III и IV ГОДИНА

Секоја од задачите со реден број од 1 до 10 се вреднува со 3 поени

1. Во еден аквариум имало 200 риби, при што 1% од нив биле сини, а останатите биле жолти риби. Колку жолти риби треба да се отстранат од аквариумот, за да од рибите што останале во базенот сините риби се 2%.

(A) 2 (B) 4 (C) 20 (D) 50 $\boxed{(E)\ 100}$

Решение. Бидејќи сини риби се 1% од вкупно 200 риби, добиваме дека во аквариумот има 2 сини риби. За да бројот на сини риби е 2% од вкупниот број на риби во аквариумот, во аквариумот треба да има 100 риби и од кои две се сини. Значи треба да се отстранат 100 жолти риби.

2. Кој е најголем од следните броеви?

$\boxed{(A)\ \sqrt{2}-\sqrt{1}}$ (B) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ (C) $\sqrt{4}-\sqrt{3}$ (D) $\sqrt{5}-\sqrt{4}$ (E) $\sqrt{6}-\sqrt{5}$

Решение. За било кој природен број k точно е неравенството

$$\sqrt{k+1}-\sqrt{k}=\frac{(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}=\frac{k+1-k}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}=\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$$

Сега

$$\begin{matrix} k+2>k+1 \\ k+1>k \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \sqrt{k+2}>\sqrt{k+1} \\ \sqrt{k+1}>\sqrt{k} \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \sqrt{k+2}+\sqrt{k+1}>\sqrt{k+1}+\sqrt{k} \\ \frac{1}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k+1}}<\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} \end{matrix}$$

Од дискусијата јасно е дека $\sqrt{2}-\sqrt{1}$ е најголем меѓу дадените броеви.

3. За колку природни броеви n, бројот n^2+n е прост број?

(A) 0 $\boxed{(B)\ 1}$ (C) 2

(D) конечено многу повеќе од 2 (E) бесконечно многу

Решение. Ако $n>1$, $n+1>2$, па според тоа, делители на n^2+n се n и $n+1$. Биејќи n^2+n има барем два делители различни од 1 и n^2+n тој е сложен број.

За $n=1$ имаме

$$n^2+n=1^2+1=2,$$

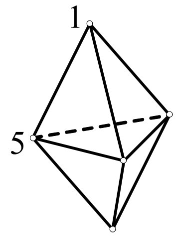
т.е. n^2+n е прост број.

4. Ана, Анета и Александра отишле на кафе. Секоја од нив платила три сока, два сладоледи и пет колачиња. Која од следните суми е вкупната заедничка сметка?

(A) 39,20 (B) 38,20 $\boxed{(C)\ 37{,}20}$ (D) 36,20 (E) 35,20

Решение. Ана, Анета и Александра платиле по иста сума на пари, бидејќи купиле исти производи. Единствен број кој се дели со 3 е 37,20.

5. Едно тело е формирано од 6 триаголници. Во секое негово теме е запишан по еден број. За секоја страна е пресметан збирот на броевите во нејзините темиња, и сите пресметани збирови се еднакви. Два од



запишаните броеви се 1 и 5 како на цртежот. Колку е збирот на сите запишани броеви во темињата на телото?

(A) 9 (B) 12 $\boxed{(C)\ 17}$ (D) 18 (E) 24

Решение. Телото се состои од две триаголни призми кои имаат заедничка основа. Темињата во кои што не се запишани броеви ќе ги означиме со A и B, а врвот на втората призма со C. Нека во A, B и C се запишани броевите x, y и z соодветно. Тогаш

$1+5+x=1+5+y=1+x+y$

Според тоа $x=y$ и $6+x=1+2x$, $x=5=y$. Не е тешко да се види дека $z=1$. Збирот на броевите е $15+2=17$.

6. Кружниците $k(F,13)$ и $k(G,15)$ се сечат во точките P и Q. Должината на отсечката PQ е 24. Колку е должината на отсечката FG?

(A) 2 (B) 5 (C) 9 $\boxed{(D)\ 14}$ (E) 18

Решение. Триаголниците FPQ и GPQ се рамнокраки со основа PQ. Висината од F на страната PQ е нејзина симетрала. Слично, висината од G на PQ е нејзина симетрала. Биејќи PQ има една единствана симетрала, доволно е да се определи нејзината пресечна точка со PQ. Нека тоа е N. Тогаш F, N и G се колинеарни и

$$\overline{FG}=\overline{FN}+\overline{GN}.$$

Но FN и GN се слични во ΔPFG и ΔQGP. Според тоа

$$\overline{FN}=\sqrt{13^2-12^2}=\sqrt{169-144}=5$$

$$\overline{GN}=\sqrt{15^2-12^2}=\sqrt{225-144}=\sqrt{81}=9$$

Значи $\overline{FG}=14$.

