Алекса Малчески, Скопје
Ристо Малчески, Скопје

АЈДЕ ДА РАЗМИСЛУВАМЕ ПРАВИЛНО

На улица, после подолго време, се сретнаа двајца другари од детството Костадин и Бранко. После краток разговор за заеднички поминатите години во детството, Бранко го запраша Костадин:

- Дали уште си водач на екипата за Јуниорската балканска математичка олимпијада (ЈБМО)?

Костадин на тоа одговори:

- Да, деновиве избравме екипа од шест ученици чии имиња се Ана, Бојан, Весна, Горан, Десанка и Емил.

Бранко, со одобрување климна со главата и го праша Костадин по кој редослед се пријавени учениците во екипата, на што Костадин одговори:

- Во списокот Бојан и Десанка се еден до друг. Весна и Горан се исто така еден до друг. Меѓу Горан и Емил, како и меѓу Ана и Бојан има има точно по две деца, а меѓу Ана и Горан има точно едно дете. Сега сам види по кој редослед се пријавени учениците.

Откако малку поразмисли Бранко му одговори:

- Не ми даде доволно податоци за да го составам списокот.

На тоа Костадин дополни:

- Емил е понапред од Бојан, но е поназад од Весна, ...

Бранко веднаш го прекина:

- Во ред, во ред, сега веќе знам по кој редослед се пријавени учениците за ЈБМО.

Дали и вие знаете по кој редослед се пријавени учениците за ЈБМО? Веројатно ќе речете дека на Костадин му е најлесно да одговори на ова прашање, бидејќи тој го составувал списокот. Но и вие можете да го составите списокот, се разбира ако логички размислувате.

Да тргнеме од почеток. Децата ќе ги означиме со првите букви од нивните имиња. Бидејќи **Е** е понапред од **Б**, а е поназад од **В**, заклучуваме дека подредувањето однапред наназад е **В ... Е ... Б**. Според тоа, **Д** не може да биде прва бидејќи е до **Б**. Понатаму, **В** исто така не може да биде прва, бидејќи одма зад неа треба да е **Г**, а по него некое од децата, кое го означуваме со **X**, потоа **А**, следен од **Е**, од **Д** и од **Б**, т.е. подредувањето треба да биде **В, Г, X, А, Е, Д, Б**. Но, тоа не е можно бидејќи во ваков случај ќе имаме 7 деца. Според тоа, прв е или **Г** или **А**. И во двата случаја **В** е меѓу нив, бидејќи меѓу **А** и **Г** треба да има точно едно дете. Но, бидејќи меѓу **Г** и **Е** има точно две деца, подредувањето е **Г, В, А, Е**. Меѓу **А** и **Б** има точно две деца, па следува дека **Д** е петта, а **Б** е шести.

Конечно, подредувањето е **Г, В, А, Е, Д, Б**.

Сега да ги разгледаме следните четири едноставни логички задачи.

1. Џуџињата направиле распоред за чистење на својата куќичка за месец кој има 31 ден. Според тој распоред, Срамежливко чисти во понеделник, Спанко во вторник, Учо во среда, Смешко во четврток, Лутко во петок, Кивавко во сабота и Ушко во недела. Во текот на месецот Срамежливко и Лутко дошле на ред за чистење секој по четири пати. Кое џуџе чистело 23. ден тој месец?

   Решение. Со користење на таканаречениот "слеп" календар можеме да ги определиме деновите за првите 7 дена во месецот. Треба да се определи кој ден по ред во месецот бил понеделник. Прв, втор и трет ден во месецот не може да е понеделник, бидејќи тогаш Срамежливко треба да чисти 5 пати. Ако во понеделник е четврти од месецот, тогаш во петок треба да е први од месецот и тогаш Лутко ќе чисти 5 пати, што не е можно. Од исти причини во понеделник не може да биде петти и шести во месецот. Според тоа, во понеделник е 7. од месецот. Сега да ја пополниме табелата

Вторник	1	8	15	22	29
Среда	2	9	16	23	30
Четврток	3	10	17	24	31
Петок	4	11	18	25	
Сабота	5	12	19	26	
Недела	6	13	20	27	
Понеделник	7	14	21	28	

   Од календарот се гледа дека 23-тиот ден во месецот бил во среда и тогаш чистел Учо. ■

2. Насрадин оџа лаже во понеделник, среда, петок и недела, а во останатите денови тој ја кажува вистината. Во кој ден тој може да каже: "Вчера лажев. Утре ќе ја кажувам само вистината."?

