

## БМО 1996

1. Нека  $G$  и  $O$  се соодветно тежиштето и центарот на опишаната кружница околу  $\triangle ABC$ , а  $R$  и  $r$  соодветно се радиусите на опишаната и впишаната кружница. Докажи дека  $\overline{OG} \leq \sqrt{R(R-2r)}$ .

**Решение.** Ако го искористиме равенството на Лајбниц  $\overline{OG}^2 = R^2 - \frac{a^2+b^2+c^2}{9}$ , добиваме дека даденото неравенство е еквивалентно на неравенството  $a^2 + b^2 + c^2 \geq 18Rr$ . Но,  $R = \frac{abc}{4P}$  и  $r = \frac{2P}{a+b+c}$ , па затоа доволно е да докажеме дека

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) \geq 9abc.$$

Последното следува ако ги помножиме неравенствата

$$a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc} \quad \text{и} \quad a^2+b^2+c^2 \geq 3\sqrt{a^2b^2c^2}.$$

2. Нека  $p > 5$  е прост број и  $X = \{p - n^2 \mid n \in \mathbb{N}, n^2 < p\}$ . Докажи, дека множеството  $X$  содржи два различни елемента  $x$  и  $y$  такви што  $x \neq 1$  и  $x \mid y$ .

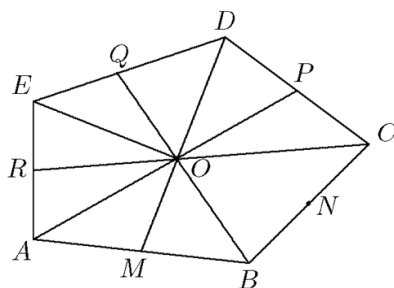
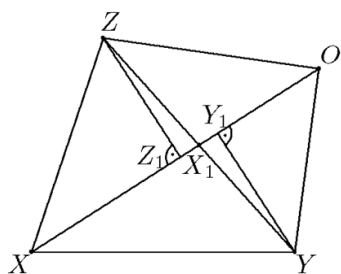
**Решение.** Нека  $m = \lfloor \sqrt{p} \rfloor$ ,  $x = p - m^2$  и  $y = p - |m - x|^2$ . Тогаш

$$y = m^2 + x - (m - x)^2 = x(2m + 1 - x),$$

па затоа  $x \mid y$ . Освен тоа, од  $x + m^2 = p < (m+1)^2$  следува дека  $x < 2m + 1$ , т.е.  $y > 0$ . Исто така,  $m \neq x$  бидејќи  $p \neq m^2$ . Освен тоа,  $y \neq x$ , бидејќи во спротивно  $x = 0$  или  $x = 2m$ , од каде следува  $p = m^2$  или  $p = m(m+2)$ , т.е.  $m = 1$  и  $p = 3$ . Од досега изнесеното следува дека  $x, y \in X$  и  $x \mid y$ . Ако  $x \neq 1$ , тогаш задачата е решена. За  $x = 1$  следува дека  $m$  е парен број и затоа  $2m = p - (m-1)^2$  е делител на  $m^2 = p - 1^2$ . Останува да забележиме дека  $2m < m^2$ , бидејќи во спротивно  $m = 2$  и  $p = 1 + 2^2 = 5$ .

3. Нека  $ABCDE$  е конвексен петаголник и нека  $M, N, P, Q$  и  $R$  се средините на страните  $AB, BC, CD, DE$  и  $EA$ , соодветно. Ако  $AP, BQ, CR$  и  $DM$  се сечат во една точка, докажи дека таа точка лежи на отсечката  $EN$ .

**Решение.** Ќе докажеме, дека точката  $O$  лежи на тежишната линија  $XX_1$  на  $\triangle XYZ$  ако и само ако  $P_{XYO} = P_{XZO}$ . Навистина,  $\frac{P_{XYO}}{P_{XZO}} = \frac{\overline{Y_1Y}}{\overline{Z_1Z}} = \frac{\overline{X_1Y}}{\overline{X_1Z}}$ . Според тоа,  $P_{XYO} = P_{XZO}$  ако и само ако  $X_1$  е средина на  $YZ$ .



