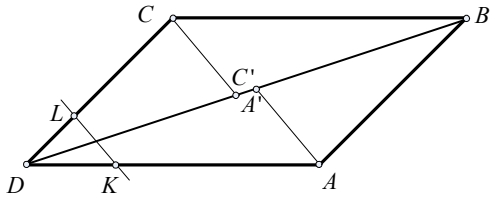
4° $z=7$, $x=1$, $\overline{xyzt}=1973$, но збирот на цифрите е 20;

5° $z=9$, $x=0$, што не е можно бидејќи според условот на задачата $\overline{xyzt}$ е четирицифрен број.

Значи, единствено решение е $\overline{xyzt}=4913$.

3. Даден е паралелограм $OABC$. На страната OC е нанесена точка L така што $3\cdot\overline{OL}=\overline{OC}$, а на страната OA е нанесена точка K така што $4\cdot\overline{OK}=\overline{OA}$. Низ точките L и K е повлечена права p која се сече со

дијагоналата OB во точката M. Колкав дел од дијагоналата OB е отсечката OM?



Решение. Ги повлекуваме правите AA' и CC' паралелно со правата p, при што точките A' и C' лежат на дијагоналата OB. Тогаш триаголниците OLM и OCC' се слични ,а , исто така, и триаголниците OLM и OAA' се слични. Од сличноста на овие триаголници, добиваме

$$3\cdot\overline{OM}=\overline{OC'} \qquad \text{и} \qquad 4\cdot\overline{OM}=\overline{OA'}.$$

Триаголниците OCC' и BAA' се складни, бидејќи имаат еднакви страни $\overline{OC}=\overline{BA}$ и соодветните агли при овие страни им се еднакви(правите CC' и AA' се паралелни). Значи

$$\overline{OC'}=\overline{A'B}.$$

Од досега изнесеното имаме

$$\overline{OB}=\overline{OA'}+\overline{A'B}=\overline{OA'}+\overline{OC'}=4\cdot\overline{OM}+3\cdot\overline{OM}=7\cdot\overline{OM}.$$

Значи отсечката OM седмина од дијагоналата OB.

4. Разложете го на множители изразот

$$A=(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)^2-x^5.$$

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned}A&=(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)^2-1-(x^5-1)=\\&=(2+x+x^2+x^3+x^4+x^5)(x+x^2+x^3+x^4+x^5)-(x-1)(1+x+x^2+x^3+x^4)=\\&=(2x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)(1+x+x^2+x^3+x^4)-(x-1)(1+x+x^2+x^3+x^4)=\\&=(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)(1+x+x^2+x^3+x^4)\end{aligned}$$

II година

1. Решете ја равенката

$$\frac{3}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{4}{x-2}+\frac{4}{x-3}+\frac{1}{x-4}+\frac{3}{x-5}=0$$

Решение.Имаме

$$\frac{3}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{4}{x-2}+\frac{4}{x-3}+\frac{1}{x-4}+\frac{3}{x-5}=0$$

$$\frac{3}{x}+\frac{3}{x-5}+\frac{4}{x-2}+\frac{4}{x-3}+\frac{1}{x-4}+\frac{1}{x-1}=0$$

$$\frac{3(2x-5)}{x^2-5x}+\frac{2x-5}{x^2-5x+4}+\frac{4(2x-5)}{x^2-5x+6}=0$$

Оттука е јасно дека едно решение на равенката е $x_1=\frac{5}{2}$. Ако за $x\neq\frac{5}{2}$ ја поделиме равенката со $2x-5$ и воведеме смена $x^2-5x=t$, ја добиваме равенката

$$\frac{3}{t}+\frac{1}{t+4}+\frac{4}{t+6}=0,$$

од која по множењето со $t(t+4)(t+6)$ се сведува на квадратна равенка и чиишто решенија се $t_1=-\frac{9}{2}$ и $t_2=-2$. Со замена на овие вредности во направената смена добиваме две квадратни равенки чиишто решенија се

$$x_{2/3}=\frac{5\pm\sqrt{7}}{2} \qquad \text{и} \qquad x_{4/5}=\frac{5\pm\sqrt{17}}{2}.$$

Бидејќи за сите добиени решенија почетната равенка е осмислена, добиваме дека равенката има пет решенија,

2.Нека $a_1, a_2, a_3, ..., a_{1993}$ и $b_1, b_2, b_3, ..., b_{1993}$, p и q се реални броеви различни од нула и нека

$$a_1^2 + a_2^2 + ... + a_{1993}^2 = p^2$$

$$b_1^2 + b_2^2 + ... + b_{1993}^2 = q^2$$

$$a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_{1993}b_{1993} = pq \ .$$

Докажете дека

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = ... = \frac{a_{1993}}{b_{1993}}$$

Решение. Ако првото равенство го помножиме со q^2, второто со p^2, а третото со $-2pq$ и потоа ги собереме трите така добиени равенства, добиваме

$$(a_1p - b_1q)^2 + (a_2p - b_2q)^2 + ... + (a_np - b_1q)^2 = 0 \ .$$

Збирот на квадрати е 0 ако и само ако сите собироци се 0, од каде што веднаш следува

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = ... = \frac{a_{1993}}{b_{1993}} \ .$$

3. Даден е конвексен четириаголник $ABCD$ и повлечени се две прави, коишто страните AB и CD ги делат на три еднакви делови. Да се докаже дека плоштината на делот од четириаголникот $ABCD$ што се наоѓа меѓу тие две прави е третина од плоштината на целиот четириаголник.

Решение. Нека l и m се правите што ги делат страните AB и CD на три еднакви делови и при тоа $AB \cap l = \{L_1\}$, $AB \cap m = \{M_1\}$, $CD \cap l = \{L_2\}$ и $CD \cap m = \{M_2\}$.

Нека $P_{AL_1D} = x$ и $P_{M_1M_2B} = y$. Тогаш

$$P_{L_2L_1M_1} = \frac{x+y}{2}, \qquad (1)$$

Навистина.

$$P_{AL_1D} = \frac{\overline{AL_1} \cdot h_1}{2} = x \ , \ P_{M_1M_2B} = \frac{\overline{M_1B} \cdot h_3}{2} = y \ \text{ и } \ P_{L_2L_1M_1} = \frac{\overline{L_1M_1} \cdot h_2}{2} \ .$$

Висината h_2 е средна линија на трапезот со основи h_1 и h_3, па за неа важИ

$$h_2 = \frac{h_1 + h_3}{2} \ .$$

Со оглед на ова и фактот што $\overline{AL_1} = \overline{M_1B} = \overline{L_1M_1}$ се добива (1). Аналогно на ова, ако означиме $P_{DL_1L_2} = z$ и $P_{CM_2B} = u$, добиваме

$$P_{L_2M_2M_1} = \frac{z+u}{2} \qquad (2)$$

Нека P е плоштина на четираголникот $ABCD$, а P_1 е плоштоината на четириаголникот меѓу правите l и m. Со оглед на (1), (2) и воведените ознаки, добиваме

$$P = 3\frac{x+y+z+u}{2} \qquad \text{и} \qquad P_1 = \frac{x+y+z+u}{2},$$

од каде што веднаш следува дека $P = 3 \cdot P_1$.

4. Да се определат рационалните вредности на x, за коишто бројот $8x^2 - 2x - 3$ е квадрат на рационален број.

Решение. Да го разложиме дадениот израз:

$$8x^2-2x-3=(2x+1)(4x-3)\,. \qquad (1)$$

За рационални вредности на x двата множители на десната страна се рационални броеви. Производот на овие два рационални броја е квадрат на рационален број, ако и само ако постојат рационални броеви d,u и v така што:

$$2x+1=du^2 \qquad \text{и} \qquad 4x-3=dv^2\,. \qquad (2)$$

Решавајќи го (2) како систем од равенки по непознати x и d се добива

$$d=\frac{5}{2u^2-v^2} \qquad \text{и} \qquad x=\frac{1}{2}\frac{3u^2+v^2}{2u^2-v^2}\,. \qquad (3)$$

Бидејќи u и v се рационални, а $\sqrt{2}$ е ирационален, изразот што се јавува како именител е 0 ако и само ако $u=v=0$. Значи, единствен недозволен избор на u и v е $u=v=0$. За секој друг избор на рационални броеви u и v рационалниот број x (одбран како во (3)) ги задоволува барањата на задачата и притоа важи

$$8x^2-2x-3=\left(\frac{5uv}{2u^2-v^2}\right)^2\,.$$

III година

1.Нека $\mathrm{tg}\alpha$ и $\mathrm{tg}\beta$ се реални корени на квадратната равенка $x^2+px+q=0$. Кои услови треба да ги исполнуваат p и q, за да важи $\alpha+\beta=60^\circ+k\cdot 180^\circ$.

Решение. Нека важи $\alpha+\beta=60^\circ+k\cdot 180^\circ$; тогаш $\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\sqrt{3}$, т.е.

$$\frac{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta}{1-\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta}=\sqrt{3}\,. \qquad (1)$$

Со примена на Виетовите врски за решенијата на квадратната равенка, добиваме $\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta=-p$ и $\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta=q$, па, со замена во (1) се добива

$$p=(q-1)\sqrt{3}\,. \qquad (2)$$

Покрај овој услов, дискриминантата на квадратната равенка мора да е ненегативна, т.е. мора $p^2-4q\ge 0$. Ако во овој услов, замениме p од (2), добиваме

$$3q^2-10q+3\ge 0\,.$$

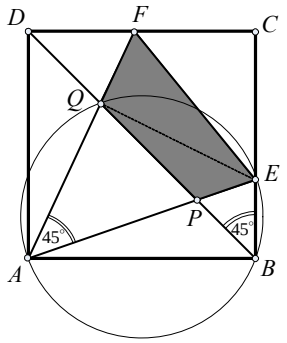
Решението на ова неравенка е

$$q\le\frac{1}{3} \quad \text{или} \quad q\ge 3\,. \qquad (3)$$

Значи, p и q мора да ги задоволат условите (2) и (3).

Обратно, ако p и q ги задоволуваат условите (2) и (3), тогаш дискриминантата на квадратната равенка ќе биде позитивна и ќе постојат реални решенија коишто, секако, се еднакви на $\mathrm{tg}\alpha$ и $\mathrm{tg}\beta$ за погодно избрани α и β. Но, според Виетовите врски, и со оглед на (2), се добива дека $\mathrm{tg}\alpha$ и $\mathrm{tg}\beta$ го задоволуваат равенството (1), од каде што $\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\sqrt{3}$, т.е.

$$\alpha+\beta=60^\circ+k\cdot 180^\circ\,.$$



2.Од темето A на квадратот $ABCD$ кон внатрешноста се повлечени две полуправи коишто зафаќаат агол од 45°. Едната од нив ја сече страната BC во точката E, а дијагоналата BD во точката P, а другата полуправа ја сече страната

CD во точката F а дијагоналата BD во точката Q. Докажете дека плоштината на триаголникот APQ е еднаква на плоштината на четириаголникот $PQFE$.

Решение. Точките A, B, E и Q лежат на една кружница, бидејќи отсечката EQ од точките A и B се гледаат под еднаков агол од 45°. Бидејќи $\measuredangle ABE = 90^\circ$, добиваме дека и $\measuredangle EQA = 90^\circ$. Оттука е јасно дека $\measuredangle QEA = 45^\circ$, па, значи, триаголникот ΔAQE е рамнокрак и правоаголен со прав агол во Q. Според тоа:

$$\overline{AE} = \sqrt{2} \cdot \overline{AQ}. \qquad (1)$$

Аналогно се покажува дека

$$\overline{AF} = \sqrt{2} \cdot \overline{AP}. \qquad (2)$$

Со P_1 и P_2 ќе ги означиме плоштините на триаголниците AQP и AEF соодветно. Тогаш, со оглед на (1) и (2), добиваме

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \overline{AP} \cdot \overline{AQ} \cdot \sin 45^\circ}{\frac{1}{2} \cdot \overline{AE} \cdot \overline{AF} \cdot \sin 45^\circ} = \frac{1}{2}.$$

Значи $2P_1 = P_2$, од каде што следува дек аплоштината на триаголникот APQ е еднаква наплоштината на четириаголникот $PQFE$.

3. Докажете дека шаховска табла со димензии 8×8 не може да се препокрие со 15 фигури од облик е една фигура од облик .

Решение. Да ја обоиме таблата така што првата колона ќе ја обоиме црно, втората колона ќе ја обоиме бело, третата црно и така наизменично се до осмата колона која ќе биде обоена бело. Гледаме дека при вака обоена обоена табле, фигурите од облик секогаш препокриваат непарен број на црни полиња(едно или три). Петнаесет вакви фигури ќе препокријат повторно непарен број на црни полиња, а заедно со фигурата , којашто покрива точно две црни полиња, конечно ќе бидат покриени, со помош на сите расположиви фигури, непарен број на црни полиња. Но, таблата е обоена така што има подеднаков број на бели и црни полиња, и тоа по 32, па значи дадените фигури никако не можат да го покријат парниот број полиња.

4.Нека x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 се ненегативни реални броеви чијшто збир е 1. Да се определи максималната можна вредност на изразот

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5.$$

Решение.Поради ненегативноста на броевите x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, важи неравенството

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5 \le (x_2 + x_4)(x_1 + x_3 + x_5) \qquad (1)$$

Имајќи го предвид неравенството

$$ab \le \frac{1}{4}(a+b)^2$$

за $a = x_2 + x_4$ и $b = x_1 + x_3 + x_5$ добиваме

$$(x_2 + x_4)(x_1 + x_3 + x_5) \le \frac{1}{4}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) = \frac{1}{4}.$$

Од (1) и (2) е јасно дека вредноста на дадениот израз не надминува $\frac{1}{4}$. Дадениот израз за $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$ и $x_3 = x_4 = x_5 = 0$ е еднаков на $\frac{1}{4}$, па значи тоа е неговата максимална вредност(ова вредност се достигнува и за некои други вредности на променливите).

IV година

1.Нека n е природен број, нека $x_\circ = \frac{1}{n}$ и нека за секој $k = 1, 2, ..., n-1$ важи

$$x_k = \frac{1}{n-k}(x_\circ + x_1 + ... + x_{k-1}).$$

Пресметајте го збирот $S_k = x_\circ + x_1 + ... + x_k$.

Решение. За $k = 0$ и $k = 1$ имаме

$$S_\circ = x_\circ = \frac{1}{n};$$

$$S_1 = x_\circ + x_1 = \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1}x_\circ = \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1}\frac{1}{n} = \frac{1}{n-1}.$$

Можеме да претпоставиме дека $S_k = \frac{1}{n-k}$. За $k = 0$ и $k = 1$ тоа е точно. да претпоставиме дека дадената формула е точна за $k \le s$. Тогаш за $k = s+1$ имаме

$$S_{s+1} = S_s + x_{n-s} = \frac{1}{n-s} + \frac{1}{n-s-1}S_s = \frac{1}{n-s} + \frac{1}{n-s-1}\frac{1}{n-s} = \frac{1}{n-(s+1)}.$$

Според принципот на математичка индукција, добиваме дека за секое k важи $S_k = \frac{1}{n-k}$.

2.Да го означиме со $\{x\}$ дробниот дел од бројот x, т.е. $\{x\} = x - [x]$, каде што со $[x]$ е означен целиот дел од x, т.е. најголемиот цел број помал од x. Така на пример

$$\left\{\frac{1}{3}\right\} = \frac{1}{3}, \qquad \{3\} = 0, \qquad \left\{\frac{7}{3}\right\} = \left\{2\frac{1}{3}\right\} = \frac{1}{3}, \text{ итн.}$$

Докажи дека равенката

$$\{x\} + \left\{\frac{1}{x}\right\} = 1$$

нема решение во множеството на рационалните броеви.

Решение. Нека рационалниот број $x = \frac{m}{n}$, каде m и n се ненултни заемно прости цели броеви е решение на дадената равенка. Тогаш од $\{x\} + \left\{\frac{1}{x}\right\} = 1$, добиваме

$$x - [x] + \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right] = 1$$

од каде што е јасно дека $x + \frac{1}{x}$ е цел број. Да го означиме тој цел број со k, т.е. нека $\frac{m}{n} + \frac{n}{m} = k$. Од овде добиваме $m^2 + n^2 = kmn$,

Од каде што следува дека m е делител на n^2 и n е делител на m^2, а бидејќи m и n се заемно прости, тоа е можно ако и само ако $|m| = |n| = 1$, т.е. само за $x = \pm 1$. Но, за $x = \pm 1$ важи

$$\{x\} + \left\{\frac{1}{x}\right\} = 0.$$

Значи, дадената равенка нема решение во множеството на рационалните броеви.

3.Иста како задача 4 од трета година

4.Иста како задача 3 од трета година

XXXVII Републички натпревар 1994

I година

1. Нека секоја точка на бројната права, која претставува цел број, е обоена произволно во една од две бои(сина или црвена). Докажи дека постои отсечка чии крајни точки и средина се во иста боја.

Решение.Нека две соседни точки се обоени во иста боја. Без губење на општоста, можеме да земеме дека точките 4 и 5 се обоени сино. Ако 3 или 6 се сини, ја добиваме бараната отсечка. Затоа, да претпоставиме дека 3 и 6 се црвени. Ако 9 е црвена, бараната отсечка е со крајни точки во 3 и 9. Затоа да претпоставиме дека 9 е сина. Ако 7 е сина, бараната отсечка е со крајни точки во 5 и 9. Затоа, претпоставуваме дека 7 е црвена. Ако 8 е црвена, бараната отсечка е со крајни точки во 6 и 8, па да претпоставиме дека 8 е сина. Ако 2 е сина, бараната отсечка е со крајни точки во 2 и 8. Нека 2 е црвена. Конечно, ако 1 е црвена, бараната отсечка е со крајни точки во 1 и 3, а ако 1 е сина, бараната отсечка е со крајни точки во 1 и 9.

Да ја разгледаме и можноста кога не постојат две соседни точки обоени во иста боја. Огаш, сите точки кои претставуваат парен број се обоени во една боја, а сите точки кои претставуваат непарен број се обоени во другата боја. Во овој случај, еден пример на бараната отсечка е отсечката со крајни точки во -2 и 2.

2. Нека x е позитивен природен број, а y се добива од x кога првата цифра на x ќе се премести на последно место. Да се определи најмалиот број x за кој важи $3x = y$.

Решение. Нека x е n-цифрен број и првата цифра на x е a ($1 \le a \le 9$). Тогаш

$$y = (x - 10^{n-1}a)\cdot 10 + a = 10x - a(10^{n-1} - 1).$$

Бидејќи треба да важи $3x = y$, добиваме $3x = 10x - a(10^{n-1} - 1)$, од каде што добиваме

$$x = \frac{a(10^n - 1)}{7}, \qquad (1)$$

Бидејќи 7 е прост број, 7 го дели a или $10^n - 1$. Но, ако 7 го дели a, тогаш $a = 7$, и бројот $3x$ ќе има повеќе од n-цифри и не може да биде еднаков на y. Значи, 7 го дели $10^n - 1$. Најмалата вредност на x се добива за најмалото можно n. Најмала вредност на n за која $10^n - 1$ е делив со 7 е $n = 6$ и во овој случај од (1) добиваме $x = \overline{a142857}$. Ставајќи $a = 1$ за да добиеме најмала вредност за x, добиваме $x = 142857$. Со непосредна проверка утврдуваме дека за ова вредност на x важи

$$3x = 3\cdot 142857 = 428571 = y.$$

3.Од речното пристаниште A истовремено тргнале низводно моторен чамец и сплав(сплавот немал никаков погон). Брзината на чамецот во мирна вода е u а на реката е v ($u > v > 0$). По t_1 часа чамецот пристигнал во B и почнал да се враќа кон A.

Решение.а)Растојанието од A до B го означуваме со s. Брзината на чамецот низводно е $u + v$ а во спротивна насока е $u - v$. Тогаш изразувајќи го s на два начина, добиваме

$$\begin{cases} (u+v)t_1 = s \\ v(t_1 + t_2) + (u - v)t_2 = s \end{cases}.$$

Со изедначување на левите страни на добиените равенки, добиваме $t_1 = t_2$.

Забелешка: Интересно е да се забележи дека врската $t_1 = t_2$ се добива без оглед на дадените бројни вредности во условот на задачата, т.е. $t_1 = t_2$ важи во општ случај за било кои брзини и растојанија.

б) Растојанието од B до C е $192 - 48 = 144$. Со оглед на врската $t_1 = t_2$, го добиваме системот равенки

$$\begin{cases}(u+v)t_1 = 192\\(u-v)t_1 = 144\end{cases}.$$

Ако го изразиме t_1 од едната равенка и го замениме во втората, добиваме $u = 7v$.

в)Со t_3 да го означиме времето потребно чамецот да го мине патот од C до A. Со оглед на врската $u = 7v$, брзината на чамецот низводно е $8v$ а спротивно е $6v$. Од $8vt_1 = 192$, добиваме $t_1 = \frac{24}{v}$, а од $6vt_3 = 48$ добиваме $t_3 = \frac{8}{v}$.

Бидејќи $t_1 + t_2 + t_3 = 28$, добиваме $\frac{24}{v} + \frac{24}{v} + \frac{8}{v} = 28$, од каде што добиваме $\frac{56}{v} = 28$ и конечно $v = 2$. Значи, брзината на амецот во мирна вода е $u = 7v = 14$.

4.Основниот раб на права правилна четириаголна пирамида $ABCDT$ (T е врвот на пирамидата) е $\sqrt{2}$, а бочниот раб е 2. Низ темето A минува рамнина нормална на работ TC (A и C лежат дијагонално на основата) и ги сече рабовите TB, TC и TD во точките P, Q и R соодветно.

Да се определи волуменот на пресечената пирамида $ABCDPQR$.

Решение. Да го означиме со M пресекот на дијагоналите на основата на пирамидата, а со O пресекот на дијагоналите на четириаголникот $APQR$.

За дијагоналата на основата имаме: $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = 2(\sqrt{2})^2 = 4$, т.е. $\overline{AC} = 2$. Значи, ACT и BDT се два складни рамностранни триаголници со страна 2. Бидејќи $TC \perp AQ$, јасно е деак AQ е висината на ΔACT. Исто така висината на пирамидата TM е висина на ΔACT. Имаме $\overline{AQ} = \overline{TM} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$. Точката O е ортоцентар на ΔATC и ΔBDT, па, значИ, $\overline{RP} : \overline{BD} = 2:3$, од каде што добиваме $\overline{RP} = \frac{4}{3}$. Четириаголникот $APQR$ е делтоид, па, за неговата плоштина P имаме

$$P = \frac{\overline{AQ} \cdot \overline{RP}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Бидејќи TQ е висина на пирамидата имаме

$$V_{APQRT} = \frac{1}{3}\frac{2\sqrt{3}}{3}\frac{2}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{9}.$$

Волуменот на дадената пирамида е $V = \frac{1}{3}(\sqrt{2})^2\sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. Конечно, бараниот волумен е

$$V_{ABCDPRQ} = \frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{9} = \frac{4\sqrt{3}}{9}.$$

II година

1.Ако равенките $ax^2+bx+c=0$ и $Ax^2+Bx+C=0$ имаат барем едно заедничко решение, тогаш $(aC-Ac)^2=(aB-Ab)(bC-Bc)$. Докажи!

Решение. Да го означиме заедничкото решение на двете равенки со y. Тогаш

$$ay^2+by+c=0 \qquad (1)$$

$$Ay^2+By+C=0 \qquad (2)$$

Ако првото равенсво го помножиме со A, а второто со a и потоа добиените равенства ги одземеме, добиваме

$$(aB-Ab)y=Ac-aC\,. \qquad (3)$$

Од друга страна, ако првото равенство го помножиме со B, а второто со b и добиените равенства ги одземеме, добиваме

$$(aB-Ab)y^2=bC-Bc\,. \qquad (4)$$

Ако $aB-Ab\neq 0$, тогаш изразувајќи го y од (3) и заменувајќи го во (4) се добива бараното равенство.

Нека $aB-Ab=0$. Тогаш, од (3) и (4) добиваме $aC-Ac=bC-Bc=0$, па значи И во овој случај важи $(aC-Ac)^2=(aB-Ab)(bC-Bc)$.

2.Нека x и y се ненегативни реални броеви такви што $x+y=3$. Да се докаже дека $xy^2<4$.

Решение. Ако го искористиме неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина, добиваме

$$3=x+y=x+\frac{y}{2}+\frac{y}{2}>3\cdot\sqrt[3]{\frac{xy^2}{4}}\,,$$

од каде што следува неравенството $xy^2<4$. Равенството се достигнува за $x=1$ и $y=2$.

3.Низ внатрешна точка на даден триаголник се повлечени три прави кои триаголникот го делат на 6 дела. Нека S_1, S_2 и S_3 се плоштини на кои било три така добиени делови на триаголникот. Докажи дека:

а) $\dfrac{1}{S_1}+\dfrac{1}{S_2}>\dfrac{4}{S}$

б) $\dfrac{1}{S_1}+\dfrac{1}{S_2}+\dfrac{1}{S_3}>\dfrac{9}{S}$.

Решение.Ако го искористиме фактот дека $S>S_1+S_2+S_3$ и неравенството меѓу аритметичка и хармониска средина на броевите S_1,S_2 и S_3, добиваме

$$\frac{S}{3}>\frac{S_1+S_2+S_3}{3}>\frac{3}{\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\frac{1}{S_3}}\,,$$

од каде што се добива бараното неравенство.

4.Нека се дадени n точки во рамнината така што растојанието меѓу било кои три од нив е најмногу 1. Ако m е најмало растојание меѓу две од дадените три точки, докажи дека

$$m < \frac{2(\sqrt{n}-1)}{n-1}$$

Решение. Околу секоја од n-те точки опишуваме кружница со радиус $\frac{m}{2}$. Вкупната плоштина што ја покриваат вака добиените n-круга е $n\frac{m^2\pi}{4}$, затоа што овие кругови се допираат или воопшто не се сечат. Околу една фиксно избрана точка опишуваме кружница со радиус $1+\frac{m}{2}$. Овој круг ги содржи сите n претходно споменати кругови. Затоа

$$n\frac{m^2\pi}{4} \le \left(1+\frac{m}{2}\right)^2 \pi,$$

од каде што следува бараното неравенство.

III година

1.За реалните броеви $a_\circ, a_1, a_2, ..., a_n$ важи $a_\circ = a_n = 0$ и

$a_{k-1} - 2a_k + a_{k+1} \ge 0$, за $k = 1, 2, 3, ..., n-1$.

Докажи дека ниту еден од броевите $a_\circ, a_1, a_2, ..., a_n$ не е позитивен.

Решение. Нека a_k ($0 < k < n$) е најголем(нема поголем од него) меѓу броевите $a_\circ, a_1, a_2, ..., a_n$.

Ако $k = 0$ или $k = n$, тогаш $a_k = 0$, па, значи, ниту еден од броевите не е позитивен.

Нека $1 \le k \le n-1$. Да претпоставиме дека $a_{k-1} < a_k$ и $a_{k+1} < a_k$. Тогаш $a_{k-1} + a_{k+1} < 2a_k$, т.е. $a_{k-1} - 2a_k + a_{k+1} < 0$, што е спротивно на условот на задачата. Значи, $a_{k-1} \ge a_k$ или $a_{k+1} \ge a_k$. Но, a_k е најголем од дадените броеви, па, значи, $a_{k+1} = a_k$ или $a_{k-1} = a_k$. Од причини на симетрија, можеме да претпоставиме $a_{k-1} = a_k$. Тогаш од условот $a_{k-2} - 2a_{k-1} + a_k \ge 0$, добиваме $a_{k-2} - a_{k-1} \ge 0$, т.е. $a_{k-2} \ge a_{k-1}$. Но, $a_{k-1} = a_k$, а a_k е најголем од дадените броеви, па, значи, $a_{k-2} = a_{k-1} = a_k$. Продолжувајќи ја оваа постапка, добиваме $0 = a_\circ = a_1 = ... = a_k$. Бидејќи најголемиот од дадените броеви е 0, ниту еден од дадените броеви не е позитивен.

2.Аглите на триаголникот ABC го задоволуваат равенството

$\cos 3\alpha + \cos 3\beta + \cos 3\gamma = 1$.

Докажи дека еден од аглите е еднаков на 120°.

Решение. Бидејќи $3\alpha + 3\beta + 3\gamma = 540^\circ$, имаме

$$\cos 3\gamma = \cos[540^\circ - (3\alpha + 3\beta)] = \cos[180^\circ - (3\alpha + 3\beta) = -\cos(3\alpha + 3\beta).$$

Од дадениот услов се добива:

$$2\cos\frac{3\alpha+3\beta}{2}\cos\frac{3\alpha-3\beta}{2} = 2\cos^2\frac{3\alpha+3\beta}{2}$$

$$\cos\frac{3\alpha+3\beta}{2}\left[\cos\frac{3\alpha+3\beta}{2} - \cos\frac{3\alpha-3\beta}{2}\right] = 0$$

$$-2\cos\frac{540^\circ+3\gamma}{2}\cdot\sin\frac{3\alpha}{2}\cdot\sin\frac{3\beta}{2}=0$$

$$\cos\left(270^\circ-\frac{3\gamma}{2}\right)\cdot\sin\frac{3\alpha}{2}\cdot\sin\frac{3\beta}{2}=0$$

$$\sin\frac{3\gamma}{2}\cdot\sin\frac{3\alpha}{2}\cdot\sin\frac{3\beta}{2}=0\,.$$

Добиваме дека $\sin\frac{3\gamma}{2}=0$ или $\sin\frac{3\alpha}{2}=0$ или $\sin\frac{3\beta}{2}=0$. Од причини на симетрија, можеме да земеме $\sin\frac{3\gamma}{2}=0$. Но, бидејќи $0<\gamma<180^\circ$, имаме $0<\frac{3\gamma}{2}<270^\circ$, па, значи, $\frac{3\gamma}{2}=180^\circ$, односно $\gamma=120^\circ$.

3.Бројот 15 може на три начини да се запише како збир на три позитивни природни броеви така што сите 9 броја да се различни:

$$15=1+6+8=2+4+9=3+5+7\,.$$

За секој природен број n со $k(n)$ го означуваме најголемиот природен број тројки природни броеви, кои даваат збир n и притоа сите $3\cdot k(n)$ броеви се различни.

Докажи дека за секој природен број n важи:

а) $k(n)<\frac{2n}{9}$

б)ако m е количникот при делење на n со 6, тогаш $k(n)>m$.

Решение.//

4. Дадени се n точки на кружница. Броевите $1,2,3,...,n$ се запишани во произволен распоред покрај дадените точки(по еден број до секоја точка). За секој пар соседни точки е определена апсолутната вредност на разликата на броевите запишани покрај точките. Докажи дека збирот на овие апсолутни вредности е поголем или еднаков на $2(n-1)$

Решение. Точките на кружницата ги означуваме по ред со $A_i\,(1\le i\le n)$, поаѓајќи од произволна точка движејќи се во позитивна насока. Нека бројот $a_i\,(1\le a_i\le n,\ 1\le i\le n)$ е запишан покрај точката A_i. Без губење на општоста можеме да земеме $a_n=n$. Нека 1 е запишан покрај точката A_j, т.е. $a_j=1$. Тогаш движејќи се по кружницата од A_n кон A_j по една од двете насоки и пресметувајќи ги разликите на броевите кај соседните точки добиваме:

$$|a_n-a_{n-1}|+|a_{n-1}-a_{n-2}|+...+|a_{j+1}-a_j|\ge(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+...+(a_{j+1}-a_j)=$$
$$=a_n-a_j=n-1$$

$$|a_n-a_1|+|a_1-a_2|+...+|a_{j-1}-a_j|\ge(a_n-a_1)+(a_1-a_2)+...+(a_{j-1}-a_j)=$$
$$=a_n-a_j=n-1$$

Оттука заклучуваме дека сумата на апсолутните вредности на разликите е поголема или еднаква на $2(n-1)$.

IV година

1.Нека p е прост број таков што сите цифри му се единици. Докажи дека бројот на цифрите на бројот p е прост број.

Решение. Нека p е број таков што сите цифри му се единици и нека бројот на цифрите му е сложен, т.е. е mn каде што $m,n \geq 2$. Тогаш

$$p = (1+10+10^2+...+10^n)+10^n(1+10+10^2+...+10^n)+...+10^{n(m-1)}(1+10+10^2+...+10^n) =$$
$$= (1+10+10^2+...+10^n)(1+10^n+10^{2n}+...+10^{n(m-1)})$$

Бидејќи $m,n \geq 2$, добиваме дека p е сложен број. Значи, ако p е прост број таков што сите цифри му се единици, тогаш бројот на цифрите на p мора да е прост.

2.Во рамнина се дадени три точки A', B' и C'. Да се определат три точки A, B, C во рамнината така што A е средина на CC', B е средина на AA' и C е средина на BB'.

Решение. Во рамнината поставуваме правоаголен координатен систем xOy. Нека координатите на дадените точки во овој систем се: $A' = (a', a'')$, $B' = (b', b'')$ и $C' = (c', c'')$. Нека координатите на бараните точки се $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ и $C(c_1, c_2)$. Од условите за преполовување добиваме:

$$(a_1, a_2) = \left(\frac{c'+c_1}{2}, \frac{c''+c_2}{2}\right)$$

$$(b_1, b_2) = \left(\frac{a'+a_1}{2}, \frac{a''+a_2}{2}\right)$$

$$(c_1, c_2) = \left(\frac{b'+b_1}{2}, \frac{b''+b_2}{2}\right).$$

Со изедначување на соодветните координати и по решавање на така добиениот систем линеарни равенки, добиваме

$$a_1 = \frac{a'+2b'+4c'}{7}, \qquad a_2 = \frac{a''+2b''+4c''}{7}$$

$$b_1 = \frac{b'+2c'+4a'}{7}, \qquad b_2 = \frac{b''+2c''+4a''}{7}$$

$$c_1 = \frac{c'+2a'+4b'}{7}, \qquad c_2 = \frac{c''+2a''+4b''}{7}.$$

За решението да биде комплетно треба да докажеме дека точките A, B и C со вакви координати можат да се конструираат, ако се познати координатите на A', B' и C'(во условот на задачата не се бараат координатите на A, B, C, туку се бараат да се конструираат тие точки). Но, бидејќи конструкција на отсечка со двојна должина, на отсечка со должина збир на должини на дадените отсечки и делење на дадена отсечка на 7 дела е позната, точките A, B и C може да се конструираат со помош на координатите на A', B' и C' во поставениот координатен систем.

3.Иста како задача 3 од трета година
Решение.Н

4.Иста како задача 4 од трета година
Решение.Н

XXXVIII Републички натпревар 1995

I година

1.Спортскиот известувач задоцнил за финишот на трката на $100\ m$. Од петмина присутни расположени гледачи ги собрал следните податоци:

Александар: Сенко беше втор, а Огнен трет.
Блаже: Петар беше трет, а Томе петти.
Васко: Томе беше прв, а Петар втор.
Горјан: Сенко беше втор, а Раде четврти.
Драган: Огнен беше прв, а Раде четврти.

На известувачот му било јасно дека гледачите сепак биле премногу расположени и го препрашал својот колега за резултатите. Но колегата само му спомнал деда секој од гледачите дал по еден точен одговор и еден неточен пласман на натпреварувачите. Помогнете му на известувачот да го состави својот извештај и да го определи конечниот редослед на натпреварувачите во трката.

Решение.За секој од натпреварувачите и гледачите ја користиме само првата буква од неговото име како кратенка.

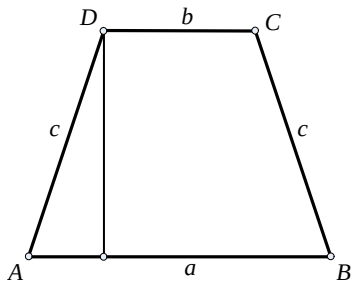
Да претпоставиме дека С е навистина втор. Тогаш, според изјавата н а Г,Р не е четврти. Сега, според изјавата на В, следува дека П е втор. Но, последново противречи на претпоставката дека С е втор. Значи, не е можно С да е втор.

Со оглед на претходниот заклучок и изјавите на А и Г, добиваме дека О е трет и Р е четврти. Бидејќи О е трет, според изјавата на Б, добиваме дека Т е петти. Сега, бидејќи Т е петти, според изјавата на В, добиваме дека П е втор. Конечно, преостанува дека С победил во трката.

Значи, конечниот редослед е:С,П,О,Р,Т

2.Градовите A и B се оддалечени $106\ \text{km}$. На пладне, од градот A, пошол Антонио на велосипед движејќи се кон B со постојана брзина од $30\,\text{km/h}$. По половина час, од градот B пошол Бојан пеш движејќи се од кон A со постојана брзина од $5\,\text{km/h}$. Во моментот кога Антонио поаѓа кон B, од неговиот нос полетала мува летајќи кон B со постојана брзина $50\,\text{km/h}$. Кога мувата го сретнала Бојан му слетала на носот, и веднаш со истата брзина почнала да се враќа кон Антонио и му слетала на носот, и веднаш полетала кон Бојан и се така додека Антонио и Бојан не се сретнале. Колку километриц прелетала мувата?

Решение.Во 12.30 Антонио се наоѓа на $106-15=91$ километри од B.Во истиот момент Бојан поаѓа од B. Времето што им е потребно (мерено од тој момент) за да се сретнат е $\frac{91}{30+5}=\frac{91}{35}=\frac{13}{5}$ часа. Значи, мувата лета половина час(до 12.30) и учте $\frac{13}{5}$ часа, со брзина од $50\,\text{km/h}$. Притоа, прелетува вкупно $50\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{13}{5}\right)=155$ километри.



3.Во рамнокрак трапез со плоштина 20 е впишана кружница со радиус 2. Да се определи должината на секоја од страните на трапезот.

Решение.Дијаметарот на впишаната кружница е еднаков на висината h на дадениот трапез. Значи, $h=4$. За плоштината на трапезот имаме $P=\frac{a+b}{2}h=30$, од каде се добива дека $a+b=10$. Бидејќи дадениот трапез е тангентен, збировите на должините на спротивните страни му се еднакви па $a+b=2c$, од каде добиваме дека $c=5$. Од питагоровата теорема добиваме дека:

$$\frac{a-b}{2}=\sqrt{5^2-4^2}=3.$$

Конечно решевајќи го системот равенки $\begin{cases} a+b=10 \\ a-b=6 \end{cases}$, добиваме $a=8$ и $b=2$.

4.Нека природните броеви m и n имаат по точно 101 делител (броејќи ги и 1 и самите броеви како делители). Докажи дека не е можно mn да има 1000 делители.

Решение.Прво ќе покажеме дека еден природен број k има непарен број на делители ако и само ако е полн квадрат. Навистина, за секој делител d на k кој е помал од $\sqrt{k}$, постои соодветен делител $\frac{k}{d}$ на k кој е поголем од $\sqrt{k}$. Значи, ако k не е полн квадрат тој има парен број на делители, а ако е полн квадрат, тогаш и $\sqrt{k}$ е делител на k и k има вкупно непарен број на делители.

Користејќи го споменатото својство, добиваме дека m и n се полни квадрати, бидејќи имаат непарен број на делители. Но тогаш и mn е полн квадрат и има непарен број на делители, односно не е можно mn да има 1000 делители.

II година

1.Нека $u=-1+i\sqrt{3}$, $v=-1-i\sqrt{3}$, $w=2$ и n е природен број кој не е делив со 3. Докажи дека $u^n+v^n+w^n=0$.

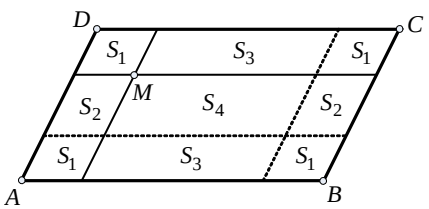
Решение.Имаме $u^3=(-1+i\sqrt{3})^3=8$ и $v^3=(-1-i\sqrt{3})^3=8$. Освен тоа $u^2=2v$ и $v^2=2u$.

Ако $n=3k+1$, каде $k\in\mathbb{N}$, тогаш

$$u^n+v^n+w^n=8^k u+8^k v+8^k w=8^k(u+v+2)=0.$$

Доказот за $n=3k+2$, $k\in\mathbb{N}$ е аналоген.

2.Даден е паралелограм $ABCD$ (темињата A и C се спротивни) и точка M во внатрешноста на паралелограмот. Низ M се повлечени две прави, паралелно на страните на паралелограмот. Двете прави го делат паралелограмот на четири нови паралелограми. Докажи дека плоштината на барем еден од двата нови паралелограми, од кои едниот го содржи темето A а другиот темето C, не е поголема од една четвртина од плоштината на целиот паралелограм $ABCD$.



Решение. Ако точката M е пресек на дијагоналите или лежи на која било од средните линии на паралелограмот, задачата е тривијална.

Да претпоставиме дека M не лежи на некоја од средните линии на паралелограмот. Ако правите повлечени низ M ги пресликаме со централна симетрија во однос на со централна во однос на дијагоналите добиваме уште две нови прави кои заедно со правите низ M го делат паралелограмот $ABCD$ на 9 паралелограми. Ако со P_i ($i=1,2,3,4$) се означат плоштините на добиените паралелограми, а со P плоштината на паралелограмот $ABCD$, добиваме:

$$4P_1+2P_2+2P_3+P_4=P,$$

од каде, бидејќи , добиваме дека

$$4P_1+2P_2+2P_3<P,$$

односно

$$(P_1+P_2)+(P_1+P_3)<\frac{P}{2}.$$

Од последното е јасно дека не е можно и двете плоштини P_1+P_2 и P_1+P_3 да се поголеми од $\frac{P}{4}$.

3.Да се определат 11 реални броја така што секој од нив да е еднаков на квадратот на сумата на преостанатите 10.

Решение.Нека бараните броеви се $x_1, x_2, ..., x_{11}$ и нека важи:

$$x_1 \le x_2 \le ... \le x_{11}. \qquad (1)$$

Нека вкупната сума на броевите е s. Според условите на задачата, имаме:

$$x_i = (s - x_i)^2,\ i = 1,2,3,...,11, \qquad (2)$$

од каде според (1), добиваме:

$$(s - x_1)^2 \le (s - x_2)^2 \le .... \le (s - x_{11})^2. \qquad (3)$$

Бидејќи бараните броеви се квадрати, истите се ненегативни, па од (1) следува дека $s - x_1 \le s - x_2 \le .... \le s - x_{11}$, односно

$$(s - x_1)^2 \ge (s - x_2)^2 \ge .... \ge (s - x_{11})^2. \qquad (4)$$

Од (3) и (4) добиваме дека $(s - x_1)^2 = (s - x_2)^2 = ... = (s - x_{11})^2$, од каде поради ненегативноста, имаме $x_1 = x_2 = ... = x_{11}$. Тогаш за секој од нив важи $x = (10x)^2$, од каде добиваме дека сите барани броеви се 0 или сите се еднакви на $\frac{1}{100}$.

4.Во рамнина се дадени n точки ($n \ge 3$) така што меѓу нив нема три колинеарни. Докажи дека постои кружница низ три од дадените точки така што во внатрешноста на кругот определен со кружницата не лежи ниту една од дадените точки.

Решение.Нека A и B се две од дадените точки така што растојанието од A до B е минимално, односно за секој пар дадени точки X и Y важи $\overline{XY} \ge \overline{AB}$. Понатаму, нека точката C е избрана така што $\sphericalangle ACB$ е максимален, односно за секоја точка Z, различна од A и B, важи $\sphericalangle AZB \le \sphericalangle ACB$. Кружницата низ точките A, B и C ги задоволува бараните услови, затоа што секоја точка W од внатрешноста на кругот важи дека аголот $\sphericalangle AWB$ е поголем од $\sphericalangle ACB$ или некое од растојанијата $\overline{AW}$ и $\overline{BW}$ е помало од $\overline{AB}$, што значи дека ниту една од внатрешните точки на кругот не е една од избраните точки.

III година

1.Нека a, b и c се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} \ge 2.$$

Решение.Користејќи го неравенството меѓу геометриската и хармониската средина

$$\sqrt{xy} \ge \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}},$$

заменувајќи $x = \frac{a}{b+c}$ и $y = 1$, добиваме:

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} \ge \frac{2a}{a+b+c}.$$

Аналогно се добива $\sqrt{\frac{b}{a+c}} \ge \frac{2b}{a+b+c}$ и $\sqrt{\frac{c}{a+b}} \ge \frac{2c}{a+b+c}$.

Со сумирање на трите добиени неравенства се добива бараното неравенство.

Забелешка.Напоменуваме дека случајот на равенство не е можен. Навистина, равенството е можно само ако во трите неравенства кои се сумираат важи равенство, а тоа е исполнето само ако $\frac{a}{b+c}=\frac{b}{c+a}=\frac{c}{a+b}=1$. Лесно се проверува дека последниот услов не е исполнет за ниту еден избор на a,b и c.

2.Да се утврди за кои природни броеви n низата броеви $1,2,3,...,4n$ може да се подели на n групи по 4 броја така што во секоја група еден од броевите е аритметичка средина на останатите три.

Решение.Да разгледаме група од 4 броја a,b,c и d така што бројот d е аритметичка средина на a,b и c. Имаме $a+b+c=3d$, односно $a+b+c+d=4d$. Значи, сумата на броевите од групата е делива со 4. Оттука следува дека за да може да се подели дадената низа на n групи со бараното својство, мора вкупната сума да е делива со 4. Имаме $1+2+...,4n=2n(4n+1)$. Значи, n мора да е парен број.

Нека $n=2k$ е парен број. Тогаш дадената низа е $1,2,...,8k$. Ги делиме дадените броеви на k групи по 8 броеви:

$$1,2,...,8;9,10,...,16;...;8(k-1)+1,8(k-1)+2,....,8k.$$

Избираме една од добиените групи и нека тоа е $8s+1,8s+2,....,8s+8$, каде $0\le s\le k-1$. Ја делиме добиената група на две групи по 4 броја:

$$8s+1,8s+3,8s+4,8s+8;8s+2,8s+5,8s+6,8s+7.$$

Во првата група $8s+4$ е аритметичка средина на преостанатите три броја, а во втората $8s+5$ е аритметичка средина на преостанатите три броја. На овој начин ја делиме секоја од претходно дефинираните групи од 8 елементи на две групи од 4 елементи кои ги задоволуваат бараните услови од задачата.

3.Нека $P(x)$ е полином со целобројни коефициенти така што постои цел број n за кој $P(n)=0$. Докажи дека не постои природен број m така што $P(1995)P(2000)=7^m$.

Решение. Ќе го користиме фактот што ако a и b се цели броеви, тогаш $a-b$ е делител на $P(a)-P(b)$.

Да претпоставиме дека постои m така што $P(1995)P(2000)=7^m$. Тогаш $P(1995)$ и $P(2000)$ се степени на 7 (или на -7).

Користејќи го споменатитот факт, добиваме дека $1995-n$ е делител на $P(1995)$ и $2000-n$ е делител на $P(2000)$. Значи, и $1995-n$ и $2000-n$ се степени на 7 (или на -7). Ако $1995-n$ е 1 или -1, тогаш n е 1994 или 1996, па $2000-n$ е 6 или 4 и не е степен на 7. Ако $2000-n$ е 1 или -1, тогаш n е 1999 или 2001, па $1995-n$ е -4 или -6, па не е степен на 7. Ако $1995-n$ и $2000-n$ се деливи со 7, тогаш и нивната разлика е делива со 7, но нивната разлика е 5 и не е делива со 7.

Значи, не постои природен број m така што $P(1995)P(2000)=7^m$.

4.Еден квадрат е прекриен со правоаголници кои не се преклопуваат и не преоѓаат надвор од квадратот. Докажи дека збирот на плоштините на круговите определени со кружинците опишани околу покривачките правоаголници не е помал од плоштината на кругот определен со кружницата опишана околу почетниот квадрат.

Решение.Нека плоштината на квадратот е P, а на кругот определен со кружницата опишана околу квадратот е K. Тогаш $K=\frac{P\pi}{2}$. Нека плоштината на еден од покривачките

правоаголници е P', а плоштината на кругот определен со кружницата опишана околу правоаголникот е K'. Нека страните на правоаголникот се a и b. Имаме:

$$K' = \frac{a^2+b^2}{4}\pi \geq \frac{\pi ab}{2} = \frac{P'\pi}{2}.$$

Со сумирање на соодветното неравенство за секој од покривачките правоаголници, а со оглед на фактот што сумата нап лоштините на покривачките правоаголници е еднаква нап лоштината на почетниот квадрат го добиваме бараниот резултат.

Забелешка.При добивањето на горното неравенство, користено е неравенство $a^2+b^2 \geq 2ab$ кое е последица на очигледното неравенство $(a-b)^2 \geq 0$.

IV година

1.Нека $a_1, a_2, \ldots$ е бесконечна аритметичка прогресија со прв член a и разлика $d \neq 0$. Докажи дека ако во дадената прогресија постојат три члена кои формираат геометриска прогресија, тогаш $\frac{a}{d}$ е рационален број.

Решение.Нека a_m, a_n и a_p формираат геометриска прогресија. Тогаш: $(a_n)^2 = a_m a_p$, од каде по средувањето, ставајќи $r = n-1$, $s = m-1$ и $t = p-1$, добиваме:

$$a(2r-s-t) = d(st-r^2). \qquad (1)$$

Да претпоставиме дека $2r-s-t=0$. Тогаш:

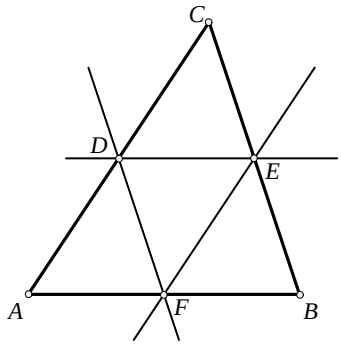
$$st - r^2 = st - \left(\frac{s+t}{2}\right)^2 = -\left(\frac{s-t}{2}\right)^2 < 0,$$

бидејќи s и t се сигурно различни (поради $d \neq 0$). Значи, левата страна на (1) е 0 а десната не е, што не е можно.

Значи, $2r-s-t \neq 0$, па од (1), добиваме:

$$\frac{a}{d} = \frac{st-r^2}{2r-s-t},$$

од каде е јасно дека $\frac{a}{d}$ е рационален број.



2.Во рамнината се дадени n точки ($n \geq 3$) така што нив нема три колинеарни точки и плоштината на секој триаголник определен со три од дадените точки е најмногу 1. Докажи дека постои триаголник ABC во рамнината(темињата не мора да се од дадените точки) со плоштина најмногу 4 така што сите дадени точки се покриени со триаголникот ABC.

Решение.Нека триаголникот DEF има најголема плоштина од сите триаголници чии темиња се три од дадените точки. Низ темето D повлекуваме права паралелна на EF, низ E паралелна на DF а низ F паралелна на DE и на тој начин го добиваме триаголникот ABC. Бидејќи триаголникот DEF има плоштина најмногу 1, триаголникот ABC има плоштина најмногу 4 (ABC се состои од 4 триаголници кои се складни на DEF). Во внатрешноста и на рабовите на ΔABC се наоѓаат точки од рамнината кои со секои две од точките D, E и F определуваат триаголник со плоштина најмногу еднаква на плоштината на DEF. Значи, сите n дадени точки се покриени со ABC.

3.Иста како задача

4.Иста како задача

XXXIX Републички натпревар по математика,1996

I година

1.Збирот на три цели броеви a,b,c е нула. Докажете дека $2a^4+2b^4+2c^4$ е квадрат на цел број.

Решение.Нека $a+b+c=0$. Тогаш

$$a^4+b^4+c^4=a^2(b+c)^2+b^2(a+c)^2+c^2(a+b)^2=$$
$$=2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+2a^2bc+2b^2ac+2c^2ab=$$
$$=2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+2abc(a+b+c)=(a^2+b^2+c^2)^2-a^4-b^4-c^4,$$

од каде што следува

$$2a^4+2b^4+2c^4=(a^2+b^2+c^2)^2 .$$

2.Докажете дека ако

$$a_\circ^{a_1}=a_1^{a_2}=...=a_{1995}^{a_{1996}}=a_{1996}^{a_\circ},\ a_i\in\mathbb{R}^+ ,$$

тогаш $a_\circ=a_1=....=a_{1995}=a_{1996}$.

Решение.Нека $a_\circ\ge a_1$. За да важи $a_\circ^{a_1}=a_1^{a_2}$, мора $a_1\le a_2$, итн. Така се добива

$$a_\circ\ge a_1\Rightarrow a_1\le a_2\Rightarrow a_2\ge a_3\Rightarrow ...\Rightarrow a_{1995}\le a_{1996}\Rightarrow a_{1996}\ge a_\circ\Rightarrow a_\circ\le a_1\Rightarrow ...\Rightarrow a_{1996}\ge a_\circ ,$$

т.е. $a_\circ=a_1=....=a_{1996}$.

Аналогно се добива и при претпоставка $a_\circ\le a_1$.

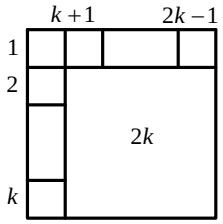
3.Нека h_a,h_b,h_c се висини на триаголник со страни a,b,c , а r е радиус на впишаната кружница во триаголникот. Докажете дека триаголникот е рамностран ако и само ако $h_a+h_b+h_c=9r$.

Решение.Од $h_a=\frac{2P}{a}$, $h_b=\frac{2P}{b}$, $h_c=\frac{2P}{c}$, $r=\frac{2P}{a+b+c}$, добиваме

$$h_a+h_b+h_c=9r \Leftrightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{9}{a+b+c} \Leftrightarrow \frac{a+b+c}{3}=\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \Leftrightarrow$$

аритметичката средина е еднаква со хармониската ако и само ако $a=b=c$.

4.Докажете дека секој квадрат може да се расече на n , $(n\ge 6)$ квадрати, кои не мора да се складни.



Решение.Нека должината на страната на квадратот е a . Ако $n=2k$, ($k\ge 3$), постапуваме како на цртежот долу, при што страната на малиот квадрат е $\frac{a}{k}$. Ако $n=2k+1$, ($k\ge 3$), тогаш квадратот најпрво го делиме на $2k-2$ делови како во првиот случај, а потоа еден од квадратите го делиме на четири складни квадрати и вкупно добиваме $2k-2+3=2k+1=n$ квадрати.

II година

1.Докажете дека за кои било позитивни реални броеви a и b важи неравенството

$$2\sqrt{a}+3\sqrt[3]{b}\ge 5\sqrt[5]{ab} .$$

Решение.Од неравенството меѓу аритгметичка и геометриска средина за пет позитивни реал ни броеви имаме:

$$2\sqrt{a}+3\sqrt[3]{b}=\sqrt{a}+\sqrt{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b}\geq 5\sqrt[5]{\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{b}\cdot\sqrt[3]{b}\cdot\sqrt[3]{b}}=5\sqrt[5]{ab}\ .$$

2.Во триаголник ABC точката M е средина на страната $\overline{BC}=a$. Нека r,r_1,r_2 се радиусите на кружинците впишани во триаголниците ABC, ABM и ACM соодветно. Докажите го неравенството

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\geq 2\left(\frac{1}{r}+\frac{2}{a}\right).$$

Решение.Нека P,P_1,P_2 се плоштините на триаголниците ABC, ABM и ACM соодветно. Јасно е дека $P_1=P_2=\frac{P}{2}$. Од тоа што

$$P_1=r_1s_1=r_1\left(\frac{\overline{AB}+\overline{BM}+\overline{AM}}{2}\right)=\frac{r_1}{2}\left(c+\frac{a}{2}+m\right),$$

и

$$P_2=r_2s_2=r_2\left(\frac{\overline{AM}+\overline{CM}+\overline{AC}}{2}\right)=\frac{r_2}{2}\left(m+\frac{a}{2}+b\right),$$

имаме

$$P=r_1\left(c+\frac{a}{2}+b\right)=r_2\left(m+\frac{a}{2}+b\right).$$

Така,

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}=\frac{c+\frac{a}{2}+m}{P}+\frac{m+\frac{a}{2}+b}{P}=\frac{a+b+c}{P}+\frac{2m}{P}=\frac{2}{r}+\frac{4m}{ah}\geq\frac{2}{r}+\frac{4}{a}=2\left(\frac{1}{r}+\frac{2}{a}\right).$$

3.Нека $A=\{z_1,z_2,....,z_{1996}\}$ е множество од комплексни броеви и нека за секој $i\in\{1,2,3,....,1996\}$ е исполнето равенството

$$\{z_iz_1,z_iz_2,....,z_iz_{1996}\}=A\ .$$

а)Докажете дека за секој i е исполнето $|z_i|=1$.

б)Докажете дека од $z\in A$ следува $\overline{z}\in A$.

Решение.а)Да претпоставиме дека за некое i важи $|z_i|>1$. Нека е тоа токму бројот со максимален модул. Тогаш $z_i^2=z_i\overline{z_i}\in A$, па

$$|z_i^2|=|z_i|^2>|z_i|,$$

што противречи на максималноста на $|z_i|$.

Ако за некое i важи $0<|z_i|<1$, избирајќи го токму бројот со минимален модул, повторно добиваме проривречност $|z_i^2|=|z_i|^2<|z_i|$, со минималноста на $|z_i|$.

На крајот ако за некое i важи $|z_i|=0$, т.е. $z_i=0$, па сите елементи од A би биле еднакви на нула, што е невозможно.

Следствено, за секој i е исполнето $|z_i|=1$.

б)Нека $z\in A$. Ги разгледуваме броевите $z,z^2,z^3,...$. Според условот на задачата и овие елементи припаѓаат во A. Бидејќи A е конечно множество, за некои m и l мора да важи $z^m=z^l$, односно $z^k=1$. Ако ставиме $z'=z^{k-1}$, добиваме $z'z=z^k=1$, а од тука

$$z'=\frac{1}{z}=\frac{\overline{z}}{z\overline{z}}=\frac{\overline{z}}{|z|^2}=\frac{\overline{z}}{1}=\overline{z},$$

бидејќи $|z|=1$, според а).Така $\overline{z}=z'\in A$.

4.Одредете ја најголемата вредност на разликата $x-y$ ако

$$2(x^2+y^2)=x+y\ . \qquad (1)$$

Решение. Нека $a = x - y$, односно $x = a + y$. Ако замениме во (1), добиваме

$$2(y+a)^2 + 2y^2 = a + 2y,$$

односно $4y^2 + 2(2a-1)y + 2a^2 - a = 0$. Последната равенка е задоволена и за $a = a_{\max}$. Таа има барем еден реален корен y ако и само ако

$$D = (2a-1)^2 - 4(2a^2 - a) \geq 0,$$

односно $4a^2 - 1 \leq 0$. Ова е точно само ако $a \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Така $a_{\max} = \frac{1}{2}$.

III година

1. Решете ја равенката

$$x^{1996} - 1996x^{1995} + ... + 1 = 0$$

(коефициентите пред $x, x^2, ..., x^{1994}$ не се познати), ако се знае дека нејзините корени се позитивни реални броеви.

Решение. Нека $x_1, x_2, ..., x_{1996}$ се решенија на дадената равенка. Од Виетовите формули е:

$$x_1 + x_2 + ... + x_{1996} = 1996$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_{1996} = 1.$$

Значи,

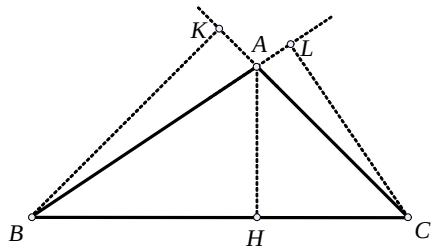
$$\frac{x_1 + x_2 + ... + x_{1996}}{1996} = 1 = \sqrt[1996]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_{1996}},$$

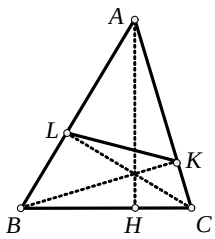
т.е. аритметичката средина е еднаква на геометриската средина, па следува дека

$$x_1 = x_2 = ... = x_{1996} = 1.$$

2. Нека AH, BK и CL се висини на произволен триаголник ABC. Докажете дека

$$\overline{AK} \cdot \overline{BL} \cdot \overline{CH} = \overline{AL} \cdot \overline{BH} \cdot \overline{CK} = \overline{HK} \cdot \overline{KL} \cdot \overline{LH}. \qquad (1)$$





Решение. Нека аглите при темињата A, B, C на дадениот триаголник се α, β, γ соодветно. Тогаш

$$\overline{AK} = \overline{AB}\,|\cos\alpha|, \quad \overline{AL} = \overline{AC}\,|\cos\alpha|,$$

(знакот за апсолутна вредност е за случај кога α е тап агол). Според тоа, триаголникот AKL е сличен со триаголникот ABC со коефициент на сличност $|\cos\alpha|$, па значи,

$$\overline{KL} = \overline{BC} \cdot |\cos\alpha|.$$

Ставајќи ги во равенствата (1) соодветните изрази за останатите отсечки, кои учествуваат во равенствата, се добива дека сите три разгледувани производи се еднакви на

$$\overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{CA} \cdot |\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma|.$$

3. Дадена е тројката броеви

$$2, \sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Дозволен е премин на една тројка реални броеви во друга на следниот начин:кои било два броја од тројката се заменуваат со: нивниот збир поделен со $\sqrt{2}$, нивната разлика поделена со $\sqrt{2}$, а третиот останува ист. Дали е можно со такви постапки, по неколку чекори дадената тројка да премине во тројката

$1, \sqrt{2}, 1+\sqrt{2}$.

Решение.Трансформацијата

$$(x,y) \to \left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}, \frac{x-y}{\sqrt{2}} \right),$$

го запазува збирот на квадратите на паррот броеви:

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}, \frac{x-y}{\sqrt{2}} \right).$$

Според тоа процедурата, дадена во задачата, ја запазува сумата од квадрати на дадената тројка. Па како е

$$2^2 + (\sqrt{2})^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 = 6\frac{1}{2} \neq 1 + (\sqrt{2})^2 + (1+\sqrt{2})^2 = 6 + 2\sqrt{2},$$

не е можно да се премине од едната тројка во другата тројка.

4.Дадени се конечно многу точки во рамнината, такви што сите не припаѓаат на една права. На секоја точка и е придружен еден реален број. Збирот на броевите придружувани на точките што и припаѓаат на секоја права, која содржи барем две од дадените точки, е нула.Докажете дека сите придружени броеви на дадените точки е нула.

Решение.Нека на некоја точка X и е придружен број a_x. Да претпоставиме дека $a_x \neq 0$. Без губење на општоста можеме да претпоставиме дека $a_x > 0$. Низ X ги повлекуваме сите прави кои содржат барем уште една точка од дадените. Нека n_x е бројот на сите прави низ X, а S е збирот на сите броеви придружени на дадените точки. Бидејќи збирот на броевите придружени на точките кои што припаѓаат на права која содржи барем две од дадените точки е нула, следува дека збирот на броевие на сите n_x прави е нула. Оттука добиваме

$$n_x a_x + S - a_x = 0,$$

т.е.

$$(n_x - 1)a_x + S = 0. \qquad (1)$$

Бидејќи $a_x > 0$, постои точка Y различна од X, така што $a_y < 0$ (збирот на броевите од една права е еднаков на нула). И за точката Y како и за точката X, важи

$$(n_y - 1)a_y + S = 0 \qquad (2)$$

Од (1) и (2) добиваме:

$$(n_x - 1)a_x = (n_y - 1)a_y. \qquad (3)$$

Бидејќи сите точки не припаѓаат на една права, следува дека $n_x > 1$ и $n_y > 1$. Левата страна во (3) е пзитивна а десната страна е негативна. Добиената контрадикција со претпоставката дека постои точка X на која и е придружен број различен од нула. Значи, сите придружени броеви на дадените точки се нула.

IV година

1.Иста како задача 3 од трети клас.

2.Иста како задача 4 од трети клас.

3.Дадени се реални броеви $a_1, a_2, ..., a_n$ за кои важи $|a_j| < M$, $j = 1, 2, ..., n$ и $a_1 + a_2 + ... + a_n = 0$. Докажете дека

$$a_1 + 2a_2 + ... + na_n \le \frac{n^2}{4}M \ .$$

Решение.Нека $S = a_1 + 2a_2 + ... + na_n$. Тогаш

$$S = (a_1 + a_2 + ... + a_n) + (a_2 + a_3 + ... + a_n) + ... + (a_{n-1} + a_n) + a_n \ .$$

Понатаму, $a_1 + a_2 + ... + a_n = 0$, а за $k \in \{1, 2, 3, ..., n-1\}$ добиваме

$$\sum_{j=k+1}^{n} a_j \le \left| \sum_{j=k+1}^{n} a_j \right| \le \sum_{j=k+1}^{n} |a_j| \le (n-k)M$$

$$\sum_{j=k+1}^{n} a_j \le \left| \sum_{j=k+1}^{n} a_j \right| \le \left| \sum_{j=1}^{k} a_j \right| \le \sum_{j=1}^{k} |a_j| \le kM \ .$$

Па затоа

$$a_{k+1} + a_{k+2} + ... + a_n \le \min\{(n-k)M, kM\} = \begin{cases} kM & , \text{ за } k \le \frac{n}{2} \\ (n-k)M & , \text{ за } k > \frac{n}{2} \end{cases}$$

Да ги разгледаме случаите кога n е парен, односно n е непарен број.

i) Ако $n = 2l$, тогаш

$$S \le M + ... + (l-1)M + lM + (l-1)M + ... + M = 2\frac{l(l-1)}{2}M + lM = l^2 M = \frac{n^2}{4}M \ .$$

ii) Ако $n = 2l + 1$, тогаш

$$S \le 2(M + 2M + ... + lM) = l(l+1)M = \frac{n^2 - 1}{4}M < \frac{n^2}{4}M \ .$$

4.Две кружници со радиуси R и r , $r < R$ се допираат од внатрешната страна. Најдете ја страната на рамностраниот триаголник ако се знае дека едно негово теме е допирната точка н а кружн ицата, а другите две темиња лежат на кружинците, по едно на секоја.

Решение.Бидејќи кружниците се допираат, допирната точка и нивните центри лежат на една иста права. Имаме $\sphericalangle ACD = \sphericalangle ABE = 90^\circ$.Ќе разгледаме два случаи:

i) бараниот триаголник ABC е на една страна од дијаметарот(цртеж 1).

Имаме, $\overline{AD} = 2r$, $\overline{AE} = 2R$, $\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} = \frac{a}{2R} = \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$, $\frac{a}{2r} = \cos\alpha$. Значи,

$$\frac{a}{2R} = \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\cos\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha = \frac{1}{2}\frac{a}{2r} - \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1 - \frac{a^2}{4r^2}} \ , \ 0 < \alpha < 90^\circ \ .$$

Бидејќи, $2r < R$ добиваме $\frac{a}{4r} - \frac{a}{2R} = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1 - \frac{a^2}{4r^2}}$, односно

$$a = rR\sqrt{\frac{3}{R^2 - Rr + r^2}} \ . \qquad (1)$$

ii) бараниот триаголник ABC е поделен од дијаметарот(цртеж 2). Сега $\alpha + \beta = 60^\circ$, $\frac{a}{2R} = \cos\beta$, $\frac{a}{2r} = \cos\alpha$. Значи,

$$\frac{a}{2R} = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = \frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha = \frac{1}{2}\frac{a}{2r} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1 - \frac{a^2}{4r^2}} \ , \ 0 < \alpha < 90^\circ \ .$$

Од $2r > R$ го добиваме (1).

XL Републички натпревар 1997

I година

1. Дадена е низата $\frac{1}{1},\frac{2}{1},\frac{1}{2},\frac{3}{1},\frac{3}{2},\frac{1}{3},\frac{4}{1},\frac{3}{2},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\ldots$. Кој број стои на 1997-то место?

Решение. Лесно се воочува дека членовите на низата се подредени во "групи", такви што збирот на броителот и именителот во секоја од нив е ист за сите броеви од таа "група". Така, првата "група", има еден член (со збир на броителот и именителот еднаков на 2), втората "група" има два члена (со збир на броителот и именителот еднаков на 3), третата група има три члена (со збир еднаков на 4), итн., n-тата група има n членови(со збир на броителот и именителот еднаков на $n+1$), т.е. тоа е "групата"

$$\frac{n}{1},\frac{n-1}{2},\frac{n-2}{3},\ldots,\frac{2}{n-1},\frac{1}{n}.$$

Заклучно со ова "група" низата содржи

$$S_n = 1+2+3+4+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

члена. Бидејќи се бара кој член на низата се наоѓа на 1997-то место, прво треба да определиме во која "група" се наоѓа бараниот член на низата. Имаме

$$\frac{n(n+1)}{2} \le 1997 \le \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

од каде што наоѓаме дека $n=62$. Тогаш $S_{62}=1953$, а до 1997 има место за уште 44 членови, кои се од "групата"

$$\frac{63}{1},\frac{62}{2},\frac{61}{3},\ldots,\frac{20}{44},\ldots,\frac{1}{63}.$$

Следствено, бараниот број е $\frac{20}{44}$.

2. На шаховска табла со димензии 8×8 во секое поле, на произволен начин, се поставени цифрите 0 и 1. Распоредот на цифрите може да се менува со потези на следниот начин: со еден потег се менува распоредот на цела редица или цела колона, при што нулите стануваат единици, а единиците нули. Докажете дека постои низа од потези со коишто на таблата ќе се добие состојба во која збирот на цифрите во секоја редица и секоја колона е поголем или еднаков на 4.

Решение.Нека претпоставиме дека на таблата постои редица или колона таква што бројот на единиците е помал од 4. Со $S_\circ$ да го означиме бројот на единиците поставени на почетната позиција на таблата, а со S_1 да го означиме бројот на единици после промената на некој од потезите во следната стратегија:

Потег 1. Бараме редица која содржи помалку од 4 единици. Можни се два случаја.

1а) таква редица постои и истата ја менуваме, со што на таблата ќе добиеме редица која ќе има најмалку 5 единици, а бројот на единиците на таблата ќе се зголеми најмалку за две;

2а) таква редица не постои И тогаш одиме на вториот потег.

Потег 2.Бараме колона во која бројот на единиците е помал од 4. Можни се два случаја:

1б) таква колона постои И истата ја менуваме, со што на таблата ќе добиеме колона која ќе има најмалку 5 единици, а бројот на единиците на таблата ќе се зголеми за две;

2б) таква колона не постои и тогаш одиме на првиот потег.

Така во случаите 1а) и 1б) го менуваме и бројот на единиците на таблата, при што добиваме низа $S_\circ, S_1, S_2, S_3, \ldots$, за која важи $S_\circ < S_1 < S_2 < S_3 < \ldots$. Но, на таблата има 64

полиња, на кои може да се постават најмногу 64 единици. Затоа постапката ќе заврши, т.е. после некој потег нема да може да го зголемиме бројот на единиците во ниедна редица и во ниедна колона, што значи збирот на елементите во секоја редица и секоја колона ќе биде поголем или еднаков на 4

3.Киро и Рампо ја играат следната игра: од две купчиња со камчиња, Киро го зема едното, а другото, по свој избор, го разделува на две купчиња. Рампо зема едно од двете нови купчиња, а другото по свој избор, го разделува на две нови купчиња, итн. Играта ја губи оној што не може да го подели преостанатото купче. Во кој случај, со вистинскастратегија, играта ја добива Киро, а во кој случај Рампо? Која е стратегијата?

Решение. Ако барем едно купче е "парно", тогаш тоа купче Киро ќе го раздели на две непарни купчиња. Рампо, избирајќи едно од тие две купчиња, другото ќе го раздели на "парно" и " непарно" . Сега, одново Киро ќе го избере "непарното" купче, а парното ќе го раздели на две "непарни" купчиња итн., се до последниот потег на Рампо на ког ќе му останат две купчиња со по едо камче, кои што, се разбира, не може да се поделат, па затоа Рампо ја губи играта.

Кога и двете купчиња имаат непарен број камчиња, тогаш по првиот потег на Киро, Рампо е во позиција да има на располагање "парно" и "непарно" купче, па затоа во овој случај Рампо ја добива играта.

Значи, стратегијата на ова игра е: на противникот да му оставите на располагање две "непарни" купчиња.

4.Нека H е ортоцентарот на остроаголниот триаголник ABC, D,E и F се подножните точки на висините спуштени од темињата A,B и C соодветно, и нека $\overline{AH}=\overline{HD}$ и $\overline{BH}=2\overline{HE}$.

а)Најдете го односот $\overline{CH}:\overline{HF}$,

б)Најдете го аголот ACB.

Решение.а) Од условите на задачата имаме:

$$P_{AHC}=\frac{1}{2}\overline{AC}\cdot\frac{1}{3}\overline{BE}=\frac{1}{3}P_{ABC} \qquad \text{и} \qquad P_{BHC}=\frac{1}{2}\overline{BC}\cdot\frac{1}{3}\overline{AD}=\frac{1}{2}P_{ABC}\ .$$

Според тоа,

$$P_{AHB}=P_{ABC}-P_{AHC}-P_{BHC}=P_{ABC}-\frac{1}{2}P_{ABC}-\frac{1}{3}P_{ABC}=\frac{1}{6}P_{ABC}\,.$$

Но,

$$P_{AHB}=\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{HF} \qquad \text{и} \qquad P_{ABC}=\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{CF}\ ,$$

и ако замениме во последното равенство, добиваме $\overline{HF}=\frac{1}{6}\overline{CF}$, од што следува $\overline{CH}:\overline{HF}=5:1$.

б) Нека G средина на $\overline{BH}$. Триаголникот BDH е правоаголен, со прав агол во темето D, па затоа $\overline{BG}=\overline{GH}=\overline{GD}$. Од $\overline{AH}=\overline{HD}$, $\overline{EH}=\overline{HG}$ и $\measuredangle AHE=\measuredangle DHG$, следува $\Delta AEH\cong\Delta DGH$. Според тоа, $\overline{AE}=\overline{DG}=\overline{HG}=\overline{EH}$, т.е. ΔAEH е рамнокрак И правоаголен, па значи $\measuredangle EAH=45^\circ$. Конечно, од триаголникот CAD добиваме

$$\measuredangle ACB=90^\circ-\measuredangle CAD=90^\circ-\measuredangle EAH=45^\circ\,.$$

II година

1.Во множеството на реалните броеви решете ја неравенката

$$\frac{4x+15-4x^2}{\sqrt{4x+15}+2x} \geq 0 .$$

Решение.//јасна е.

2.Нека p е прост број, $p>2$. Дали постојат природни броеви x и y такви што $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{2p}$?

Решение. Нека претпоставиме дека постојат природни броеви x и y такви што $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{2p}$. Со квадрирање на последното равенство добиваме

$$x+y+2\sqrt{xy}=2p . \qquad (1)$$

Бидејќи, x,y и $2p$ се природни броеви, од (1) следува дека и $\sqrt{xy}$ е природен број, т.е. $xy=k^2$, $k\in\mathbb{N}$. Тогаш, $x+y=2(p-k)$. Од последните две равенства заклучуваме дека x и y се решенија на квадратаната равенка

$$t^2-2(p-k)t+k^2=0 . \qquad (2)$$

Значи, решенијата на равенката (2) се природни броеви, па затоа нејзината дискриминанта е ненегативна и е полн квадрат, т.е. $4p(p-2k)\geq 0$ и $4p(p-2k)=4m^2$. Јасно, $4p(p-2k)\geq 0$, бидејќи во спротивно е $p=2k$, што противречи на $p>2$ и p е прост број. Според тоа $p(p-2k)=m^2$, $m\neq 0$, и бидејќи p е прост број, добиваме $m=pn$, за некој $n\in\mathbb{N}$. Конечно, за секој прост број $p, p>2$, не постојат такви природни броеви x и y такви што $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{2p}$.

3.Најдете природни броеви p и q такви што нулите на триномите x^2-px+q и x^2-qx+p да бидат природни броеви.

Решение. Нека x_1 и x_2 се решенија на равенката $x^2-px+q=0$, а y_1,y_2 на равенката $x^2-qx+p=0$. Од Виетовите формули имаме

$$x_1+x_2=p , \qquad x_1x_2=q$$
$$y_1+y_2=q , \qquad y_1y_2=p .$$

Ќе разгледаме два случаја.

I **случај.** Еден од броевите x_1,x_2,y_1,y_2 е еднаков на 1. Нека тоа е x_1. Од (1) следува дека $q+1=p$ И со замена во (2) добиваме $y_1+y_2+1=y_1y_2$, т.е. $(y_1-1)(y_2-1)=2$. Бидејќи $y_1,y_2\in\mathbb{N}$, од последното равенство следува $y_1-1=1$, $y_2-1=2$, или $y_1-1=2$, $y_2-1=1$. Конечно наоѓаме $y_1=2, y_2=3$, или $y_1=3, y_2=2$, односно $p=6, q=5$.

II **случај.** Нека $x_1,x_2,y_1,y_2>1$. Од $x_1+x_2\leq x_1x_2$ и $y_1+y_2\leq y_1y_2$ добиваме $p\leq q$ и $q\leq p$, т.е. $p=q$. Но x_1,x_2 се природни броеви, па затоа $p^2-4p=n^2$, од што следува $p\geq 4$, и $(p+n-2)(p-n-2)=4$. Од $p\geq 4$ добиваме $p+n-2>0$, а оттука следува и дека $p-n-2>0$. Но, $p+n-2\geq p-n-2$, па затоа од последното равенство ги добиваме системите

$$\begin{cases} p+n-2=4 \\ p-n-2=1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} p+n-2=2 \\ p-n-2=2 \end{cases}.$$

Првиот систем нема целобројни решенија, а од вториот добиваме $p=4$, $n=0$. Конечно, бараните броеви се $p=6, q=5$; $p=5, q=6$ и $p=q=4$.