   Решение. Ако Насрадин оџа во вторник, кога ја кажува вистината, каже: "Вчера лажев. Утре ќе ја кажувам само вистината.", тоа ќе значи дека во среда тој не лаже, што не е точно. Значи, посочените реченици тој не може да ги каже во вторник. На ист начин заклучуваме дека посочените реченици не може да ги каже и во четврток и во сабота.

Ако посочените реченици ги каже во понеделник, кога лаже, тоа ќе значи дека во недела ја кажува вистината, што не е точно. Значи, посочените реченици тој не може да ги каже во понеделник. На ист начин заклучуваме дека посочените реченици не може да ги каже и во среда и во петок.

Останува да провериме за недела. Бидејќи во недела Насрадин оџа лаже, тој всушност кажал дека во сабота ја кажува вистината, а во понеделник лаже, што е точно. Според тоа, Насрадин оџа во недела може да каже: "Вчера лажев. Утре ќе ја кажувам само вистината." ■

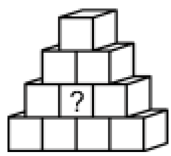
3. Итар Пејо ја кажува вистината во вторник, четврток и сабота, а во останатите денови лаже. Во кој ден тој може да каже: "Вчера ја кажував вистината. Утре ќе лажам."?

   Решение. Ако Итар Пејо во вторник, кога ја кажува вистината, каже: "Вчера ја кажував вистината. Утре ќе лажам.", тоа ќе значи дека во среда лаже, што не е точно. Значи, посочените реченици тој не може да ги каже во вторник. На ист начин заклучуваме дека посочените реченици не може да ги каже и во четврток и во сабота.

   Ако посочените реченици ги каже во среда, кога лаже, тоа ќе значи дека тој во вторник лаже, што не е точно. Значи, посочените реченици тој не може да ги каже во среда. На ист начин заклучуваме дека посочените реченици не може да ги каже и во петок и во недела.

   Останува да провериме за понеделник. Бидејќи во понеделник Итар Пејо лаже, тој всушност кажал дека во недела лаже, а во вторник ја кажува вистината, што е точно. Според тоа, Итар Пејо во понеделник може да каже: "Вчера ја кажував вистината. Утре ќе лажам." ■

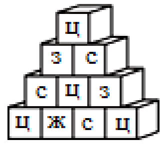
4. Ана има 4 црвени, 3 сини, 2 зелени и 1 жолта коцка. Таа гради зграда (како на цртежот десно) така што две соседни коцки да немаат иста боја. Која е бојата на коцката која се наоѓа на местото на коцката со прашалникот?

   Решение. Коцката која е на местото на коцката со прашалникот може да биде црвена или да има некоја друга боја. Одделно ќе ги разгледаме двата случаја.

   Коцката на која е прашалникот има 6 соседни коцки, што значи дека ако таа не е црвена, тогаш таа мора да има барем една соседна црвена коцка. Но, меѓу шесте соседни коцки може да има најмногу 3 црвени коцки, кои се преку една распоредени околу коцката со прашалникот (зошто?). Тоа значи, дека четвртата црвена коцка мора да се наоѓа или најгоре или да е една од крајните две коцки во долниот ред. Последното не е можно, бидејќи тогаш ќе има две соседни црвени коцки.

Ако коцката со прашалникот е црвена, тогаш околу неа можеме да ги распоредиме сините, зелените и жолтата коцка ($3+2+1=6$). Потоа останатите три црвени коцки ги ставаме во долниот ред и најгоре. Така добиваме зграда во која нема соседни коцки со иста боја. Еден случај е прикажан на цртежот десно.



Значи, бојата на коцката која се наоѓа на местото на коцката со прашалникот е црвена.

