Ристо Малчески
Вера Малческа

ТЕОРИЈА НА ВЕРОЈАТНОСТ

Скопје, 2019

Рецензент:
Д-р Никола Речкоски, ред. проф.

Компјутерска обработка:
Ристо Малчески и Самоил Малчески

CIP - Каталогизација во публикација
Национална и универзитетска библиотека "Св. Климент Охридски", Скопје

519.2(075.3)(076)

МАЛЧЕСКИ, Ристо
Теорија на веројатност / Ристо Малчески, Вера Малческа. - Скопје : Армаганка, 2019. - 508 стр. ; 25 см

Библиографија: стр. 502-504. - Регистар

ISBN 978-608-4904-80-9
1. Малческа, Вера [автор]
а) Веројатност - Математика - Задачи за средно образование
COBISS.MK-ID 111919882

СОДРЖИНА

ПРВ ДЕЛ
ДИСКРЕТНА ТЕОРИЈА НА ВЕРОЈАТНОСТ

I ГЛАВА
СЛУЧАЈНИ НАСТАНИ. ВЕРОЈАТНОСТ

II ГЛАВА
ДИСКРЕТНИ СЛУЧАЈНИ ПРОМЕНЛИВИ

ВТОР ДЕЛ
ОПШТА ТЕОРИЈА НА ВЕРОЈАТНОСТ

III ГЛАВА
СЛУЧАЈНИ ПРОМЕНЛИВИ

IV ГЛАВА
КАРАКТЕРИСТИЧНИ ФУНКЦИИ. СЛАБА КОНВЕРГЕНЦИЈА

V ГЛАВА
ЗАКОНИ НА ГОЛЕМИ БРОЕВИ. ЦЕНТРАЛНА ГРАНИЧНА ТЕОРЕМА

ПРЕДГОВОР

Оваа книга всушност е преработено издание на книгата *Вовед во теоријата на веројатност,* која првиот автор ја издаде во 2006 година и која всушност произлезе од неколкуте циклуси предавања кои по истоимениот предмет авторот ги реализираше на Институтот за математика при Природно-математичкиот факултет во Скопје. Потпирајќи се на долгогодишното искуство авторите се одлучија при разработката на случајните променливи најпрво да го разгледаат дискретниот случај, сé со цел студентите полесно да ги усвојат бројните поими, за потоа истите да ги обопштат. Ова посебно се однесува на поимот математичко очекување, каде со ваквиот пристап е одбегнато директното судрување со Лебеговата мера и Лебеговиот интеграл. Сепак, за целосно пратење на разработуваниот материјал потребни се сериозни предзнаења од реалната анализа, па затоа на читателот му препорачуваме да ја консултира книгата која во литературата е наведена под реден број [70].

Во книгата е дадена детална разработка на презентираниот материјал, кој е неопходен за натамошното изучување на теоријата на веројатност. Притоа, посебно внимание е посветено на воведувањето на поимите, особено на математичкото очекување, при што неговата дефиниција се воведува постапно од конечната шема, преку прости и ненегативни случајни променливи, па се до општиот случај. Поголемиот број од вкупно 328 леми, теореми и последици се детално докажани, што се надеваме ќе овозможи читателот при усвојувањето на презентираните докази да ги усвои и стандардните методи за докажување на тврдењата во теоријата на веројатност. Се разбира, за таа цел е неопходно да се повторат поимите кои се превземени од сродните математички дисциплини, како што е линеарната алгебра, реалната анализа и комбинаториката. Самото изложување на материјалот е пропратено со бројни забелешки и коментари, кои се во функција на појаснување на презентираните дефиниции и тврдења. Исто така, за подобро разбирање на презентираниот материјал во текот на неговото изложување се поместени 63 цртежи.