4.Даден е триаголник ABC. На полуправите BA, CB и AC определени се точки A_1, B_1 и C_1 соодветно, такви што $\overline{BA_1} = (1+n)\overline{AB}$, $\overline{CB_1} = (1+n)\overline{CB}$, $\overline{AC_1} = (1+n)\overline{AC}$. Определете го односот на плоштините на триаголниците ABC и $A_1B_1C_1$.

Решение. Ставаме $\overline{BA} = c$, $\overline{CB} = a$ и $\overline{AC} = b$, и добиваме

$$\overline{AA_1} = nc, \qquad \overline{BB_1} = na, \qquad \overline{CC_1} = nb.$$

Триаголниците C_1B_1B и C_1BC имаат еднакви висини спуштени на основите CB и BB_1, па затоа

$$\frac{P_{C_1B_1B}}{P_{C_1BC}} = \frac{na}{a} = n. \tag{1}$$

Аналогно,

$$\frac{P_{C_1BC}}{P_{ABC}} = \frac{nb}{b} = n. \tag{2}$$

Од (1) и (2) добиваме $P_{C_1B_1B} = n^2 P_{ABC}$. Значи, $P_{B_1C_1C} = (n^2+n)P_{ABC}$. Аналогно, $P_{A_1B_1B} = (n^2+n)P_{ABC}$ и $P_{C_1A_1A} = (n^2+n)P_{ABC}$. Конечно,

$$P_{A_1B_1C_1} = P_{ABC} + P_{A_1B_1B} + P_{B_1C_1C} + P_{C_1A_1A} = (3n^2+3n+1)P_{ABC},$$

т.е.

$$\frac{P_{A_1B_1C_1}}{P_{ABC}} = 3n^2+3n+1.$$

III година

1.Во множеството на реалните броеви решете ја равенката

$$\log_{1997}(\sqrt{1+x^2}+x) = \log_{1997}(\sqrt{1+x^2}-x)$$

Решение. Нека $x>0$. Тогаш $\sqrt{x^2+1}+x>1$, па затоа

$$\log\left(\sqrt{x^2+1}+x\right) > 0.$$

Од друга страна $\sqrt{x^2+1}-x = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} < 1$, што значи $\log\left(\sqrt{x^2+1}-x\right) < 0$.

Според тоа, не постои реален број $x>0$, кој е решение на дадената равенка. Аналогно се покажува дека дека не постои реален број $x<0$ кој е решение на дадената равенка. Со непосредна проверка наоѓаме дека единствено решение на равенката е $x=0$.

2. Нека x, y и z се реални броеви такви што $x+y+z=0$. Докажете дека $|\cos x|+|\cos y|+|\cos z| \geq 1$.

Решение.Од $x+y+z=0$, добиваме $\cos(x+y+z)=1$. Од адиционите теореми, својствата на апсолутната вредност и неравенствата $|\cos\alpha| \leq 1$ и $|\sin\alpha| \leq 1$, за секој $\alpha \in \mathbb{R}$, добиваме

$$\begin{aligned}1 &= |\cos(x+y+z)| = |\cos x\cos(y+z) - \sin x\sin(y+z)| \leq |\cos x||\cos(y+z)| + |\sin x||\sin(y+z)| \\ &\leq |\cos x| + |\sin(y+z)| = |\cos x| + |\sin y\cos z + \cos y\sin z| \leq |\cos x| + |\sin y||\cos z| + |\cos y||\sin z| \\ &\leq |\cos x| + |\cos y| + |\cos z|\end{aligned}$$

3. Дадени се осумнаесет отсечки со должини x_i, $i=1,2,3,...,18$, такви што $1 \le x_i \le 1997$, $i=1,2,3,...,18$. Докажете дека меѓу овие отсечки постојат три со кои може да се конструира триаголник.

Решение. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека должините на отсечките се такви што $1 \le x_1 \le x_2 \le ... \le x_{18} \le 1997$. Нека претпоставиме дека меѓу дадените отсечки не постојат три од кои може да се конструира триаголник. Тогаш $x_i \ge x_{i-1} + x_{i-2}$, $i=3,4,5,...,18$, и бидејќи $x_1, x_2 \ge 1$, добиваме дека должината на осумнаесеттата отсечка ќе биде поголема или еднаква на осумнаесеттиот член на низата на фибоначи:

$$1, 21, 2, 3, 5, 8, , 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584.$$

Според тоа, $x_{18} \ge 2584$, што противречи на $1 \le x_i \le 1997$, $i=1,2.3,4,5,...,18$. Значи, меѓу дадените отсечки постојат три од кои може да се конструира триаголник.

4. Права p допира кружница k опишана околу четириаголник $ABCD$. Со K да ја означиме допирната точка на правата и кружницата. Познато е дека правите AC и BD на правата p отсекуваат исечок симетричен во однос на точката K. Докажете дека и правите AB и CD на правата p отсекуваат исечок симетричен во однос на точката K.

Решение. Ги воведуваме ознаките $AC \cap p = N, BD \cap p = M, AB \cap p = F$, $CD \cap p = R$, $\overline{FK} = x$, $\overline{RK} = y$, $\alpha = \measuredangle FBM, \beta = \measuredangle BFK, \gamma = \measuredangle KRC$ и $\varphi = \measuredangle BAC$. Јасно $\measuredangle ABD = \alpha$, $\measuredangle ACD = \alpha$, $\measuredangle RCN = \alpha$ и $\varphi = \measuredangle BAC$. Од степен на точка во однос на кружница имаме $\overline{NC} \cdot \overline{NA} = \overline{NK}^2$, $\overline{MB} \cdot \overline{MD} = \overline{MK}^2$ и бидејќи $\overline{MK} = \overline{NK}$, следува

$$\overline{NC} \cdot \overline{NA} = \overline{MB} \cdot \overline{MD}. \qquad (1)$$

Од синусната теорема, применета на ΔRNC, ΔNFA, ΔMRD и ΔFMB добиваме

$$\overline{MC} = (b-y)\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}, \quad \overline{NA} = (b+x)\frac{\sin\beta}{\sin\varphi}, \quad \overline{MB} = (b-x)\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}, \quad \overline{MD} = (b+y)\frac{\sin\gamma}{\sin\varphi}$$

Соодветно. Со замена во (1) добиваме

$$(b-y)(b+x)\frac{\sin\gamma\sin\beta}{\sin\alpha\sin\varphi} = (b-x)(b+y)\frac{\sin\gamma\sin\beta}{\sin\alpha\sin\varphi},$$

и бидејќи

$$\frac{\sin\gamma\sin\beta}{\sin\alpha\sin\varphi} \ne 0,$$

имаме $(b-y)(b+x) = (b-x)(b+y)$, од што следува дека $x = y$, што и требаше да се докаже.

IV година

1.Нека растојанијата од точката M до темињата A, B и C на триаголникот ABC се p, q и r соодветно. Докажете дека не постојат реален број $d \ne 0$ и точка F во рамнината на триаголникот ABC такви што растојанијата од точката F до темињата A, B и C се еднакви на $\sqrt{p^2+d}$, $\sqrt{q^2+d}$ и $\sqrt{r^2+d}$ соодветно.

Решение. Нека претпоставиме дека постојат реален број $d \ne 0$ и точка F во рамнината на триаголникот ABC такви што растојанијата од точката F до темињата A, B и C се $\sqrt{p^2+d}$, $\sqrt{q^2+d}$ и $\sqrt{r^2+d}$, соодветно. Тогаш

$$\begin{aligned}\overline{AF}^2-\overline{AM}^2&=d\\ \overline{BF}^2-\overline{BM}^2&=d\\ \overline{CF}^2-\overline{CM}^2&=d\end{aligned}\qquad(1)$$

Од друга страна, геометриското место на точки D за кои важи $\overline{DF}^2-\overline{DM}^2=d$ е права нормална на FM. Навистина, ако D_1 е проекција на D врз правата FM, тогаш

$$\overline{D_1F}^2-\overline{D_1M}^2=\left(-\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{DF}\right)^2-\left(-\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{DM}\right)^2=\overline{DF}^2-\overline{DM}^2+2\overrightarrow{DD_1}(\overrightarrow{DF}-\overrightarrow{DM})=$$
$$=\overline{DF}^2-\overline{DN}^2+2\overrightarrow{DD_1}\overrightarrow{FM}=\overline{DF}^2-\overline{DM}^2=d^2.$$

Бидејќи на правата FM постои единствена точка D_1 за која важи $\overline{D_1F}^2-\overline{D_1M}^2=d^2$, заклучуваме дека сите точки на разгледуваното геометриско место ортогонално се проектираат во точката D_1, т.е. тоа е права нормална на правата FM. Конечно, од (1) следува дека правите AB, BA и CA се нормални на правата FM, т.е. точките A, B и C се колинеарни, што не е можно, бидеји тие се темиња на триаголник.

2. Нека $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ е строго растечка функција таква што за секои $x,y\in(0,+\infty)$ и за секој $\lambda\in(0,1)$ важи

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\le\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y).$$

Докажете дека низата $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ не содржи бесконечна аритметичка прогресија.

Решение. Бидејќи f е строго растечка функција, добиваме дека низата $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ е строго растечка, па затоа секоја нејзина подниза е строго растечка. Да претпоставиме дека низата $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ содржИ подниза која е бесконечна аритметичка прогресија, т.е. дека постои низа $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$, таква што за секој $k\in\mathbb{N}$ важи $a_k=f(n_k)$. Јасно, разликата d на низата $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ е позитивнеа, од што следува $0<d=a_{k+1}-a_k=f(n_{k+1})-f(n_k)$, $k\in\mathbb{N}$, т.е.

$$n_k<n_{k+1},\ k\in\mathbb{N}.\qquad(2)$$

За членовите на низата $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ важи $a_k=\dfrac{a_{k-1}+a_{k+1}}{2}$, $k>1$. Ако се искористи неравенството (1) при $\lambda=\dfrac{1}{2}$, за $k>1$ добиваме

$$f(n_k)=\frac{f(n_{k-1})+f(n_{k+1})}{2}>f\left(\frac{n_{k-1}+n_{k+1}}{2}\right).$$

Бидејќи f е строго растечка функција, од последното неравенство следува $n_k>\dfrac{n_{k-1}+n_{k+1}}{2}$, односно,

$$n_k-n_{k-1}>n_{k+1}-n_k,\ k>1.\qquad(3)$$

Од неравенството (3) добиваме $n_2-n_1>n_3-n_2>\ldots>n_i-n_{i-1}>n_{i+1}-n_i>\ldots$, што не е можно, бидејќи според (2) броевите $n_{k+1}-n_k$, $k\in\mathbb{N}$ се природни, а не постојат бесконечно многу природни броеви помали од бројот n_2-n_1.

3.Иста како задача 3 од трета година

4.Иста како задача 4 од трета година

XXXVII Републички натпревар 1998_Гевгелија

I година

1. Најди ги сите четирицифрени броеви, кои се запишуваат со четири последователни цифри, во произволен редослед, такви што нивниот производ со $\frac{2}{3}$ е број запишан со истите цифри.

Решение. Нека бараниот број е x и нека $y=\frac{2}{3}x$. Од последното равенство имаме $3y=2x$, па затоа $3\mid x$ и $2\mid y$. Од критериумот за деливост со бројот 3 следува дека збирот на цифрите на бројот x е делив со 3. Но, бројот y е запишан со истите цифри како и бројот x, па затоа $3\mid y$.

Од досега изнесеното имаме $2\mid y, 3\mid y$ и НЗД$(2,3)=1$, па затоа $y=6k$, што значи $x=\frac{3}{2}y=\frac{3}{2}\cdot 6k=9k$. Според тоа, $9\mid x$ и од критериумот за деливост со 9 добиваме дека збирот на цифрите на бројот x се дели со 9. Јасно, и збирот на цифрите на бројот y се дели со 9. Но, броевите x и y се запишани со четири последователни цифри $n, n+1, n+2, n+3$, па затоа нивниот збир е $4n+6$, $n\in\mathbb{N}$ и $n\le 6$. Значи,

$$9\mid 4n+6,\quad n\in\mathbb{N}\quad \text{и}\quad n\le 6. \tag{1}$$

Условот (1) е исполнет само за $n=3$, од што следува дека цифрите со кои се запишани броевите x и y се $3,4,5$ и 6.

Од досега изнесеното имаме $3456\le x\le 6543$ и како $y=\frac{2}{3}x$ добиваме $2304\le y\le 4362$. Но, бројот y е запишан со цифрите $3,4,5$ и 6 е делив со 2 па затоа можни решенија за y се броевите

$3456, 3546, 3564, 3654, 4356$ и 4536,

на кои им соодветствуваат следните решенија за бројот x

$5184, 5319, 5346, 5481, 6534$ и 6804.

Но, x е запишан со цифрите $3,4,5$ и 6 па затоа единствени решенија се 5346 и 6534.

2. Докажи дека разликата $(\underbrace{55...5}_{n-1}\underbrace{444...4}_{n-1}5)^2-(\underbrace{55...5}_{n-1}\underbrace{444...4}_{n})^2$ е точен квадрат на природен број.

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}(\underbrace{55...5}_{n-1}\underbrace{444...4}_{n-1}5)^2-(\underbrace{55...5}_{n-1}\underbrace{444...4}_{n})^2 &= \underbrace{55...5}_{n-1}\underbrace{444...4}_{n-1}5+\underbrace{55...5}_{n-1}\underbrace{444...4}_{n}=\underbrace{111...1}_{n-1}0\underbrace{888...8}_{n-1}9=\\ &=\underbrace{111...1}_{n-1}\cdot 10^{n+1}+80\cdot\underbrace{111...1}_{n-1}+9=\\ &=\frac{10^{n-1}-1}{9}\cdot 10^{n+1}+\frac{10^{n-1}-1}{9}\cdot 80+9=\\ &=\frac{10^{2n}-2\cdot 10^{n}+1}{9}=\left(\frac{10^{n}-1}{9}\right)^2=(\underbrace{333...3}_{n})^2\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже.

3. Над страната CD на квадратот $ABCD$ е конструирана полукружница. Нека M е произволна точка од полукружницата и нека MA и MB ја сечат CD во точките K и L соодветно. Докажи дека $\overline{KL}^2 = \overline{DK} \cdot \overline{LC}$

Решение. Нека $MD \cap AB = \{P\}$ и $MC \cap AB = \{Q\}$. Сега $\Delta PAM \sim \Delta DEM$ и $\Delta MKL \sim \Delta MAB$, па затоа $\frac{\overline{MK}}{\overline{MA}} = \frac{\overline{DK}}{\overline{PA}}$ и $\frac{\overline{MK}}{\overline{MA}} = \frac{\overline{KL}}{\overline{AB}}$. Од последните равенства следува

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{KL}}{\overline{DK}} \qquad (1)$$

Од друга страна за правоаголните триаголници DAP и QCB важИ $\measuredangle DPA = \measuredangle BCQ$, како агли со нормални краци, па затоа тие се слични. Според тоа $\frac{\overline{BQ}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AP}}$, и бидејќи $ABCD$ е квадрат добиваме $\frac{\overline{BQ}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AP}}$.

Од последното равенство и од (1) следува дека

$$\frac{\overline{BQ}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{KL}}{\overline{DK}} \qquad (2)$$

Од друга страна, триаголниците MLC и MBQ се слични, па затоа $\frac{\overline{LC}}{\overline{BQ}} = \frac{\overline{ML}}{\overline{MB}}$ и како $\frac{\overline{ML}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{KL}}{\overline{AB}}$, добиваме дека $\frac{\overline{LC}}{\overline{BQ}} = \frac{\overline{KL}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{KL}}{\overline{BC}}$, т.е.

$$\frac{\overline{BQ}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{LC}}{\overline{KL}}. \qquad (3)$$

Конечно, од равенствата (2) и (3) добиваме $\frac{\overline{KL}}{\overline{DK}} = \frac{\overline{LC}}{\overline{KL}}$, т.е. $\overline{KL}^2 = \overline{DK} \cdot \overline{LC}$.

4. Најди ги сите конвексни многуаголници кои имаат повеќе од три внатрешни остри агли.

Решение. Нека α_i, $i = 1,2,...,n$ се внатрешните агли на произволен конвексен n-аголник, а β_i, $i = 1,2,...,n$ се соодветните надворешни агли, т.е. $\beta_i = \pi - \alpha_i$, $i = 1,2,...,n$. Бидејќи $\sum_{i=1}^{n} \beta_i = 2\pi$, најмногу три од надворешните агли на конвексниот n-аголник можат да бидат тапи. Според тоа, не постои конвексен многуаголник кој има повеќе од три остри агли.

II година

1.Во множеството на целите броеви решија равенката

$$y^4 - x(x+1)(x+2)(x+3) = 1$$

Решение. Дадената равенка јам ножиме со 16 и ако искористиме дека

$$x(x+1)(x+2)(x+3) = (x^2+3x)(x^2+3x+2) = (x^2+3x)^2 + 2(x^2+3x),$$

добиваме дека таа е еквивалентна на равенката $(4y^2)^2 = (4x^2+12x+4)^2$, т.е. на равенката

$$(4y^2)^2 - ((2x-3)^2 - 5)^2 = 0.$$

Според тоа, дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$(4y^2-(2x-3)^2+5)(4y^2+(2x-3)^2-5)=0\ .$$

Производ на два такви броја е еднаков на нула ако барем еден од нив е еднаков на 0, па затоа се можни два случаи:

2.Дадени се корените $x_\circ$ и x_1, $x_\circ$ и x_2 ,…, $x_\circ$ и x_n на квадратните полиноми $P_1(x)=x^2+b_1x+c_1$, $P_2(x)=x^2+b_2x+c_2$, …, $P_n(x)=x^2+b_nx+c_n$, соодветно. Најди ги корените на квадратниот полином

$$P(x)=x^2+\frac{b_1+b_2+...+b_n}{n}x+\frac{c_1+c_2+...+c_n}{n}$$

Решение.Од условот на задачата имаме

$$x_\circ^2+b_1x_\circ+c_1=x_\circ^2+b_2x_\circ+c_2=x_\circ^2+b_3x_\circ+c_3=...=x_\circ^2+b_nx_\circ+c_n=0\ .$$

Ако ги собереме последните равенства добиваме

$$nx_\circ^2+(b_1+b_2+b_3+...+b_n)x_\circ+(c_1+c_2+...+c_n)=0\ ,$$

т.е. $x_\circ$ е решение на разгледуваниот полином $P(x)$. Затоа, дискриминантата на $P(x)$ е ненегативна и тој има втор реален корен x^*. Од виетовите формули имаме:

$$x_\circ+x_1=-b_1\ ,\ x_\circ+x_2=-b_2\ ,\ ....,\ x_\circ+x_n=-b_n\ ,\ x_\circ+x^*=-\frac{1}{n}(b_1+b_2+...+b_n)\ .$$

Ако последното равенство го помножиме со n и од него ги извадиме првите n равенства добиваме $x^*=-\frac{1}{n}(x_1+x_2+...+x_n)$.

3.Во квадратната таблица 10×10 се запишани по ред броевите од 1 до 100. Потоа, во секоја редица и секоја колона точно на половина од броевите им е сменет знакот. Докажи дека во новодобиената таблица збирот на сите броеви е нула.

Решение.// Значи, $A=B+C$. Нека во A,B,C ги смениме знаците на ист начин, т.е. во секоја редица и секоја колона точно половина од броевите имаат знак минус, и нека се добиени таблиците A',B',C'. Јасно, секој број од A' е збир на соодветните броеви од B' и C'. Во B' сите броеви од една колона се еднакви, а во C' сите броеви од една редица се еднакви, па затоа збировите на броевите во овие две таблици ќе биде еднаков на нула. Според тоа, збирот на броевите во A' е еднаков на нула.

4. Продолженијата на страните AB и CD на конвексниот четириаголник $ABCD$ се сечат во точка W. Ако X и Y се средините на дијагоналите AC и BD, соодветно, тогаш плоштината на триаголникот XYW е четири пати помала од плоштината на четириаголникот $ABCD$. Докажи!

Решение. Нека U е средина на AD и V е средина на BE. Значи XV е средна линија на ΔABC и $\overline{XV}=\frac{1}{2}\overline{AB}$. Бидејќи C и W се на исто растојание од XV добиваме

$$P_{XWV}=P_{XVC}=\frac{1}{4}P_{ABC} \qquad (1)$$

Аналогно се докажува дека

$$P_{YVW}=P_{YBV}=\frac{1}{4}P_{DBC}\ . \qquad (2)$$

Јасно четириаголникот $XVYU$ е параллелограм и важи $P_{XVY}=\frac{1}{2}P_{XVYU}$. Нека $UX\cap AB=\{X'\}$, $YV\cap AB=\{V'\}$. Паралелограмот $X'V'YU$ има страна $\frac{1}{2}\overline{AB}$ И висина половина од висината $h_\circ$ на ΔABD па затоа $\frac{1}{2}P_{ABD}=P_{X'V'YU}$. Слично $P_{X'V'YX}=\frac{1}{2}P_{ABC}$. Затоа

$$P_{XVY}+\frac{1}{2}P_{XVYU}=\frac{1}{2}\left(P_{X'V'YU}-P_{X'V'VX}\right)=\frac{1}{4}(P_{ABD}-P_{ABC}). \qquad (3)$$

Со собирање на (1), (2) и (3) следува

$$P_{VWY}=P_{XWV}+P_{YVW}+P_{XVY}=\frac{1}{4}\left(P_{ABC}+P_{DBC}+P_{ABD}-P_{ABC}\right)=\frac{1}{4}P_{ABCD},$$

односно $P_{ABCD}=4P_{XWY}$.

III година

1.На табла се запишани $1,2,3,...,19$. Се изведува следнава постапка: кои било два броја x и y се бришат а на нивно место се запишува бројот $x+y-1$. Постапката се продолжува се додека не се добие само еден број. Кој е тој број?

Решение. Со a_k ќе ја означиме разликата на збирот од сите броеви кои се на таблата после k-тиот чекор, и од бројот на броевите кои после k-тиот чекор се запишани на таблата. За почетната позиција (нулти чекор) важи:

$$a_\circ=(1+2+3+4+...+19)-19=171.$$

Ќе докажеме дека важи: $a_k=a_p$ за секој k и p ($k\le 18$ и $p\le 18$). Нека во $k+1$-от чекор се запишани броевите x и y, а на нивно место е запишан бројот $x+y-1$. Тогаш се добива:

$$a_k=x+y+\sum z_i-(19-k)$$

и

$$a_{k+1}=(x+y-1)+\sum z_i-(19-k-1)=x+y+\sum z_i-(19-k).$$

Значи: $a_k=a_p$ за секој k и p ($k\le 18$ и $p\le 18$). Според тоа

$$a_{18}=d-1=a_\circ=171.$$

Конечно, се добива бројот 172.

2. Реши ја равенката

$$\left(\sqrt{\sqrt{x\ -5x+8}+\sqrt{x\ -5x+6}}\right)^x+\left(\sqrt{\sqrt{x^2-5x+8}-\sqrt{x\ -5x+6}}\right)^x=2^{\frac{x+4}{4}}$$

Решение. Нека

$$A=\left(\sqrt{\sqrt{x^2-5x+8}+\sqrt{x^2-5x+6}}\right)^{\frac{x}{2}} \quad \text{и} \quad B=\left(\sqrt{\sqrt{x^2-5x+8}-\sqrt{x^2-5x+6}}\right)^{\frac{x}{2}}.$$

Тогаш

$$\frac{A+B}{2}=2^{\frac{x}{4}}, \quad AB=2^{\frac{x}{2}}.$$

Освен тоа $A>0$, $B>0$, така од $\frac{A+B}{2}=\sqrt{AB}$ следува $A=B$. Но ова е еквивалентно со $x=0$ или $\sqrt{x^2-5x+6}=0$, па затоа решенијата се $0,2$ и 3.

3. На страните AB и BC на триаголникот ABC избираме точки D и E соодветно. Точките K и M ја делат отсечката DE на три еднакви дела. Правите BK и BM ја сечат страната AC во точките T и P соодветно. Докажи дека $\overline{TP}<\frac{\overline{AC}}{3}$.

Решение.//Јасна е здачата.

4.Во рамнината е дадено конечно множество од прави кои по парови се сечат, при што низ секоја пресечна точка на две прави минува барем уште една од дадените прави. Докажи дека сите прави се сечат во една точка.

Решение. Да претпоставиме дека тврдењето на задачата не е точно, односно постојат конечно прави во рамнината такви што низ секоја пресечна точка минуваат барем три прави и постојат барем две пресечни точки. Во тој случај постои права p и барем една пресечна точка S што лежи на правата p. Бидејќи множеството на пресечни точки е конечно ќе постои пресечна точка кој е на најмало растојание од правата p (пресечната точка не лежи на правата p). Без губење на општоста можеме да претпоставиме дека таква е точката S. Низ S минуваат барем три прави и тие ја сечат правата p во барем три точки. Нека три од нив се точките X,Y,Z и нека Y се наоѓа меѓу X и Z. Во точката Y се сечат правите p и SY па низ Y минува барем уште една права q. Правата q мора да сечи една од отсечките XS и ZS. Нека на пример q ја сечи отсечката SZ во точката T. Значи, S не е најблиската пресечна точка од правата p, бидејќи T е на помало растојание од p. Од добиената противречност следува тврдењењто на задачата.

IV година

1.Докажи го неравенството

$$\frac{x}{7+y^3+z^3}+\frac{y}{7+x^3+z^3}+\frac{z}{7+x^3+y^3}\le\frac{1}{3},\text{ каде } 0\le x,y,z\le 1.$$

Решение. Од тоа што $0\le x,y,z\le 1$ следува $0\le x^3,y^3,z^3\le 1$, па имаме:

$$\frac{x}{7+y^3+z^3}+\frac{y}{7+x^3+z^3}+\frac{z}{7+x^3+y^3}\le\frac{x}{6+x^3+y^3+z^3}+\frac{y}{6+x^3+y^3+z^3}+\frac{z}{6+x^3+y^3+z^3}=$$
$$=\frac{x+y+z}{6+x^3+y^3+z^3}$$

Доволно е да докажеме дека $3(x+y+z)\le 6+x^3+y^3+z^3$. Последното неравенство следува од тоа што за $0\le t\le 1$, $t^3-3t+2\ge 0$, бидејќи

$$t^3-3t+2=(t-1)^2(t+2).$$

2.Дадено е множеството $S=\{1,2,3,...,100\}$. Дали може S да се разбие на дванаесет дисјунктни подмножества, такви што елементите на секое од нив да бидат членови на геометриски прогресии.

Решение. Ќе покажеме дека три различни прости броеви ($p_1 < p_2 < p_3$) , членови на иста геометриска прогресија со количник $q \neq 1$. Тогаш

$$p_1 = a_1 q^{k-1}, \qquad p_2 = a_1 q^{r-1}, \qquad p_3 = a_1 q^{m-1}$$

од каде добиваме

$$\frac{p_2}{p_1} = q^{r-k} = q^s \text{ , } (r - k = s), \qquad \frac{p_3}{p_2} = q^{m-r} = q^n \text{ } (m - r = n)$$

Значи, $p_2^{s+n} = p_1^n p_3^s$, што не е можно бидејќи p_1, p_2, p_3 се прости броеви, а $s \neq 0, n \neq 0$.

Во множеството C има 25 прости броеви, па барем во едно од дванаесетте множества ќе има барем три прости броеви. Но тогаш елементите од тоа множество не коже да бидат членови на аритметичка прогресија.

3. Одреди ги сите функции $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ за кои што важи ($\forall x, y \in \mathbb{R}^+$)

$$f(x^y) = f(x)^{f(y)}$$

Решение.Забележуваме дека $f(x) = 1$ ги исполнува ги исполнува условите од задачата. Да побараме други решенија. Нека $f(a) \neq 1$ за некое $a > 0$. Тогаш

$$f(a)^{f(xy)} = f(a^y) = f(a^x)^{f(y)} = f(a)^{f(x)f(y)} .$$

Значи,

$$f(xy) = f(x)f(y) \text{ , } (\forall x, y \in \mathbb{R}) . \tag{1}$$

и како

$$f(a)^{f(x+y)} = f(a^{x+y}) = f(a^x a^y) = f(a^x) f(a^y) = f(a)^{f(x)} f(a)^{f(y)} = f(a)^{f(x)+f(y)} ,$$

добиваме

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \text{ , } (\forall x, y \in \mathbb{R}) . \tag{2}$$

Од (1) следува $f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1)f(1)$, односно $f(1) = 1$. Сега најпрво од (2) а потоа со примена на (1) добиваме

$$f(n) = f(1+1+1+...+1) = f(1) + f(1) + ... + f(1) = n , \qquad \forall n \in \mathbb{N} .$$

$$f\left(\frac{m}{n}\right) n = f\left(\frac{m}{n}\right) f(n) = f\left(\frac{m}{n} \cdot n\right) = f(m) = m$$

Значи, за секои $m, n \in \mathbb{N}$ важи

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n} . \tag{3}$$

Да претпоставиме дека постои $x \in \mathbb{R}$ таков што $f(x) \neq x$. Нека $f(x) < x$ (случајот $f(x) > x$ се разгледува аналогно). Постои $y = \frac{m}{n}$ таков што

$$f(x) < y < x \tag{4}$$

Од (2) и (3) следува

$$f(x) = f(y - (x - y)) = f(y) + f(x - y) > f(y) > y ,$$

односно $f(x) > x$, што противречи на (4).

Значи, $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$, $f(x) = x$. Бараните функции се $f(x) \equiv 1$ и $f(x) \equiv x$.

.

4.Иста како задача 3 од трета година.

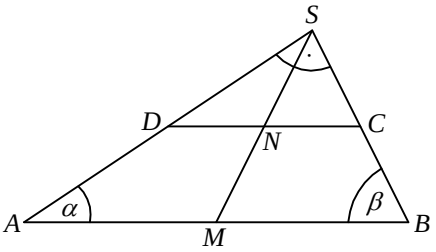
XLII републички натпревар 1999

I година

1. Нека a, b и c се природни броеви од кои ниеден не е делив со 5. Докажи дека барем еден од броевите a^2-b^2, b^2-c^2 и c^2-a^2 е деллив со 5.

Решение. Ако бројот x не е делив со 5, тогаш тој е од облик $5k\pm1$ или $5k\pm2$, а неговиот квадрат е од облик $5m+1$ или $5m+4$.

Од броевите a^2, b^2, c^2 барем два се од ист облик, па нивната разлика ќе биде делива со 5.



2. Основите на еден трапез се a и b, $(a>b)$, а збирот на аглите при поголемата основа е 90°. Колкава е отсечката чии крајни точки се средините на основите?

Решение. Нека $\overline{AB}=a$ и $\overline{CD}=b$ се основите на трапезот $ABCD$, и нека $\alpha+\beta=90^\circ$.

Со продолжување на краците AD и BC на трапезот $ABCD$ до нивната пресечна точка S ги добиваме правоаголните триаголници ABS и DCS. Ако M и N се средините на основите AB и CD соодветно, тогаш отсечките SM и SN се тежишни линии на овие правоаголни триаголници, па следува $\overline{SM}=\frac{a}{2}, \overline{SN}=\frac{b}{2}$.

Оттука следува дека $\overline{MN}=\overline{SM}-\overline{SN}=\frac{a-b}{2}$.

3. Дали може во круг со радиус 1 да се сместат извесен број кругови, чиј збир на радиусите е 1999, такви што никои два од нив немаат заеднички внатрешни точки?

Решение. Во внатрешноста на кругот можеме да конструираме квадрат со страна 1. Овој квадрат го делиме на n^2 мали квадратчиња со страна $\frac{1}{n}$. Во секое од овие квадратчиња впишуваме круг со радиус $\frac{1}{2n}$. Тогаш збирот на радиусите на овие кругови е $n^2\cdot\frac{1}{2n}=\frac{n}{2}$. Од $\frac{n}{2}=1999$ добиваме $n=3998$. Значи во кругот со радиус 1 може да се сместат 3998 кругови што не се преклопуваат, чиј збир на радиуси е 1999.

4. Реши го и дискутирај го системот равенки

$$\begin{cases}\frac{x+y}{xy}+\frac{xy}{x+y}=a+\frac{1}{a}\\ \frac{x-y}{xy}+\frac{xy}{x-y}=b+\frac{1}{b}\end{cases}$$

Решение. Со смената

$$\frac{x+y}{xy}=u,\ \frac{x-y}{xy}=v$$

системот го добива видот

$$\begin{cases} u+\frac{1}{u}=a+\frac{1}{a} \\ v+\frac{1}{v}=b+\frac{1}{b} \end{cases} \qquad (a\neq 0, b\neq 0),$$

од каде што $u_1=a$, $u_2=\frac{1}{a}$, $v_1=b$, $v_2=\frac{1}{b}$.

Дадениот систем е еквивалентен со вкупноста на четирите системи:

$$1^\circ\begin{cases} u=a \\ v=b \end{cases} \qquad 2^\circ\begin{cases} u=a \\ v=\frac{1}{b} \end{cases} \qquad 3^\circ\begin{cases} u=\frac{1}{a} \\ v=b \end{cases} \qquad 4^\circ\begin{cases} u=\frac{1}{a} \\ v=\frac{1}{b} \end{cases}$$

$$1^\circ\begin{cases} \frac{x+y}{xy}=a \\ \frac{x-y}{xy}=b \end{cases} \overset{xy\neq 0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \frac{1}{y}+\frac{1}{x}=a \\ \frac{1}{y}-\frac{1}{x}=b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{x}=a-b \\ \frac{2}{y}=a+b \end{cases} \overset{|a|\neq|b|}{\Longrightarrow} \begin{cases} x=\frac{2}{a-b} \\ y=\frac{2}{a+b} \end{cases}$$

$$2^\circ\begin{cases} \frac{x+y}{xy}=a \\ \frac{x-y}{xy}=\frac{1}{b} \end{cases} \overset{xy\neq 0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \frac{1}{y}+\frac{1}{x}=a \\ \frac{1}{y}-\frac{1}{x}=\frac{1}{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{x}=\frac{ab-1}{b} \\ \frac{2}{y}=\frac{ab+1}{b} \end{cases} \overset{ab\neq\pm 1}{\Longrightarrow} \begin{cases} x=\frac{2b}{ab-1} \\ y=\frac{2b}{ab+1} \end{cases}$$

$$3^\circ\begin{cases} \frac{x+y}{xy}=\frac{1}{a} \\ \frac{x-y}{xy}=b \end{cases} \overset{xy\neq 0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \frac{1}{y}+\frac{1}{x}=\frac{1}{a} \\ \frac{1}{y}-\frac{1}{x}=b \end{cases} \overset{ab\neq\pm 1}{\Longrightarrow} \begin{cases} x=\frac{2a}{1-ab} \\ y=\frac{2a}{1+ab} \end{cases}$$

$$4^\circ\begin{cases} \frac{x+y}{xy}=\frac{1}{a} \\ \frac{x-y}{xy}=\frac{1}{b} \end{cases} \overset{xy\neq 0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \frac{1}{y}+\frac{1}{x}=\frac{1}{a} \\ \frac{1}{y}-\frac{1}{x}=\frac{1}{b} \end{cases} \overset{|a|\neq|b|}{\Longrightarrow} \begin{cases} x=\frac{2ab}{b-a} \\ y=\frac{2ab}{b+a} \end{cases}$$

Добиваме дека:

(i) Ако $|a|\neq|b|$ и $ab\neq\pm 1$ системот има четири решенија: $\left(\frac{2}{a-b},\frac{2}{a+b}\right)$, $\left(\frac{2b}{ab-1},\frac{2b}{ab+1}\right)$, $\left(\frac{2a}{1-ab},\frac{2a}{1+ab}\right)$ и $\left(\frac{2ab}{b-a},\frac{2ab}{b+a}\right)$.

(ii) Ако $ab\neq\pm 1$, тогаш системот има две решенија: $\left(\frac{2a}{1-ab},\frac{2a}{1+ab}\right)$ и $\left(\frac{2b}{ab-1},\frac{2b}{ab+1}\right)$.

(iii) Ако $|a|\neq|b|$, тогаш системот има две решенија: $\left(\frac{2}{a-b},\frac{2}{a+b}\right)$ и $\left(\frac{2ab}{b-a},\frac{2ab}{b+a}\right)$.

(iv) Ако $|a|=|b|$ или $ab=\pm 1$, системот нема решене.

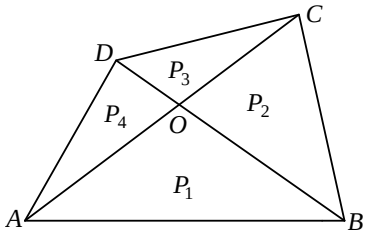
II година

1. Реши ја во $\mathbb{R}$ равенката $2x^2-3x=2x\sqrt{x^2-3x}+1$.

Решение. $x^2+(x^2-3x)=2x\sqrt{x^2-3x}+1$. Ако ставиме $x^2-3x=y^2$, добиваме $x^2+y^2=2xy+1$, односно $(x-y)^2=1$. Оттука добиваме $x-y=\pm 1$, т.е. $x-1=\sqrt{x^2-3x}$ или $x+1=\sqrt{x^2-3x}$. Првата равенка нема решение, а решението на втората равенка е $-\frac{1}{5}$.

2. Ако производот на плоштините на триаголниците, на кои еден конвексен четириаголник е разбиен со една од своите дијагонали, е еднаков на производот од плоштините на триаголниците, кои се добиваат со раз-

бивање на другата дијагонала, тогаш четириаголникот е трапез или е паралелограм. Докажи!



Решение. Нека дијагоналите на конвексниот четириаголник $ABCD$ се сечат во точката O и нека

$$P_1 = P_{ABO},\ P_2 = P_{BCO},\ P_3 = P_{CDO},\ P_4 = P_{ADO}\ .$$

Од условот на задачата имаме:

$$(P_1 + P_2)(P_3 + P_4) = (P_1 + P_4)(P_2 + P_3)\ .$$

Оттука добиваме $(P_1 - P_3)(P_2 - P_4) = 0$, па следува:

(i) Ако $P_1 = P_3$, тогаш $P_1 + P_4 = P_3 + P_4$, т.е. $P_{ABD} = P_{ACD}$. Но, триаголниците ABD и ACD имаат заедничка страна AD, следува дека висините кон оваа страна имаат еднаква должина, т.е. точките B и C се еднакво оддалечени од AD. Значи $AD \parallel BC$, па овој четириаголник е трапез.

(ii) Ако $P_2 = P_4$, тогаш $P_{ABC} = P_{ABD}$, па аналогно заклучуваме дека $AB \parallel CD$, т.е. четириаголникот $ABCD$ е трапез.

(iii) Ако $P_1 = P_3$ и $P_2 = P_4$, следува дека $AD \parallel BC$ и $AB \parallel CD$, т.е. четириаголникот $ABCD$ е паралелограм.

3. Докажи дека равенката

$$(x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3 = 30\ ,$$

нема решение во множеството на целите броеви.

Решение. Нека $a = x - y,\ \ b = y - z,\ \ c = z - x$. Тогаш $a + b + c = 0$ и:

$$30 = a^3 + b^3 + c^3 = a^3 + b^3 + (-a-b)^3 = -3a^2b - 3ab^2 = -3ab(a+b) = 3abc\ .$$

Дадената равенка се сведува на системот

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ abc = 10 \end{cases}$$

Оттука следува дека $a, b, c \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10\}$. Без губење од општоста може да предпоставиме дека $|a| \geq |b| \geq |c|$, па оттука лесно се гледа дека системот нема решение во множеството на целите броеви.

4. Нека S е подмножество од реалните броеви за кое важат следниве услови:

(i) $\mathrm{Z} \subseteq S$

(ii) $\sqrt{2} + \sqrt{3} \in S$

(iii) $x, y \in S \Rightarrow x + y \in S,\ xy \in S$

Докажи дека $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \in S$.

Решение. Нека $a = \sqrt{2} + \sqrt{3}$. Тогаш $a^2 = 5 + 2\sqrt{6}$, т.е. $(a^2 - 5)^2 = 24$. Оттука добиваме $a(10a - a^3) = 1$, односно $\dfrac{1}{a} = 10a - a^3$. $a \in S,\ 10 \in S$, па од условот (iii) следува дека

$10a \in S$. $a \in S$ тогаш од (iii) следува $aa \in S$, и повторно со примена на (iii) добиваме $a^3 = aaa \in S$. $-1 \in S,\ a^3 \in S$, па од (iii) следува $-a^3 \in S$. Од $10a \in S$ и $-a^3 \in S$ со примена на (iii) добиваме $10a - a^3 \in S$, односно $\frac{1}{a} = \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \in S$.

III година

1. Реши ја равенката

$$\sin^2 x + \sin 2x \sin 4x + \sin 3x \sin 9x + \ldots + \sin nx \sin n^2 x = 1.$$

Решение. Користејќи ја формулата

$$\sin\alpha \sin\beta = \tfrac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\big)$$

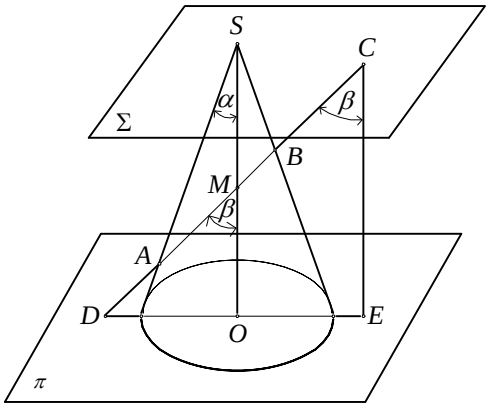
дадената равенка го добива видот:

$$\tfrac{1}{2}\left[\cos 2x - \cos 6x + \cos 6x - \cos 12x + \ldots + \cos n(n-1)x - \cos n(n-1)x\right] = 1 - \sin^2 x,$$

$$\cos n(n+1)x = -1,$$

а оттука добиваме $n(n+1)x = (2k+1)\pi$, т.е. $x = \frac{2k+1}{n(n+1)}\pi, \quad k \in Z$.

2. Основата на кружен конус лежи во рамнината π, а врвот S во рамнината $\Sigma \parallel \pi$. Аголот при врвот на конусот е 2α. Низ средината M на неговата висина OS е повлечена права p, која со OS зафаќа агол β. Одреди ја должината на отсечката AB, од правата p, која минува низ конусот, ако отсечката CD од правата p, зафатена меѓу рамнините π и Σ, има должина d.



Решение. Според ознаките на цртежот имаме:

$$\overline{CD} = d,\ \angle OSA = \alpha,\ \angle OMA = \beta.$$

Нека $CE \perp \pi$, тогаш $\angle DCE = \beta$, па

$$\overline{CE} = d \cdot \cos\beta.$$

$$\overline{SM} = \tfrac{1}{2}\overline{SO} = \tfrac{1}{2}\overline{CE} = \tfrac{1}{2} d \cos\beta.$$

Според синусната теорема за ΔASM наоѓаме:

$$\overline{AS} = \frac{\overline{SM}\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)} = \frac{d}{2}\cdot\frac{\cos\beta\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)} = \frac{d\sin 2\beta}{4\sin(\beta-\alpha)}$$

Слично, од ΔABS добиваме

$$\frac{\overline{AB}}{\sin 2\alpha} = \frac{\overline{AS}}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Конечно

$$\overline{AB} = \frac{d\sin 2\alpha \sin 2\beta}{4\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta-\alpha)}.$$

3. Докажи дека

$$1 + \frac{2}{2\cdot3\cdot4} + \frac{2}{5\cdot6\cdot7} + \ldots + \frac{2}{1997\cdot1998\cdot1999} = \frac{1}{667} + \frac{1}{668} + \ldots + \frac{1}{1999}.$$

Решение. За $n>1$ забележуваме дека важи

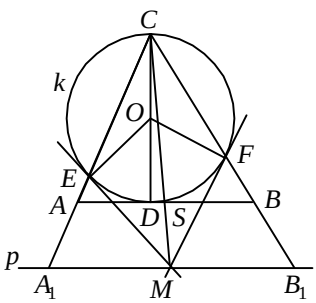
$$\frac{2}{(n-1)\cdot n\cdot(n+1)}=\frac{1}{n-1}-\frac{2}{n}+\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}-\frac{3}{n}.$$

Тогаш

$$1+\frac{2}{2\cdot3\cdot4}+\frac{2}{5\cdot6\cdot7}+\ldots+\frac{2}{1997\cdot1998\cdot1999}=$$
$$=1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{3}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{3}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{3}{3}\right)+\ldots$$
$$+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{3}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{1997}+\frac{1}{1998}+\frac{1}{1999}-\frac{3}{1998}\right)=$$
$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{666}+\frac{1}{667}+\ldots+\frac{1}{1998}+\frac{1}{1999}-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\ldots-\frac{1}{666}=$$
$$=\frac{1}{667}+\frac{1}{668}+\ldots+\frac{1}{1999}.$$

4. Во рамнината на остроаголниот триаголник ABC, над неговата висина CD, како над дијаметар, е конструирана кружница k, која ги сече страните AC и BC во точките E и F соодветно. Докажи дека пресечната точка M на тангентите, повлечени на кружницата k во точките E и F лежи на правата определена со тежишната линија на триаголникот ABC повлечена од темето C.

Решение. Низ M повлекуваме права $p \parallel AB$. Нека A_1 и B_1 се пресечните точки на p со CA и CB соодветно. Доволно е да докажеме дека $\overline{A_1M}=\overline{MB_1}$.



Нека аглите кај темињата A, B и C на триаголникот ABC ги означиме со α, β и γ соодветно. Тогаш $\angle BCD=\beta'=90^\circ-\beta$. Бидејќи ΔFCO е рамнокрак, следува дека $\angle CFO=\beta'$, а бидејќи $\angle OFM=90^\circ$, добиваме дека $\angle BFM=180^\circ-90^\circ-\beta'=\beta$. Бидејќи $\angle MB_1F=\beta$ (по конструкција), следува дека ΔB_1FM е рамнокрак, т.е. $\overline{B_1M}=\overline{MF}$. Слично се докажува дека $\overline{A_1M}=\overline{ME}$. Но, $\overline{MF}=\overline{ME}$ како тангентни отсечки, па следува дека $\overline{A_1M}=\overline{MB_1}$.

Од тоа што M е средина на A_1B_1 и $AB \parallel A_1B_2$, следува дека правата CM минува низ средината S на отсечката AB, т.е. се совпаѓа со тежишната линија повлечена од темето C.

IV година

1. Да се најде природниот број n ако десеттиот член во развојот на биномот $\left(\frac{1}{5}x+\frac{2}{5}\right)^n$ има најголем коефициент.

Решение. $k-$тиот член е $a^k=\binom{n}{k}\left(\frac{2}{5}\right)^k\frac{1}{5^{n-k}}=\binom{n}{k}\frac{2^k}{5^n}$. Бидејќи десеттиот член има најголем коефициент, следува дека $a_8<a_9$ и $a_{10}<a_9$. Следува:

$$\binom{n}{8}\frac{2^8}{5^n} < \binom{n}{9}\frac{2^9}{5^n} \text{ и } \binom{n}{10}\frac{2^{10}}{5^n} < \binom{n}{9}\frac{2^9}{5^n}$$

а оттука добиваме дека $n > 12{,}5$ и $n < 14$. Значи, бараниот природен број е $n = 13$.

2. Низата (a_n) е зададена со:

(i) $a_1 = 1$

(ii) $(\forall n \in N)\, a_{n+1} = a_n + \frac{1}{[a_n]}$

За кои вредности на n важи $a_n > 20$? ($[x]$ е најголемиот цел број помал или еднаков од x.)

Решение. Првите неколку членови на низата се:

$$a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 1 + \tfrac{1}{2},\ a_4 = 3,\ a_5 = 3 + \tfrac{1}{3},\ a_6 = 3 + \tfrac{2}{3},\ a_7 = 4, \ldots$$

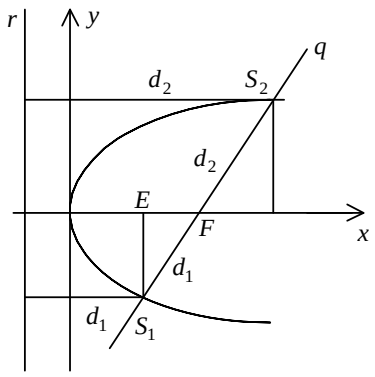
Го забележуваме следното правило: низата монотоно расте и нејзините членови го имаат обликот $m + \frac{k}{m}$, $0 \le k \le m-1$. Да докажеме дека тоа навистина е така. За $n = 1$ тврдењето е точно. Нека $a_n = m + \frac{k}{m}$, $0 \le k \le m-1$.

Тогаш $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{[a_n]} = m + \frac{k}{m} + \frac{1}{m} = m + \frac{k+1}{m}$. $a_{n+1} = m+1$ ако $k = m-1$. Значи, еден член од низата има цел дел 1, два члена имаат цел дел 2, три члена имаат цел дел 3, итн. Цел дел не поголем од 19 имаат $1+2+3+\cdots+19 = 190$ членови од низата. Тогаш $a_{191} = 20$. Значи $a_n > 20$ ако $n > 191$.

3. Исто како третата задача за трета година.

4. Нека q е произволна права низ фокусот F на параболата $y^2 = 2px$, а S_1 и S_2 се пресечните точки на правата q и параболата. Докажи дека

$$\frac{1}{\overline{FS_1}} + \frac{1}{\overline{FS_2}} = \frac{2}{p}.$$



Решение. Секоја точка од параболата се наоѓа на еднакво растојание од фокусот F и од директрисата (правата r). Растојанието меѓу фокусот и директрисата е p. Со E и G ќе ги означиме проекциите на S_1 и S_2 соодветно на x - оската.

Ако $\overline{FS_1} = d_1$ и $\overline{FS_2} = d_2$, тогаш $\overline{FE} = p - d_1$, $\overline{FG} = d_2 - p$.

Од сличноста на триаголниците FES_1 и FGS_2 следува $\frac{p-d_1}{d_1} = \frac{d_2-p}{d_2}$, а оттука $\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{2}{p}$, односно $\frac{1}{\overline{FS_1}} + \frac{1}{\overline{FS_2}} = \frac{2}{p}$.

XLIII Републички натпревар 2000

I година

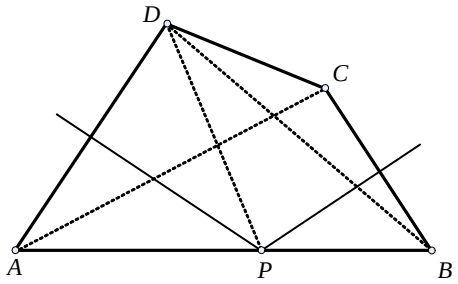
1. Ако $x+\frac{1}{y}=y+\frac{1}{z}=z+\frac{1}{x}$, докажи дека $x=y=z$ или $|xyz|=1$.

Решение. Очигледно $xyz\neq 0$. Од $x+\frac{1}{y}=y+\frac{1}{z}$ следува $x-y=\frac{y-z}{yz}$. Аналогно $y-z=\frac{z-x}{zx}$ и $z-x=\frac{x-y}{xy}$. Оттука добиваме

$$x-y=\frac{\frac{z-x}{zx}}{yz}=\frac{1}{xyz^2}\frac{x-y}{xz}=\frac{x-y}{x^2y^2z^2} \text{ односно } (x-y)\left(1-\frac{1}{x^2y^2z^2}\right)=0$$

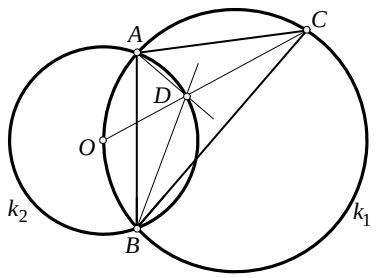
Ако $x-y\neq 0$, тогаш $1-\frac{1}{x^2y^2z^2}=0$, а оттука добиваме $x^2y^2z^2=1$, т.е. $|xyz|=1$.

Ако $1-\frac{1}{x^2y^2z^2}\neq 0$, тогаш $x=y$, односно $x=y=z$.



2. Во конвексниот четириаголник $ABCD$ дијагоналите AC и BD се еднакви. Ако симетралите на страните AD и BC се сечат во точка P која лежи на страната AB, докажи дека $\angle DAB=\angle ABC$.

Решение. Бидејќи точката P е пресечна точка на симетралите на страните BC и AD, следува дека $\overline{CP}=\overline{BP}$ и $\overline{AP}=\overline{DP}$. Триаголниците APC и DPB се складни ($\overline{AC}=\overline{DB}$ по услов, $\overline{AP}=\overline{DP}$ и $\overline{CP}=\overline{BP}$). Значи, $\angle APC=\angle DPB$. Бидејќи триаголниците APD и CPB се рамнокраки со еднакви агли при врвот, следува дека и аглите при основата се еднакви, односно $\angle DAB=\angle ABC$.



3. Нека кружниците k_1 и k_2 се сечат во точките A и B така што центарот O на кружницата k_2 лежи на k_1 и нека C е произволна точка од лакот AB од кружницата k_1 кој не ја содржи точката O и е различна од A и B. Отсечката OC ја сече кружницата k_2 во точката D. Докажи дека точката D е пресек на симетралите на внатрешните агли на триаголникот ABC.

Решение. Нека точката C припаѓа на лакот AB на кој што не припаѓа точката O. Ќе докажеме дека AD е симетрала на $\angle BAC$. $\angle BAD=\frac{1}{2}\angle BOD$ (врска меѓу периферен и централен агол над лакот во BD). Понатаму, $\angle BOD=\angle BOC=\angle BAC$ (периферни агли над

лакот во BC). Значи, $\angle BAD = \frac{1}{2}\angle BAC$. Со тоа покажавме дека AD е симетрала на аголот BAC. Слично се покажува дека BD е симетрала на аголот ABC.

4. Најди ги сите природни броеви кои имаат точно шест делители, чиј збир е 3500.

Решение. Ако природниот број n има точно шест делители, тогаш $n = p^5$ или $n = q^2 r$ каде што p, q и r се прости броеви.

(i) Нека $n = p^5$. Тогаш $1 + p + p^2 + p^3 + p^4 + p^5 = 3500$, односно $p\left(1 + p + p^2 + p^3 + p^4\right) = 3499$. Бидејќи 3499 е прост број, следува дека овој случај не е можен.

(ii) Нека $n = q^2 r$. Тогаш $1+q+q^2+r+rq+r^2q=3500$, односно $(1+q+q^2)(1+r) = 3500 = 2^2 \cdot 5^3 \cdot 7$. Бројот $1 + q + q^2 = 1 + q(1+q)$ е непарен и не е делив со 5 ($1 + q + q^2$ може да дава остатоци $1, 2$ или 3 при делење со 5). Значи $1 + q + q^2 = 7$. Оттука добиваме $q(q+1) = 6 = 2 \cdot 3$, односно $q = 2$. Понатаму, добиваме $r = 499$ и, конечно, $n = 1996$.

II година

1. Реши го во множеството на реалните броеви, системот равенки

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z = 2 \\ x + y^2 + z^2 = 2 \\ x^2 + y + z^2 = 2 \end{cases}$$

Решение. Ако од првата ја одземеме втората равенка добиваме $x^2 - x - z^2 + z = 0$, односно $(x - z)(x + z - 1) = 0$. Оттука $x = z$ или $x = 1 - z$. Слично, ако од првата ја одземиме третата равенка добиваме $y^2 - y - z^2 + z = 0$, односно $(y - z)(y + z - 1) = 0$. Оттука $y = z$ или $y = 1 - z$. Можни се четири случаи:

(i) $x = z$, $y = z$. Заменувајќи во првата равенка добиваме $2z^2 + z - 1 = 0$, чии решенија се $z_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4}$. Решенијата на системот се $\left(\frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4}, \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4}, \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4}\right)$.

(ii) $x = z$, $y = 1 - z$. Заменувајќи во првата равенка добиваме $2z^2 - z - 1 = 0$, чии решенија се $z_1 = 1$ и $z_2 = -\frac{1}{2}$. . Решенија на системот во овој случај се $(1, 0, 1)$ и $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

(iii) $x = 1 - z$, $y = z$. Заменувајќи во првата равенка на системот добиваме $2z^2 - z - 1 = 0$, чии решенија се $z_1 = 1$ и $z_2 = -\frac{1}{2}$. Решенијата на системот во овој случај се $(0, 1, 1)$ и $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

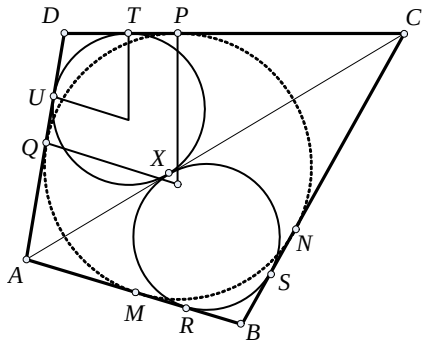
(iv) $x = 1 - z$, $y = 1 - z$. Заменувајќи во првата равенка добиваме $2z^2 - 3z = 0$, чии решенија се $z_1 = 0$ и $z_2 = \frac{3}{2}$. Решенијата на системот во овој случај се $(1, 1, 0)$ и $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

2. Дали постојат квадратни триноми $ax^2 + bx + c$ и $(a+1)x^2 + (b+1)x + c + 1$ со целобројни коефициенти, такви што секој од нив има по два различни цели корени?

Решение. Да претпоставиме дека постојат такви триноми. Нека x_1 и x_2 се корени на $ax^2 + bx + c$ а y_1 и y_2 се корени на $(a+1)x^2 + (b+1)x + c + 1$. Од Виетовите формули следува:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a};\ x_1x_2=\frac{c}{a};\ y_1+y_2=-\frac{b+1}{a+1};\ y_1y_2=\frac{c+1}{a+1}.$$

Бидејќи x_1 , x_2, y_1 и y_2 се цели броеви следува дека $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$, $\frac{b+1}{a+1}$, $\frac{c+1}{a+1}$ се цели броеви. Еден од броевите a и $a+1$ е парен. Нека е тоа a. Тогаш и b и c се парни броеви. Значи $a+1$, $b+1$, $c+1$ се непарни. Следува дека броевите y_1+y_2 и y_1y_2 се непарни. Но збирот и производ на два броја не може да бидат во исто време непарни. Значи, не постојат квадратни триноми со бараното својство.



3. Нека $ABCD$ е тангентен четириаголник. Докажи дека:

$a)$ Впишаните кружници во двата триаголника на кои дијагоналата AC го дели четириаголникот се допираат.

$b)$ Допирните точки на двете кружници со страните на четириаголникот се темиња на тетивен четириаголник.

Решение. Нека M, N, P и Q се допирните точки на впишаната кружница во четириаголникот $ABCD$ со страните AB, BC, CD, DA соодветно. Нека впишаната кружница во триаголникот ABC ги допира страните AB, BC, CA во точките R, S, X соодветно, а впишаната кружница во триаголникот ACD ги допира страните AC, CD, DA во точките X_1, T, U соодветно.

$a)$ Четириаголникот $ABCD$ е тангенен, па $\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{BC}+\overline{AD}$. Од триаголникот ABC добиваме:

$$\overline{AX}=\overline{AC}-\overline{XC}=\overline{AC}-\overline{CS}=\overline{AC}-\overline{CB}+\overline{BS}=\overline{AC}-\overline{CB}+\overline{BR}=\overline{AC}-\overline{CB}+\overline{AB}-\overline{AR}=$$
$$=\overline{AC}-\overline{CB}+\overline{AB}-\overline{AX}$$

а оттука добиваме

$$\overline{AX}=\frac{\overline{AC}+\overline{AB}-\overline{CB}}{2}$$

На сличен начин, од триаголникот ACD, добиваме $\overline{AX}=\frac{\overline{AC}+\overline{AD}-\overline{CD}}{2}$. Понатаму,

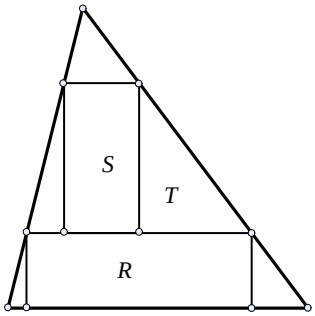
$$\overline{XX_1}=|\overline{AX}-\overline{AX_1}|=\left|\frac{\overline{AC}+\overline{AB}-\overline{BC}}{2}-\frac{\overline{AD}+\overline{AC}-\overline{CD}}{2}\right|=\frac{1}{2}\left|\overline{AB}+\overline{CD}-\overline{BC}-\overline{AD}\right|=0$$

Значи, точките X и X_1 се совпаѓаат.

$b)$ Бидејќи $\overline{BR}=\overline{BS}$, $\overline{BM}=\overline{BN}$, следува дека $RS \parallel MN$. Слично се покажува дека $UT \parallel QP$, $QM \parallel UR$, $PN \parallel TS$. Четириаголникот $MNPQ$ е тетивен, па збирот на спротивните агли е 180°. Бидејќи страните на четириаголникот $RSTU$ се паралелни со страните на $MNPQ$ следува дека $RSTU$ е тетивен.

4. Во триаголник со плоштина T се впишани два правоаголника со плоштини R и S (види цртеж). Најди ја најголемата можна вредност на изразот $\frac{R+S}{T}$.

Решение. Нека Q е фигурата која што е составена од петте триаголници кои се во внатрешноста на триаголникот, а надвор од правоаголниците. Од двата триаголника кои што имаат заедничка страна со правоаголникот со плоштина R може да се состави нов триаголник T_1 кој што е сличен со дадениот триаголник. Истото може да се направи и со триаголниците кои што имаат иста страна со правоаголникот со плоштина S. Со нивно составување го добиваме триаголникот T_2 кој што е сличен со дадениот триаголник. Триаголникот над правоаголникот S го означуваме со T_3 и тој е сличен со дадениот триаголник. Нека a, b, c се висините во триаголниците T_1, T_2, T_3 соодветно, кои што се нормални на по две страни од правоаголниците. Тогаш $a+b+c$ е должина на висината на дадениот триаголник. Бидејќи T_1, T_2, T_3 се слични со дадениот триаголник, следува



$$\frac{P_{T_1}}{T}=\frac{a^2}{(a+b+c)^2},\ \frac{P_{T_2}}{T}=\frac{b^2}{(a+b+c)^2},\ \frac{P_{T_3}}{T}=\frac{c^2}{(a+b+c)^2}$$

$$\frac{S+R}{T}=\frac{T-P_Q}{T}=1-\frac{P_{T_1}+P_{T_2}+P_{T_2}}{T}=1-\frac{a^2+b^2+c^2}{(a+b+c)^2}=2\frac{ab+bc+ca}{(a+b+c)^2}\le\frac{2}{3}$$

Нравенството е исполнето бидејќи

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2\ge 0 \ \Leftrightarrow\ a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca \ \Leftrightarrow$$

$$a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac\ge 3ab+3bc+3ac \Leftrightarrow\ (a+b+c)^2\ge 3(ab+bc+ca).$$

III година

1. Најди ги сите реални броеви x и y кои што ја задоволуваат равенката

$$\log_2\left(\cos^2(xy)+\frac{1}{\cos^2(xy)}\right)=\frac{1}{y^2-2y+2}$$

Решение. За да биде изразот на левата страна добро дефиниран треба $xy\ne\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in Z$. Бидејќи $\cos^2(xy)+\frac{1}{\cos^2(xy)}\ge 2$ следува дека $\log_2\left(\cos^2(xy)+\frac{1}{\cos^2(xy)}\right)\ge\log_2 2=1$. Но $\frac{1}{y^2-2y+2}=\frac{1}{(y-1)^2+1}\le 1$, па равенство ќе важи само ако $\cos(xy)=\frac{1}{\cos(xy)}$ и $\frac{1}{(y-1)^2+1}=1$. Од втората равенка имаме $y=1$ а од првата $x=k\pi$, $k\in Z$. Значи, решенија се сите парови $(k\pi,1)$, каде што $k\in Z$.

2. Најди ги сите тројки (a,b,c) каде што a,b,c се должини на страни на триаголникот ABC со агли α,β,γ, такви што броевите $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ се должини на страни на триаголник, складен со триаголникот ABC.

Решение. Од условите на задачата следува дека $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ се позитивни. Значи, триаголникот ABC е остроаголен. Нека $a\le b\le c$. Тогаш $\alpha\le\beta\le\gamma$, па $\cos\gamma\le\cos\beta\le\cos\alpha$. Од условот на задачата следува $a=\cos\gamma$ и $c=\cos\alpha$. Оттука следува дека $a:c=\cos\gamma:\cos\alpha$. Од синусна теорема добиваме $a:c=\sin\alpha:\sin\gamma$, па од ова и претходното равенство добиваме

$\cos\gamma : \cos\alpha = \sin\alpha : \sin\gamma$, односно $\sin\alpha\cos\alpha = \sin\gamma\cos\gamma$. Значи $\sin 2\alpha = \sin 2\gamma$ или $2\alpha + 2\gamma = \pi$ (ова не е можно, бидејќи тогаш $\beta = \frac{\pi}{2}$, па $\cos\beta = 0$). Значи $\alpha = \gamma$, односно $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$, па постои само една тројка со бараното својство. Тоа е тројката $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

3. Најди ја најмалата вредност на изразот $|36^m - 5^n|$, ако m и n се природни броеви.

Решение. Разгледуваме два случаја:

$a)$ $36^m > 5^n$

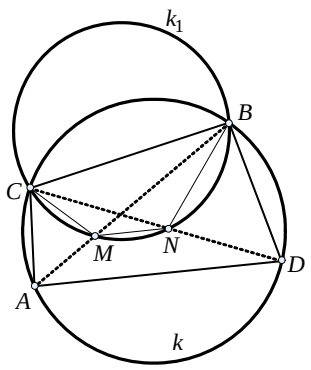
Последната цифра на бројот $36^m - 5^n$ е 1. Нека $36^m - 5^n = 1$. Тогаш $5^n = (6^m + 1)(6^m - 1)$, што не е можно, бидејќи 5 не е делител на $6^m + 1$.

Нека $36^m - 5^n = 11$. Очигледно за $m = 1$, $n = 2$ равенството е исполнето.

$b)$ $36^m < 5^n$

Последната цифра на бројот $5^n - 36^m$ е 9. Нека $5^n - 36^m = 9$. Оваа равенка нема решение во множеството природни броеви бидејќи 9 не е делител на 5^n.

Значи,л најмалата вредност на $\left|36^m - 5^n\right|$ е 11.



4. Нека AB и CD се тетиви на кружницата k што се сечат. На тетивата AB е избрана точка M така што $\overline{AM} = \overline{AC}$, а на тетивата CD е избрана точка N така што $\overline{DN} = \overline{DB}$. Ако точките N и M не се совпаѓаат, докажи дека правата MN е паралелна со правата AD.

Решение. Триаголникот MAC е рамнокрак ($\overline{AM} = \overline{AC}$ по услов) па следува дека $\angle ACM = \angle CMA$. Аналогно, триаголникот NDB е рамнокрак ($\overline{DN} = \overline{DB}$ по услов), па следува дека $\angle DNB = \angle NBD$. Имајќи во предвид дека $\angle CAB = \angle CDB$ (периферни агли над ист кружен лак), добиваме

$$2\angle CMA + \angle CAM = 180^\circ = \angle CDB + 2\angle DNB = \angle CAB + 2\angle DNB$$

Оттука следува: $2\angle CMA + \angle CAB = \angle CAB + 2\angle DNB$, т.е. $\angle CMA = \angle DNB$. Понатаму,

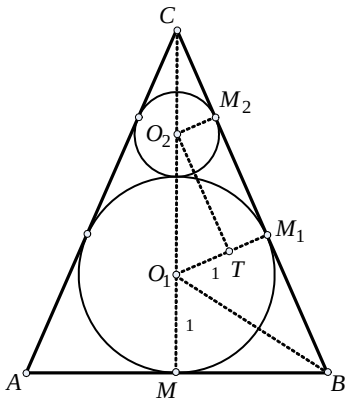
$$\angle CMB = 180^\circ - \angle CMA = 180^\circ - \angle DNB = \angle BNC$$

т.е. $\angle CMB = \angle BNC$, што значи дека точките M , N , B и C лежат на иста кружница. Сега добиваме $\angle BMN = \angle BCN$ (периферни агли над лакот BN во кружницата k_1) и $\angle BCN = \angle BAD$ (периферни агли над лакот BD во кружницата k). Конечно $\angle BMN = \angle BAD$, а оттука следува дека $MN \parallel AD$.

IV година

1. Во рамнокракиот триаголник ABC дадени се $\overline{AC} = \overline{BC} = 2b$ и $\angle CAB = 2\alpha$. Нека P_1 е плоштината на впишаниот круг k_1 во триаголникот ABC , P_2 е плоштина на кругот што ја допира кружницата k_1 и краците на триаголникот ABC , ..., P_i е плоштина на кругот што ја допира кружницата

k_{i-1} и краците на триаголникот ABC и т.н. Пресметај го збирот $P_1 + P_2 + ... + P_n + ...$



Решение.Нека $\overline{AB} = 2a$, односно $\overline{MB} = a$, $\angle MBO_1 = \angle O_1BM_1 = \alpha$. Од правоаголниот триаголник O_1MB следува $\overline{O_1M} = r_1 = a \cdot tg\alpha$. Нека T е точка од отсечката O_1M_1 така што $O_2T \perp O_1M_1$. Оттука следува $\overline{TM_1} = \overline{O_2M_2} = r_2$. Понатаму, $\overline{O_1O_2} = r_1 + r_2$, $\overline{O_1T} = r_1 - r_2$ и $\angle O_2O_1T = 2\alpha$. Од правоаголниот триаголник O_1TO_2 добиваме $r_1 - r_2 = (r_1 + r_2)\cos 2\alpha$, т.е. $r_1(1 - \cos 2\alpha) = r_2(1 + \cos 2\alpha)$. Оттука следува $r_2 = r_1 tg^2\alpha$.

Аналогно, $r_3 = r_2 tg^2\alpha = r_1 tg^4\alpha$, или општо:

$$r_n = r_1 tg^{2(n-1)}\alpha,\ n \in N$$

и

$$P_1 = \pi r_1^2 = \pi a^2 tg^2\alpha,\ P_2 = \pi r_2^2 = \pi r_1^2 tg^4\alpha\ ,...,\ P_n = \pi r_n^2 = \pi r_1^2 tg^{4(n-1)}\alpha\ ,...$$

Бидејќи $2\alpha < \frac{\pi}{2}$, следува $\alpha < \frac{\pi}{4}$, односно $tg\alpha < 1$, па можеме да ја примениме формулата за збир на бескраен геометриски ред

$$P = P_1 + P_2 + ... + P_n + ... = \pi r_1^2(1 + tg^4\alpha + tg^8\alpha + ...) = \pi r_1^2 \frac{1}{1 - tg^4\alpha} =$$

$$= \pi a^2 tg^2\alpha \frac{1}{1 - tg^4\alpha} = \pi a^2 \frac{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\cos 2\alpha}$$

Од правоаголниот триаголник MBC следува $a = 2b\cos 2\alpha$, па конечно добиваме:

$$P = 4\pi b^2 \cos^2 2\alpha \frac{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\cos 2\alpha} = \pi b^2 \cos 2\alpha \sin^2 2\alpha$$

2. Исто како задача 3 во III година.

3. Исто како задача 4 во III година.

4. Функцијата $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ ги задоволува следните услови:

(i) $f(0) = f(1) = 0$

(ii) $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le f(a) + f(b)$ за секои $a, b \in [0,1]$.

Докази дека равенката $f(x) = 0$ има бесконечно многу решенија.

Решение. Ако во (ii) ставиме $a = b$, ќе добиеме $f(a) \le 2f(a)$, односно

$$f(a) \ge 0 \text{ за секој реален број } a \in [0,1]. \qquad (1)$$

Ако во (ii) ставиме $a = 0$, $b = 1$ ќе добиеме $f\left(\frac{1}{2}\right) \le f(0) + f(1) = 0$, а имајќи го предвид и (1), следува дека $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. Понатаму ги разгледуваме интервалите $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ и $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$. За секој од нив, f е еднаква на нула во крајните точки, па од (ii) следува $f\left(\frac{1}{4}\right) = 0 = f\left(\frac{3}{4}\right)$. Со индукција по n се добива дека $f(x) = 0$ за секој $x \in [0,1]$ од облик $x = \frac{m}{2^n}$, $n \in N$, $m = 0, 1, 2, ..., 2^n$.

XLIV Републички натпревар 2001

I година

1. Дали природните броеви од 1 до 1991 можат да се запишат во низа, така што секој од нив ќе биде запишан два пати, при што второто запишување на бројот $k, k \in \{1, 2, ..., 1991\}$ ќе биде точно $k-$места по првото запишување?

Решение. Да претпоставиме дека такво запишување е можно. Бројот $k \in \{1, 2, ..., 1991\}$ не се појавува на m_k $-$то и на $m_k + k-$то место. Тогаш

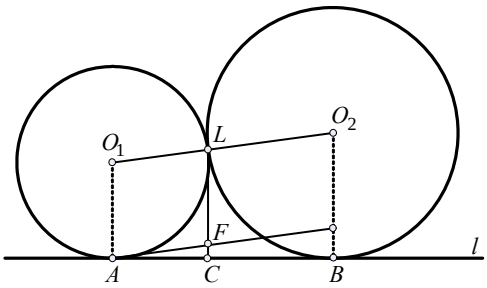
$$1+2+...+3982 = (m_1+(m_1+1))+(m_2+(m_2+1))+...+(m_{1991}+(m_{1991}+1))$$

$$7930153 = 2(m_1+m_2+...+m_{1991})+1983036$$

$$5947117 = 2(m_1+m_2+...+m_{1991})$$

Добиваме противречност, па таква низа не постои.

2. Две кружници k_1 и k_2 се допираат во точката L. Растојанието од L до нивната заедничка тангента е еднакво на 1. Ако r_1 и r_2 се радиуси на кружниците k_1 и k_2, тогаш $\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}=2$. Докажи!



Решение. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $r_1 \le r_2$. Нека A и B се допирните точки на тангентата l со кружниците k_1 и k_2 соодветно. Точката F е пресек на отсечките LC и AM, каде $M \in BO_2$ и $AM \parallel O_1O_2$. Триаголниците ΔAFC и ΔAMB се слични триаголници и заради тоа $\overline{FC}:\overline{MB} = \overline{AF}:\overline{AM}$, т.е. $\frac{1-r_1}{r_2-r_1} = \frac{r_1}{r_1+r_2}$, од каде $r_1+r_2-r_1^2-r_1r_2 = r_1r_2-r_1^2$. Значи $r_1+r_2 = 2r_1r_2$.

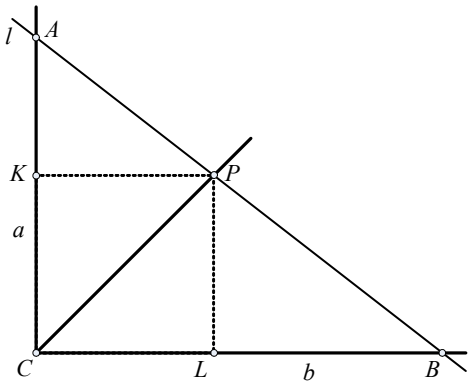
3. Нека a, b, p, q, r, s се природни броеви, такви што $qr-ps=1$ и $\frac{p}{q}<\frac{a}{b}<\frac{r}{s}$. Докажи дека $b \ge q+s$.

Решение. Од $\frac{p}{q}<\frac{a}{b}$ следува $aq-pb>0$. Бидејќи $aq-pb \in \mathbf{Z}$ добиваме дека $aq-pb \ge 1$. Од $\frac{a}{b}<\frac{r}{s}$ следува $br-as>0$. Бидејќи $br-as \in \mathbf{Z}$ добиваме дека $br-as \ge 1$. Тогаш

$$b = b(qr-ps) = bqr-bps = (bqr-qas)+(qas-bps) = q(br-as)+s(aq-bp).$$

Со користење на претходните две неравенства и последното равенство, добиваме $b \ge q+s$.

4. На симетралата на прав агол е избрана точка P. Низ неа повлекуваме права l која на краците на аголот отсекува отсечки со должини a и b. Докажи дека вредноста на изразот $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ не зависи од изборот на правата l.



Решение. Нека C е темето на правиот агол, а пресекот на правата l со краците на аголот се A и B. Нека $a=\overline{AC}$ и $b=\overline{BC}$. Од точката P спуштаме нормали PK и PL на страните AC и BC соодветно. Тогаш триаголниците ΔAKP и ΔPBL се слични и заради тоа

$$\frac{\overline{AK}}{\overline{KP}}=\frac{\overline{PL}}{\overline{LB}} \quad \text{т.е.} \quad \frac{a-h}{h}=\frac{h}{b-h}, \quad \text{каде}$$

$$h=\overline{PK}=\overline{PL}.$$

Од $\frac{a-h}{h}=\frac{h}{b-h}$, добиваме

$$(a-h)(b-h)=h^2 \quad \text{т.е.} \quad ab=ah+bh.$$

Ако последното равенство го поделиме со abh, добиваме $\frac{1}{h}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$.

Бидејќи h е број кој не зависи од изборот на правата l, изразот $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ е константен.

II година

1. Реши го, во множеството комплексни броеви, системот равенки $z^{19}w^{25}=1$, $z^5w^7=1$, $z^4+w^4=2$.