7. Во една кутија се наоѓаат 2 бели, 3 црвени и 4 сини чорапи. Анета знае дека три од нив се скинати, но не знае од која боја се тие. Колку чорапи треба да земе Анета од кутијата за да во нив има еден пар здрави чорапи од иста боја?

(A) 2 (B) 3 (C) 6 $\boxed{(D)\ 7}$ (E) 8

Решение. Ќе разгледаме повеќе случаи:

а) Сите скинати чорапи се со различна боја

б) Два скинати чорапи се со иста боја, а еден е од друга боја

- *i*) два бели и еден црвен
- *ii*) два бели и еден син
- *iii*) два црвени и еден бел
- *iv*) два црвени и еден син
- *v*) два сини и еден бел
- *vi*) два сини и еден црвен

в) Трите скинати чорапи се од иста боја

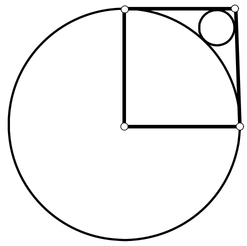
Во случајот в) за да се извлечат два чорапи со една боја треба да се извлечат 6 или 7 чорапи.

Во случајот а) треба да се извлечат најмалку 7 чорапи за да се извлечат два чорапи со иста боја.

Во случајот б) *i*) не е тешко да се провери дека е потребно да се изберат најмалку 5 чорапи. Во случајот б) *ii*) потребно е да се извлечат 6 чорапи, во случајот б) *iii*) потребно е да се извлечат 7 чорапи, б) iv) потребно е да се извлечат 7 чорапи, б) v) потребно е да се извлечат 7 чорапи, б) vi) потребно е да се извлечат 7 чорапи за да има два со иста боја.

Конечно, потребно е да се извлечат 7 чорапи за да има два чорапи со иста боја.

8. Квадратот даден на цртежот има страна еднаква на 1. Колку е радиусот на малата кружница?



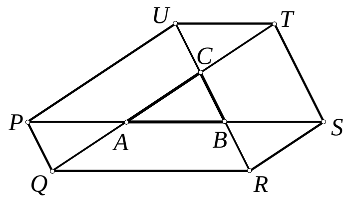
(A) $\sqrt{2}-1$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ (D) $1-\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\boxed{(E)\ (1-\sqrt{2})^2}$

Решение. Големата кружница ќе ја означиме со k, а малата со k_1. Нека квадратот е означен со $ABCD$, а допирната точка на кружинците со L. Ако x е радиусот на малата кружница, тогаш LC има должина енаква на $\overline{LC}=x+x\sqrt{2}$.

Според тоа

$$\overline{AC}=1+x+x\sqrt{2}=\sqrt{2}$$
$$x(1+\sqrt{2})=\sqrt{2}-1$$
$$x=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=(\sqrt{2}-1)^2$$

9. Страните на триаголникот ABC се продолжени преку нивните крајни точки до точките P,Q,R,S,T,U така што $PA=AB=BS$, $QA=AC=CT$, $UC=CB=BR$ (види цртеж). Колку е плоштината на шестаголникот $PQRSTU$.



(A) 10 (B) 10 (C) 12 $\boxed{(D)\ 13}$ (E) не може да се определи

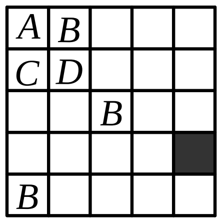
Решение. Низ точките A,B и C ќе повлечеме прави p,q и r, соодветно, кои се паралелни со BC,AC и AB соодветно.

Од особини на средна линија на триаголник, пресеците на p и q, q и r и r и p припаѓаат на QR, TS и UP. Нив ќе ги означиме со L,M и N соодветно.

Сега е јасно дека шестаголникот е разделен на 13 складни триаголници.

Значи, $P_{PQRSTU}=13$.

10. Квадратчињата на квадратна шема со димензии 5×5 треба да се обојат со боите A,B,C и D. Секое квадратче да се обои во една боја и две соседни квадратчиња треба да се обоени во различни бои. Две квадратчиња се соседни ако имаат заедничко теме. Некои од квадратчињата се веќе обоени, како што е прикажано на цртежот. Во кои бои може да биде обоено затемнетото квадратче?