Изложениот материјал е поделен на пет глави и тоа:

1. Случајни настани. Веројатност
2. Дискретни случајни променливи
3. Случајни променливи (општ случај)
4. Карактеристични функции. Слаба конвергенција
5. Закони на големи броеви. Централна гранична теорема

Ваквата разработка на презентираниот материјал, покрај тоа што овозможува усвојување на новите поими на примерот на дискретен простор на веројатности, таа ја следи и долгогодишната практика на изучување на теоријата на веројатност на многу водечки универзитети во светот. Притоа, првичното усвојување на поимите на дискретен простор на веројатности е од особено значење, бидејќи заради структурата на теоријата на веројатност студентите со содржините од оваа математичка дисциплина прв пат се среќаваат токму во овој курс. На крајот од книгата се дадени статистички таблици, индекс на поими и користената литература. Овде сакаме да напоменеме дека при изработката на оваа книга големо влијание имаа книгите кои во литературата се наведени под редните броеви [47], [81] и [87].

Изучувањето на теоријата на веројатноста, како и на секоја математичка дисциплина, не е можно без систематско решавање задачи. Токму затоа при изложувањето на материјалот се разработени 216 примери со кои се појаснуваат воведените поими и презентираните тврдења, а на крајот од секоја точка се дадени задачи за самостојна работа, кои во книгата вкупно ги има 551.

Овде сакаме да му искажаме посебна благодарност на проф. д-р Никола Речкоски, кој со своите совети и сугестии помогна значително да се подобри овој ракопис. Се разбира, за појавувањето на овој ракопис, како и обично, посебна заслуга има нашето потесно семејство, за што искрено му благодариме.

И покрај вложениот напор, не можеме да се ослободиме од впечатокот дека на ова ниво се можни значителни подобрувања во изложувањето на материјалот кој е разработен во оваа книга, па затоа сме однапред благодарни на секоја добронамерна критика и сугестија.

Јануари, 2016 Авторите
Скопје

ПРВ ДЕЛ

ДИСКРЕТНА ТЕОРИЈА НА ВЕРОЈАТНОСТИ

ГЛАВА I
СЛУЧАЈНИ НАСТАНИ. ВЕРОЈАТНОСТ

1. ЕКСПЕРИМЕНТ И НАСТАН. СТАТИСТИЧКА ВЕРОЈАТНОСТ

Често пати во природата појавите и настаните се случуваат по точно определени закони и секогаш кога е исполнето определено множество услови. Законите од ваков тип ги нарекуваме *детерминистички*. Луѓето со векови ги набљудувале и анализирале појавите и настаните, а потоа врз основа на научните сознанија ги формулирале законите. Типични примери за детерминистички закони се Њутновите закони во механиката и Њутновиот закон за гравитација. Врз основа на ваквите закони можат да се објаснат настани од минатото и да се предвидуваат идни настани. На пример, може да се предвиди кога во иднина ќе имаме помрачување на Месечината или Сонцето, како и да се пресмета кога во минатото такви помрачувања се случиле.

Меѓутоа, покрај појавите и настаните кои се реализираат по детерминистички закони, во природата и општеството има појави и настани за кои не важат законите од овој тип. Поточно, постојат појави и настани кои при одредени услови некогаш се реализираат, а некогаш не се реализираат. Да разгледаме еден ваков пример.

Пример 1. Правилна и хомогена монета повеќе пати ја фрламе на рамна површина, при што монетата ротира околу својата оска која не е нормална на рамнината. Во секое посебно фрлање може да “падне” една од двете страни на монетата: писмо P или грб G. Еден од можните начини на појавување на писмо или грб во 12 фрлања е следниов:

$$P\,P\,G\,P\,G\,G\,P\,P\,P\,G\,P\,G. \ \blacklozenge$$

Во претходниот пример зададовме множество услови S и тоа:

- монетата е правилна и хомогена,
- монетата се фрла на рамна површина и
- при фрлањето монетата ротира околу своја оска која не е нормална на површината,

и истите ги реализиравме 12 пати. Во врска со претходно изнесеното ја имаме следнава дефиниција.