Решение. Од $z^5w^7=1$ добиваме $z^{15}w^{21}=1$, па $\frac{z^{19}w^{25}}{z^{15}w^{21}}=1$, т.е. $z^4w^4=1$. Од последната и од третата равенка на системот добиваме дека z^4 и w^4 се решенија на равенката $t^2-2t+1=0$, т.е. $z^4=w^4=1$. Според тоа $1=z^5w^7=zw^3$. Натаму, $zw^4=w$ па $z=w$. Решенија се $(1,1)$, $(-1,-1)$, (i,i), $(-i,-i)$.

2. Дадена е функцијата $f(x)=ax^2+bx+c$, таква што $|f(x)|\le 1$ за $|x|\le 1$. Докажи дека $|a|\le 2$.

Решение. Имаме: $f(0)=c \Rightarrow |c|\le 1$

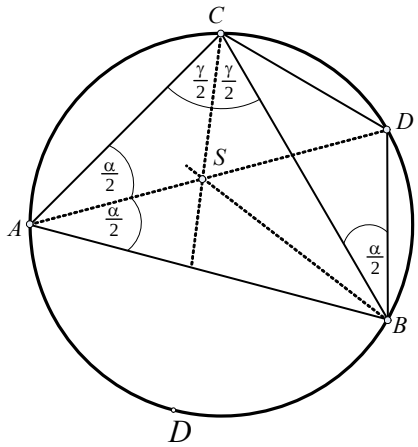
$$|f(1)|=|a+b+c|\le 1$$

$$|f(-1)|=|a-b+c|\le 1$$

Според тоа

$$|2a|=|(a+b+c)+(a-b+c)-2c|\le$$
$$\le|a+b+c|+|a-b+c|+|-2c|\le 1+1+2=4$$

т.е. $|a|\le 2$.



3. Ако S е центар на впишаната кружница во триаголникот ABC, а D пресекот на правата AS и опишаната кружница на триаголникот ABC, тогаш $\overline{DB}=\overline{DC}=\overline{DS}$. Докажи!

Решение. Бидејќи D е средина на лакот BC, следува $\overline{DB}=\overline{DC}$.

Имаме: $\angle DBC=\angle DAC=\frac{\alpha}{2}$,

$$\angle DSB = 180^\circ - (\angle SBD + \angle BDS) = 180^\circ - (\angle SBC + \angle CBD + \angle BCA)$$
$$= 180^\circ - \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \gamma\right) = \frac{\alpha+\beta}{2} = \angle SBD.$$

Значи ΔSBD е рамнокрак, па според тоа $\overline{DB} = \overline{DS}$.

4. Множеството A се состои од сите седумцифрени броеви запишани со цифрите $1,2,3,4,5,6$ и 7, при што цифрите им се различни. Докажи дека меѓу нив не постојат два, такви што едниот е делив со другиот.

Решение. Да го претпоставиме спротивното, т.е. дека постојат $a, b \in A$, такви што $a = bk$, $k \geq 2$. Од $k \leq \frac{7654321}{1234567} < 7$, следува $k \in \{2,3,4,5,6\}$. Бидејќи $1+2+3+4+5+6+7 = 28$, секој од броевите од множеството A е од видот $3l+1$, т.е. ниту еден од нив не се дели со 3, па според тоа ни со 6. Значи $k \neq 3$ и $k \neq 6$.

Случај $k = 2$. Ако $a = 2b$, $a + b = 3b$. Но $a + b$ не е делив со 3, бидејќи $a = 3s+1$ и $b = 3p+1$. Значи $k \neq 2$.

Случај $k = 5$. Ако $a = 5b$, тогаш $a + b = 6b$. Бидејќи $a + b$ не е делив со 3, заклучуваме дека $k \neq 5$.

Случај $k = 4$. Ако $a = 4b$, тогаш $a - b = 3b$. Бидејќи $a - b$ се дели со 9 (секој од броевите a и b при делење со 9 има ист остаток) следува дека $a - b = 3m$, а оттука и од $a = 4b$ добиваме $3m = b$ што не е можно. Значи $k \neq 4$.

III година

1. Ако $a > 1$, $b > 1$, $c > 1$ докажи дека важи неравенството

$$\log_{abc}^3 a \cdot \log_a b \cdot \log_a c \leq \frac{1}{27}.$$

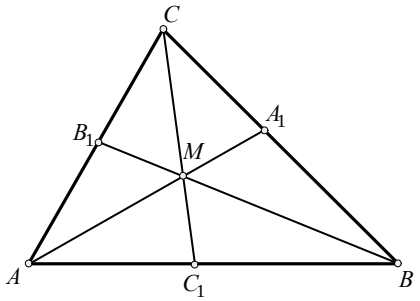
Решение. Имаме $\log_a a = 1$, $\log_a b > 0$, $\log_a c > 0$. Оттука

$$\frac{\log_a a + \log_a b + \log_a c}{3} \geq \sqrt[3]{\log_a a \cdot \log_a b \cdot \log_a c}$$

од каде што $\log_a^3 abc \geq 27 \log_a b \cdot \log_a c$ т.е. $\log_{abc}^3 a \cdot \log_a b \cdot \log_a c \leq \frac{1}{27}$.

2. Нека M е внатрешна точка на триаголникот ABC и нека $AM \cap BC = \{A_1\}$, $BM \cap CA = \{B_1\}$ и $CM \cap AB = \{C_1\}$. Докажи дека

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{A_1M}} + \frac{\overline{BM}}{\overline{B_1M}} + \frac{\overline{CM}}{\overline{C_1M}} \geq 6.$$



Решение. Нека S е плоштина на ΔABC а S_1, S_2, S_3 се плоштините на ΔMBC, ΔMCA, ΔMAB соодветно. Триаголниците ABC и MBC имаат иста основа па следува

$$\overline{AA_1} : \overline{MA_1} = S : S_1 = (S_1 + S_2 + S_3) : S_1.$$

Оттука $(\overline{AA_1} - \overline{MA_1}) : \overline{MA_1} = (S_2 + S_3) : S_1$, односно $\frac{\overline{MA}}{\overline{MA_1}} = \frac{S_2}{S_1} + \frac{S_3}{S_1}$. Аналогно $\frac{\overline{MB}}{\overline{MB_1}} = \frac{S_1}{S_3} + \frac{S_2}{S_3}$ и $\frac{\overline{MC}}{\overline{MC_1}} = \frac{S_1}{S_2} + \frac{S_3}{S_2}$. Значи

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{A_1M}}+\frac{\overline{BM}}{\overline{B_1M}}+\frac{\overline{CM}}{\overline{C_1M}}=\left(\frac{S_1}{S_2}+\frac{S_2}{S_1}\right)+\left(\frac{S_2}{S_3}+\frac{S_3}{S_2}\right)+\left(\frac{S_3}{S_1}+\frac{S_1}{S_3}\right)\geq 2\sqrt{\frac{S_1}{S_2}\frac{S_2}{S_1}}+2\sqrt{\frac{S_2}{S_3}\frac{S_3}{S_2}}+2\sqrt{\frac{S_3}{S_1}\frac{S_1}{S_3}}=6.$$

3. Ако неравенката $a\cos x+b\cos 3x>1$ нема решение, тогаш $|b|\leq 1$. Докажи!

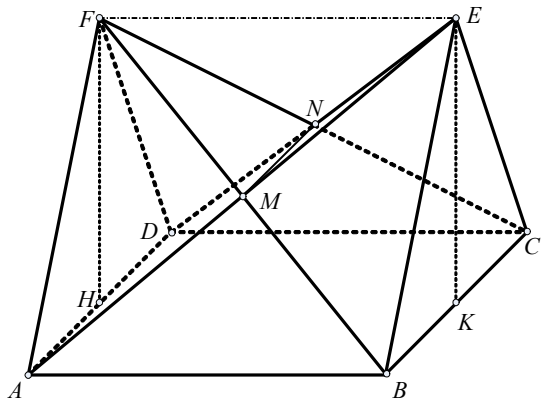
Решение. Нека $f(x)=a\cos x+b\cos 3x$. Тогаш $f(x)\leq 1$ за секој x. Според тоа $f(\pi)=-(a+b)\leq 1$, $f(0)=a+b\leq 1$, т.е. $|a+b|\leq 1$. Од друга страна

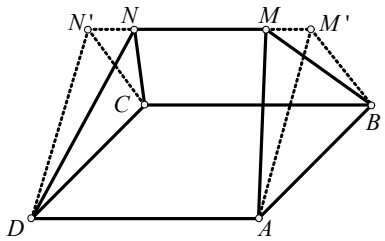
$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{a}{2}-b\leq 1,\ f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=b-\frac{a}{2}\leq 1,$$

па според тоа $\left|\frac{a}{2}-b\right|\leq 1$ т.е. $|2b-a|\leq 2$. Користејќи ги добиените неравенства имаме:

$$|b|=\frac{1}{3}|3b|=\frac{1}{3}|a+b+2b-a|\leq\frac{1}{3}(|a+b|+|2b-a|)\leq\frac{1}{3}(1+2)=1.$$

4. Две пирамиди имаат заедничка основа - квадрат со страна a. Пирамидите се наоѓаат на иста страна од квадратот. Висините на двете пирамиди минуваат низ средините на две спротивни страни на квадратот и имаат должина b. Пресметај го волуменот на заедничкиот дел на двете пирамиди.





Решение. Нека $ABCDE$ и $ABCDF$ се дадените пирамиди. Од правоаголникот $ABEF$ следува дека M е средина на AE. Слично N е средина на CF. Според тоа $\overline{AB}=a$ и висината на $\Delta ABM'$ спуштена од M' е $\frac{b}{2}$. Од друга страна MN е средна линија во ΔADE, па следува $\overline{MN}=\frac{a}{2}$. Според тоа $\overline{MM'}=\overline{MN'}=\frac{a}{4}$ и

$$V_{ABCDMN}=V_{ABCDM'N'}=\frac{1}{2}a\frac{b}{2}a-2\frac{1}{3}\frac{1}{2}a\frac{b}{2}\frac{a}{4}=\frac{a^2b}{4}-\frac{a^2b}{24}=\frac{5}{24}a^2b.$$

IV година

1. Одреди ја најмалата вредност на изразот $\frac{x^2+y^2+z^2}{xy+yz}$, ако $x>0, y>0$, $z>0$.

Решение. Од $x^2+\frac{1}{2}y^2\geq 2\sqrt{\frac{1}{2}x^2y^2}=xy\sqrt{2}$ и $z^2+\frac{1}{2}y^2\geq 2\sqrt{\frac{1}{2}z^2y^2}=zy\sqrt{2}$

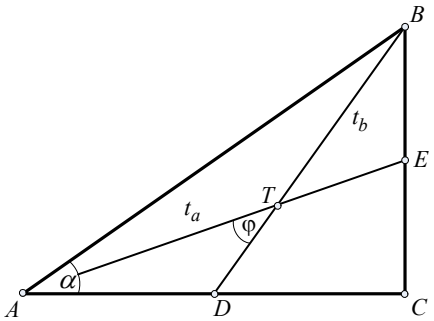
добиваме $\frac{x^2+y^2+z^2}{xy+yz}=\frac{x^2+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}y^2+z^2}{xy+yz}\geq\frac{xy\sqrt{2}+yz\sqrt{2}}{xy+yz}=\sqrt{2}$. Бидејќи за $x=z=1, y=\sqrt{2}$

имаме $\frac{1^2+(\sqrt{2})^2+1^2}{1\cdot\sqrt{2}+1\cdot\sqrt{2}}=\sqrt{2}$, следува дека мин вредност на изразот $\frac{x^2+y^2+z^2}{xy+yz}$ е $\sqrt{2}$.

2. Одреди правоаголен триаголник кај кој аголот меѓу тежишните линии на катетите достигнува најголема вредност.

Решение. Нека $\overline{AC}=b$, $\overline{BC}=a$. Ако ја примениме косинусната теорема на ΔADT, добиваме $2\overline{AT}\cdot\overline{DT}\cdot\cos\varphi=\overline{AT}^2+\overline{DT}^2-\overline{AD}^2$, т.е.

$$\frac{4}{9}\overline{AE}\cdot\overline{DT}\cdot\cos\varphi=\left(\frac{2}{3}\overline{AE}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\overline{BD}\right)^2-\frac{b^2}{4} \qquad (1)$$



Со замена на равенствата $\overline{AE}^2=b^2+\frac{a^2}{4}$ и $\overline{BD}^2=a^2+\frac{b^2}{4}$ во (1) добиваме

$$\frac{1}{9}\sqrt{(4b^2+a^2)(4a^2+b^2)}\cdot\cos\varphi=\frac{2}{9}(a^2+b^2)$$

т.е.

$$\cos\varphi=\frac{2(a^2+b^2)}{\sqrt{(4b^2+a^2)(4a^2+b^2)}} \qquad (2)$$

од каде следува дека

$$\sin\varphi=\sqrt{1-\cos^2\varphi}=\frac{3ab}{\sqrt{(a^2+4b^2)(4a^2+b^2)}} \qquad (3)$$

Од (2) и (3) добиваме дека $tg\varphi=\frac{3ab}{2c^2}$. Ако во последното равенство замениме $a=c\cdot\sin\alpha$, $b=c\cdot\cos\alpha$ добиваме $tg\varphi=\frac{3}{4}\sin 2\alpha$. Најголемата вредност на $tg\varphi$ (а со тоа и за φ се достигнува за $\sin 2\alpha=1$, т.е. за $\alpha=\frac{\pi}{4}$. Значи бараниот триаголник е рамнокрак правоаголен триаголник.

3. Одреди ги сите позитивни вредности на пареметарот a за кои ненегативните вредности на x, што ја задоволуваат равенката

$$\cos((8a-3)x)=\cos((14a+5)x),$$

образуваат растечка аритметичка прогресија.

Решение. Дадената равенка ќе ја запишеме во облик $\cos((8a-3)x)-\cos((14a+5)x)=0$ т.е.

$$-2\sin\frac{(8a-3)x+(14a+5)x}{2}\sin\frac{(8a-3)x-(14a+5)x}{2}=0.$$

Значи, дадената равенка е еквивалентна со вкупноста равенки

$$\left[\begin{array}{l}(8a-3)x+(14a+5)x=2k\pi\\(8a-3)x-(14a+5)x=2n\pi\end{array}\right., \quad \text{односно со} \quad \left[\begin{array}{l}(11a+1)x=k\pi\\(3a+4)x=n\pi\end{array}\right..$$

Бидејќи $a>0$ следува дека $11a+1>0$ и $3a+4>0$. Значи $x=\frac{k\pi}{11a+1}$ или $x=\frac{n\pi}{3a+4}$. Означуваме $x_k=\frac{k\pi}{11a+1}$ и $x_n=\frac{n\pi}{3a+4}$. Бидејќи $x\geq 0$, добиваме дека $n,k=0,1,2,\ldots$, па (x_k) и (x_n) се две растечки аритметички прогресии со први членови 0 и разлики $d_1=\frac{\pi}{11a+1}$ и $d_2=\frac{\pi}{3a+4}$ соодветно.

Ќе го докажеме следново својство: *броевите* x_k *и* y_k *образуваат аритметичка прогресија ако и само ако: за* $d_1 \le d_2$ *постои* $m \in \mathbb{N}$ *така што* $d_2 = md_1$, *или за* $d_2 \le d_1$ *постои* $m \in \mathbb{N}$ *така што* $d_1 = md_2$.

Навистина ако $d_1 \le d_2$, тогаш d_1 е втор член на новата аритметичка прогресија (првиот е 0). Бидејќи $\frac{\pi}{11a+1} \le \frac{\pi}{3a+4}$ следува дека разликата на новата аритметичка прогресија е d_1. Но и d_2 е член на таа аритметичка прогресија, па постои $m \in \mathbf{N}$ така што $d_2 = md_1$.

Обратно, нека постои $m \in \mathbb{N}$ така што $d_2 = md_1$. Тогаш $x_n = d_2 m(n-1)$. Значи секој член од прогресијата (x_n) е член и на прогресијата (x_k), па бараната прогресија е (x_k). Аналогно се докажува и за $d_2 \le d_1$.

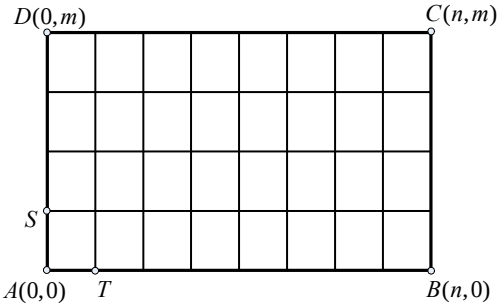
Натаму нека $d_1 \le d_2$. Тогаш постои $m \in \mathbb{N}$ така што $d_2 = md_1$, т.е. $m\frac{\pi}{11a+1} = \frac{\pi}{3a+4}$ од каде што следува $a = \frac{4m-1}{11-3m}$. Имаме $m \in \mathbb{N}$ па заради тоа $4m-1>0$, $a>0$ од каде што следува дека $11-3m>0$ па $m \le \frac{11}{3}$. Значи $m \in \{1,2,3\}$ и соодветните вредности за a се $\frac{3}{8}, \frac{7}{5}, \frac{11}{3}$.

Сега нека $d_2 \le d_1$. Тогаш постои $m \in \mathbb{N}$ така што $d_1 = d_2 m$ т.е. $\frac{\pi}{11a+1} = m\frac{\pi}{3a+4}$, од каде $a = \frac{4-m}{11m-3}$. Заради $m \in \mathbb{N}$ и $a>0$ добиваме, од слични причини како и претходно $m \in \{1,2,3\}$. Соодветните вредности за a се $\frac{3}{8}, \frac{2}{19}, \frac{1}{30}$.

Значи, $a \in \left\{\frac{3}{8}, \frac{2}{19}, \frac{1}{30}, \frac{7}{5}, \frac{11}{3}\right\}$.

4. Правоаголник со димензии m и n каде што m и n се природни броеви и $n = mk$ е разделен на $m \cdot n$ единечни квадрати. Секој пат од точката A до точката C по делбените отсечки (страните на малите квадрати) при што е дозволено движење надесно и движење на нагоре, има должина $m+n$. Најди колку пати бројот на патишта од A до C што минуваат низ точката T е поголем од бројот на патишта од A до C што минуваат низ точката S.

Решение. Секој пат од A до C ќе го означиме со нули и единици, при што со единица го означуваме движењето нагоре за единица должина, а со нула го означуваме движењето надесно за единица должина. Според тоа, бројот на патишта низ точката T е



$$C_{m+n-1}^{n-1} = \binom{m+n-1}{n-1},$$

а бројот на патишта низ точката S е

$$C_{m+n-1}^{m-1} = \binom{m+n-1}{m-1}.$$

Бидејќи

$$\frac{C_{m+n-1}^{m-1}}{C_{m+n-1}^{n-1}} = \frac{\binom{m+n-1}{m-1}}{\binom{m+n-1}{n-1}} = k,$$

следува дека бројот на патишта низ точката T е за $k-$пати поголем од бројот на патишта низ точката S.

Републички натпревар 2002

I година

1. Целите броеви a и b се такви што производот $(16a+17b)(17a+16b)$ е делив со 11 . Покажи дека истиот произ-вод е делив со 121.

Решение. Нека $m=16a+17b$ и $n=17a+16b$. Според условот на задачата $11|m\cdot n$. Бидејќи 11 е прост број $11|m$ или $11|n$. Од друга страна $m+n=33(a+b)$, т.е. $11|(m+n)$.Според тоа можни се следните два случаи:

а. $11|m$ и $11|(m+n)$ па според тоа $11|(m+n)-m$, т.е. $11|n$

б. $11|n$ и $11|(m+n)$ па според тоа $11|(m+n)-n$, т.е. $11|m$

Од последниот услов и од претходните два имаме $11^2|m\cdot n$.

2. Дадени се два купа од по 2002 топчиња. Двајца играчи наизменично играат потези на следниот начин: во секој потег играчот го отстранува едниот куп, а другиот куп по свој избор го дели на два непразни купа. Правилен потег е отстранување на едниот од двата купа топчиња кои ги оставил претходниот играч и делење на преостанатиот куп на два непразни купа топчиња. Играта ја губи оној играч кој не може да одигра правилен потег. Одреди кој играч со сигурност може да победи и на кој начин.

Решение. Играта ја губи оној играч кој пред својот потег ќе затекне два купа со по едно топче. Играта ја добива оној играч кој е во состојба после својот потег да остави два купа со непарен број топчиња. Нека е тоа играчот A. Тогаш играчот B било како да игра ќе остави еден куп со непарен број топчиња и еден куп со парен број на топчиња. Играчот A повторно го отстранува купот со непарен број топчиња, а купот со парен број топчиња го дели на два купа со непарен број на топчиња. Играјќи со оваа стратегија играчот A по конечен број на чекори ќе го остави играчот B така што пред него да има два купа со по едно топче, и тој не може да одигра правилен чекор.

Имајќи ја во предвид горната стратегија, добиваме дека играчот што прв ќе ја почне играта ја добива играта.

3. Нека x,y,z се реални броеви за кои важи равенството $\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}=1$. Докажи дека за истите броеви x,y,z важи и равенството $\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}=0$.

Решение. Равенството кое го исполнуваат реалните броеви x,y,z ќе го помножиме со x,y,z ги добиваме равенствата

$$\frac{x^2}{y+z}+\frac{xy}{z+x}+\frac{xz}{x+y}=x\,,\quad \frac{yx}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{yz}{x+y}=y \text{ и } \frac{zx}{y+z}+\frac{zy}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}=z\,.$$

Ако ги собериме левите и десните страни на трите добиени равенства добиваме

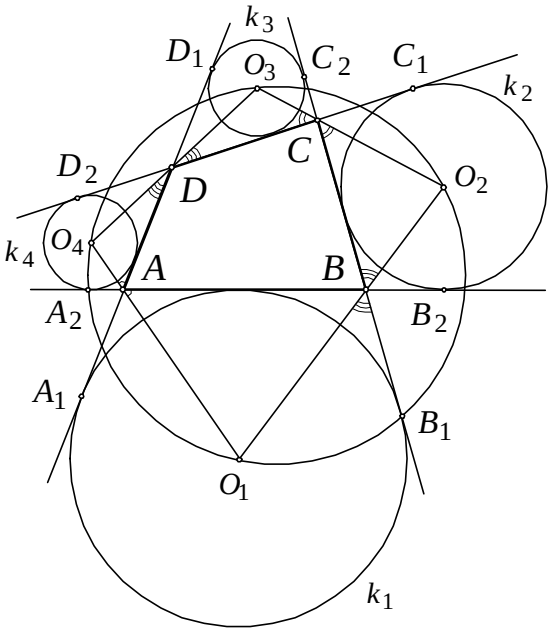
$$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{x+z}+\frac{z^2}{x+y}+\frac{xy}{z+x}+\frac{xz}{x+y}+\frac{yx}{y+z}+\frac{yz}{x+y}+\frac{zx}{y+z}+\frac{zy}{z+x}=x+y+z\Rightarrow$$

$$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{x+z}+\frac{z^2}{x+y}+\frac{zy+xy}{z+x}+\frac{xz+zy}{x+y}+\frac{yx+zx}{y+z}=x+y+z\Rightarrow$$

$$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{x+z}+\frac{z^2}{x+y}+\frac{(z+x)y}{z+x}+\frac{(x+y)z}{x+y}+\frac{(y+z)x}{y+z}=x+y+z\Rightarrow$$

$$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{x+z}+\frac{z^2}{x+y}+y+z+x=x+y+z \Rightarrow \frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}=0$$

4. Страните на произволен конвексен четириаголник се продолжени и повлечени се четири кружници. Секоја кружница, од надвор, допира една страна на четириаголникот и продолженијата на двете нејзини соседни страни. Докажи дека центрите на четирите кружници лежат на иста кружница.



Решение. Нека центрите на кружниците ги означиме со O_1, O_2, O_3 и O_4 на кружниците k_1, k_2, k_3 и k_4 кои ги допираат страните AB, BC, CD и DA. Според ознаките на цртежот кружницата k_1 ги допира полуправите AA_1 и AB. Според тоа, нејзиниот центар лежи на симетралата на аголот $\angle A_1AB$, т.е. O_1A е симетрала на аголот $\angle A_1AB$. Слично, кружницата k_4 ги допира полуправите AA_2 и AD. Значи, нејзиниот центар O_4 лежи на симетралата на аголот $\angle A_2AD$, т.е. AO_4 е симетрала на аголот $\angle A_2AD$. Бидејќи $\angle A_1AB = \angle A_2AD$, правата O_4O_1 е симетрала и на аголот $\angle A_1AB$ и на аголот $\angle A_2AD$. Сега е јасно дека $\angle O_1AB = \frac{180^\circ - \angle A}{2} = \angle O_4AD$.

Од исти причини исполнети се равенствата:

$$\angle O_1BA = \frac{180^\circ - \angle B}{2} = \angle O_2BC,$$

$$\angle O_2CB = \frac{180^\circ - \angle C}{2} = \angle O_3CD,$$

$$\angle O_3DC = \frac{180^\circ - \angle D}{2} = \angle O_4DA$$

Ако ги искористиме овие равенства добиваме:

$$\angle O_4O_1O_2 = 180^\circ - \angle O_1AB - \angle O_1BA = 180^\circ - \frac{180^\circ - \angle A}{2} - \frac{180^\circ - \angle B}{2} = \frac{\angle A + \angle B}{2}$$

и

$$\angle O_4O_3O_2 = 180^\circ - \angle O_3DC - \angle O_3CD = 180^\circ - \frac{180^\circ - \angle D}{2} - \frac{180^\circ - \angle C}{2} = \frac{\angle C + \angle D}{2}.$$

Конечно, $\angle O_4O_1O_2 + \angle O_4O_3O_2 = \frac{\angle A + \angle B}{2} + \frac{\angle C + \angle D}{2} = 180^\circ$. Според тоа, четириаголникот $O_1O_2O_3O_4$ е тетивен и околу него може да се опише кружница.

II година

1. Нека $p(t) = at^2 + bt + c$ е полином со ненегативни коефициенти. Покажи дека

$$(p(xy))^2 \le p(x^2)p(y^2).$$

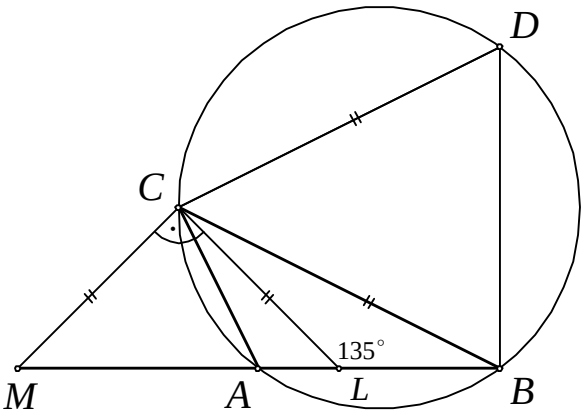
Решение. Непосредно:

$$(p(xy))^2 - p(x^2)p(y^2) = (a(xy)^2 + bxy + c)^2 - (ax^4 + bx^2 + c)(ay^4 + by^2 + c) =$$
$$= a^2x^4y^4 + b^2x^2y^2 + c^2 + 2abx^3y^3 + 2acx^2y^2 + 2bcxy - a^2x^4y^4 -$$
$$- abx^4y^2 - acx^4 - abx^2y^4 - b^2x^2y^2 - bcx^2 - acy^4 - bcy^2 - c^2 =$$
$$= 2abx^3y^3 + 2acx^2y^2 + 2bcxy - abx^4y^2 - acx^4 - abx^2y^4 - bcx^2 - acy^4 - bcy^2 =$$
$$= abx^2y^2(2xy - x^2 - y^2) + ac(2x^2y^2 - x^4 - 4) + bc(2xy - x^2 - y^2) =$$
$$= -ab(x-y)^2 - ac(x^2 - y^2)^2 - bc(x-y)^2 \le 0$$

2. Нека L и M се точките во кои симетралата на внатрешниот и симетралата на надворешниот агол во темето C на триаголникот ABC ја сечат правата $\overline{AB}$ соодветно. Ако $\overline{CL} = \overline{CM}$, тогаш

$$\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = 4R^2,$$

каде што R е радиусот на опишаната кружница околу триаголникот ABC. Докажи!



Решение. Отсечките CM и CL се симетрали на надворешниот и внатрешниот агол кај темето C соодветно и $\overline{CL} = \overline{CM}$. Затоа ΔMLC е правоаголен рамнокрак триаголник. Според тоа $\angle BLC = 135^\circ$, па од триаголникот CLB добиваме $\frac{\gamma}{2} + 135^\circ + \beta = 180^\circ$ т.е. $\gamma + 2\beta = 180^\circ$. Од последното равенство добиваме $\alpha - \beta = 90^\circ$.

Нека точката D е на кружницата опишана околу ΔABC, таква што $\overline{CD} = \overline{CB}$. Четириаголникот $ABDC$ е тетивен па според тоа $\angle CDB = 180 - \alpha$. Бидејќи ΔBDC е рамнокрак, добиваме $\angle DCB = 2\alpha - 180^\circ$. Тогаш

$$\angle ACD = \gamma + 2\alpha - 180^\circ = 90^\circ - 2\beta + 180^\circ + 2\beta - 180^\circ = 90^\circ$$

Значи, $R = \frac{\overline{AD}}{2}$ и од триаголникот ACD добиваме $4R^2 = \overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CB}^2$

3. Ако збирот на 2002 цели броеви е делив со 6, тогаш и збирот на нивните кубови е делив со 6. Докажи!

Решение. За било кој цел број a, бројот $a^3 - a$ е делив со 6. Тоа е очигледно од записот

$$a^3 - a = a(a^2 - 1) = a(a-1)(a+1) = (a-1)a(a+1)$$

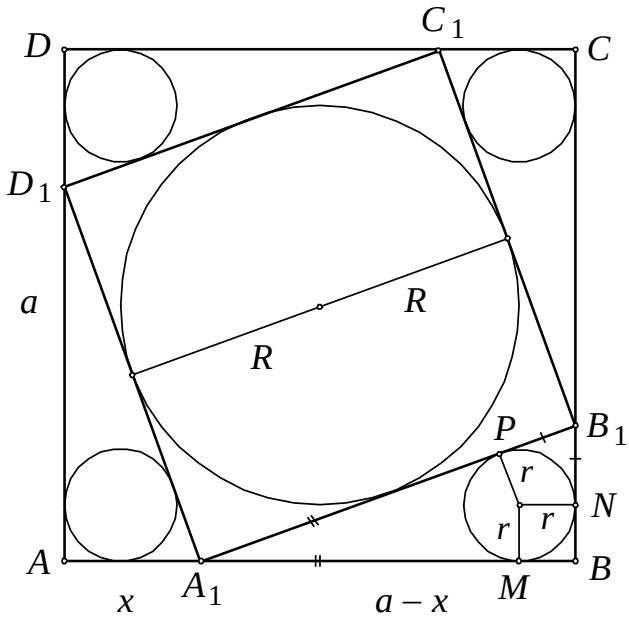
(барем еден од нив е парен и барем еден од нив е делив со 3).

Нека $a_1, a_2, ..., a_{2002}$ се цели броеви чиј збир $a_1 + a_2 + ... + a_{2002}$ е делив со 6. Тогаш, од записот

$$a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + ... + a_{2002}^3 = (a_1^3 - a_1) + (a_2^3 - a_2) + (a_3^3 - a_3) + ... +$$
$$+ (a_{2002}^3 - a_{2002}) + (a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{2002})$$

е очигледно дека бројот од левата страна е делив со 6. Секој од броевите во заградите од десната страна на последното равенство е делив со 6.

4. Даден е квадрат Q со страна a во кој е впишан квадрат Q_1, така што темињата на квадратот Q_1 припаѓаат на страните на квадратот Q. Во квадратот Q_1 и во четирите добиени триаголници се впишани кружници.Најди ја страната на квадратот Q_1 така што збирот од плоштините на впишаните кругови биде најмал.



Решение. Нека $x=\overline{AA_1}=\overline{BB_1}=\overline{CC_1}=\overline{DD_1}$, R -радиус на впишаната кружница во квадратот Q_1, а r -радиус на впишаните кружници во ΔA_1BB_1, ΔB_1CC_1, ΔC_1DD_1 и ΔD_1AA_1. Тогаш $\overline{A_1B_1}=2R$ и $\overline{A_1B_1}=\sqrt{\overline{A_1B}^2+\overline{BB_1}^2}=\sqrt{(a-x)^2+x^2}$, т.е.

$$R=\tfrac{1}{2}\sqrt{(a-x)^2+x^2}\ . \qquad (1)$$

Непосредно според ознаките на цртежот имаме

$$2r+2R=(\overline{MB}+\overline{BN})+\overline{A_1B_1}=(\overline{MB}+\overline{BN})+(\overline{A_1P}+\overline{PB_1})=(\overline{MB}+\overline{BN})+(\overline{A_1M}+\overline{B_1N})$$
$$=(\overline{A_1M}+\overline{MB})+(\overline{BN}+\overline{B_1N})=\overline{A_1B}+\overline{B_1B}=a$$

Според тоа $r=\frac{a}{2}-R$ или $R=\frac{a}{2}-r$.

Збирот на плоштините на сите пет впишани кругови е

$$R^2\pi+4r^2\pi=\pi[R^2+(a-2R)^2]=\pi(5R^2-4aR+a^2)=\pi\left[5\left(R-\tfrac{2}{5}a\right)^2+a^2-\tfrac{4}{25}a^2\right]=\pi\left[5\left(R-\tfrac{2}{5}a\right)^2+\tfrac{21}{25}a^2\right]$$

Збирот ќе биде минимален за $R=\frac{2a}{5}$. Од (1) добиваме $\frac{1}{2}\sqrt{(a-x)^2+x^2}=\frac{2a}{5}$ од каде $x=\frac{5\pm\sqrt{7}}{10}a$.

И двете добиени вредности се помали од a и уште нивниот збир е еднаков на a . Според тоа за секоја вредност на x која ја добивме имаме по едно решение, при што добиените квадрати се складни.

Непосредно се наоѓа страната на впишаниот квадрат.

III година

1. Во триаголникот ABC, $\angle A=\frac{\pi}{7}$, $\angle B=\frac{2\pi}{7}$ и $\angle C=\frac{4\pi}{7}$. Докажи дека $\frac{1}{a}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ каде $\overline{AB}=c$, $\overline{BC}=a$ и $\overline{CA}=b$.

Решение. Според синусна теорема за ΔABC имаме

$$\frac{a}{\sin(\angle A)}=\frac{b}{\sin(\angle B)}=\frac{c}{\sin(\angle C)}=2R \ \Leftrightarrow\ a=2R\sin(\angle A), b=2R\sin(\angle B)\ , c=2R\sin(\angle C)$$

Равенството $\frac{1}{a}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ кое треба да го докажеме е еквивалентно со равенството

$$\frac{1}{\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{1}{\sin\frac{2\pi}{7}}+\frac{1}{\sin\frac{4\pi}{7}} \qquad (*)$$

Од друга страна

$$\frac{1}{\sin\frac{2\pi}{7}}+\frac{1}{\sin\frac{4\pi}{7}}=\frac{\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}}{\sin\frac{2\pi}{7}\cdot\sin\frac{4\pi}{7}}=\frac{2\sin\frac{3\pi}{7}\cdot\cos\frac{\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{\pi}{7}\cdot\sin\frac{4\pi}{7}}=\frac{\sin\frac{3\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}\cdot\sin\left(\pi-\frac{4\pi}{7}\right)}=\frac{\sin\frac{3\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}\cdot\sin\frac{3\pi}{7}}=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{7}}$$

Според тоа и почетното равенство е исполнето.

2. Определи го збирот $\frac{2}{\log n}\sum_{d\in A}\log d$ каде $n>1$ и $A=\{d\,/\,d\in\mathbf{N}\,,\,d\,|\,n\,\}$.

Решение. Нека $d_o,d_1,d_2,...,d_m$ се сите различни делители на бројот n, при што

$$1=d_o<d_1<d_2<...<d_m=n$$

Ако бројот $m=2l$, т.е. бројот на делители на бројот n е непарен број, тогаш исполнети се равенствата

$$d_\circ d_{2l}=d_1d_{2l-1}=d_2d_{2l-2}=....=d_l^2=n$$

Според тоа

$$\frac{2}{\log n}\sum_{d\in A}\log d=\frac{2}{\log n}\sum_{k=0}^{2l}\log d_k=\frac{2}{\log n}(\log d_0+\log d_1+\log d_2+...+\log d_{2l-2}+\log d_{2l-1}+\log d_l)=$$

$$=\frac{2}{\log n}(\log d_o+\log d_{2l}+\log d_1+\log d_{2l-1}+...+\log d_{l-1}+\log d_{l+1}+\log d_l)=$$

$$=\frac{2}{\log n}(\log d_od_{2l}+\log d_1d_{2l-1}+...+\log d_{l-1}d_{l+1}+\log d_l)=$$

$$=\frac{2}{\log n}(\underbrace{\log n+\log n+...+\log n}_{l}+\log d_l)=\frac{2l\log n}{\log n}+\frac{2\log d_l}{\log n}=2l+1$$

Ако $m=2l+1$, т.е. бројот на делители на бројот n е парен број тогаш исполнети се равенствата $d_\circ d_{2l}=d_1d_{2l-1}=d_2d_{2l-2}=....=d_ld_{l+3}=d_{l+1}d_{l+2}=n$. Според тоа

$$\frac{2}{\log n}\sum_{k=0}^{2l+1}\log d_k=\frac{2}{\log n}(\log d_o+\log d_{2l+1}+\log d_1+\log d_{2l}+...+\log d_l+\log d_{l+3}+\log d_{l+1}+\log d_{l+2})=$$

$$=\frac{2}{\log n}(\log d_od_{2l+1}+\log d_1d_{2l}+...+\log d_ld_{l+3}+\log d_{l+1}d_{l+2})=$$

$$=\frac{2}{\log n}(\log n+\log n+...+\log n)=2(l+2)$$

3. Аголот $\gamma=\angle C$ во ΔABC со правите p и q е поделен на три еднакви дела. Правите p и q ја сечат правата AB во точките D и E. Пресметај ги должините $\overline{CE}$ и $\overline{CD}$ ако $\overline{CE}:\overline{CD}=m:n\ (m<n)$ и $\overline{AC}=b$, $\overline{BC}=a$, $(a<b)$.

Решение. Нека пресечните точки на дадените прави со страната AB се D и E, при што $\overline{CD}=y$ и $\overline{CE}=x$ и $\frac{x}{y}=\frac{m}{n}$, $(m<n)$. Ако $\gamma=3\phi$, тогаш $\phi=\angle ACD=\angle DCE=\angle ECB$. Според тоа јасни се равенствата

$$P_{\Delta ABC}=P_{\Delta ADC}+P_{\Delta DBC}=\tfrac{1}{2}by\sin\phi+\tfrac{1}{2}ay\sin2\phi$$

$$P_{\Delta ABC}=P_{\Delta AEC}+P_{\Delta EBC}=\tfrac{1}{2}bx\sin2\phi+\tfrac{1}{2}ax\sin\phi$$

$$P_{\Delta ABC}=P_{\Delta ADC}+P_{\Delta DEC}+P_{\Delta EBC}=\tfrac{1}{2}by\sin\phi+\tfrac{1}{2}yx\sin\phi+\tfrac{1}{2}ax\sin\phi$$

Од првото и третото равенство имаме $2ay\cos\phi = x(a+y)$, а од второто и третото равенство $2bx\cos\phi = y(b+x)$. Од првото од последните две добиени равенства имаме

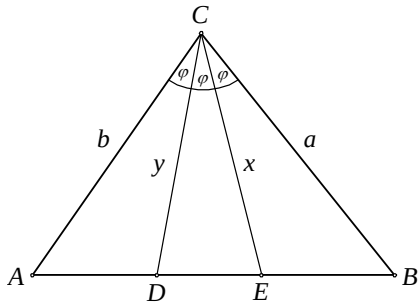
$$\cos\phi = \frac{x(a+y)}{2ay}$$

и ако замениме во второто равенство добиваме

$$bx^2(a+y) = ay^2(b+x).$$

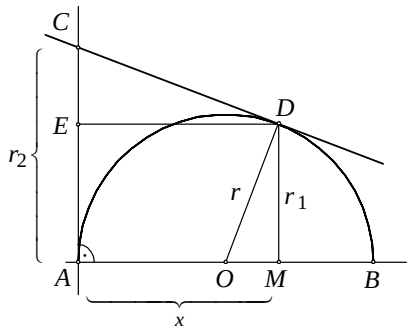
Ако го решиме системот

$$\begin{cases} bx^2(a+y) = ay^2(b+x) \\ \frac{x}{y} = \frac{m}{n} \end{cases}$$



во кој непознати се само x и y добиваме $x = \frac{ab(n^2-m^2)}{n(mb-an)}$, $y = \frac{ab(n^2-m^2)}{m(mb-an)}$.

4. На полукруг со дијаметар $\overline{AB} = 2r$ е избрана точка D, различна од A и B. Точката M е подножје на нормалата повлечена од точката D кон дијаметарот AB, а точката C е пресечната точка на тангентите на полукругот повлечени во точките A и D. Одреди го $\overline{AM} = x$ така што односот на волумените на телата настанати со ротација на трапезот $AMDC$ и делот од полукругот AMD да биде еднаков на k. За кои вредности на k задачата има решение.



Решение. Од сличноста на ΔEDC и ΔMDO добиваме $\overline{CD} : \overline{ED} = r : r_1$, т.е. $\overline{CD} : x = r : r_1$. Значи, $\overline{CD} = \frac{rx}{r_1} = \overline{AC} = r_2$. Со ротација на трапезот $AMDC$ се добива пресечен конус и неговиот волумен е

$$V_{AMDC} = V_1 = \frac{1}{3}x\pi(r_1^2 + r_1r_2 + r_2^2) = \frac{1}{3}x^2\pi\frac{7r^2-5rx+x^2}{2r-x}$$

При ротација на делот AMD се добива топкин отсечок со висина $\overline{AM} = x$ и волумен

$$V_{AMD} = V_2 = \frac{1}{3}x^2(3r-x)\pi$$

Од количникот $\frac{V_1}{V_2} = k$ добиваме квадратна равенка

$$(1-k)x^2 + (-5r+5rk)x + 7r^2 - 6kr^2 = 0$$

која има решенија

$$x_{1|2} = \frac{r}{2}\left(5 \pm \sqrt{\frac{k+3}{k-1}}\right)$$

Решението

$$x_1 = \frac{r}{2}\left(5 + \sqrt{\frac{k+3}{k-1}}\right) > \frac{r}{2}(5+1) = 3r$$

нема смисла. Второто решение $x_2 = \frac{r}{2}\left(5 - \sqrt{\frac{k+3}{k-1}}\right)$, и допуштени вредности за k се $k > \frac{7}{6}$, кое се добива од неравенствата

$$1 < \sqrt{\frac{k+3}{k-1}} < 5 .$$

IV година

1. Три ненулти реални броеви образуваат аритметичка прогресија, а нивните квадрати земени во истиот редослед образуваат геометриска прогресија. Да се најдат сите можни количници на геометриската прогресија.

Решение. Нека реалните броеви a,b,c образуваат аритметичка прогресија при што броевите a^2,b^2,c^2 образуваат геометриска прогресија. Според тоа $2b=c+a$ и $b^4=c^2a^2$. Ако равенството $2b=c+a$ го квадрираме добиваме $4b^2=a^2+2ac+c^2$. Од равенството $b^4=c^2a^2$ добиваме $b^2=|ac|$, и ако замениме во претходната равенка имаме

$$a^2+2ac+c^2=4|ac|.$$

Ќе ги разгледаме двата можни случаи, т.е.

а) a и c имаат ист знак

б) a и c имаат различен знак

Ако a и c имаат ист знак, тогаш последната равенка го добива обликот $a^2-2ac+c^2=0$, т.е. $a=c$. Во тој случај, количникот на геометриската прогресија е $q=1$.

Ако a и c имаат спротивни знаци, тогаш последната равенка го добива обликот $a^2+6ac+c^2=0$ и бидејќи $a\neq 0$ истата можеме да ја запишеме во облик $\left(\frac{c}{a}\right)^2+6\frac{c}{a}+1=0$. Решение на последната квадратна равенка по $\frac{c}{a}$ се $\frac{c}{a}=-3\pm\sqrt{8}$. Ако количникот на геометриската прогресија е q, тогаш $\frac{c^2}{a^2}=q^2$, т.е. $q^2=(-3\pm\sqrt{8})^2$. Броевите a^2,b^2,c^2 кои ја образуваат геометриската прогресија се позитивни, па според тоа $q>0$. Позитивни решенија на равенката $q^2=(-3\pm\sqrt{8})^2$ се $3-\sqrt{8}$ и $3+\sqrt{8}$.

Значи, бараните количници се 1, $3-\sqrt{8}$ и $3+\sqrt{8}$.

2. Нека n е природен број. Докажи дека кружницата $x^2+y^2=4^n$ не минува низ точка со целобројни координати која не е на $x-$оската или на $y-$оската.

Решение. За фиксен прирдоен број n кружницата $x^2+y^2=(2^n)^2$ минува низ точките $(\pm 2^n,0)$ и $(0,\pm 2^n)$.

Нека претпоставиме дека постои целоброен пар (x,y) за кој важи $x^2+y^2=(2^n)^2$ и кој е различен од паровите $(\pm 2^n,0)$ и $(0,\pm 2^n)$. Тогаш $|x|<2^n$ и $|y|<2^n$. Целите броеви од парот (x,y) не може да се со различна парност. Ако x и y се со различна парност, тогаш левата страна на $x^2+y^2=(2^n)^2$ е непарен број а левата страна е парен број.

Ако двата цели броја x и y од парот (x,y) се непарни броеви т.е. $x=2p+1$, $y=2q+1$ за некои цели броеви p и q, тогаш $x^2+y^2=2[2(p^2+q^2+p+q)+1]$. Од последното равенство добиваме $2(p^2+q^2+p+q)+1=2^{2n-1}$ што не е можно.

Ако двата цели броја x и y од парот (x,y) се парни броеви, тогаш постојат непарни цели броеви a и b и природен број k ($k<n$) така што $x=2^k a$ и $y=2^k b$. Ако замениме во равенството добиваме $a^2+b^2=2^{2(n-k)}$, кое не е можно според претходниот дел.

3. Низата $\{a_n\}$ е одредена со $a_1 = 1$ и $a_{n+1} = 3a_n + \sqrt{8a_n^2 + 1}$, за $n \geq 1$. Докажи дека сите членови на низата се природни броеви.

Решение. Дадената низа е строго растечка низа. Од рекурентната зависност со која е зададена низата добиваме

$$(a_{n+1} - 3a_n)^2 = 8a_n^2 + 1 \;\Rightarrow\; a_{n+1}^2 - 6a_n a_{n+1} + a_n^2 = 1 \qquad (1)$$

Аналогно,

$$a_{n+2}^2 - 6a_{n+1}a_{n+2} + a_{n+1}^2 = 1 \qquad (2)$$

Од (1) и (2) добиваме $a_{n+2}^2 - a_n^2 - 6a_{n+1}(a_{n+2} - a_n) = 0 \;\Rightarrow\; (a_{n+2} - a_n)(a_{n+2} - 6a_{n+1} + a_n) = 0$. Бидејќи низата е строго монотоно растечка, $a_{n+2} - a_n \neq 0$, па според тоа $a_{n+2} - 6a_{n+1} + a_n = 0$, т.е.

$$a_{n+2} = 6a_{n+1} - a_n \qquad (3)$$

Бидејќи $a_1 = 1$, $a_2 = 6$ од (3) добиваме дека $a_n \in \mathbb{N}$ за било кој $n \in \mathbb{N}$.

4. Позитивните реални броеви $x_1, x_2, ..., x_n$ го исполнуваат равенството $x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n = a$. Докажи дека $(1 + x_1)(1 + x_2)...(1 + x_n) \geq (1 + \sqrt[n]{a})^n$.

Решение. Левата страна на неравенството можеме да ја запишеме во облик

$$(1 + x_1)(1 + x_2)...(1 + x_n) \geq 1 + x_1 + x_2 + ... + x_n + x_1x_2 + x_1x_3 + ... + x_1x_n + x_2x_3 + ... + x_{n-1}x_n +$$
$$+ x_1x_2x_3 + ... + x_{n-2}x_{n-1}x_n + ... + x_1x_2...x_n = (*)$$

Јасно е дека, според неравенство меѓу аритметичка и геометриска средина дека

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \geq n\sqrt[n]{x_1x_2...x_n} = C_n^1 \sqrt[n]{a}\ .$$

Бројот на собироци од облик $x_i x_j$, $i < j$, $i, j = 1, 2, ..., n$ е C_n^2, а во тие собироци бројот x_i, $i = 1, 2, ..., n$ се појавува $n - 1$ пати, па според неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина добиваме:

$$\sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} x_i x_j \geq C_n^2 \sqrt[C_n^2]{(x_1x_2...x_n)^{C_{n-1}^1}} = C_n^2 \sqrt[n]{(x_1x_2...x_n)^2} = C_n^2 \sqrt[n]{a^2}\ .$$

Бројот на собироци од облик $x_i x_j x_k$, $i < j < k$, $i, j, k = 1, 2, ..., n$ е C_n^3, а секој број x_i, $i = 1, 2, ..., n$ се појавува во C_{n-1}^2 собироци од збирот $\sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i<j<k}}^{n} x_i x_j x_k$. Според неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина добиваме

$$\sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i<j<k}}^{n} x_i x_j x_k \geq C_n^3 \sqrt[C_n^3]{(x_1x_2...x_n)^{C_{n-1}^2}} = C_n^3 \sqrt[n]{(x_1x_2...x_n)^3} = C_n^3 \sqrt[n]{a^3}\ .$$

Општо, бројот на собироци од облик $x_{i_1} x_{i_2} ... x_{i_k}$, $i_1 < i_2 < ... < i_k$; $i_1, i_2, ..., i_k = 1, 2, ..., n$ е C_n^k а секој број x_i, $i = 1, 2, ..., n$ се појавува во C_{n-1}^{k-1} собироци од збирот $\sum_{\substack{i_1,...,i_k=1 \\ i_1<i_2<...<i_k}}^{n} x_{i_1} x_{i_2} ... x_{i_k}$. Според неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина добиваме:

$$\sum_{\substack{i_1,...,i_k=1 \\ i_1<i_2<...<i_k}}^{n} x_{i_1} x_{i_2} ... x_{i_k} \geq C_n^k \sqrt[C_n^k]{(x_1x_2...x_n)^{C_{n-1}^{k-1}}} = C_n^k \sqrt[n]{(x_1x_2...x_n)^k} = C_n^k \sqrt[n]{a^k}\ .$$

за било кој $k = 4, ..., n$.

Според тоа

$$(*) \geq 1 + C_n^1 \sqrt[n]{a} + C_n^2 \sqrt[n]{a^2} + ... + C_n^k \sqrt[n]{a^k} + ... + C_n^n \sqrt[n]{a^n} = (1 + \sqrt[n]{a})^n\ .$$

XLVI Републички натпревар 2003

I година

1. Определи го бројот n, ако тој ги исполнува следните три услови:

а) ако сите негови цифри се различни

б) од неговите цифри може, да се состават шест различни двоцифрени броеви

в) збирот на тие двоцифрени броеви е $2n$.

Решение. Од условот б) добиваме дека бројот n е троцифрен број. Нека $n=\overline{abc}$ каде a, b, c се цифри кои се меѓу себе различни. Тогаш збирот на броевите $\overline{ab},\overline{bc},\overline{ac},\overline{ca},\overline{cb},\overline{ba}$ е $2n=2\overline{abc}$, т.е.

$$\overline{ab}+\overline{bc}+\overline{ac}+\overline{ca}+\overline{cb}+\overline{ba}=2\cdot\overline{abc}$$

Според тоа $22(a+b+c)=200a+20b+2c \Rightarrow 178a-2b-20c=0 \Rightarrow 89a-b-10c=0$

Последното равенство можеме да го запишеме во облик $a+b=10(9a-c)$

Бидејќи $a+b\le 18$, добиваме $9a-c<2$, т.е $9a-c=1$. Заради равенството $9a=1+c$ добиваме $a=1$ и $c=8$. Конечно, $b=9$ и барниот број е 198.

2. Триаголник ABC е правоголен, со прав агол во темето B. Повлечени се три полукружници s_1,s_2,s_3, такви што: дијаметарот на полукружницата s_1 лежи на хипотенузата AC и ги допира двете катети, дијаметрите на кружниците s_2 и s_3 лежат на катетите AB и BC соодветно, едниот крај им е во темето B и ја допираат хипотенузата AC. Ако r_b,r_c,r_a се радиусите на кружниците s_1,s_2,s_3 соодветно а r е радиусот на впишаната кружница во триаголникот ABC, тогаш $\frac{2}{r}=\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}$. Докажи!

Решение. Ако D е центар на полукружнницата s_3, тогаш триаголникот ABD има основа $\overline{AB}=c$ и висина r_a па неговата плоштина е $P_{\Delta ABD}=\frac{1}{2}cr_a$. Триаголникот ACD има основа $\overline{AC}=b$ и висина r_a, па според тоа $P_{\Delta ACD}=\frac{1}{2}br_a$. Ако P е плоштина на триаголникот ABC, тогаш $P=\frac{1}{2}r_a(b+c)$, односно $\frac{1}{r_a}=\frac{b+c}{2P}$.

Слично, ако E е центар на полукружницата , тогаш триаголникот има основа $\overline{BA}=c$ и висина r_b па според тоа, неговата плоштина е $P_{\Delta BEA}=\frac{1}{2}r_bc$ Триаголникот BEC има основа $\overline{BC}=a$ и висина r_b па според тоа $P_{\Delta BEC}=\frac{1}{2}ar_b$. Значи $P=\frac{1}{2}r_b(a+c)$, односно $\frac{1}{r_b}=\frac{a+c}{2P}$.

Со потполно аналогни разгледувања се добива дека $\frac{1}{r_c}=\frac{a+b}{2P}$.

Ако земеме во предвид дека $P=\frac{1}{2}r(a+b+c)$ каде r е радиусот на впишаната кружница, добиваме дека

$$\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{a+b}{2P}+\frac{b+c}{2P}+\frac{c+a}{2P}=\frac{2(a+b+c)}{2P}=\frac{a+b+c}{P}=\frac{2}{r}.$$

3. Нека M е произволна точка од хипотенузата BC на правоаголниот триаголник ABC. Точките P и Q се осносиметрични точки на точката M во однос на AB и AC, соодветно. Докажи дека $\overline{MP}\cdot\overline{MQ}\le\overline{AB}\cdot\overline{AC}$.

Решение. Нека M_1 и M_2 се проекциите на M врз катетите AB и AC соодветно. Од сличноста $\Delta BM_1M\sim\Delta BAC$ имаме $\frac{\overline{MM_1}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{MB}}{\overline{BC}}$. Од сличноста $\Delta MM_2C\sim\Delta BAC$ имаме $\frac{\overline{MM_2}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{MC}}{\overline{BC}}$. Со множење на последните две равенства добиваме $\frac{\overline{MM_2}}{\overline{AB}}\frac{\overline{MM_1}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{MC}\cdot\overline{MB}}{\overline{BC}^2}=\frac{\overline{MC}\cdot\overline{MB}}{(\overline{MC}+\overline{MB})^2}\le\frac{1}{4}$. Последното неравенство се добива од неравенството $(\overline{MC}-\overline{MB})^2\ge 0$. Од равенствата $\overline{MP}=2\overline{MM_1}$ и $\overline{MQ}=2\overline{MM_2}$, неравенството $\frac{\overline{MM_2}}{\overline{AB}}\frac{\overline{MM_1}}{\overline{AC}}\le\frac{1}{4}$ го добива обликот $\frac{2\overline{MM_2}}{\overline{AB}}\frac{2\overline{MM_1}}{\overline{AC}}\le 1$, т.е. $\frac{\overline{MP}\cdot\overline{MQ}}{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}\le 1$, што и требаше да се докаже.

4. На први декември минатата година еден ученик почнал да се подготвува за регионалниот натпревар по математика кој се одржа на први март оваа година. Тој секој ден решавал по една задача, но за да не се премори, во текот на една седмица(од понеделник до недела) решавал најмногу дванаесет задачи. Покажи дека во текот на неговите подготовки за натпреварот, постојат неколку последователни дена во кои ученикот решил точно 21 задача.

Решение. Нека a_i е бројот на задачи што ученикот ги решил од почетокот до i-тиот ден вклучувајќи го и i-тиот ден. За оваа низа е исполнет условот $a_{i+1}\ge a_i+1$. Бидејќи во дадениот временски период во кој ученикот се припремал за натпревар има деведесет дена, горната низа има барем седумдесет и седум $a_r,a_{r+1},...,a_{r+76}$ члена кои се придружени на деновите од точно единаесет седмици. Бидејќи ученикот во секоја од тие седмици решава најмногу по дванаесет задачи, добиваме дека $a_{r+76}\le 12\cdot 11=132$.

Ја формираме низата $a_r+21,a_{r+1}+21,...,a_{r+76}+21$, која го има погорното својство како и првобитната низа, т.е. е монотоно растечка. Двете низи заедно имаат 154, кои можат да бидат некои од броевите $1,2,3,...,132,133,...,153=132+21$.

Според принципот на Дирихле, постојат 2 члена од тие две низи (од секоја низа по еден бидејќи и двете се строго монотоно растечки) кои се еднакви меѓу себе. Значи, постои a_p+21 и a_q така што $a_p+21=a_q$. Според тоа, во деновите $p+1,p+2,...,q$ ученикот решил точно 21 задача.

II година

1. Докажи дека за произволни цифри $a,b\ne 0$, постои сложен број од облик $\overline{aaaa...ab}$.

Решение. Ако $b \in \{2,4,6\ ,8\}$, тогаш $2 \mid \overline{aaa...ab}$, без разлика колку е бројот на цифри a, па бројот $\overline{aaa...ab}$ е сложен број . Ако $b=5$, тогаш $5 \mid \overline{aaa...ab}$, па бројот $\overline{aaa...a5}$ е сложен. Ќе ги разгледаме

одвоено случаите кога $b \in \{1,3,7,9\}$.

1° Ако $b=3$ или $b=9$, тогаш броевите од облик $\overline{\underbrace{aaa...a}_{3k}b}$, $k=1,2,3,...$ се деливи со 3.

2° Ако $b=7$, тогаш $7 \mid 111111$, па според тоа $7 \mid \overline{aaaaaa7}$.

Уште повеќе $7 \mid \overline{\underbrace{aa...a}_{6k}7}$ за $k=1,2,....$. Значи, броевите од облик $\overline{\underbrace{aa...a}_{6k}7}$ се сложени броеви.

3° За секој $a \in \{1,2,3,...,9\}$ постои $k \in \mathbf{N}$ така што $\overline{a1} \mid \overline{\underbrace{aaa...a}_{k}}$. Според тоа, бројот $\overline{\underbrace{aaa...aa}_{k+1}1}$ е сложен.

2. Определи ги сите реални вредности на параметарот a за кои системот равенки $\begin{cases} x-y=a(1+xy) \\ x+y+xy+2=0 \end{cases}$ има единствено решение.

Решение. Системот ќе го запишеме во облик $\begin{cases} x-y=a(1+xy) \\ x+y=-xy-2 \end{cases}$

Ако ги квадрираме двете равенки и од втората квадрирана ја одземеме првата квадрирана равенка добиваме

$$(x+y)^2-(x-y)^2=(2+xy)^2-a^2(1+xy)^2$$

која може да се запише во облик $(1-a^2)(xy)^2-2a^2(xy)+4-a^2=0$. Ако вовеме смена $xy=t$, добиваме квадратна равенка

$$(1-a^2)t^2-2a^2t+4-a^2=0. \qquad (1)$$

Системот има едно единствено решение, ако и само ако квадратната равенка (1) има единствено решение. Квадратната равенка (1) има единствено решение ако и само ако

а) $1-a^2=0$, т.е. $a=1$ или $a=-1$.

б) $D=a^4-(1-a^2)(4-a^2)=0$, т.е. $5a^2=4$

Значи, системот има единствено решение ако и само ако $a=-1, a=1, a=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}$.

3. Нека $5a+3b+3c=0$, каде a , b и c се реални броеви и $a \neq 0$. Докажи дека квадратната равенка $ax^2+bx+c=0$ им барем едно решение $x_\circ$, такво што $x_\circ \in [\ 0\ ,\ 2\ ]$.

Решение. За квадратната функција $f(x)=ax^2+bx+c$ имаме $f(0)=c$, $f(1)=a+b+c$ и $f(2)=4a+2b+c$. Според тоа $f(0)+f(1)+f(2)=5a+3b+c=0$. Ако броевите $f(0)$, $f(1)$, $f(2) \neq 0$, тогаш два од нив се позитивни еден е негативен или еден од нив е позитивен а другите два се негативни. Може да се разгледаат сите

комбинации од претходниот дел, па според тоа, во сите случаи постои точка $x_\circ \in [0,2]$, така што $f(x_\circ)=0$, т.е. $ax_\circ^2+bx_\circ+c=0$.

Навистина,

1° $f(0),\ f(1)>0,\ f(2)<0$. Постои $x_\circ \in (1,2)$ така што $ax_\circ^2+bx_\circ+c=0$

2° $f(0)$, $f(2)>0$, $f(1)<0$. Постојат $x_\circ \in (0,1)$ и $x_1 \in (1,2)$ такви што $ax_\circ^2+bx_\circ+c=0$ и $ax_1^2+bx_1+c=0$.

3° $f(1),\ f(2)>0,\ f(0)<0$. Постои $x_\circ \in (0,1)$ такви што $ax_\circ^2+bx_\circ+c=0$.

4° $f(0),\ f(1)<0,\ f(2)>0$. Постои $x_\circ \in (1,2)$ така што $ax_\circ^2+bx_\circ+c=0$

5° $f(0),\ f(2)<0,\ f(1)>0$. Постојат $x_\circ \in (0,1)$ и $x_1 \in (1,2)$ такви што $ax_\circ^2+bx_\circ+c=0$ и $ax_1^2+bx_1+c=0$.

6° $f(1),\ f(2)<0,\ f(0)>0$. Постои $x_\circ \in (0,1)$ така што $ax_\circ^2+bx_\circ+c=0$.

Случајот кога еден од броевите $f(0),\ f(1),\ f(2)$ е нула е тривијален.

4. Нека $ABCD$ е рамнокрак тангентен трапез, при што впишаната кружница ги допира краците BC и AD во точките L и K соодветно. Пресметај ја плоштината на трапезот, ако α е аголот меѓу дијагоналите и $\overline{KL}=m$.

Решение.Во рамнкрак тангентен трапез со основи a и b и крак c исполнето е равенството $a+b=2c$. Ако E е пресек на дијагоналите на трапезот и h_1 и h_2 се висини на триаголниците ABE и ECD спуштени од темето E соодветно, тогаш h_1+h_2 е висина на трапезот. Нека $E_1 \in AB$ и $E_2 \in CD$ се подножја на висините спуштени од точката E.

Ако β е аголот кај темето B во трапезот, тогаш $\sin\beta=\frac{h}{c}$ (1)

Од друга страна, од правоаголните триаголници AE_1E и DE_2E имаме $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{h_1}{\frac{a}{2}}$ и $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{h_1}{\frac{b}{2}}$, т.е. $h_1=\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$ и $h_2=\frac{b}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, соодветно. Според тоа

$$h_1+h_2=\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\frac{b}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{a+b}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=c\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} \qquad (2)$$

Од (1) и (2) добиваме дека $\sin\beta=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$. Ако r е радиусот на впишаната кружница со центар O, тогаш од правоаголниот триаголник ONL имаме $\sin\beta=\frac{\frac{m}{2}}{r}=\frac{m}{2r}=\frac{m}{h}$, т.е. $h=\frac{m}{\sin\beta}$. Конечно, $P=\frac{a+b}{2}h=c\cdot\frac{m}{\sin\beta}=\frac{m}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\sin\beta}\cdot\frac{m}{\sin\beta}=m^2\operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2}$.

III година

1. Ако $a,b,c>1$ или $0<a,b,c<1$, тогаш $\frac{\log_b a^2}{a+b}+\frac{\log_c b^2}{b+c}+\frac{\log_a c^2}{c+a}\geq\frac{9}{a+b+c}$. Докажи!

Решение. Заради $a,b,c>1$ или $0<a,b,c<1$ важи $\log_b a,\log_c b,\log_a c>0$, па сите собироци се позитивни. Ако два пати го примениме неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина добиваме

$$\frac{\log_b a^2}{a+b}+\frac{\log_c b^2}{b+c}+\frac{\log_a c^2}{c+a}=2\left(\frac{\log_b a}{a+b}+\frac{\log_c b}{b+c}+\frac{\log_a c}{c+a}\right)\geq 2\cdot 3\sqrt[3]{\frac{\log_b a}{a+b}\cdot\frac{\log_c b}{b+c}\cdot\frac{\log_a c}{c+a}}=$$

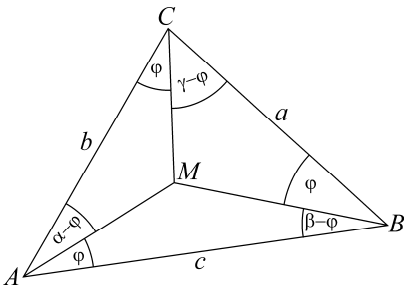
$$=6\frac{\sqrt[3]{\frac{\lg a}{\lg b}\cdot\frac{\lg b}{\lg c}\cdot\frac{\lg c}{\lg a}}}{\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}}=\frac{6}{\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}}\geq$$

$$\geq 6\frac{3}{(a+b)+(b+c)+(c+a)}=\frac{9}{a+b+c}.$$

2. Во внатрешноста на триаголникот ABC избрана е точка M така што $\measuredangle MAB=\measuredangle MBC=\measuredangle MCA=\varphi$.

Докажи дека $\frac{1}{\sin^2\varphi}=\frac{1}{\sin^2\alpha}+\frac{1}{\sin^2\beta}+\frac{1}{\sin^2\gamma}$.

Решение. Имаме $P_{\Delta ABC}=P_{\Delta ABM}+P_{\Delta BCM}+P_{\Delta CAM}$. Натаму важи



$$P_{\Delta ABM}=\frac{1}{2}\overline{MA}\cdot\overline{MB}\sin(180^\circ-(\varphi+\beta-\varphi))=\frac{1}{2}\overline{MA}\cdot\overline{MB}\sin\beta$$

$$P_{\Delta BCM}=\frac{1}{2}\overline{MB}\cdot\overline{MC}\sin(180^\circ-(\varphi+\gamma-\varphi))=\frac{1}{2}\overline{MB}\cdot\overline{MC}\sin\gamma$$

$$P_{\Delta CAM}=\frac{1}{2}\overline{MC}\cdot\overline{MA}\sin(180^\circ-(\varphi+\alpha-\varphi))=\frac{1}{2}\overline{MC}\cdot\overline{MA}\sin\alpha,$$

па оттука за плоштината на триаголникот ABC добиваме

$$P=\frac{1}{2}\left(\overline{MA}\cdot\overline{MB}\sin\beta+\overline{MB}\cdot\overline{MC}\sin\gamma+\overline{MC}\cdot\overline{MA}\sin\alpha\right).$$

Сега да ја примениме синусната теорема на триаголникот CAM: $\frac{\overline{MA}}{\overline{AC}}=\frac{\sin\varphi}{\sin(180^\circ-(\varphi+\alpha-\varphi))}=\frac{\sin\varphi}{\sin\alpha}$, односно $\overline{MA}=b\frac{\sin\varphi}{\sin\alpha}$. Слично ако ја примениме синусната теорема на триаголниците ABM и BCM добиваме $\overline{MB}=c\frac{\sin\varphi}{\sin\beta}$ и $\overline{MC}=a\frac{\sin\varphi}{\sin\gamma}$. Ако последниве три равенства ги замениме во изразот за плоштината добиваме

$$P=\frac{1}{2}\left(bc\frac{\sin^2\varphi}{\sin\alpha\sin\beta}\sin\beta+ac\frac{\sin^2\varphi}{\sin\beta\sin\gamma}\sin\gamma+ab\frac{\sin^2\varphi}{\sin\alpha\sin\gamma}\sin\alpha\right)=$$

$$=\frac{1}{2}bc\frac{\sin^2\varphi}{\sin\alpha}+\frac{1}{2}ac\frac{\sin^2\varphi}{\sin\beta}+\frac{1}{2}ab\frac{\sin^2\varphi}{\sin\gamma}.$$

За плоштината P на триаголникот ABC важи $P=\frac{1}{2}bc\sin\beta=\frac{1}{2}ac\sin\beta=\frac{1}{2}ab\sin\gamma$, па добиваме

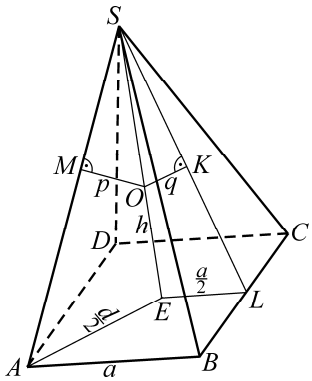
$$P=\frac{P}{\sin\alpha}\cdot\frac{\sin^2\varphi}{\sin\alpha}+\frac{P}{\sin\beta}\cdot\frac{\sin^2\varphi}{\sin\beta}+\frac{P}{\sin\gamma}\cdot\frac{\sin^2\varphi}{\sin\gamma},$$

односно

$$1=\frac{1}{\sin\alpha}\cdot\frac{\sin^2\varphi}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}\cdot\frac{\sin^2\varphi}{\sin\beta}+\frac{1}{\sin\gamma}\cdot\frac{\sin^2\varphi}{\sin\gamma}.$$

Делејќи го последново равенство со $\sin^2\varphi$ го добиваме бараното равенство.

3. Од средината O на висината SE на правилна четиристрана пирамида, со врв S, повлечена е нормала OM на бочниот раб и нормала OK на бочниот ѕид на пирамидата. Ако должините на тие нормали се $\overline{OM}=p$ и $\overline{OK}=q$, пресметај го волуменот на пирамидата (т.е. волуменот изрази го преку p и q).



Решение. Нека основниот раб на пирамидата има должина a, дијагоналата на основата d и нека $h=\overline{SE}$. Имаме

$$\Delta MOS \sim \Delta EAS \text{ , па } \frac{p}{\frac{d}{2}}=\frac{\frac{h}{2}}{\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2+h^2}}.$$

Со средување на ова равенство, и земајќи предвид дека $d=a\sqrt{2}$) добиваме

$$\frac{4}{h^2}+\frac{8}{a^2}=\frac{1}{p^2} \qquad (1)$$

Од друга страна $\Delta KOS \sim \Delta ELS$ (L е средина на основниот раб), па имаме $\frac{q}{\frac{a}{2}}=\frac{\frac{h}{2}}{\sqrt{h^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}}$. Средувајќи го и ова равенство добиваме

$$\frac{16}{a^2}+\frac{4}{h^2}=\frac{1}{q^2} \qquad (2)$$

Со одземање на (1) од (2) добиваме $\frac{8}{a^2}=\frac{1}{q^2}-\frac{1}{p^2}=\frac{p^2-q^2}{p^2q^2}$ и оттука $a^2=\frac{8p^2q^2}{p^2-q^2}$.

Заменувајќи во (1) добиваме $h^2=\frac{4p^2q^2}{2q^2+p^2}$. Сега да го пресметаме волуменот на пирамидата

$$V=\frac{B\cdot h}{3}=\frac{a^2h}{3}=\frac{16p^3q^3}{3(p^2-q^2)\sqrt{2q^2+p^2}}.$$

4. Нека n е природен број и k е бројот на различните прости делители на n. Тогаш важи $\lg n \ge k\cdot\lg 2$. Докажи!

Решение. Нека различните прости делители на n се $p_1, p_2, ..., p_k$. Тогаш $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k}$, каде $\alpha_i\in\mathbb{N}$, $i=1,2,...,k$. Притоа $p_i\ge 2$, $i=1,2,...,k$. Оттука

$$\begin{aligned}\lg n &= \lg(p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k})=\alpha_1\lg p_1+\alpha_2\lg p_2+...+\alpha_k\lg p_k \ge\\ &\ge 1\cdot\lg p_1+1\cdot\lg p_2+...+1\cdot\lg p_k \ge\\ &\ge \lg 2+\lg 2+...+\lg 2=k\lg 2\end{aligned}.$$

IV година

1. Дадени се позитивните реални броеви x_1, x_2, x_3 и x_4 за кои важи $x_1+x_2+x_3+x_4=1$. Нека s е најголемиот меѓу броевите $\frac{x_1}{1+x_1}, \frac{x_2}{1+x_1+x_2}, \frac{x_3}{1+x_1+x_2+x_3}, \frac{x_4}{1+x_1+x_2+x_3+x_4}$. Која е најмалата вредност што може да ја достигне s?

Решение. Ако s е најголемиот од броевите, тогаш $\frac{1}{s}$ е најмалиот меѓу броевите $\frac{1+x_1}{x_1}, \frac{1+x_1+x_2}{x_2}, \frac{1+x_1+x_2+x_3}{x_3}, \frac{1+x_1+x_2+x_3+x_4}{x_4}$. Натаму $\frac{1}{s}-1=\frac{1-s}{s}$ е најмалиот меѓу броевите

$$\frac{1+x_1}{x_1}-1=\frac{1}{x_1}, \frac{1+x_1+x_2}{x_2}-1=\frac{1+x_1}{x_2}, \frac{1+x_1+x_2+x_3}{x_3}-1=\frac{1+x_1+x_2}{x_3}, \frac{1+x_1+x_2+x_3+x_4}{x_4}-1=\frac{1+x_1+x_2+x_3}{x_4},$$

а $\frac{s}{1-s}$ е најголемиот меѓу броевите $x_1, \frac{x_2}{1+x_1}, \frac{x_3}{1+x_1+x_2}, \frac{x_4}{1+x_1+x_2+x_3}$. Конечно $\frac{s}{1-s}+1=\frac{1}{1-s}$ е најголемиот меѓу броевите

$$x_1+1, \frac{1+x_1+x_2}{1+x_1}, \frac{1+x_1+x_2+x_3}{1+x_1+x_2}, \frac{1+x_1+x_2+x_3+x_4}{1+x_1+x_2+x_3}.$$

Бидејќи

$$(x_1+1)\frac{1+x_1+x_2}{1+x_1}\cdot\frac{1+x_1+x_2+x_3}{1+x_1+x_2}\cdot\frac{1+x_1+x_2+x_3+x_4}{1+x_1+x_2+x_3}=1+x_1+x_2+x_3+x_4=2\le\left(\frac{1}{1-s}\right)^4.$$

Оттука следува дека $\frac{1}{1-s}\ge\sqrt[4]{2}$, па $s\ge 1-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$. Значи најмалата вредност s што може да ја достигне s изнесува $1-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$ и се достигнува за

$$x_1+1=\sqrt[4]{2}, \frac{1+x_1+x_2}{1+x_1}=\sqrt[4]{2}, \frac{1+x_1+x_2+x_3}{1+x_1+x_2}=\sqrt[4]{2}, \frac{1+x_1+x_2+x_3+x_4}{1+x_1+x_2+x_3}=\sqrt[4]{2}.$$

Од последниве равенства се добива

$$x_1=\sqrt[4]{2}-1, x_2=(\sqrt[4]{2}-1)\sqrt[4]{2}=\sqrt[4]{4}-\sqrt[4]{2}, x_3=(\sqrt[4]{2}-1)\sqrt[4]{2^2}=\sqrt[4]{8}-\sqrt[4]{4}, x_4=(\sqrt[4]{2}-1)\sqrt[4]{2^3}=2-\sqrt[4]{8}.$$

2. Нека a е природен број и нека низата (x_n) е дефинирана на следниов начин:

$$x_1=a, x_{n+1}=\begin{cases}\frac{x_n}{2}, \text{ако } x_n \text{ е парен број}\\ \frac{3x_n+1}{2}, \text{ако } x_n \text{ е непарен број}\end{cases}.$$

Докажи дека барем еден член од низата е парен број.

Решение. Ако a е парен број, тогаш тврдењето е очигледно (бараниот член е x_1). Да претпоставиме дека a е непарен, и $a+1=2^kR$ каде $R=2R_1+1$ е непарен и k е природен број. Тогаш $x_1=2^{k+1}R_1+2^k-1$ е непарен, па

$$x_2=\frac{3x_1+1}{2}=\frac{3(2^{k+1}R_1+2^k-1)+1}{2}=3R_1 2^k+3\cdot 2^{k-1}-1=R_2 2^k+3\cdot 2^{k-1}-1.$$

Ако $k=1$, тогаш бараниот член е x_2. Во спротивно x_2 е непарен, па

$$x_3=\frac{3x_2+1}{2}=R_3 2^{k-1}+3^2\cdot 2^{k-2}-1.$$

Ќе докажеме дека $x_s=R_s 2^{k-s+2}+3^{s-1}2^{k-s+1}-1$ за $1\le s\le k$ (при претпоставка дека сите броеви се непарни). За $s=1$ тврдењето е точно. Нека тврдењето е точно за s. Тогаш за $s+1$ имаме $x_{s+1}=\frac{3(R_s 2^{k-s+2}+3^{s-1}2^{k-s+1}-1)+1}{2}=R_{s+1}2^{k-(s+1)+2}+3^{(s+1)-1}2^{k-(s+1)+1}-1$. Сега за $s=k$ добиваме $x_k=R_k 2^2+3^{k-1}\cdot 2-1$ е непарен. Според тоа

$$x_{k+1}=\frac{3(4R_k+2\cdot 3^{k-1}-1)+1}{2}=6R_k+3^k-1.$$

Броевите 3^k-1 и $6R_k$ се парни па и x_k е парен.