Забелешка. Распоредот на црвените коцки е еднозначен. Сините коцки може да се распоредат на 2 начини, потоа жолтата коцка може да се распореди на 3 начини, и на крајот местата на зелените коцки се еднозначни. Значи, Ана при дадените услови зградата може да ја направи на $2\cdot3=6$ начини. ■

Во следните три задачи ќе определуваме редослед на броеви, односно ќе определуваме непознат број.

5. Јане, Мирјана, Давор, Ангел, Теа и Никола фрлале коцка за играње “не лути се човече”. Секој од нив, на горната страна од коцката, добил различен број на точки. Познато е дека:
   1) Бројот на Јане е двапати поголем од бројот на Мирјана.
   2) Бројот на Јане е трипати поголем од бројот на Давор.
   3) Бројот на Ангел е четири пати поголем од бројот на Теа.

   Кој број го добил Никола?

   Решение. На секој му паднал број поголем или еднаков на 1 и помал или еднаков на 6. Бидејќи бројот на Ангел е четирипати поголем од бројот на Теа, добиваме дека на Теа и паднал бројот 1, а на Ангел му паднал бројот 4.

   Бројот на Јане е двапати поголем од бројот на Мирјана, што значи дека на Јане му паднал парен број, т.е. еден од броевите 2, 4 или 6. Јасно, тоа не е бројот 4, бидејќи овој број му паднал на Ангел. Исто така, не може да биде и бројот 2, бидејќи тогаш бројот на Мирјана треба да е 1, а тој и паднал на Теа. Според тоа, на Јане му паднал бројот 6, што значи дека на Мирјана и паднал бројот 3, а на Давор му паднал бројот 2.

Конечно, бидејќи на секој му паднал различен број, а броевите 1, 2 ,3 4 и 6 се веќе зафатени, останува дека на Никола му паднал бројот 5. ■

6. Учителот Илија на таблата запишал двоцифрен број x и побарал секој од учениците Дарко, Симон и Елена да искаже тврдење за бројот x. Тој ги добил следниве одговори:
   - Дарко: Цифрата на единиците на бројот x е 5 или тој е делив со 9.
   - Симон: Цифрата на единиците на бројот x е 3 или тој е поголем од 30.
   - Елена: x е делив со 8 или е помал од 31.

   Определи го бројот x, ако се знае дека секој од тројцата ученици искажал точно тврдење.

   Решение. Ако цифрата на единиците на бројот е 5, тогаш од тврдењето на Симон следува дека тој е поголем од 30. Но, тогаш тој не се дели со 8 и не е помал од 31, па значи дека тврдењето на Елена не е точно. Според тоа, бројот x е делив со 9. Ако цифрата на единиците на бројот x е 3, тогаш од деливоста со 9 следува дека бараниот број е 63. Но, тогаш повторно тврдењето на Елена не е точно. Според тоа, бројот x е поголем од 30, па за да е точно тврдењето на Елена, тој треба да е делив со 8. Конечно, двоцифрен број кој е делив со 9 и е делив со 8 е бројот 72, т.е. $x=72$. ■

7. Природниот број x е таков што се точни две од следниве тврдења:
   1) $x+7$ е точен квадрат,
   2) цифрата на единиците на x е 5,
   3) $x-12$ е точен квадрат.

   Определи го бројот x.

   Решение. Не е можно тврдењата 1) и 2) да се точни. Навистина, тогаш $x+7$ треба да биде точен квадрат кој завршува на 2, а точните квадрати завршуваат на една од цифрите 0, 1, 4, 5, 6 или 9.

   Аналогно, не е можно тврдењата 2) и 3) да се точни, бидејќи тогаш $x-12$ треба да е точен квадрат кој завршува на цифрата 3.

   Според тоа, точни се тврдењата 1) и 3). Нека $x+7=m^2$ и $x-1`2=n^2$. Тогаш, $m^2-n^2=19$, т.е. $(m-n)(m+n)=19$. Но, 19 е прост број, а $m-n$ и $m+n$ се негови природни делители, па бидејќи $m-n<m+n$ добиваме $m-n=1, m+n=19$. Според тоа, $m=10$ и $n=9$. Конечно, бараниот број е $x=m^2-7=93$. ■