Дефиниција 1. Нека е дадено множество услови S. Секоја реализација на ова множество услови ја нарекуваме *опит* или *експеримент* S. Секој резултат на експериментот S го нарекуваме *настан* што е во врска со експериментот S.

Настаните ги означуваме со буквите $A, B, C, D, E, F, \ldots$.

Според определеноста на настаните со условите S разликуваме два типа експерименти. Едни, кај кои што множеството услови еднозначно го определува исходот и овие експерименти ги нарекуваме *детерминирани*, и други, кај кои исходот не е еднозначно определен, т.е. постојат повеќе различни исходи и овие експерименти ги нарекуваме *недетерминирани*.

Како што можеме да видиме, при реализирањето на експериментот од пример 1 можни се два различни исхода: писмо или грб, што значи дека станува збор за недерминиран експеримент. Притоа појавата на писмо или грб во низата од 12 фрлања е исклучително неправилна, т.е. таа е случајна и не може однапред да се предвиди дали ќе се појави писмо или грб. На прв поглед изгледа дека не постои никаква законитост која можеме да ја доведеме во врска со резултатите добиени во низата фрлања на монетата. Меѓутоа, изведувањето на голем број фрлања на монетата и разгледувањето на добиените резултати ни овозможуваат подобро да ја опишеме случајноста на појавување на писмо или грб. За таа цел ќе ги искористиме резултатите на експериментите во врска со паѓањето на писмо или грб реализирани од научниците Бифон, Пирсон, де Морган, Фелер и Романовски и кои се дадени во следнава табела:

научник	број на фрлања	број на паѓања на грб
Бифон	4040	2048
де Морган	4092	2048
Романовски	80640	39699
Пирсон	24000	12012
Фелер	10000	4979

Ако ги анализираме презентираните податоци, ќе забележиме дека во сите пет серии при фрлањето на монетата приближно половина од вкупниот број фрлања паѓа грб. Попрецизно, ако со A го означиме настанот “паднал грб”, со n го означиме вкупниот број на фрлања на монетата и со $n(A)$ бројот на реализации на настанот A, тогаш за количникот $\frac{n(A)}{n}$ добиваме:

Бифон: $\frac{n(A)}{n} = 0,50693$, *де Морган*: $\frac{n(A)}{n} = 0,50048875$,

Романовски: $\frac{n(A)}{n} = 0,492299$, *Пирсон*: $\frac{n(A)}{n} = 0,5005$ и

Фелер: $\frac{n(A)}{n} = 0,4979$.

Со други зборови количникот $\frac{n(A)}{n}$ на настанот A “многу не се разликува” од бројот $0,5 = \frac{1}{2}$. Според тоа, при едно фрлање не може да се предвиди што ќе се случи, но за голем број експерименти постои законитост во појавувањето на настанот A и бројот $0,5$, за кој може да се каже дека е објективна мерка на можноста за појавување на настанот A. Законитост од овој тип постои за голем број експерименти и настани во врска со нив. Во смисол на претходно изнесеното, ја имаме следнава дефиниција.

Дефиниција 2. Нека при n повторувања на експериментот S го разгледуваме настанот A. Бројот на реализации на настанот A го нарекуваме *фрекфенција* (*честота*) *на настанот* A и го означуваме со $n(A)$. Количникот $\frac{n(A)}{n}$ го нарекуваме *релативна фрекфенција* (*честота*) *на настанот* A во n експерименти.

Во претходните разгледувања поимот настан го воведовме како резултат на експериментот S. Меѓутоа, за нашите разгледувања од посебна важност се случајните настани, т.е. настаните кои задоволуваат определени услови. Поимот случаен настан е во непосредна врска со поимот релативна честота и истиот се дефинира на следниов начин.

Дефиниција 3. Настанот A во врска со експериментот S, кој може да се повтори произволен број пати го нарекуваме *случаен настан,* ако релативните честоти на настанот A, на секоја од повеќе реализирани серии на експериментот S, се броеви кои се приближно еднакви меѓу себе.