3. Нека $n\ge 1$ е природен број а $a>0$ даден реален број. Најди го бројот на решенија $(x_1,x_2,...,x_n)$ на равенката $\sum_{i=1}^{n}(x_i^2+(a-x_i)^2)=na^2$, такви што $x_i\in[0,a]$, за $i=1,2,...,n$.

Решение. Дадената равенка ќе ја запишиме во облик

$$\sum_{i=1}^{n}(\ 2x_i^2-2ax_i+a^2)=na^2 \ \Leftrightarrow\ \sum_{i=1}^{n}x_i(x_i-a)=0$$

Бидејќи бараме решенија во интервалот $[0,a]$, изразите $x_i-a\le 0$, па според тоа $x_i(x_i-a)\le 0$, $i=1,2,3,4,...,n$. Заради условот $\sum_{i=1}^{n}x_i(x_i-a)=0$, добиваме $x_i(x_i-a)=0$ за $i=1,2,3,4,...,n$. Според тоа $x_i=0$ или $x_i=a$, $i=1,2,3,4,...,n$. Значи, бројот на решенија е 2^n.

4. Докажи дека $\cos\frac{\pi}{n}+\cos\frac{2\pi}{n}+...+\cos\frac{(n-1)\pi}{n}=0$ за секој природен број n.

Решение. Да означиме $S_n=\cos\frac{\pi}{n}+\cos\frac{2\pi}{n}+...+\cos\frac{(n-1)\pi}{n}$. Да го помножиме последново равенство со $2\sin\frac{\pi}{2n}$ ($2\sin\frac{\pi}{2n}\ne 0$, во спротивно би добиле дека постои цел број k така што $\frac{\pi}{2n}=k\pi$, односно $1=2nk$ што не е можно бидејќи n и k се цели броеви). Тогаш имаме

$$2\sin\frac{\pi}{2n}S_n=2\sin\frac{\pi}{2n}\cos\frac{\pi}{n}+2\sin\frac{\pi}{2n}\cos\frac{2\pi}{n}+...+2\sin\frac{\pi}{2n}\cos\frac{(n-1)\pi}{n}=$$

$$=\sin\left(\frac{\pi}{2n}-\frac{\pi}{n}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2n}+\frac{\pi}{n}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2n}-\frac{2\pi}{n}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2n}+\frac{2\pi}{n}\right)+...+\sin\left(\frac{\pi}{2n}-\frac{(n-1)\pi}{n}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2n}+\frac{(n-1)\pi}{n}\right)=$$

$$=-\sin\frac{\pi}{2n}+\sin\frac{3\pi}{2n}-\sin\frac{3\pi}{2n}+\sin\frac{5\pi}{2n}+...-\sin\frac{2n-3}{2n}\pi+\sin\frac{2n-1}{2n}\pi=-\sin\frac{\pi}{2n}+\sin\frac{2n-1}{2n}\pi=-\sin\frac{\pi}{2n}+\sin\left(\pi-\frac{\pi}{2n}\right)=$$

$$=-\sin\frac{\pi}{2n}+\sin\frac{\pi}{2n}=0.$$

Значи $2\sin\frac{\pi}{2n}S_n=0$. Бидејќи $2\sin\frac{\pi}{2n}\ne 0$ добиваме дека $S_n=0$.

XLVII Републички натпревар 2004

I година

1. Во едно маало живеат 4 добри другари Горан, Зоран, Јован и Стојан. Секој од нив има постар брат кој се вика како еден од неговите другари. Името на таткото на секој од нив е име на некој од неговите другари. Секој татко заедно со неговите двајца синови имаат различни имиња.

Таткото на Стојан и братот на Јован го носат името на детето чиј брат се вика Јован. Братот на детето што го носи името на Зорановиот брат се вика како детето чиј татко е Горан.

Чиј татко се вика Стојан?

Решение. Да ги означиме децата со почетните букви од нивните имиња, т.е. со $Г,З,Ј,С$. Ако X е едно од децата, тогаш го означуваме со $Б(X)$ името на неговиот брат, а со $T(X)$ името на неговиот татко. Тогаш, условите на задачата, преку овие ознаки може да се формулираат на следниот начин:

(1) $X \neq Б(X) \neq T(X) \neq X$, за секој $X \in \{Г, З, Ј, С\}$

(2) $Б(X) = Ј \Leftrightarrow T(С) = Б(Ј) = X$

(3) $X = Б(З) \Leftrightarrow T(Б(X)) = Г$

Бидејќи, $T(С) \neq С$ и $T(Ј) \neq Ј$, можни се следните два случаја

1^0 $T(С) = Б(Ј) = Г$

Тогаш, според (2) $Б(Г) = Ј$, од каде $Б(З) = С$. Но, според (3) следи дека $T(Б(С)) = T(З) = Г$, што не е можно, бидејќи $T(С) = Г$.

2^0 $T(С) = Б(Ј) = З$

Тогаш, од (2) имаме дека $Б(З) = Ј$, а од (3) дека $T(Б(Ј)) = Г$, односно дека $T(З) = Г$. Па, имаме дека $Б(Ј) = З$ и од $Б(З) = Ј$ и $T(З) = Г$, следи дека $Б(Г) = С$, $Б(С) = Г$ и $T(С) = З$. Значи, $T(Ј) = С$, од каде $T(Г) = Ј$.

Значи, таткото на Јован се вика Стојан.

2. Ако за реалните различни од нула броеви x, y, z, u, v, w важи $\frac{x}{u} + \frac{y}{v} + \frac{z}{w} = 1$ и $\frac{u}{x} + \frac{v}{y} + \frac{w}{z} = 0$, докажи дека тогаш важи $\frac{x^2}{u^2} + \frac{y^2}{v^2} + \frac{z^2}{w^2} = 1$.

Решение. Ставаме смени: $a = \frac{x}{u}$, $b = \frac{y}{v}$, $c = \frac{z}{w}$. Тогаш, $a + b + c = 1$ и $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$. Од последното равенство се добива $\frac{ab+bc+ca}{abc} = 0$, од каде $ab + bc + ca = 0$. Тогаш, имаме

$$1 = (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca) = a^2 + b^2 + c^2,$$

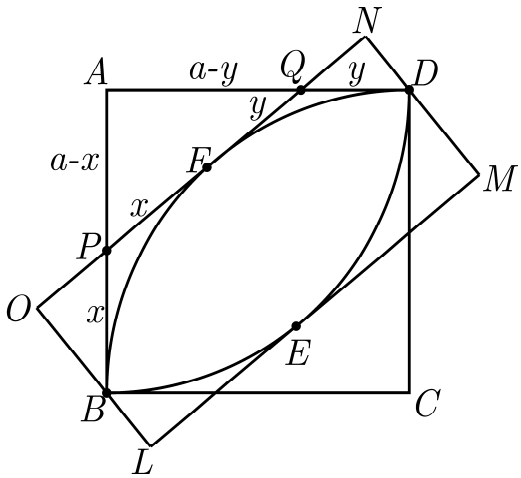
односно $1 = \frac{x^2}{u^2} + \frac{y^2}{v^2} + \frac{z^2}{w^2}$, што требаше да се докаже.

3. Најди го најголемиот природен број n, за кој бројот $999\ldots99$ (со 999 деветки) е делив со 9^n.

Решение. Го запишуваме бројот $999\ldots99$ (со 999 деветки) како $10^{999} - 1$ и потоа го разложуваме на множители

$$\begin{aligned}
10^{999} - 1 &= (10^{666} + 10^{333} + 1)(10^{333} - 1) = \\
&= (10^{666} + 10^{333} + 1)(10^{222} + 10^{111} + 1)(10^{111} - 1) = \\
&= (10^{666} + 10^{333} + 1)(10^{222} + 10^{111} + 1)(10^{74} + 10^{37} + 1)(10^{37} - 1) = \\
&= (10^{666} + 10^{333} + 1)(10^{222} + 10^{111} + 1)(10^{74} + 10^{37} + 1) \cdot 9 \cdot \underbrace{111\ldots11}_{37-\text{единици}}
\end{aligned}$$

Секој од првите три множители е делив со 3, затоа што збирот на нивните цифри е 3. Четвртиот множител е 3^2, значи делив е со 3^2. Петтиот множител не е делив со 3, затоа што збирот на неговите цифри е 37. Значи, дадениот број е делив со $3\cdot 3\cdot 3\cdot 3^2 = 3^5$, односно со $9^{2.5}$. Бидејќи n е природен број, важи $n=[2.5]=2$. Значи, најголемиот природен број n, за кој бројот $999\ldots99$ (со 999 деветки) е делив со 9^n е 2.



4. Фигурата $\boldsymbol{F}$ се состои од точките B и D и лаците BD конструирани во внатрешноста на квадратот $ABCD$ со центри во A и C и со радиуси AB. Докажи дека сите правоаголници опишани околу фигурата $\boldsymbol{F}$, така што секоја страна на правоаголникот има точно една заедничка точка со фигурата $\boldsymbol{F}$, имаат исти периметри.

Решение. Нека $LMNO$ е произволен правоаголник опишан околу фигурата $\boldsymbol{F}$, и нека допирните точки на $\boldsymbol{F}$ со правоаголникот се B, E, D, F. Нека страната ON ги сече страните AB и AD на квадратот во точките P и Q соодветно. (види цртеж)

Нека $\overline{PF}=x$, $\overline{FQ}=y$. Тогаш, $\overline{BP}=x$, $\overline{AP}=a-x$, $\overline{QD}=y$ и $\overline{AQ}=a-y$, каде a е должината на страната на квадратот $ABCD$.

Од $\Delta BPO \sim \Delta QPA$ ($\angle BPO = \angle QPA$, како накрсни агли и $\angle BOP = \angle QAP = 90°$) следи дека $\frac{\overline{OP}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{QP}}$ и $\frac{\overline{OB}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{QP}}$, па $\overline{OP} = x\cdot\frac{a-x}{x+y}$ и $\overline{OB} = x\cdot\frac{a-y}{x+y}$.

Аналогно се покажува дека $\Delta QPA \sim \Delta QDN$, од каде се добива дека $\overline{DN} = y\cdot\frac{a-x}{x+y}$ и $\overline{QN} = y\cdot\frac{a-y}{x+y}$.

Тогаш, имаме

$$\overline{BO}+\overline{ON}+\overline{ND} = x\cdot\frac{a-y}{x+y} + x\cdot\frac{a-x}{x+y} + x + y + y\cdot\frac{a-y}{x+y} + x\cdot\frac{a-x}{x+y} =$$

$$x+y+\frac{2ax+2ay-x^2-y^2-2xy}{x+y} = x+y+2a-(x+y) = 2a$$

Аналогно, $\overline{BL}+\overline{LM}+\overline{MD}=2a$, па следи дека периметарот на правоаголникот $LMNO$ е $\overline{LM}+\overline{MN}+\overline{NO}+\overline{OL}=4a$, односно е константен, што требаше да се докаже.

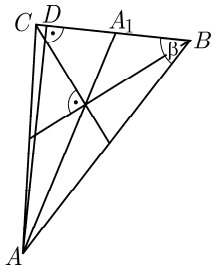
II година

1. Нека x_1 и x_2 се корени на равенката $x^2+ax+b=0$, каде што $a,b\in\mathbb{Z}$. Докажи дека $x_1{}^n + x_2{}^n$ е цел број, за секој $n\in\mathbb{N}$.

Решение. Нека $S_1 = x_1+x_2 = -a\in\mathbb{Z}$,

$$S_2 = x_1{}^2 + x_2{}^2 = (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 = a^2-2b\in\mathbb{Z}$$

За $n\geq 3$ имаме: $(x_1+x_2)(x_1{}^{n-1}+x_2{}^{n-1}) = x_1{}^n + x_2{}^n + x_1x_2(x_1{}^{n-2}+x_2{}^{n-2})$, односно $S_n = -aS_{n-1} - bS_{n-2}$. Значи, $S_3\in\mathbb{Z}$, и.т.н., односно за секој $n\in\mathbb{N}$, $x_1{}^n + x_2{}^n$ е цел број. ■



2. Ако тежишните линии од темињата B и C на триаголникот ABC се нормални, тогаш докажи дека $\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma \geq \frac{2}{3}$.

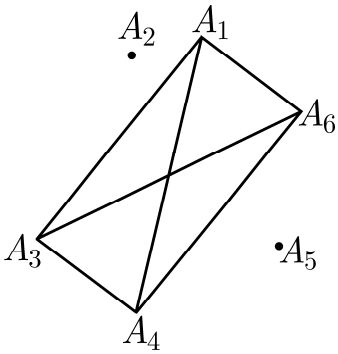
Решение. Нека AD е висината спуштена од темето A. Тогаш $\operatorname{ctg}\beta = \frac{\overline{BD}}{\overline{AD}}$, $\operatorname{ctg}\gamma = \frac{\overline{CD}}{\overline{AD}}$, односно

$\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma = \frac{\overline{BC}}{\overline{AD}}$. Бидејќи $\sphericalangle CTB = 90^\circ$ следува

$2\overline{A_1T} = \overline{BC}$ па $\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma = \frac{2\overline{A_1T}}{\overline{AD}} \geq \frac{2\overline{A_1T}}{\overline{AA_1}} = \frac{2}{3}$.

3. Квадратниот трином $f(x) = ax^2 + bx + c$ е таков што равенката $f(x) = x$ нема реални корени. Докажи дека и равенката $f(f(x)) = x$ нема реални корени.

Решение. Нека $f(x) = x$ нема реални корени, односно $f(x) - x = 0$ нема реални корени. Значи за $a > 0$, $f(x) - x > 0$ или за $a < 0$, $f(x) - x < 0$.



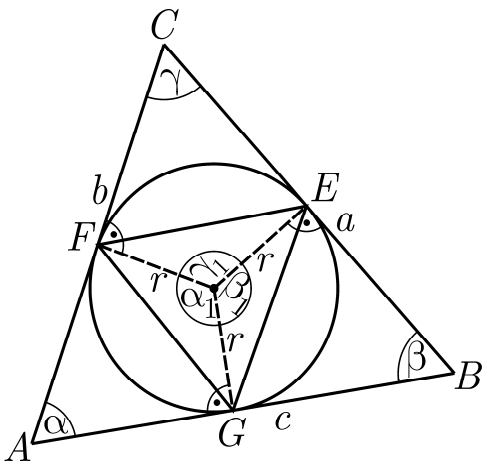
Нека $a > 0$. Од $f(x) > x$ следува дека $f(f(x)) > f(x) > x$. Слично, ако $a < 0$ имаме $f(f(x)) < x$. Значи, $f(f(x)) = x$ нема реални корени.

4. Најди ги сите природни броеви n, $n > 3$, за кои што постои конвексен n-аголник во кој сите дијагонали се со еднаква должина.

Решение. За $n = 4$, таков е квадратот, а за $n = 5$ таков е правилниот петаголник. Нека $n > 5$. Да претпоставиме дека таков n-аголник постои и нека неговите последователни темиња ги означиме со $A_1, A_2, ..., A_n$. Го разгледуваме конвексниот четириаголник $A_1A_3A_4A_6$. Од неравенството на триаголник имаме: $\overline{A_1A_4} + \overline{A_3A_6} > \overline{A_1A_3} + \overline{A_4A_6}$ што е контрадикција со

$$\overline{A_1A_4} = \overline{A_3A_6} = \overline{A_1A_3} = \overline{A_4A_6}.$$

III година



1. Во триаголник ABC со страни a, b и c, впишана е кружница. Допирните точки на кружницата со страните на триаголникот одредуваат триаголник EFG. Пресметај ја плоштината на ΔEFG, ако плоштината на ΔABC е P.

Решение. Нека се R и r радиусите на опишаната и впишаната кружница во ΔABC соодветно, а O центарот на впишаната кружница. Нека е P_1 е плоштината на ΔEFG.

Важи $P_1 = P_{EOF} + P_{FOG} + P_{GOE}$

$=\frac{r^2}{2}(\sin\alpha_1+\sin\beta_1+\sin\gamma_1)$. Од друга страна $\alpha_1=180^\circ-\alpha$, $\beta_1=180^\circ-\beta$ и $\gamma_1=180^\circ-\gamma$, па $P_1=\frac{r^2}{2}(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)$.

Користејќи синусна теорема добиваме $P_1=\frac{r^2}{2}(\frac{a}{2R}+\frac{b}{2R}+\frac{c}{2R})=\frac{r^2}{4R}(a+b+c)$. Ако се искористат уште и познатите равенства $P=\frac{abc}{4R}$, $P=rs$, $s=\frac{a+b+c}{2}$ се добива $P_1=\frac{2P^3}{sabc}$.

2. Ако за агол $\alpha<90^\circ$, важи $\alpha-\sin\alpha\le\frac{\alpha^3}{4}$, докажи дека е точно и неравенството $1-\frac{\alpha^2}{2}\le\cos\alpha\ \le 1-\frac{\alpha^2}{2}+\frac{\alpha^4}{16}$.

Решение. За $\alpha<90^\circ$, важи $\sin\frac{\alpha}{2}\le\frac{\alpha}{2}$. Со квадрирање $\sin^2\frac{\alpha}{2}\le\frac{\alpha^2}{4}$, од каде $\cos\alpha=1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}\ge 1-\frac{\alpha^2}{2}$. Со тоа е докажана едната страна на неравенството, $1-\frac{\alpha^2}{2}\le\cos\alpha$. Инаку, кога $\alpha<90^\circ$, $\frac{\alpha}{2}<90^\circ$, па од условот на задачата имаме $\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\le\frac{\alpha^3}{32}$, односно $\sin\frac{\alpha}{2}\ge\frac{\alpha}{2}-\frac{\alpha^3}{32}$. Тогаш

$$2\sin^2\frac{\alpha}{2}\ge 2(\frac{\alpha}{2}-\frac{\alpha^3}{32})^2=\frac{\alpha^2}{2}-\frac{\alpha^4}{16}+\frac{\alpha^6}{648}\ge\frac{\alpha^2}{2}-\frac{\alpha^4}{16},$$

па со замена во $\cos\alpha=1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}\le 1-\frac{\alpha^2}{2}-\frac{\alpha^4}{16}$.

Конечно, $1-\frac{\alpha^2}{2}\le\cos\alpha\le 1-\frac{\alpha^2}{2}-\frac{\alpha^4}{16}$.

3. Нека $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ е неконстантен полином со целобројни коефициенти, за кој важи $p(-1)=0$ и $p(\sqrt{2})$ е цел број. Докажи дека постои природен број k, таков што $p(k)+a_k$ е парен број.

Решение. Од $p(-1)=0$, следува $a_0+a_2+\cdots a_r=a_1+a_3+\cdots a_s$, каде r и s се најголемиот парен и најголемиот непарен број не поголем од n, соодветно. $p(\sqrt{2})=(a_0+2a_2+2^2a_4+\cdots 2^{\frac{r}{2}}a_r)+(a_1+2a_3+2^2a_5+\cdots+2^{\frac{s-1}{2}}a_s)\cdot\sqrt{2}$ е цел број, па мора $a_1+2a_3+2^2a_5+\cdots+2^{\frac{s-1}{2}}a_s$=0, односно a_1 е парен број.

Од друга страна, $p(1)=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n=2\ (a_0+a_2+\cdots+a_r)$ е исто така парен број. Јасно, тогаш и $p(1)+a_1$ е парен број, па за $k=1$ е исполнето барањето на задачата.

4. Дадени се пет отсечки, така што од секои три од нив може да се состави триаголник. Докажи дека барем еден од тие триаголници е остроаголен.

Решение: Нека должините на дадените отсечки се a,b,c,d и e, при што $a\le b\le c\le d\le e$. Да претпоставиме дека ниту еден од триаголниците кои се добиваат не е остроаголен. Ако искористиме дека за триаголник кој не е остроаголен, со страни

$x \le y \le z$, од косинусната теорема важи $z^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\gamma \ge x^2 + y^2$ (γ не е остар, па $\cos\gamma \le 0$), добиваме релации $e^2 \ge d^2 + c^2$, $d^2 \ge c^2 + b^2$, $c^2 \ge b^2 + a^2$. Со собирање на последните три неравенства се добива $e^2 \ge a^2 + 2b^2 + a^2 \ge a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$, односно $e \ge a + b$, што е противречност на условот дека од отсечките со должини a, b и e, може да се состави триаголник. Јасно , мора барем еден од триаголниците да е остроаголен.

IV година

1. Ако n е природен број поголем од 2, докажи дека меѓу дропките $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, ..., \frac{n-1}{n}$ има парен број нескратливи дропки.

Решение. Ако k е природен број, $1 \le k < \frac{n}{2}$ и $\frac{k}{n}$ е нескратлива дропка, тогаш НЗД$(k,n) = 1$. Но, тогаш и

$$\text{НЗД}(n-k,n) = \text{НЗД}(n-(n-k),n) = \text{НЗД}(k,n) = 1,$$

т.е. дропката $\frac{n-k}{n}$ е исто така нескратлива и $\frac{n}{2} < (n-k) < n$. Значи за секоја нескратлива дропка $\frac{k}{n}$, за $1 \le k < \frac{n}{2}$ постои единствена нескратлива дропка $\frac{n-k}{n}$. Притоа важи $\frac{k}{n} \ne \frac{n-k}{n}$, бидејќи во спротивно добиваме $n = 2k$ и $\frac{k}{n} = \frac{n}{2n}$ е скратлива со $n > 2$. Значи, добиваме дека бројот на нескратливи дропки е парен.

2. Нека a, b, c, A, B, C се ненегативни реални броеви такви што $a + A = b + B = c + C = k$. Докажи дека $aB + bC + cA \le k^2$.

Решение I. Од

$$k^3 = (a+A)(b+B)(c+C) = abc + ABC + cA(b+B) + bC(a+A) + aB(c+C) =$$
$$= abc + ABC + k(aB + bC + cA)$$

и од $aB + bC + cA \le k^2$ следува дека

$$k(aB + bC + cA) \le k^3, \text{ т.е. } aB + bC + cA \le k^2.$$

Решение II. Не се губи од општоста ако претпоставиме дека $a \le b \le c$. Тогаш

$$aB + bC + cAa = (k-b) + b(k-c) + c(k-a) = k(a+b+c) - ab - ba - ca =$$
$$= b(k-a-c) + ka + kc - ac$$

Значи неравенството $aB + bC + cA \le k^2$ е еквивалентно со

$$b(k-a-c) \le k^2 - ka - kc + ac = (k-a)(k-c) \qquad (1)$$

Ако $k \le a + c$, тогаш за левата страна на (1) добиваме $b(k-a-c) \le 0$. Десната страна од (1) е ненегативна, па (1) важи.

Ако $k > a + c$, тогаш $k - a > c \ge b$ и $k - c \ge k - a - c$ од каде што следува (1).

3. Низата (a_n) е зададена со $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_n = \frac{a_{n-1}}{2na_{n-1} + 1}$ за $n > 1$. Определи го збирот $a_1 + ... + a_k$, за секој природен број k.

Решение I. Заради $a_1 = \frac{1}{2} > 0$ следува дека $a_n > 0$ за секој $n \in \mathbb{N}$. Натаму, за $n > 1$ имаме $a_n = \frac{a_{n-1}}{2na_{n-1}+1} = \frac{1}{2n + \frac{1}{a_{n-1}}}$. Оттука

$$\frac{1}{a_n} = 2n + \frac{1}{a_{n-1}} = 2n + 2(n-1) + \frac{1}{a_{n-2}} = \ldots = 2n + 2(n-1) + \ldots + 2\cdot 2 + \frac{1}{a_1} =$$
$$= 2n + 2(n-1) + \ldots + 2\cdot 2 + 2\cdot 1 = 2\frac{n(n+1)}{2} = n(n+1)$$

Според тоа $a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, за секој $n \in \mathbb{N}$.

Значи за произволен $k \in \mathbb{N}$ имаме

$$a_1 + \ldots + a_k = \left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \ldots + \left(\cancel{\frac{1}{k-1}} - \cancel{\frac{1}{k}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{k}} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{k+1} = \frac{k}{k+1}$$

Решение II. Со помош на принципот на математичка индукција ќе докажеме дека $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$, за секој $n \in \mathbb{N}$. За $n = 1$ важи $a_1 = \frac{1}{1\cdot 2}$. Да претпоставиме дека тврдењето важи за природниот број n. Тогаш за $n+1$ имаме

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2na_n + 1} = \frac{\frac{1}{n(n+1)}}{2(n+1)\frac{1}{n(n+1)} + 1} = \frac{1}{2n + 2 + n^2 + n} = \frac{1}{(n+1)(n+2)},$$

па $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$, за секој $n \in \mathbb{N}$.

Како во решението I добиваме дека $a_1 + \ldots + a_k = 1 - \frac{1}{k+1} = \frac{k}{k+1}$.

4. По завршувањето на еден шаховски турнир се утврдило дека секој учесник освоил точно половина од своите поени играјќи со натпреварувачите кои се пласирале на последните три места. Колку учесници имало на турнирот?
(притоа, секој учесник одиграл по една партија со секој од останатите учесници. За победа се добива по еден поен, за реми половина поен а за пораз не се добива ниту еден поен.)

Решение. Нека на турнирот учествувале n натпреварувачи. Последнопласираните три натпреварувачи одиграле меѓусебно три партии и поделиле три поени. Тие три поени се половина од поените кои ги освоиле на крајот, па половината од нивните поени ги освоиле во партиите со останатите $n-3$ натпреварувачи. Значи во партиите со останатите $n-3$ натпреварувачи последните тројца освоиле три поени. Според тоа останатите $n-3$ учесници одиграле со последните тројца $3(n-3)$ партии и освоиле вкупно $3(n-3)-3$ поени. Од условот на задачата тој број на поени е еднаков на бројот на поените кои тие ги поделиле меѓусебно, односно на $\frac{1}{2}(n-3)(n-4)$.

Значи ја добиваме равенката $3(n-3)-3 = \frac{1}{2}(n-3)(n-4)$. Нејзините решенија се $n_1 = 4$ и $n_2 = 9$. Случајот $n_1 = 4$ не ги исполнува условите на задачата бидејќи првиот натпреварувач нема со кого да ги освои половината од своите поени. Според тоа на турнирот имало девет учесници.

XXI Републички натпревар 2005

I година

1. Должините на страните на еден триаголник се прости броеви. Докажи дека неговата плоштина не може да биде природен број.

Решение. Од Хероновата формула за плоштина на триаголник имаме

$$P^2 = s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c), \qquad (1)$$

каде a,b,c се страните на триаголникот, а $s=\frac{a+b+c}{2}$. Нека a,b,c се прости броеви. Да претпоставиме дека и $P\in\mathbb{N}$. Означуваме со $L=a+b+c$ и тогаш равенството (1) преминува во

$$16P^2 = L\cdot(L-2a)\cdot(L-2b)\cdot(L-2c). \qquad (2)$$

Левата страна на равенството (2) е парен број, значи и десната страна е исто така парен број, од каде заклучуваме дека L е парен број. Настануваат два случаи:

1^0 Сите a,b,c се парни броеви. Од тоа што a,b,c се прости броеви, следи дека $a=b=c=2\Rightarrow P=\frac{2^2\sqrt{3}}{4}=\sqrt{3}\notin\mathbb{N}$, што противречи на претпоставката.

2^0 Еден од a,b,c е парен, а останатите два се непарни броеви. Без губење од општоста може да земеме дека a е парен број, а b и c се непарни броеви. Тогаш, $a=2$ и $b,c\geq 3$. (3)

Ако $b\neq c$, нека $b<c$, тогаш $c-b\geq 2$ т.е. $c\geq b+2=b+a$, што претставува противрешност со неравенството меѓу страните во триаголник.

Значи, $b=c$, па тогаш $L=a+b+c=2+2b$ и (2) преминува во

$$16P^2=(2+2b)\cdot(2+2b-4)\cdot(2+2b-2b)\cdot(2+2b-2b)$$

$$16P^2=16\cdot(1+b)\cdot(b-1)$$

$$P^2=b^2-1$$

$$1=(b-P)\cdot(b+P), \qquad (4)$$

но бидејќи $b+P\geq 3$, заради (3), следи дека равенството (4) не е можно.

Значи, ако a,b,c се прости броеви, не може $P\in\mathbb{N}$, што требаше да се докаже. ■

2. Нека за рационалните броеви a,b,c исполнети се условите $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$, $abc\neq 0$ и $a+b+c\neq 0$.

Докажи дека

а) $a+b=0$ или $a+c=0$ или $b+c=0$,

б) $\frac{1}{a^{2n-1}}+\frac{1}{b^{2n-1}}+\frac{1}{c^{2n-1}}=\frac{1}{a^{2n-1}+b^{2n-1}+c^{2n-1}}$, за секој $n\in\mathbb{N}$.

Решение. а) Од равенството $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$, заради $abc\neq 0$ и $a+b+c\neq 0$ со трансформации се добива

$(a+b+c)\cdot(bc+ac+ab)=abc \Leftrightarrow a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2+2abc=0 \Leftrightarrow$

$(a+b)\cdot(a+c)\cdot(b+c)=0$,

значи, $a+b=0$ или $a+c=0$ или $b+c=0$, што требаше да се докаже.

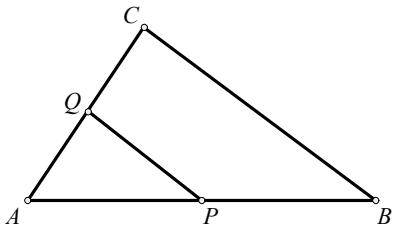
б) Без губење од општоста може да земеме дека $a+b=0$, тогаш $b=-a$, па и за секој n природен број важи $b^{2n-1}=(-a)^{2n-1}=-a^{2n-1}$, од каде со замена во равенството $\frac{1}{a^{2n-1}}+\frac{1}{b^{2n-1}}+\frac{1}{c^{2n-1}}=\frac{1}{a^{2n-1}+b^{2n-1}+c^{2n-1}}$ (1)

се добива $\frac{1}{a^{2n-1}}-\frac{1}{a^{2n-1}}+\frac{1}{c^{2n-1}}=\frac{1}{a^{2n-1}-a^{2n-1}+c^{2n-1}}$, т.е. $\frac{1}{c^{2n-1}}=\frac{1}{c^{2n-1}}$,

што претставува точен исказ за секој $c\in\mathbb{Q}\setminus\{0\}$ и секој n природен број, со што се покажува дека равенството (1) важи. ■

3. Докажи дека за секоја точка P од страната AB на триаголникот ABC важи

$$\overline{PC}\cdot\overline{AB}<\overline{PA}\cdot\overline{BC}+\overline{PB}\cdot\overline{AC}.$$



Решение. Нека P е произволна точка од страната AB на триаголникот ABC и нека Q е точка од страната AC така што $PQ\parallel BC$. Од сличноста $\Delta APQ\sim\Delta ABC$ имаме

$$\overline{PQ}:\overline{BC}=\overline{PA}:\overline{AB}\ \Rightarrow\ \overline{PQ}\cdot\overline{AB}=\overline{PA}\cdot\overline{BC}. \qquad (1)$$

Од $PQ\parallel BC$ имаме

$$\overline{AC}:\overline{AB}=\overline{QC}:\overline{PB}\ \Rightarrow\ \overline{AB}\cdot\overline{CQ}=\overline{PB}\cdot\overline{AC}. \qquad (2)$$

Со собирање на равенствата (1) и (2) добиваме

$$\overline{AB}\cdot(\overline{PQ}+\overline{CQ})=\overline{PA}\cdot\overline{BC}+\overline{PB}\cdot\overline{AC} \qquad (3)$$

Од неравенство меѓу страните на триаголникот PQC имаме

$$\overline{PQ}+\overline{CQ}>\overline{PC} \qquad (4)$$

Конечно, од (3) и (4) се добива

$$\overline{AB}\cdot\overline{PC}\overset{(4)}{<}\overline{AB}\cdot(\overline{PQ}+\overline{CQ})\overset{(3)}{=}\overline{PA}\cdot\overline{BC}+\overline{PB}\cdot\overline{AC},$$

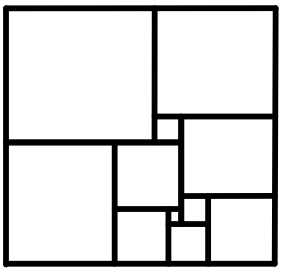
што требаше да се докаже. ■

4. На табла се напишани броевите 1 и 2. Се дозволува допишување на нови броеви на следниот начин: Ако на таблата се наоѓаат броевите a и b на различни места, тогаш може да се допише и бројот $ab+a+b$. Дали може на тој начин да се добие бројот 2005?

Решение. Ќе докажеме дека сите броеви на таблата се од облик 2^n3^m-1, каде што $n,m\in\mathbb{N}$. Јасно е дека такви се $1=2^13^0-1$, $2=2^03^1-1$ и следниот добиен број $1\cdot2+1+2=5=2^1\cdot3^1-1$. Ако замеме два броеви од таблата, $2^{n_1}3^{m_1}-1$ и $2^{n_2}3^{m_2}-1$, тогаш новодобиениот број ќе биде

$$\begin{aligned}&\left(2^{n_1}3^{m_1}-1\right)\left(2^{n_2}3^{m_2}-1\right)+2^{n_1}3^{m_1}-1+2^{n_2}3^{m_2}-1=\\&=2^{n_1+n_2}3^{m_1+m_2}-\cancel{2^{n_1}3^{m_1}}-\cancel{2^{n_2}3^{m_2}}+\cancel{1}+\cancel{2^{n_1}3^{m_1}}-\cancel{1}+\cancel{2^{n_2}3^{m_2}}-1=\\&=2^{n_1+n_2}3^{m_1+m_2}-1=2^k3^s-1\end{aligned}.$$

Бидејќи $2005+1=2006=2\cdot17\cdot59\neq2^n\cdot3^m$, значи дека бројот 2005 не е од облик 2^n3^m-1 па на таблата не може да се добие тој број. ■

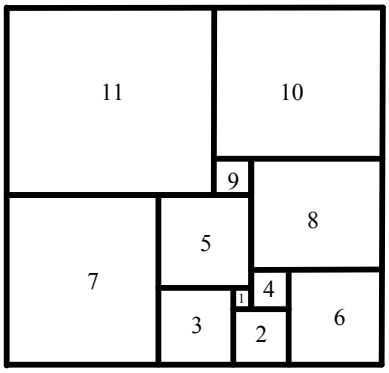


II година

1. Нацртаниот правоаголник на цртежот е поделен на 11 квадрати со различни страни. Најмалиот квадрат има страна 9. Кои се димензиите на правоаголникот?

Решение. Квадратот означен со бројот 1 има должина (т.е. должина на страна) 9. Нека квадратот бр. 2 има должина x. Тогаш квадратот бр. 3 има должина $x+9$, квадратот бр. 4 има должина $x-9$, квадратот бр. 5 има должина $x+18$, квадратот

бр. 6 има должина $2x-9$, квадратот бр. 7 има должина $2x+27$, квадратот бр. 8 има должина $3x-18$.



Ако страната на квадратот бр. 9 е y, тогаш $y+(x+18)+9=(3x-18)+(x-9)$, од каде $y=3x-54$. Па, квадратот бр. 10 има страна $6x-72$, а квадратот бр. 11 страна $9x-126$.

Горната страна на дадениот правоаголник е збир на страните на квадратите бр. 10 и 11, т.е. има должина $(6x-72)+(9x-126)=15x-198$, а неговата долна страна е збир на страните на квадратите бр. 7, 3, 2 и 6, т.е. има должина

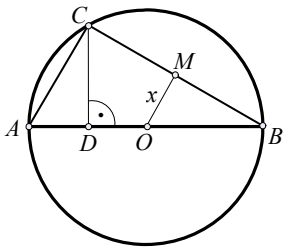
$$(2x+27)+(x+9)+x+(2x-9)=6x+27.$$

Изедначувајќи ги добиените изрази добиваме $x=25$. Затоа страните на квадратите означени со броевите од 1 до 11 се 9, 25, 34, 16, 43, 41, 77, 57, 21, 78, 99, соодветно. Па, должината на дадениот правоаголник е 177, а ширината 176. ■

2. Реши го системот равенки $\begin{cases} ax=|y-z|+y \\ ay=|z-x|+z \\ az=|x-y|+x \end{cases}$, ако $a\in\mathbb{R},\ a>0$.

Решение. Ќе докажеме дека $x=y=z$. Нека претпоставиме спротивно, т.е. дека постои решение (x,y,z) за кое без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $z>y$. Од првата равенка добиваме $ax=z-y+y=z$. Ако замениме во втората равенка добиваме $a(y-x)=|z-x|\geq 0$, од каде заради условот $a>0$ добиваме $y\geq x$. Тогаш од третата равенка добиваме $az=y-x+x=y$. Ако замениме во првата равенка добиваме $x\geq z$. Според тоа, $z>y\geq x\geq z$, што не е можно. Значи, решенијата на системот го задоволуваат условот $x=y=z$. Според тоа, за $a=1$ решение на системот се сите тројките од облик (t,t,t), $t\in R$, а за $a\neq 1$ решение на системот е тројката $(0,0,0)$.■

3. Дадена е кружница со центар O и дијаметар AB. Точката C е избрана на кружницата така што $\overline{DB}=3\overline{OM}$, каде што D е проекција на C врз дијаметарот AB, а M е проекција на O врз BC. Определи го $\sphericalangle ABC$.



Решение. Нека $\overline{OM}=x$ и $\overline{OB}=r$. Според условот $\overline{DB}=3\overline{OM}=3x$, па $\overline{AD}=\overline{AB}-\overline{DB}=2r-3x$. Од тоа што OM е средна линија во ΔABC имаме $\overline{AC}=2\overline{OM}=2x$. Триаголниците OBM и ACD се слични, па $\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}}=\frac{\overline{OB}}{\overline{OM}}$ т.е. $\frac{2x}{2r-3x}=\frac{r}{x}$, од каде што $2x^2+3rx-2r^2=0$. Решенија на оваа квадратна равенка се: $x_{1/2}=\pm\frac{r}{2}$, од каде $r=2x$.

Значи, $\overline{AC}=\overline{AO}=\overline{OC}$, па аголот CAB е 60°. Следува бараниот агол е 30°.■

4. Нека k е еден од количниците на корените на квадратната равенка $px^2-qx+q=0$, каде $p,q>0$. Изрази ги преку k (не преку p и q) корените на равенката $\sqrt{p}x^2-\sqrt{q}x+\sqrt{p}=0$.

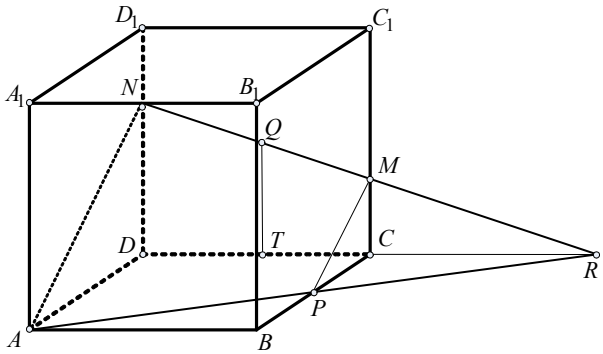
Решение. Ако a и b се корени на равенката $px^2 - qx + q = 0$, тогаш од условот на задачата имаме $\frac{a}{b} = k$, а според виетовите правила имаме $a + b = \frac{q}{p}$, $ab = \frac{q}{p}$. Бидејќи p и q се позитивни реални броеви, од втората равенка добиваме дека a и b се со ист знак. Од првата равенка добиваме дека a и b се позитивни. Според тоа, ако ја коренуваме втората равенка, добиваме $\sqrt{ab} = \sqrt{\frac{q}{p}}$. Ако ги поделиме равенките $a + b = \frac{q}{p}$ со $\sqrt{ab} = \sqrt{\frac{q}{p}}$ (лева со лева, десна со десна страна), добиваме $\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} = \sqrt{\frac{p}{q}}$. Ако го искористиме условот $\frac{a}{b} = k$, добиваме $\sqrt{k} + \sqrt{\frac{1}{k}} = \sqrt{\frac{p}{q}}$, т.е. $\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{p}}$.

Ако последната добиена равенка ја помножиме со $\sqrt{k}\sqrt{p}$, добиваме $\sqrt{p}(\sqrt{k})^2 - \sqrt{q}\sqrt{k} + \sqrt{p} = 0$. Значи, $\sqrt{k}$ е корен на равенката $\sqrt{p}x^2 - \sqrt{q}x + \sqrt{p} = 0$. Од тоа што $\sqrt{k}$ е корен на равенката $\sqrt{p}x^2 - \sqrt{q}x + \sqrt{p} = 0$ и равенството $\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{p}}$, добиваме дека $\frac{1}{\sqrt{k}}$ е вториот корен на равенката $\sqrt{p}x^2 - \sqrt{q}x + \sqrt{p} = 0$.

Ако a_1, b_1 се корени на равенката $\sqrt{p}x^2 - \sqrt{q}x + \sqrt{p} = 0$, тогаш $a_1 = \sqrt{k}$ и $b_1 = \frac{1}{\sqrt{k}}$. ■

III година

1. На коцката $ABCDA_1B_1C_1D_1$ избрани се точките P и Q, каде P е средина на работ BC, а Q е пресекот на дијагоналите во квадратот CC_1DD_1. Рамнината APQ ја дели коцката на два дела. Најди го односот на волумените на добиените делови од коцката?



Решение. Да ја означиме страната на коцката со a. Нека T е подножјето на нормалата спуштена од точката Q врз работ CD, нека пресечните точки на рамнината APQ со рабовите DD_1 и CC_1 се N и M соодветно, а пресечната точка со правата CD е точката R. Од условот на задачата важат следниве равенства $\overline{BP} = \overline{PC} = \frac{a}{2}$ и $\overline{QT} = \frac{a}{2}$. Притоа, $\Delta ARD \sim \Delta PRC$ од каде што се добива $\overline{CR} : \overline{DR} = \overline{CP} : \overline{DA} = \frac{1}{2}$.

Тогаш $\overline{CD} = \overline{CR} = a$. Исто и $\Delta CMR \sim \Delta DNR$ од каде $\overline{CM} : \overline{DN} = \overline{CR} : \overline{DR} = \frac{1}{2}$, па имаме $\overline{CM} = \frac{1}{2}\overline{DN}$. QT е средна линија во трапезот $DCMN$ и важи $\overline{DN} + \overline{CM} = 2\overline{QT} = a$ или $\overline{DN} + \frac{\overline{DN}}{2} = a$, од каде што добиваме $\overline{DN} = \frac{2}{3}a$ и $\overline{CM} = \frac{1}{3}a$.

Рамнината APQ ја дели коцката на два дела од кои едниот е пресечената пирамида $ADNPCM$, со висина страната на коцката и основи правоаголни триаголници PCM и AND. За волуменот на пресечената пирамида, со помош на двете пирамиди $ANDR$ и $PCMR$ добиваме:

$$V_1 = V_{ADNR} - V_{PCMR} = \frac{\overline{AD}\cdot\overline{DN}}{2}\cdot\frac{\overline{DR}}{3} - \frac{\overline{CP}\cdot\overline{CM}}{2}\cdot\frac{\overline{CR}}{3} = \frac{7a^3}{36}$$

За волуменот на преостанатиот дел важи $V_2 = a^3 - V_1 = \frac{29a^3}{36}$. Бараниот однос на волумените е $\frac{V_1}{V_2} = \frac{7}{29}$. ■

2. Нека $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}$ и нека $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ е функција дефинирана со

$$f(x) = \cos(a_1 + x) + \frac{\cos(a_2 + x)}{2} + \frac{\cos(a_3 + x)}{2^2} + ... + \frac{\cos(a_n + x)}{2^{n-1}}.$$

Докажи дека, ако $f(x_1) = f(x_2) = 0$ тогаш постои $m \in \mathbb{Z}$, така што $x_1 - x_2 = m\pi$.

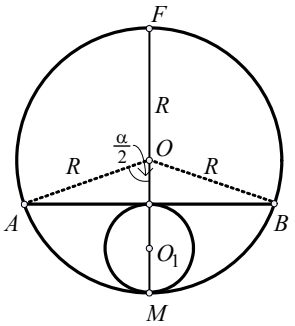
Решение. Користејќи $\cos(a_i + x) = \cos a_i \cos x - \sin a_i \sin x$, функцијата ќе ја трансформираме во облик $f(x) = \cos x(\cos a_1 + \frac{\cos a_2}{2} + ... + \frac{\cos a_n}{2^{n-1}}) - \sin x(\sin a_1 + \frac{\sin a_2}{2} + ... + \frac{\sin a_n}{2^{n-1}})$ или уште повеќе $f(x) = A\cos x - B\sin x$, каде $A = \cos a_1 + \frac{\cos a_2}{2} + ... + \frac{\cos a_n}{2^{n-1}}$ и $B = \sin a_1 + \frac{\sin a_2}{2} + ... + \frac{\sin a_n}{2^{n-1}}$. Ќе покажеме дека $A^2 + B^2 \neq 0$.

Нека $A^2 + B^2 = 0$. Тогаш сигурно $A = B = 0$, а за функцијата би имале $f(x) = 0$ на целото множество реални броеви. Специјално за $x = -a_1$ добиваме $0 = f(-a_1) = \cos 0 + \frac{\cos(a_2 - a_1)}{2} + ... + \frac{\cos(a_n - a_1)}{2^{n-1}}$, односно $\frac{\cos(a_2 - a_1)}{2} + ... + \frac{\cos(a_n - a_1)}{2^{n-1}} = -1$, израз за кој важи $|-1| = 1 = \left|\frac{\cos(a_2 - a_1)}{2} + ... + \frac{\cos(a_n - a_1)}{2^{n-1}}\right| \le \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^{n-1}} =$

$= 1 - \frac{1}{2^{n-1}} < 1$, што е контрадикција. Тогаш мора $A^2 + B^2 \neq 0$ и функцијата може да ја запишеме во облик $f(x) = \sqrt{A^2 + B^2}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}\cos x - \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}\sin x\right)$. Ќе избереме агол φ, така што $\sin\varphi = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ и $\cos\varphi = -\frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, јасно можно е затоа што $-1 \le \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \le 1$, $-1 \le \frac{-B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \le 1$ и $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$.

Тогаш $f(x) = \sqrt{A^2 + B^2}(\sin\varphi\cos x + \cos\varphi\sin x) = \sqrt{A^2 + B^2}\sin(\varphi + x)$. Ако сега $f(x_1) = f(x_2) = 0$, ќе добиеме $\sin(\varphi + x_1) = 0$ и $\sin(\varphi + x_2) = 0$, од каде мора $\varphi + x_1 = k\pi$ и $\varphi + x_2 = j\pi$, за $k, j \in \mathbb{Z}$. Конечно $x_1 - x_2 = (k - j)\pi = m\pi$, каде $m = k - j \in \mathbb{Z}$, што требаше да се докаже. ■

3. Во кружница со радиус R, определи го централниот агол на кој му соодветствува кружен отсечок со следново својство: тетивата на отсечокот е еднаква на периметарот на кружницата со најголем радиус која е впишана во него.



Решение. Нека AMB е бараниот кружен отсечок и нека $\sphericalangle AOB = \alpha$. Јасно е дека $\angle AOM = \frac{\alpha}{2}$. Од степен на точка во однос на кружница имаме

$$\overline{MN}\cdot\overline{NF} = \overline{AN}\cdot\overline{NB}. \qquad (1)$$

Нека r е радиусот на кружницата која што е впишана во отсечокот. Тогаш $l = 2r\pi$, $\overline{AN} = \overline{NB} = \pi r$ и $\overline{MN} = 2r$,

$\overline{NF}=2R-2r$. Бидејќи $\frac{\pi r}{R}=\sin\frac{\alpha}{2}$, добиваме $R=\frac{\pi r}{\sin\frac{\alpha}{2}}$. Според тоа $\overline{NF}=2\frac{\pi r}{\sin\frac{\alpha}{2}}-2r=2r\left(\frac{\pi}{\sin\frac{\alpha}{2}}-1\right)$.

Ако замениме во (1), добиваме $\pi^2r^2=4r^2\left(\frac{\pi}{\sin\frac{\alpha}{2}}-1\right)$, т.е. $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{4\pi}{4+\pi^2}$. Конечно, $\alpha=2\arcsin\frac{4\pi}{4+\pi^2}$. ■

4. Нека $f(x)$ е полином со целобројни коефициенти и $f(\sqrt{2}+\sqrt{3})=0$. Докажи дека $f(\sqrt{2}-\sqrt{3})=0$.

Решение. Ако воведеме ознака $x=\sqrt{2}+\sqrt{3}$, тогаш $x^2=5+2\sqrt{6}$, т.е. $x^2-5=2\sqrt{6}$. Ако последното равенство го квадрираме, добиваме $x^4-10x^2+25=24$. Полином со најнизок степен и со целобројни коефициенти за кој што $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ е негова нула е $g(x)=x^4-10x^2+1$. Ако полиномот со целобројни коефициенти го запишеме во облик

$f(x)=(x^4-10x^2+1)p(x)+ax^3+bx^2+cx+d$, каде a,b,c,d се цели броеви, тогаш од равенството $f(\sqrt{2}+\sqrt{3})=0$, добиваме $a(\sqrt{2}+\sqrt{3})^3+b(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2+c(\sqrt{2}+\sqrt{3})+d=0$. Последното равенство можеме да го запишеме во обликот $(9a+c)\sqrt{3}+(11a+c)\sqrt{2}+2b\sqrt{6}+5b+d=0$, од каде што добиваме дека $9a+c=0$, $11a+c=0$, $2b=0$ и $5b+d=0$, т.е. $a=b=c=d=0$. Според тоа $f(x)=(x^4-10x^2+1)p(x)$, каде $p=p(x)$ е со целобројни коефициенти. Од тука е јасно дека $f(\sqrt{3}-\sqrt{2})=0$.

Забелешка: $x^4-10x^2+1=(x-\sqrt{3}-\sqrt{2})(x-\sqrt{3}+\sqrt{2})(x+\sqrt{3}-\sqrt{2})(x+\sqrt{3}+\sqrt{2})$.■

IV година

1. Ако синусите на аглите на еден триаголник образуваат аритметичка прогресија тогаш и котангенсите од половините на аглите образуваат аритметичка прогресија. Докажи!

Решение. Нека x, y, z се аглите на триаголникот. Тогаш $\sin x$, $\sin y$, $\sin z$ образуваат аритметичка прогресија односно $\sin y=\frac{\sin x+\sin z}{2}$. Оттука добиваме

$2\sin(\pi-(x+z))=2\sin\frac{x+z}{2}\cos\frac{x-z}{2}$, $\sin(x+z)=\sin\frac{x+z}{2}\cos\frac{x-z}{2}$, $2\sin\frac{x+z}{2}\cos\frac{x+z}{2}=\sin\frac{x+z}{2}\cos\frac{x-z}{2}$,

односно $\sin\frac{x+z}{2}(2\cos\frac{x+z}{2}-\cos\frac{x-z}{2})=0$. Бидејќи $\sin\frac{x+z}{2}\neq 0$ добиваме дека $\cos\frac{x-z}{2}=2\cos\frac{x+z}{2}$ (1).

Од $y=\pi-(x+z)$ следува $\frac{y}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{x+z}{2}$. Значи $\operatorname{ctg}\frac{y}{2}=\operatorname{tg}\frac{x+z}{2}$ (2). Сега имаме:

$$\operatorname{ctg}\frac{x}{2}+\operatorname{ctg}\frac{z}{2}=\frac{\sin\frac{x+z}{2}}{\sin\frac{x}{2}\sin\frac{z}{2}}=\frac{\sin\frac{x+z}{2}}{\frac{1}{2}(\cos\frac{x-z}{2}-\cos\frac{x+z}{2})}\overset{(1)}{=}\frac{2\sin\frac{x+z}{2}}{\cos\frac{x+z}{2}}=2\operatorname{tg}\frac{x+z}{2}\overset{(2)}{=}2\operatorname{ctg}\frac{y}{2}.■$$

2. Најди ги сите функции $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ такви што $f(1)=\frac{5}{2}$ и важи $f(x)f(y)=f(x+y)+f(x-y)$, за секои $x,y\in\mathbb{Z}$.

Решение. Ако $x=y=0$ имаме $f(0)^2=2f(0)$, а оттука $f(0)=0$ или $f(0)=2$. Нека $f(0)=0$. Ако $y=1$ имаме $\frac{5}{2}f(x)=f(x+1)+f(x-1)$ односно $f(x+1)=\frac{5}{2}f(x)-f(x-1)$. Тогаш $f(2)=\frac{25}{4}$, $f(3)=\frac{105}{8}$, $f(4)=\frac{425}{16}$. Но, од $f(2)^2=f(4)+f(0)$ следува дека $f(4)=\frac{625}{16}$. Значи $f(0)\neq 0$.

Нека $f(0)=2$. Бидејќи $f(x)f(-y)=f(x-y)+f(x+y)=f(x)f(y)$, за сите $x,y\in\mathbb{Z}$, тогаш и за $x=1$ равенството важи. Но бидејќи $f(1)\neq 0$ добиваме дека $f(-y)=f(y)$, за секој $y\in\mathbb{Z}$, односно функцијата е парна. Важи $f(0)=2$, $f(1)=\frac{5}{2}$, $f(2)=\frac{17}{4}$, $f(3)=\frac{65}{8}$... . Затоа, со индукција ќе докажеме дека ако x е позитивен цел број тогаш $f(x)=\frac{2^{2x}+1}{2^x}$ е единствено решение (единствено бидејќи секоја функционална вредност зависи само од претходните две вредности, односно $f(x+1)=\frac{5}{2}f(x)-f(x-1)$). Јасно е дека за $x=1$ тврдењето важи. Нека за секој $t<x, t\in\mathbb{N}$ тврдењето важи. Тогаш имаме

$$f(t+1)=\frac{5}{2}f(t)-f(t+1)=\frac{5}{2}\frac{2^{2t}+1}{2^t}-\frac{2^{2(t-1)}+1}{2^{t-1}}=\frac{2^{2(t+1)}+1}{2^{t+1}}.$$

Од $f(0)=\frac{2^{2\cdot 0}+1}{2^0}=2$ и од тоа што f е парна функција добиваме дека $f(x)=\frac{2^{2x}+1}{2^x}$ е единствена функција што го задоволува равенството за секој цел број x. Обратното е јасно. односно лесно се проверува дека ако $f(x)=\frac{2^{2x}+1}{2^x}$ тогаш таа го задоволува даденото равенство. ■

3. Реши ја равенката $x!+y!+z!=u!$ во $\mathbb{N}$.

Решение. Нека четворката (x,y,z,u) е решение на равенката. Нека $v=\max\{x,y,z\}$ тогаш $1\le v<u$ и $uv!\le u(u-1)!=u!=x!+y!+z!\le 3v!$. Значи $u\le 3$. За $u=3$ ја добиваме равенката $3!=x!+y!+z!$ чиешто решение е $x=y=z=2$. За $u=2$, нема решение бидејќи $x!+y!+z!\ge 3>2=2!$. Слично, равенката нема решение кога u=1. Значи единствено решение е $x=y=z=2$, $u=3$. ■

4. Докажи дека за секои реални броеви a,b,c,d важи неравенството

$$\max\left\{a^2-b,b^2-c,c^2-d,d^2-a\right\}\ge\max\left\{a^2-a,b^2-b,c^2-c,d^2-d\right\}.$$

Решение. Нека

$$M_1=\max\left\{a^2-a,b^2-b,c^2-c,d^2-d\right\}$$

и

$$M_2=\max\left\{a^2-b,b^2-c,c^2-d,d^2-a\right\}.$$

Да претпоставиме спротивно, т.е. дека $M_1>M_2$. Без губење од општоста можеме да претпоставиме дека $M_1=a^2-a$. Тогаш важи $a^2-a\ge a^2-b$, од каде се добива дека $b\ge a$. Натаму, $a^2-a\ge b^2-c\ge a^2-c$, од каде се добива $c\ge a$. Од $a^2-a\ge c^2-d\ge a^2-d$, добиваме и дека $d\ge a$. Оттука $d^2-a\ge a^2-a$, што е во контрадикција со претпоставката $M_1>M_2$.■

XXI Републички натпревар 2006

I година

1. Определи го најмалиот природен број чија половина е полн квадрат, третина е полн куб, а петтината е полн петти степен.

Решение. Бараниот број мора да е делив со 2,3 и 5 (од условот), па мора да е од облик $n = 2^x 3^y 5^z$. Ако има други множители нема да биде најмал. Од условот на задачата имаме:

$$\frac{n}{2} = 2^{x-1}3^y5^z \quad (1) \qquad \frac{n}{3} = 2^x3^{y-1}5^z \quad (2) \qquad \frac{n}{5} = 2^x3^y5^{z-1} \quad (3)$$

Од (1) следи дека $x-1, y, z$ мора да се парни. Од (2) следи дека $x, y-1, z$ мора да се деливи со три. Од (3) следи дека $x, y, z-1$ мора да се деливи со пет.

Значи x е непарен, делив со 3 и со 5, y е парен, делив со 5 и дава остаток 1 при делење со 3, z е парен, делив со 3 и дава остаток 1 при делење со 5. Бидејќи **n** е најмал, тогаш и x, y и z мора да се најмали, па имаме:

$$x = 15\,, \quad y = 15\,, \quad z = 6\,.$$

Значи $n = 2^{15}3^{10}5^6 = 30\ 233\ 088\ 000\ 000.$

2. Ако $\frac{a_1}{1+b_1} + \frac{a_2}{1+b_2} + \cdots + \frac{a_n}{1+b_n} = \frac{A}{1+B}$ и $\frac{a_1(B-b_1)}{1+b_1} + \frac{a_2(B-b_2)}{1+b_2} + \cdots + \frac{a_n(B-b_n)}{1+b_n} = 0$, докажи дека $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = A$.

Решение. Нека $k_i = \frac{a_i}{1+b_i}$, $i = 1,2,\ldots,n$, тогаш од првото равенство следи дека

$$A = (1+B)(k_1 + k_2 + \cdots + k_n) = *\,.$$

Од второто равенство имаме

$$k_1(B-b_1) + k_2(B-b_2) + \cdots + k_n(B-b_n) = 0 \Rightarrow B(k_1 + k_2 + \cdots + k_n) = k_1b_1 + k_2b_2 + \cdots + k_nb_n\,.$$

Тогаш,

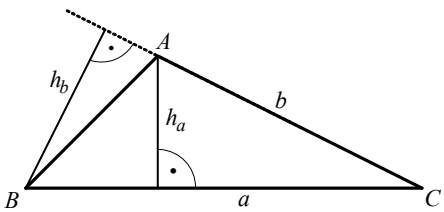
$$* = k_1 + k_2 + \cdots + k_n + B(k_1 + k_2 + \cdots + k_n) = k_1 + k_2 + \cdots + k_n + k_1b_1 + k_2b_2 + \cdots + k_nb_n =$$
$$= k_1(1+b_1) + k_2(1+b_2) + \cdots + k_n(1+b_n) = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

што требаше да се докаже.

3. Нека $\triangle ABC$ е тапоаголен со тап агол кај темето А. Нека $\overline{BC} = a, \overline{AC} = b,$ $h_a -$ висината спуштена од темето A и $h_b -$ висината спуштена од темето B. Докажи дека $a + h_a > b + h_b$.

Решение. Од условот на задачата имаме:

$$a > b > h_a \qquad (1)$$

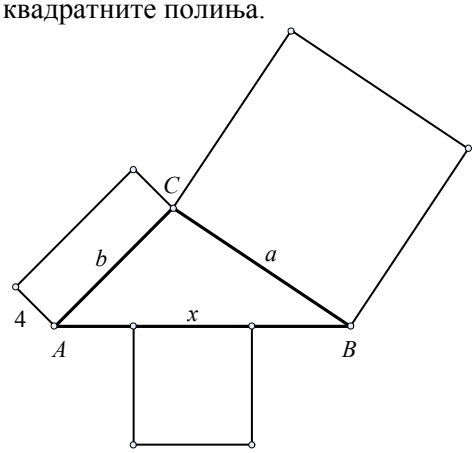


Според тоа

$$2P = bh_b = ah_a \overset{(1)}{<} ab \Rightarrow \frac{2P}{ab} < 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{2P}{ab}(a-b) < a-b \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{2P}{b} - \frac{2P}{a} < a-b \Rightarrow$$
$$\Rightarrow h_b - h_a < a-b \Rightarrow$$
$$\Rightarrow b + h_b < a + h_a.$$

4. Градовите А, В и С се поврзани со праволиниски патишта. Покрај патот А-В се наоѓа квадратно поле со страна $0{,}5\overline{AB}$, а покрај патот В-С се наоѓа квадратно поле со страна $\overline{BC}$; покрај патот А-С постои шума со правоаголна

форма, чија должина е $\overline{AC}$, а ширина 4 километри. Најди ја плоштината на шумата, ако таа е за 20 километри поголема од збирот на плоштините на квадратните полиња.



Решение. Нека $\overline{AB}=a, \overline{BC}=b, \overline{AC}=x$. При тоа $a+b\geq x$. Според условот

$$4x=\frac{a^2}{4}+b^2+20\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\quad x=\frac{a^2}{16}+\frac{b^2}{4}+5$$
$$\Rightarrow a+b\geq\frac{a^2}{16}+\frac{b^2}{4}+5\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 16a+16b\geq a^2+4b^2+80\Rightarrow$$
$$a^2-16a+4b^2-16b+80\leq 0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\quad (a-8)^2+4(b-2)^2\leq 0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow a=8, b=2\quad\Rightarrow x=10\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\quad P=40km^2$$

II година

1. Најди го реалниот број m така што равенката

$$\left(x^2-2mx-4(m^2+1)\right)\left(x^2-4x-2m(m^2+1)\right)=0$$

има точно три различни реални корени.

Решение. Дадената равенка е еквивалентна со вкупноста равенки $\left[\begin{array}{l} x^2-2mx-4(m^2+1)=0 \\ x^2-4x-2m(m^2+1)=0 \end{array}\right.$.

Дискриминантата на првата равенка е $D_1=4(5m^2+4)$, а на втората $D_2=4(4+2m(m^2+1))$. Јасно е дека $D_1>0$. Тогаш, бидејќи првата равенка има секогаш два различни реални корени, можни се следниве случаи:

А) Втората равенка има точно еден реален корен, различен од корените на првата.

Б) Втората равенка има два различни реални корени, но еден од нив е еднаков со корен на првата равенка.

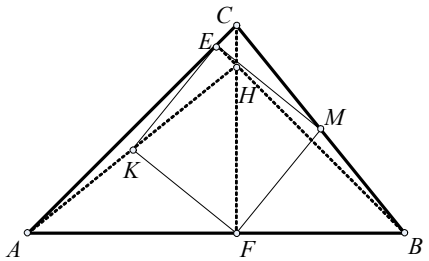
А) Во овој случај ја добиваме равенката $D_2=m^3+m+2=(m+1)(m^2-m+2)=0$ која во множеството реални броеви има едно решение $m=-1$. Тогаш решенија на првата равенка се 2 и -4, а на втората решение е 2, односно $\left(x^2-2mx-4(m^2+1)\right)\left(x^2-4x-2m(m^2+1)\right)=0$ има две реални решенија. Значи $m=-1$ не е бараното решение.

Б) Нека x_0 е заедничкиот корен на равенките од системот. Тогаш ако од ${x_0}^2-2mx_0-4(m^2+1)=0$ ја одземеме ${x_0}^2-4x_0-2m(m^2+1)=0$ добиваме $(4-2m)x_0=(m^2+1)(4-2m)$. Ако $m=2$ тогаш првата и втората равенка од системот се еднакви па $\left(x^2-2mx-4(m^2+1)\right)\left(x^2-4x-2m(m^2+1)\right)=0$ има точно два реални различни корени. Значи $m\neq 2$, а тогаш $x_0=m^2+1$. Со замена на x_0 во првата равенка ја добиваме равенката $(m^2+1)(m^2-2m-3)=0$, а нејзини реални решенија се $m_1=-1$ и $m_2=3$. Од дискусијата под А), $m=-1$ не е бараното решение. Ако $m=3$ тогаш корени на првата равенка се 10 и -4, а на втората -4 и -6. Значи бараното решение е $m=3$.

2. За кои вредности на реалниот параметар a, системот $\begin{cases} x+y+z=\sqrt{3a-1} \\ x^2+y^2+z^2=a \\ xy=z^2 \end{cases}$ има различни реални решенија?

Решение. За системот да има решение треба $3a-1\geq 0$ и $a\geq 0$, односно $a\geq \frac{1}{3}$. Втората равенка од системот е еквивалентна со равенката $(x+y)^2-2xy+z^2=a$. Тогаш, со смена на $x+y$ и xy од првата и третата равенка, соодветно, ја добиваме равенката $(\sqrt{3a-1}-z)^2-2z^2+z^2=a$, која е еквивалентна со равенката $2\sqrt{3a-1}\,z=2a-1$. Последната равенка има решение во реалните броеви ако $a\neq \frac{1}{3}$, па затоа $a>\frac{1}{3}$. Тогаш $z=\frac{2a-1}{2\sqrt{3a-1}}$. Со замена на $z=\frac{2a-1}{2\sqrt{3a-1}}$ во првата и втората равенка на системот, го добиваме системот $\begin{cases} x+y=\frac{4a-1}{2\sqrt{3a-1}} \\ xy=\left(\frac{2a-1}{2\sqrt{3a-1}}\right)^2 \end{cases}$. Тогаш x и y се решенија на квадратната равенка $t^2-\frac{4a-1}{2\sqrt{3a-1}}t+\left(\frac{2a-1}{2\sqrt{3a-1}}\right)^2=0$. Бидејќи системот треба да има различни реални решенија, треба $\left(\frac{4a-1}{2\sqrt{3a-1}}\right)^2-4\left(\frac{2a-1}{2\sqrt{3a-1}}\right)^2>0$. Последната неравенка е еквивалентна со неравенката $\frac{8a-3}{4(3a-1)}>0$, а бидејќи именителот е позитивен следува дека $8a-3>0$. Оттука следува дека $a>\frac{3}{8}$. Конечно, за $a>\frac{3}{8}$ системот има различни реални решенија.

3. Даден е остроаголниот триаголник ABC со агол $\angle BAC=45^\circ$. Нека $\overline{BE}$ и $\overline{CF}$ се висините на триаголникот, H е ортоцентарот, а M и K се средини на $\overline{BC}$ и $\overline{AH}$, соодветно. Докажи дека четириаголникот $KFME$ е квадрат.



Решение. Триаголникот AHE е правоаголен, K е средина на неговата хипотенуза па затоа $\overline{KE}=\overline{KH}=\overline{KA}$. Бидејќи K е средина и на хипотенузата на правоаголниот триаголник AFH, следува $\overline{KF}=\overline{KH}=\overline{KA}$, Оттука добиваме

$$\overline{KE}=\overline{KF} \qquad (1)$$

Слично, добиваме дека

$$\overline{ME}=\overline{MF} \qquad (2)$$

Триаголниците ABE и HCE се рамнокраки правоаголни па важи $\overline{AE}=\overline{BE}$ и $\overline{HE}=\overline{CE}$. Тогаш триаголниците AHE и BCE се складни и оттука $\overline{AH}=\overline{BC}$. Затоа

$$\overline{EM}=\frac{\overline{BC}}{2}=\frac{\overline{AH}}{2}=\overline{KE} \qquad (3),$$

па од (1), (2) и (3) следува дека четириаголникот $KFME$ е ромб. Бидејќи

$$\angle KEM=\angle KEH+\angle HEM=\angle KHE+\angle HBM=\angle AHE+\angle EAH=90^\circ,$$

добиваме дека четириаголникот $KFME$ е квадрат.

4. Дали постои квадратен трином $p(x)=ax^2+bx+c$ каде што a, b, c се цели броеви, $a\neq 0$, така што за секој природен број n кој во својот десетичен запис има само единици, бројот $p(n)$ во својот десетичен запис има само единици?

Решение. Нека $n=\underbrace{11...1}_{k}$, $k\in$. Тогаш $9n+2=1\underbrace{00...0}_{k-1}1$, $(9n+2)n=\underbrace{11...1}_{2k}$. Според тоа, триномот $p(x)=9x^2+2x$ го има бараното својство.

III година

1. Пресметај го збирот $S=S_1+S_2$, каде што S_1 и S_2 се зададени со

$$S_1=\frac{1}{\log_{\mathrm{tg}1^0}2}+\frac{2}{\log_{\mathrm{tg}2^0}2^2}+...+\frac{44}{\log_{\mathrm{tg}44^0}2^{44}} \text{ и } S_2=\frac{46}{\log_{\mathrm{tg}46^0}2^{46}}+\frac{47}{\log_{\mathrm{tg}47^0}2^{47}}+...+\frac{89}{\log_{\mathrm{tg}89^0}2^{89}}$$

Решение. Користејќи го својството за логаритми $\log_x a^k=k\log_x a$, збирот

$$\begin{aligned}S=S_1+S_2&=\frac{1}{\log_{\mathrm{tg}1^0}2}+\frac{2}{\log_{\mathrm{tg}2^0}2^2}+...+\frac{44}{\log_{\mathrm{tg}44^0}2^{44}}+\frac{46}{\log_{\mathrm{tg}46^0}2^{46}}+...+\frac{89}{\log_{\mathrm{tg}89^0}2^{89}}=\\&=\frac{1}{\log_{\mathrm{tg}1^0}2}+\frac{2}{2\log_{\mathrm{tg}2^0}2}+...+\frac{44}{44\log_{\mathrm{tg}44^0}2}+\frac{46}{46\log_{\mathrm{tg}46^0}2}+...+\frac{89}{89\log_{\mathrm{tg}89^0}2}=+\\&=\frac{1}{\log_{\mathrm{tg}1^0}2}+\frac{1}{\log_{\mathrm{tg}2^0}2}+...+\frac{1}{\log_{\mathrm{tg}44^0}2}+\frac{1}{\log_{\mathrm{tg}46^0}2}+...+\frac{1}{\log_{\mathrm{tg}89^0}2}\end{aligned}$$

Користејќи го својството $\frac{1}{\log_x a}=\log_a x$, збирот го доведуваме до облик

$$S=\log_2\mathrm{tg}1^0+...+\log_2\mathrm{tg}44^0+\log_2\mathrm{tg}46^0+...+\log_2\mathrm{tg}89^0$$

Ќе ги групираме собироците и од својствата на логаритмите и функциите $\mathrm{tg}\,x$ и $\mathrm{ctg}\,x$ добиваме

$$\begin{aligned}S&=\log_2\mathrm{tg}1^0+\log_2\mathrm{tg}89^0+\log_2\mathrm{tg}2^0+\log_2\mathrm{tg}88^0+...+\log_2\mathrm{tg}44^0+\log_2\mathrm{tg}46^0=\\&=\log_2\left(\mathrm{tg}1^0\cdot\mathrm{tg}89^0\right)+...+\log_2\left(\mathrm{tg}44^0\cdot\mathrm{tg}46^0\right)==\log_2\left(\mathrm{tg}1^0\cdot\mathrm{ctg}1^0\right)+...+\log_2\left(\mathrm{tg}44^0\cdot\mathrm{ctg}44^0\right)=\\&=44\log_2 1=44\cdot 0=0\end{aligned}$$

2. Одреди ја најголемата вредност на функцијата $f(x)=3-2x-x^2$ на множеството решенија на равенката $2\cos^2 x+\cos 4x=0$.

Решение. Да го одредиме прво множеството на решенија на равенката. Користејќи ја тригонометриската трансформација $1+\cos 2x=2\cos^2 x$, равенката се сведува до облик $1+\cos 2x+2\cos^2 2x-1=0$, односно $\cos 2x+2\cos^2 2x=0$. Последното е еквивалентно со $\cos 2x(1+2\cos 2x)=0$, а решенијата тогаш се добиваат од

1) $\cos 2x=0 \Leftrightarrow 2x=(2k+1)\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x=(2k+1)\frac{\pi}{4}$, за $k\in$.

или

2) $\cos 2x=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x=(2k+1)\pi\pm\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{2}\pm\frac{\pi}{6}$.

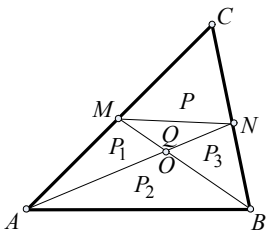
Последното може заради произволноста на $k\in$ да се запишше во облик $x=k\pi\pm\frac{\pi}{3}$.

Значи множеството решенија на равенката е зададено со

$$M=\left\{(2k+1)\frac{\pi}{4}\,\middle|\,k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{k\pi\pm\frac{\pi}{3}\,\middle|\,k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

Да ја разгледаме функцијата $f(x)=3-2x-x^2$. За неа е точно дека темето и е во точка $T(-1,4)$, истата расте на интервалот $(-\infty,-1)$, а опаѓа на $(-1,\infty)$. Тогаш за најголемата вредност на множеството M, функцијата ќе ја разгледуваме како растечка функција на $M\cap(-\infty,-1)$, а потоа како опаднувачка на $M\cap(-1,\infty)$. На $M\cap(-\infty,-1)$, точка во која функцијата достигнува најголема вредност е $-\frac{\pi}{3}$, а на $M\cap(-1,\infty)$ точка во која функцијата достигнува најголема вредност е $-\frac{\pi}{4}$. Останува да се споредат уште $f\left(-\frac{\pi}{3}\right)=3+\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi^2}{4}$ и $f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=3+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi^2}{4}$. Бидејќи $f\left(-\frac{\pi}{3}\right)>f\left(-\frac{\pi}{4}\right)$, најголемата вредност на функцијата на множеството решенија на равенката се достигнува во $-\frac{\pi}{3}$ и изнесува $f\left(-\frac{\pi}{3}\right)=3+\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi^2}{4}$.

3. Во триаголникот ABC на страната AC е земена точка M, а на страната BC е земена точка N. Отсечките AN и BM се сечат во точката O. Површините на триаголниците AMO, ABO, BNO се еднакви на P_1, P_2, P_3 соодветно. Пресметај ја плоштината на триаголникот CMN.



Решение. Плоштината на триаголникот CMN ќе ја означиме со P а плоштината на триаголникот MON ќе ја означиме со Q.

Триаголниците AMO и MON имаат еднакви висини кон AO и ON, соодветно, и триаголниците AOB и NOB имаат еднакви висини кон AO и ON, соодветно, па затоа $\frac{P_1}{Q}=\frac{\overline{AO}}{\overline{ON}}=\frac{P_2}{P_3}$.

Од последното равенство добиваме $Q=\frac{P_1P_3}{P_2}$. Од парот триаголници CMN и BMN, и парот триаголници ANC и ANB, (секој пар има еднакви висини спуштени кон CN и NB, соодветно), добиваме: $\frac{P}{Q+P_3}=\frac{\overline{CN}}{\overline{NB}}=\frac{P_1+Q+P}{P_2+P_3}$.

Според тоа, $P(P_2-Q)=Q^2+QP_1+QP_2+P_1P_3$, т.е. $P=\frac{Q^2+QP_1+QP_2+P_1P_3}{P_2-Q}$, и ако во последното равенство замениме $Q=\frac{P_1P_3}{P_2}$, добиваме

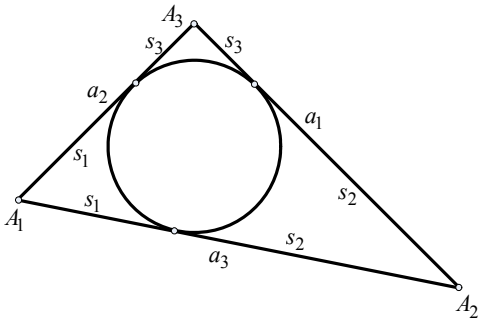
$$P=\frac{\left(\frac{P_1P_3}{P_2}\right)^2+\frac{P_1P_3}{P_2}P_1+\frac{P_1P_3}{P_2}P_3+P_1P_3}{P_2-\frac{P_1P_3}{P_2}}=\frac{P_1P_3(P_1+P_2)(P_2+P_3)}{P_2(P_2^2-P_1P_3)}.$$

4. На табла се запишани броевите $2,3,4,....,n+1$. Потоа се запишуваат производите на секои два од нив, па се запишуваат производите на секои три од нив и постапката продолжува дури не се запише производот на сите броеви $2,3,4,....,n+1$. Пресметај го збирот на реципрочните вредности на сите броеви запишани на таблата.

Решение. Да го разгледаме производот $\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$. Ако се извршат сите множења се добива бараниот збир на реципрочните вредности зголемен за 1. Според тоа бараниот збир е еднаков на

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n+1}\right)-1=\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{n+2}{n+1}-1=\frac{n+2}{2}-1=\frac{n}{2}.$$

IV година



1. Даден е триаголникот $A_1A_2A_3$, со страни $a_1=\overline{A_2A_3}$, $a_2=\overline{A_3A_1}$ и $a_3=\overline{A_1A_2}$. Нека s_1, s_2, s_3 се должините на тангентните отсечки на впишаната кружница во триаголникот, што почнуваат од A_1, A_2, A_3, соодветно.

Докажи дека $\frac{s_1}{a_1}+\frac{s_2}{a_2}+\frac{s_3}{a_3}\geq\frac{3}{2}$. Кога важи равенство?