(A) некоја од боите A или B (B) само C (C) само D

$\boxed{(D)\ \text{некоја од боите } C \text{ или } D}$ (E) секоја од боите A,B,C,D

Решение. Необоените квадрати ќе ги означеме со 13, 14, 15, 23, 24, 25 31, 32, 34, 35, 41, 42, 43, 44, 45, 52,53, 54, 55. Јасно е дека квадратот 32 треба да е обоен со бојата А, а квадратот 23 со бојата С. Сега квадратот 13 треба треба да е обоен со бојата А, 24 со бојата D, 14 со бојата B, 34 со бојата А, 25 со бојата С, 15 со бојата А, 35 со бојата B, 31 со бојата B.

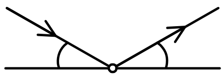
Квадратот 41 може да биде обоен со бојата C или D.

а) Ако 41 го обоиме со C, тогаш и затемнетиот квадрат ќе биде обоен со C.

б) Ако 41 го обоиме со D, тогаш и затемнетиот квадрат ќе го обоиме со D.

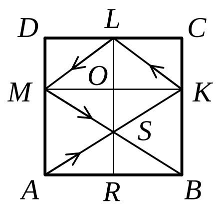
A	B	A_{13}	B_{14}	A_{15}
C	D	C_{23}	D_{24}	C_{25}
B_{31}	A_{32}	B	A_{34}	B_{35}
C_{41}^{D}	D_{42}^{C}	C_{43}^{D}	D_{44}^{C}	C_{45}^{D}
B	A_{52}^{A}	B_{53}^{B}	A_{54}^{A}	B_{55}

<u>Задачите под реден број од 11 до 20 се вреднуваат со 4 поени</u>



11. Маса за билјард има форма на квадрат со страна $2\ \text{m}$, и од темето A е исфрлена една топка (види цртеж). По удирањето на исфрлената топка во трите страни, како што е прикажано, таа се вратила во темето B (топката од секоја страна се одбива под ист агол под кој што удира). Колку метри се тркалала топката?

(A) 7 $\boxed{(B)\ 2\sqrt{13}}$ (C) 8 (D) $4\sqrt{3}$ (E) $2(\sqrt{2}+\sqrt{3})$



Решение. Точките во кои удира топчето од билијардот ќе ги означиме со K, L и M (види цртеж). Точката во која се сечат деловите од патеките AK и BM ќе ја означиме со S а пресекот на нормалите во точките K и L кон страните на билијардот ќе го означиме со O. Од причини на симетрија, добиваме дека

$$\Delta KOL \cong \Delta KOS \cong \Delta LOM \cong \Delta SOM \cong \Delta SRB \cong \Delta SRA,$$

Па заради тоа, $\overline{AS} = \overline{SK} = \overline{KL} = \overline{LM} = \overline{MS} = \overline{SB}$. Доволно е да се пресмета должината само на една од тие отсечки. Ако воведеме ознака $\overline{KC} = x$, тогаш $\overline{BK} = 2 - x$, и од правоаголните триаголници ABK и KCL, добивме

$$\overline{AK} = \sqrt{2^2 + (2-x)^2} = \sqrt{8 - 4x + x^2}$$

$$\overline{KL} = \sqrt{1^2 + x^2} = \sqrt{x^2 + 1}\ .$$

Од равенството $\overline{AK} = 2\overline{KL}$, имаме $2\sqrt{x^2+1} = \sqrt{8-4x+x^2}$. Последната равенка може да се запише во облик $3x^2 + 4x - 4 = 0$, а нејзино позитивно решение е $x = \frac{2}{3}$. Сега се добива $\overline{LK} = \frac{\sqrt{13}}{3}$, а должината на патеката која ќе ја помине топката е $2\sqrt{13}$.

12. Во една група од 2009 кенгури, некои се бели а некои црни. При тоа, еден бел кенгур е повисок од точно 8 црни кенгури, еден бел кенгур е повисок од точно 9 црни кенгури, еден бел кенгур е повисок од точно 10 црни кенгури, и така натаму, точно еден бел кенгур е повисок од сите црни кенгури. Колку кенгури во групата биле бели?

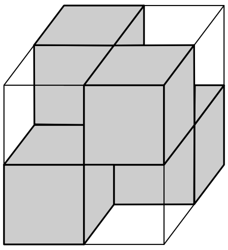
(A) 1000 $\boxed{(B)\ 1001}$ (C) 1002 (D) 1003 (E) таква ситуација не е можна

Решение. Нека еден од белите кенгури е повисок точно од 8 црни кенгури. Секој од овие црни кенгури е во групата од 9 црни кенгури кои се помали од еден бел кенгур.

Ќе ги разгледаме белите кенгури и тоа оние од кој точно група од 8 црни кенгури се помали и оние за кој точно група од 9 црни кенгури се помали. Секој црн кенгур од првата група припаѓа на втората група.