Од дефиниција 3 следува дека настанот “паднал грб” е случаен настан. Понатаму, релативните фрекфренции во сериите експерименти на Бифон, де Морган, Романовски, Пирсон и Фелер се натрупуваат во околина на бројот $0,5$. Ваквото својство на релативните честоти на случајните настани го нарекуваме *стабилност на релативните честоти*. Стабилноста на релативните честоти е објективно својство на масовните случајни појави и е основна причина за постанокот и развојот на теоријата на веројатноста. Во врска со стабилноста на релативните честоти на случајниот настан A ја имаме следнава дефиниција.

Дефиниција 4. Реалниот број околу кој се натрупуваат релативните честоти на случајниот настан A и кој го означуваме со $P(A)$ го нарекуваме *веројатност на настанот* A.

Оваа дефиниција за веројатност на случаен настан во литературата е позната како *статистичка дефиниција* на веројатноста, а веројатноста определена на овој начин ја нарекуваме *статистичка веројатност*.

Пример 2. Хомогена коцка за играње повеќе пати ја фрламе на рамна површина, при што коцката ротира околу некоја оска. Во секое посебно фрлање може да “паднат” $1, 2, 3, 4, 5$ или 6 точки. Еден од можните начини на појавување на бројот на точките од 1 до 6 во 60 фрлања е следниов:

$$5,3,1,5,6,4,3,3,2,4,3,4,3,5,1,2,2,1,3,2,2,4,5,4,5,1,2,6,5,2,$$
$$3,1,6,4,2,1,1,5,3,5,5,6,3,3,6,5,5,2,3,1,2,2,6,1,3,5,2,2,1,2.$$

Според тоа, имаме множество услови S и тоа:

- коцката за играње е хомогена,
- коцката се фрла на рамна површина и
- при фрлањето коцката ротира околу некоја оска.

а) Јасно, станува збор за недерминиран експеримент во кој за секој $i=1,2,3,$ $4,5,6$ можеме да го разгледуваме настанот A_i: паднале i точки. Штолер направил четири серии на експериментот S и ги добил податоците дадени во следнава табела:

	Број на паѓања на број точки					
Број на фрла. на коц.	1	2	3	4	5	6
600	82	130	106	92	106	84
6 000	953	1 053	1 027	1 028	982	957
60 000	9 880	9 989	9 888	10 206	10 190	9 847
120 000	19 759	20 065	19 795	20 232	20 213	19 936

Табела 1

Од податоците во горната табела ја составуваме следнава табела на релативните честоти на настаните A_i, $i = 1,2,3,4,5,6$.

Број на фрл. на коцката	Број на паѓања на бројот					
	1	2	3	4	5	6
600	0,1366667	0,2166667	0,1766667	0,1533333	0,1766667	0,140000
6 000	0,1588333	0,1755000	0,1711667	0,1713333	0,1636667	0,159500
60 000	0,1646667	0,1664833	0,1648000	0,1701000	0,1698333	0,164117
120 000	0,1646583	0,1672083	0,1649583	0,1686000	0,1684417	0,166133

Табела 2

Како што можеме да видиме релативните честоти на секој од настаните A_i, $i = 1,2,3,$ $4,5,6$ при различните серии од 600, 6000, 60000 и 120000 повторувања на експериментот се приближно исти броеви, па затоа за секој $i = 1,2,...,6$ настанот A_i е случаен. Понатаму, релативните честоти на секој од настаните A_i, $i = 1,2,3,4,5,6$ се натрупуваат околу еден ист број и тоа $\frac{1}{6} \approx 0{,}166$, од што согласно статистичката дефиниција на веројатноста можеме да заклучиме дека $P(A_i) = \frac{1}{6}$, за $i = 1,2,3,4,5,6$.

б) Ако ги искористиме податоците од табела 1, за настанот B: *паднатиот број точки е помал од* 3, при серии од $600, 6000, 60000$ и 120000 повторувања на експериментот, неговата честота ја добиваме ако ги собереме честотите на настаните A_1 и A_2 (зошто?). Во следната табела се дадени честотите и релативните честоти на настанот B, за наведените серии од 600, $6000, 60000$ и 120000 повторувања на експериментот.