Решение. Од условите на задачата имаме $s_1+s_2=a_3$, $s_2+s_3=a_1$ и $s_3+s_1=a_2$, па оттука

$$s_1=\frac{1}{2}\left(a_2+a_3-a_1\right),\ s_2=\frac{1}{2}\left(a_3+a_1-a_2\right)\ \text{и}\ s_3=\frac{1}{2}\left(a_1+a_2-a_3\right).$$

Затоа

$$\frac{s_1}{a_1}+\frac{s_2}{a_2}+\frac{s_3}{a_3}=\frac{1}{2}\left(\frac{a_2+a_3-a_1}{a_1}+\frac{a_3+a_1-a_2}{a_2}+\frac{a_1+a_2-a_3}{a_3}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_1}\right)+\left(\frac{a_2}{a_3}+\frac{a_3}{a_2}\right)+\left(\frac{a_1}{a_3}+\frac{a_3}{a_1}\right)-3\right)\geq\frac{1}{2}(2+2+2-3)=\frac{3}{2}$$

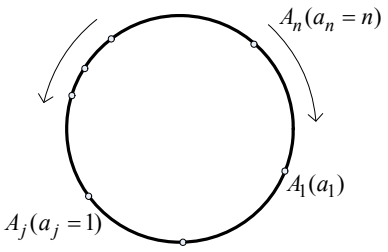
Неравенството следува од познатото неравенство $x+\frac{1}{x}\geq 2$, за секој $x>0$.

Равенство важи ако и само ако $x=1$, т.е. $\frac{a_1}{a_2}=1, \frac{a_2}{a_3}=1, \frac{a_1}{a_3}=1$. Значи, $a_1=a_2=a_3$, па триаголникот е рамностран. Ако триаголникот е рамностран, јасно е дека важи равенство.

2. Некои членови од аритметичките прогресии $a_n=4n+13$ и $b_n=5n+11$, $n\in\mathbb{N}$, се еднакви. Докажи дека збирот на првите p еднакви членови е еднаков на $p(10p+11)$.

Решение. Од условот $a_n=b_m$ добиваме $4n+13=5m+11$, т.е. $n=m+\frac{m-2}{4}$. Бидејќи n е природен број следува дека $k=\frac{m-2}{4}\in\mathbb{N}$. Значи, $m=4k+2$, па општиот член на заедничкиот дел од низите е $x_k=20k+21$, $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$. Притоа $x_k-x_{k-1}=20$. Значи (x_k) е аритметичка прогресија со прв член 21 и разлика 20. Првите p членови се добиваат за $k=0,1,2,\ldots,p-1$. За бараниот збир добиваме

$$S_p=\frac{p}{2}\left(42+(p-1)\cdot 20\right)=\frac{p}{2}(20p+22)=p(10p+11).$$



3. Дадени се n точки на кружница. Броевите $1,2,\ldots,n$ се запишани во произволен распоред покрај дадените точки (по еден број покрај секоја точка). За секој пар соседни точки е определена апсолутната вредност на разликата на броевите запишани покрај точките. Докажи дека збирот на овие апсолутни вредности е поголем или еднаков на $2(n-1)$.

Решение. Точките на кружницата ги означуваме по ред со $A_i, (1 \le i \le n)$ движејќи се во позитивна насока така што со A_n ќе биде означена точката покрај која е запишан бројот n. Нека со A_j е означена точката покрај која е запишан бројот 1. Движејќи се од A_n кон A_j, првиот пат во позитивна а вториот пат во негативна насока, добиваме

$$|a_n - a_{n-1}| + |a_{n-1} - a_{n-2}| + ... + |a_{j+1} - a_j| \ge (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + ... + (a_{j+1} - a_j) = a_n - a_j = n - 1 \quad (1)$$

$$|a_n - a_1| + |a_1 - a_2| + ... + |a_{j-1} - a_j| \ge (a_n - a_1) + (a_1 - a_2) + ... + (a_{j-1} - a_j) = a_n - a_j = n - 1 \quad (2)$$

Со собирање на (1) и (2) добиваме

$$|a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + ... + |a_{n-1} - a_n| + |a_n - a_1| \ge 2(n-1),$$

што требаше да се докаже.

4. Докажи дека постојат бесконечно многу подредени двојки од цели броеви (x, y) кои се решенија на равенката $(x-1)^x = x(1-y) - 1$.

Решение. Равенката ја доведуваме во обликот $(x-1)^x + xy - (x-1) = 0$ (1).
Нека p е произволен прост број. Бидејќи $(p, p-1) = 1$, користејќи ја малата теорема на Ферма се добива $(p-1)^p \equiv (p-1) \pmod p$. Значи, за произволен прост број p, постои природен број k_p така што $(p-1)^p = k_p p + (p-1)$ (2). За $x = p$ и користејќи го (2), равенката (1) се сведува на $k_p p + (p-1) + py - (p-1) = 0$, односно се добива $p(k_p + y) = 0$ (3). Од $p \ne 0$ следува $k_p + y = 0$, односно $y = -k_p$. Значи секој подреден пар $(p, -k_p)$, каде p е прост број, а k_p се добива со горенаведената конструкција е решение на равенката (1). Од бесконечноста на множеството на прости броеви следува дека постојат бесконечно парови што ја задоволуваат равенката.

МАЛКУ ОДМОР

L-ти Републички натпревар по математика за учениците од средното образование
Свети Николе, 17.III-2007 година

I година

1. Цената на еден билет е 50 денари. Кога цената е снижена, бројот на посетителите е зголемен за 50%, а заработувачката за 20%. За колку е снижена цената на влезниот билет?

Решение А. Две лица, по старата цена би платиле 100 денари, а три лица (50% повеќе), по новата цена би платиле 120 денари (20% повеќе од 100 денари). Значи, едно лице, по новата цена, би платило 40 денари, од каде што следува дека снижувањето е 20% (од 50 денари на 40 денари).

Решение Б. Нека бројот на посетители е p, заработувачката z, а новата цена на еден билет x. Тогаш, $50p=z$ и $x\cdot\frac{150}{100}p=\frac{120}{100}z$. Ако ги поделиме последните две равенства, добиваме $\frac{50p}{x\cdot 1{,}5p}=\frac{z}{1{,}2z}$, од каде се добива дека $x=40$. Значи, снижувањето е 20%.

Решение В. Нека бројот на посетители е x, тогаш заработувачката е $50x$. Ако новата цена на билетот е y, тогаш бројот на посетителите е $1{,}5x$ (за 50% повеќе), а заработувачката $60x$ (за 20% повеќе од $50x$). Тогаш, $1{,}5x\cdot y=60x$, од каде што $y=40$. Следствено, снижувањето е 20%.

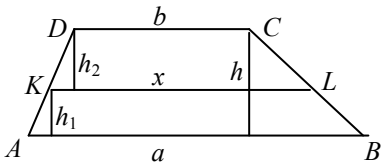
2. Природните броеви од 1 до $\boldsymbol{n}$ се поделени на две множества. Едното множество содржи два од дадените броеви, а второто множество ги содржи останатите $\boldsymbol{n-2}$ броеви. Производот на двата броја од првото множество е еднаков на збирот од сите броеви од второто множество. Дали може оваа поделба да се направи за: а) $\boldsymbol{n=10}$, б) $\boldsymbol{n=15}$?

Решение. а) Нека x и y се броевите од првото множество, при што $1\le x<y\le 10$. Тогаш, од условот имаме $1+2+...+10-x-y=xy$, од каде $xy+x+y=55$, со додавање на 1 од двете страни се добива $xy+x+y+1=56$, од каде $(x+1)(y+1)=56$. Ако $x+1=7$ и $y+1=8$, односно ако $x=6$ и $y=7$, можна е поделбата на две такви множества за $n=10$. Имено, важи $1+2+3+4+5+8+9+10=6\cdot 7$.

б) Нека x и y се броевите од првото множество, при што $1\le x<y\le 15$. Тогаш, од условот имаме $1+2+...+15-x-y=xy$, од каде $xy+x+y=120$, па слично како претходно се добива $(x+1)(y+1)=121$. Како $x<y$ можни се следните случаи $x+1=1$, $y+1=121$ или $x+1=11$, $y+1=11$. Во првиот случај се добива $x=0$, $y=120$, што не е можно затоа што $x\ge 1$ и $y\le 15$. Во вториот случај се добива $x=y=10$, што пак не е можно затоа што треба $x\ne y$. Значи, за $n=15$ не е можна поделбата.

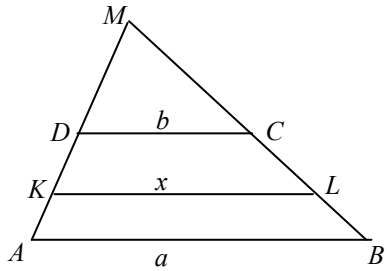
3. Даден е трапезот $\boldsymbol{ABCD}$ со основи $\overline{\boldsymbol{AB}}=\boldsymbol{a}$ и $\overline{\boldsymbol{CD}}=\boldsymbol{b}$. Најди ја должината на отсечката за која се исполнети условите

- паралелна е со $\boldsymbol{AB}$ и $\boldsymbol{CD}$
-
- нејзините крајни точки лежат на краците на трапезот.



Решение А. Нека правата $p\|AB\|CD$ ги сече краците AD и BC во точките K и L соодветно и го преполовува трапезот $ABCD$ на два енаквоплоштни дела. Нека P е плоштината на трапезот $ABCD$, а h е неговата висина, нека P_1 е плоштината на трапезот $ABLK$ со висина h_1, а P_2 плоштината на трапезот $KLCD$ со висина h_2. Нека $\overline{KL}=x$.(види цртеж) Тогаш, важи $h=h_1+h_2$ и $P_1=P_2=\frac{1}{2}P$. Од $P=\frac{a+b}{2}\cdot h$, $P_1=\frac{a+x}{2}\cdot h_1$ и $P_2=\frac{x+b}{2}\cdot h_2$,

имаме дека $h=\frac{2P}{a+b}$, $h_1=\frac{2P_1}{a+x}=\frac{P}{a+x}$ и $h_2=\frac{2P_2}{x+b}=\frac{P}{x+b}$. Со замена во $h=h_1+h_2$, добиваме $\frac{2P}{a+b}=\frac{P}{a+x}+\frac{P}{x+b}$, т.е. $\frac{2}{a+b}=\frac{1}{a+x}+\frac{1}{x+b}$, односно $2(a+x)(x+b)=(a+b)(x+b)+(a+b)(a+x)$.Со средување на последното равенство се добива $2x^2=a^2+b^2$, од каде $x=\sqrt{\frac{1}{2}(a^2+b^2)}=\sqrt{(\frac{a}{\sqrt{2}})^2+(\frac{b}{\sqrt{2}})^2}$.



Решение Б. Нека правата $p\|AB\|CD$ ги сече краците AD и BC во точките K и L соодветно и го преполовува трапезот $ABCD$ на два енаквоплоштни дела. Нека $\overline{KL}=x$. Ги продолжуваме краците AD и BC до нивниот пресек M.(види цртеж) Тогаш, триаголниците ΔABM, ΔKLM и ΔDCM се слични, па следи дека $P_{ABM}:P_{KLM}:P_{DCM}=a^2:x^2:b^2$, односно $P_{ABM}=ka^2$, $P_{KLM}=kx^2$ и $P_{DCM}=kb^2$. Од условот $P_{ABLK}=P_{KLCD}$ добиваме

$P_{ABM}-P_{KLM}=P_{KLM}-P_{DCM}$, т.е $ka^2-kx^2=kx^2-kb^2$, од каде се добива $x^2=\frac{1}{2}(a^2+b^2)$, па $x=\sqrt{(\frac{a}{\sqrt{2}})^2+(\frac{b}{\sqrt{2}})^2}$.

4. Докажи дека за секои позитивни реални броеви a, b и c важи неравенството $\left|\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}\right|<1$.

Решение.Од равенството $c-a=(c-b)+(b-a)$ добиваме

$$\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}=\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-b}{c+a}+\frac{b-a}{c+a}=(a-b)\left(\frac{1}{a+b}-\frac{1}{c+a}\right)+(b-c)\left(\frac{1}{b+c}-\frac{1}{c+a}\right)=$$
$$=\frac{(a-b)(c-b)}{(a+b)(c+a)}+\frac{(b-c)(a-b)}{(b+c)(c+a)}=\frac{(a-b)(b-c)}{c+a}\left(\frac{1}{b+c}-\frac{1}{a+b}\right)=\frac{(a-b)(b-c)(a-c)}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

Од неравенствата $|a-b|<a+b$, $|b-c|<b+c$ и $|c-a|<c+a$ се добива бараното неравенство, односно

$$\left|\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}\right|=\left|\frac{(a-b)(b-c)(a-c)}{(a+b)(b+c)(c+a)}\right|=\frac{|a-b||b-c||a-c|}{(a+b)(b+c)(c+a)}<\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}=1.$$

II година

1. Ако за реалните коефициенти a,b,c, $a\neq 0$, на квадратната равенка $ax^2+bx+c=0$ важи $\frac{b+c}{a}\leq -1$, докажи дека равенката има реални решенија.

Решение. Ако $\frac{b+c}{a}\leq -1$ го помножиме со a^2, добиваме $ab+ac\leq -a^2$, односно $ac\leq -a^2-ab$. Тогаш $b^2-4ac\geq b^2+4a^2+4ab=(b+2a)^2\geq 0$, а оттука следува дека дадената равенка има реални решенија

2. Даден е рамнокрак триаголник ABC, $\overline{AB}=\overline{AC}$. Симетралата на аголот ABC ја сече страната AC во точка D. Ако важи $\overline{BC}=\overline{AB}+2\overline{AD}$, пресметај ја големината на аглите на триаголникот.

Решение. Нека $\overline{BC}=a$, $\overline{AB}=\overline{AC}=b$ и $\overline{AD}=p$. Од условите во задачата го добиваме системот $\begin{cases} a=b+2p \\ \frac{a}{b}=\frac{b-p}{p} \end{cases}$ (втората равенка важи бидејќи AD е симетрала на аголот ABC). Тогаш $b+2p=\frac{b(b-p)}{p}$, $b^2-2bp=2p^2$, односно $(b-p)^2=3p^2$. Значи, $b=p\left(1+\sqrt{3}\right)$ и

$a=p(3+\sqrt{3})$. Бидејќи $\cos(\angle ABC)=\frac{a}{2b}=\frac{3+\sqrt{3}}{2(1+\sqrt{3})}=\frac{(3+\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)}{2(3-1)}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, следува $\angle ABC=\angle ACB=30^\circ$ и $\angle CAB=120^\circ$.

3. Најди ги сите природни броеви за кои важи $\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}-1\right)^2=49+20\sqrt[3]{6}$.

Решение. Ќе ја воведеме смената $\sqrt[3]{a}=x\sqrt[3]{6},\sqrt[3]{b}=y\sqrt[3]{36}$.
Тогаш

$$\left(x\sqrt[3]{6}+y\sqrt[3]{36}-1\right)^2=x^2\sqrt[3]{36}+6y^2\sqrt[3]{6}+1+12xy-2x\sqrt[3]{6}-2y\sqrt[3]{36}=(x^2-2y)\sqrt[3]{36}+(6y^2-2x)\sqrt[3]{6}+12xy+1.$$

Од $(x^2-2y)\sqrt[3]{36}+(6y^2-2x)\sqrt[3]{6}+12xy+1=49+20\sqrt[3]{6}$ го добиваме системот $\begin{cases}x^2-2y=0\\6y^2-2x=20\\12xy+1=49\end{cases}$ чиешто решение е $x=y=2$. Значи, $a=48,b=288$, а заради симетричност, решение е и $a=288$, $b=48$.

4. Од сите точки P кои лежат на страните AB,BC или CA на правоаголниот триаголник ABC ($\angle C=90^\circ$) најди ја онаа за која збирот $\overline{AP}+\overline{BP}+\overline{CP}$ е најмал.

Решение. Ако точката P е на катетата BC тогаш $\overline{BP}+\overline{CP}=a$. Тогаш $\overline{AP}+a$ е најмал ако $\overline{AP}=b$. Слично, ако P е на катетата AC збирот има најмала вредност кога е еднаков на збирот на катетите $a+b$. Нека P е на хипотенузата AC. Тогаш $\overline{BP}+\overline{AP}=c$, а $\overline{CP}+c$ има најмала вредност ако $\overline{CP}=h_c$. Останува да ги споредиме збировите $a+b$ и $c+h_c$. Од $c^2=a^2+b^2$ и следува $c^2+h_c^2>a^2+b^2$. Бидејќи $ch_c=ab$, добиваме $c^2+2ch_c+h_c^2>a^2+2ab+b^2$, $(c+h_c)^2>(a+b)^2$ и затоа $a+b<c+h_c$. Значи, најмалата вредност на збирот $\overline{AP}+\overline{BP}+\overline{CP}$ е $a+b$, а тогаш $P\equiv C$.

III година

1. Докажи дека секое решение на неравенката $\log_3(2x-3)+\log_5(4x^2-9)>2$ го задоволува и неравенството

$$\log_5(4x^2-9)\cdot\log_5(100x^2-225)>2\log_3(2x-3)-\log_3{}^2(2x-3).$$

Решение. Второто неравенство го трансформираме до облик

$$\log_5(4x^2-9)\cdot\log_5(25(4x^2-9))>2\log_3(2x-3)-\log_3{}^2(2x-3)$$
$$\Leftrightarrow\ \log_5(4x^2-9)\cdot(2+\log_5(4x^2-9))>2\log_3(2x-3)-\log_3{}^2(2x-3).$$

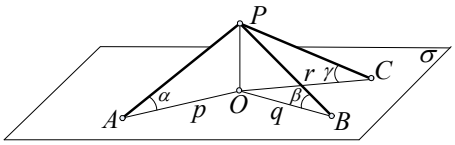
За дефиниционата област на функциите, во двете неравенства треба да важи

$$\begin{cases}2x-3>0\\4x^2-9>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-3>0\\2x+3>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>\frac{3}{2}\\x>-\frac{3}{2}\end{cases},\text{ односно } x\in\left(\frac{3}{2},+\infty\right).$$

Нека $x_0\in\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$ е решение на првото неравенство. Нека $u(x)=\log_3(2x-3)$ и $v(x)=\log_5(4x^2-9)$. Од првото неравенство, за x_0 важи $u(x_0)+v(x_0)>2$ Со воведените ознаки, второто неравенство станува $v(x)\cdot(2+v(x))>2u(x)-u^2(x)$, односно $v(x)\cdot(2+v(x))-2u(x)+u^2(x)>0$.

Добиениот израз $2v(x)+v^2(x)-2u(x)+u^2(x)>0$ го дополнуваме до обликот $2v(x)+2u(x)+v^2(x)-4u(x)+u^2(x)+4-4>0$, кој по групирањето станува $v^2(x)+(u(x)-2)^2+2(u(x)+v(x)-2)>0$. Останува само да провериме дали добиеното неравенство **(2)**, кое е еквивалентно со второто неравенство, е точно за x_0. Со оглед на тоа дека секогаш важи $v^2(x_0)\geq 0,(u(x_0)-2)^2\geq 0$, а од **(1)** имаме и $u(x_0)+v(x_0)>2$, ако ги собереме последните три неравенства го добиваме неравенството **(2)** во x_0. Значи x_0 го задоволува второто неравенство.

2. Дадена е точка P која не лежи на рамнината σ. Низ точката P се повлечени прави a,b и c кои ја сечат рамнината σ во точките A,B,C, и со неа зафаќаат агли α,β и γ, соодветно, чиј збир е еднаков на $90°$. Проекциите на отсечките PA,PB и PC врз рамнината σ имаат должини еднакви на p,q и r, соодветно. Определи го растојанието од точката P до рамнината σ.



Решение. Нека O е проекција на точката P врз рамнината σ. Според претпоставките од задачата $\sphericalangle PAO=\alpha$, $\sphericalangle PBO=\beta$ и $\sphericalangle PCO=\gamma$. Триаголниците AOP, BOP COP се правоаголни, па затоа $\frac{\overline{OP}}{\overline{OA}}=\mathrm{tg}\alpha$, $\frac{\overline{OP}}{\overline{OB}}=\mathrm{tg}\beta$ и $\frac{\overline{OP}}{\overline{OC}}=\mathrm{tg}\gamma$

Бидејќи $\overline{OA}=p, \overline{OB}=q$ и $\overline{OC}=r$, и ако $\overline{OP}=H$, тогаш

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{H}{p},\ \mathrm{tg}\beta=\frac{H}{q},\ \mathrm{tg}\gamma=\frac{H}{r}. \tag{1}$$

Од условот на задачата $\alpha+\beta+\gamma=90°$, добиваме $\gamma=90°-\alpha-\beta$, па според тоа

$$\mathrm{tg}\gamma=\mathrm{tg}(90°-\alpha-\beta)=\mathrm{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{1-\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta}{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta} \tag{2}$$

Сега, од (1) и (2) добиваме дека $\frac{H}{r}=\frac{1-\frac{H}{p}\frac{H}{q}}{\frac{H}{p}+\frac{H}{q}}$, $\frac{H^2}{r}=\frac{pq-H^2}{p+q}$, $H^2(p+q)=pqr-H^2r$, $H=\sqrt{\frac{pqr}{p+q+r}}$

3. Ако a,b,c се должини на страните на произволен триаголник, тогаш важи

$$a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2+4abc>a^3+b^3+c^3.$$

Докажи!

Решение. Разликата на левата и десната страна на неравенството $a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2+4abc-a^3-b^3-c^3$, може да се запише во облик $a(b^2+c^2-a^2)+b(c^2+a^2-b^2)+c(a^2+b^2-c^2)-2abc$.

Ако ги означиме аглите во триаголникот со α,β,γ, од косинусната теорема важат следниве три равенства: $2bc\cos\alpha=b^2+c^2-a^2$, $2ca\cos\beta=c^2+a^2-b^2$ и $2ab\cos\gamma=a^2+b^2-c^2$. Ги заменуваме во **(2)** и добиваме израз

$$2abc\cdot\cos\alpha+2abc\cdot\cos\beta+2abc\cdot\cos\gamma-2abc=2abc(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma-1).$$

За аглите во триаголникот важи $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, па користејќи познати тригонометриски трансформации добиваме

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma-1=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-2\sin^2\frac{\gamma}{2}=$$

$$2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}\right)\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-2\sin^2\frac{\gamma}{2}=2\sin\frac{\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-2\sin^2\frac{\gamma}{2}=$$

$$=2\sin\frac{\gamma}{2}\cdot\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\sin\frac{\gamma}{2}\right)=2\sin\frac{\gamma}{2}\cdot\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha+\beta}{2})\right)=$$

$$=2\sin\frac{\gamma}{2}\cdot\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=2\sin\frac{\gamma}{2}\cdot(-2)\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin(-\frac{\beta}{2})=4\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}>0$$ (Јасно,

$0^0<\alpha,\beta,\gamma<180^0$ од каде $0^0<\frac{\alpha}{2},\frac{\beta}{2},\frac{\gamma}{2}<90^0$, односно $\sin\frac{\alpha}{2},\sin\frac{\beta}{2},\sin\frac{\gamma}{2}>0$.)

Значи $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma-1>0$, односно $2abc(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma-1)>0$. Тогаш во **(2)** важи

$$a(b^2+c^2-a^2)+b(c^2+a^2-b^2)+c(a^2+b^2-c^2)-2abc>0$$

па и изразот **(1)** станува

$$a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2+4abc-a^3-b^3-c^3>0.$$

Со тоа неравенството е докажано.

4. На страната BC на правоаголникот $ABCD$ ($\overline{AB}>\overline{BC}$) избрана е точка K таква што $\overline{BK}=4\overline{KC}$, а на страната CD избрана е точка M таква што $\overline{CM}=4\overline{MD}$. Пресметај го односот $\overline{AB}:\overline{BC}$ кога аголот $\angle KAM$ прима најголема можна вредност.

Решение: Нека точките K и M се такви да $\overline{BK}=4\overline{KC}$ и $\overline{CM}=4\overline{MD}$. Нека $\angle BAK=\alpha, \angle MAD=\beta$ и $\angle KAM$ прима најголема можна вредност. Да го означиме односот кој го бараме со $\overline{AB}:\overline{BC}=x$ ($x>0$). Јасно $\alpha+\beta$ прима најмала вредност, односно $tg(\alpha+\beta)$ е најмал ($\alpha+\beta<90^0$, па $tg(\alpha+\beta)>0$). Имаме $tg\alpha=\frac{\overline{BK}}{\overline{AB}}=\frac{\frac{4}{5}\overline{BC}}{\overline{AB}}=\frac{4}{5}\frac{1}{x}$ и $tg\beta=\frac{\overline{MD}}{\overline{AD}}=\frac{\frac{1}{5}\overline{AB}}{\overline{BC}}=\frac{1}{5}x$.

Сега имаме

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\cdot tg\beta}=\frac{\frac{4}{5x}+\frac{x}{5}}{1-\frac{4}{5x}\frac{x}{5}}=\frac{\frac{4}{5x}+\frac{x}{5}}{\frac{21}{25}}=\frac{25}{21}\cdot\left(\frac{4}{5x}+\frac{x}{5}\right).$$

Овде може да се примени неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина, од каде добиваме

$$tg(\alpha+\beta)\geq\frac{25}{21}\cdot 2\cdot\sqrt{\frac{4}{5x}\cdot\frac{x}{5}}=\frac{50}{21}\cdot\frac{2}{5}=\frac{20}{21}.$$

Најмалата вредност за $tg(\alpha+\beta)$ е $tg(\alpha+\beta)=\frac{20}{21}$, а се достигнува кога $\frac{4}{5x}=\frac{x}{5}$, односно за $x^2=4$. Добивме $x=2$, од каде бараниот однос е $\overline{AB}:\overline{BC}=2:1$ и во овој случај аголот $\angle KAM$ е најголем.

IV година

1. Природните броеви k и n се поголеми од 1. Во една група од kn луѓе, секој член на групата се познава со повеќе од $(k-1)n$ од преостанатите луѓе од групата. Дали постојат $k+1$ луѓе од групата кои попарно се познаваат меѓу себе? (Да се докаже за било кои k и n кои ги поседуваат дадените својства).

Решение. Тврдењето ќе го докажеме со принципот на математичка индукција. За $k=2$ групата на луѓе има $2n$ членови. Било кој човек од групата се познава со повеќе од $(2-1)n=n>1$ членови на групата, па според тоа, постојат барем двајца кои се познаваат меѓу себе. Секој од нив се познава со повеќе од n членови на групата. Нека множеството на луѓе со кои се познава едниот го означиме со A а множеството луѓе со кои се познава другиот го означиме со B. Според тоа $|A|>n$ и $|B|>n$. Користејќи ја формулата $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$, добиваме

$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|>n+n-|A\cap B|=2n-|A\cap B|.$$

Ако $|A\cap B|=0$, тогаш $|A\cup B|>2n$, што не е можно. Значи, $|A\cap B|>0$, односно $A\cap B\neq\varnothing$. Значи, постои барем

еден член на групата кој припаѓа на множеството A и кој припаѓа на множеството B. Значи, тој се познава и со едниот и со другиот избран член на групата кои што ги избравме. Бидејќи двата члена на групата ги избравме да се познаваат, добиваме дека тројцата се познаваат меѓу себе. Според тоа тврдењето е точно за $k=2$.

Нека тврдењето е точно за $k=m$, односно во група во која има mn луѓе во која сечкој човек од групата се познава со повеќе од $(m-1)n$, постојат барем $m+1$ од нив кои попарно се познаваат меѓу себе.

За $k=m+1$, нека имаме група од $(m+1)n$ луѓе, во која секој од нив се познава со повеќе од mn луѓе од групата. Ќе избереме еден член на групата, кој според претпоставката се познава со повеќе од mn членови на групата. Значи, можеме да избереме точно mn членови од групата со кои тој се познава. Од новата група составена од mn членови секој од нив се познава со повеќе од $(m-1)n$ од нив **(од почетната група се отстранети најмногу $n-1$ член со кои тој се познава, па според тоа тој се познава со не помалку од $mn-(n-1)$ член од избраната груп;а. Или од групата од mn членови кои се избрани, секој од нив се познава со повеќе од mn членив од почетната група од $(m+1)n$ луѓе. Бидејќи се отстранети n членови од почетната група, тој се познава со повеќе од**

$mn-n$ **членови од избраната група)**. Значи, во избраната група од mn членови на групата, секој од нив се познава со повеќе од $(m-1)n$ од нив. Според индуктивната претпоставка, постојат $m+1$ луѓе од избраната група од mn луѓе кои попарно се познаваат. Тие заедно со на почеток избраниот човек, формираат група од $m+2$ луѓе во која секои двајца се познаваат.

Според принципот на математичка индукција, тврдењето е точно, односно во група од kn луѓе во која секој познава повеќе од $(k-1)n$ од преостанатите, постојат $k+1$ член од групата така што било кои два од нив попарно се познаваат.

2. Даден е триаголникот ABC со внатрешни агли α,β и γ кои образуваат геометриска прогресија со количник 2. Притоа аголот α е најмал. Докажи дека $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a}$, каде што a,b и c се должините на страните на триаголникот, кои лежат спроти алите α,β,γ, соодветно.

Решение. Бидејќи аглите образуваат геометриска прогресија со количник 2 и α е најмалиот агол имаме $\beta=2\alpha,\gamma=4\alpha$, од каде што следува дека $\alpha=\frac{\pi}{7}$. Од синусната теорема важи $a=2R\sin\alpha;b=2R\sin\beta$ и $c=2R\sin\gamma$. Тогаш

$$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2R}\left(\frac{1}{\sin 2\alpha}+\frac{1}{\sin 4\alpha}\right)=\frac{1}{2R}\cdot\frac{\sin 4\alpha+\sin 2\alpha}{\sin 2\alpha\cdot\sin 4\alpha}=\frac{1}{2R}\cdot\frac{2\sin 3\alpha\cdot\cos\alpha}{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\sin 4\alpha}=\frac{1}{2R}\cdot\frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha\cdot\sin 4\alpha}.$$

Од $3\alpha+4\alpha=7\alpha=\pi$, следува дека $3\alpha=\pi-4\alpha$, па затоа $\sin 3\alpha=\sin(\pi-4\alpha)=\sin 4\alpha$.

Конечно, $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2R}\cdot\frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha\cdot\sin 4\alpha}=\frac{1}{2R\sin\alpha}=\frac{1}{a}$.

3. Низата од реални броеви (a_n) е зададена со $a_1=5;a_2=19$ и за $n\geq 3$, $a_n=5a_{n-1}-6a_{n-2}$. Најди го a_{2007}.

Решение. Со принципот на математичка индукција, ќе докажеме дека $a_n=3^{n+1}-2^{n+1}, n\geq 1$.

Имено, $a_1=3^2-2^2$; $a_2=3^3-2^3$. Нека за $k\leq n-1$ важи $a_k=3^{k+1}-2^{k+1}$. Тогаш

$$a_n=5a_{n-1}-6a_{n-2}=(3+2)(3^n-2^n)-3\cdot 2(3^{n-1}-2^{n-1})=3^{n+1}+2\cdot 3^n-3\cdot 2^n-2^{n+1}-2\cdot 3^n+3\cdot 2^n=3^{n+1}-2^{n+1}.$$

Оттука следува дека $a_{2007}=3^{2008}-2^{2008}$.

4. Најди ги сите функции $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ така што за $m,n\in\mathbb{N}$ и $m>n$ важи $f(f(m+n)+f(m-n))=8m$.

Решение. Ако ставиме $k=m+n,l=m-n$ добиваме $f(f(k)+f(l))=4(k+l)$. Ќе докажеме дека f е инјекција. Нека $f(k)=f(l)$. Тогаш $4(k+l)=f(f(k)+f(l))=f(f(k)+f(k))=8k$, па $k=l$.

Од друга страна, $f(f(k)+f(k))=4\cdot 2k=4((k-1)+(k+1))=f(f(k-1)+f(k+1))$.

Бидејќи f е инјекција, следува дека $f(k)+f(k)=f(k+1)+f(k-1)$, односно $f(k+1)=2f(k)-f(k-1)$. За $k=2$, $f(3)=2f(2)-f(1)=2(f(2)-f(1))+f(1)$, за $k=3$, $f(4)=2f(3)-f(2)=3(f(2)-f(1))+f(1)$.

Со индукција се докажува дека $f(n)=(n-1)(f(2)-f(1))+f(1)$ односно $f(n)=n(f(2)-f(1))+2f(1)-f(2)$.

Значи, $f(n)=an+b$, каде што $a,b\in\mathbb{Z}$ ($a=f(2)-f(1), b=2f(1)-f(2)$.

Последниов израз го заменуваме во почетниот и добиваме:

$$f(a(m+n)+b+a(m-n)+b)=8m \Leftrightarrow f(2am+2b)=8m \Leftrightarrow a(2am+2b)+b=8m \Leftrightarrow$$
$$2a^2m+2ab+b=8m.$$

Бидејќи последното равенство важи за секој $m\in\mathbb{N}$, добиваме дека $a^2=4, b(2a+1)=0$, односно $a=\pm 2, b=0$.

За $a=-2$, се добива $f(n)=-2n$, но тоа не е пресликување од $\mathbb{N}$ во $\mathbb{N}$. Затоа, $f(n)=2n$ е единствено решение на дадената равенка.

XXXI Републички натпревар 2008

I година

1. Колку делители на бројот 30^{2008} не се делители на бројот 20^{2007}?

Решение. Бидејќи $30^{2008} = 2^{2008} \cdot 3^{2008} \cdot 5^{2008}$ и $20^{2007} = 2^{4014} \cdot 5^{2007}$, тогаш сите делители на 30^{2008} кои не се делители на 20^{2007} се од облик

1) $2^k \cdot 3^l \cdot 5^m$, $l = 1,2,...,2008$, $k,m = 0,1,2,...,2008$ и нив ги има вкупно $2008 \cdot 2009^2$,

или од облик

2) $2^k \cdot 5^m$, $m = 2008$, $k = 0,1,2,...,2008$ и нив ги има $1 \cdot 2009 = 2009$.

Значи, има вкупно $2008 \cdot 2009^2 + 2009$ делители на бројот 30^{2008} не се делители на бројот 20^{2007}.

2. Нека за реалните броеви x, y, z и a важат равенствата $x + y + z = a$ и

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{a}. \qquad (1)$$

Докажи дека барем еден од броевите x, y, z е еднаков на a.

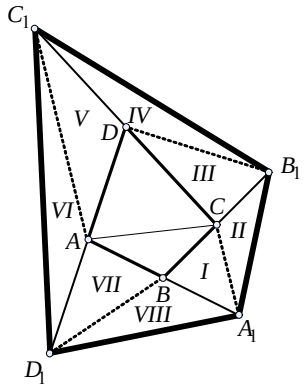
Решение. Заради равенството (1), броевите x, y, z и a се ненулти. Според тоа $x + y + z \neq 0$, и заради равенството $x + y + z = a$ добиваме

$$\frac{1}{x+y+z} = \frac{1}{a}. \qquad (2)$$

Од (1) и (2) го добиваме равенството $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{x+y+z}$,

$$(xy + yz + zx)(x + y + z) = xyz,$$
$$x^2y + xy^2 + xyz + xyz + y^2z + yz^2 + zx^2 + xyz + z^2x = xyz,$$
$$x^2(y + z) + +yz(y + z) + xy(y + z) + xz(y + z) = 0,$$
$$(y + z)(x^2 + xy + +yz + zx) = 0,$$
$$(y + z)[x(x + y) + z(x + y)] = 0,$$
$$(x + y)(y + z)(z + x) = 0. \qquad (3)$$

Од равенството $x + y + z = a$ добиваме дека $x + y = a - z$, $y + z = a - x$, $z + x = a - y$, и ако замениме во (3) добиваме $(a - z)(a - x)(a - y) = 0$. Според последното равенство, барем еден од броевите $a - x, a - y, a - z$ е еднаков на нула. Значи, $x = a$ или $y = a$ или $z = a$.



3. Даден е конвексен четириаголник ABCD со плоштина P. Ја продолжуваме страната AB преку B до A_1, т.ш. $\overline{AB} = \overline{BA_1}$, потоа BC преку C до B_1, т.ш. $\overline{BC} = \overline{CB_1}$, па CD преку D до C_1, т.ш. $\overline{CD} = \overline{DC_1}$ и DA преку A до D_1, т.ш. $\overline{DA} = \overline{AD_1}$. Колкава е плоштината на четириаголникот $A_1B_1C_1D_1$?

Решение: Ги спојуваме A со C_1, B со D_1, C со A_1, D со B_1. Тогаш,

$$P_{\triangle ABC} = P_I = P_{II}$$
$$P_{\triangle BCD} = P_{III} = P_{IV}$$
$$P_{\triangle CDA} = P_V = P_{VI}$$
$$P_{\triangle DAB} = P_{VII} = P_{VIII}$$

каде што

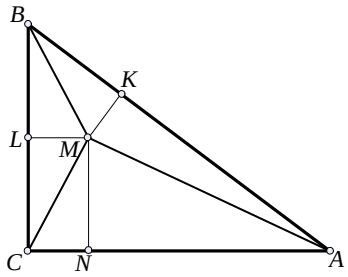
$P_I = P_{\triangle BA_1C}, P_{II} = P_{\triangle CA_1B_1}, P_{III} = P_{\triangle DCB_1}, P_{IV} = P_{\triangle C_1DB_1}$,

$P_V = P_{\triangle C_1DA}, P_{VI} = P_{\triangle C_1D_1A}, P_{VII} = P_{\triangle AD_1B}, P_{VIII} = P_{\triangle BD_1A_1}$

Имаме:

$P_{\triangle ABC} + P_{\triangle BCD} + P_{\triangle CDA} + P_{\triangle DAB} = P_I + P_{III} + P_V + P_{VII} = P_{II} + P_{IV} + P_{VI} + P_{VIII} = 2P$

$P_1 = P + (P_I + P_{II} + P_{III} + P_{IV} + P_V + P_{VI} + P_{VII} + P_{VIII}) = P + (2P + 2P) = 5P$



4. Страните на еден триаголник имаат должини $a = 3$, $b = 4$ и $c = 5$. Дали постои точка во внатрешноста на триаголникот која е на растојание помало од 1 од секоја од страните на триаголникот.

Решение. Нека ABC е триаголник во кој $\overline{BC} = a = 3$, $\overline{AC} = b = 4$ и $\overline{AB} = c = 5$ се должините на страните. Заради равенството

$$a^2 + b^2 = 3^2 + 4^2 = 5^2 = c^2,$$

според обратната теорема на Питагора триаголникот е правоаголен.

Нека M е точка од внатрешноста на траиголникот која е на растојание помало од 1 од секоја страна на триаголникот ABC. Нека точките K, L и N се подножја на нормалите повлечени од точката M кон страните AB, BC и CA соодветно (види цртеж). Тогаш отсечките MK, ML и MN се висини во триаголниците AMB, BMC и CMA соодветно. При тоа

$$P_{ABC} = P_{AMB} + P_{BMC} + P_{CMA}. \qquad (1)$$

Ако $\overline{MK} = x, \overline{ML} = y$ и $\overline{MN} = z$, тогаш според претпоставката на задачата $x, y, z < 1$.

Од друга страна $P_{BMC} + P_{CMA} + P_{AMB} = \frac{xa}{2} + \frac{yb}{2} + \frac{zc}{2} < \frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{c}{2} = \frac{3}{2} + \frac{4}{2} + \frac{5}{2} = \frac{12}{2} = 6 = P_{ABC}$,

што е во спротивност со (1). Значи, таква точка M не постои.

II година

1. Нека a и b се природни броеви. Покажи дека ако $a + \frac{b}{a} - \frac{1}{b}$ е цел број, тогаш тој е точен квадрат.

Решение. Нека $a, b \in N$ и $a + \frac{b}{a} - \frac{1}{b} = k \in Z$. Од последното равенство следи дека $a^2b + b^2 - a = kab$,(1) од каде следи дека $b \mid a$. Нека $a = bq$, $q > 0$, $q \in Z$. Со замена во (1) добиваме $b^3q^2 + b^2 - bq = kb^2q$, а по делење со b ($b > 0$) се добива $b^2q^2 + b - q = kbq$,(2) од каде следи дека $q \mid b$. Нека $b = qt$, $t > 0$, $t \in Z$. Со замена во (2) се добива $q^4t^2 + qt - q = kq^2t$, а по делењето со q ($q > 0$), добиваме $q^3t^2 + t - 1 = kqt$,(3) од каде следи дека $t \mid 1$ и од $t > 0$ се добива дека $t = 1$. Потоа, од $b = qt$ и $t = 1$, добиваме дека $b = q$. Од $a = bq$ и $b = q$, добиваме дека $a = b^2$. И конечно, од $k = a + \frac{b}{a} - \frac{1}{b}$ и $a = b^2$ се добива дека $k = b^2 + \frac{b}{b^2} - \frac{1}{b} = b^2$, што требаше и да се докаже.

2. Нека $a > 0$. Докажи дека за секое реално решение x на равенката $x^2 + px + q = 0$ ($p, q \in \mathbb{R}$) важи $x \geq \frac{4q - (p+a)^2}{4a}$.

Решение. Заменувајќи $\frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$, (равенката има реални решенија па $p^2 - 4q \geq 0$) имаме

$$\frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}\geq\frac{4q-(p+a)^2}{4a}\Leftrightarrow 2a\left(-p\pm\sqrt{p^2-4q}\right)\geq 4q-(p+a)^2\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -2ap\pm 2a\sqrt{p^2-4q}\geq 4q-p^2-2ap-a^2\Leftrightarrow p^2-4q\pm 2a\sqrt{p^2-4q}+a^2\geq 0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{p^2-4q}\pm a\right)^2\geq 0.$$

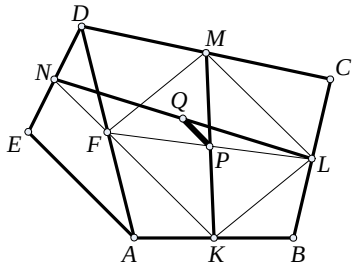
Последново неравенство е секогаш точно.

3. Дадени се $2n\,(n>1)$ точки кои лежат во една рамнина. Правата p лежи во истата рамнина и не минува низ ниту една од дадените точки. Докажи дека правата сече не повеќе од n^2 отсечки чии краеви се во дадените точки.

Решение. Нека дадените точки и правата p лежат во рамнината π. Правата p ја дели рамнината π на две полурамнини π_1 и π_2. Ако во едната полурамнина лежат m точки, тогаш во другата полурамнина лежат $2n-m$ точки. Отсечки на кои двете крајни точки им се во иста полурамнина правата не ги сече. Правата ги сече отсечките, со крајни точки во дадените, на кои едниот крај му е во полурамнината π_1 а другиот крај им е во полурамнината π_2. Такви отсечки има $m(2n-m)$. Бидејќи

$$n^2-m(2n-m)=n^2-2nm+m^2=(n-m)^2\geq 0,$$

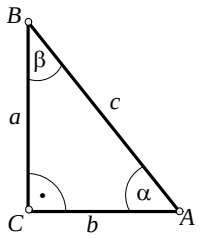
добиваме дека $n^2\geq m(2n-m)$. Значи, правата не сече повеќе од n^2 отсечки.



4. Во даден петаголник $ABCDE$, точките K,L,M,N се средини на страните на петаголникот AB,BC,CD,DE соодветно. Нека точките P,Q,F се средини на отсечките KM,LN,AD соодветно. Докажи дека PQ и AE се паралелни и дека $\overline{AE}=4\overline{PQ}$.

Решение. Го разгледуваме четириаголникот $ADCB$. Во него е впишан четириаголник $KFML$ чии темиња се средини на страните на четириаголникот $ADCB$ и јасно $KFML$ е паралелограм. Во паралелограмот дијагоналите се преполовуваат, па точката P, која е средина на отсечката KM, е таква да $P\in LF$ и истовремено е средина и на отсечката LF. Во триаголникот LFN, отсечката PQ е средна линија и $PQ\parallel FN$ и $\overline{PQ}=\frac{1}{2}\overline{FN}$. Од триаголникот ADE може да се заклучи дека FN е средна линија и $FN\parallel AE$ и $\overline{FN}=\frac{1}{2}\overline{AE}$. Конечно $PQ\parallel FN\parallel AE$ и $\overline{PQ}=\frac{1}{2}\overline{FN}=\frac{1}{4}\overline{AE}$, односно задоволена е паралелноста на PQ и AE и $\overline{AE}=4\overline{PQ}$.

III година



1. Во правоаголен триаголник со катети a и $b, a>b$, важи равенството $\lg\frac{a-b}{2}=\frac{1}{2}\left(\lg a+\lg b-\lg 2\right)$. Најди ги аглите на триаголникот.

Решение. Ако се среди даденото равенство се добива $\lg\frac{a-b}{2}=\lg\sqrt{\frac{ab}{2}}$, од каде мора да важи и

$$\frac{a-b}{2}=\sqrt{\frac{ab}{2}} \Leftrightarrow \frac{a^2-2ab+b^2}{4}=\frac{ab}{2} \Leftrightarrow a^2-4ab+b^2=0 .$$

Јасно $a>b>0$ и ако поделиме со b^2 добиваме квадратна равенка по $\frac{a}{b}$ во облик $\left(\frac{a}{b}\right)^2-4\frac{a}{b}+1=0$, со решенија $\frac{a}{b}=2\pm\sqrt{3}$, но како $\frac{a}{b}>1$ останува само $\frac{a}{b}=2+\sqrt{3}$. Од друга страна $\frac{a}{b}=tg\alpha$ (види цртеж). Важи $\sin 2\alpha=\frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha}=\frac{2(2+\sqrt{3})}{1+(2+\sqrt{3})^2}=\frac{1}{2}$. Можни се две решенија по α како агол во правоаголен триаголник и тоа $\alpha=75^0$ или $\alpha=15^0$, но како $a>b$ мора и $\alpha>\beta$, односно $\alpha=75^0$ и $\beta=15^0$.

2. α е произволен агол, а β и γ се остри агли. Докажи дека постои агол x за кој $\sin x=\frac{\sin\beta\cdot\sin\gamma}{1-\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma}$.

Решение. Доволно е да покажеме дека $\frac{\sin\beta\cdot\sin\gamma}{1-\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma}$ е вредност од интервалот $[-1,1]$, а оттаму истата соодветствува на вредност на $\sin x$ за некој агол x. Од условот на задачата, односно од тоа што β и γ се остри агли важат следниве неравенства: $\cos\beta>0, \cos\gamma>0$, а оттаму и $\cos\beta\cdot\cos\gamma>0$. Во исто време заради ограниченоста на функцијата $\cos x$ важи $\cos\alpha\le 1$. Ако го помножиме неравенството $\cos\alpha\le 1$ со неравенството $\cos\beta\cdot\cos\gamma>0$ добиваме $\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma\le\cos\beta\cdot\cos\gamma$, односно $-\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma\ge-\cos\beta\cdot\cos\gamma$. Од адиционите теореми важи и $\sin\beta\cdot\sin\gamma+\cos\beta\cdot\cos\gamma=\cos(\beta-\gamma)\le 1$.

Тогаш $0<\sin\beta\cdot\sin\gamma\le 1-\cos\beta\cdot\cos\gamma\le 1-\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma$, а оттука $0<\frac{\sin\beta\cdot\sin\gamma}{1-\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma}\le 1$ што требаше да се докаже. Значи постои агол x за кој $\sin x=\frac{\sin\beta\cdot\sin\gamma}{1-\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma}$.

3. Реалните броеви $a_1,a_2,....,a_{2008}$ ги задоволуваат неравенствата

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_1 & - & 5a_2 & + & 4a_3 & \ge & 0 \\
a_2 & - & 5a_3 & + & 4a_4 & \ge & 0 \\
a_3 & - & 5a_4 & + & 4a_5 & \ge & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{2007} & - & 5a_{2008} & + & 4a_1 & \ge & 0 \\
a_{2008} & - & 5a_1 & + & 4a_2 & \ge & 0 .
\end{array}$$

Ако се знае дека $a_1=2$, одреди ги $a_2,a_3,....,a_{2008}$.

Решение. Нека постои $i\in\{1,2,3,...,2008\}$ така што $a_i-5a_{i+1}+4a_{i+2}>0$ (ако $i+1=2009$, тогаш $a_{i+1}=a_1$, $a_{i+2}=a_2$; ако $i+2=2009$, тогаш $a_{i+2}=a_1$). Во тој случај, ако ги собереме неравенствата, би добиле $0>0$. Заради добиената контрадикција, добиваме дека $a_i-5a_{i+1}+4a_{i+2}=0$, $i=1,2,3,...,2008$ (ако $i+1=2009$, тогаш $a_{i+1}=a_1$, $a_{i+2}=a_2$; ако $i+2=2009$, тогаш $a_{i+2}=a_1$).

Значи, неравенствата стануваат равенства и добиваме систем: $\begin{cases} a_1 - 5a_2 + 4a_3 = 0 \\ a_2 - 5a_3 + 4a_4 = 0 \\ a_3 - 5a_4 + 4a_5 = 0 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{2007} - 5a_{2008} + 4a_1 = 0 \\ a_{2008} - 5a_1 + 4a_2 = 0 . \end{cases}$

Од првото равенство добиваме $a_1 - a_2 = 4(a_2 - a_3)$. Од второто равенство добиваме

$$a_2 - a_3 = 4(a_3 - a_4) .$$

Ако замениме во претходното равенство, добиваме $a_1 - a_2 = 4(a_2 - a_3) = 4^2(a_3 - a_4)$.

Од третото равенство имаме $a_3 - a_4 = 4(a_4 - a_5)$. Ако замениме во претходното равенство, добиваме

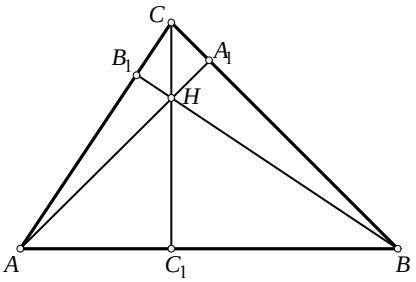
$$a_1 - a_2 = 4(a_2 - a_3) = 4^2(a_3 - a_4) = 4^3(a_4 - a_5) .$$

Ако ваквата постапка ја повториме со четворото, петтото, …, двеилјади и осмото равенство, добиваме

$$a_1 - a_2 = 4(a_2 - a_3) = 4^2(a_3 - a_4) = 4^3(a_4 - a_5) = ... = 4^{2008}(a_1 - a_2) .$$

Од равенството $a_1 - a_2 = 4^{2008}(a_1 - a_2)$ добиваме $a_1 - a_2 = 0$, односно $a_1 = a_2$. Според тоа $a_2 = 2$. Од првата равенка добиваме $4a_3 = 8$, т.е. $a_3 = 2$. Аналогно од втората равенка добиваме $a_4 = 2$, од третата $a_5 = 2$, …., од двеилјади и шестата равенка $a_{2008} = 2$.

Значи, $a_1 = a_2 = ... = a_{2008} = 2$.



4. Нека H е ортоцентарот во ΔABC и нека A_1, B_1, C_1 се подножјата на висините спуштени од A, B, C соодветно. Нека $\frac{\overline{AH}}{\overline{HA_1}} + \frac{\overline{BH}}{\overline{HB_1}} + \frac{\overline{CH}}{\overline{HC_1}} = 2008$. Пресметај го производот $\frac{\overline{AH}}{\overline{HA_1}} \cdot \frac{\overline{BH}}{\overline{HB_1}} \cdot \frac{\overline{CH}}{\overline{HC_1}}$.

Решение. Имаме, $\frac{\overline{AH}}{\overline{HA_1}} + 1 = \frac{\overline{AH}}{\overline{HA_1}} + \frac{\overline{HA_1}}{\overline{HA_1}} = \frac{\overline{AA_1}}{\overline{HA_1}} = \frac{P_{\Delta ABC}}{P_{\Delta HBC}}$.

Слично, $\frac{\overline{BH}}{\overline{HB_1}} + 1 = \frac{P_{\Delta ABC}}{P_{\Delta HCA}}$ и $\frac{\overline{CH}}{\overline{HC_1}} + 1 = \frac{P_{\Delta ABC}}{P_{\Delta HAB}}$. Да означиме со $x = P_{\Delta HBC}$, $y = P_{\Delta HCA}$, $z = P_{\Delta HAB}$, тогаш $P_{\Delta ABC} = x + y + z$. Со овие ознаки и претходните трансформации, равенството $\frac{\overline{AH}}{\overline{HA_1}} + \frac{\overline{BH}}{\overline{HB_1}} + \frac{\overline{CH}}{\overline{HC_1}} = 2008$ преминува во

$$\frac{x+y+z}{x} - 1 + \frac{x+y+z}{y} - 1 + \frac{x+y+z}{z} - 1 = 2008 ,$$

што е еквивалентно со $(x + y + z)(yz + xz + xy) = 2011xyz$.(1)

Производот што треба да се пресмета е

$$\left(\frac{x+y+z}{x} - 1\right) \cdot \left(\frac{x+y+z}{y} - 1\right) \cdot \left(\frac{x+y+z}{z} - 1\right) = \frac{y+z}{x} \cdot \frac{x+z}{y} \cdot \frac{x+y}{z} = \frac{(y+z)\cdot(x+z)\cdot(x+y)}{xyz} =$$

$$= \frac{(x+y+z)\cdot(yz+xz+xy) - xyz}{xyz} = \frac{2011xyz - xyz}{xyz} = 2010$$

IV година

1. Најди го збирот на сите нескратливи дропки со именител 7 кои се наоѓаат меѓу природните броеви a и b, $a < b$.

Решение. Да ги запишеме a и b во обликот $\frac{7a}{7}$ и $\frac{7b}{7}$. Сите дропки со именител еднаков на 7, вклучувајќи ги и a и b може да се запишат како

$$\frac{7a}{7},\frac{7a+1}{7},\frac{7a+2}{7},....,\frac{7b-1}{7},\frac{7b}{7} \qquad (1)$$

Од нив, само

$$\frac{7a}{7},\frac{7a+7}{7},\frac{7a+14}{7},....,\frac{7b-7}{7},\frac{7b}{7} \qquad (2)$$

се скратливи. Збирот на нескратливите дропки ќе ја пресметаме така што од збирот на сите дропки од низата (1) ќе го одземеме збирот на броевите од низата (2).

Збирот на броевите од низата (1) е збир на броеви од аритметичка прогресија со прв член $\frac{7a}{7}$ и разлика $\frac{1}{7}$. Вкупниот број на собироци ќе го определиме од равенството

$$b=a+(n-1)\frac{1}{7}, \qquad 7b=7a+n-1, \qquad n=7b-7a+1.$$

Значи, збирот на броевите од аритметичката прогресија (1) е :

$$\frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d)=\frac{7b-7a+1}{2}\left[2a+(7b-7a+1-1)\frac{1}{7}\right]=\frac{7b-7a+1}{2}(a+b)$$

Броевите од низата (2) се исто така членови на аритметичка прогресија во која разликата е еднаква на 1 и последен член b, па бројот на нејзини членови е

$$b=a+(k-1)\cdot 1, \qquad k=b-a+1.$$

Значи, нивниот збир е еднаков на $\frac{b-a+1}{2}(2a+(b-a+1-1))=\frac{b-a+1}{2}(a+b)$.

Конечно, бараната сума е:

$$S=\frac{(b+a)(7b-7a+1)}{2}-\frac{(b+a)(b-a+1)}{2}=\frac{b+a}{2}(7b-7a+1-b+a-1)=$$
$$=\frac{b+a}{2}(6a-6b)=3(a^2-b^2).$$

2. Нека $a_1,a_2,...,a_{2008}$ се реални броеви такви што

$$\begin{cases} a_1+a_2+a_3+...+a_{2008}=0 \\ a_1^2+a_2^2+a_3^2+...+a_{2008}^2=502 \end{cases}. \qquad (1)$$

Одреди ја максималната вредност за a_{2008}. Најди барем една низа од вредности $a_1,a_2,...,a_{2007}$ во која таа се достигнува.

Решение.Според неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц, за реалните броеви $a_1,a_2,...,a_{2007}$ имаме

$$(a_1+a_2+...+a_{2007})^2=(1\cdot a_1+1\cdot a_2+...+1\cdot a_{2007})^2\le(\underbrace{1^2+1^2+....+1^2}_{2007-\text{пати}})(a_1^2+a_2^2+...+a_{2007}^2)=$$
$$=2007(a_1^2+a_2^2+...+a_{2007}^2). \qquad (2)$$

Равенство се достигнува ако и само ако $\frac{a_1}{1}=\frac{a_2}{1}=...=\frac{a_{2007}}{1}$, односно $a_1=a_2=...=a_{2007}$.

Равенствата (1) ќе ги запишеме во облик $\begin{cases} a_1+a_2+a_3+...+a_{2007}=-a_{2008} \\ a_1^2+a_2^2+a_3^2+...+a_{2007}^2=502-a_{2008}^2 \end{cases}$, и ако замениме во (2) добиваме $(-a_{2008})^2\le 2007(502-a_{2008}^2)$.

Значи, $a_{2008}^2\le\frac{2007\cdot 502}{2008}=\frac{2007}{4}$, од каде добиваме $|a_{2008}|\le\frac{\sqrt{2007}}{2}$.

За било која низа реални броеви $a_1, a_2, ..., a_{2007}$, за која $a_1 = a_2 = ... = a_{2007}$ е исполнето $|a_{2008}| = \frac{\sqrt{2007}}{2}$. Според тоа, $(a_{2008})_{\max} = \frac{\sqrt{2007}}{2}$.

3. Најди ги сите реални функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такви што

$$f(x^2 - y^2) = (x - y)[f(x) + f(y)]. \qquad (1)$$

Решение. Нека f е функција која е решение на равенката (1). Ако избереме $x = y$, добиваме

$$f(x^2 - x^2) = (x - x)[f(x) + f(x)], \qquad f(0) = 0 \cdot [2f(x)] = 0.$$

Значи, $f(0) = 0$. Ако во равенката (1) замениме $y = -x$, добиваме

$$f[x^2 - (-x)^2] = [x - (-x)][f(x) + f(-x)], \qquad f(0) = 2x[f(x) + f(-x)],$$

$0 = -2x[f(x) + f(-x)]$.

Бидејќи последното равенство е исполнето за секој $x \in \mathbb{R}$, добиваме

$$f(x) + f(-x) = 0, \qquad f(-x) = -f(x).$$

Значи, f е непарна функција.

Ако y го замениме со $-y$, и од тоа што f е непарна функција, равенката (1) го добива обликот

$$f(x^2 - (-y)^2) = [x - (-y)][f(x) + f(-y)],$$

$$f(x^2 - y^2) = (x + y)[f(x) - f(y)] \qquad (2)$$

Од (1) и (2) добиваме

$$(x - y)[f(x) + f(y)] = f(x^2 - y^2) = (x + y)[f(x) - f(y)],$$

односно

$$(x - y)[f(x) + f(y)] = (x + y)[f(x) - f(y)],$$

$$xf(x) - yf(x) + xf(y) - yf(y) = xf(x) + yf(x) - xf(y) - yf(y),$$

$$-yf(x) + xf(y) = yf(x) - xf(y),$$

$$2yf(x) = 2xf(y).$$

Ако избереме $y = 1$ и воведеме ознака $f(1) = k$, добиваме $f(x) = kx$, каде $k \in \mathbb{R}$. Не е тешко да се провери дека секоја функција од облик $f(x) = kx$ е решение на равенката (1).

4. Најди ги сите трицифрени броеви кои се еднакви збирот на факториелите од нивните цифри!

Решение. $100a + 10b + c = a! + b! + c!$

$a! + b! + c! < 1000 \quad \Rightarrow \quad \max(a, b, c) \le 6$

$(7! > 1000,\ 6! < 1000)$

$a! + b! + c! > 99 \Rightarrow$ еден од a,b или c мора да е 5 или 6 (бидејќи $4! + 4! + 4! < 99$).

Ако еден од броевите е 6, $a! + b! + c! > 6! = 720$, па мораме да го исклучиме 6. Тогаш $\max(a, b, c) = 5$. Има три можности:

а) 5 да е на местото на стотките: **5bc**, но не може. Најголемиот број што се добива е $5! + 5! + 5! = 360 < 500$.

б) 5 да е на местото на десетките: **a5c**

Најголем таков број е $4! + 5! + 5! = 264$, па на местото на стотките би бил 1 или 2, т.е.

$150,\quad 1! + 5! + 0! \ne 150$	$151,\quad 1! + 5! + 1! \ne 151$	$152,\quad 1! + 5! + 2! \ne 152$
$153,\quad 1! + 5! + 3! \ne 153$	$154,\quad 1! + 5! + 4! \ne 154$	$155,\quad 1! + 5! + 5! \ne 155$
$254,\quad 2! + 5! + 4! < 200$	$255,\quad 2! + 5! + 5! \ne 255$	

в) 5 да е на местото на единиците: **ab5**

Ако е 1 или 2 на место на стотки, тогаш исто како во б) се покажува дека важи само за $1! + 4! + 5! = 145$.

LII Републички натпревар 2009

I година

1.Докажи дека производот $\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2008}\right)\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot 2008$ е делив со 2009.

Решение.Изразот во заградата ќе го означиме со A и ќе го запишеме во облик:

$$A=\left(1+\frac{1}{2008}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2007}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2006}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{1004}+\frac{1}{1005}\right)=$$

$$=\frac{2009}{1\cdot 2008}+\frac{2009}{2\cdot 2007}+\cdots+\frac{2009}{1004\cdot 1005}=$$

$$=2009\cdot\left(\frac{1}{1\cdot 2008}+\frac{1}{2\cdot 2007}+\cdots+\frac{1}{1004\cdot 1005}\right)$$

Бидејќи производот $2\cdot 3\cdot\cdots\cdot 2008$ е делив со секој од именителите во последната заграда, следува дека изразот: $\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2008}\right)\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot 2008$ е природен број.

Тогаш, јасно е дека производот

$$2009\cdot\left(\frac{1}{1\cdot 2008}+\frac{1}{2\cdot 2007}+\cdots+\frac{1}{1004\cdot 1005}\right)\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot 2008$$

е делив со 2009.

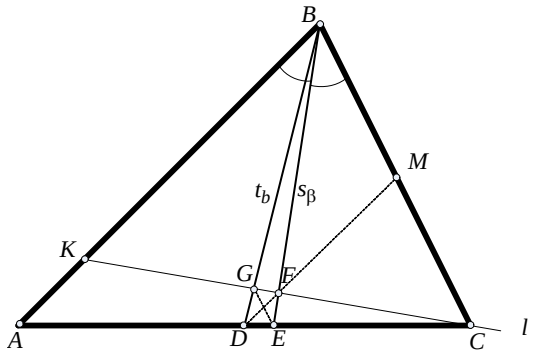
2.Докажи дека равенката $x^2+y^2+z^2+t^2=2^{2009}$, каде што $0\le x\le y\le z\le t$, има точно едно решение во множеството на цели броеви.

Решение. Едно решение на равенката, очигледно од нејзиниот облик е подредената четворка $\left(0,0,2^{1004},2^{1004}\right)$. Ќе докажеме дека тоа е и единственото решение на равенката.

Нека (x,y,z,t) е решение на равенката. Бидејќи квадратите на непарните природни броеви даваат остаток 1 при делење со 8, следува дека x,y,z и t се парни броеви (сите останати случаи во однос на парноста на x,y,z,t може да се разгледаат поединечно, од каде ќе се добие спротивност со парноста на бројот од левата и десната страна на равенството). Затоа, $x=2x_1, y=2y_1, z=2z_1$ и $t=2t_1$, каде што $0\le x_1\le y_1\le z_1\le t_1$. Почетната равенка се трансформира во $x_1^2+y_1^2+z_1^2+t_1^2=2^{2007}$. Добиената равенка е од истиот облик како и почетната само степенот на десната страна е намален за два. Од истите причини како и претходно заклучуваме дека $x_1=2x_2, y_1=2y_2, z_1=2z_2$ и $t_1=2t_2$, каде што $0\le x_2\le y_2\le z_2\le t_2$ и $x_2^2+y_2^2+z_2^2+t_2^2=2^{2005}$.

Истата постапка ќе ја повториме 1004 пати, и добиваме дека $x=2^{1004}a, y=2^{1004}b, z=2^{1004}c$ и $t=2^{1004}d$, каде што $0\le a\le b\le c\le d$ се цели броеви и важи $a^2+b^2+c^2+d^2=2$. Единственото решение на последната равенка при дадените услови е подредената четворка $(0,0,1,1)$. Од тука добиваме дека $\left(0,0,2^{1004},2^{1004}\right)$ е единственото решение на почетната равенка.

3.Даден е триаголникот ABC, $(BC<AB)$. Низ точката C е повлечена права l, нормална на симетралата BE на аголот $\measuredangle B$. Правата l ја сече BE во точка F, а тежишната линија BD во точка G. Да се докаже дека отсечката DF ја преполовува отсечката EG.



Решение. Нека $CF \cap AB = \{K\}$ и $DF \cap BC = \{M\}$. Бидејќи $BF \perp KC$ и BF е симетрала на $\measuredangle KBC$ следува дека $\triangle KBC$ е рамнокрак, т.е. $\overline{BK} = \overline{BC}$ и уште F е средина на $a > b > 0$.

Според тоа, DF е средна линија за B, односно $\frac{1}{B} = 1 + \frac{1}{\frac{1}{b^n} + \frac{1}{b^{n-1}} + \ldots + \frac{1}{b}}$, од каде јасно M е средина на BC.

Ќе покажеме дека $GE \| BC$. Доволно е да покажеме дека

$$\frac{\overline{BG}}{\overline{GD}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{ED}}.$$

Од $DF \| AK$ и $\overline{DF} = \frac{\overline{AK}}{2}$, и од сличноста на триаголниците BKG и GDF имаме

$$\frac{\overline{BG}}{\overline{GD}} = \frac{\overline{BK}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{BK}}{\frac{1}{2}\overline{AK}} = \frac{2\overline{BK}}{\overline{AK}} \tag{1}$$

Понатаму, од сличноста на ΔABE и ΔDEF имаме

$$\begin{aligned} \frac{\overline{CE}}{\overline{DE}} &= \frac{\overline{CD}-\overline{DE}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{DE}} - 1 = \frac{\overline{AD}}{\overline{DE}} - 1 = \frac{\overline{AE}-\overline{DE}}{\overline{DE}} - 1 = \frac{\overline{AE}}{\overline{DE}} - 2 = \\ &= \frac{\overline{AB}}{\overline{DF}} - 2 = \frac{\overline{AK}+\overline{BK}}{\frac{\overline{AK}}{2}} - 2 = 2 + 2\frac{\overline{BK}}{\overline{AK}} - 2 = \frac{2\overline{BK}}{\overline{AK}} \end{aligned} \tag{2}$$

Од (1) и (2) добиваме $\frac{\overline{BG}}{\overline{GD}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{ED}}$, па следува $GE \| BC$, и бидејќи M е средина на BC, следува DF ја преполовува GE.

4.а) На табла 5x5 се поставени 21 жетони со белата страна нагоре така да секој жетон лежи врз посебно 1x1 квадратче (секој жетон е двобоен, има една бела и една црна страна). Во секој потег, Марта зема од таблата еден "бел" жетон, го превртува и го враќа врз некое слободно 1x1 квадратче. Нејзина цел е да ги преврти сите 21 жетони, а да притоа во ниту еден момент на таблата не се поставени "бел" и "црн" жетон врз соседни (со заедничка страна) 1x1 квадратчиња. Покажи дека независно од почетниот распоред на жетоните, Марта не може да ја реализира целта.

б) Дали доколку наместо 21 жетон, врз таблата се поставени 20 жетони со белата страна нагоре, постои почетен распоред за кој Марта може да ја реализира поставената цел?

Решение.а) Од принципот на Дирихле, во секој момент кога на таблата се поставени 21 жетони, постои редица целосно исполнета со жетони и постои колона целосно исполнета со жетони. Да претпоставиме дека Марта успеала да ја реализира поставената цел. Тогаш на почетокот, на таблата има "бел" крст жетони, а на крајот, на таблата има "црн" крст жетони. Притоа, во секој момент кога на таблата се сите 21 жетони, од условот за соседство и обоеност на соседните жетони, секој крст жетони е монохроматски (еднобоен). Но тоа значи дека мора да постои момент (потег) кога со превртување на само еден жетон, од таблата ќе исчезне "бел" крст, а ќе се појави "црн" крст. Ова не е можно, бидејќи секои два крста се преклопуваат на барем две полиња.

б) Постои поволен почетен распоред. Еден таков е да најдесната колона се остави празна. Ако квадратњата ги означиме со парови броеви (x, y) каде x е редицата а y колоната во кое тоа се наоѓа, празна колона се квадратчињата (1,5),...,(5,5), т.е. на нив нема жетони. Марта треба да започне да ги превртува жетоните на следниов начин: го подига жетонот од позиција (1,4), го превртува и го враќа врз позиција (1,5); го подига жетонот од позиција (2,4), го превртува и го

враќа врз позиција (2,5); итн. се додека не ја пополни 5тата, а испразни 4тата колона. Потоа на истиот начин започнува да ја празни 3тата, да ја пополнува 4тата колона; итн. се додека не ја испразни првата, а ја пополни втората колона.

II година

1.Реши ја равенката

$$(x^2-x+1)(4y^2+6y+4)(4z^2-12z+25)=21.$$

во множеството реални броеви.

Решение. Имаме

$$x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\geq\frac{3}{4}, \tag{1}$$

$$4y^2+6y+4=4\left(y+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{7}{4}\geq\frac{7}{4} \tag{2}$$

и

$$4z^2-12z+25=4\left(z-\frac{3}{2}\right)^2+16\geq 16. \tag{3}$$

Од (1),(2) и (3) следува дека

$$(x^2-x+1)(4y^2+6y+4)(4z^2-12z+25)\geq 16\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{7}{4}=21 \tag{4}.$$

Равенство е исполнето аком и само ако во (1),(2) и (3) се исполнети равенства. Но, условот за равенство е зададената равенка

$$(x^2-x+1)(4y^2+6y+4)(4z^2-12z+25)=21$$

па според тоа решение на равенката е $x=\frac{1}{2}$, $y=-\frac{3}{4}$, $z=\frac{3}{2}$.

2. Кој од следните изрази е поголем: $A=\frac{1+a+a^2+...+a^{n-1}}{1+a+a^2+...+a^n}$, $B=\frac{1+b+b^2+...+b^{n-1}}{1+b+b^2+...+b^n}$, ако $a>b>0$.

Решение.Изразот $\frac{1}{A}$ можеме да го запишеме во облик:

$$\frac{1}{A}=\frac{1+a+a^2+...+a^n}{1+a+a^2+...+a^{n-1}}=1+\frac{a^n}{1+a+a^2+...+a^{n-1}}=1+\frac{1}{\frac{1}{a^n}+\frac{1}{a^{n-1}}+...+\frac{1}{a}}$$

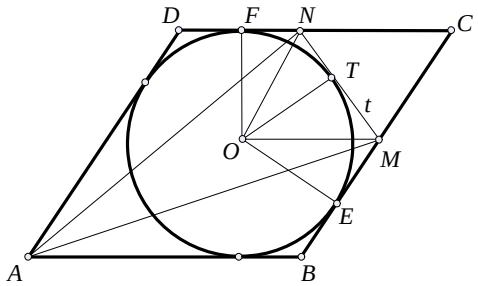
Слично и за B, изразот $\frac{1}{B}$ можеме да го запишеме во облик:

$$\frac{1}{B}=1+\frac{1}{\frac{1}{b^n}+\frac{1}{b^{n-1}}+...+\frac{1}{b}}.$$

Значи $\frac{1}{A}>\frac{1}{B}$ одкаде $B>A$.

3.Во ромбот $ABCD$ е впишан круг. Произволна тангента t на впишаниот круг ги сече страните BC и CD во внатрешни точки M и N соодветно. Докажи дека плоштината на триаголникот AMN е константна.

Решение. Нека O е центарот на кругот и нека кругот ги допира BC и CD во E и F соодветно. Нека T е точката во која тангентата MN го допира кругот. Бидејќи $\overline{NF}=\overline{NT}$ и $\angle OFN=\angle OTN$ триаголниците ΔONF и ΔONT се складни. Па $P_{\Delta ONF}=P_{\Delta ONT}$. Сега



$P_{\Delta ANF} = 2P_{\Delta ONF}$, бидејќи имаат иста основа NF но висината на ΔANF кон NF е дијаметарот на кругот, а висината на ΔONF кон NF е OF, радиус на кругот. Според тоа $P_{\Delta ANF} = P_{OTNF}$ и аналогно $P_{\Delta AME} = P_{OTME}$. Сега

$$P_{\Delta AMN} = P_{AEMNF} - P_{\Delta AEM} - P_{\Delta AFN} = \\ = P_{AEMNF} - P_{OTME} - P_{OTNF} = P_{AEOF}.$$

Значи $P_{\Delta AMN}$ не зависи од MN.

4.Дали постојат реални броеви a,b,c,d такви што условите:

а)равенката $ax^2 + bdx + c = 0$ има реални различни корени x_1, x_2

б)равенката $bx^2 + cdx + a = 0$ има реални различни корени x_2, x_3

в)равенката $cx^2 + adx + b = 0$ има реални различни корени x_3, x_1.

да важат истовремено.

Решение. Нека претпоставиме дека такви броеви постојат . Тогаш равенките под а),б) и в) имаат по две различни решенија, секоја посебно, па според тоа $a \neq 0, b \neq 0$ и $c \neq 0$. Од Виетовите формули имаме $x_1x_2 = \frac{c}{a}$, $x_2x_3 = \frac{a}{b}$ и $x_3x_1 = \frac{b}{c}$. Ако последните три равенства ги помножиме, добиваме $x_1^2x_2^2x_3^2 = 1$. Според тоа $x_1x_2x_3 = t$ каде $t = \pm 1$. Од последното равенство и Виетовите врски имаме $x_1 = t\frac{b}{a}$, $x_2 = t\frac{c}{b}$ и $x_3 = t\frac{a}{c}$. Сега, ако x_1 го замениме во $ax^2 + bdx + c = 0$, x_2 го замениме во $bx^2 + cdx + a = 0$ и x_3 го замениме во $cx^2 + adx + b = 0$ ги добиваме равенствата: $b^2(1+dt) = -ac$, $c^2(1+dt) = -ab$ и $a^2(1+dt) = -bc$. Но, бидејќи $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$, добиваме дека $1 + dt \neq 0$. Па ако ги поделиме последните три равенства попарно, и добиените равенства ги упростиме, добиваме $a^3 = b^3 = c^3$. Бидејќи a,b,c се реални броеви, имаме $a = b = c$. Сега е јасно дека не е исполнет условот $x_1 \neq x_2 \neq x_3 \neq x_1$. Значи, такви броеви a,b,c и d не постојат.

III година

1.Докажи дека равенката $x^n - a_1x^{n-1} - a_2x^{n-2} - \ldots - a_{n-1}x - a_n = 0$, каде што $a_k \geq 0$,$1 \leq k \leq n$, нема две различни позитивни решенија.

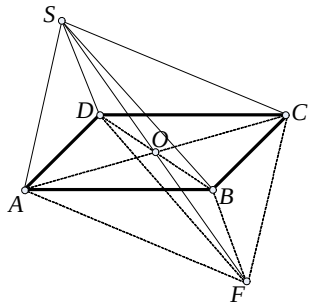
Решение. Равенката за $x \neq 0$ е еквивалентна со равенката $1 = \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}$. Ќе воведеме ознака $f(x) = \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}$ за $x \in (0, +\infty)$. Не е тешко да се види дека за $0 < x_1 < x_2$, $f(x_1) > f(x_2)$. Според тоа не може да постојат две различни вредности за x за кои $f(x) = 1$. Значи, равенката $1 = \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}$ нема две различни позитивни решенија. Според тоа, и почетната равенка нема две позитивни различни решенија.

2. Во рамнокрак триаголник ABC, $\overline{AC} = \overline{BC} = 1$.За која вредност на $\gamma = \angle ACB$, изразот $g = \frac{\overline{AB}^2 + 2}{P_{\Delta ABC}}$ достигнува најмала вредност.

Решение. Од косинусната теорема имаме $\overline{AB}^2 = 2 - 2\cos\gamma$, а за плоштината на триаголникот важи $P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{BC}\cdot\sin\gamma = \frac{\sin\gamma}{2}$. Тогаш добиваме $g(\gamma) = \frac{2(4-2\cos\gamma)}{\sin\gamma} = \frac{4(2-\cos\gamma)}{\sin\gamma}$. Ќе воведеме смена $x = tg\frac{x}{2}$, со помош на која $\sin\gamma = \frac{2x}{1+x^2}$, $\cos\gamma = \frac{1-x^2}{1+x^2}$, од каде функцијата $g = g(x) = \frac{2(1+3x^2)}{x}$. Имајќи предвид дека $\gamma \in (0,\pi)$, односно $\frac{\gamma}{2} \in (0,\frac{\pi}{2})$, јасно е дека $x > 0$ и истовремено и $g > 0$.