Сега, ако  $O$  е заедничка точка на  $AP, BQ, CR$  и  $DM$ , последователно добиваме  $P_{BEO} = P_{BDO} = P_{ADO} = P_{ACO} = P_{CEO}$ . Според тоа,  $P_{BEO} = P_{CEO}$ , т.е.  $EO$  минува низ средината  $N$  на отсечката  $BC$ .

4. Докажи, дека постои подмножество  $A$  на множеството  $\{1, 2, 3, 4, \dots, 2^{1996} - 1\}$  со следниве својства:
- 1)  $1, 2^{1996} - 1 \in A$ ,
  - 2) Секој елемент од  $A \setminus \{1\}$  е збир на два (не задолжително различни) елементи од  $A$ ,
  - 3) Бројот на елементите на  $A$  е најмногу 2012.

**Решение.** Нека  $f(n)$  е најмалиот можен број на елементи на подмножеството  $A$  од множеството  $\{1, 2, 3, 4, \dots, 2^n\}$  кое ги задоволува условите 1) и 2). Тогаш

-  $f(2^{n+1} - 1) \leq f(2^n - 1) + 2$ . Навистина,  $B = A \cup \{2^{n+1} - 2, 2^{n+1} - 1\}$  е подмножество на  $\{1, 2, 3, \dots, 2^{n+1}\}$  кое ги задоволува условите 1) и 2), бидејќи

$$2^{n+1} - 2 = 2^n - 1 + 2^n - 1 \text{ и } 2^{n+1} - 1 = 1 + 2^{n+1} - 2.$$

-  $f(2^{2n} - 1) \leq f(2^n - 1) + (n - 1)$ . Навистина

$$C = A \cup \{2(2^n - 1), 2^2(2^n - 1), \dots, 2^n(2^n - 1), 2^{2n} - 1\}$$

е подмножество на  $\{1, 2, 3, \dots, 2^{2n} - 1\}$ , кое ги задоволува условите 1) и 2), бидејќи

$$2^{j+1}(2^n - 1) = 2^j(2^n - 1) + 2^j(2^n - 1), \text{ за } j = 0, 1, \dots, n - 1$$

и

$$2^{n+1} - 1 = 2^n(2^n - 1) + 2^n - 1.$$

Тогаш

$$\begin{aligned} f(2^{1996} - 1) &\leq f(2^{998} - 1) + 999, & f(2^{998} - 1) &\leq f(2^{499} - 1) + 500, \\ f(2^{499} - 1) &\leq f(2^{498} - 1) + 2, & f(2^{499} - 1) &\leq f(2^{249} - 1) + 250, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(2^{249} - 1) &\leq f(2^{248} - 1) + 2, & f(2^{248} - 1) &\leq f(2^{124} - 1) + 125, \\
f(2^{124} - 1) &\leq f(2^{62} - 1) + 63, & f(2^{62} - 1) &\leq f(2^{31} - 1) + 32, \\
f(2^{31} - 1) &\leq f(2^{30} - 1) + 2, & f(2^{30} - 1) &\leq f(2^{15} - 1) + 16, \\
f(2^{15} - 1) &\leq f(2^{14} - 1) + 2, & f(2^{14} - 1) &\leq f(2^7 - 1) + 8, \\
f(2^7 - 1) &\leq f(2^6 - 1) + 2, & f(2^6 - 1) &\leq f(2^3 - 1) + 4, \\
f(2^3 - 1) &\leq f(2^2 - 1) + 2, & f(2^2 - 1) &\leq f(2^1 - 1) + 2, \\
f(2^1 - 1) &\leq 1.
\end{aligned}$$

Ако ги собереме горните неравенства, после скратувањето добиваме

$$f(2^{1996} - 1) \leq 2012 .$$