Точно еден црн кенгур од групата 9 црни кенгури е поголем од првиот бел кенгур. Ако претпоставиме дека тој број е повеќе од еден, тогаш вториот бел кенгур е повисок од повеќе од 9 црни кенгури.

Продолжувајќи ја оваа постапка, на ист начин добиваме дека бројот на бели кенгури е 1001.



13. Коцка со раб 2 е составена од 8 коцки со раб 1, четири црни-непроѕирни и четири проѕирни. Тие се поставени така што коцката со раб 2 е непроѕирна кога гледаме од било која страна на коцката (види цртеж). Кој е најмалиот број на црни непроѕирни коцки кои треба да се употребат за да се направи коцка со раб 3, така што коцката да биде непроѕирна кога гледаме од било која нејзина страна?

(A) 6 $\boxed{(B)\ 9}$ (C) 10 (D) 12 (E) 18

Решение. Јасно е дека не може да се поставени помалку од 9 црни непроѕирни коцки. Една страна на коцката има 9 квадратчиња со страна 1. За да таа е непроѕирна, на соодветните вертикали треба да има поставено по една коцка.

Не е тешко еден таков распоред на коцки да се направи.

14. На еден остров некои од жителите се лажговци. Лажговците секогаш лажат, а другите жители на островот секогаш ја зборуваат вистината. Во една редица биле наредени 25 жители од островот. Секој од нив, освен првиот, рекол дека тој што е пред него во редот е лажго. Првиот рекол дека сите останати членови на редот се лажговци. Колку лажговци има во редот?

(A) 0 (B) 12 $\boxed{(C)\ 13}$ (D) 24 (E) не е можно да се определи

Решение. Последниот член на редот е или лажго (Л) или секогаш ја зборува вистината (В). Ќе ги разглеаме двата случаи:

а) Последниот член на редот е лажго. Тогаш членовите на редот се:

ЛВЛВЛВЛВЛВЛВЛВЛВЛВЛВЛВЛВЛ

што значи дека првиот член на редот е лажго. Бидејќи тој секогаш лаже, не сите членови на редот се лажговци.

б) Последниот член на редот секогаш ја зборува вистината. Тогаш членовите на редот се:

ВЛВЛВЛВЛВЛВЛВЛВЛВЛВЛВЛВЛВ

што не е можно.

15. Која е последната цифра на бројот $1^2-2^2+3^2-4^2+....-2008^2+2009^2$?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 $\boxed{(E)\ 5}$

Решение. Бидејќи

$$(2k-1)^2-(2k)^2=(2k-1-2k)(2k-1+2k)=-(4k-1)\,,\ k\in\mathbb{N}$$

дадениот збир можеме да го запишеме во облик

$$-3-7-11-...-4015+2009^2\,.$$

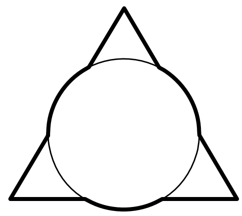
Бројот на негативни собироци е 1004 и нивниот збир е еднаков на

$$-3-7-11-...-4015=-(3+7+11+...+4015)=-1004\cdot 2009\,.$$

Ако со A го означиме збирот од условот на задачата, добиваме

$$A=-1004\cdot 2009+2009^2=2009(2009-1004)=2009\cdot 1005\,,$$

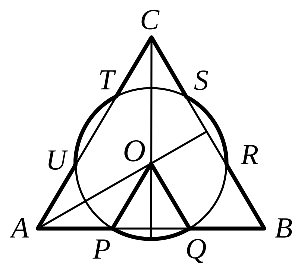
од каде јасно е дека неговата последна цифра е 5.



16. Центарот на кружница со радиус $1\,\text{cm}$ е во центарот на рамностран триаголник со страна $3\,\text{cm}$. Колку е должината на задебелената линија?

(A) $3+2\pi$ $\boxed{(B)\ 6+\pi}$ (C) $9+\frac{\pi}{3}$ (D) 3π (E) $9+\pi$

Решение. Нека ABC е рамностран триаголник со должина на страна $3\,cm$ и центар 1, а k е кружница со центар O и радиус 1. Пресечните точки на кружницата k со страните на триаголникот ќе ги означиме со P,Q,R,S,T,U (види цртеж).