Ќе ја одредиме најмалата вредност која ја достигнува функцијата $g(x), x \in (0,\infty)$. Нека $g_{\min} = y$. Ќе определиме за која вредност на x истата се достигнува. Значи ја решаваме равенката $y = g(x) = \frac{2(1+3x^2)}{x}$, односно $6x^2 - yx + 2 = 0$. Равенката треба да има реални корени, па потребно е дискриминантата $D \geq 0$. Тогаш $y^2 - 48 \geq 0 \Leftrightarrow y \leq -4\sqrt{3}$ или $y \geq 4\sqrt{3}$. Бидејќи $g > 0$ го разгледуваме само случајот $y \geq 4\sqrt{3}$, а тогаш најмалата вредност која функцијата може да ја достигне е $y = 4\sqrt{3}$ и истата се достигнува кога $6x^2 - 4x\sqrt{3} + 2 = 0$, односно за $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Тогаш соодветниот агол на триаголникот е $\gamma = \frac{\pi}{3}$. Бидејќи триаголникот е рамнокрак, добиваме дека тој е и рамностран.

3. Даден е правоаголник $ABCD$ и точка S (точката S не мора да лежи во рамнината на правоаголникот). Дали растојанијата од точката S до темињата на правоаголникот може во некој редослед да бидат еднакви на 1, 3, 5 и 7.



Решение. Нека за правоаголникот $ABCD$ точката S е таква да растојанијата на точката до темињата на правоаголникот по некој редослед се еднакви на 1, 3, 5, 7. Ќе ја пресликаме точката S, во однос на централна симетрија со центар пресекот на дијагоналите на правоаголникот E, во точка F. Тогаш четириаголниците $AFCS$ и $BFDS$ имаат дијагонали кои се преполовуваат, па оттука истите се паралелограми. Според равенството за паралелограм ($2(a^2+b^2) = d_1^2 + d_2^2$ каде a и b се страни на паралелограмот а d_1 и d_2 негови дијагонали) имаме: $2(\overline{SA}^2 + \overline{SC}^2) = \overline{SF}^2 + \overline{AC}^2$ и $2(\overline{SB}^2 + \overline{SD}^2) = \overline{SF}^2 + \overline{BD}^2$.

Имајќи во предвид дека $\overline{AC} = \overline{BD}$, како дијагонали на правоаголникот $ABCD$, од горните равенства добиваме

$$\overline{SA}^2 + \overline{SC}^2 = \overline{SB}^2 + \overline{SD}^2 .$$

Но сега, за било кој распоред на 1, 3, 5, 7 на местата на $\overline{SA}, \overline{SB}, \overline{SC}, \overline{SD}$, последното равенство не е точно. Навистина

$$1^2 + 7^2 \neq 3^2 + 5^2, 1^2 + 5^2 \neq 3^2 + 7^2, 1^2 + 3^2 \neq 5^2 + 7^2 .$$

Значи растојанијата $\overline{SA}, \overline{SB}, \overline{SC}, \overline{SD}$ во ниту еден редослед не можат да бидат 1, 3, 5, 7.

4. Докажи дека за секои позитивни реални броеви a,b,c важи неравенството $\frac{9b+4c}{11a^2} + \frac{9c+4a}{11b^2} + \frac{9a+4b}{11c^2} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

Решение.Неравенството $(2a-3b)^2(a+b)\geq 0$ за позитивните реални броеви a и b е еквивалентно со неравенството $\frac{4a}{b^2}+\frac{9b}{a^2}\geq\frac{3}{a}+\frac{8}{b}$. Аналогно, за паровите позитивни реални броеви b и c, и a и c се добиваат неравенствата $\frac{4b}{c^2}+\frac{9c}{b^2}\geq\frac{3}{b}+\frac{8}{c}$ и $\frac{4c}{a^2}+\frac{9a}{c^2}\geq\frac{3}{c}+\frac{8}{a}$.

Ако ги собереме трите неравенства имаме

$$\frac{4a}{b^2}+\frac{9b}{a^2}+\frac{4b}{c^2}+\frac{9c}{b^2}+\frac{4b}{c^2}+\frac{9c}{b^2}\geq\frac{3}{a}+\frac{8}{b}+\frac{3}{b}+\frac{8}{c}+\frac{3}{c}+\frac{8}{a},$$

$$\frac{9b+4c}{a^2}+\frac{9c+4a}{b^2}+\frac{9a+4b}{c^2}\geq\frac{11}{a}+\frac{11}{b}+\frac{11}{c}$$

Сега последното равенство доволно е да го поделиме со 11, и ќе го добиеме почетното неравенство.

IV година

1.Дали постои неконстантна низа природни броеви $a_1,a_2,...,a_n,...$, таква што за секој природен број $k\geq 2$ е исполнето равенството $a_k=\frac{2a_{k-1}a_{k+1}}{a_{k-1}+a_{k+1}}$

Решение.Нека претпоставиме дека таква низа природни броеви постои. Тогаш за низата од реципрочни вредности $b_n=\frac{1}{a_n}, n\in N$, имаме

$$b_n=\frac{1}{a_n}=\frac{1}{\frac{2a_{n-1}a_{n+1}}{a_{n-1}+a_{n+1}}}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_{n-1}}+\frac{1}{a_{n+1}}\right)=\frac{b_{n-1}+b_{n+1}}{2}.$$

Според тоа $b_2,b_3,....,b_n,...$ аритметичка прогресија. Бидејќи $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ е неконстантна низа, добиваме дека и $(b_n)_{n=2}^{\infty}$ е неконстантна аритметичка низа од позитивни реални броеви. Според тоа, постои $d\neq 0$ така што

$$b_n=b_2+(n-2)d\ ,\ n\in N, n\geq 2.$$

За n доволно големо, имаме $b_n>1$ или $b_n<0$ (во зависност од тоа какво е d односно дали е позитивно или дали е негативно).

Од друга страна, бидејќи $a_n\in\mathbb{N}$, добиваме дека

$$0\leq b_n=\frac{1}{a_n}\leq 1\ ,\ n\in\mathbb{N}, n\geq 2.$$

Заради добиената контрадикција, таква низа природни броеви не постои.

2(а). За кои природни броеви n, постојат природни броеви x и y за кои важи

НЗС$(x,y)=n!$; НЗД$(x,y)=2009$

(б) Одреди го бројот на парови (x,y) за кои важи

НЗС$(x,y)=41!$; НЗД$(x,y)=2009$; $x\leq y$

Решение.(а) Од НЗД$(x,y)=2009$ следува дека $x=2009a$ и $y=2009b$, каде што a и b се природни броеви така што НЗД$(a,b)=1$.

Од НЗС$(x,y)=n!$ следува $2009ab=n!$, односно $7^2\cdot 41ab=n!$. Од последново следува $n\geq 41$. Условот е и доволен бидејќи ако $n\geq 41$, за $x=2009$ и $y=n!$ важи НЗС$(x,y)=n!$ и НЗД$(x,y)=2009$.

(б) Нека за броевите x и y важи НЗС$(x,y)=41!$; НЗД$(x,y)=2009$; $x\le y$. Тогаш $x=2009a$; $y=2009b$; НЗД$(a,b)=1$; $a\le b$ и $2009ab=41!$, односно $ab=\frac{40!}{7^2}$. Секој прост делител на $\frac{40!}{7^2}$ и е делител на a, не е делител на b и обратно. Бројот $\frac{40!}{7^2}$ има точно 12 прости делители 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31 и 37 и секој од нив е делител или на a или на b. Бројот на ваквите парови (a,b) е 2^{12}, меѓутоа само половината го задоволуваат условот $a<b$. Значи постојат точно $2^{11}=2048$ парови (x,y) што го задоволуваат дадениот услов.

3. Даден е произволен триаголник ABC. На страните AB, BC и CA се избрани произволни точки C_1, A_1 и B_1. Нека со P_1, P_2 и P_3 се означени плоштините на триаголниците AC_1B_1, BC_1A_1 и CA_1B_1 соодветно, а со P е означена плоштината на триаголникот ABC. Докажи дека $\sqrt{P_1}+\sqrt{P_2}+\sqrt{P_3}\le\frac{3}{2}\sqrt{P}$.

Решение. За плоштините на триаголниците AB_1C_1 и ABC важи:

$$P_1=\frac{1}{2}\overline{AB_1}\,\overline{AC_1}\sin\angle A \quad \text{и} \quad P=\frac{1}{2}\overline{AB}\,\overline{AC}\sin\angle A.$$

Според тоа $\frac{P_1}{P}=\frac{\overline{AB_1}}{\overline{AC}}\cdot\frac{\overline{AC_1}}{\overline{AB}}$. Слично се добива $\frac{P_2}{P}=\frac{\overline{BC_1}}{\overline{AB}}\cdot\frac{\overline{BA_1}}{\overline{BC}}$ и $\frac{P_3}{P}=\frac{\overline{CB_1}}{\overline{AC}}\cdot\frac{\overline{CA_1}}{\overline{CB}}$. Тогаш

$$\sqrt{\frac{P_1}{P}}+\sqrt{\frac{P_2}{P}}+\sqrt{\frac{P_3}{P}}=\sqrt{\frac{\overline{AB_1}}{\overline{AC}}\cdot\frac{\overline{AC_1}}{\overline{AB}}}+\sqrt{\frac{\overline{BC_1}}{\overline{AB}}\cdot\frac{\overline{BA_1}}{\overline{BC}}}+\sqrt{\frac{\overline{CB_1}}{\overline{AC}}\cdot\frac{\overline{CA_1}}{\overline{CB}}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{\overline{AB_1}}{\overline{AC}}+\frac{\overline{AC_1}}{\overline{AB}}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\overline{BC_1}}{\overline{AB}}+\frac{\overline{BA_1}}{\overline{BC}}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\overline{CB_1}}{\overline{AC}}+\frac{\overline{CA_1}}{\overline{CB}}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\overline{AB_1}+\overline{CB_1}}{\overline{AC}}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\overline{BC_1}+\overline{AC_1}}{\overline{AB}}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\overline{BA_1}+\overline{CA_1}}{\overline{BC}}\right)=\frac{3}{2}.$$

4.На републичкиот натпревар по математика, познато е дека секој натпреварувач има не повеќе од тројца познаници (познанството е симетрична релација). Покажи дека е можно натпреварувачите да се распоредат во две простории така да секој од нив на натпреварот има не повеќе од еден познаник во просторијата во која е сместен.

Решение. Да ги распоредиме натпреварувачите во две простории сосема произволно. Со S_1 да го означиме вкупниот број познанства во првата просторија, а со S_2 да го означиме вкупниот број познанства во втората просторија. Нека $S=S_1+S_2$ (доколку два натпреварувачи рапоредени во иста соба се познаници, тоа познанство го броиме еднаш, а не двапати) Тогаш S е ненегативен цел број. Да претпоставиме дека ваквиот распоред не е задоволителен т.е. постои натпреварувач A така да во неговата просторија има барем двајца негови познаници B и C. Го префрламе A во другата просторија; да забележиме дека со ова вредноста на S се намали барем за 1. Во другата просторија A има не повеќе од еден познаник. Според тоа, едниот од броевите S_1 и S_2 се намалил за два а другиот се наголемил за 1, па според тоа S се намалил за 1. Постапката ја продолжуваме се додека моменталниот распоред не е поволен. Бидејќи S е ненегативен цел број, после конечен број вакви префрлања ќе стигнеме до поволен распоред, т.е. распоред во кој натпреварувачите се распоредени во две простории така што секој натпреварувачите има не повеќе од еден познаник во просторијата во која е сместен.

LIII Републички натпревар 2010

I година

1.Дадена е бесконечна шема во која се запишани природните броеви како на цртежот. Пишувањето на броевите започнува единицата, и потоа се запишуваат сите природни броеви на начин како што е прикажано на цртежот.

21	22	23	24	25	26
20	7	8	9	10	
19	6	1	2	11	
18	5	4	3	12	
17	16	15	14	13	

Редицата и колоната во која се наоѓа единицата е означена како прва редица и прва колона, а секоја друга се брои од неа лево или десно, т.е. горе или долу. На пример, бројот 24 е во втора колона десно и трета редица горе. Каде се наоѓа бројот 2010 во оваа шема.

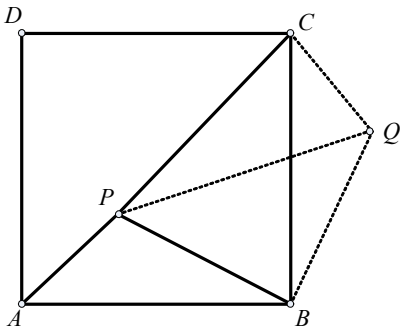
Решение:Од шемата се гледа дека $1=1^2=(2\cdot 1-1)^2$ се наоѓа во прва редица и прва колона, бројот $9=3^2=(2\cdot 2-1)^2$ се наоѓа во втора редица горе и втора колона десно, бројот $25=5^2=(2\cdot 3-1)^2$ се

21	22	23	24	25	26
20	7	8	9	10	
19	6	1	2	11	
18	5	4	3	12	
17	16	15	14	13	

наоѓа во трета редица горе и трета колона десно итн.

Според тоа, бројот $(2\cdot k-1)^2$ се наоѓа во $k-$та редица горе и $k-$та колона десно. Најблизок број од овој облик до 2010 е бројот $2025=45^2=(2\cdot 23-1)^2$, кој се наоѓа во 23-та редица горе и 23-та колона десно.Помалите броеви од него па и 2010 се напишани лево од него, а за да стигнеме до 2010 треба да се вратиме 15 колони лево во истата редица. Според тоа, 2010 се наоѓа во 23-та редица горе и 8-ма колона десно.

2.Даден е квадратот $ABCD$ и точка P во внатрешноста на квадратот т.ш. $\overline{AP}:\overline{BP}:\overline{CP}=1:2:3$. Да се пресмета аголот $\measuredangle APB$!



Решение. Ако ΔABP го ротираме околу темето B се додека темето A не се совпадне со темето C (ротација со центар во B и агол за 90°). Со Q да ја означиме новата положба на темето P по ротацијата. Бидејќи аголот $\sphericalangle QBC=\sphericalangle PBA$, следува дека $\sphericalangle QBP=90^\circ$. Заради ова, бидејќи $\overline{BP}=\overline{BQ}$ имаме $\sphericalangle PQB=45^\circ$ и $\overline{PQ}^2=2\overline{BP}^2$.

Од условот на задачата имаме $\overline{BP}=2\overline{AP},\overline{CP}=3\overline{AP}$ па оттука и од претходното равенство добиваме:

$$\overline{PQ}^2+\overline{CQ}^2=8\overline{AP}^2+\overline{AP}^2=\overline{CP}^2 .$$

Бидејќи за ΔCQP важи Питагорина теорема $\sphericalangle CQP=90^\circ$. Конечно,

$$\sphericalangle APB=\sphericalangle CQB=\sphericalangle PQB+\sphericalangle CQP=45^\circ+90^\circ=135^\circ .$$

3. Нека $a+b+c=0$ и $a^3+b^3+c^3=0$. Да се докаже дека

$$a^{2009}+b^{2009}+c^{2009}=a^{2011}+b^{2011}+c^{2011} .$$

Решение. Бидејќи $a+b+c=0$ добиваме $a^3+b^3+c^3=3abc$, од каде поради условот следува дека $3abc=a^3+b^3+c^3=0$. Значи барем еден од броевите a, b и c, е нула. Без губење на општоста нека $c=0$, тогаш јасно $b=-a$.

Тогаш,

$$a^{2009}+b^{2009}+c^{2009}=a^{2009}+(-a)^{2009}=a^{2009}-a^{2009}=0 .$$

и аналогно се покажува дека и $a^{2011}+b^{2011}+c^{2011}=0$, од каде следува тврдењето на задачата.

4. Двајца велосипедисти се движат од градот A до градот B. Првиот велосипедист, половина од времето се движи со брзина v_1, а другата половина од времето со брзина v_2. Вториот велосипедист, првата половина од патот се движи со брзина v_1, а втората половина од патот со брзина v_2. Кој од нив ќе стаса прв до градот B. (Одговорот да се образложи)

Решение: Нека T е времето за кое ќе стаса првиот велосипедист.
Тогаш од условот имаме:

$$v_1\frac{T}{2}+v_2\frac{T}{2}=\overline{AB} \text{ т.е. } T=\frac{2\overline{AB}}{v_1+v_2} \tag{1}$$

Нека t е времето за кое ќе стаса вториот велосипедист. Тогаш од условот имаме

$$t=\frac{\overline{AB}}{2v_1}+\frac{\overline{AB}}{2v_2}=\frac{\overline{AB}}{2}\left(\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}\right) \tag{2}$$

Понатаму од *Неравенството меѓу аритметичка и хармониска средина* имаме

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq\frac{4}{x+y} \tag{3}$$

, при што знак за равенство важи акко $x=y$

Сега од (1),(2) и (3) имаме

$$t=\frac{\overline{AB}}{2}\left(\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}\right)\geq\frac{2\overline{AB}}{v_1+v_2}=T .$$

Значи ако $v_1\neq v_2$, првиот велосипедист ќе стаса прв. Инаку, двајцата ќе стасаат истовремено.

II година

1. Равенката $x^2+2ax+2a^2+4a+3=0$ има реални решенија За која вредност на реалниот параметар a, збирот на квадратите на нејзините решенија е најголема?

Решение. Равенката има решенија ако $D=4a^2-4\left(2a^2+4a+3\right)\geq 0$. Добиваме $a^2+4a+3\leq 0$, односно $(a+1)(a+3)\leq 0$ и оттука $a\in[-3,-1]$. Ако ги означиме решенијата на

равенката со x_1 и x_2, за збирот на нивните квадрати имаме $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$. Бидејќи $x_1+x_2=-2a$ и $x_1x_2=2a^2+4a+3$, добиваме $x_1^2+x_2^2=4a^2-4a^2-8a-6=-8a-6$. Тогаш најголемата вредност на $x_1^2+x_2^2$ се достигнува за $a=-3$, а изнесува 18.

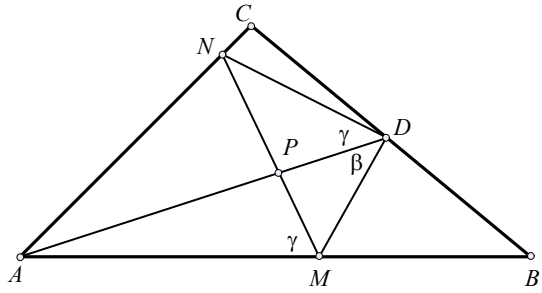
2. Најди ги страните на правоаголен триаголник ако тие се природни броеви и производот на катетите е трипати поголем од периметарот на триаголникот.

Решение. Да ги означиме катетите со a и b, а хипотенузата со c. Според условот во задачата важи $ab=3(a+b+c)$. Бидејќи a и b се природни броеви, следува дека 3 е делител на барем една од катетите. Нека $a=3x$, тогаш $c=xb-3x-b$ и имаме $(xb-3x-b)^2=(3x)^2+b^2$. Добиваме $xb(xb-6x-2b+6)=0$, а од $x\neq 0$ и $b\neq 0$ следува $xb-6x-2b+6=0$, равенка која што е еквивалентна со $(b-6)(x-2)=6$. Оттука,

$$\begin{cases} b-6=1 \\ x-2=6 \end{cases}, \begin{cases} b-6=2 \\ x-2=3 \end{cases}, \begin{cases} b-6=3 \\ x-2=2 \end{cases}, \begin{cases} b-6=6 \\ x-2=1 \end{cases}, \begin{cases} b-6=-1 \\ x-2=-6 \end{cases}, \begin{cases} b-6=-2 \\ x-2=-3 \end{cases}, \begin{cases} b-6=-3 \\ x-2=-2 \end{cases}, \begin{cases} b-6=-6 \\ x-2=-1 \end{cases}.$$

Значи, има три правоаголни триаголници (до складност) со бараните својства, а нивните страни се: $a=24, b=7, c=25$, $a=15, b=8, c=17$ и $a=12, b=9, c=15$.

3. Во триаголникот ABC, AD е симетралата на аголот кај темето A ($D\in BC$). Нека M е точка на страната AB така што $\angle MDA=\angle ABC$, а N е точка на страната AC така што $\angle NDA=\angle BCA$. Ако AD и MN се сечат во точка P, докажи дека $\overline{AD}^3=\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AP}$.



Решение. Аглите кај темињата A, B и C ќе ги означиме со α, β и γ, соодветно. Бидејќи триаголниците AMD и ADB имаат еднакви агли, следува $\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{AM}}{\overline{AD}}$. Четириаголникот $AMDN$ е тетивен ($\angle A+\angle D=\alpha+\beta+\gamma=180^0$), па $\angle NMA=\angle NDA=\gamma$. Оттука, ACD и AMP се слични триаголници и затоа $\frac{\overline{AD}}{\overline{AP}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{AM}}$.

Тогаш $\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}\cdot\frac{\overline{AD}}{\overline{AP}}=\frac{\overline{AM}}{\overline{AD}}\cdot\frac{\overline{AC}}{\overline{AM}}$ и оттука $\overline{AD}^3=\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AP}$.

4. Да се покаже дека за секои $x,y,z\in\mathbb{R}^+$ важи:

$$\frac{1}{x^2+yz}+\frac{1}{y^2+zx}+\frac{1}{z^2+xy}\leq\frac{1}{2}\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\right).$$

Решение. Од неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина имаме $\frac{x^2+yz}{2}\geq\sqrt{x^2yz}$, па според тоа

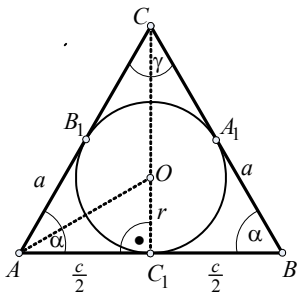
$$\frac{1}{x^2+yz}\leq\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^2yz}}=\frac{\sqrt{yz}}{2xyz}\leq\frac{1}{2xyz}\frac{y+z}{2}.$$

Аналогно добиваме $\frac{1}{y^2+zx} \le \frac{1}{2xyz}\frac{z+x}{2}$ и $\frac{1}{z^2+xy} \le \frac{1}{2xyz}\frac{x+y}{2}$. Со собирање на овие три неравенства го добиваме неравенството кое требаше да се покаже. Равенство се постигнува само во случај да $x=y=z$.

III година

1.Односот на радиусот R на опишаната кружница и радиусот r на впишаната кружница во триаголник ΔABC кој е рамнокрак е k. Пресметај ја вредноста $\cos\alpha$ ако со α е означен аголот при основата на ΔABC.

Решение.Нека O е центарот на впишаната кружница во ΔABC, A_1, B_1, C_1 се допирните точки впишаната кружница со страните на триаголникот и $\frac{R}{r}=k$.



Од ΔAOC_1 имаме $\frac{r}{2}=\frac{c}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. Од друга страна од синусна теорема имаме

$$\frac{c}{\sin\gamma}=2R$$

$$\frac{c}{\sin(180^\circ-2\alpha)}=2R$$

$$\frac{c}{2}=R\sin\alpha$$

Тогаш

$$r=R\sin 2\alpha \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$$

$$\frac{R}{r}=\frac{1}{2\sin\alpha\cos\alpha\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}=\frac{1}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos\alpha}=\frac{1}{2\cos\alpha(1-\cos\alpha)}$$

$$2\frac{R}{r}\cos\alpha(1-\cos\alpha)=1$$

$$2k\cos\alpha-2k\cos^2\alpha-1=0.$$

Со решавање на последната квадратна равенка добиваме

$$\cos\alpha=\frac{2k\pm\sqrt{4k^2-8k}}{4k}=\frac{2k\pm 2\sqrt{k^2-2k}}{4k},$$

односно

$$\cos\alpha=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{k^2-2k}}{2k}.$$

2.Нека a,b,c се должини на страни во триаголник. Докажи дека

$$\frac{a^2+2bc}{b^2+c^2}+\frac{b^2+2ca}{c^2+a^2}+\frac{c^2+2ab}{a^2+b^2}>3.$$

Решение.Од неравенството на триаголник имаме

$$a>|b-c|$$

од каде со квадрирање добиваме

$$a^2>(b-c)^2$$

$$a^2+2bc>b^2+c^2.$$

Делејќи во последното неравенство со $b^2+c^2\neq 0$, добиваме

$$\frac{a^2+2bc}{b^2+c^2}>1.$$

По аналогија, ако ги искористиме неравенствата $b>|c-a|$ и $c>|a-b|$ добиваме

$$\frac{b^2+2ca}{c^2+a^2}>1 \text{ и } \frac{c^2+2ab}{a^2+b^2}>1,$$

соодветно. Сега јасно е дека даденото неравенство е точно.

Забелешка. Истиот резултат може да се добие со примена на косинусна теорема. При тоа треба да се има во предвид дека на пример $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$ и $\cos\alpha<1$.

3. Докажи го равенсвото: $\frac{1}{\cos 0^\circ\cdot\cos 1^\circ}+\frac{1}{\cos 1^\circ\cdot\cos 2^\circ}+\ldots+\frac{1}{\cos 88^\circ\cdot\cos 89^\circ}=\frac{\cos 1^\circ}{\sin^2 1^\circ}$.

Решение: Имаме:

$$\sin 1^\circ\left(\frac{1}{\cos 0^\circ\cdot\cos 1^\circ}+\frac{1}{\cos 1^\circ\cdot\cos 2^\circ}+\ldots+\frac{1}{\cos 88^\circ\cdot\cos 89^\circ}\right)=$$

$$=\frac{\sin 1^\circ}{\cos 0^\circ\cdot\cos 1^\circ}+\frac{\sin 1^\circ}{\cos 1^\circ\cdot\cos 2^\circ}+\ldots+\frac{\sin 1^\circ}{\cos 88^\circ\cdot\cos 89^\circ}=$$

$$=\frac{\sin\left(1^\circ-0^\circ\right)}{\cos 0^\circ\cdot\cos 1^\circ}+\frac{\sin\left(2^\circ-1^\circ\right)}{\cos 1^\circ\cdot\cos 2^\circ}+\ldots+\frac{\sin\left(89^\circ-88^\circ\right)}{\cos 88^\circ\cdot\cos 89^\circ}=$$

$$=\frac{\sin 1^\circ\cos 0^\circ-\cos 1^\circ\sin 0^\circ}{\cos 0^\circ\cdot\cos 1^\circ}+\frac{\sin 2^\circ\cos 1^\circ-\cos 2^\circ\sin 1^\circ}{\cos 1^\circ\cdot\cos 2^\circ}+\ldots+\frac{\sin 89^\circ\cos 88^\circ-\cos 89^\circ\sin 88^\circ}{\cos 88^\circ\cdot\cos 89^\circ}=$$

$$=tg1^\circ-tg0^\circ+tg2^\circ-tg1^\circ+\ldots+tg89^\circ-tg88^\circ=g89^\circ-tg0^\circ=tg89^\circ=ctg1^\circ=\frac{\cos 1^\circ}{\sin 1^\circ}$$

од каде се добива бараното равенство.

4. Без употреба на калкулатор да се докаже дека $\lg^3 9>\lg 7$.

Решение: Имаме

$$\lg^3 9=\lg^3(10\cdot 0.9)=\left(\lg 10+\lg 0.9\right)^3=\left(1+\lg 0.9\right)^3=1+3\lg 0.9+3\lg^2 0.9+\lg^3 0.9$$

Бидејќи $0{,}1<0.9<1$ имаме дека $-1<\lg 0.9<0$ од каде следува дека $\lg^2 0.9+\lg^3 0.9>0$ и уште повеќе $3\lg^2 0.9+\lg^3 0.9>0$.

Сега имаме

$$\lg^3 9=1+3\lg 0.9+3\lg^2 0.9+\lg^3 0.9>1+3\lg 0.9=1+\lg 0.729=\lg 10+\lg 0.729==\lg 7.29>\lg 7.$$

IV година

1. Определи ги сите реални броеви m за кои равенката

$$x^4-\left(3m+2\right)x^2+m^2=0$$

има 4 реални корени кои што се последователни членови на аритметичка прогресија.

Решение. Нека a_1,a_2,a_3,a_4 се последователни членови на аритметичка прогресија, корени на равенката $x^4-\left(3m+2\right)x^2+m^2=0$.

Ако $2b$ е разлика на прогресијата и $s=\frac{a_2+a_3}{2}$ тогаш $a_1=s-3b,\ a_2=s-b,\ \ a_3=s+b,$ $a_4=s+3b$.

Користејќи ги Виетовите врски, од $a_1+a_2+a_3+a_4=0$ следува дека $s=0$ и $a_1=-3b,$ $a_2=-b,\ \ a_3=b,\ \ a_4=3b$.

Од тоа што a_1,a_2,a_3,a_4 се корени на почетната равенка, следува дека

$$(x+3b)(x+b)(x-b)(x-3b)=x^4-(3m+2)x^2+m^2$$

односно $x^4-10b^2x^2+9b^4=x^4-(3m+2)x^2+m^2$, од каде што се добива системот равенки $\begin{cases}3m+2=10b^2\\ m^2=9b^4\end{cases}$.

Со решавање на системот се добива $m=6$ или $m=-6/19$.

2. Да се реши равенката $(x^2+x+2)^{x^2+x+1}=9$.

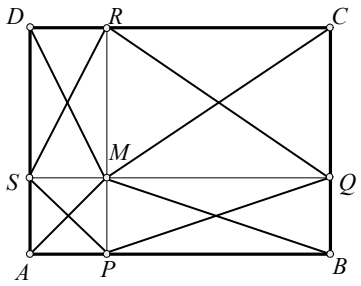
Решение. Бидејќи $x^2+x+2=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>1$ за секој реален број x, добиваме дека дефиниционата област на дадената равенка е множеството реални броеви.

Нека $f(x)=x^{x-1}$, $g(x)=x^2+x+2$ и $h(x)=3$ **(…5)**.Тогаш дадената равенка можеме да ја запишеме во облик

$$f(g(x))=f(h(x)) \quad \ldots \qquad (1)$$

Понатаму нека $1<x_1<x_2$ тогаш имаме $f(x_1)=x_1^{x_1-1}<x_1^{x_2-1}<x_2^{x_2-1}=f(x_2)$, па следува дека функцијата f е растечка на множеството вредности што ги примаат функциите $g(x)$ и $h(x)$.

Според ова и (1) мора да важи $g(x)=h(x)$ од каде добиваме $x^2+x+2=3$ т.е. $x^2+x-1=0$ односно ги имаме решенијата $x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.



3.Нека $ABCD$ е правоаголник и M е точка од неговата внатрешност. Да се покаже дека

$$|MA||MC|+|MB||MD|\geq P_{ABCD}.$$

Решение. Низ точката M ги повлекуваме двете прави паралелни на страните на правоаголникот. Нека тие ги сечат AB,BC,CD,DA во точките P,Q,R,S, соодветно. Неравенството кое треба да се покаже е всушност теоремата на Птоломеј за четириаголникот $PQRS$.

4. Конечната низа $a_0,a_1,\ldots,a_n$ е зададена на следниот начин:

$$a_0=\frac{1}{2},\quad a_k=a_{k-1}+\frac{1}{n}a_{k-1}^2\quad (k=1,2,\ldots,n)$$

Докажи дека важи $1-\frac{1}{n}<a_n<1$.

Решение. Од самата дефиниција на низата следува дека $\frac{1}{2}=a_0<a_1<\ldots<a_n$. Равенството $a_k=a_{k-1}+\frac{1}{n}a_{k-1}^2$ е еквивалентно со равенството $\frac{1}{a_{k-1}}-\frac{1}{a_k}=\frac{1}{n+a_{k-1}}$.

Од позитивноста на низата и од $\frac{1}{a_{k-1}}-\frac{1}{a_k}=\frac{1}{n+a_{k-1}}$ следува дека $\frac{1}{a_{k-1}}-\frac{1}{a_k}<\frac{1}{n}$, $k=1,\ldots,n$.

Со собирање на сите неравенства $\frac{1}{a_{k-1}}-\frac{1}{a_k}<\frac{1}{n}$, $k=1,\ldots,n$, се добива $\frac{1}{a_0}-\frac{1}{a_n}<1$, односно $a_n<1$. Со тоа десното неравенство е покажано.

Да забележиме дека од $\frac{1}{2}=a_0<a_1<\ldots<a_n<1$ следува $\frac{1}{a_{k-1}}-\frac{1}{a_k}>\frac{1}{n+1}$, $k=1,\ldots,n$.

Со собирање на сите неравенства $\frac{1}{a_{k-1}}-\frac{1}{a_k}>\frac{1}{n+1}$, $k=1,\ldots,n$, се добива $\frac{1}{a_0}-\frac{1}{a_n}>\frac{n}{n+1}$, односно $a_n>\frac{n+1}{n+2}>\frac{n-1}{n}$. Со тоа е покажано и левото неравенство.

LIV Републички натпревар 2011

I година

1. Докажи дека

$$\frac{a^3(a+c)(a+b)}{(a-c)(a-b)}+\frac{b^3(b+a)(b+c)}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^3(c+a)(c+b)}{(c-a)(c-b)}=abc,$$

ако $a\neq b\neq c\neq a$ и $a+b+c=0$.

Решение. Бидејќи $a+b+c=0$, имаме $a+b=-c$, $b+c=-a$, $c+a=-b$, и левата страна на равенството можеме да ја запишеме во облик

$$M=\frac{a^3(-b)(-c)}{(a-c)(a-b)}+\frac{b^3(-c)(-a)}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^3(-a)(-b)}{(c-a)(c-b)}=$$
$$=abc\left(\frac{a^2}{(a-c)(a-b)}+\frac{b^2}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}\right)=$$
$$=abcL$$

Од друга страна

$$L=\frac{a^2}{(a-c)(a-b)}+\frac{b^2}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}=$$
$$=\frac{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}{(a-c)(c-b)(b-a)}=\frac{N}{(a-c)(c-b)(b-a)}$$

Но,

$$N=a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)=a^2(b-c)+b^2c-b^2a+c^2a-c^2b=$$
$$=a^2(b-c)+bc(b-c)-a(b-c)(b+c)=(b-c)[a(a-b)-c(a-b)]=$$
$$=(b-c)(a-b)(a-c)=(a-c)(c-b)(b-a).$$

Сега

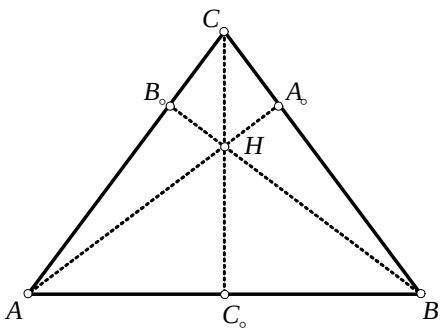
$$L=\frac{N}{(a-c)(c-b)(b-a)}=\frac{(a-c)(c-b)(b-a)}{(a-c)(c-b)(b-a)}=1,$$

од каде следува

$$M=abcL=abc\cdot 1=abc=R.$$

2. Во триаголникот ΔABC спуштени се висините $AA_\circ$, $BB_\circ$ и $CC_\circ$.Нека H е ортоцентарот. Ако $\overline{AH}:\overline{HA_\circ}=1:1$ и $\overline{BH}:\overline{HB_\circ}=2:1$, тогаш колку е односот $\overline{CH}:\overline{HC_\circ}$.

Решение. Да забележиме дека



$$\frac{P_{\Delta ABC}}{P_{\Delta BCH}}=\frac{\frac{\overline{BC}\cdot\overline{AA_\circ}}{2}}{\frac{\overline{BC}\cdot\overline{HA_\circ}}{2}}=\frac{\overline{AA_\circ}}{\overline{HA_\circ}}=2,$$

односно $P_{\Delta BCH}=\frac{1}{2}P_{\Delta ABC}$.

Аналогно

$$\frac{P_{\Delta ABC}}{P_{\Delta ACH}}=\frac{\overline{BB_\circ}}{\overline{HB_\circ}}=3,$$

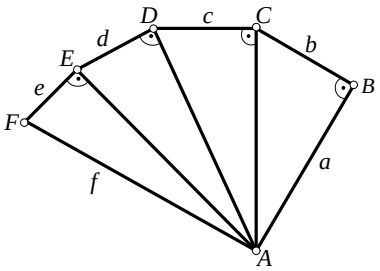
односно $P_{\Delta ACH}=\frac{1}{3}P_{\Delta ABC}$.

Да забележиме дека $P_{\Delta ABC} = P_{\Delta BCH} + P_{\Delta ACH} + P_{\Delta ABH}$, од што добиваме $P_{\Delta ABH} = \frac{1}{6} P_{\Delta ABC}$.

Од ова имаме $6 = \frac{P_{\Delta ABC}}{P_{\Delta ABH}} = \frac{\overline{CC_\circ}}{\overline{HC_\circ}}$, односно добиваме $\overline{CH} : \overline{HC_\circ} = 5:1$.

3. Во шестаголникот $ABCDEF$ важи:
$AB \perp BC,\ AC \perp CD,\ \ AD \perp DE,\ AE \perp EF.$

Ако должините на страните на тој шестаголник се природни броеви, докажи дека не може сите да бидат непарни.



Решение. Да ги означиме должините на страните $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DE}, \overline{EF}, \overline{FA}$ со a, b, c, d, e, f соодветно. Од правоаголните триаголници ABC, ACD, ADE и AEF добиваме

$$a^2 + b^2 = \left|\overline{AC}\right|^2, \left|\overline{AC}\right|^2 + c^2 = \left|\overline{AD}\right|^2, \left|\overline{AD}\right|^2 + d^2 = \left|\overline{AE}\right|^2, \left|\overline{AE}\right|^2 + e^2 = f^2$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = f^2 \qquad (1)$$

Да претпоставиме дека a, b, c, d, e, f се непарни природни броеви. Ако x е непарен број, т.е. $x = 2n-1, n \in \mathbb{N}$, тогаш

$$x^2 = (2n-1)^2 = 4n^2 - 4n + 1 = 4n(n-1) + 1.$$

Броевите n и $n-1$ се последователни природни броеви, па $2 \mid n(n-1)$, од каде добиваме дека $x^2 = 8k+1$ за некој природен број k. Според тоа, постојат природни броеви k, l, m, n, p, q, такви што

$$a^2 = 8k+1, \quad b^2 = 8l+1, c^2 = 8m+1, \quad d^2 = 8n+1, \quad e^2 = 8p+1, \quad f^2 = 8q+1.$$

Ако замениме во (1) добиваме

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = 8(k+l+m+n+p) + 5 \neq 8q+1 = f^2.$$

Заради добиената контрадикција, таков шестаголник не постои, односно не постои таков шестаголник во кој должините на страните се непарни броеви.

Забелешка. Последниот дел може да се запише на слениот начин. Броевите n и $n-1$ се последователни природни броеви, па $2 \mid n(n-1)$ и имаме $x^2 \equiv 1 \pmod 8$. Според тоа,

$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \equiv 5 \pmod 8$, а $f^2 \equiv 1 \pmod 8$,

што е контрадикција со (1). Затоа, не може сите да се непарни.

4. Нека A е природен број со парен број на цифри, а B е бројот добиен со некоја промена на редоследот на цифрите на бројот A, при што $A + B = 10^n$.

Докажи дека, ако n парен број, тогаш секој од броевите A и B со горното својство е делив со 10.

Решение. Нека $A = \overline{a_1 a_2 ... a_n}$ и $B = \overline{b_1 b_2 ... b_n}$. Од условот $A + B = 10^n$, следува дека збирот на последните две цифри е 0 или 10.

Ако $a_n + b_n = 10$, тогаш од условот $A + B = 10^n$, би следувало дека $a_k + b_k = 9$ за секое $k = 1, 2, ..., n-1$. Со собирање на равенствата се добива дека

$$a_1 + a_2 + \ldots a_n + b_1 + b_2 + ... + b_n = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + ... + (a_n + b_n) = 9(n-1) + 10.$$

Левата страна на равенството е парен број бидејќи цифрите на бројот A се исти со цифрите на бројот B. Десната страна на равенството е непарен број, бидејќи $9(n-1)$ е непарен број. На тој начин добивме противречност со претходното тврдење.

Следува $a_n + b_n = 0$, односно $a_n = 0$ и $b_n = 0$, бидејќи a_n и b_n се цифри, што значи дека секој од броевите A и B е делив со 10.

II година

1. Реши ја равенката

$$\sqrt{x^2+x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=\sqrt{x+3},$$

во множеството реални броеви.

Решение. Дефиниционата област на равенката е

$$D=\left\{x \,\middle|\, x^2+x\ge 0, x\ne 0, x\ge -3\right\}=\left[-3,-1\right]\cup\left(0,+\infty\right).$$

Со кадрирање на равенката добиваме:

$$x^2+x+1+\frac{1}{x^2}+2\sqrt{\left(x^2+x\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=x+3,$$

и оттука имаме

$$x^2-2+\frac{1}{x^2}+2\sqrt{\left(x+1\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)}=0,$$

односно

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2\sqrt{\left(x+1\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)}=0.$$

Последната равенка е еквивалентна со системот

$$\begin{cases}\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=0\\ \sqrt{\left(x+1\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)}=0.\end{cases}.$$

Имаме $\begin{cases}x-\frac{1}{x}=0\\ \left(x+1\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)=0\end{cases}$, $\begin{cases}x-\frac{1}{x}=0\\ 2x\left(x+1\right)=0\end{cases}$, $\begin{cases}x-\frac{1}{x}=0\\ x_1=0, x_2=-1\end{cases}$. Бидејќи $x=-1\in D$ и ја задоволува $x-\frac{1}{x}=0$, $x=-1$ е решението на равенката.

2. Дадени се броевите a,b и c. Докажи дека барем една од равенките

$$x^2+(a-b)x+(b-c)=0$$
$$x^2+(b-c)x+(c-a)=0$$
$$x^2+(c-a)x+(a-b)=0$$

има реални решенија.

Решение. Ќе ги разгледаме броевите $a_1=a-b$, $b_1=b-c$ и $c_1=c-a$. Притоа,

$$a_1+b_1+c_1=(a-b)+(b-c)+(c-a)=0.$$

Од последното равенство, добиваме дека барем еден од трите собироци е непозитивен. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека тоа е бројот $b-c$. Значи $b-c\le 0$, па за првата равенка имаме дискриминанта

$$D=(a-b)^2-4(b-c)\geq 0\,,$$

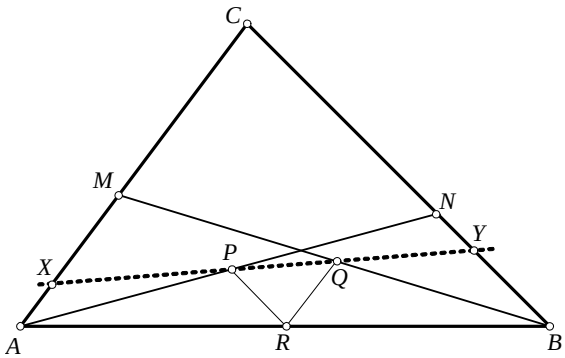
(како збир на ненегативни броеви).

Првата равенка има решенија

$$x_{1/2}=\frac{-(a-b)\pm\sqrt{(a-b)^2-4(b-c)}}{2}\in\mathbb{R}\,.$$

Аналогно се разгледуваат и другите случаи.

3. Точките M и N се на страните AC и BC на триаголникот ABC, соодветно и за нив важи $\overline{AM}=\overline{BN}$. Докажи дека правата која минува низ средините на отсечките AN и BM е нормална со симетралата на аголот ACB.



Решение. Да ги означиме со P и Q средините на отсечките AN и BM, соодветно, со R средината на страната AB и со X и Y пресеците на PQ со AC и BC, соодветно. Тогаш PR и QR се средни линии во триаголниците ABN и BMA, соодветно и затоа $\overline{PR}=\frac{\overline{BN}}{2}$ и $\overline{QR}=\frac{\overline{AM}}{2}$, а од условот $\overline{AM}=\overline{BN}$ следува $\overline{PR}=\overline{QR}$, односно триаголникот PQR е рамнокрак. Од паралелноста на PR и BN добиваме дека $\angle QPR=\angle CYX$, а од паралелноста на QR и AM, $\angle PQR=\angle CXY$. Значи, триаголникот CXY е рамнокрак (со основа XY) па симетралата на аголот XCY, односно на аголот ACB, е нормална со правата која минува низ P и Q, што требаше да се докаже.

4. Решенијата на квадратната равенка $x^2+bx+c=0$ припаѓаат на интервалот $(2,3)$. Докажи дека важи $5b+2c+12<0$.

Решение. Може да забележиме дека од условот според кој решенијата $x_1,x_2\in(2,3)$, точни се следниве неравенства:

1) $x_1-2>0, x_2-3<0$, од каде $(x_1-2)(x_2-3)<0$ ... (1)

2) $x_2-2>0, x_1-3<0$, од каде $(x_2-2)(x_1-3)<0$ ...(2).

Сега, користејќи ги Виетовите правила,

$$5b+2c+12=-5(x_1+x_2)+2x_1x_2+12=(x_1x_2-2x_1-3x_2+6)+(x_1x_2-3x_1-2x_2+6)=$$
$$=(x_1-3)(x_2-2)+(x_1-2)(x_2-3)<0\,,$$

како директен збир на претходно добиените неравенства (1) и (2).

III година

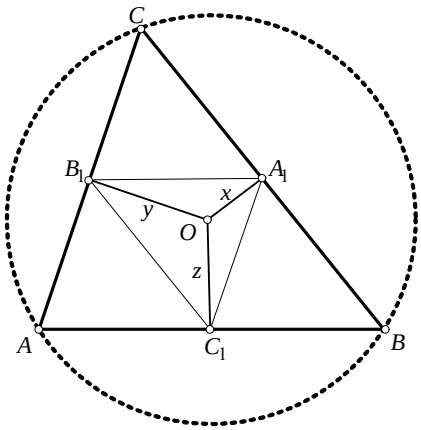
1. Реши го системот $\begin{cases}3^{2x-2y}+2\cdot 3^{x-y}-3=0\\ 3^x+3^{1-y}=4\end{cases}$.

Решение. Ќе воведеме смена $3^x=u, 3^{-y}=v$, каде $u,v>0$. Системот добива облик $\begin{cases}u^2v^2+2uv-3=0\\ u+3v=4\end{cases}$, односно $\begin{cases}(uv)^2+2uv-3=0\\ u+3v=4\end{cases}$. Првата равенка ја решаваме како квадратна по uv, од каде се добиваат две решенија $uv=1$ и $uv=-3$. Заради $u,v>0$, понатамуј го разгледуваме само решението $uv=1$. За да се добијат вредностите за x,y, потребно е да го решиме системот

$\begin{cases} uv = 1 \\ u + 3v = 4 \end{cases}$. Решенијата на системот се решенија на квадратната равенка $v(4-3v)-1=0$, односно $v_1 = 1$ и $v_2 = \frac{1}{3}$. Тогаш соодветните вредности за u се $u_1 = 1$ и $u_2 = 3$.

На крај, со решавање на системите $\begin{cases} 3^x = 1 \\ 3^{-y} = 1 \end{cases}$ и $\begin{cases} 3^x = 3 \\ 3^{-y} = \frac{1}{3} \end{cases}$, се добиваат решенијата на почетниот систем $(x, y) \in \{(0,0),(1,1)\}$.

2. Должините на страните на остроаголниот триаголник ABC се a, b и c, а растојанијата од центарот на опишаната кружница до страните a, b и c се x, y и z, соодветно. Докажи дека



$$ayz + bzx + cxy = \frac{abc}{4}.$$

Решение. Нека C_1, A_1 и B_1 се средините на страните AB, BC и CA, соодветно, O е центарот на опишаната кружница и α, β и γ се аглите во триаголникот ABC. Триаголниците ABC и $A_1B_1C_1$ се слични, со коефициент на сличност 2 и затоа $P_{\Delta A_1B_1C_1} = \frac{P_{\Delta ABC}}{4} = \frac{abc}{16R}$, каде R е радиусот на опишаната кружница околу триаголникот ABC. Бидејќи x, y и z се растојанијата од центарот на опишаната кружница до страните a, b и c, имаме $\overline{OA_1} = x$, $\overline{OB_1} = y$ и $\overline{OC_1} = z$. Од тетивноста на четириаголниците CB_1OA_1, AC_1OB_1 и BA_1OC_1 следува дека $\angle B_1OA_1 = 180^\circ - \gamma$, $\angle C_1OB_1 = 180^\circ - \alpha$ и $\angle A_1OC_1 = 180^\circ - \beta$. Тогаш:

$$P_{\Delta A_1B_1C_1} = \frac{xy\sin(180^\circ - \gamma)}{2} + \frac{yz\sin(180^\circ - \alpha)}{2} + \frac{zx\sin(180^\circ - \beta)}{2} = \frac{xy\sin\gamma}{2} + \frac{yz\sin\alpha}{2} + \frac{zx\sin\beta}{2}$$

Од синусната теорема имаме: $\sin\alpha = \frac{a}{2R}$, $\sin\beta = \frac{b}{2R}$ и $\sin\gamma = \frac{c}{2R}$. Заменувајќи ги во горното равенство добиваме $P_{\Delta A_1B_1C_1} = \frac{xyc}{4R} + \frac{yza}{4R} + \frac{zxb}{4R}$. Тогаш $\frac{abc}{16R} = \frac{xyc}{4R} + \frac{yza}{4R} + \frac{zxb}{4R}$ и оттука се добива бараното равенство.

3. Реши ја равенката $\left[\frac{25x-2}{4}\right] = \frac{13x+4}{3}$ ($[a] = z$ ако $z \in \mathbb{Z}$ и $z \le a < z+1$).

Решение. Нека $\frac{13x+4}{3} = y$. Оттука $x = \frac{3y-4}{13}$. Ако замениме во равенката, добиваме дека $\left[\frac{25\frac{3y-4}{13} - 2}{4}\right] = y$, односно $\left[\frac{75y-126}{52}\right] = y$. Следува $y \le \frac{75y-126}{52} < y+1$, од каде

$126 \le 23y \le 178$ или $\frac{126}{23} \le y < \frac{178}{23}$. Бидејќи y е цел број следува дека $y_1 = 6$ или $y_2 = 7$. Оттука $x_1 = \frac{14}{13}$ и $x_2 = \frac{17}{13}$ се решенијата на дадената равенка.

4. Ако $tg^5x - tg^3x + tgx = 2$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, докажи дека $3 < tg^6x < 4$.

Решение. На почеток ќе воведеме смена $tgx = y$. Тогаш е доволно да покажеме дека, ако $y^5 - y^3 + y = 2,$ за y реален број, важи $3 < y^6 < 4$.

Од $y^5 - y^3 + y = y\left(y^4 - y^2 + 1\right) = y\left(\left(y^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right) = 2$ и од $\left(y^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \ge \frac{3}{4}$, јасно е дека $y > 0$. Исто така важи и $y \ne 1$.

Ќе го трансформираме изразот $y^6 + 1$ во облик

$$y^6 + 1 = \left(y^2 + 1\right)\left(y^4 - y^2 + 1\right) = y\left(y + \frac{1}{y}\right)\left(y^4 - y^2 + 1\right) = \left(y + \frac{1}{y}\right)\left(y^5 - y^3 + y\right) = 2\left(y + \frac{1}{y}\right)$$

Од $y > 0$, користејќи неравенство меѓу аритметичка и геометриска средина, добиваме $y + \frac{1}{y} \ge 2$, а од тоа што $y \ne 1$, ќе важи строго неравенство $y + \frac{1}{y} > 2$. Сега, конечно $y^6 + 1 = 2\left(y + \frac{1}{y}\right) > 4$, од каде $y^6 > 3$. Од друга страна, трансформирајќи го условот $y^5 - y^3 + y = 2,$ во $y^5 + y = y^3 + 2$, делејќи со $y^3 \ne 0$, добиваме $y^2 + \frac{1}{y^2} = 1 + \frac{2}{y^3}$. Сега $y^2 + \frac{1}{y^2} > 2$ (неравенство меѓу аритметичка и геометриска средина, при $y \ne 1$), а од тука $1 + \frac{2}{y^3} = y^2 + \frac{1}{y^2} > 2$. Добиваме $y^3 < 2,$ односно $y^6 < 4$. Значи навистина $3 < y^6 < 4$.

IV година

1. Низата (a_n) е зададена со $a_1 = 1, a_2 = \sqrt{19}$ и

$$a_{n+1} + a_n + a_{n-1} = 3n,\ n \ge 2.$$

Пресметај a_{2011}.

Решение. Со принципот на математичка индукција се покажува дека за $k \ge 1$ важи

$$a_{3k} = 3(k+1) - (a_1 + a_2);$$

$$a_{3k+1} = 3k + a_1;$$

$$a_{3k+2} = 3k + a_2.$$

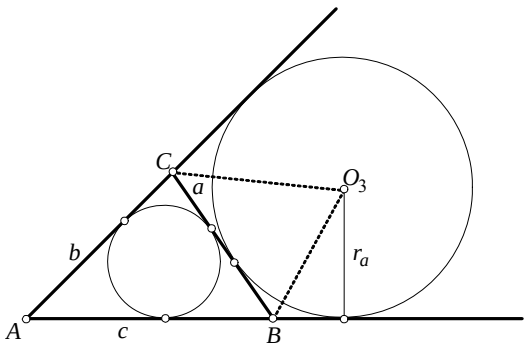
Бидејќи $2011 = 3 \cdot 670 + 1$, следува дека

$$a_{2011} = a_{3 \cdot 670 + 1} = 3 \cdot 670 + a_1 = 3 \cdot 670 + 1 = 2011.$$

2. Да се докаже дека за секој триаголник важи неравенството

$$r^2 + {r_a}^2 + {r_b}^2 + {r_c}^2 \ge 4P,$$

каде r е радиусот на кружницата впишана во триаголникот, а r_a, r_b, r_c се радиусите на припишаните кружници на триаголникот.



Решение. Нека $a=\overline{BC}$, $b=\overline{AC}$, $c=\overline{AB}$ и $s=\frac{a+b+c}{2}$. Тогаш

$$P=P_{\Delta AO_3B}+P_{\Delta AO_3C}-P_{\Delta BO_3C}=$$
$$=\frac{1}{2}cr_a+\frac{1}{2}br_a-\frac{1}{2}ar_a=(s-a)r_a$$

Па, $r_a=\frac{P}{s-a}$. Сосема аналогно се добива дека $r_b=\frac{P}{s-b}$ и $r_c=\frac{P}{s-c}$. Од неравенството помеѓу квадратна и геометриска средина имаме дека

$$r^2+r_a{}^2+r_b{}^2+r_c{}^2\geq 4\sqrt{rr_ar_br_c}=\frac{4P^2}{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}=4P\ .$$

3. Множеството A ги задоволува следните услови:

(а) $A\subseteq\{1,2,3,...,100\}$;

(б) $|A|=50$;

(в) Ако a_i и a_j се елементи во A тогаш $a_i+a_j\neq 100$.

Докажи дека A содржи елемент што е полн квадрат.

Решение. Ако $100\in A$ тогаш A содржи полн квадрат $\left(100=10^2\right)$. Нека $100\notin A$. Тогаш $A\subseteq\{1,2,3,...,99\}$. Да ги разгледаме двоелементните множества $\{1,99\}$, $\{2,98\}$, $\{3,97\}$, ... , $\{49,51\}$, заедно со едноелементното множество $\{50\}$. Сите тие се попарно дисјунктни, вкупно се 50 и нивната унија е $\{1,2,3,...,99\}$. Од дадените услови следува дека A содржи точно по еден елемент од секое од овие множества. Бидејќи меѓу дадените множества се наоѓа и $\{36,64\}$, следува дека и во овој случај **A** содржи полн квадрат $\left(36=6^2,64=8^2\right)$.

4. Да се најдат сите полиноми полином со реални коефициенти, така да за секој реален број x да важи

$$(1+2x)P(2x)=(1+2^{1000}x)P(x)\ .$$

Решение. Нека $P(x)=a_\circ x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n$. Од условот на задачата, за најстариот коефициент имаме $2\cdot 2^n a_\circ=2^{1000}a_\circ$. Па степенот на полиномот е $n=999$. Јасно е дека $x=-\frac{1}{2}$ е нула на полиномот. Тогаш, за $x=-\frac{1}{2^2}$ имаме $(1-2\frac{1}{2^2})P(-\frac{1}{2})=(1+2^{1000}(-\frac{1}{2^2}))P(-\frac{1}{2^2})$, односно $(1-2^{998})P(-\frac{1}{2^2})=0$, од каде следува дека $x=-\frac{1}{2^2}$ е нула на полиномот $P(x)$. Продолжувајќи понатаму, се добива дека $x=-\frac{1}{2^k}$, $1\leq k\leq 999$ се нулите на полиномот $P(x)$. Па, бараниот полином е

$$P(x)=a_\circ\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2^2}\right)\cdot...\cdot\left(x+\frac{1}{2^{999}}\right),$$

$a_\circ\in R$ е бараниот полином.

LV Републички натпревар по математика
17.03.2012, Машински факултет, Скопје

I година

1. Колку има петцифрени броеви од облик $\overline{37abc}$, такви што секој од броевите $\overline{37abc}$, $\overline{37bca}$ и $\overline{37cab}$ е делив со 37?

Решение. Петцифрениот број $\overline{37abc}$ е делив со 37 ако и само ако бројот $\overline{abc}$ е делив со 37. Нека означиме $x=\overline{abc}, y=\overline{bca}$ и $z=\overline{cab}$. Тогаш,

$$x=100a+10b+c,\quad y=100b+10c+a,\quad z=100c+10a+b$$

или

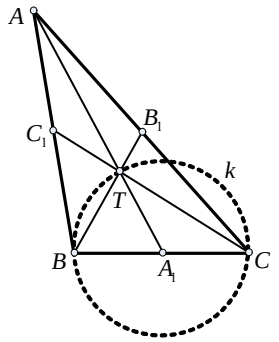
$$10x-y=999a,\quad 10y-z=999b,\quad 10z-x=999c.$$

Бидејќи 999 е содржател на 37, т.е. $999=37\cdot 27$, од претходното следи дека ако некој од броевите x,y или z е делив со 37, тогаш такви се и другите.

Па, сите барани броеви се броевите чии последни три цифри образуваат број кој е содржател на 37, т.е. 37 000, 37 037, 37 074, 37 111, ... , 37 999.

Од тоа што $999=37\cdot 27$, вакви броеви има 28 на број.

2. Во еден триаголник должината на една тежишна линија е подолга за половина должина од должината на страната кон која е повлечена. Најди го аголот меѓу другите две тежишни линии.



Решение. Нека ABC е триаголник во кој тежишните линии AA_1, BB_1 и CC_1 се сечат во точката T при што $\overline{AA_1}=\frac{3}{2}\overline{BC}$.

Од својството на тежишни линии во еден триаголник, и од условот на задачата имаме

$$\overline{TA_1}=\frac{1}{3}\overline{AA_1}=\frac{1}{2}\overline{BC}.$$

Значи, во триаголникот CTB, должината на тежишната линија TA_1 е половина од должината на страната кон која е повлечена. Значи, точките B,T и C се еднакво оддалечени од точката A_1. Според тоа тие припаѓаат на кружница со центар во A_1 и радиус $\frac{1}{2}\overline{BC}$. Значи $\measuredangle BTC=90^\circ$, односно тежишните линии BB_1 и CC_1 се сечат под прав агол.

3. Нека a,b,c се попарно различни реални броеви, такви што $a+\frac{1}{b}=b+\frac{1}{c}=c+\frac{1}{a}$. Докажи дека $a+\frac{1}{b}=-abc$.

Решение. Нека $p=a+\frac{1}{b}=b+\frac{1}{c}=c+\frac{1}{a}$. Треба да се докаже дека $p=-abc$. Ги множиме равенствата со b,c,a соодветно и добиваме:

$$ab+1=pb,\quad bc+1=pc,\quad ca+1=pa.$$

Потоа ги одземаме и се добива:

$$b(a-c)=p(b-c),\quad c(b-a)=p(c-a),\quad a(c-b)=p(a-b),$$

а ако овие три равенства се помножат се добива:

$$abc(a-c)(b-a)(c-b)=p^3(b-c)(c-a)(a-b). \qquad (*)$$

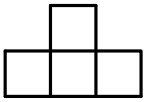
Од почетните равенства добиваме:

$$a-b=\frac{1}{c}-\frac{1}{b}=\frac{b-c}{bc}, \qquad b-c=\frac{1}{a}-\frac{1}{c}=\frac{c-a}{ac}, \qquad c-a=\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{a-b}{ab},$$

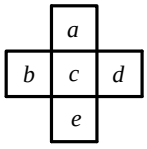
па со нивно множење имаме:

$$(a-b)(b-c)(c-a)=\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(abc)^2}.$$

Броевите се попарно различни, па според тоа $(a-b)(b-c)(c-a)\neq 0$. Од последното равенство имаме $(abc)^2=1\Rightarrow abc=\pm 1$. Од (*) и последното следи дека $p^3=-abc=\mp 1 \quad \Rightarrow p=-abc.$



4. Дали може природните броеви од 1 до 100 да се запишат во квадратна шема 10×10, секој број во едно квадратче, секој од броевите да се јавува само еднаш и збирот на броевите во секоја од фигурите како на цртежот (или истата ротирана) да биде парен број?



Решение. Ги разгледуваме броевите кои се внесени во фигурата во облик на крст (дадена на цртежот). Од условот на задачата $a+b+c+d=2m$ и $b+c+d+e=2n$. Добиваме дека $a-e=2(m-n)$ од каде мора a и e да се со иста парност. Аналогно добиваме дека b и d се со иста парност. Исто така од $a+b+c+d=2m$ и од тоа што b и d се со иста парност добиваме дека $a+b$ е парен па и a и b се со иста парност. Исто така од $c=2m-a-b-d$ е со иста парност како и другите броеви. Добиваме дека секој од броевите на сликата е со иста парност. Квадратната шема ке биде пополнета со броеви кои што се со иста парност(освен можеби броевите кои се наоѓаат на неговите краеви) . Такви се вкупно 4 па како и да се пополнат тие 4 полиња за остатокот од шемата потребни се 96 парни или непарни броеви. Меѓутоа броевите од 1 до 100 се вкупно 50 парни и 50 непарни.

II година

1. Реши ја равенката $\sqrt{x^2+x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=\sqrt{x+3}$.

Решение. За дефиниционо област добиваме $D=[-3,-1]\cup(0,+\infty)$. Тогаш,

$$x^2+x+1+\frac{1}{x^2}+2\sqrt{x^2+x}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=x+3, \qquad x^2-2+\frac{1}{x^2}+2\sqrt{(x+1)\frac{x^2+1}{x}}=0,$$

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2\sqrt{(x+1)\frac{x^2+1}{x}}=0.$$

Оттука, $\begin{cases} x-\frac{1}{x}=0 \\ (x+1)(x^2+1)=0 \end{cases}$ и добиваме дека $x=-1$, што е решение и на дадената равенка.

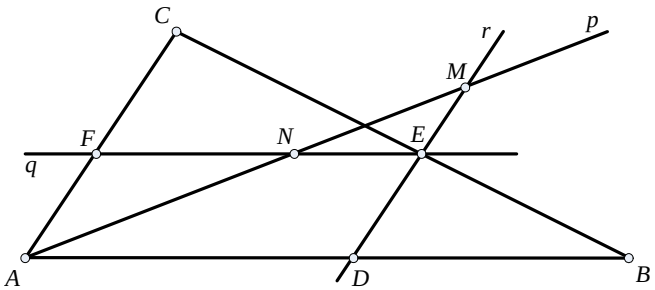
2. Даден е комплексниот број $z=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$. Пресметај го производот:

$$\left(z+\frac{1}{z}\right)\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)\ldots\left(z^{2012}+\frac{1}{z^{2012}}\right).$$

Решение. Од $z^2=\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{1-2i\sqrt{3}-3}{4}=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ и $z^3=\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{1+3}{4}=1$ следува:

$$\left(z+\frac{1}{z}\right)\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)\ldots\left(z^{2012}+\frac{1}{z^{2012}}\right)=\left(\left(z+z^2\right)\left(z^2+z\right)(1+1)\right)^{670}\left(z+z^2\right)\left(z^2+z\right)=2^{670}\left(z^2+z\right)^{1342}=$$
$$=2^{670}\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}+\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{1342}=2^{670}(-1)^{1342}=2^{670}.$$

3. Нека E е произволна точка на страната BC од триаголникот ABC, а p е произволна права која минува низ точката A. Правата q минува низ E, паралелна е со AB и $q\cap p=\{N\}$, а правата r минува низ E, паралелна е со AC и $r\cap p=\{M\}$. Докажи дека CN и MB се паралелни прави.



Решение. Да ги означиме пресечните точки на r и AB и на q и AC со D и F, соодветно. Тогаш четириаголникот $ADEF$ е паралелограм. Уште, триаголниците FAN и DMA се слични (бидејќи $\angle F=\angle D, \angle A=\angle M$), како и триаголниците CFE и EDB (од паралелноста на q и AB и на r и AC). Имаме:

$$\frac{\overline{FN}}{\overline{FC}}=\frac{\overline{FN}}{\overline{FA}}\cdot\frac{\overline{FA}}{\overline{FC}}=\frac{\overline{DA}}{\overline{DM}}\cdot\frac{\overline{ED}}{\overline{FC}}=\frac{\overline{DA}}{\overline{DM}}\cdot\frac{\overline{DB}}{\overline{FE}}=\frac{\overline{DA}}{\overline{DM}}\cdot\frac{\overline{DB}}{\overline{AD}}=\frac{\overline{DB}}{\overline{DM}}.$$

Од $\frac{\overline{FN}}{\overline{FC}}=\frac{\overline{DB}}{\overline{DM}}$ и $\angle CFN=\angle MDB$ следува дека триаголниците CFN и MDB се слични, а бидејќи по две страни им се паралелни следува дека CN и MB се паралелни.

4. Равенките $x^2+px-q=0$ и $x^2-px+q=0$, $p,q>0$, имаат целобројни решенија. Докажи дека постои правоаголен триаголник чиишто должини на катетите се природни броеви, должината на хипотенузата е p а плоштината на триаголникот е q.

Решение. Нека x_1' и x_2' се решенија на $x^2+px-q=0$, а x_1'' и x_2'' се решенија на $x^2-px+q=0$. Тогаш, од виетовите формули добиваме дека p и q се природни броеви. Нека $d=\sqrt{p^2+4q}$ и $e=\sqrt{p^2-4q}$. Тогаш, $x_{1,2}'=\frac{-p\pm d}{2}$ и $x_{1,2}''=\frac{p\pm e}{2}$ и затоа p има иста парност со d и e, а оттука d и e имаат иста парност. Јасно, $d>e$ па ако ставиме $a=\frac{d+e}{2}$ и $b=\frac{d-e}{2}$ добиваме дека a и b се природни броеви. Имаме:

$$\frac{a\cdot b}{2}=\frac{\frac{d+e}{2}\cdot\frac{d-e}{2}}{2}=\frac{d^2-e^2}{8}=\frac{8q}{8}=q$$

и

$$a^2+b^2=\left(\frac{d+e}{2}\right)^2+\left(\frac{d-e}{2}\right)^2=\frac{2}{4}\left(d^2+e^2\right)=\frac{1}{2}2p^2=p^2.$$

Значи, a и b се катети на правоаголен триаголник со хипотенуза p и плоштина q.

III година

1. Нека $x,a,b,c\in\mathbb{R}^+\setminus\{1\}$ и $b^2=ac$. Докажи дека $\frac{\log_a x}{\log_c x}=\frac{\log_a x-\log_b x}{\log_b x-\log_c x}$.

Решение. Користејќи ги својствата на логаритмите, изразот на десната страна го трансформираме на следниот начин:

$$\frac{\log_a x-\log_b x}{\log_b x-\log_c x}=\frac{\frac{1}{\log_x a}-\frac{1}{\log_x b}}{\frac{1}{\log_x b}-\frac{1}{\log_x c}}=\frac{\frac{\log_x b-\log_x a}{\log_x a\cdot\log_x b}}{\frac{\log_x c-\log_x b}{\log_x c\cdot\log_x b}}=\frac{\log_x c}{\log_x a}\frac{\log_x b-\log_x a}{\log_x c-\log_x b}=\frac{\log_a x}{\log_c x}\frac{\log_x\frac{b}{a}}{\log_x\frac{c}{b}}.$$

Од условот $b^2=ac$, забележуваме дека $\frac{b}{a}=\frac{c}{b}$, па и $\log_x\frac{b}{a}=\log_x\frac{c}{b}$. Конечно, по кратењето добиваме

$$\frac{\log_a x-\log_b x}{\log_b x-\log_c x}=\frac{\log_a x}{\log_c x}.$$

2. Во множеството цели броеви реши ја равенката $x^2=3^y+7$.

Решение. Бидејќи $x^2,7\geq 0$, а $x^2=8$ и $x^2=10$ (за $y=0,y=1$) немаат решение во множеството цели броеви, јасно е дека $y\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$. Да забележиме дека 3^y+7 е парен број, па и x^2 е парен, а од таму и x е парен. Од тука следува дека десната страна на равенката е делива со 4. Нека y е непарен, односно $y=2k+1$.

Тогаш $x^2=3^{2k+1}+7=3\cdot 3^{2k}-3+10=3\left(3^k-1\right)\left(3^k+1\right)+10$. Да забележиме дека x^2 и $3\left(3^k-1\right)\left(3^k+1\right)$ се деливи со 4, а 10 не е. Заради добиената контрадикција, заклучуваме дека мора y да е парен број. Нека $y=2s,s\geq 1$.

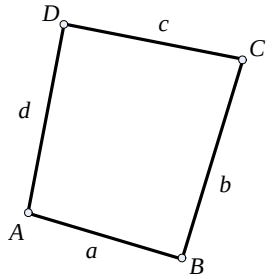
Сега, $x^2=3^{2s}+7$, односно $\left(x-3^s\right)\left(x+3^s\right)=7$, каде $x-3^s<x+3^s$. Тогаш можни се само следниве два случаи:

а) $\begin{cases}x-3^s=1\\x+3^s=7\end{cases}$, од каде $x=4,s=1$ и б) $\begin{cases}x-3^s=-7\\x+3^s=-1\end{cases}$,

од каде $x=-4,s=1$.

Можни решенија на почетната равенка се $(4,2),(-4,2)$, а за истите со проверка се добива дека се решенија на почетната равенка.

2. Нека $ABCD$ е конвексен четириаголник со плоштина $P=\frac{1}{2}(\overline{AB}\cdot\overline{BC}+\overline{CD}\cdot\overline{DA})$. Докажи дека четириаголникот е тетивен.



Решение. Нека должините на страните на четириаголникот ги означиме како на цртежот. Нека $\beta=\angle ABC$ и $\delta=\angle CDA$. Тогаш за плоштината на четириаголникот $ABCD$ имаме $P=\frac{1}{2}\left(ab\sin\beta+cd\sin\delta\right)$.

Од условот на задачата добиваме $ab+cd=2P=ab\sin\beta+cd\sin\delta\leq ab+cd$, а равенство се достигнува ако и само ако $\sin\beta=1$ и $\sin\delta=1$, односно $\beta=\delta=\frac{\pi}{2}$. Од ова следува тврдењето на задачата.

4. Реши ја равенката $\cos^n x-\sin^n x=1$, каде n природен број.

Решение. Прво ќе ги разгледаме случаите за $n=1$ и $n=2$.

Ако $n=1$, равенката добива облик $\cos x-\sin x=1$, која ја трансформираме до $\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}$, односно до $2\sin\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)=0$. Тогаш $\sin\frac{x}{2}=0$ или $\sin\frac{x}{2}=-\cos\frac{x}{2}$, па решенија на равенката се $x=2k\pi$ или $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$, за k цел број.

Ако $n=2$, равенката добива облик $\cos^2 x-\sin^2 x=1$, односно $\cos 2x=1$. Тогаш решенија се сите броеви во облик $x=k\pi$, за k цел број.

Сега, нека $n>2$ и нека $\sin x\neq 0, \cos x\neq 0$. Да забележиме дека во тој случај $|\cos x|, |\sin x|\in(0,1)$ и дека $|\cos x|^n<\cos^2 x, |\sin x|^n<\sin^2 x$. Тогаш

$$\cos^n x-\sin^n x\leq |\cos^n x-\sin^n x|\leq |\cos x|^n+|\sin x|^n<\cos^2 x+\sin^2 x=1,$$

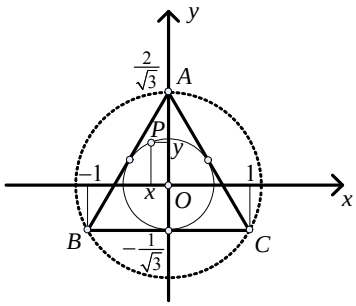
па добиваме контрадикција. Јасно, претпоставката $\sin x\neq 0, \cos x\neq 0$ не е точна, па за $n>2$, мора барем една од функциите да има вредност 0.

Доколку n е парен број, равенката $\cos^n x-\sin^n x=1$ има решение за $\sin x=0$, $\cos x=\pm 1$, а тоа е можно само за $x=k\pi$, за k цел број. Ова е истото решение кое е добиено за $n=2$.

Доколку n е непарен број, равенката $\cos^n x-\sin^n x=1$ има решение во случај кога $\cos x=1, \sin x=0$ или $\cos x=0, \sin x=-1$. Решенијата се тогаш истите од случајот кога $n=1$, односно $x=2k\pi$ или $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$, за k цел број.

IV година

1. Точката P припаѓа на впишаната кружница k во рамностраниот триаголник ABC. Ако должината на страната на триаголникот е 2, докажи дека $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2=5$.



Решение. Ќе поставиме координатен систем со координатен почеток во центарот на впишаната кружница, а x-оската да е паралелна со една страна на триаголникот. Тогаш $A\left(0,\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$, $B\left(-1,-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ и $B\left(1,-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Радиусот на впишаната кружница е $r=\frac{1}{\sqrt{3}}$. Точката P има координати (x,y) такви што $x^2+y^2=r^2=\frac{1}{3}$. Сега,

$$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2=\left[x^2+\left(y-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2\right]+\left[(-1-x)^2+\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}-y\right)^2\right]+\left[(1-x)^2+\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}-y\right)^2\right]=3(x^2+y^2)+4=3\frac{1}{3}+4=5.$$

2. Низата $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ е определена со $a_1=\frac{1}{2}$, $a_{n+1}=a_n-a_n{}^2$. Дали $a_{999}<\frac{1}{1000}$?

Решение. I начин. Од $a_{n+1}=a_n-a_n{}^2$ се добива дека $\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_n(1-a_n)}=\frac{1}{a_n}+\frac{1}{1-a_n}$. Оттука,

$$\frac{1}{a_{999}}=\frac{1}{a_{998}}+\frac{1}{1-a_{998}}=\frac{1}{a_{997}}+\frac{1}{1-a_{997}}+\frac{1}{1-a_{998}}=\ldots=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{1-a_1}+\frac{1}{1-a_2}+\ldots+\frac{1}{1-a_{998}}.$$

Имајќи во предвид дека $0<a_n<1$, добиваме $\frac{1}{1-a_n}>1$. Следува

$\frac{1}{a_{999}}=\frac{1}{a_1}+\sum_{n=1}^{998}\frac{1}{1-a_n}>2+998=1000$. Од овде $a_{999}<\frac{1}{1000}$.

II начин. Ја формираме низата $b_n=\frac{1}{a_n}$. Тогаш, $b_1=2$, $b_{n+1}=\frac{1}{\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b_n{}^2}}=b_n+1+\frac{1}{b_n-1}>b_n+1$.

Оттука, $b_n>b_1+(n-1)=n+1$, па $b_{999}>1000$, од каде $a_{999}<\frac{1}{1000}$.

3. Функцијата f е дефинирана на множеството ненегативни цели броеви $\mathbb{N}_\circ = \mathbb{N} \cup \{0\}$, и има вредности во истото множество $\mathbb{N}_\circ$. За секој $n \in \mathbb{N}_\circ$ е исполнето $f(f(n)) + f(n) = 2n + 3$. Да се најде $f(2012)$.

Решение. За $n = 0$ имаме $f(0) + f(f(0)) = 3$, па имајќи во предвид дека $f(f(0)) \geq 0$, следува дека $0 \leq f(0) \leq 3$, $f(0) \in N_0$.

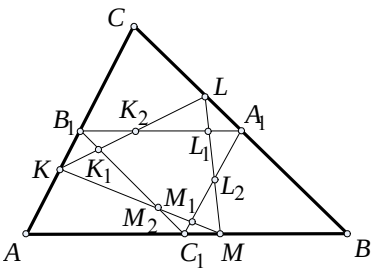
а) Нека $f(0) = 0$, тогаш $f(f(0)) = f(0) = 0$. Па, $3 = f(0) + f(f(0)) = 0$, што е контрадикција. Значи $f(0) \neq 0$.

б) Нека $f(0) = 1$. Тогаш $f(f(0)) = f(1) = 2$. Од $5 = f(1) + f(f(1)) = f(1) + f(2)$ се добива дека $f(2) = 3$. Со индукција ќе покажеме дека $f(n) = n + 1$. Нека тврдењето е точно за $k \leq n$, односно $f(k) = k + 1$. Тогаш $2k + 3 = f(k) + f(f(k)) = k + 1 + f(k+1)$. Од овде $f(k+1) = k + 2$, па согласно принципот на математичка индукција $f(n) = n + 1$ за секој n. Согласно ова, $f(2012) = 2013$.

в) Нека $f(0) = 2$. Тогаш $f(2) = 1$, па $7 = f(2) + f(f(2)) = 1 + f(1)$. Следува $f(1) = 6$. Но, $5 = f(1) + f(f(1))$, од каде $f(1) \leq 5$, што е контрадикција.

г) Нека $f(0) = 3$. Тогаш $f(3) = 0$. Но, $3 = f(0) + f(f(0)) = f(0) + f(3) = f(3) + f(f(3)) = 9$, па ова е повторно контрадикција.