Број на фрлања на коцката	Честота на настанот B	Релативна честота на настанот B
600	212	0,3533333
6 000	2 006	0,3343333
60 000	19 769	0,3294833
120 000	39 824	0,3318667

Табела 3

Од податоците во табела 3 заклучуваме дека настанот B е случаен и дека согласно дефиниција 4 неговата статистичка веројатност е $P(B) = \frac{1}{3}$ (зошто?).

в) Во врска со разгледуваниот експеримент да го разгледаме настаните C: *паднатиот број точки е помал од* 1 и D: *паднатиот број точки е помал или еднаков на* 6.

Лесно се воочува, дека настанот C не се случува при ниту една реализација на експериментот S, а настанот D се случува при секоја реализација на експериментот S (зошто?). ♦

Во врска со настаните C и D од пример 2 ја имаме следнава дефиниција.

Дефиниција 5. *Сигурен настан* за експериментот S е настанот што се појавува при секоја реализација на S. *Невозможен настан* за експериментот S е настанот што не се појавува при реализација на S.

Нека се изведени n експерименти S . Од дефиницијата на сигурниот настан следува дека тој ќе се појави n пати, а од дефиницијата на невозможниот настан следува дека тој нема да се појави ниту еднаш, т.е. ќе се појави 0 пати. Според тоа, релативната честота на сигурниот настан е $\frac{n}{n}=1$, а релативната честота на невозможниот настан е $\frac{0}{n}=0$ и последното важи за серија со произволен број експерименти S . Сега од дефиниција 3 следува дека сигурниот и невозможниот настан се случајни настани, а од дефиниција 4 следува дека нивните статистички веројатности се 1 и 0, соодветно.

2. ПРОСТОР ЕЛЕМЕНТАРНИ НАСТАНИ. ОПЕРАЦИИ СО НАСТАНИ

2.1. ПРОСТОР ЕЛЕМЕНТАРНИ НАСТАНИ

Во пример 2 при експериментот во кој хомогена коцка фрламе на рамна површина видовме дека во секое посебно фрлање, т.е. при секоја реализација на експериментот може да “паднат” $1, 2, 3, 4, 5$ или 6 точки. Јасно, при секое изведување на овој експеримент се појавува еден и само еден од настаните “*бројот на паднатите точки е* i “, каде $i=1,2,3,4,5,6$. Слична е состојбата со експериментот во пример 1, каде при секоја реализација на експериментот се појавува еден и само еден од настаните *паѓа грб* или *паѓа писмо*.

Претходно изнесеното може да се направи за секој експеримент, т.е. за секој експеримент, што можеме да го замислиме или реализираме, постои едно множество Ω на поединечни настани, со својство при секоја реализација на експериментот се појавува еден и само еден од тие настани. Множеството Ω го нарекуваме *простор* (*множество*) *елементарни настани*, а неговите елементи ги нарекуваме *елементарни настани*. Во натамошните разгледувања за елементарен настан ќе ја користиме ознаката ω .

Пример 3. а) Во експериментот на фрлање монета просторот елементарни настани е $\Omega=\{P,G\}$.

б) Во експериментот на фрлање коцка за играње просторот елементарни настани е $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$. ♦

Пример 4. Монета се фрла два пати. За елементарни настани можеме да гиземеме следниве резултати на експериментот:

ω_1 - во двете фрлања паднало писмо, ω_2 - во двете фрлања паднал грб,

ω_3 - паднало едно писмо и еден грб.

