

Снежана Хаџи-Николова, Скопје

Неколку начини за решавање на една нелинеарна диофантова равенка

Јачината на математиката е и во богатството на идеи и патишта за решавање на еден ист проблем. Се чини дека елементарната геометрија е област во која ова богатство доаѓа до полн израз, но не е само таа. Имено, теоријата на броеви, а особено диофантовите равенки се непресушен извор на идеи и патишта за решавање на една иста задача. Во овој напис ќе ви презентираме три начини за решавање на една нелинеарна диофантова равенка.

Задача. Во множеството на целите броеви решете ја равенката

$$x^2 y^2 = 3y^2 + x^2. \quad (1)$$

I начин. Од равенката (1), бидејќи $y^2 - 1 \neq 0$, (зошто?) добиваме

$$x^2 y^2 - x^2 = 3y^2,$$

$$x^2 (y^2 - 1) = 3y^2,$$

$$x^2 = \frac{3y^2}{y^2 - 1} = \frac{3y^2 - 3 + 3}{y^2 - 1} = \frac{3(y^2 - 1) + 3}{y^2 - 1},$$

т.е.

$$x^2 = 3 + \frac{3}{y^2 - 1} \quad (2).$$

Според тоа, равенката (1) има целобројни решенија ако $(y^2 - 1) | 3$. Делители на 3 се: 1, -1, 3, -3. Проверуваме за $y^2 - 1 = \pm 1$, $y^2 - 1 = \pm 3$ и добиваме $y \in \{0, 2, -2\}$. Ако замениме во (2) ги добиваме подредените парови: (0, 0), (2, 2), (2, -2), (-2, 2), (-2, -2).

Конечно, бараното множество решенија е:

$$\{0, 0\}, (2, 2), (-2, 2), (2, -2), (-2, -2) \}.$$

II начин. Равенката (1) ја запишуваме во обликот

$$x^2 (y^2 - 1) = 3y^2,$$

т.е.

$$x \cdot x \cdot (y - 1)(y + 1) = 3y \cdot y.$$

Десната страна на (3) е делива со y па затоа и левата страна се дели со y . Но $\text{НЗД}(y, y \pm 1) = 1$, па затоа мора да е $x = ky$, $k \in \mathbb{Z}$. Од досега изнесеното имаме $(ky)^2 (y^2 - 1) = 3y^2$, т.е.

$$y^2 [k^2 (y^2 - 1) - 3] = 0. \quad (4)$$

Пд равенката (4) добиваме $y^2 = 0$, т.е. $y = 0$, па е $x = 0$, и $k^2 (y^2 - 1) = 3$, па како $k^2 \neq 3$ добиваме $k^2 = 1$, т.е. $k = \pm 1$ и $y^2 - 1 = 3$, т.е. $y_{1/2} = \pm 2$. За $y_1 = -2$ имаме $x = 2$ или $x = -2$, а за $y_2 = 2$ имаме $x = 2$ или $x = -2$.

Конечно, бараното множество решенија е:

$$\{0, 0\}, (2, 2), (-2, 2), (2, -2), (-2, -2) \}.$$

II начин. Нека $x^2 = a, y^2 = b$. Тогаш од (1) добиваме

$$ab = 3b + a$$

$$ab - a - 3b + 3 = 3$$

$$(a-3)(b-1) = 1 \cdot 3 = (-1)(-3) = 3 \cdot 1 = (-3)(-1). \quad (5)$$

Во множеството на целите броеви равенката (5) е еквивалентна со вкупноста на системите линеарни равенки:

$$(i) \begin{cases} a-3=1 \\ b-1=3 \end{cases}; \quad (ii) \begin{cases} a-3=-1 \\ b-1=-3 \end{cases}; \quad (iii) \begin{cases} a-3=3 \\ b-1=1 \end{cases}; \quad (iv) \begin{cases} a-3=-3 \\ b-1=-1 \end{cases}$$

чии решенија се паровите: $(4, 4); (2, -2); (6, 2)$ и $(0, 0)$. Но, $x^2 = a, y^2 = b$, па затоа само паровите $(4, 4)$ и $(0, 0)$ даваат решенија на почетната равенка (1) и тие се:

$$\{0, 0), (2, 2), (-2, 2), (2, -2), (-2, -2)\}.$$