Значи $f(n) = n + 1$, па $f(2012) = 2013$.



4. Триаголникот ABC има плоштина 1, A_1 е средина на BC, B_1 е средина на AC и C_1 е средина на AB. Нека M е точка на отсечката C_1B, L е точка на отсечката A_1C и K е точка на отсечката B_1A. Колкава е најмалата заедничка плоштина на триаголниците $A_1B_1C_1$ и KLM ?

Решение: Точките M_1 и M_2, L_1 и L_2, K_1 и K_2 ги означуваме како на цртежот. Да забележиме дека $\frac{\overline{C_1M_1}}{\overline{M_1L_2}} \leq \frac{\overline{AK}}{\overline{KC}} \leq \frac{\overline{AB_1}}{\overline{B_1C}} = 1$. Од ова добиваме дека $P_{\Delta C_1M_1M_2} \leq P_{\Delta M_1L_2M_2}$. Аналогно, се добива $P_{\Delta A_1L_1L_2} \leq P_{\Delta L_1L_2K_2}$ и $P_{\Delta B_1K_1K_2} \leq P_{\Delta K_1K_2M_2}$. Нека со P ја означиме заедничката плоштина на триаголниците $A_1B_1C_1$ и KLM. Тогаш

$$P_{\Delta A_1B_1C_1} - P = P_{\Delta C_1M_1M_2} + P_{\Delta A_1L_1L_2} + P_{\Delta B_1K_1K_2} \leq P_{\Delta M_1L_2M_2} + P_{\Delta L_1L_2K_2} + P_{\Delta K_1K_2M_2} = P - P_{\Delta M_2L_2K_2} \leq P.$$

Однсоно $P \geq \frac{1}{2} P_{\Delta A_1B_1C_1} = \frac{1}{8}$. Да забележиме дека вредноста $\frac{1}{8}$ се достигнува и тоа ако, на пример, избериме $M \equiv C_1$, $L \equiv C$ и $K \equiv B_1$.

LVI Републички натпревар по математика за учениците од средното образование-16.03.2013 година

1 година

1. Најди ги сите целобројни решенија на равенката $x^3 + y^3 = 2013$.

Решение. Бидејќи a^3 при делење со 9 може да има остаток 0,1 и 8, $x^3 + y^3$ може да има остаток 0,1,2,7 и 8. Бидејќи $2013 = 9 \cdot 223 + 6$ добиваме дека равенката $x^3 + y^3 = 2013$ нема решенија во множеството цели броеви.

2. Докажи дека $e + f < 2a + h$, каде што e и f се должини на дијагоналите на некој ромб, а a е должина на страната на ромбот а h е должината на висината на ромбот.

Решение. Од формулата за плоштина на ромб имаме $\frac{ef}{2} = ah \Rightarrow ef = 2ah.$ Од Питагоровата теорема меѓу страната и дијагоналите на ромбот, имаме

$$\left(\frac{e}{2}\right)^2 + \left(\frac{f}{2}\right)^2 = a^2, \text{ т.е. } e^2 + f^2 = 4a^2,$$

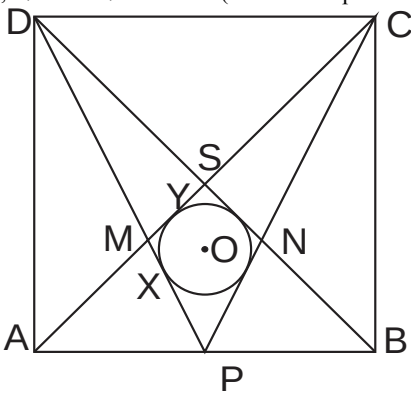
па,

$$(e+f)^2 = e^2 + 2ef + f^2 = 4a^2 + 2ef = 4a^2 + 4ah < 4a^2 + 4ah + h^2 = (2a+h)^2,$$

од каде (заради $e + f > 0$ и $2a + h > 0$) следува дека $e + f < 2a + h.$

3. Даден е квадратот $ABCD$. Дијагоналите на квадратот се сечат во точка S и P е средина на страната AB. Нека M е пресечна точка на AC и PD а N на BD и PC. Во четириаголникот $PMSN$ е впишана кружница. Докажи дека радиусот на таа кружница е еднаков на $\overline{MP} - \overline{MS}$.

Решение. Важи $OY \perp MS$, $\measuredangle YSO = \measuredangle ASP = 45^\circ$ (SP е симетрала на $\measuredangle MSN$).



Тогаш, $\Delta SYO \sim \Delta SPA$, па ΔSYO е правоаголен и рамнокрак и оттука следува дека $\overline{SY} = \overline{YO} = r$. Триаголниците OXP и PAD се слични бидејќи $\measuredangle OXP = \measuredangle DAB = 90^\circ, \measuredangle OPX = \measuredangle PDA$. Од сличноста имаме $\overline{XP} : \overline{XO} = \overline{AD} : \overline{AP} = 2 \Rightarrow \overline{XP} = 2r.$ Бидејќи X и Y се допирни точки на тангентата на кружницата повлечени од точката M имаме $\overline{MY} = \overline{MX}$. Конечно,

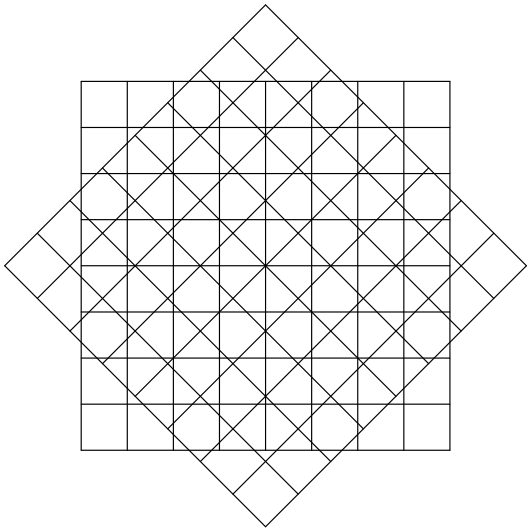
$$\overline{MP} - \overline{MS} = (\overline{MX} + \overline{XP}) - (\overline{MY} + \overline{YS}) = \overline{XP} - \overline{YS} = 2r - r = r.$$

4. Две еднакви шаховски табли (8×8 полиња) имаат заеднички центар и едната од нив потполно ја покрива другата (поставени се една над друга). Едната од нив се ротира околу центарот за 45°. Одреди ја плоштината на пресекот на

сите црни полиња на едната табла со сите црни полиња на другата табла ако плоштината на едно поле е 1.

Решение. Нека означиме со S_{cc} - збир на сите заеднички плоштини на црните полиња на горната и црните полиња на долната табла (т.е. тоа што се бара да се пресмета во задачата), со S_{cb} - збир на сите заеднички плоштини на црните полиња на горната и белите полиња на долната табла, со S_{bc} - збир на сите заеднички плоштини на белите полиња на горната и црните полиња на долната табла и со S_{bb} - збир на сите заеднички плоштини на белите полиња на горната и белите полиња на долната табла.

Тогаш, $S = S_{cc} + S_{cb} + S_{bc} + S_{bb}$, каде што S е плоштина на правилниот осумаголник кој е пресек на двете табли кога ќе се изврши ротирањето на горната табла за 45° како на сликата. Нека оваа положба на таблите е почетна.



Ако горната табла се заротира за 90° околу центарот, тогаш црните полиња на таа табла ќе дојдат на местото од нејзините бели полиња, па имаме $S_{cc} = S_{bc}$ и $S_{cb} = S_{bb}$.

Ако долната табла се заротира за 90° околу центарот, тогаш црните полиња на таа табла ќе дојдат на местото од нејзините бели полиња, па имаме $S_{cc} = S_{cb}$ и $S_{bc} = S_{bb}$. Значи $S_{cc} = S_{cb} = S_{bc} = S_{bb} \Rightarrow S_{cc} = \frac{1}{4}S.$

Исто така важи дека плоштината на заедничкиот осумаголник се добива кога од плоштината на целата табла ќе се одземе плоштината на четирите правоаголни триаголници што се наоѓаат на краевите на таблата, т.е. $S = 64 - 4P$. Останува уште да ја пресметаме плоштината P. Триаголникот е рамнокрак правоаголен и ако со a ја обележиме хипотенузата, а со h висината спуштена спрема хипотенузата, имаме дека $a = 2h.$ Ако пак со d ја означиме дијагоналата на таблата, тогаш имаме $d = 2h + 8$, т.е. $h = \frac{d-8}{2} = \frac{8\sqrt{2}-8}{2} = 4\left(\sqrt{2}-1\right).$ Тогаш за плоштината на триаголникот добиваме: $P = \frac{ah}{2} = h^2 = 16\left(\sqrt{2}-1\right)^2 = 16\left(3-2\sqrt{2}\right)$ т.е.

$$S = 64 - 4P = 128\left(\sqrt{2}-1\right)$$
$$S_{cc} = 32\left(\sqrt{2}-1\right).$$

2 година

1. За коефициентите a,b,c на квадратната равенка $ax^2+bx+c=0$ важи равенството $2b^2-9ac=0$, ако и само ако едниот корен на равенката е двапати поголем од другиот корен. Докажи!

Решение. Нека x_1 и x_2 се двата корени на равенката $ax^2+bx+c=0$. Од условот $2b^2-9ac=0$, дискриминантата на равенката е $b^2-4ac=b^2-4\frac{2b^2}{9}=\frac{b^2}{9}$ и затоа корените на равенката се $x_{1/2}=\frac{-b\pm\frac{|b|}{3}}{2a}=\frac{-3b\pm|b|}{6a}$. Ако $b>0$ добиваме $x_1=\frac{-2b}{6a}=-\frac{b}{3a}$ и $x_2=\frac{-4b}{6a}=-2\frac{b}{3a}$. Тогаш, $x_2=2x_1$. Слично добиваме и ако $b<0$.

Ако $b=0$ од равенството $2b^2-9ac=0$ добиваме дека $c=0$ (заради $a\neq 0$), па само $x=0$ е корен на равенката. Следува дека трдењето важи за $b=0$.

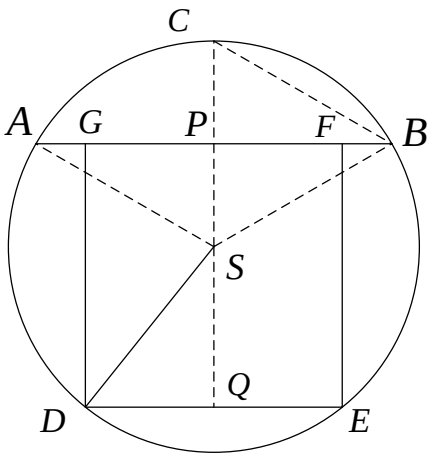
Обратно. Нека едниот корен на равенката е двапати поголем од другиот корен. Да претпоставиме дека $x_2=2x_1$. Тогаш $x_1+x_2=3x_1=-\frac{b}{a}$ и $x_1x_2=2x_1{}^2=\frac{c}{a}$. Значи, $\frac{c}{2a}=x_1{}^2=\left(-\frac{b}{3a}\right)^2=\frac{b^2}{9a^2}$ и оттука $2b^2-9ac=0$.

2. Тетивата AB ја дели една кружница со радиус r на два лаци во однос $1:2$. Во поголемиот дел впишан е квадрат чија една страна лежи на таа тетива. Изрази ја должината на страната на квадратот преку радиусот r.

Решение. Исто како што тетивата AB ја дели кружницата на два лаци во однос $1:2$ така и соодветните централни агли се однесуваат во однос $1:2$, т.е. едниот е 120°, а другиот е 240°. Нека со S го означиме центарот на кружницата. Нека C е точка од омалиот лак така што $SC\perp AB$ и $SC\cap AB=\{P\}$ и $SC\cap DE=\{Q\}$.

Тогаш имаме $\measuredangle ASB=120^\circ$, а $\measuredangle CSB=60^\circ$. Од тоа што триаголникот CSB е рамностран ($\overline{SB}=\overline{SC}=r$, а аголот меѓу нив е 60°) следува дека BP е висина во овој триаголник и ја дели страната SC на половина, т.е. $\overline{SP}=\frac{r}{2}$, а заради ова $\overline{SQ}=a-\frac{r}{2}$, каде што со a е означена страната на квадратот $DEFG$.

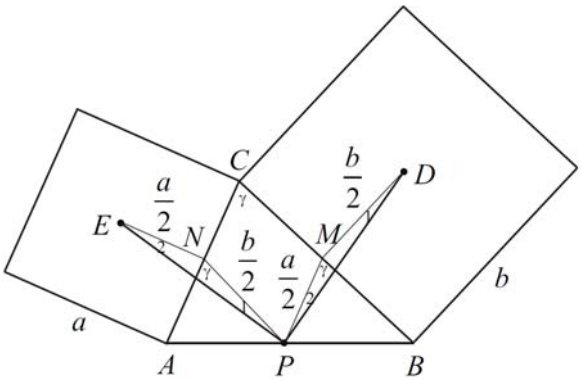
Од правоаголниот ΔSDQ со примена на Питагорова теорема, имаме:



$$r^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(a-\frac{r}{2}\right)^2 \quad \text{т.е.} \quad 5a^2-4ar-3r^2=0.$$

Бидејќи $a>0$ се добива $a=\frac{4r+\sqrt{16r^2+60r^2}}{10}$, т.е. $a=\frac{2+\sqrt{19}}{5}r$.

3. Од надворешноста на страните AC и BC во триаголникот ABC, се конструирани квадрати (со страни AC и BC) и со центри D и E. Нека P е средина на страната AB. Докажи дека отсечките PD и PE се еднакви и заемно нормални.



Решение. Нека M и N се средини на страните BC и AC и аголот при темето C е γ. Тогаш $\Delta PEN \cong \Delta DPM$, бидејќи имаат по една страна со должина $\frac{a}{2}$ и $\frac{b}{2}$, а аглите меѓу тие страни се еднакви на $90^0+\gamma$ ($\overline{PN}=\frac{b}{2}$ како средна линија, $\overline{MD}=\frac{b}{2}$, $\overline{NE}=\frac{a}{2}$ и $\overline{PM}=\frac{a}{2}$ како средна линија, $\angle PNE=90^0+\angle PNA=90^0+\gamma$ и $\angle PMD=90^0+\angle PMB=90^0+\gamma$).

Следува отсечките PD и PE се еднакви. Исто така $\angle EPN=\angle PDM$ и $\angle PEN=\angle DPM$.

Бидејќи четириаголникот $MPNC$ е паралелограм, следува дека $\angle MPN=\gamma$, од каде

$$\angle EPD=\angle EPN+\gamma+\angle MPD=\angle EPN+\gamma+\angle NEP=\gamma+\left(180^\circ-\left(90^\circ+\gamma\right)\right)=90^\circ.$$

4. Реши ја равенката $\sqrt{5-x}=x^2-5$.

Решение. Дефиниционата област на равенката е множеството $(-\infty,-\sqrt{5})\cup(\sqrt{5},5)$. За $x\in(-\infty,-\sqrt{5})\cup(\sqrt{5},5)$ дадената равенка е еквивалентна со равенката $5-x=(x^2-5)^2$. Ќе ја запишеме равенката како квадратна по бројот 5, т.е. $5^2-(1+2x^2)5+x^4+x=0$. Оттука ги добиваме равенките:

$$5=\frac{(1+2x^2)+(1-2x)}{2}\Leftrightarrow x^2-x-4=0 \text{ и } 5=\frac{(1+2x^2)-(1-2x)}{2}\Leftrightarrow x^2+x-5=0.$$

Со директна проверка забележуваме дека само $x_1=\frac{-1-\sqrt{21}}{2}, x_2=\frac{1+\sqrt{17}}{2}$ припаѓаат на дефиниционата област.

3 година

1. Докажи дека ако $a^2+b^2=1$ и $c^2+d^2=1$ тогаш $|ac\text{-}bd|\le 1$.

Решение 1. Бидејќи $a,b,c,d\in[-1,1]$ следува дека постојат реални броеви α,β такви што $a=\sin\alpha, b=\cos\alpha, c=\sin\beta, d=\cos\beta$.

Тогаш $ac-bd=\sin\alpha\sin\beta-\cos\alpha\cos\beta=-\cos(\alpha+\beta)$, па следува дека $|ac\text{-}bd|=|-\cos(\alpha+\beta)|\le 1$.

Решение 2. Од $(|a|-|c|)^2\ge 0$ и $(|b|-|d|)^2\ge 0$ следува дека $|ac|\le\frac{a^2+c^2}{2}$ и $|bd|\le\frac{b^2+d^2}{2}$.

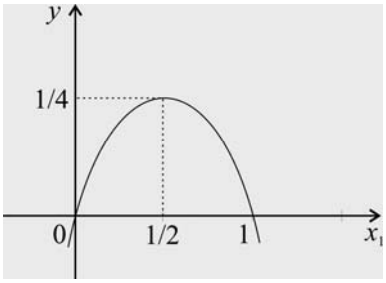
Користејќи го неравенството на триаголник и горните неравенства добиваме

$$|ac-bd|\le|ac|+|bd|\le\frac{a^2+c^2}{2}+\frac{b^2+d^2}{2}=\frac{\left(a^2+b^2\right)+\left(c^2+d^2\right)}{2}=\frac{2}{2}=1.$$

2. Докажи дека за секој реален број x важи неравенството

$$\cos(\sin x)>\sin(\cos x).$$

3. За $x_1, x_2>0,\ x_1+x_2=1$, докажи дека $\left(x_1+\frac{1}{x_1}\right)^2+\left(x_2+\frac{1}{x_2}\right)^2\ge\frac{25}{2}$.

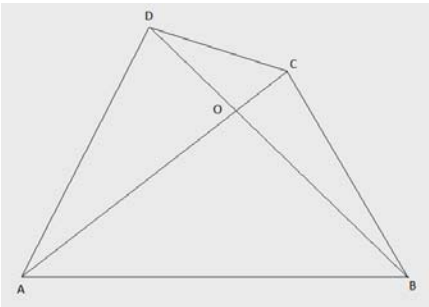


Решение 1. Нека $y=x_1x_2=x_1(1-x_1)$. За $x_1>0$, разгледувајќи го y како квадратна функција, заклучуваме дека функцијата е растечка на интервалот $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ со максимум во $x_1=\frac{1}{2}$ и тогаш $y=\frac{1}{4}$. Јасно, како функција по x_1, $y\le\frac{1}{4}$. Ќе го средиме изразот $L=\left(x_1+\frac{1}{x_1}\right)^2+\left(x_2+\frac{1}{x_2}\right)^2-\frac{25}{2}$.

Имено, $L={x_1}^2+{x_2}^2+\frac{1}{{x_1}^2}+\frac{1}{{x_2}^2}+4-\frac{25}{2}=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2+\frac{{x_1}^2+{x_2}^2}{{x_1}^2{x_2}^2}+4-\frac{25}{2}=-\left(2y-\frac{1-2y}{y^2}+\frac{15}{2}\right)$ $=-\frac{4y^3+15y^2+4y-2}{2y^2}$. За $y\le\frac{1}{4}$, $4y^3+15y^2+4y-2\le\frac{4}{4^3}+\frac{15}{4^2}+1-2=0$, па $L\ge0$ што требаше и да се докаже.

Решение 2. Изразот на левата страна од неравенството е еднаков на $x_1^2+x_2^2+\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+4$. Од неравенството меѓу квадратната и аритметичката средина за позитивните броеви x_1 и x_2 добиваме $\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2}{2}}\ge\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{1}{2}$, односно $x_1^2+x_2^2\ge\frac{1}{2}$....(1). Исто така важи и $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=\frac{x_1^2+x_2^2}{(x_1x_2)^2}$...(2). Бидејќи $\left(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}\right)^2\ge0$ следува дека $x_1x_2\le\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2=\frac{1}{4}, \frac{1}{x_1x_2}\ge4$...(3). Ако (1) и (3) ги замениме во (2) добиваме дека $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=\frac{x_1^2+x_2^2}{(x_1x_2)^2}\ge\frac{1}{2}\cdot16=8$. На крај имаме $x_1^2+x_2^2+\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+4\ge\frac{1}{2}+8+4=\frac{25}{2}$.

4. Нека $ABCD$ е конвексен четириаголник во кој должините на сите страни и дијагонали се рационални броеви. Ако O е пресекот на дијагоналите, докажи дека $\overline{AO}$ е рационален број.



Решение. Ќе означиме $\beta_1=\angle ABO$, $\beta_2=\angle CBO$, $\beta=\angle ABC$, $\delta_1=\angle AOB$ и $\delta_2=\angle BOC$. Да забележиме дека $\sin\delta_1=\sin\delta_2$. Од синусна теорема за триаголниците ABO и CBO, имаме $\frac{\overline{AO}}{\overline{AB}}=\frac{\sin\beta_1}{\sin\delta_1}$ и $\frac{\overline{BC}}{\overline{OC}}=\frac{\sin\delta_1}{\sin\beta_2}$. Од овие равенства добиваме $\frac{\overline{AO}}{\overline{OC}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}\cdot\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}$. Од косинусна теорема за триаголниците ABC, ABD и DBC, бидејќи сите

страни и дијагонали на четириаголниот се рационални броеви, следува дека $\cos\beta$, $\cos\beta_1$ и $\cos\beta_2$ се рационални броеви. Да забележиме дека

$$\cos\beta = \cos\beta_1\cos\beta_2 - \sin\beta_1\sin\beta_2$$

од што следува дека и $\sin\beta_1\sin\beta_2$ е рационален број. Па сега

$$\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2} = \frac{\sin\beta_1\sin\beta_2}{\sin^2\beta_2} = \frac{\sin\beta_1\sin\beta_2}{1-\cos^2\beta_2}$$

од што добиваме дека и $\frac{\overline{AO}}{\overline{OC}}$ е рационален број. Но, тогаш и $\frac{\overline{OC}}{\overline{AO}}+1=\frac{\overline{AC}}{\overline{AO}}$ е рационален број. Конечно, бидејќи $\overline{AC}$ е рационален број добиваме дека и $\overline{AO}$ е рационален број.

IV година

1. Докажи дека за сите реални броеви $x, y > 1$ важи неравенството

$$\frac{x^2}{y-1} + \frac{y^2}{x-1} \geq 8.$$

Решение 1. Земаме смени $a = x-1$ и $b = y-1$. Од условот на задачата следува дека a и b се позитивни реални броеви. Неравенството кое треба да го докажеме е еквивалентно со неравенството $\frac{(a+1)^2}{b}+\frac{(b+1)^2}{a}\geq 8...(1)$. Од неравенство меѓу аритметичка и геометриска средина за позитивните броеви a и 1 важи $a+1\geq 2\sqrt{a}$ т.е. $(a+1)^2 \geq 4a.$

На ист начин добиваме дека важи $(b+1)^2 \geq 4b.$ Сега ако замениме во (1) имаме

$$\frac{(a+1)^2}{b}+\frac{(b+1)^2}{a}\geq \frac{4a}{b}+\frac{4b}{a}=4\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\geq 4\cdot 2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}}=8.$$

Решение 2. Од неравенство меѓу геометриска и хармониска средина за позитивните броеви x и $\frac{x}{y-1}$ добиваме $\sqrt{x\cdot\frac{x}{y-1}}\geq\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{y-1}{x}}=2\cdot\frac{x}{y}$, т.е. $\frac{x^2}{y-1}\geq 4\cdot\frac{x^2}{y^2}...(1)$. На ист начин се добива дека $\frac{y^2}{x-1}\geq 4\cdot\frac{y^2}{x^2}....(2)$. Со собирање на (1) и (2) имаме $\frac{x^2}{y-1}+\frac{y^2}{x-1}\geq 4\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}\right)\geq 4\cdot 2\sqrt{\frac{x^2}{y^2}\cdot\frac{y^2}{x^2}}=8.$

2. Нека k е природен број. Докажи дека аритметичка прогресија чија разлика е природен број или не содржи ниту еден член кој е k-ти степен на природен број или содржи бесконечно многу.

Решение. Нека a е првиот член на аритметичката прогресија и d е нивната разлика $(d\in\mathbb{N})$. Ако a не е природен број тогаш тврдењето важи бидејќи прогресијата не содржи ниеден природен број. Нека a е природен број и нека b^k (за некој b природен број) е член на прогресијата. Јасно, постои природен број n така што $b^k = a+nd$. Тогаш, сите броеви од облик $(b+md)^k, m\in\mathbb{N}$, исто така се членови на таа аритметичка прогресија, бидејќи важи

$$(b+md)^k = b^k + kb^{k-1}md + \binom{k}{2}b^{k-2}m^2d^2 + ... + m^kd^k,$$

па оттука следува дека $(b+md)^k = b^k + dt = a+nd+dt = a+d(n+t)$, каде t е некој природен број. Со тоа доказот е завршен.

3. Најди ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такви што за секои $x, y\in\mathbb{R}$ важи $f(x^2 + f(y)) = y - x^2$.

Решение. Ако ставиме $x=0$, добиваме $f(f(y))=y$, за секој $y\in\mathbb{R}$. Па, затоа за $x,y\in\mathbb{R}$ имаме

$$f(y-x^2)=f(f(x^2+f(y))=x^2+f(y).$$

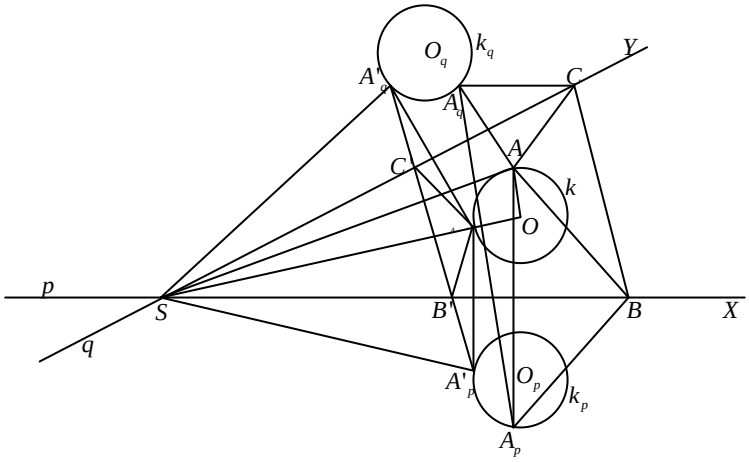
Ако замениме $y=x^2$ во последното равенство имаме:

$f(x^2-x^2)=f(0)=x^2+f(x^2)$, односно $f(x^2)=f(0)-x^2$. Ако замениме $y=0$ добиваме $f(-x^2)=x^2+f(0)$. Одовде можеме да заклучиме дека $f(x)=-x+C$, за секој реален број x, каде $C=f(0)$. Навистина, сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x+C$, $C\in\mathbb{R}$ го задоволуваат условот на задачата:

$$f(x^2+f(y))=f(x^2-y+C)=-(x^2-y+C)+C=y-x^2.$$

4. Нека е даден $\measuredangle XSY=\alpha<90^\circ$ и $k(O,r)$ е кружница која целосно се наоѓа во α. Нека ABC е триаголник таков што A е на k, B е на правата $p\equiv SX$ и C е на правата $q\equiv SY$. Ако $s=\overline{SO}$, пресметај ја најмалата вредност која може да ја достигне периметарот на ваков ΔABC.

Решение. Нека A' е пресечната точка на SO со k, које е меѓу S и O, $k_p(O_p,r)$, $k_q(O_q,r)$ се кружници односиметрични на k во однос на p и q соодветно, A'_p и A'_q се сликите на A', при осните симетрии и B' и C' се пресечни точки на $A'_pA'_q$ со p и q соодветно. Ќе докажеме дека $\Delta A'B'C'$ има најмал периметар од бараните. Нека ΔABC е произволен ваков триаголник и нека A_p и A_q се сликите на A, при осните симетрии, тогаш $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=\overline{A_pB}+\overline{BC}+\overline{CA_q}\geq\overline{A_pA_q}$.



Од друга страна $\measuredangle A_pSA_q=\measuredangle A_pSA+\measuredangle ASA_q=2(\measuredangle XSA+\measuredangle ASY)=2\measuredangle XSY=2\alpha$, па аголот $\measuredangle A_pSA_q$ не зависи од изборот на точките A, B и C. Исто така од осните симетрии следува дека $\overline{SA_p}=\overline{SA}=\overline{SA_q}$, па ΔA_pA_qS е рамнокрак. Од оценката:

$$L_{\Delta ABC}\geq\overline{A_pA_q}=2\overline{SA_p}\sin\alpha=2\overline{SA}\sin\alpha=2\left(\left(\overline{SA}+\overline{AO}\right)-\overline{AO}\right)\sin\alpha\geq$$
$$\geq 2\left(\overline{SO}-\overline{A'O}\right)\sin\alpha=2\overline{SA'}\sin\alpha=L_{\Delta A'B'C'}$$

следува дека $\Delta A'B'C'$ достигнува најмал можен периметар и тој е еднаков на $L_{\Delta A'B'C'}=2\left(\overline{SO}-\overline{A'O}\right)\sin\alpha=2(s-r)\sin\alpha$.

Забелешка: Од условот на задачата мора $s>r$.

LVII Државен натпревар по математика
за учениците од средното образование Машински факултет
Скопје, 5.IV-2014

I година

1. Определи го четирицифрениот број $\overline{xyzt}$ чиј што збир на цифри е 17, ако сите цифри се различни и ги задоволуваат равенствата:

$$2x = y - z \quad \text{и} \quad y = t^2 .$$

Решение. Бидејќи y е цифра, $y \le 9$ и $y = t^2 \Rightarrow t \le 3$. Ќе ги разгледаме сите случаи за t.

Ако $t = 0 \Rightarrow t = y = 0$ што не е можно, бидејќи според условот на задачата сите цифри треба да се различни.

Ако $t = 1 \Rightarrow t = y = 1$ што не е можно, бидејќи според условот на задачата сите цифри треба да се различни.

Ако $t = 2 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow 2x = 4 - z$ од каде што следува дека z е парен број помал од 4. Можни се следниве случаи:

1. $z = 0 \Rightarrow x = t = 2$ што не е можно, бидејќи според условот на задачата сите цифри треба да се различни,
2. $z = 2 \Rightarrow z = t = 2$ што не е можно, бидејќи според условот на задачата сите цифри треба да се различни,
3. $z = 4 \Rightarrow x = 0$ што не е можно, бидејќи тогаш бројот не би бил четирицифрен.

Значи, t не може да биде 2.

Нека $t = 3$. Тогаш, $y = 9 \Rightarrow 2x = 9 - z$ од каде што следува дека z е непарен број. Можни се следниве случаи:

1. $z = 1, x = 4 \Rightarrow \overline{xyzt} = 4913$, чиј што збир на цифри е 17, што и се бара.
2. $z = 3, x = 3$, што не е можно, бидејќи според условот на задачата сите цифри треба да се различни.
3. $z = 5, x = 2 \Rightarrow \overline{xyzt} = 2953$, но збирот на цифри е 19, па ова не е решение.
4. $z = 7, x = 1 \Rightarrow \overline{xyzt} = 1973$, но збирот на цифри е 20, па ова не е решение.
5. $z = 9, x = 0$, што не е можно, бидејќи тогаш бројот не би бил четирицифрен.

Значи, единствено решение е бројот $\overline{xyzt} = 4913$.

2. Нека броевите a, b, c и d ја задоволуваат релацијата $a + b + c + d = 0$. Докажи дека

$$5(ab + bc + cd) + 8(ac + ad + bd) \le 0 .$$

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}
5(ab+bc+cd)+8(ac+ad+bd) &= 8(ab+bc+cd+ac+ad+bd)-3(ab+bc+cd) = \\
&= 8\frac{(a+b+c+d)^2-a^2-b^2-c^2-d^2}{2}-3(ab+bc+cd) = \\
&= -4(a^2+b^2+c^2+d^2)-3(ab+bc+cd) = \\
&= -\frac{3}{2}(a^2+2ab+b^2+b^2+2bc+c^2+c^2+2cd+d^2)-b^2-c^2-\frac{5}{2}a^2-\frac{5}{2}d^2 = \\
&= -\frac{3}{2}((a+b)^2+(b+c)^2+(c+d)^2)-(b^2+c^2)-\frac{5}{2}(a^2+d^2) \le 0.
\end{aligned}$$

3. Најди ги сите природни броеви n со следново својство: за секој позитивен делител d на n, бројот $d+1$ е делител на $n+1$.

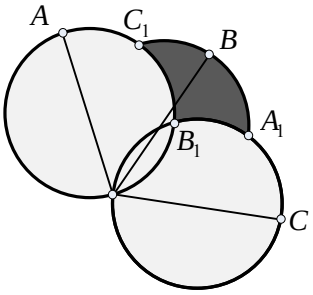
Решение. Ако n е непарен прост број или еден, делители на n се 1 и n, но тогаш $n+1$ ќе биде парен број за кој важи дека $1+1=2$ и $n+1$ се сигуно негови делители.

Ако n е парен број, тогаш $n+1$ ќе биде непарен број и $1+1=2$ нема да е делител на $n+1$, а еден е делител на n, па значи n не може да биде парен број.

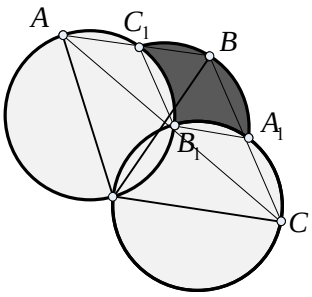
Ако n е непарен сложен број, тогаш

$$n=kl \Rightarrow n+1=kl+1=(k+1)(l-s)=(l+1)(k-t)$$
$$kl+1=kl+l-ks-s=kl+k-lt-t$$
$$1=l-s(k+1)=k-t(l+1)$$
$$l>k+1, k>l+1 \Rightarrow l>k+1>l+2$$

што не е можно. Според тоа бараните броеви се 1 и сите непарни прости броеви.



4. Во рамнина се дадени три еднакви по должина отсечки OA, OB и OC при што точката B лежи во внатрешноста на помалиот агол AOC. Тие се дијаметри на три кружници кои освен во точката O, се сечат и во точките A_1, B_1 и C_1. Докажи дека плоштината на криволинискиот триаголник $A_1B_1C_1$ (шрафираниот дел на цртежот) е половина од плоштината на триаголникот ABC.



Решение. Триаголниците $\triangle OAC_1$ и $\triangle OC_1B$ се складни, бидејќи $\overline{OA}=\overline{OB}$ (услов на задачата), $\overline{OC_1}$ е заедничка страна и $\sphericalangle OC_1B=\sphericalangle AC_1O=90^\circ$ (Талесова теорема). Од тука следува дека $\overline{AC_1}=\overline{C_1B}$, т.е. точката C_1 е средина на страната AB.

Слично, точките B_1 и A_1 се средини на страните AC и BC, соодветно. Односно, C_1B_1 и B_1A_1 се средни линии на $\triangle ABC$, од каде што следува дека $\overline{A_1B}=\overline{B_1C_1}$. Оттука следува дека плоштината на кружниот отсечок ограничен со лакот B_1C_1 и отсечката B_1C_1 е еднаква со плоштината на кружниот отсечок ограничен со лакот A_1B и отсечката A_1B. Слично, важи и за плоштините на кружните отсечоци чии лаци се BC_1 и A_1B_1.

Според тоа плоштината на криволинискиот триаголник $A_1B_1C_1$ е еднаква на плоштината на четириаголникот $A_1B_1C_1B$, која што пак е половина од плоштината на триаголникот ABC, што требаше да се докаже.

II година

1. Пресметај: $\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\ldots+\sqrt{1+\frac{1}{2013^2}+\frac{1}{2014^2}}$.

Решение. Од

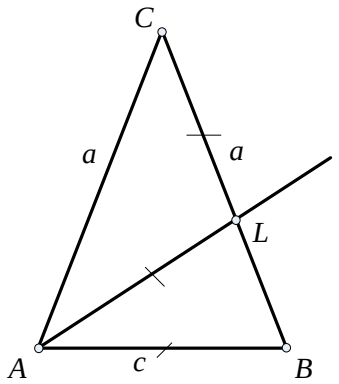
$$\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}=\sqrt{\frac{n^2(n+1)^2+(n+1)^2+n^2}{n^2(n+1)^2}}=\sqrt{\frac{n^4+2n^3+3n^2+2n+1}{n^2(n+1)^2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{n^4+n^3+n^2+n^3+n^2+n+n^2+n+1}{n^2(n+1)^2}}=\sqrt{\frac{(n^2+n+1)^2}{n^2(n+1)^2}}=\frac{n^2+n+1}{n(n+1)}=1+\frac{1}{n(n+1)}=1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1},$$

следува дека

$$\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\ldots+\sqrt{1+\frac{1}{2013^2}+\frac{1}{2014^2}}=$$

$$=1+\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+1+\frac{1}{2013}-\frac{1}{2014}=2013+1-\frac{1}{2014}=2014-\frac{1}{2014}.$$



2. Најди го односот на должината на основата и должината на кракот во рамнокрак триаголник со агол при основата од $72°$.

Решение. Нека дадениот триаголник е ABC ($\overline{AC}=\overline{BC}$ и $\angle ABC=\angle BAC=72^\circ$). Ќе воведеме ознаки $\overline{AC}=\overline{BC}=a$ и $\overline{AB}=c$. Нека $AL\,(L\in BC)$ е симетрала на аголот при темето A. Тогаш триаголниците ABC, CAL и BLA се се слични (имаат исти агли), па според тоа $\overline{AL}=\overline{AB}=\overline{CL}=c$. Од сличноста на ABC и BLA добиваме

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{BL}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \frac{c}{a}=\frac{a-c}{c},$$

односно $c^2+ac-a^2=0$. Имаме $\left(\frac{c}{a}\right)^2+\frac{c}{a}-1=0$ и затоа $\frac{c}{a}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. Значи, бараниот однос е $\frac{c}{a}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

3. Докажи дека ако $|z^2+1|=2|z+1|$, $z\in\mathbb{C}$, тогаш $|z|\le\sqrt{7}$.

Решение. Нека $z=x+iy$. Тогаш

$$z+1=x+1+iy \text{ и } z^2+1=x^2-y^2+1+2xyi,$$

од каде

$$|z^2+1|=2|z+1|$$
$$(x^2-y^2+1)^2+4x^2y^2=4\left((x+1)^2+y^2\right)$$
$$x^4+y^4+1-2x^2y^2+2x^2-2y^2+4x^2y^2=4x^2+8x+4+4y^2$$
$$x^4+2x^2y^2+y^4-2x^2-8x-3-6y^2=0$$
$$(x^2+y^2)^2-6(x^2+y^2)+4x^2-8x+4-7=0$$
$$(x^2+y^2)^2-6(x^2+y^2)+4(x-1)^2-7=0.$$

Ако ставиме $r^2=x^2+y^2$ тогаш од последното равенство следува дека

$$(r^2)^2-6r^2-7\le 0 \Leftrightarrow (r^2-7)(r^2+1)\le 0 \Leftrightarrow r^2-7\le 0 \Leftrightarrow r^2\le 7 \Leftrightarrow |r|\le\sqrt{7}$$

што требаше и да се докаже.

4. Реши ја равенката $(3x+1)(4x+1)(6x+1)(12x+1)=2$ во $\mathbb{R}$.

Решение. Имаме: $8\cdot(3x+1)\cdot 6\cdot(4x+1)\cdot 4\cdot(6x+1)\cdot 2\cdot(12x+1)=2\cdot 8\cdot 6\cdot 4\cdot 2$, односно

$$(24x+8)(24x+6)(24x+4)(24x+2)=2\cdot 8\cdot 6\cdot 4\cdot 2.$$

Нека $24x+5=y$, тогаш $(y+3)(y+1)(y-1)(y-3)=2\cdot 8\cdot 6\cdot 4\cdot 2$ и оттука $(y^2-9)(y^2-1)=2\cdot 8\cdot 6\cdot 4\cdot 2$, т.е. $y^4-10y^2+9-2\cdot 8\cdot 6\cdot 4\cdot 2=0$. Оттука, $y^2=5+\sqrt{25-9+2\cdot 8\cdot 6\cdot 4\cdot 2}=5+\sqrt{16(1+48)}=33$. Имаме, $x_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{33}}{24}$.

III година

1. Познато е дека двата корени на равенката $x^2+bx+c=0$ лежат во интервалот $(3,4)$. Докажи дека важи неравенството

$$2c+7b+24<0.$$

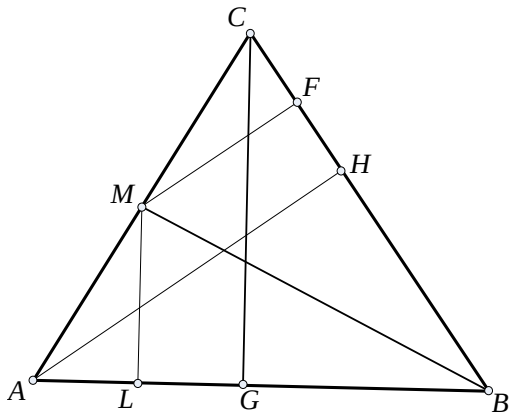
Решение. Нека x_1,x_2 се корени на равенката. Од условот на задачата, следува дека важат неравенствата $(x_1-3)(x_2-4)<0$ и $(x_1-4)(x_2-3)<0$. Со собирање на овие две неравенства и со користење на Виетовите врски за корените на квадратната равенка, се добива бараното неравенство.

2. Одреди ги сите реални решенија на равенката

$$2^x+3^x-4^x+6^x-9^x=1$$

Решение. Нека $2^x=a$ и $3^x=b$. Равенката се трансформира во $1+a^2+b^2-a-b-ab=0$, која е еквивалентна со равенката $(1-a)^2+(a-b)^2+(b-1)^2=0$. Последната равенка е возможна акко $a=b=1$, од каде следува дека $x=0$.

3. Во остроаголниот триаголник ABC, најголемата висина $\overline{AH}$ е еднаква на тежишната линија $\overline{BM}$. Докажи дека $\angle ABC\le 60^\circ$. Дали некогаш се достигнува знак на равенство?



Решение. Нека точката M е средина на отсечката $\overline{AC}$ и нека $\overline{CG}$ е друга висина на триаголникот ABC. Од M спуштаме нормали кон другите две страни на триаголникот. Нека пресечните точки на нормалите со страните $\overline{BC}$ и $\overline{AB}$ се F и L, соодветно. Тогаш, од триаголникот MBF имаме $\overline{MF}=\overline{BM}\sin\angle MBF$, односно $\overline{BM}=\overline{AH}=2\overline{MF}=2\overline{BM}\sin\angle MBF$ ($\overline{MF}$ е средна линија за триаголникот AHC). Добиваме дека $\sin\angle MBF=\frac{1}{2}$, од каде следува

$$\angle MBF=30^\circ \qquad (1)$$

Од триаголникот LBM имаме $\overline{BM}=\overline{AH}\ge\overline{CG}=2\overline{ML}=2BM\sin\angle ABM$, односно $\sin\angle ABM\le\frac{1}{2}$, од каде следува дека

$$\angle ABM\le 30^\circ \qquad (2)$$

Од (1) и (2) добиваме $\angle ABC=\angle ABM+\angle MBC\le 60^\circ$.

Аголот $\angle ABM=30^\circ$ ако и само ако $\overline{AH}=\overline{CG}$. Тоа е возможно само кога триаголникот ABC е рамнокрак, со агол при врвот од 60°, односно кога триаголникот ABC е рамностран.

4. Нека $f(t)=\sqrt{1+t^2}-t$. Пресметај ја вредноста на изразот

$$f(x)f(y)+f(y)f(z)+f(z)f(x),$$

ако $x>0, y>0, z>0$ и важи $xy+yz+zx=1$.

Решение. Воведуваме тригонометриски смени $x=\mathrm{ctg}\alpha, y=\mathrm{ctg}\beta, z=\mathrm{ctg}\gamma$, каде што α,β,γ се остри агли. Од условот на задачата, имаме дека важи равенството

$$\mathrm{ctg}\alpha\,\mathrm{ctg}\beta+\mathrm{ctg}\beta\,\mathrm{ctg}\gamma+\mathrm{ctg}\gamma\,\mathrm{ctg}\alpha=1,$$

кое што е еквивалентно со равенството

$$\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta+\mathrm{tg}\gamma=\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta\,\mathrm{tg}\gamma \tag{1}$$

Ќе покажеме дека постои триаголник со агли α,β,γ. Да забележиме, од тоа што аглите се остри, следува дека $(\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta)\mathrm{tg}\gamma\neq 0$. Од (1) ги добиваме следните еквивалентни равенства:

$$\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta+\mathrm{tg}\gamma=\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta\,\mathrm{tg}\gamma$$

$$\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta+\mathrm{tg}\gamma(1-\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta)=0$$

$$\frac{1}{\mathrm{tg}\gamma}+\frac{(1-\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta)}{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta}=0$$

$$\mathrm{ctg}\gamma+\mathrm{ctg}(\alpha+\beta)=0$$

$$\frac{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\sin(\alpha+\beta)\sin\gamma}=0 \tag{2}$$

Бидејќи аглите α,β,γ се остри, и од (2), добиваме дека $\alpha+\beta+\gamma=\pi$.

Со смената $x=\mathrm{ctg}\alpha$ и имајќи предвид дека $\sin\alpha>0$, функцијата го добива записот

$$f(x)=\sqrt{1+\mathrm{ctg}^2\alpha}-\mathrm{ctg}\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{2\sin^2(\alpha/2)}{2\sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2)}=\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Аналогно се добива $f(y)=\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}$ и $f(z)=\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}$.

Конечно, за вредноста на дадениот израз добиваме

$$f(x)f(y)+f(y)f(z)+f(z)f(x)=\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}+\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}+\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}==\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\left(\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}+\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}\right)+\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}=$$

$$=\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\mathrm{tg}\frac{\beta+\gamma}{2}\left(1-\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}\right)+\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}==\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}\left(1-\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}\right)+\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}=1$$

IV година

1. Нека a и b се реални броеви така што $a+b=2$. Докажи дека

$$\min\{|a|,|b|\}<1<\max\{|a|,|b|\}\Leftrightarrow ab\in(-3,1).$$

Решение. Нека a и b се реални броеви такви што $a+b=2$. Тогаш:

$\min\{|a|,|b|\}<1<\max\{|a|,|b|\}\Leftrightarrow |a|<1<|b|$ или $|b|<1<|a|\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^2<1<b^2$ или $\Leftrightarrow b^2<1<a^2\Leftrightarrow$ $(a^2-1)(b^2-1)<0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^2b^2-(a^2+b^2)+1<0\Leftrightarrow (ab)^2-(4-2ab)+1<0\Leftrightarrow (ab+1)^2<4\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |ab+1|<2\Leftrightarrow -2<ab+1<2\Leftrightarrow ab\in(-3,1)$.

2. Нека $a_1,a_2,\ldots$ е низа за која важи $a_1=2, a_2=5$ и

$$a_{n+2}=(2-n^2)a_{n+1}+(2+n^2)a_n$$

за сите $n\geq 1$. Дали постојат природни броеви p,q,r така што $a_pa_q=a_r$?

Решение. Првите членови на низата се $2,5,11,8,65,\ldots$ Со помош на математичка индукција ќе докажеме дека $a_n\equiv 2(\mathrm{mod}3)$ за секој природен број $n\geq 1$. Јасно, $a_1\equiv a_2\equiv 2(\mathrm{mod}3)$.

Нека претпоставиме дека $a_n\equiv a_{n+1}\equiv 2(\mathrm{mod}3)$. Од условите на задачата добиваме

$a_{n+2}=(2-n^2)a_{n+1}+(2+n^2)a_n \equiv 4-2n^2+4+2n^2 \equiv 8 \equiv 2(\mathrm{mod}3).$

Ако постојат природни броеви p,q,r така што $a_p a_q = a_r$ тогаш важи $4=2\cdot 2\equiv 2(\mathrm{mod}3)$, што не е можно. Според тоа не постојат природни броеви p,q,r така што $a_p a_q = a_r$.

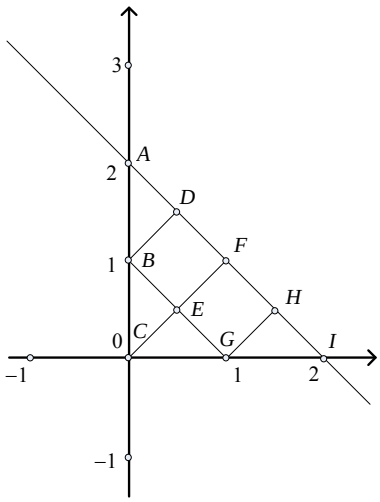
3. Нека $f(x)$ е полином со цели коефициенти, за кои важи $f(0)=23$, $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)=\ldots=f(x_n)=2014$, за некои различни $x_1,x_2,\ldots,x_n$. Најди ја максималната вредност на n.

<u>Решение.</u> Дефинираме $g(x)=f(x)-2014$. Ако $f(x_i)=2014$, тогаш x_i е нула на $g(x)$. Па, може да запишеме, $g(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-x_i)q(x)$ за некој полином $q(x)$ со цели коефициенти, каде n е максималниот број на x_i. Ставајќи $x=0$ во $g(x)$ добиваме

$$g(0)=-1991=-11\cdot 181=\prod_{i=1}^{n}(x_i)q(0).$$

Бидејќи 11 и 181 се прости броеви, следува дека -1991 може да се запише како производ на најмногу 4 различни множители, т.е. $-1991=-1\cdot 1\cdot 11\cdot 181$, па имаме дека $n\le 4$. Останува да дадеме пример кога $n=4$. Нека $g(x)=(x-1)(x+1)(x+11)(x+181)$, $q(x)=1$. Тогаш $f(x)=(x-1)(x+1)(x+11)(x+181)+2014$ ги задоволува условите на задачата.

4. Нека $i=1,2,...,7$ и a_i,b_i се ненегативни реални броеви за кои важи $a_i+b_i\le 2$. Докажи дека постојат $i,j,\ i\ne j$ така што важи $|a_i-a_j|+|b_i-b_j|\le 1$.



<u>Решение.</u> Точките (a_i,b_i) ќе ги претставиме во координатен систем. Јасно е дека секоја од нив припаѓа на триаголникот ACI или во неговата внатрешност.

Нека

$$A(0,2),B(0,1),C(0,0),D\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right),E\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),$$
$$F(1,1),G(1,0),H\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right),I(2,0).$$

Триаголникот ACI го делиме на шест области определени со триаголниците ABD,BCE,CEG,GHI и квадратите $BDFE$ и $EFHG$. Бидејќи имаме шест области во кои се наоѓат седум точки, од принципот на Дирихле, постојат две точки (a_i,b_i) и (a_j,b_j) кои припаѓат во иста област. Бидејќи важи $|x_1-x_2|+|y_1-y_2|\le 1$ за било кои две точки (x_1,y_1) и (x_2,y_2) од иста област, следува дека важи и $|a_i-a_j|+|b_i-b_j|\le 1$.

LVIII Републички натпревар 2015

I година

1. Одреди ги ненултите цифри a,b и c за кои важи $\frac{1}{a+b+c}=\overline{0,abc}$. Најди ги сите решенија!

Решение. Со множењето на даденото равенство со $1000(a+b+c)$ добиваме $1000=\overline{abc}(a+b+c)$. Бидејќи a,b и c се цифри, за нив важи $a+b+c<27$. Од друга страна, имаме дека 1000 како производ на два броја (од кои еден троцифрен) може да се претстави како $500\cdot 2,\ 250\cdot 4,\ 200\cdot 5,\ 125\cdot 8,\ 100\cdot 10.$ Проверуваме за кој од троцифрените броеви збирот на цифрите го дава вториот множител. Тоа единствено важи за $125\cdot 8$, па $a=1, b=2$ и $c=5$.

2. Дали може 77 кутии со димензии 3x3x1 да ги сместиме во сандак со димензии 7x9x11. Образложи го својот одговор.

Решение. Бидејќи $77\cdot(3\cdot 3\cdot 1)=7\cdot 9\cdot 11$ следува дека волуменот на сите кутии е еднаков на волуменот на сандакот. Затоа мора секоја од страните (ѕидовите) на сандакот да ги содржи, без остаток, страните или комбинација на страните (ѕидовите) на кутиите. Плоштината на ѕидовите на кутиите е или 9 или 3 квадратни единици. Тоа, пак, значи дека плоштината на секој ѕид на сандакот мора да е делива со 3. Но плоштина од 77 квадратни единици на ѕидот со димензии 7x11 не е делив со 3, па затоа кутиите не можеме да ги сместиме во сандакот.

3. Најди го бројот на подредени тројки од природни броеви (a,b,c) такви што $\text{НЗС}(a,b)=1000, \text{НЗС}(b,c)=2000$ и $\text{НЗС}(c,a)=2000$.

Решение. Бидејќи броевите 1000 и 2000 се од облик 2^m5^n за m,n природни броеви, добиваме дека и броевите a,b,c се исто така од облик 2^m5^n . Нека $a=2^{m_1}5^{n_1}$, $b=2^{m_2}5^{n_2}$ и $c=2^{m_3}5^{n_3}$ за m_i,n_i ненегативни цели броеви $i=1,2,3$. Од условот на задачата имаме :

$\max\{m_1,m_2\}=3$, $\max\{m_2,m_3\}=4$, $\max\{m_3,m_1\}=4$ (1)

$\max\{n_1,n_2\}=3$, $\max\{n_2,n_3\}=3$, $\max\{n_3,n_1\}=3$ (2).

Од (1) добиваме дека $m_3=4$, $m_1=3$ или $m_2=3$, ако еден е 3 додека другиот може да биде 0,1,2,3. Постојат такви 7 подредени тројки $(0,3,4),(1,3,4),(2,3,4),(3,0,4),(3,1,4),(3,2,4),(3,3,4)$.

Од (2) добиваме дека два од n_1 , n_2 , n_3 се 3 додека другиот може да биде 0,1,2,3. Бројот на такви подредени тројки е 10. Тоа се $(3,3,0),(3,3,1),(3,3,2),(3,0,3),(3,1,3),(3,2,3),(0,3,3),(1,3,3),(2,3,3),(3,3,3)$.

Бидејќи изборот на тројките (m_1,m_2,m_3) , (n_1,n_2,n_3) е независен, добиваме дека бројот на тројки (a,b,c) се $7\cdot 10=70$.

4. Даден е правоаголен триаголник ABC, таков што за катетите AC и BC важи $\overline{AC}<\overline{BC}$. Должината на тежишната линија и висината спуштени кон хипотенузата во тој триаголник се m и h , соодветно. Пресметај ја должината на симетралата на правиот агол.

решение: Бидејќи $\triangle ABC$ е правоаголен, следува дека $\overline{CM}=m=\overline{BM}$ т.е. $\triangle BMC$ е рамнокрак (цртеж 1), па $\measuredangle BCM=\beta=\measuredangle ABC.$ Очигледно и $\measuredangle ACH=\beta$ (од правоаголниот триаголник AHC). Бидејќи $\beta<45°$ (затоа што $\overline{AC}<\overline{BC}$) следува дека симетралата CL на $\measuredangle HCM$ е истовремено симетрала на аголот ACB па тогаш е јасно дека

$$\measuredangle HCL=\measuredangle MCL=\phi=45°-\beta.$$

Нека $x=\overline{HL}$ и $y=\overline{LM}$ и нека F е подножјето на нормалата спуштена од L на CM (цртеж 2). Заради $\Delta CHL\cong\Delta CFL$ добиваме $\overline{LF}=x$. Притоа, $\Delta HMC\sim\Delta FML$, па имаме:

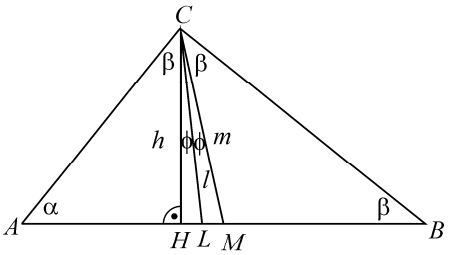
$$m:h=y:x \text{ , т.е. } y=\frac{mx}{h}.$$

Понатаму, од правоаголниот $\triangle HCM$ наоѓаме:

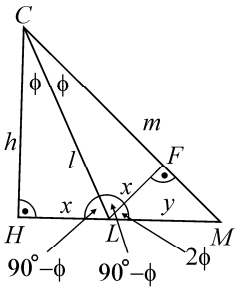
$$h^2+(x+y)^2=m^2;\ h^2+\left(x+\frac{mx}{h}\right)^2=m^2 \text{ т.е. } x^2=h^2\cdot\frac{m-h}{m+h}.$$

Конечно, од правоаголниот $\triangle HLC$ добиваме:

$$l^2=h^2+x^2=h^2+h^2\frac{m-h}{m+h}=h^2\frac{2m}{m+h} \text{ т.е. } l=h\sqrt{\frac{2m}{m+h}}.$$



цртеж 1



цртеж 2

II година

1. Дадена е квадратната равенка $3a^2x^2+10a\sqrt{b}x+3b=0$, $b>0, a\neq 0$. Докажи дека ако корените на равенката, x_1 и x_2, го задоволуваат условот $3(x_1+x_2)=5(x_1x_2+1)$, тогаш тие не зависат од a и b.

Решение. Од $3(x_1+x_2)=5(x_1x_2+1)$ имаме $3(-\frac{10a\sqrt{b}}{3a^2})=5(\frac{3b}{3a^2}+1)$, $-\frac{2a\sqrt{b}}{a^2}=\frac{b}{a^2}+1$, односно $-2a\sqrt{b}=b+a^2$ и оттука $(\sqrt{b}+a)^2=0$. Значи, $\sqrt{b}+a=0$, т.е. $a=-\sqrt{b}$. Тогаш, ја добиваме равенката $3bx^2-10bx+3b=0$, $3x^2-10x+3=0$, чиишто решенија се $\frac{1}{3}$ и 3, па корените не зависат од a и b.

2. Докажи дека за комплексен број z, ако $|z+1|<\frac{1}{\sqrt{2}}$, тогаш $|z^2+1|\geq 1$.

Решение. Да претпоставиме дека постои комплексен број z таков што $|z+1|<\frac{1}{\sqrt{2}}$ и $|z^2+1|<1$.

Нека $z=a+bi$. Тогаш $z+1=a+1+bi$ и $z^2+1=a^2-b^2+1+2abi$.

Од $|z+1|<\frac{1}{\sqrt{2}}$ добиваме

$$(a+1)^2+b^2<\frac{1}{2} \Leftrightarrow a^2+2a+1+b^2<\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2a^2+4a+2+2b^2<1 \Leftrightarrow 2b^2<-2a^2-4a-1. \ (1)$$

Од $|z^2+1|<1$ добиваме

$$\left(a^2-b^2+1\right)^2+4a^2b^2<1 \Leftrightarrow a^4+b^4+1-2a^2b^2+2a^2-2b^2+4a^2b^2<1 \Leftrightarrow$$

$$a^4+b^4+1+2a^2b^2+2a^2-2b^2<1 \Leftrightarrow \left(a^2+b^2\right)^2<2b^2-2a^2. \ (2)$$

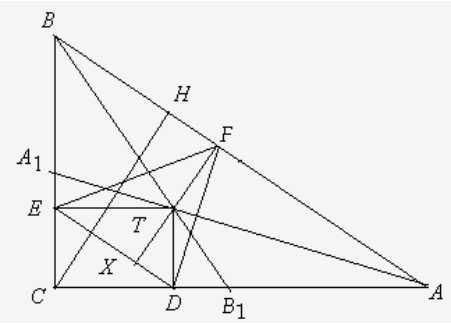
Ако оценката на $2b^2$ од (1) ја замениме во (2) добиваме

$$\left(a^2+b^2\right)^2<-2a^2-4a-1-2a^2 \Leftrightarrow \left(a^2+b^2\right)^2+4a^2+4a+1<0 \Leftrightarrow \left(a^2+b^2\right)^2+(2a+1)^2<0.$$

Последното неравенство не е можно. Следува за секој комплексен број z, ако $|z+1|<\frac{1}{\sqrt{2}}$, тогаш $|z^2+1|\geq 1$.

3. Даден е правоаголен триаголник ABC со плоштина P. Изрази ја преку P, плоштината на триаголникот чии темиња се ортогоналните проекции на тежиштето врз страните на триаголникот.

Решение. Нека D, E и F се ортогонални проекции на тежиштето T врз страните AC, BC и AB, соодветно. Четириаголникот $CDTE$ е правоаголник и оттука добиваме $\overline{CD}:\overline{CA}=\overline{A_1T}:\overline{A_1A}=1:3$ и $\overline{CE}:\overline{CB}=\overline{B_1T}:\overline{B_1B}=1:3$. Оттука следува дека DE и AB се паралелни и $\overline{DE}=\frac{\overline{AB}}{3}$. Ако FX е нормална на DE, т.е. на AF, тогаш FX и CH се паралелни и $\overline{FX}=\frac{2}{3}\overline{CH}$. Затоа, плоштината на триаголникот EDF е $\frac{\overline{ED}\cdot\overline{FX}}{2}=\frac{\overline{AB}\cdot 2\overline{CH}}{2\cdot 3\cdot 3}=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{CH}}{3\cdot 3}=\frac{2}{9}P$.



4. Во множеството на реални броеви реши ја равенката

$$\sqrt{5x^2+14x+9}-\sqrt{x^2-x-20}=5\sqrt{x+1}.$$

Решение. Треба: $5x^2+14x+9=5(x+1)\left(x+\frac{9}{5}\right)\geq 0$, $x^2-x-20=(x-5)(x+4)\geq 0$ и $x+1\geq 0$, па добиваме дека дефиниционата област е $x\geq 5$.

$$\sqrt{5x^2+14x+9}-\sqrt{x^2-x-20}=5\sqrt{x+1},\ \sqrt{(5x+9)(x+1)}=\sqrt{(x-5)(x+4)}+5\sqrt{x+1},$$

$$2x^2-5x+2=5\sqrt{(x-5)(x+4)(x+1)},$$

$$2(x^2-4x-5)+3x+12=5\sqrt{(x-5)(x+1)(x+4)},$$

$$2(x-5)(x+1)+3(x+4)=5\sqrt{(x-5)(x+1)(x+4)},$$

$$\frac{2(x-5)(x+1)+3(x+4)}{x+4}=\frac{5\sqrt{(x-5)(x+1)(x+4)}}{x+4},$$

$$\frac{2(x-5)(x+1)}{x+4}+3=5\sqrt{\frac{(x-5)(x+1)}{x+4}}.$$

Ако $\sqrt{\frac{(x-5)(x+1)}{x+4}}=y$, тогаш $2y^2-5y+3=0$ и добиваме $y_1=\frac{3}{2}, y_2=1$. Од $\sqrt{\frac{(x-5)(x+1)}{x+4}}=\frac{3}{2}$, добиваме $\frac{(x-5)(x+1)}{x+4}=\frac{9}{4}$, $4(x-5)(x+1)=9(x+4)$, $4x^2-25x-56=0$ и оттука $x_{1/2}\frac{25\pm\sqrt{625+896}}{8}$, т.е. $x_1=8$, $x_2=-\frac{7}{4}$. Од $\sqrt{\frac{(x-5)(x+1)}{x+4}}=1$, $\frac{(x-5)(x+1)}{x+4}=1$, $(x-5)(x+1)=x+4$, $x^2-5x-9=0$ и оттука $x_{3/4}\frac{5\pm\sqrt{25+36}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{61}}{2}$. Значи, решенија на равенката се 8 и $\frac{5+\sqrt{61}}{2}$.

III година

1. Реши ја неравенката $\frac{9^x-5\cdot 15^x+4\cdot 25^x}{-9^x+8\cdot 15^x-15\cdot 25^x}<0$.

Решение. Неравенката ќе ја запишеме во облик $\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^{2x}-5\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^{x}+4}{-\left(\frac{3}{5}\right)^{2x}+8\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^{x}-15}<0$, а со смената $\left(\frac{3}{5}\right)^{x}=t$ во поедноставен облик $\frac{t^2-5t+4}{-t^2+8t-15}<0$. По разложувањето на квадратните триноми последната

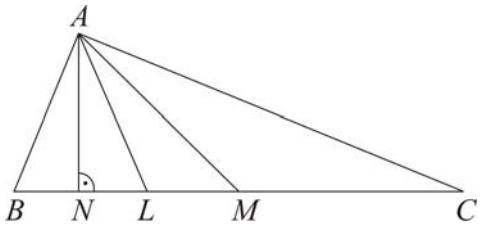
неравенка е еквивалентна со $\frac{(t-1)(t-4)}{-(t-3)(t-5)}<0$. Решенијата на последната неравенка $\frac{(t-1)(t-4)}{(t-3)(t-5)}>0$ се зададени со $t\in(0,1)\cup(3,4)\cup(5,\infty)$ односно по x со

$$x\in(-\infty,\log_{\frac{3}{5}}5)\cup(\log_{\frac{3}{5}}4,\log_{\frac{3}{5}}3)\cup(0,\infty).$$

2. Докажи дека во секој правоаголен триаголник важи неравенството $\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}\geq\frac{2ab}{c^2}$, **каде** α **и** β **се острите агли,** a **и** b **се должините на катетите, додека** c **е должината на хипотенузата.**

Решение. Од неравенството кое важи помеѓу аритметичката и геометриската средина за позитивните броеви $\sin\alpha$ и $\sin\beta$ (аглите се остри по услов, па $\sin\alpha,\sin\beta>0$) имаме $\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{2}\geq\sqrt{\sin\alpha\sin\beta}$, а од тука следува дека $\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\geq\sqrt{\sin\alpha\sin\beta}$. Бидејќи $\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2},\sin\alpha=\frac{a}{c}$ и $\sin\beta=\frac{b}{c}$, од последното неравенство следи и $\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\geq\sqrt{2}\sqrt{\frac{a}{c}}.\sqrt{\frac{b}{c}}$, односно $\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}\geq\frac{2ab}{c^2}$.

3. На страната BC **на триаголникот** ABC **редоследно лежат точките** N,L,M **, при што** N **е најблиску до** B **и** AN **е висина,** AL **симетрала на** $\measuredangle CAB$ **и** AM **е тежишната линија. Ако се знае дека** $\measuredangle NAB=\measuredangle LAN=\measuredangle MAL=\measuredangle CAM$ **, најди ги аглите на триаголникот.**



Решение. Ќе ја примениме синусна теорема на ΔALM и добиваме $\frac{\overline{AM}}{\sin\measuredangle ALM}=\frac{\overline{AL}}{\sin\measuredangle AML}$. Да забележиме дека при условите на задачата $\sin\measuredangle ALM=90^0+\frac{\alpha}{4}$ и $\sin\measuredangle AML=90^0-\frac{\alpha}{2}$, јасно ΔABL е рамнокрак и $\overline{AB}=\overline{AL}=c$. Со замена во равенството добиено од синусната теорема добиваме $\overline{AM}=\frac{c\cdot\cos\frac{\alpha}{4}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$. Од друга страна, точката M е средина на страната BC, па $P_{\Delta ABC}=2P_{\Delta AMC}$, односно $\frac{1}{2}bc\cdot\sin\alpha=\overline{AM}\cdot b\cdot\sin\frac{\alpha}{4}$. Од последните две равенства, го изразуваме $\sin\alpha$ и тоа $\sin\alpha=\frac{2\sin\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{4}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$, односно $2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$ или $\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}$. Од тука $\alpha=90^0$, $\beta=90^0-\frac{\alpha}{4},\gamma=90^0-\beta=\frac{\alpha}{4}$.

4. Нека $A_1A_2A_3$ **е даден триаголник, а** B_1,B_2,B_3 **се точки од страните** A_2A_3,A_3A_1,A_1A_2 **, соодветно, различни од темињата на триаголникот** $A_1A_2A_3$**. Докажи дека симетралите на отсечките** A_1B_1,A_2B_2,A_3B_3 **не се сечат во една точка.**

Решение. Претпоставуваме дека се сечат во точката P. Без губење од општост претпоставуваме дека $PA_1\leq PA_2\leq PA_3$. Тогаш A_1,A_2 лежат во круг со центар во P и радиус PA_3. Ова значи дека B_3 лежи во внатрешноста на овој круг и $PB_3<PA_3$. Од друга страна P лежи на симетралата на A_3B_3, па $PA_3=PB_3$.

IV година

1. Нека a,b,c се позитивни реални броеви така што a^2,b^2,c^2 се последователни членови на аритметичка прогресија. Докажи дека и броевите $\frac{1}{b+c},\frac{1}{a+c},\frac{1}{a+b}$ се последователни членови на аритметичка прогресија.

Решение. Од тоа што a^2,b^2,c^2 се членови на аритметичка прогресија следува дека

$$2b^2=a^2+c^2 \,/+2ac$$

$$2b^2+2ac=(a+c)^2$$

$$2(b^2+ac)=(a+c)^2$$

Да го разгледаме збирот

$$\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+b}=\frac{a+2b+c}{ab+b^2+ac+bc}=\frac{a+2b+c}{ab+bc+\frac{(a+c)^2}{2}}$$

$$=\frac{2(a+2b+c)}{2b(a+c)+(a+c)^2}=$$

$$=\frac{2(a+2b+c)}{(a+c)(2b+a+c)}=\frac{2}{a+c}$$

2. Ако важи $f_1(x)=\frac{x}{x-1}, f_2(x)=\frac{1}{1-x}$ и $f_{n+2}(x)=f_{n+1}(f_n(x))$ за $n\geq 1$. Пресметај $f_{2015}(2015)$.

Решение. Да ја примениме дадената рекурентна формула за неколку функции: $f_3(x)=1-x, f_4(x)=\frac{x}{x-1}, f_5(x)=\frac{x-1}{x}, f_6(x)=\frac{1}{x}, f_7=f_1, f_8=f_2$ и понатаму е периодично повторување, со период 6. Затоа $f_{2015}(x)=f_5(x)$ и $f_{2015}(2015)=\frac{2014}{2015}$.

3. Дадени се три природни броеви a,b и c. Ако за секој природен број n може да се конструира триаголник со должини на страни a^n,b^n и c^n, докажи дека секој таков триаголник е рамнокрак.

Решение. Нека $a\geq b\geq c$. Броевите a^n,b^n и c^n можат да бидат должини на страни на триаголник само ако важи $a^n<b^n+c^n$, односно $a^n-b^n<c^n$. Последното неравенство го запишуваме во обликот

$$(a-b)\left(a^{n-1}+a^{n-2}b+...+ab^{n-2}+b^{n-1}\right)<c^n \qquad (*)$$

Но, бидејќи $a\geq c$ и $b\geq c$, вториот множител на левата страна во (*) не е помал од $nc^{n=1}$. Тогаш, ако важи (*), ќе важи и неравенството $(a-b)nc^{n-1}<c^n$, т.е. $a-b<\frac{c}{n}$. Последното неравенство е исполнето за секој природен број n само кога важи $a=b$.

4. Нека m е природен број, $A=\{-m,-m+1,\ldots,-1,0,1,...,m-1,m\}$ и $f:A\to A$ е функција таква што $f(f(n))=-n$ за секој $n\in A$. Докажи дека бројот m е парен.

Решение. Нека $n\in A$ и $O_n=\{n,f(n),-n,f(-n)\}$. Бидејќи $f(f(n))=-n$ и $f(f(-n)=n$, јасно е дека ако $k\in A$ тогаш или $O_k=O_n$ или $O_n\cap O_k$ е празно множество. Уште повеќе добиваме дека $f(n)\neq f(-n)$ за $n\neq 0$. Понатаму, ако $f(\pm n)=\pm n$, тогаш $\mp n=f(f(\pm n))=f(\pm n)=\pm n$, односно $n=0$. Исто така, ако $f(\pm n)=\mp n$ добиваме $\mp n=f(f(\pm n))=f(\mp n)$, па $n=0$. Оттука имаме дека $|O_n|=4$, за $n\neq 0$, што значи дека $A\setminus\{0\}$ може да се запише како дисјунктна унија од множества со четири елементи, од каде добиваме дека m е парен.

LIX ДРЖАВЕН НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД СРЕДНОТО ОБРАЗОВАНИЕ, 19.III-2016

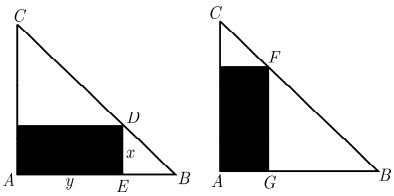
I година

1. Нека $n=\overline{abcabc}$ и $a\neq 0$. Докажи дека n не е квадрат на природен број.

Решение. Јасно е дека $n=1001\cdot\overline{abc}=7\cdot 11\cdot 13\cdot\overline{abc}$. Ако n е квадрат на природен број, тогаш $7\left|\overline{abc}\right.$, $11\left|\overline{abc}\right.$ и $13\left|\overline{abc}\right.$. Бидејќи 7,11,13 се прости броеви, добиваме дека $1001\left|\overline{abc}\right.$, што не е можно.

2. На цртежот е прикажан правоаголник, кој не е квадрат и кој може да се впише во правоаголниот триаголник на два различни начини. Едната катета на триаголникот има должина *a*. Докажи дека периметарот на правоаголникот е еднаков на *2a*.

Решение. Нека *ABC* е правоаголен триаголник со катета $\overline{AB}=a$ и нека x и y се должините на страните на правоаголникот кој на два начини е впишан во триаголникот (види цртеж). Тогаш, триаголниците *EBD* и *GBF* се слични. Според тоа,



$\frac{x}{a-y}=\frac{y}{a-x}$, од каде што добиваме

$$x(a-x)=y(a-y)$$
$$a(x-y)=x^2-y^2$$
$$a(x-y)=(x+y)(x-y)$$

Сега бидејќи $x\neq y$, добиваме $a=x+y$. Периметарот на правоаголникот е $L=2x+2y=2(x+y)=2a.$

3. Определи ги сите тројки природни броеви (x,y,z) такви што

$$2x^2y^2+2y^2z^2+2x^2z^2-x^4-y^4-z^4=576.$$

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}4x^2y^2-(x^4+y^4+z^4+2x^2y^2-2y^2z^2-2x^2z^2)&=4x^2y^2-(x^2+y^2-z^2)^2\\&=(2xy-x^2-y^2+z^2)(2xy+x^2+y^2-z^2)\\&=(z^2-(x-y)^2)((x+y)^2-z^2)\\&=(z-x+y)(z+x-y)(x+y-z)(x+y+z)=576.\end{aligned}$$

Понатаму, збирот на кои било два од броевите $z-x+y,\ z+x-y,\ x+y-z,\ x+y+z$ е парен број, па затоа тие се со иста парност и како нивниот производ е парен број, тие се парни броеви. Нека

$$z-x+y=2a,\ z+x-y=2b,\ x+y-z=2c,\ x+y+z=2d\ .$$

Тогаш $16abcd=576$, т.е. $abcd=36$. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $x\geq y\geq z$, од каде следува $d>c\geq b\geq a$. Понатаму, бројот 36 како производ на четири множители од кои едниот е поголем од останатите три можеме да го преставиме на следниве начини $36=6\cdot 3\cdot 2\cdot 1=12\cdot 3\cdot 1\cdot 1=18\cdot 2\cdot 1\cdot 1=36\cdot 1\cdot 1\cdot 1$. Сега, од $36=6\cdot 3\cdot 2\cdot 1$ добиваме $a=1,b=2,c=3,d=6$, од каде следува дека $x=b+c=5$, $y=a+c=4$ и $z=a+b=3$. Лесно се гледа дека останатите претставувања на бројот 36 доведуваат до противречност. Конечно,

$$(x,y,z)\in\{(3,4,5),(5,3,4),(4,5,3),(5,4,3),(3,5,4),(4,3,5)\}\ .$$

4. Од 43 монети наредени во еден ред, 8 монети се свртени со „писмо“ нагоре, а 35 со „глава“ нагоре. Во еден чекор се превртуваат било кои 20 монети. Дали е можно после конечен број на чекори сите монети да бидат свртени со „глава“ нагоре? Во колку најмалку чекори тоа е можно? Одговорот да се образложи!

Решение. Нека во првиот чекор x „писма“ се свртат во „глави“. Тогаш $20-x$ „глави“ ќе се свртат во „писма“. После овој чекор, бројот на „писма“ и „глави“ е:

„писма“: $(8-x)+(20-x)=28-2x$, „глави“: $x+(35-(20-x))=2x+15$

На ваков начин, при првиот чекор ќе имаме парен број на „писма“, а непарен број на „глави“. Ако во вториот чекор y „писма“ се свртат во „глави“, тогаш бројот на „писмата“ и „главите“ после овој чекор ќе биде

„писма“: $28-2x-y+(20-y)=48-2x-2y$ „глави“: $y+2x+15-(20-y)=2x+2y-5$

што значи дека парноста на бројот на „писмата“ и бројот на „главите“ не се менува. Јасно, за да се постигне саканата цел во еден чекор треба да свртиме 20 „писма“. Тоа не е можно во првиот чекор, но ако во првиот чекор свртиме 4 „писма“ и 16 „глави“ ќе добиеме $28-2\cdot 4=20$ „писма“ и $2\cdot 4+15=23$ „глави“. Сега, во вториот чекор сите 20 „писма“ ќе ги свртиме во „глава“, што значи дека сите монети може да се свртат во „глава“ после 2 чекори.