Забележуваме дека вака избраните елементарни настани не се појавуваат на “симетричен” начин. Имено, елементарниот настан ω_1 означува дека и во првото и во второто фрлање паднало писмо, т.е. еднозначно е определен резултатот и на првото и на второто фрлање. Слично, елементарниот настан ω_2 еднозначно го определува резултатот и на првото и на второто фрлање. Наспроти тоа, елементарниот настан ω_3 допушта две можности: во првото фрлање паднало писмо, а во второто грб или, во првото фрлање паднал грб, а во второто писмо. Заради оваа “несиметрија” која постои во наведените елементарни настани подобро е во овој случај за множество (простор) елементарни настани да се земе множеството

$$\Omega = \{PP, PG, GP, GG\} .$$

Јасно, при ваков избор на множеството Ω со секој елементарен настан еднозначно е определен резултатот и во првото и во второто фрлање на монетата, т.е. меѓу елементарните настани “постои симетрија”. ♦

Пример 5. Монета се фрла n пати. Просторот елементарни настани е множеството од сите варијации со повторување од елементите P и G од класа n, за кои покасно ќе стане збор, т.е.

$$\Omega = \{\omega = (c_1, c_2, ..., c_n) \,|\, c_k = P \text{ или } c_k = G, k = 1,2,...,n\} .$$

Според тоа, бројот на елементите на Ω е $|\Omega| = 2^n$. ♦

Пример 6. а) Коцка за играње се фрла два пати. Просторот елементарни настани е множеството Ω кое се состои од следниве 36 исходи:

11, 12, 13, 14, 15, 16,
21, 22, 23, 24, 25, 26,
31, 32, 33, 34, 35, 36,
41, 42, 43, 44, 45, 46,
51, 52, 53, 54, 55, 56,
61, 62, 63, 64, 65, 66.

Запишаните елементарни настани всушност се варијациите со повторување од елементите 1, 2, 3, 4, 5 и 6 од класа 2.

б) Коцка за играње се фрла два пати. Ако не интересира само збирот на паднатите броеви точки, тогаш на овој експеримент можеме да му го придружиме следниов простор елементарни настани:

$$\Omega = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\} .$$ ♦

Во примерите 6 а) и 6 б) на еден ист експеримент му придруживме различни простори елементарни настани. Меѓутоа, на експериментот кој се состои од две фрлања на коцка за играње обично му се придружува просторот елементарни настани кој е даден во пример 6 а), со слично образложение на она од пример 4. Меѓу елементарните настани од пример 6 а) постои симетрија во смисол што со секој од нив еднозначно е определен резултатот во првото и во второто фрлање на коцката. Кај елементарните настани во пример 6 б) таква симетрија нема: со елементарните настани 2 и 12 еднозначно е определен резултатот во секое од двете фрлања, но тоа не е случај со останатите елементарни настани.

Пример 7. Се фрлаат монета и коцка за играње. Множеството елементарни настани е

$$\Omega = \{P1, P2, P3, P4, P5, P6, G1, G2, G3, G4, G5, G6\} .$$ ♦

Пример 8. Коцка за играње прво се фрла еднаш, па ако паднатиот број точки е помал од 3, тогаш коцката се фрла уште еднаш. Просторот елементарни настани е одреден со следните исходи: 3, 4, 5, 6, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 21, 22, 23, 24, 25 и 26, при што запишаните исходи ги сметаме за варијации на цифрите. ♦

Пример 9. Коцка за играње се фрла се додека збирот на регистрираните броеви точки не стане поголем од 2. Просторот елементарни настани е одреден со следниве исходи:

3, 4, 5, 6, 12, 13, 14, 15, 16, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 111, 112, 113, 114, 115, 116. ♦

Во претходните примери просторот елементарни настани се состоеше од конечно многу елементи. Следниов пример покажува дека истиот не мора да биде конечен.

Пример 10. Монета се фрла се до првото појавување на грб. Просторот елементарни настани е множеството

$$\Omega = \{G, PG, PPG, PPPG, PPPPG, ...\} \cup \{\omega_0\}$$

каде $\omega_0 = PPP...P...$ е логички можниот резултат дека грб нема никогаш да падне. Јасно ова множество е бесконечно и е пребројливо, т.е. множеството Ω содржи пребројливо многу елементарни настани. ♦

Иако, воглавно во првиот дел ќе разгледуваме експерименти со најмногу пребројливо многу исходи, сепак ќе наведеме еден пример на експеримент кај кој множеството исходи не е пребројливо.