Висината на триаголникот ABC е $\frac{3\sqrt{2}}{3}$, а висината на траиголникот OPQ е $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Бидејќи $\overline{OP}=\overline{OQ}=1$, имаме

$$\frac{\overline{PQ}}{2}=\sqrt{1^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}\,,$$

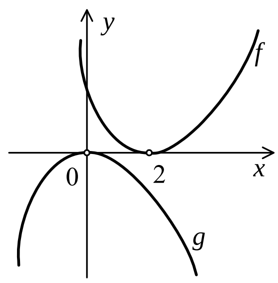
т.е. $\overline{PQ}=1$. Од причини на симетрија

$$\overline{RS}=\overline{TU}=\overline{PQ}=1\,.$$

Според тоа $\overline{AP}=\overline{PQ}=\overline{QB}=1$. Триаголниците APU,QBR,SCT се рамнокраки со две страни 1 и аголот што го зафаќаат еднаков на 60°. Според тоа, тие се рамнострани. Значи, $PQRSTU$ е правилен шестаголник. Должината на секој од лаците $\widehat{SR},\widehat{TU}$ и $\widehat{PQ}$ е $\frac{\pi}{3}$.

Значи, периметарот на фигурата е

$$L=6\cdot 1+3\frac{\pi}{3}=6+\pi\,.$$



17. Графиците на реалните функции се дадени на цртежот. Која е зависноста меѓу f и g?

(A) $g(x)=f(x+2)$

$\boxed{(B)\ g(x-2)=-f(x)}$

(C) $g(x)=f(-x+2)$

(D) $g(-x)=-f(-x+2)$

(E) $g(2-x)=-f(x)$

Решение. Ако основиметрично го пресликаме графикот на g, со оска на симетрија Ox-оска, и го поместиме за 2 во десно, независно од редоследот на двата чекори, тогаш од графикот на g се добива графикот на f.

Значи, $f(x)=-g(x-2)$.

18. На една математичка олимпијада учествувале 100 ученици, кои решавале тест кој имал 4 задачи. Првата задача ја решиле 90 натпреварувачи, втората задача ја решиле 85 натпреварувачи, третата задача ја решиле 80 натпреварувачи, а четвртата задача ја решиле 75 натпреварувачи. Кој е најмалиот можен број на натпреварувачи кои ги решиле сите четири задачи?

(A) 10 (B) 15 (C) 20 $\boxed{(D)\ 25}$ (E) 30

Решение. Нека A множеството студенти кои не ја решиле првата задача, B втората, C третата и D четвртата задача.

Тогаш $|A|=10,\ |B|=15,\ |C|=20$ и $|D|=25$. Притоа

$$|S\setminus(A\cup B\cup C\cup D)|=|S|\setminus|(A\cup B\cup C\cup D)|=100-|(A\cup B\cup C\cup D)|$$

Од друга страна

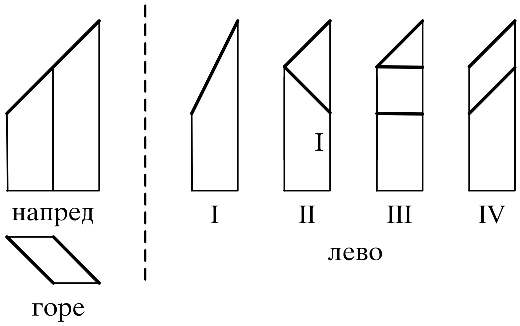
$$|(A\cup B\cup C\cup D)|\le|A|+|B|+|C|+|D$$

$$100-|(A\cup B\cup C\cup D)|\ge 100-75=25$$

Равенството се достигнува ако унијата е дисјунктна. Една таква унија е:

$$A=\{1,2,\ldots,10\}$$
$$B=\{11,12,\ldots,25\}$$
$$C=\{26,27,\ldots,45\}$$
$$D=\{46,47,\ldots,75\}$$

19. На цртежот е прикажан поглед од напред и поглед од горе на една геометриска фигура. Кој од цртежите од I до IV е поглед на фигурата од лево.



(A) I (B) II (C) III $\boxed{(D)\ \text{IV}}$ (E) ниту еден од нив

Решение. Не е тешко да се види дека погледот од лево е четвртиот цртеж.

20. Квадратна шема 3×3 треба да се дополни до магичен квадрат (збирот на броевите во секоја редица, секоја колона и дијагонала е ист). Ако два од броевите се дадени (види цртеж), колку е означениот број a?

a		
		47
	63	

(A) 16 (B) 51 (C) 54 (D) $\boxed{55}$ (E) 110

Решение. Нека во останатите полиња се броевите b,c,d,e,f,g. Тогаш

$$\begin{cases} a+b+c=S\\ d+e+47=S\\ f+63+g=S\\ d+a+f=S\\ b+e+63=S\\ c+g+47=S\\ a+e+g=S\\ f+e+c=S \end{cases}$$

Од овој систем се добива $a=55$.

a	b	c
d	e	47
f	63	g

Задачите под реден број од 21 до 30 се вреднуваат со 5 поени

21. Определи го бројот на десетцифрени броеви запишани со цифрите $1,2$ и 3, во кој било кои две соседни цифри се разликуваат за 1.