II година

1. Во множеството природни броеви реши го системот равенки

$$\begin{cases} ab+c=13, \\ a+bc=23. \end{cases}$$

Решение. Ако ги собереме авенките, добиваме:

$$(ab+c)+(a+bc)=36$$

$$(a+c)(b+1)=36$$

Ако пак, од втората ја одземеме првата равенка, добиваме:

$$(a+bc)-(ab+c)=10$$

$$(c-a)(b-1)=10$$

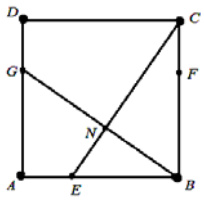
Според тоа, $(b+1)\,|\,36$ и $(b-1)\,|\,10$. Но, $36=2\cdot 18=3\cdot 12=4\cdot 9=6\cdot 6$ и $10=1\cdot 10=2\cdot 5$. Со непосредна проверка се добива дека единствени можни вредности за b се 2, 3 и 11.

За b=2, се добива системот $\begin{cases} 2a+c=13 \\ a+2c=23 \end{cases}$ чие решение е a=1, c=11.

За b=3, се добива системот $\begin{cases} 3a+c=13 \\ a+3c=23 \end{cases}$ чие решение е a=2, c=7.

За b=11, се добива системот $\begin{cases} 11a+c=13 \\ a+11c=23 \end{cases}$ чие решение е a=1, c=2.

2. На страните AB и BC на квадратот $ABCD$ дадени се точки E и F, соодветно, такви што $\overline{BE}=\overline{BF}$. Нека BN е висината во триаголникот BCE. Докажи дека триаголникот DNF е правоаголен.



Решение. Нека G е пресечната точка на AD и BN. Тогаш правоаголните триаголници ABG и BCE се складни ($\overline{AB}=\overline{BC}$ и $\angle ABG=90^\circ-\angle NBC=\angle BCN=\angle BCE$). Според тоа, $\overline{AG}=\overline{BE}=\overline{BF}$, па затоа $\overline{GD}=\overline{FC}$. Од $\angle GDC=\angle GNC=90^\circ$ следува дека четириаголникот $GNCD$ е тетивен, а од $\overline{GD}=\overline{FC}$, следува дека $GFCD$ е правоаголник. Значи, $\angle GFC=90^\circ$ и како

$\angle GNC = 90^\circ$ добиваме дека петаголникот $GNFCD$ е впишан во кружница со дијаметри GC и DF. Затоа, $\angle DNF = 90^\circ$, т.е. триаголникот DNF е правоаголен.

3. Ако равенките $x^2 + px + q = 0$ и $x^2 + px - q = 0$ имаат целобројни решенија, тогаш постојат цели броеви a и b, такви што $p^2 = a^2 + b^2$. Докажи!

Решение. Ќе покажеме дека p, q, $D_1 = \sqrt{p^2 - 4q}$ и $D_2 = \sqrt{p^2 + 4q}$ се цели броеви. Решенијата на квадратната равенка $x^2 + px + q = 0$ се $x_{1,2} = \frac{-p \pm D_1}{2}$ и тие по услов се цели броеви. Затоа, нивниот збир $\frac{-p+D_1}{2} + \frac{-p-D_1}{2} = -p$ е цел број, т.е p е цел број и нивната разлика $\frac{-p+D_1}{2} - \frac{-p-D_1}{2} = D_1$ е цел број. Од Виетовите формули имаме $x_1 x_2 = q \in \mathbb{Z}$, како производ на цели броеви. Слично, од втората равенка добиваме дека $D_2 \in \mathbb{Z}$. Понатаму, од $p^2 - 4q = D_1^2$ и $p^2 + 4q = D_2^2$ следува дека D_1 и D_2 имаат иста парност со p. Со собирање на последните равенства добиваме $2p^2 = D_1^2 + D_2^2$ или $p^2 = \frac{D_1^2 + D_2^2}{2}$. Тогаш $p^2 = \frac{D_1^2 + D_2^2}{2} = (\frac{D_1 + D_2}{2})^2 + (\frac{D_1 - D_2}{2})^2 = a^2 + b^2$, каде $a = \frac{D_1 + D_2}{2}$ и $b = \frac{D_1 - D_2}{2}$ се цели броеви, бидејќи D_1 и D_2 се со иста парност.

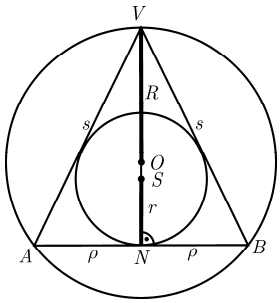
4. Даден е правилен шестаголник со страна 1. Во внатрешноста на шестаголникот земени се m точки такви што никои три точки меѓу темињата и овие m точки не се колинеарни. Шестаголникот е разделен на триаголници, при што секоја од дадените m точки и секое од темињата на шестаголникот е теме на делбен триаголник. Два делбени триаголници немаат заедничка внатрешна точка. Докажи дека постои делбен триаголник чија плоштина не е поголема од $\frac{3\sqrt{3}}{4(m+2)}$.

Решение. Ќе го определиме вкупниот број на делбени триаголници на кои е поделен дадениот шестаголник. Нека A е произволна точка од внатрешните m точки. Збирот од сите агли во точката A е 360° (збир од сите агли во A на сите триаголници кои таа точка ја имаат за свое теме). Од друга страна, збирот од сите агли во теме на шестаголникот е 120°. Бидејќи збирот на аглите во секој триаголник е 180°, бројот на делбени триаголници е: $\frac{m \cdot 360^0 + 6 \cdot 120^0}{180^0} = 2m + 4$.

Нека претпоставиме дека плоштината на секој од дадените делбени триаголници е поголема од $\frac{3\sqrt{3}}{4(m+2)}$. Тогаш збирот на плоштините на сите делбени триаголници е поголем од $(2m+4)\frac{3\sqrt{3}}{4(m+2)} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, што не е можно бидејќи плоштината на дадениот шестаголникот е $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. Конечно, од добиената противречност следува дека постои делбен триаголник чија плоштина не е поголема од $\frac{3\sqrt{3}}{4(m+2)}$.

III година

1. **Висината на прав конус е два пати подолга од радиусот на основата. Најди го односот на волуменот на топката опишана околу конусот и топката впишана во него.**



Решение. Нека $R=\overline{OV}$ е радиус и O е центарот на опишаната топка околу конусот, точката N е средина на основата на конусот, точката V е врвот на конусот, $r=\overline{SN}$ е радиус и S е центарот на впишаната топка во конусот, $v=\overline{VN}$ е висината на конусот, ρ е радиусот на основата, s е должина на бочната страна. Тогаш,

$$s=\sqrt{4\rho^2+\rho^2}=\rho\sqrt{5}\,,\ P_{\Delta ABV}=2\rho^2\,,$$

$$R=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{BV}\cdot\overline{VA}}{4P_{\Delta ABV}}=\frac{2\rho\cdot\rho\sqrt{5}\cdot\rho\sqrt{5}}{8\rho^2}=\frac{5\rho}{4}\,,\ r=\frac{2P_{\Delta ABV}}{L}=\frac{4\rho^2}{2\rho+2\sqrt{5}\rho}=\frac{2\rho}{1+\sqrt{5}}\,.$$

Затоа, бараниот однос е

$$\frac{V_R}{V_r}=\frac{\frac{4}{3}R^3\pi}{\frac{4}{3}r^3\pi}=(\frac{R}{r})^3=(\frac{\frac{5\rho}{4}}{\frac{2\rho}{1+\sqrt{5}}})^3=(\frac{5(1+\sqrt{5})}{8})^3=\frac{125(2+\sqrt{5})}{64}\,.$$

2. **За острите агли α,β и γ важи $\cos\alpha=\mathrm{tg}\beta$, $\cos\beta=\mathrm{tg}\gamma$ и $\cos\gamma=\mathrm{tg}\alpha$. Докажи дека $\sin\alpha=\sin\beta=\sin\gamma=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.**

Решение. Од условот на задачата следува

$$\cos^2\alpha=\frac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta}=\frac{1}{\cos^2\beta}-1=\frac{\cos^2\gamma}{\sin^2\gamma}-1=\frac{1}{\frac{1}{\cos^2\gamma}-1}-1=\frac{1}{\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}-1}-1=\frac{1-\cos^2\alpha}{2\cos^2\alpha-1}-1.$$

Воведуваме смена $\cos^2\alpha=t$ и ја добиваме равенката $t^2+t-1=0$. Следува дека $t_{1/2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. Бидејќи $\cos^2\alpha\geq 0$, добиваме дека $\cos^2\alpha=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Според тоа, $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=\frac{3-\sqrt{5}}{2}=(\frac{\sqrt{5}-1}{2})^2$. Бидејќи α е остар агол, добиваме дека $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Аналогно се докажува дека $\sin\beta=\sin\gamma=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

3. **Нека $a,b,c>1$ се реални броеви. Докажи дека**

$$\log_a(\frac{b^2}{ac}-b+ac)\cdot\log_b(\frac{c^2}{ab}-c+ab)\cdot\log_c(\frac{a^2}{bc}-a+bc)\geq 1.$$

Решение. Со примена на неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина добиваме $\frac{a^2}{bc}+bc\geq 2\sqrt{\frac{a^2}{bc}\cdot bc}=2a.$

Значи, $\frac{a^2}{bc}-a+bc\geq a>1$ и како $c>1$, добиваме дека $\log_c(\frac{a^2}{bc}-a+bc)\geq\log_c a>0$.

Аналогно, се докажува дека $\log_a(\frac{b^2}{ac}-b+ac)\geq\log_a b>0$ и $\log_b\log_c(\frac{c^2}{ab}-c+ab)\geq\log_b c>0.$ Конечно,

$$\log_a(\frac{b^2}{ac}-b+ac)\cdot\log_b(\frac{c^2}{ab}-c+ab)\cdot\log_c(\frac{a^2}{bc}-a+bc)\geq\log_a b\cdot\log_b c\cdot\log_c a=\frac{\lg b\cdot\lg c\cdot\lg a}{\lg a\cdot\lg b\cdot\lg c}=1.$$

4. **Од сите триаголници ABC со фиксна големина α на аголот $\angle BAC$ и фиксна должина a на страната BC, најголем периметар има рамнокракиот триаголник со основа BC. Докажи!**

Решение. Нека R е радиусот на опишаната кружица околу триаголник кој ги задоволува условите на задачата. Од синусна теорема следува дека $R=\frac{a}{2\sin\alpha}$, што

значи дека должината на радиусот на опишаната кружници околу било кој триаголник кој што ги исполнува условите на задачата е константна. Периметарот на троаголникот ќе биде најголем кога збирот $\overline{AB}+\overline{AC}$ е најголем. Сега, прво од синусна теорема, а потоа од адиционите формули следува

$$\overline{AB}+\overline{AC}=2R(\sin\gamma+\sin\beta)=4R\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}=4R\sin(90^\circ-\frac{\alpha}{2})\cos\frac{\beta-\gamma}{2}=4R\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}.$$

Но, R и α се константни, па затоа збирот $\overline{AB}+\overline{AC}$ ќе биде најголем кога $\cos\frac{\beta-\gamma}{2}$ ќе биде најголем, што значи кога $\cos\frac{\beta-\gamma}{2}=1$. Според тоа, збирот $\overline{AB}+\overline{AC}$, т.е. периметарот има најголема вредност кога $\beta=\gamma$, односно кога ABC е рамнокрак триаголник со основа BC.

IV година

1. **Докажи дека $(\frac{2}{3+\sqrt{5}})^n+(\frac{3+\sqrt{5}}{2})^n\in\mathbb{Z}$, за секој $n\in\mathbb{N}$.**

Решение. Нека $a=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$. Треба да докажеме дека $a^n+\frac{1}{a^n}\in\mathbb{Z}$, за секој $n\in\mathbb{N}$.

За $n=1$ и $n=2$ тврдењето важи бидејќи $a+\frac{1}{a}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}+\frac{2(3-\sqrt{5})}{4}=3\in\mathbb{Z}$ и $a^2+\frac{1}{a^2}=(a+\frac{1}{a})(a+\frac{1}{a})-2=9\in\mathbb{Z}$. Нека претпоставиме дека тврдењето важи за секој $n\le k$. Тогаш, за $n=k+1$ важи

$$a^{k+1}+\frac{1}{a^{k+1}}=(a^k+\frac{1}{a^k})(a+\frac{1}{a})-(a^{k-1}+\frac{1}{a^{k-1}})$$

и како $a+\frac{1}{a}, a^{k-1}+\frac{1}{a^{k-1}}, a^k+\frac{1}{a^k}\in\mathbb{Z}$ следува дека $a^{k+1}+\frac{1}{a^{k+1}}\in\mathbb{Z}$, т.е. тврдењето важи $n=k+1$. Конечно, од принципот на математичка индукција следува дека тврдењето важи за секој $n\in\mathbb{N}$.

2. **Определи ја геометриската прогресија од реални броеви кај која збирот на нејзините први четири членови е 15, а збирот на нивните квадрати е 85.**

Решение. Од условите на задачата следува $a(1+q+q^2+q^3)=15$ и $a^2(1+q^2+q^4+q^6)=85$. Оттука следува

$$\frac{(1+q+q^2+q^3)^2}{1+q^2+q^4+q^6}=\frac{45}{17}\text{, т.е. }\frac{q^4+2q^3+2q^2+2q+1}{q^4+1}=\frac{45}{17}.$$

Последната равенка е еквивалентна на равенката $14q^4-17q^3-17q^2-17q+14=0$. Но, $q\ne0$, па затоа последната равенка можеме да ја поделиме со $q^2\ne0$, после што ја добиваме равенката $14(q^2+\frac{1}{q^2})-17(q+\frac{1}{q})-17=0$, која е еквивалентна со равенката $14(q+\frac{1}{q})^2-17(q+\frac{1}{q})-45=0$. Воведуваме смена $t=q+\frac{1}{q}$ и ја добиваме равенката $14t^2-17t-45=0$, чии решенија се $t_1=\frac{5}{2}$ и $t_2=-\frac{9}{7}$. За $t_1=\frac{5}{2}$ ја добиваме равенката $q+\frac{1}{q}=\frac{5}{2}$ чии решенија се $q_1=2, q_2=\frac{1}{2}$, а додека за $t_2=-\frac{9}{7}$ равенката $q+\frac{1}{q}=-\frac{9}{7}$ нема реални решенија. Конечно, за $q_1=2$ наоѓаме $a_1=1$, т.е. ја добиваме

прогресијата $1,2,4,8,16,\ldots$, а $q_2=\frac{1}{2}$ наоѓаме $a_2=8$, т.е. ја добиваме прогресијата $8,4,2,1,\frac{1}{2},\ldots$.

3. Нека $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ е функција која ги задоволува условите:

а) f строго монотоно расте;

б) $f(x)>-\frac{1}{x}$, за $x>0$;

в) $f(x)f(f(x)+\frac{1}{x})=1$, за $x>0$.

Пресметај $f(1)$.

Решение. Нека $x>0$ и $k=f(x)+\frac{1}{x}$. Тогаш од условот б) следува $k>0$, па од условот в) следува $f(k)f(f(k)+\frac{1}{k})=1$. Но, бидејќи $x>0$ од условот в) добиваме $f(x)f(k)=f(x)f(f(x)+\frac{1}{x})=1$. Од последните две равенства следува $f(x)=f(f(k)+\frac{1}{k})=f(\frac{1}{f(x)}+\frac{1}{f(x)+\frac{1}{x}}))$. Понатаму, функцијата f строго монотоно расте, па затоа таа е инјекција и од последното равенство следува дека $x=\frac{1}{f(x)}+\frac{1}{f(x)+\frac{1}{x}})$. Последната равенка ја решаваме по $f(x)$ и добиваме $f(x)=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2x}$. Лесно се проверува дека само функцијата $f(x)=\frac{1-\sqrt{5}}{2x}$ ги задоволува условите на задачата. Значи, $f(1)=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

4. Во множеството $\mathbb{N}\cup\{0\}$ реши ја равенката $x^2+x=y^4+y^3+y^2+y$.

Решение. Очигледно е дека $(0,0)$ е едно решение на равенката. Почетната равенка ја трансформираме во обликот $x(x+1)=(y^2+1)(y^2+y)$. За $y=1$ ја добиваме равенката $x(x+1)=4$ која нема решение во множеството $\mathbb{N}\cup\{0\}$. За $y=2$ ја добиваме равенката $x(x+1)=5\cdot 6$ и парот $(5,2)$ е единствено нејзино решение во множеството $\mathbb{N}\cup\{0\}$. Нека $y\geq 3$. Тогаш

$$(y^2+1)(y^2+y)=y^4+y^3+y^2+y<y^4+y^3+\frac{5y^2}{4}+\frac{y}{2}=(y^2+\frac{y}{2})(y^2+\frac{y}{2}+1) \text{ и}$$

$$(y^2+1)(y^2+y)=y^4+y^3+y^2+y>y^4+y^3+\frac{y^2}{4}-\frac{1}{4}=(y^2+\frac{y}{2}-\frac{1}{2})(y^2+\frac{y}{2}+\frac{1}{2}).$$

Според тоа,

$$(y^2+\frac{y}{2}-\frac{1}{2})(y^2+\frac{y}{2}+\frac{1}{2})<x(x+1)<(y^2+\frac{y}{2})(y^2+\frac{y}{2}+1) \qquad (1)$$

и како $x,y\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ од последните неравенства следуваат неравенствата

$$y^2+\frac{y}{2}-\frac{1}{2}<x<y^2+\frac{y}{2} \qquad (2)$$

(во спротивно лесно се покажува дека не се исполнети неравенствата (1)). Сега, ако $y=2k$, тогаш од (2) следува дека $4k^2+2k-\frac{1}{2}<x<4k^2+2k$, што не е можно за ниту еден $x\in\mathbb{N}\cup\{0\}$. Понатаму, ако $y=2k+1$, тогаш од (2) следува дека $(2k+1)^2+k<x<(2k+1)^2+k+\frac{1}{2}$, што не е можно за ниту еден $x\in\mathbb{N}\cup\{0\}$. Според тоа, равенката нема решение за кое $y\geq 3$.

Значи, единствени решенија на равенката се $(0,0)$ и $(5,2)$.

LX РЕПУБЛИЧКИ НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД СРЕДНОТО ОБРАЗОВАНИЕ 2017

18.03.2017 година

Прва година

1. Определи ги сите петцифрени броеви $\overline{abcde}$ такви што $\overline{ab}$, $\overline{bc}$, $\overline{cd}$ и $\overline{de}$ се точни квадрати. Одговорот да се образложи!

Решение. Единствени двоцифрени броеви кои што се точни квадрати се 16, 25, 36, 49, 64 и 81. Тие почнуваат на цифрите 1, 2, 3, 4, 6 и 8, а завршуваат со цифрите 1, 4, 5, 6 и 9. Според тоа, цифрите b,c,d можат да бидат само 1, 4 и 6. Бидејќи $\overline{bc}$ и $\overline{cd}$ се точни квадрати, тоа е можно само за $\overline{bc}=16$ и $\overline{cd}=64$. Конечно, $\overline{ab}$ е точен квадрат за $a=8$ и $\overline{de}$ е точен квадрат за $e=9$. Според тоа, постои единствен број кој ги задоволува условите на задачата и тоа е бројот 81649.

2. Пресметај $A=\sqrt{\underbrace{111...1}_{2n}+\underbrace{111...1}_{n+1}+\underbrace{666...6}_{n}+8}$.

Решение. Ако означиме $\underbrace{111...1}_{n}=a$, тогаш

$$\underbrace{666...6}_{n}=6a,\ \underbrace{111...1}_{n+1}=10a+1,$$

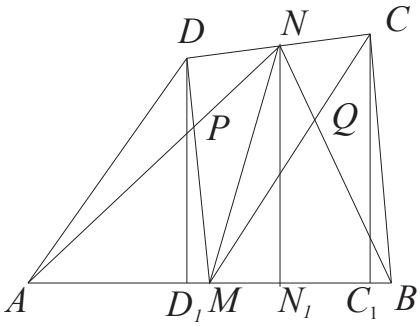
$$\underbrace{111...1}_{2n}=10^n a+a=(\underbrace{999...9}_{n}+1)a+a=9a^2+2a,$$

па, затоа

$$A=\sqrt{\underbrace{111...1}_{2n}+\underbrace{111...1}_{n+1}+\underbrace{666...6}_{n}+8}=\sqrt{9a^2+18a+9}=\sqrt{9(a^2+2a+1)}$$

$$=3\sqrt{(a+1)^2}=3(a+1)=3(\underbrace{111...1}_{n}+3)=\underbrace{33...33}_{n}6.$$

3. Нека M и N се средините на страните AB и CD на конвексниот четириаголник $ABCD$ и нека P е пресекот на MD и AN, а Q е пресекот на MC и BN. Докажи, дека плоштината на четириаголникот $MQNP$ е еднаква на збирот од плоштините на триаголниците APD и BCQ .



Решение. Нека $h_1=\overline{DD_1}$, $h=\overline{NN_1}$ и $h_2=\overline{CC_1}$ се должините на висините на триаголниците AMD, ABN и MBC , соодветно. Четириаголникот DD_1CC_1 е трапез со основи h_1 и h_2 и средна линија h , па затоа $2h=h_1+h_2$. Ако $\overline{AB}=a$, тогаш збирот на плоштините на триаголниците AMD и MBC е

$$P_{AMD}+P_{MBC}=\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}h_1+\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}h_2=\frac{1}{2}ah=P_{ABN}\ . \qquad (1)$$

Понатаму,

$$P_{AMD}=P_{AMP}+P_{APD},\ P_{MBC}=P_{MBQ}+P_{BQC} \text{ и } P_{ABN}=P_{AMP}+P_{MQNP}+P_{MBQ}\,.$$

Ако од последните три равенства замениме во (1), после скратувањето добиваме

$$P_{APD}+P_{BQC}=P_{MQNP}\,,$$

што и требаше да се докаже.

4. Во множеството прости броеви реши ја равенката $p^2+pq+q^2=r^2$.

Решение. Очигледно е дека $r>p$ и $r>q$. Равенката ја запишуваме во облик $(p+q)^2-pq=r^2$ од каде следува $(p+q-r)(p+q+r)=pq$. Јасно, $p+q-r<p+q+r$, $p+q-r<p$ и $p+q-r<q$ од каде добиваме дека p,q не се делители на $p+q-r$, па затоа важи $p+q-r=1,\ p+q+r=pq$. Со собирање на последните две равенки добиваме $2p+2q=pq+1$ или $(p-2)(q-2)=3$. Од последната равенка добиваме $p=3,q=5$ или $p=5,q=3$. И во двата случаја $r=7$.

Конечно, $(p,q,r)\in\{(3,5,7),(5,3,7)\}$.

Втора година

1. Дадена е равенката

$$(a^2-a-2)x^2+(2a^2-2a+5)x+a^2-a-2=0,\ a\neq-1,\ a\neq2.$$

Докажи дека корените на оваа равенка се реални. За која вредност на параметарот a збирот на корените е најмал?

Решение. Од

$$\begin{aligned}D&=(2a^2-2a+5)^2-4(a^2-a-2)(a^2-a-2)=(2a^2-2a+5)^2-(2(a^2-a-2))^2\\&=(2a^2-2a+5-2a^2+2a+4)(2a^2-2a+5+2a^2-2a-4)\\&=9(4a^2-4a+1)=9(2a-1)^2\geq0,\end{aligned}$$

следува дека равенката има реални решенија. Збирот на корените е најмал ако $9(2a-1)^2=0$, од каде добиваме $a=\frac{1}{2}$.

2. Системот неравенки $a_1x+b_1\geq0$, $a_1>0$; $a_2x+b_2\geq0$, $a_2<0$, нема решение. Докажи дека постојат броеви c_1 и c_2, така што важи $b_1c_1+b_2c_2<0$ и $a_1c_1+a_2c_2=0$.

Решение. Од првата неравенка добиваме $x\geq-\frac{b_1}{a_1}$, а од втората $x\leq-\frac{b_2}{a_2}$. Ако важи $-\frac{b_1}{a_1}\leq-\frac{b_2}{a_2}$, тогаш секој $x\in[-\frac{b_1}{a_1},-\frac{b_2}{a_2}]$ е решение на почетниот систем неравенки, што противречи на условот на задачата. Значи, $-\frac{b_1}{a_1}>-\frac{b_2}{a_2}$, т.е. $-b_1a_2+b_2a_1<0$. Сега ако земеме $c_1=-a_2$ и $c_2=a_1$. Тогаш $b_1c_1+b_2c_2<0$ и $a_1c_1+a_2c_2=0$.

3. Во множеството реални броеви реши го системот

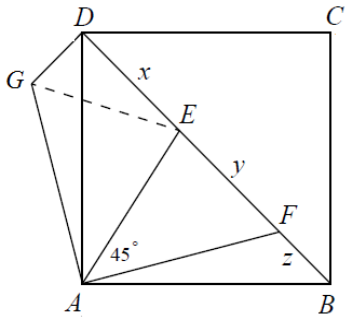
$$\begin{cases} x+\sqrt{y}=1 \\ y+\sqrt{z}=1 \\ z+\sqrt{x}=1 \end{cases}.$$

Решение. Од условот на задачата следува $x,y,z\geq 0$. Нека $x\leq y$. Тогаш $0\geq x-y=\sqrt{z}-\sqrt{y}$, односно $z\leq y$. Оттука, $y-z=\sqrt{x}-\sqrt{z}\geq 0$, односно $x\geq z$. Од $x-z=\sqrt{x}-\sqrt{y}\leq 0$ следува дека $x\leq z$. Според тоа, $x=y=z$. Од $x+\sqrt{x}=1$ добиваме дека $\sqrt{x}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. Бидејќи $\sqrt{x}\geq 0$, $\sqrt{x}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, односно $x=y=z=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Ако $x>y$, тогаш слично на претходната дискусија се добива контрадикција.

Следува дека единствени решенија на системот се $x=y=z=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

4. На дијагоналата BD на квадратот $ABCD$ избрани се точки E и F така што $\measuredangle EAF=45^\circ$. Докажи дека $\overline{EF}^2=\overline{DE}^2+\overline{FB}^2$.



Решение. Ако со x,y и z ги означиме должините на отсечките DE,EF и FB, соодветно, тогаш треба да докажеме дека $y^2=x^2+z^2$. Нека G е точка, надвор од квадратот, таква што $\triangle GAD\cong\triangle FAB$, т.е. нека $\overline{AG}=\overline{AF}$ и $\overline{DG}=\overline{BF}$. Тогаш $\measuredangle GAD=\measuredangle FAB$, $\measuredangle GDA=\measuredangle FBA=45^\circ$ и $\overline{GD}=\overline{FB}=z$.

Добиваме дека

$$\begin{aligned}\measuredangle GAE&=\measuredangle GAD+\measuredangle DAE=\measuredangle FAB+\measuredangle DAE\\&=90^\circ-\measuredangle EAF=45^\circ,\end{aligned}$$

па затоа триаголниците GAE и FAE се складни и оттука $\overline{GE}=\overline{FE}=y$. Бидејќи $\measuredangle GDE=\measuredangle GDA+\measuredangle ADE=45^\circ+45^\circ=90^\circ$, триаголникот GED е правоаголен и затоа $y^2=x^2+z^2$.

Трета година

1. Нека $\alpha,\beta\in(0,\frac{\pi}{2})$. Докажи го неравенството

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{2}\geq\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Решение. Од $\alpha,\beta\in(0,\frac{\pi}{2})$ следува

$$0<2\cos\alpha\cos\beta=\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\leq\cos(\alpha+\beta)+1 \text{ и } \sin(\alpha+\beta)>0,$$

па затоа имаме

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{2}=\frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{2}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{2\cos\alpha\cos\beta}\geq\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)+1}=\frac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}}=\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}$$

2. Даден е триаголник ABC и точките M, N, P на страните AB, BC, CA соодветно, такви што важи $\overline{AM}:\overline{AB}=\overline{BN}:\overline{BC}=\overline{CP}:\overline{CA}=k$. Определи ја вредноста на k, за која плоштината на триаголникот MNP е најмала.

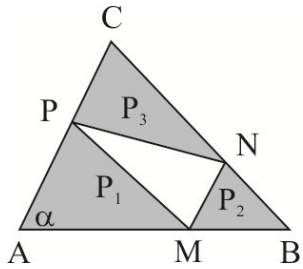
Решение. Да ги означиме плоштините на триаголниците AMP, MBN, NCP со P_1, P_2, P_3 соодветно, види цртеж. Нека P_4 е бараната плоштина на триаголникот MNP. Од зададените односи, согласно условот имаме $\overline{AM}:\overline{AB}=k$, односно

$$\overline{AM}:(\overline{AM}+\overline{MB})=k \;\Leftrightarrow\; (1-k)\overline{AM}=k\overline{MB} \;\Leftrightarrow\; \overline{AM}:\overline{MB}=k:(1-k).$$

Аналогно,

$$\overline{BN}:\overline{NC}=k:(1-k) \text{ и } \overline{CP}:\overline{PA}=k:(1-k).$$

Ако со P ја означиме плоштината на триаголникот ABC, тогаш:



$$\frac{P_1}{P}=\frac{\frac{1}{2}\overline{AM}\cdot\overline{AP}\cdot\sin\alpha}{\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\sin\alpha}=\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}}\cdot\frac{\overline{AP}}{\overline{AC}}=k\cdot(1-k),$$

каде $\frac{\overline{AP}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{AP}}{\overline{AP}+\overline{PC}}=\frac{1}{1+\frac{\overline{PC}}{\overline{AP}}}=\frac{1}{1+\frac{k}{1-k}}=1-k$.

Аналогно се добива и дека $\frac{P_2}{P}=\frac{P_3}{P}=k(1-k)$.

Сега

$$\frac{P_4}{P}=\frac{P-P_1-P_2-P_3}{P}=1-3\frac{P_1}{P}=1-3k(1-k)=3k^2-3k+1.$$

Ако P_4 прима најмала вредност, тогаш и дропката $\frac{P_4}{P}$ е најмала. Квадратната функција $\frac{P_4}{P}=3k^2-3k+1$ е отворена нагоре и има минимум во темето на параболата со апсциса $k=-\frac{-3}{2\cdot 3}=\frac{1}{2}$. Тогаш бараната вредност на параметарот k е $k=\frac{1}{2}$.

3. Во децималниот запис на бројот 2^{2017} има m цифри, а на бројот 5^{2017} има n цифри. Одреди го бројот $m+n$.

Решение. Ако во децималниот запис на бројот x има m цифри, тогаш точни се неравенствата $m-1<\log x<m$. Значи $m-1<\log 2^{2017}<m$ и $n-1<\log 5^{2017}<n$. Со собирање на овие неравенства, добиваме

$$m+n-2<\log 2^{2017}+\log 5^{2017}<m+n \text{, т.е. } m+n-2<2017<m+n,$$

од каде заклучуваме дека $2017=m+n-1$, односно $m+n=2018$.

4. Реши ја равенката $2^{x^5}+4^{x^4}+256^4=3\cdot 16^{x^3}$.

Решение. Ако $x<0$, десната страна на равенката е помала од 3, а левата поголема од 256^4, па затоа равенката нема решение $x_0<0$.

Нека $x\geq 0$. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина, применето два пати, добиваме

$$2^{x^5}+4^{x^4}+256^4=2^{x^5}+2^{2x^4}+2^{32}\geq 3\cdot 2^{\frac{x^5+2x^4+32}{3}}\geq 3\cdot 2^{\sqrt[3]{x^5\cdot 2x^4\cdot 32}}=3\cdot 2^4x^3=3\cdot 16^{x^3}$$

Во последните беравенства знак за равенство важи ако и само ако $x^5=2x^4=32$, т.е ако и само ако $x=2$. Значи, $x_0=2$ е единствено решение на дадената равенка.

Четврта година

1. Нека $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Пресметај го збирот на сите броеви во табелата

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & \dots & k \\ 2 & 3 & 4 & \dots & k+1 \\ 3 & 4 & 5 & \dots & k+2 \\ . & . & . & . & . \\ k & k+1 & k+2 & \dots & 2k-1 \end{array}.$$

Решение. Нека $j \in \{1,2,\dots,k\}$. Тогаш збирот на елементите во j -тата редица е

$$S_j = (j+0)+(j+1)+(j+2)+\dots+(j+k-1) = kj + \frac{(k-1)k}{2}.$$

Сега бараниот збир е

$$\begin{aligned} S_1+S_2+\dots+S_k &= k\cdot 1+\frac{(k-1)k}{2}+k\cdot 2+\frac{(k-1)k}{2}+k\cdot 3+\frac{(k-1)k}{2}+\dots+k\cdot k+\frac{(k-1)k}{2} \\ &= k\frac{(k-1)k}{2}+k(1+2+\dots+k) = k\frac{(k-1)k}{2}+k\frac{(k+1)k}{2} = \\ &= \frac{k^2}{2}(k-1+k+1) = k^3 \end{aligned}.$$

2. Нека $a = \sqrt[2017]{2017}$ и нека (a_n) е низа таква што $a_1 = a$ и $a_{n+1} = a^{a_n}$, за $n \geq 1$.

Дали постои природен број n, така што $a_n \geq 2017$? Одговорот да се образложи!

Решение. Таков природен број не постои. Со помош на принципот на математичка индукција ќе докажме дека за секој природен број n, важи $a_n < 2017$.

За $n=1$, тврдењето важи, односно важи $a = \sqrt[2017]{2017} < 2017$.

Да претпоставиме дека тврдењето важи за некој природен број $n=k$, т.е. дека $a_k < 2017$. За $n=k+1$, имаме $a_{k+1} = a^{a_k} < a^{2017} = 2017$.

Кочечно од принципот на математичка индукција следува дека не постои природен број n, за кој $a_n \geq 2017$.

3. Аритметичка прогресија со 10 члена има разлика $d > 0$. Ако апсолутната вредност на секој член na прогресијата е прост број, определи ја најмалата можна вредност на d.

Решение. Ако d е непарен, тогаш има по еден парен член во секои два последователни членови. Бидејќи има најмалку пет парни членови во низата, па барем еден од нив не е еднаков на -2 и 2. Имајќи предвид дека апсолутните вредности на елементите од низата се прости броеви, тогаш мора d да биде парен. Слична дискусија ни дава дека мора d да биде делив со 3.

Ќе докажеме дека мора d да биде делив со 5. Ако d не е делив со 5, тогаш помеѓу пет последователни членови, мора да има делив со 5, односно мора во целата низа да има два броја кои се деливи со 5. Ако апсолутната вредност на секој член од низата е прост број, тогаш тие два броја кои се деливи со 5 мора да бидат 5 и -5. Но, ова не е можно, бидејќи четирите члена кои треба да бидат меѓу нив се $-3,-1,1,3$, што е во контрадикција со условот дека апсолутните вредности на членовите од низата треба да бидат прости броеви. Значи, најмалата можна вредност за d е 30.

Навистина, можно е $d=30$. Пример за таква аритметичка низа е

$$-113,-83,-53,-23,7,37,67,97,127,157.$$

4. Определи ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такви што

$$f(f(x)+f(y))=f(x)+y \text{ , за секои } x,y\in\mathbb{R} .$$

Решение. I *начин*. Нека x_1,x_2 се реални броеви за кои важи $f(x_1)=f(x_2)$. Заменувајќи, последователно $y=x_1$ и $y=x_2$ во дадената равенка, добиваме $f(f(x)+f(x_1))=f(x)+x_1$ и $f(f(x)+f(x_2))=f(x)+x_2$. Бидејќи левите страни на последните две равенства се еднакви, имаме $f(x)+x_1=f(x)+x_2$, од каде $x_1=x_2$. Добивме дека функцијата $f(x)$ е инјекција. Заменувајќи $y=0$, во почетното равенство, добиваме $f(f(x)+f(0))=f(x)$, за секој реален број x. Бидејќи $f(x)$ е инјекција, имаме дека $f(x)+f(0)=x$. Ако ставиме $x=0$, од последното равенство добиваме $2f(0)=0$, односно $f(0)=0$. Оттука, добиваме дека функцијата $f(x)=x$ го задоволува почетното равенство.

II *начин*. Менувајќи ги местата x и y во почетната равенка добиваме дека

$$f(f(y)+f(x))=f(y)+x .$$

Бидејќи левата страна во последното равенство е иста како и левата страна на почетното равенство, добиваме $f(x)+y=f(y)+x$. Заменувајќи $y=0$, во последното равенство добиваме $f(x)=x+f(0)$. Сега со замена во почетната равенка добиваме

$$x+f(0)+y+f(0)+f(0)=x+f(0)+y \quad ,$$

од каде следува $f(0)=0$. Сега од $f(x)=x+f(0)$, добиваме дека $f(x)=x$.

LXI ДРЖАВЕН НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД СРЕДНОТО ОБРАЗОВАНИЕ 2018

17.03.2018 година

Прва година

1. За кои цифри x, y, z е точно равенството

$$\overline{xy}\sqrt{\overline{yx}}+\overline{yz}\sqrt{\overline{zy}}=\overline{(x+z)xy}\,?$$

Решение. Бидејќи $\overline{yx}$ и $\overline{zy}$ мора да се точни квадрати, заклучуваме дека тие се меѓу броевите 16, 25, 36, 49, 64 или 81. Но, y треба истовремено да се јавува и како прва и како втора цифра на некој од дадените двоцифрени броеви, па затоа $y\in\{1,4,6\}$. Сега лесно се добива дека $x\in\{6,9,4\}$ и $z\in\{3,6,8\}$. Понатаму, $x+z$ треба да е цифра, па затоа $x+z\leq 9$, што е можно само ако дека $z=3$ и $x\in\{6,4\}$. Понатаму, од $z=3$ следува $y=6$, па добиваме дека $x=4$. Навистина

$$46\sqrt{64}+63\sqrt{36}=746\,.$$

2. Сад е наполнет со стопроцентен алкохол. Од садот се одлеани два литра алкохол и е додадена исто толку дестилирана вода. Постапката е повторена уште еднаш, односно, одлеани се два литра од растворот и додадени два литра дестилирана вода. На тој начин во садот е добиен 36 % алкохол. Колку литри раствор содржи садот?

Решение. Нека во садот на почеток има x литри алкохол, колку што е и вкупното количество на раствор во садот. Кога од садот ќе одлееме 2 литри алкохол и дотуриме 2 литри вода, во садот ќе има $x-2$ литри чист алкохол, односно $\frac{100(x-2)}{x}$ процентен алкохол. Вкупното количество на чист алкохол после второто претурање е $x-2-2\cdot\frac{x-2}{x}$ литри, а тоа според условот на задачата е $0{,}36x$. Така се добива равенката

$$x-2-2\cdot\frac{x-2}{x}=0{,}36x\,.$$

После множењето со x добиваме

$$x^2-2x-2\cdot(x-2)=0{,}36x^2$$
$$x(x-2)-2(x-2)=0{,}36x^2$$
$$(x-2)^2=(0{,}6x)^2.$$

Работиме со позитивни величини, од каде имаме дека

$$\begin{aligned}x-2&=0{,}6x\\0{,}4x&=2\\x&=5\end{aligned}\,.$$

Значи, садот содржи 5 литри раствор.

3. Нека a,b,c се природни броеви такви што броевите $p=b^c+a, q=a^b+c$ и $r=c^a+b$ се прости. Докажи дека два од простите броеви се еднакви.

Решение. Од принципот на Дирихле следува дека два од броевите a,b,c се со иста парност. Без губење на општоста можеме да земеме дека a и b се со иста парност. Тогаш $p=b^c+a$ е парен

број, па затоа $p=2$. Понатаму, од $2=b^c+a$ следува дека $a=1$ и $b=1$. Според тоа, $q=a^b+c=1+c=c^1+1=c^a+b=r$, што и требаше да се докаже.

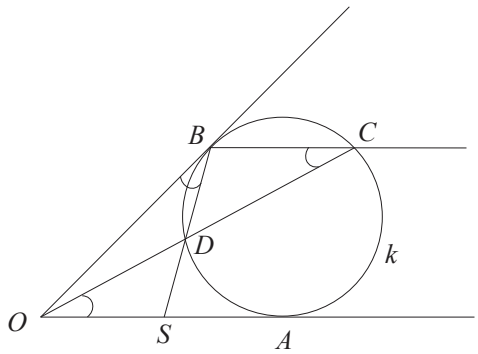
4.Кружница k ги допира краците на агол со теме O, во точките A и B. Правата која минува низ B и е паралелна со кракот OA ја сече кружницата во точката C, а отсечката OC ја сече кружницата во точката D.

Докажи дека правата BD минува низ средината на отсечката OA.

Решение. Ќе докажеме дека $\triangle OBS \sim \triangle DOS$ (види цртеж). Имаме, $\measuredangle OBS = \measuredangle BCD$ како агли меѓу тангента и тетива. Понатаму, $\measuredangle BCD = \measuredangle DOS$ како наизменични агли. Значи $\measuredangle OBS = \measuredangle DOS$, а аголот кај темето S е заеднички, па затоа важи $\triangle OBS \sim \triangle DOS$. Сега

$$\overline{OS}:\overline{SB}=\overline{DS}:\overline{SO}, \text{ т.е. } \overline{OS}^2=\overline{SB}\cdot\overline{DS}.$$

Од друга страна од степен на точката S во однос на кружницата k следува $\overline{SA}^2=\overline{SB}\cdot\overline{SD}$. Затоа $\overline{OS}^2=\overline{SA}^2$, т.е. $\overline{SA}=\overline{OS}$, што значи дека точката S е средина на отсечката OA.



Втора година

1. За која вредност на параметарот p корените на квадратната равенка

$$x^2+(p-3)x-p+2=0$$

се реални и со различен знак.

Решение. Дискриминантата е $D=p^2-6p+9+4p-8=p^2-2p+1=(p-1)^2\geq 0$, за секој реален број p. Бидејќи корените треба да се реални и со различен знак добиваме дека $(p-1)^2>0$, а тоа е исполнето за $p\neq 1$. Од друга страна корените на равенката се со различен знак па важи

$$x_1x_2=-p+2<0 \;\Leftrightarrow\; -p+2<0 \;\Leftrightarrow\; p>2.$$

Конечно, $p\in(2,\infty)$.

2. Определи ги сите природни броеви n за кои $3^{2n+1}-2^{2n+1}-6^n$ е прост број.

Решение. Имаме

$$3^{2n+1}-2^{2n+1}-6^n=3\cdot 3^{2n}-2\cdot 2^{2n}-3^n\cdot 2^n=3\cdot(3^n)^2-2\cdot(2^n)^2-3^n\cdot 2^n$$

Воведуваме замена $3^n=a$ и $2^n=b$, и добиваме

$$3a^2-2b^2-ab=3a^2-3ab+2ab-2b^2=3a(a-b)+2b(a-b)=(a-b)(3a+2b).$$

Значи, $3^{2n+1}-2^{2n+1}-6^n=(3^n-2^n)(3^{n+1}+2^{n+1})$. За $n\geq 2$ важи $3^n-2^n>1$, па затоа $(3^n-2^n)(3^{n+1}+2^{n+1})$ е сложен број. За $n=1$ имаме $(3-2)(3^2+2^2)=13$, што значи дека $3^{2n+1}-2^{2n+1}-6^n$ е прост број само за $n=1$.

3.Во множеството реачни броеви реши го системот равенки

$$\begin{cases} x+\frac{3x-y}{x^2+y^2}=3 \\ y-\frac{x+3y}{x^2+y^2}=0. \end{cases}$$

Решение. Првата равенка ја множиме со $a_{m+n}=A$, втората ја множиме со $a_{m-n}=B$ и добиените равенки ги собираме, после што добиваме

$$xy+\frac{3xy-y^2}{x^2+y^2}+xy-\frac{x^2+3xy}{x^2+y^2}=3y \text{, т.е. } A.$$

Бидејќи B, добиваме $x=\frac{3y+1}{2y}$. Ако замениме во втората равенка, последователно добиваме

$$y-\frac{\frac{3y+1}{2y}+3y}{(\frac{3y+1}{2y})^2+y^2}=0$$

$$y-\frac{2y(6y^2+3y+1)}{9y^2+6y+1+4y^4}=0$$

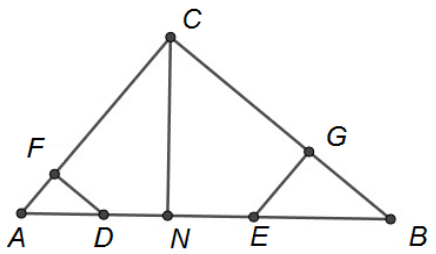
$$4y^4+9y^2+6y+1-12y^2-6y-2=0$$

$$4y^4-3y^2-1=0$$

Нека $t=y^2$. Тогаш решенија на квадратната равенка 1 се -1 и $t_2=-\frac{1}{4}$. Бидејќи системот треба да се реши во множеството реални броеви добиваме $(2k+1)$, од каде наоѓаме $(2n+1-(2k+1)=2(n-k))$ и 1. Со замена во $x=\frac{3y+1}{2y}$ добиваме -1, што значи дека бараните решенија на системот се -2 и 0.

4. Даден правоаголен $\triangle ABC$ со прав агол во темето $2k$. Нека $y=-x^2+bx+c$ и $b,c\in\mathbb{R}$ се точки од хипотенузата $y=x^2$ такви што $y=-x^2+bx+c$ и $y=-x^2+bx+c$. Нека $y=x^2$ е ортогонална проекција на точката $-x^2+bx+c=x^2$ врз страната $2x^2-bx-c=0$, а $b^2+8c=0$ е ортогоналната проекција на точката E врз страната $y=-x^2+bx+c$. Докажи дека $\overline{DE}=\overline{DF}+\overline{EG}$.

Решение. Нека N е подножјето на висината повлечена од темето C кон хипотенузата AB. Од $\overline{BC}=\overline{BD}$ следува $\angle BCD=\angle BDC$. Тогаш од $\angle BCD=\angle BCN+\angle NCD$ и $\angle BDC=\angle DCA+\angle DAC$ следува



$$\angle BCN+\angle NCD=\angle DCA+\angle DAC. \quad (1)$$

Од $x_1,x_2,...,x_9$ следува $\angle ADF=\angle DBC$ (трансферзални агли). Од $\angle AFD=\angle CND=90°$ следува

$$\angle DAC=\angle DAF=\angle BCN \quad (2)$$

Со замена на (2) во (1) добиваме

$$\angle BCN+\angle NCD=\angle DCA+\angle BCN \text{ т.е.}$$

$$\angle NCD=\angle DCA.$$

Следува CD е симетрала на $\angle FCN$ и затоа $x_1+x_2+x_3\geq 5$ е еднакво оддалечена од краците на аголот, односно $\overline{FD}=\overline{DN}$. Аналогно се покажува дека $\overline{NE}=\overline{EG}$. Конечно,

$$\overline{DE}=\overline{DN}+\overline{NE}=\overline{DF}+\overline{EG}.$$

Трета година

1. Реши ја неравенката

$$(3-x)^{\frac{3x-5}{3-x}}<1 .$$

Решение. Разгледуваме два случаи:

а) $3-x>1 \wedge \frac{3x-5}{3-x}<0$;

(б) $0<3-x<1 \wedge \frac{3x-5}{3-x}>0$.

Оттука добиваме:

(а) $x<2 \wedge 3x-5<0$, т.е. $x\in(-\infty,\frac{5}{3})$;

(б) $2<x<3 \wedge 3x-5>0$, т.е $x\in(2,3)$.

Значи решение на неравенката е $x\in(-\infty,\frac{5}{3})\cup(2,3)$.

2. Ако важи равенството

$$\log_a b-\log_{ab} b=\log_{ab^2} b-\log_{ab^3} b ,$$

определи ги $\log_a b, \log_{ab} b, \log_{ab^2} b$ и $\log_{ab^3} b$.

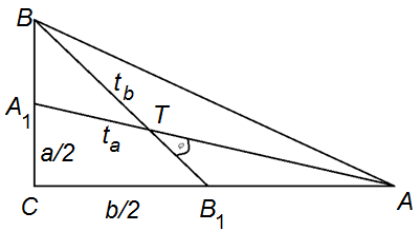
Решение. За $b=1$, сите логаритми се еднакви на 0. За $b>0$ и $b\neq 1$, дадениот услов можеме да го запишеме во обликот

$$\frac{1}{\log_b a}-\frac{1}{\log_b a+1}=\frac{1}{\log_b a+2}-\frac{1}{\log_b a+3} .$$

Нека $\log_b a=x$. Тогаш ја добиваме равенката $\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}=\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}$, чие решение е $x=-\frac{3}{2}$. Затоа, $\log_a b=-\frac{2}{3}$, $\log_{ab} b=-2$, $\log_{ab^2} b=2$ и $\log_{ab^3} b=\frac{2}{3}$.

3. Докажи дека за аголот φ меѓу тежишните линии повлечени кон катетите на правоаголен триаголник важи неравенството $\cos\varphi\geq\frac{4}{5}$.

Решение. Нека A_1 е средината на катетата a , B_1 е средината на катетата b и нека t_a и t_b се тежишни линии повлечени кон катетите a и b , соодветно. Од правоаголните триаголници AA_1C и BCB_1 , според Питагоровата теорема, имаме $t_a^2=\frac{a^2}{4}+b^2$ и $t_b^2=a^2+\frac{b^2}{4}$, од каде што елиминирајќи го b добиваме



$$a^2=\frac{16t_b^2-4t_a^2}{15} \qquad (1)$$

Од косинусната теоремата за триаголникот A_1TB имаме

$$\overline{A_1B}^2=\overline{A_1T}^2+\overline{TB}^2-2\overline{A_1T}\cdot\overline{TB}\cos\varphi$$

и оттука следува дека

$$\cos\varphi=\frac{(\frac{1}{3}t_a)^2+(\frac{2}{3}t_b)^2-(\frac{a}{2})^2}{2\cdot\frac{1}{3}t_a\frac{2}{3}t_b} .$$

Ако во последното равенство го замениме a^2 со изразот во (1), добиваме

$$\cos\varphi=\frac{2}{5}\frac{t_a^2+t_b^2}{t_a t_b} \qquad (2)$$

Од неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина имаме $t_a^2+t_b^2\geq 2t_at_b$, односно $\frac{t_a^2+t_b^2}{t_at_b}\geq 2$, па сега од (2) следува $\cos\varphi=\frac{2}{5}\frac{t_a^2+t_b^2}{t_at_b}\geq 2\cdot\frac{2}{5}=\frac{4}{5}$, што и требаше да се докаже.

4. Докажи го неравенството

$$\sin^5 x+\cos^5 x+\sin^4 x\leq 2 \ .$$

Кога важи знак за равенство?

Решение. Имаме:

$$\sin^5 x+\cos^5 x+\sin^4 x\leq \sin^4 x+\cos^4 x+\sin^4 x=2\sin^4 x+(1-\sin^2 x)^2$$
$$=3\sin^4 x-2\sin^2 x+1=3(\sin^2 x-\tfrac{1}{3})^2+\tfrac{2}{3}\leq 3(1-\tfrac{1}{3})^2+\tfrac{2}{3}=2$$

За да важи равенство, треба секаде да имаме равенства, односно мора да важи

$$\sin^5 x=\sin^4 x, \cos^5 x=\cos^4 x, \sin^2 x=1 .$$

Од $\sin^4 x(\sin x-1)=0 \wedge \sin^2 x=1$ следува дека $\sin x=1$. Значи, равенството важи ако и само ако $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Четврта година

1. Нека $a_{m+n}=A$ и $a_{m-n}=B$ се членови на аритметичка прогресија. Изрази ги членовите a_n и a_m преку A и B .

Решение. Од

$$a_{m+n}=a_1+(m+n-1)d=A \text{ и } a_{m-n}=a_1+(m-n-1)d=B$$

добиваме

$$a_m+nd=A \text{ и } a_m-nd=B ,$$

односно $d=\frac{A-B}{2n}$. Сега од $a_m-nd=B$ и $a_n+md=A$ следува

$$a_m=B+nd=B+n\frac{A-B}{2n}=\frac{A+B}{2} \text{ и } a_n=A-md=A-m\frac{A-B}{2n}=\frac{(2n-m)A+mB}{2n} .$$

2. Дадена е низа од $2n+1$ броеви таква што секој член на низата е или 1 или -1. Дали може дадените броеви од низата да се поделат на две групи (секој член на низата припаѓа на само една група) така што збирот на броевите од едната група е еднаков со збирот на броевите од другата група.

Решение. Бидејќи $2n+1$ е непарен број, во едната група треба да има непарен број броеви $(2k+1)$, а во другата парен $(2n+1-(2k+1)=2(n-k))$. Бидејќи броевите се 1 или -1, збир на еден пар броеви е -2 , 0 или 2 . Според тоа, збирот на елементите во групата со парен број на елементи е парен. Од друга страна, во другата група збирот од $2k$ елементи е парен, а со додавање на останатиот се добива непарен број. Бидејќи не постои број кој е истовремено парен и непарен, таква поделба не постои.

3. Параболите $y=-x^2+bx+c$, $b,c\in\mathbb{R}$ ја допираат параболата $y=x^2$. Определи ја равенката на кривата на која лежат темињата на параболите $y=-x^2+bx+c$.

Решение. Нека параболите $y=-x^2+bx+c$ и $y=x^2$ меѓусебно се допираат. Тогаш равенката $-x^2+bx+c=x^2$ има едно решение. Равенката $2x^2-bx-c=0$ има едно решение, т.е. има двоен корен ако и само ако $b^2+8c=0$. Според тоа параболите се допираат ако и само ако $c=-\frac{b^2}{8}$, т.е. ако и само ако параболата $y=-x^2+bx+c$ е од видот $y=-x^2+bx-\frac{b^2}{8}$. Нејзино теме е $T(\frac{b}{2},\frac{b^2}{8})$. Бидејќи $\frac{b^2}{8}=\frac{1}{2}(\frac{b}{2})^2$, добиваме дека темињата на параболите се наоѓаат на параболата $\frac{b}{2}\mapsto\frac{1}{2}(\frac{b}{2})^2$, т.е. $y=\frac{1}{2}x^2$.

4. Нека $x_1,x_2,\ldots,x_9$ се ненегативни реални броеви за кои важи

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2+x_6^2+x_7^2+x_8^2+x_9^2\geq 25.$$

Докажи дека меѓу броевите $x_1,x_2,\ldots,x_9$ може да се најдат три броја чиј збир е поголем или еднаков од 5.

Решение. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека

$$x_1\geq x_2\geq x_3\geq x_4\geq x_5\geq x_6\geq x_7\geq x_8\geq x_9\geq 0.$$

Тогаш имаме: $x_1x_2\geq x_4^2\geq x_5^2$, $x_1x_3\geq x_6^2\geq x_7^2$ и $x_2x_3\geq x_8^2\geq x_9^2$, па затоа

$$\begin{aligned}(x_1+x_2+x_3)^2&=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3\\&\geq x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2+x_6^2+x_7^2+x_8^2+x_9^2\geq 25,\end{aligned}$$

т.е. $x_1+x_2+x_3\geq 5$.

РЕПУБЛИЧКИ НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИ ОД СРЕДНОТО ОБРАЗОВАНИЕ 16.03.2019 година

Прва година

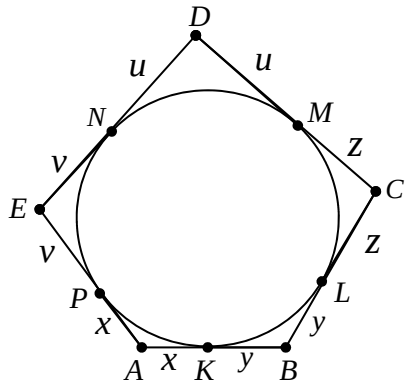
1. Страните на еден петтоаголник последователно се еднакви на $4cm, 6cm, 8cm, 7cm$ и $9cm$. Дали во овој петаголник може да се впише кружница? Образложи го својот одговор!

Решение. Нека $ABCDE$ е петаголник таков што $\overline{AB}=4cm$, $\overline{BC}=6cm$, $\overline{CD}=8cm$, $\overline{DE}=7cm$ и $\overline{EA}=9cm$, во кој може да се впише кружница k. Допирните точки на AB,BC,CD,DE,EA со k ќе ги означиме со K,L,M,N,P соодветно. Тогаш,

$$\overline{PA}=\overline{AK}=x, \overline{KB}=\overline{BL}=y, \overline{LC}=\overline{CM}=z,$$
$$\overline{MD}=\overline{DN}=u, \overline{NE}=\overline{EP}=v$$

и

$$\begin{cases} x+y=4 \\ y+z=6 \\ z+u=8 \\ u+v=7 \\ v+x=9 \end{cases}$$



Ако ги собереме равенките, добиваме $2(x+y+z+u+v)=34 \Rightarrow x+y+z+u+v=17$. Но, тогаш

$$17=x+y+z+u+v=y+(x+v)+(z+u)=y+9+8=y+17$$

од каде што добиваме дека $y=0$. Ако $y=0$, тогаш $K\equiv B\equiv L$, односно точките A,B и C се колинеарни. Тоа е противречност со претпоставката дека $ABCDE$ е петаголник. Значи, во петаголникот не може да се впише кружница.

2. Во автобусите на една туристичка агенција, треба да се распоредат членовите на една туристичка група, така што во секој автобус да има ист број на туристи. На почетокот во секој автобус влегле по 22 туристи при што останал несместен еден турист. Но, еден автобус заминал празен, па во останатите автобуси туристите се распоредиле рамномерно. Колку туристи и колку автобуси биле на почетокот, ако во секој автобус влегле не повеќе од 32 туристи?

Решение. Нека k е бројот на автобуси кои што туристичката агенција ги имала на почетокот. Од условот на задачата имаме $k\geq 2$, а бројот на туристи бил $22k+1$. Откако заминал еден автобус, туристите можеле да се сместат во $k-1$ автобуси подеднакво. Значи, бројот $22k+1$ е делив со $k-1$. Задачата се сведува на тоа да се определат броевите k,n така што $k\geq 2$ и $n=\frac{22k+1}{k-1}$ е цел број, таков што $n\leq 32$.

Бројот $n=22+\frac{23}{k-1}$ е цел број ако и само ако $\frac{23}{k-1}$ е цел број. Но, тоа е можно само за $k=2$ и $k=24$. Ако $k=2$, тогаш $n=45$ што не е можно, бидејќи $n\leq 32$. Ако $k=24$, тогаш $n=23$. Значи, на почетокот имало 24 автобуси, а бројот на туристи бил $n(k-1)=23\cdot 23=529$.

3. Ако меѓу цифрите на бројот 1331 допишеме по 2019 нули, се добива број кој е потполн куб. Докажи!

Решение. Ако меѓу цифрите на бројот 1331 допишеме по 2019 нули, се добива бројот

$$1\underbrace{00\ldots0}_{2019}3\underbrace{00\ldots0}_{2019}3\underbrace{00\ldots0}_{2019}1 .$$

За овој број имаме

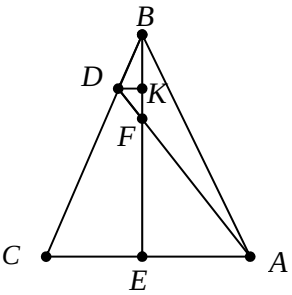
$$1\underbrace{00\ldots0}_{2019}3\underbrace{00\ldots0}_{2019}3\underbrace{00\ldots0}_{2019}1=10^{3\cdot2019+3}+3\cdot10^{2\cdot2019+2}+3\cdot10^{2019+1}+1=$$

$$=\left(10^{2019+1}\right)^3+3\cdot\left(10^{2019+1}\right)^2\cdot1+3\cdot10^{2019+1}\cdot1^2+1^3=$$

$$=\left(10^{2019+1}+1\right)^3$$

4. На страната BC од рамнокракиот триаголник $ABC\left(\overline{AB}=\overline{BC}\right)$ е избрана точка D така што $\overline{BD}:\overline{DC}=1:4$. Во кој однос правата AD ја дели висината BE сметајќи од темето B?

Решение. Пресекот на BE и AD да го означиме со F. Нека $K\in BE$ е таква што $DK\parallel CA$. Според тоа, $\triangle BCE\sim\triangle BDK$ и $\frac{\overline{BK}}{\overline{BE}}=\frac{\overline{KD}}{\overline{CE}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{BC}}=\frac{1}{5}$, односно $\overline{BK}=\frac{1}{5}\overline{BE}$ и $\overline{KD}=\frac{1}{5}\overline{CE}$. Бидејќи триаголниците DKF и AEF имаат еднакви агли, тие се слични, па според тоа $\frac{\overline{KD}}{\overline{AE}}=\frac{\overline{KF}}{\overline{FE}}=\frac{1}{5}$. Ако воведеме ознака $\overline{KF}=x$ тогаш $\overline{FE}=5x$, па од равенството $\overline{BK}+\overline{KF}+\overline{FE}=\overline{BE}$, добиваме $\overline{BK}=\frac{3}{2}x$. Бидејќи $\overline{BF}=\overline{BK}+\overline{KF}=\frac{3}{2}x+x=\frac{5}{2}x$, од равенството $\overline{FE}=5x$ добиваме $\overline{BF}:\overline{FE}=\frac{5}{2}x:5x=1:2$.



Втора година

1. Докажи дека $\sqrt{\sqrt[3]{4}-1}+\sqrt{\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{4}}=\sqrt{3}$.

Решение. Со трансформирање на левата страна од равенството добиваме

$$\sqrt{\sqrt[3]{4}-1}+\sqrt{\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{4}}=\sqrt{\sqrt[3]{4}-1}+\sqrt{\sqrt[3]{4}\left(\sqrt[3]{4}-1\right)}=\sqrt{\sqrt[3]{4}-1}+\sqrt[3]{2}\sqrt{\sqrt[3]{4}-1}=\sqrt{\sqrt[3]{4}-1}\left(\sqrt[3]{2}+1\right)$$

т.е. $\sqrt{\sqrt[3]{4}-1}\left(\sqrt[3]{2}+1\right)=\sqrt{3}$. Со квадрирање на левата страна во последното равенство добиваме

$$\left(\sqrt[3]{4}-1\right)\left(\sqrt[3]{2}+1\right)^2=\left(\sqrt[3]{4}-1\right)\left(\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{2}+1\right)=\sqrt[3]{16}+2\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{4}-2\sqrt[3]{2}-1=2\cdot2-1=3$$

Од каде што со коренување го добиваме бараното равенство.

2. Определи ги сите вредности на реалниот параметар a за кои равенката

$$\sqrt{ax^2+ax+2}=ax+2$$

има решение.

Решение. Ако $ax+2<0$, тогаш равенката нема решение, а ако $ax+2\geq0$, тогаш таа е еквивалентна со равенката $(a^2-a)x^2+3ax+2=0$.

Можни се следниве случаи:

i. Коефициентот пред x^2 е еднаков на 0 и соодветната линеарна равенка има корен за кој важи $ax+2\geq 0$. За $a=0$ добиваме $2=0$, што не е можно. За $a=1$ добиваме $x=-\frac{2}{3}$ и како $ax+2=-\frac{2}{3}+2\geq 0$, заклучуваме дека $a=1$ е решение на задачата.

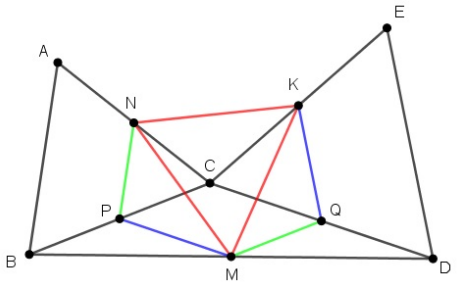
ii. Коефициентот пред x^2 не е нула, ($a\neq 0,1$) и соодветната квадратна равенка има единствено решение кое го задоволува условот $ax+2\geq 0$. Тогаш, за равенката да има единствено решение, треба $D=9a^2-8(a^2-a)=a^2+8a=0$. Добиваме $a=0$ или $a=-8$. Но, $a\neq 0$, па останува $a=-8$, при што добиваме $x=\frac{1}{6}$ и $ax+2=-8\cdot\frac{1}{6}+2\geq 0$, што значи дека $a=-8$ е решение на задачата.

iii. Коефициентот пред x^2 не е нула ($a\neq 0,1$), а соодветната квадратна равенка има два корена x_1 и x_2 такви што $ax_1+2<0$ и $ax_2+2\geq 0$. Последното значи дека бројот $-\frac{2}{a}$ се наоѓа меѓу корените на равенката, при што може да се совпадне со поголемиот корен. Ако $-\frac{2}{a}=x_2$, добиваме $(a^2-a)(-\frac{2}{a})^2+3a(-\frac{2}{a})+2=0$, од каде следува $a=0$, што е противречност. Значи, $-\frac{2}{a}$ не се совпаѓа со ниту еден од корените. Оттука следува дека е исполнето неравенството $(a^2-a)((a^2-a)(-\frac{2}{a})^2+3a(-\frac{2}{a})+2)<0$, кое гарантира постоење на два корена. По упростување на последното неравенство добиваме $a\geq 1$.

Конечно, решение на задачата е $a=-8$ и $a\geq 1$.

3. На произволен начин од множеството $\{1,2,\ldots,25\}$ се избрани 17 различни броеви. Докажи дека меѓу избраните броеви постојат два различни чиј производ е полн квадрат.

Решение. Ги разгледуваме множествата $\{1,4,9,16,25\},\{2,8,18\},\{3,12\},\{5,20\},\{6,24\},\{7\},\{10\},\{11\},\{13\},\{14\},\{15\},\{17\},\{19\},\{21\},\{22\},\{23\}$. Тие се дисјунктни и нивната унија е множеството $\{1,2,\ldots,25\}$. Бидејќи се избрани 17 различни броеви, а множества се 16, според принципот на Дирихле, постојат барем два кои се елементи на исто множество. Тоа значи дека меѓу избраните броеви постојат два различни чиј производ е полн квадрат.



4. Дадени се два рамностранни триаголници ABC и CDE кои се наоѓаат од иста страна на правата AE и имаат само една заедничка точка, точката C. Нека M е средина на BD, N е средина на AC и нека K е средина на CE. Докажи дека $\triangle MNK$ е рамностран.

Решение. Нека P и Q се средини на BC и CD соодветно. Од тоа што P и N се средини на BC и AC, соодветно, следува $\overline{PN}=\frac{\overline{AB}}{2}=\overline{PC}$ (1)

Од M и Q се средини на BD и CD следува $\overline{MQ}=\frac{\overline{BC}}{2}=\overline{PC}$ (2)

Од (1) и (2) следува $\overline{PN}=\overline{MQ}$.

Аналогно се покажува дека $\overline{PM}=\overline{QK}$.

$$\measuredangle MPN=\measuredangle MPC+\measuredangle CPN=\measuredangle MQC+60^\circ=\measuredangle MQC+\measuredangle CQK=\measuredangle KQM$$

Следува дека $\triangle MPN \cong \triangle KQM$. Значи $\overline{MN} = \overline{MK}$. Нека $\angle BCD = \alpha$. Тогаш

$$\angle NMK = \angle PMQ - \angle PMN - \angle QMK = \alpha - 180^\circ + \angle NPM = \alpha - 180^\circ + \angle NPC + \angle CPM =$$
$$= \alpha - 180^\circ + 60^\circ + \left(180^\circ - \alpha\right) = 60^\circ$$

Следува $\triangle MNK$ е рамностран.

Трета година

1. Реши ја неравенката $4^{\sin^2 \pi x} + 3 \cdot 4^{\cos^2 \pi x} \le 8$.

Решение. Ако означиме $4^{\sin^2 \pi x} = y$, тогаш $4^{\cos^2 \pi x} = 4^{1-\sin^2 \pi x} = \dfrac{4}{4^{\sin^2 \pi x}} = \dfrac{4}{y}$, па неравенката го добива обликот $y + 3\dfrac{4}{y} \le 8,\ y > 0.$ Оттука следува дека $y^2 - 8y + 12 \le 0,\ y > 0$, од каде што добиваме $2 \le y \le 6$, т.е. $2 \le 4^{\sin^2 \pi x} \le 6$. (1)

Бидејќи $0 \le \sin^2 \pi x \le 1$, следува дека $1 \le 4^{\sin^2 \pi x} \le 4$. (2)

Од (1) и (2) добиваме $2 \le 4^{\sin^2 \pi x} \le 4$, од каде што следува дека $\frac{1}{2} \le \sin^2 \pi x \le 1$ т.е $\frac{\sqrt{2}}{2} \le \left|\sin \pi x\right| \le 1$ Последната равенка е еквивалентна со неравенките $\sin \pi x \le -\frac{\sqrt{2}}{2}$ или $\sin \pi x \ge \frac{\sqrt{2}}{2}$, од каде $\frac{4k+1}{4} \le x \le \frac{4k+3}{4}$.

2. Да се реши равенката $2^{\sqrt[12]{x}} + 2^{\sqrt[4]{x}} = 2 \cdot 2^{\sqrt[6]{x}}$.

Решение. Ќе воведеме смена $x = t^{12}$, $t \ge 0$, при што $\sqrt[12]{x} = t$, $\sqrt[4]{x} = t^3$ и $\sqrt[6]{x} = t^2$. Почетната равенка може да се запише како $2^t + 2^{t^3} = 2 \cdot 2^{t^2}$. Бидејќи 2^t и 2^{t^3}, t и t^3 се ненегативни реални броеви, од неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина добиваме

$$2^t + 2^{t^3} \ge 2\sqrt{2^t \cdot 2^{t^3}} = 2 \cdot 2^{\frac{t+t^3}{2}} \ge 2 \cdot 2^{t^2}.$$

Равенство е исполнето ако и само ако $2^t = 2^{t^3}$ и $t = t^3$.

Во двата случаи добиваме дека решенија се $t_1 = 0, t_2 = 1, t_3 = -1$. Јасно е дека t_3 не може да биде решение.

Значи, решенија на почетната равенка се $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$..

3. Во триаголникот ABC, исполнето е равенството $c^2 = 4ab\cos\alpha\cos\beta$. Да се докаже дека триаголникот е рамнокрак.

Решение. Според косинусната теорема за триаголникот ABC исполнето е равенството $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$. Бидејќи $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, т.е. $\cos\gamma = \cos(180^\circ - \alpha - \beta) = -\cos(\alpha + \beta)$, заменувајќи во последното равенство добиваме:

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos(\alpha + \beta) = a^2 + b^2 + 2ab(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta).$$

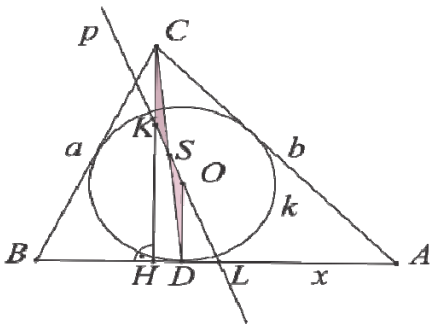
Од условот на задачата имаме $c^2 = 4ab\cos\alpha\cos\beta$, па заменувајќи во последното равенство добиваме

$$a^2 + b^2 = 2ab(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) = 2ab\cos(\alpha - \beta),$$

односно

$(a-b)^2=2ab(\cos(\alpha-\beta)-1)$.
Бидејќи левата страната е ненегативна, а десната страна е непозитивна, равенството е исполнето ако и само ако $\cos(\alpha-\beta)-1=0$, т.е. $\alpha=\beta$, т.е. $a=b$, односно триаголникот ABC е рамнокрак.

4. Во триаголникот ABC впишана е кружница со центар во точката O, која страната AB ја допира во точката D. Нека S е средина на отсечката CD. Докажи дека правата OS ја преполовува страната AB.



Решение. Нека правата $OS\equiv p$ ја сече страната AB во точката L. Треба да покажеме дека $\overline{AL}=\frac{1}{2}\overline{AB}$. Од условите на задачата и според ознаките на цртежот, $\triangle SOD\cong\triangle SKC$ (признак АСА). Оттука следува дека $\overline{CK}=r,\overline{KH}=h-r$, каде што со r е означен радиусот на кружницата, а со h должината на висината CH . Од сличноста на триаголниците LHK и LDO следува

$$\overline{LH}:\overline{LD}=\overline{HK}:\overline{DO} \qquad (1)$$

Ако означиме со $x=\overline{AL},b_1=\overline{AH}$, тогаш од $\overline{AD}=s-a$ (s е полупериметарот на $\triangle ABC$) имаме: $\overline{HL}=b_1-x,\overline{LD}=s-a-x$, па (1) добива облик

$$\frac{b_1-x}{s-a-x}=\frac{h-r}{r}=\frac{h}{r}-1 . \qquad (2)$$

За односот $\frac{h}{r}$, од познатите формули за плоштина на триаголник: $P=\frac{hc}{2}$ и $P=rs$ добиваме:

$$\frac{h}{r}=\frac{\frac{2P}{c}}{\frac{P}{s}}=\frac{2s}{c} \qquad (3)$$

Ако (3) го замениме со (2) добиваме $\frac{b_1-x}{s-a-x}=\frac{2s}{c}-1=\frac{2s-c}{c}=\frac{a+b}{c}$, од каде што

$$(b_1-x)c=(a+b)(s-a-x)$$
$$b_1c-cx=(a+b)(s-a)-(a+b)x$$
$$(a+b-c)x=(a+b)(s-a)-b_1c$$

Од косинусната теорема за $\triangle ABC$ и правоаголниот $\triangle AHC$ следува $\frac{b_1}{b}=\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, т.е. $b_1c=\frac{b^2+c^2-a^2}{2}$. Тогаш, од

$$(a+b-c)x=(a+b)\frac{b+c-a}{2}-\frac{b^2+c^2-a^2}{2}=\frac{1}{2}(ab+ac-a^2+b^2+bc-ab-b^2-c^2+a^2)=$$
$$=\frac{c}{2}(a+b-c)$$

следува дека $x=\frac{c}{2}$.

Четврта година

1. За четири броја a,b,c,d е исполнето: $d>c,\ a+b=c+d,\ a+d<b+c$. Подреди ги по големина овие четири броеви.

Решение. Од $a+d<b+c$, следува дека $a+d+b<2b+c$. Бидејќи $a+b=c+d$ следува дека $c+2d<2b+c$, односно $d<b$ (1).
Слично, од $a+d<b+c$, следува дека $a+d+c<b+2c$. Бидејќи $a+b=c+d$ следува дека $2a+b<b+2c$, односно $a<c$ (2).

Од (1) и (2) следува дека $a<c<d<b$.

2. Докажи дека за секој природен број $n>1$ е исполнето $2!\cdot 4!\cdot\ldots\cdot(2n)!>\left((n+1)!\right)^n$.

Решение. Ќе го покажеме неравенството со математичка индукција. За $n=2$, $48=2!\cdot 4!>(3!)^2=36$. Нека претпоставиме дека неравенството важи за природниот број n . Тогаш

$$2!\cdot 4!\cdot\ldots\cdot(2n)!\cdot(2(n+1))!>((n+1)!)^n\cdot(2n+2)!=((n+1)!)^n\cdot(n+1)!\cdot(n+2)\cdot(n+3)\cdot\ldots\cdot(2n+2)>$$
$$>((n+1)!)^{n+1}(n+2)^{n+1}=((n+2)!)^{n+1},$$

што и требаше да се покаже.

3. Нека (a_n) е низа од реални броеви така да $|a_{n+1}-a_n|\le 1$, за сите $n\in N$ и нека (b_n) е низа дефинирана со $b_n=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$. Докажи дека $|b_{n+1}-b_n|\le\frac{1}{2}$, за сите $n\in N$.

Решение. Бидејќи $|a_{n+1}-a_n|\le 1$, од неравенство на триаголник имаме дека $|a_m-a_n|\le|m-n|$, за сите $m,n\in N$. Тогаш,

$$|b_{n+1}-b_n|=\left|\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n+a_{n+1}}{n+1}-\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right|=\frac{|na_{n+1}-a_1-a_2-\ldots-a_n|}{n(n+1)}=\frac{|a_{n+1}-a_1+a_{n+1}-a_2+\ldots+a_{n+1}-a_n|}{n(n+1)}\le$$
$$\le\frac{|a_{n+1}-a_1|+|a_{n+1}-a_2|+\ldots+|a_{n+1}-a_n|}{n(n+1)}\le\frac{n+(n-1)+\ldots+1}{n(n+1)}=\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n(n+1)}=\frac{1}{2}$$

4. Нека $a_1=\frac{2}{3}$ и $a_{n+1}=\frac{a_n}{4}+\sqrt{\frac{24a_n+9}{253}}-\frac{9}{48}$ за сите природни броеви n .

Најди ја вредноста на $a_1+a_2+a_3+\ldots$.

Решение. Нека $b_n=\sqrt{24a_n+9}$. Тогаш имаме $a_n=\frac{b_n^2-9}{24}$, па почетната рекурентна релација го добива обликот $\frac{b_{n+1}^2-9}{24}=\frac{b_n^2-9}{24}+\frac{b_n}{16}-\frac{9}{48}$ или $(2b_{n+1})^2=(b_n+3)^2$. Бидејќи b_n се ненегативни за сите $n\in\mathbb{N}$, следува дека $2b_{n+1}=b_n+3$. Презапишувајќи го последното равенство како $2(b_{n+1}-3)=b_n-3$. Нека ставиме $c_n=b_n-3$. Тогаш, имаме $c_{n+1}=\frac{1}{2}c_n$ и $c_1=b_1-3=\sqrt{24a_1+9}-3=2$. Значи, имаме $c_n=\frac{1}{2^{n-2}}$, па $b_n=\frac{1}{2^{n-2}}+3$ и $a_n=\frac{1}{24}\cdot\frac{1}{2^{2n-4}}+\frac{1}{2^n}$.

Конечно,

$$a_1+a_2+a_3+\ldots=\frac{1}{24}\left(4+1+\frac{1}{4}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots\right)=\frac{1}{24}\cdot\frac{4}{1-\frac{1}{4}}+\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{11}{9}.$$