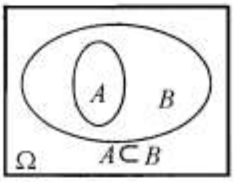
Пример 11. Да претпоставиме дека двајца луѓе независно и еднакво можно доаѓаат на местото на договорениот состанок во временски интервал $[0,1]$. Ако со x го означиме моментот на доаѓање на едниот, а со y моментот на доаѓање на состанокот на другиот човек, тогаш множеството елементарни настани е единечниот квадрат $\Omega = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$. ♦

2.2. ОПЕРАЦИИ СО НАСТАНИ

Во претходно разгледаните примери, а и за секој друг експеримент што може да се замисли или изведе, воочуваме дека, секој настан што е во врска со експериментот е определен со некое подмножество на множеството елементарни настани Ω. Затоа, *случајните настани* ги идентификуваме со подмножества на множеството (просторот) елементарни настани Ω. Притоа ќе велиме дека *се реализирал настанот* A, ако се појавил некој од елементарните настани со кои тој е определен, т.е. ако се реализирал елементарен настан ω за кој важи $\omega \in A$ и притоа за исходот ω ќе велиме дека е *поволен за настанот* A.

Бидејќи при секое изведување на еден експеримент се појавува еден од елементарните настани, а сите се елементи на Ω, логично е сигурниот настан да го означиме со Ω. Слично, не постои елементарен настан кој е поволен за невозможниот настан, па затоа овој настан ќе го означуваме со $\varnothing$.

Настаните ги идентификувавме со подмножества на просторот елементарни настани Ω, па затоа на нив можеме да ги применуваме операциите со множествата и да ги разгледуваме релациите меѓу множествата. Притоа ќе ја користиме следнава терминологија:



Цртеж 1

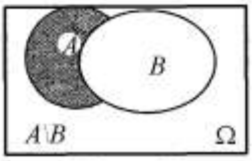
Ако $A\subset B$, тогаш ќе велиме дека настанот A *го повлекува настанот* B, цртеж 1.

Ако $A=B$, тогаш ќе велиме дека настаните A и B *се еквивалентни.*

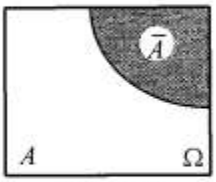
За настанот

$$A\setminus B=\{\omega\,|\,\omega\in A,\,\omega\notin B\}$$

ќе велиме дека е *разлика* на настаните A и B, цртеж 2.



Цртеж 2



Цртеж 3

За настанот

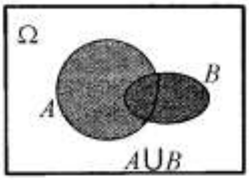
$$\overline{A}=\Omega\setminus A=\{\omega\,|\,\omega\notin A\}$$

ќе велиме дека е *спротивен* (*комплементарен*) на настанот A, цртеж 3. Јасно, настанот $\overline{A}$ се реализира, ако и само ако не се реализира настанот A, т.е. ако и само ако експериментот заврши со исход ω за кој важи $\omega\notin A$.

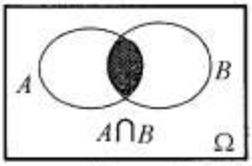
Настанот

$$A\cup B=\{\omega\,|\,\omega\in A \text{ или } \omega\in B\}$$

го нарекуваме *унија* на настаните A и B, цртеж 4. Јасно, настанот $A\cup B$ се реализира ако се реализира барем еден од настаните A и B.