(A) 16 (B) 32 $\boxed{(C)\ 64}$ (D) 80 (E) 100

Решение. Ако баран десетцифрен број го исполнува условот од задачата тогаш ги имаме следните 16 можности, ако бројот почнува со 1. Истата ситуација ја имаме ако бројот почнува со 3. Ако бројот почнува со цифрата 2, тогаш бројот на можни решенија е двојно поголем. Значи има вкупно $16+16+32=64$ такви броеви.

22. Двајца атлетичари A и B трчале околу стадион. Секој од нив трчал со постојана брзина. A е побрз од B и трча еден круг за $3\min$. A и B почнале да трчаат во исто време и по 8 min, A го стигнал B за прв пат. За колку време атлетичарот B трча еден круг?

(A) 6 min (B) 8 min (C) 4 min 30 sec $\boxed{(D)\ 4\text{ min } 48\text{ sec}}$ (E) 4 min 20 sec

Решение. Нека должината на кругот кој го трчале атлетичарите е s. Тогаш атлетичарот A за 8 минути истрчал $s+s+\frac{2}{3}s=\frac{8}{3}s$, а атлетичарот B за истото време истрчал $\frac{5}{3}s$. Според тоа, брзината на атлетичарот B е

$$v=\frac{S}{t}=\frac{\frac{5}{3}s}{8}=\frac{5}{24}s\,.$$

Значи, еден круг, атлетичарот B ќе истрча за

$$t=\frac{s}{\frac{5}{24}s}=\frac{24}{5}\min=4{,}8\min=4\min 48\sec$$

23. Нека Z е бројот на 8-цифрени броеви со осум различни цифри, различни од нула. Колку од нив се деливи со 9?

$(A)\ \frac{Z}{8}$ $(B)\ \frac{Z}{3}$ $\boxed{(C)\ \frac{Z}{9}}$ $(D)\ \frac{8Z}{9}$ $(E)\ \frac{7Z}{8}$

Решение. Збирот на цифрите различни од нула е еднаков на

$$1+2+3+4+5+9+8+7+6=45\,.$$

Збирот на цифрите на броевите во кои не учествува $1,2,3,4,5,6,7,8,9$ е

$45-1=44$	$45-2=43$	$45-3=42$	$45-4=41$	$45-5=40$
$45-6=39$	$45-7=38$	$45-8=37$	$45-9=36$	

соодветно. Единствен број кој е делив со 9 е 36. Според признакот за деливост со 9 само осумцифрените броеви со различни цифри кои не ја содржат цифрата 9 се деливи 9. Ако бројот на броеви кои не ја содржат $1,2,3,4,5,6,7,8,9$ се $Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5, Z_6, Z_7, Z_8$ и Z_9 соодветно, тогаш

$$Z_1=Z_2=Z_3=Z_4=Z_5=Z_6=Z_7=Z_8=Z_9$$

Според тоа

$$Z_1+Z_2+Z_3+Z_4+Z_5+Z_6+Z_7+Z_8+Z_9=Z$$

$$9Z_9=Z\,,\ Z_9=\frac{Z}{9}\,.$$

24. Даден е бројот $A=\underbrace{999...999}_{81-\text{ pati } 9}$. Колку е збирот на цифрите на бројот A^2.

(A) 1 $\boxed{(B)\ 4}$ (C) 9 (D) 44 (E) 729

Решение. Бројот A можеме да го запишеме во облик

$$A=\underbrace{999...999}_{81-\text{ pati }9}+1-1=1\underbrace{000...000}_{81-\text{ пати }0}-1=10^{81}-1\,.$$

Сега, A^2 може да се запише во облик

$$A^2=(10^{81}-1)^2=10^{162}-2\cdot 10^{81}+1=1\ \underbrace{00...00}_{162-\text{пати}\,0}\ -2\ \underbrace{00...00}_{81-\text{пати}\,0}\ +1=1\ \underbrace{00...00}_{80-\text{пати}\,0}\ 2\ \underbrace{00...00}_{80-\text{пати}\,0}\ 1$$

Јасно е дека збирот на цифрите е еднаков на 4.

25. На една математичка олимпијада учествувале 55 натпреварувачи. Кога ги вреднувале задачите, комисијата нив ги оценувала со $+$ за точно решена задача, со $-$ за неточно решена задача и со 0 за задача која не е воопшто решавана. По оценувањето на писмените работи, немало две тетратки со ист број на плусеви и ист број на минуси. Кој е најмалиот можен број на задачи на олимпијадата?

(A) 6 $\boxed{(B)\ 9}$ (C) 10 (D) 11 (E) 12

Решение. За секоја тетратка имаме x нули, y плусови и z минуси. Нивниот збир е еднаков на бројот на задачи. За девет задачи ги имаме следните можности

$$9=0+0+9=0+1+8=0+2+7=0+3+6=0+4+5=1+1+7=1+2+6=1+3+5=$$
$$=1+4+4=2+2+5=2+3+4=3+3+3$$

Различни тетратки со резултат

$$0+0+9, 1+1+7, 2+2+5, 1+4+4$$

има по три. Различни тетратки со резултат

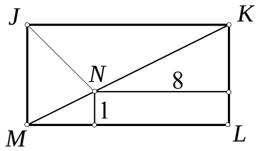
$$0+1+8, 0+2+7, 0+3+6, 0+4+5, 1+2+6, 1+3+5, 2+3+4$$

има по шест.Тетратка со резултат $3+3+3$ има една.

Бидејќи $1+6\cdot 7+3\cdot 4=55$, добиваме дека најмалку треба да има 9 задачи.

За осум задачи, може да има најмногу 42 различни тетратки.

26. Во четириаголникот $JKLM$, симетралата на аголот $\measuredangle KJM$ ја сече дијагоналата KM во точката N. Растојанијата од точката N до страните LM и KL се еднакви на 1 и 8 соодветно. Колку е $\overline{LM}$?



$\boxed{(A)\ 8+2\sqrt{2}}$ (B) $11-\sqrt{2}$ (C) 10 (D) $8+3\sqrt{2}$ (E) $11+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Решение. Со P и Q ќе ги означиме подножјата на нормалите спуштени кон ML и LK. Тогаш $\overline{NP}=1$ и $\overline{NQ}=8$. Од точката N ќе спуштиме нормали NS и NT кон JK и JM соодветно. Тогаш $\overline{NT}=a-8$ и $\overline{NS}=b-1$. Бидејќи

$$\measuredangle MJN=\measuredangle NJK=\measuredangle TJN=\measuredangle SJN=45^\circ,$$

Добиваме дека $NSJT$ е квадрат. Според тоа $a-8=b-1$, односно

$$a=b+7, \qquad (1)$$

каде a и b се должини на страните на правоаголникот. Од сличноста $\Delta MNP\sim\Delta NLQ$ добиваме

$$\frac{a-8}{1}=\frac{8}{b-1}$$
$$ab-a-8b=0 \qquad (2)$$

Од (1) и (2) ја добиваме равенката $b^2-2b-7=0$, која има решение $b=1+2\sqrt{2}$, од каде добиваме $a=8+2\sqrt{2}$.

27. Нека $k=\frac{a}{b+c}=\frac{b}{a+c}=\frac{c}{a+b}$. Определи го бројот на можни вредности на k?

(A) 1 $\boxed{(B)\ 2}$ (C) 3 (D) 4 (E) 6

Решение. Дадените равенства можеме да ги запишеме во облик

$k(b+c)=a$

$k(c+a)=b$

$k(a+b)=c$

Ако трите равенства ги собереме, ќе имаме

$2k(a+b+c)=a+b+c$.

При тоа можни се два случаи.

а) $a+b+c\neq 0$. Тогаш $k=\frac{1}{2}$.

б) $a+b+c=0$. Добиваме $a+b=-c, b+c=-a$ и $c+a=-b$. Тогаш,

$\frac{a}{b+c}=\frac{a}{-a}=-1$, $\frac{b}{c+a}=\frac{b}{-b}=-1$ и $\frac{c}{a+b}=\frac{c}{-c}=-1$,

односно $k=-1$.

Значи, за k има две можни вредности: $k=\frac{1}{2}$ и $k=-1$.

28. Броевите $1,2,3,4,...,99$ се распоредени во n групи, при што се исполнети следните услови:

(a) секој број се наоѓа во една група

(b) секоја група има најмалку два броја

(c) ако два броеви се наоѓаат во иста група, нивниот збир не е делив со 3 .

Најмалиот број n со ова својство е:

(A) 3 (B) 9 $\boxed{(C)\ 33}$ (D) 34 (E) 66 .

Решение. Секој од броевите од множеството $A=\{1,2,3,4,...,99\}$ при делење со 3 има остаток 0 или 1 или 2 . Според остатоците од делење со 3 , множеството A можеме да го разбиеме на три попарно дисјунктни множества. Во секое од нив да се броеви кои имаат ист остаток при делење со 3 . Тоа се множествата

$A_{\circ}=\{3,6,9,12,...,99\}$

$A_1=\{2,5,8,11,...,98\}$

$A_2=\{1,4,7,10,13,...,97\}$

Нека $B_{\circ}, B_1,...,B_n$ се делбените множества кои го исполнуваат условот од заачата.

Два броја од множеството $A_{\circ}$ не може да се во исто множество B_i , $i=1,2,3,...,n$. Според тоа $n\geq 33$. Доволно е да се докаже дека за $n=33$ постои таква поделба.

Ќе формираме 33 множества на следниот начин.

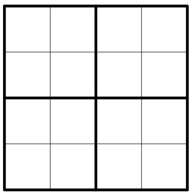
Во B_i се содржи елементот $3i$, $i=1,2,3,...,33$.

Во $B_1, B_2,...,B_{16}$ ќе ставиме по два елементи од A_2 , а да остане 97 .

Во $B_{17}, B_{18},...,B_{32}$ ќе ставиме по два елементи од A_1 , а да остане 98 .

Елементот 98 ќе го ставиме во B_{33} , а елементот 97 ќе го ставиме во B_1 .

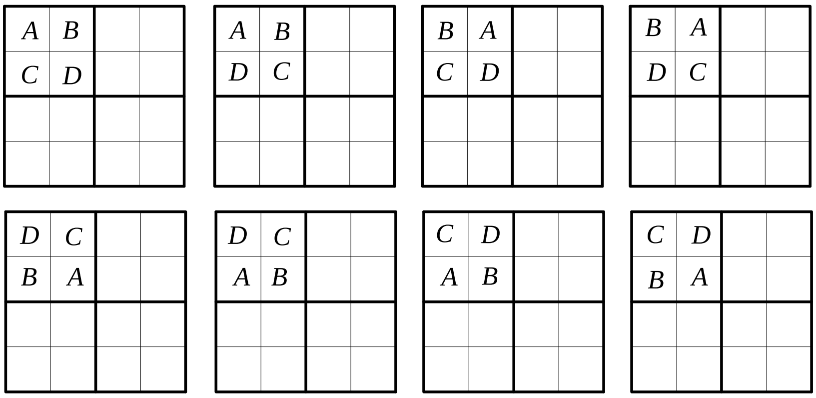
Со тоа, имаме подлеба како во условите о задачата.



29. Квадратна шема 4×4 е подлена на четири квадрати, како на цртежот. Во секое квадратче на квадратната шема е запишана една од буквите A, B, C, D. Колку пополнети квадратни шеми има, за кои во секоја колона, секоја редица и секој од четирите делбени квадрати секоја од четирите буквите се појавува еднаш?

(A) 24 (B) 72 (C) 144 $\boxed{(D)\ 288}$ (E) 576

Решение. Четирите квадратчиња лево горе, може да се пополнат на 24 различни начини. На пример ако во првиот ред се A и B, а во вториот се C и D или обратно, има 8 како што е прикажано на цртежот. За секое од тие пополнувања постојат по 12 пополнувања, различни меѓу себе на целиот квадрат.



30. Низата на природни броеви е зададена со $a_{\circ}=1$, $a_1=2$, $a_2=5,\ldots,$ $a_{n+2}=a_n+(a_{n+1})^2$, за $n\geq 1$. Остатокот при делење на a_{2009} со 7 е:

(A) 0 $\boxed{(B)\ 1}$ (C) 2 (D) 5 (E) 6

Решение. Од самата дефинција на низата јасно е дека

$a_{\circ}\equiv 1 \pmod 7$

$a_1\equiv 2 \pmod 7$

$a_2\equiv 5 \pmod 7$ $a_2^2+a_1\equiv 6 \pmod 7$

$a_3\equiv 6 \pmod 7$ $a_3^2+a_2\equiv 36+5\equiv 6 \pmod 7$

$a_4\equiv 6 \pmod 7$ $a_3^2+a_2\equiv 36+6\equiv 0 \pmod 7$

$a_5\equiv 0 \pmod 7$ $a_5^2+a_4\equiv 0+6\equiv 6 \pmod 7$

$a_6\equiv 6 \pmod 7$ $a_6^2+a_5\equiv 36+0\equiv 1 \pmod 7$

$a_7\equiv 1 \pmod 7$ $a_7^2+a_6\equiv 1+6\equiv 0 \pmod 7$

$a_8\equiv 0 \pmod 7$ $a_8^2+a_7\equiv 0+1\equiv 1 \pmod 7$

$a_9\equiv 1 \pmod 7$ $a_9^2+a_8\equiv 1+0\equiv 1 \pmod 7$

$a_{10}\equiv 1 \pmod 7$ $a_{10}^2+a_9\equiv 1+1\equiv 2 \pmod 7$

$a_{11}\equiv 2 \pmod 7$.

Сега од равенството $2009=200\cdot 10+9$, добиваме дека

$$a_{2009}\equiv a_9\equiv 1\ (\bmod 7).$$