Цртеж 4



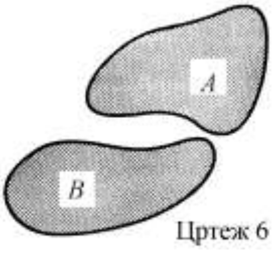
Цртеж 5

Настанот

$$A\cap B=\{\omega\,|\,\omega\in A \text{ и } \omega\in B\}$$

го нарекуваме *пресек* на настаните A и B, цртеж 5. Јасно, настанот $A\cap B$ се реализира ако истовремено се реализираат и двата настани A и B. Во натамошните разгледувања наместо $A\cap B$ ќе пишуваме AB.

За настаните A и B ќе велиме дека се *дисјунктни* (*заемно се исклучуваат*) ако $AB=\varnothing$, цртеж 6.



Цртеж 6

Пример 12. Монета се фрла три пати. Просторот елементарни настани е

$$\Omega=\{PPP,\,PPG,\,PGP,\,GPP,\,PGG,\,GPG,\,GGP,\,GGG\}.$$

Со A да го означиме настанот дека ќе паднат барем две писма, а со B настанот дека ќе падне само една страна. Имаме

$$A=\{PPP, PPG, PGP, GPP\} \text{ и } B=\{PPP, GGG\}.$$

Понатаму добиваме $\overline{A}=\{PGG, GPG, GGP, GGG\}$ и тоа е настанот дека во трите фрлања ќе падне најмногу едно писмо,

$$A\cup B=\{PPP, PPG, PGP, GPP, GGG\}$$

и тоа е настанот дека во трите фрлања бројот на паднатите писма ќе биде 0, 2 или 3, а $AB=\{PPP\}$ и тоа е настанот дека во секое од трите фрлања ќе падне писмо. ♦

Пример 13. При фрлање на хомогена коцка за играње на рамнина (маса) да ги разгледаме настаните

$A=\{$паѓа парен број на точки$\}$ и

$B=\{$паѓа број на точки не поголем од три$\}$.

За овие настани имаме

$A\cup B=\{$паѓа број на точки различен од пет$\}$,

$A\cap B=\{$паѓа број на точки еднаков на два$\}$,

$A\setminus B=\{$паѓа број на точки еднаков на 4 или 6$\}$ и

$\overline{A}=\{$паѓа непарен број на точки$\}$. ♦

Забелешка 1. Операциите збир и производ на настани може да се прошират на секое конечно или бесконечно множество настани. Обичните својства на операциите на множествата се пренесуваат на операциите над настаните. Така, на пример

$$\overline{\bigcup_{\alpha} A_{\alpha}}=\bigcap_{\alpha}\overline{A}_{\alpha},\quad \overline{\bigcap_{\alpha} A_{\alpha}}=\bigcup_{\alpha}\overline{A}_{\alpha},$$

$$\overline{\overline{A}}=A,\quad \overline{\varnothing}=\Omega,\quad \overline{\Omega}=\varnothing,$$

$$A\subseteq B\Rightarrow \overline{B}\subseteq\overline{A}$$

$$A\setminus B=A\setminus AB=A\overline{B},\ A\setminus(A\setminus B)=AB$$

итн., каде α е елемент на произволно индексно множество. Во некои случаи од натамошните разгледувања ќе се придржуваме на следниот договор: ако настаните

$$A_i,\ i=1,2,...,n$$

се по парови дисјунктни, тогаш наместо

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1\cup A_2\cup...\cup A_n$$

ќе пишуваме

$$\sum_{i=1}^{n} A_i = A_1 + A_2 + ... + A_n .$$

ЗАДАЧИ

1. Се фрлаат две монети и една коцка. Најдете го просторот елементарни настани.
2. Коцка за играње се фрла n пати. Најдете го просторот елементарни настани Ω. Колку елементи има Ω?
3. Од множеството $\{1,2,...,n\}$ се избираат k броеви. Најдете го просторот елементарни настани и бројот на елементарните настани, ако:
   a) изборот на броевите се врши со враќање, т.е. еднаш извлечениот број може повторно да се избере, а редоследот на избирањето е важен,
   b) изборот на броевите се врши без враќање, редоследот на избирањето на броевите е важен и $k \le n$,
   c) се врши избор без враќање, важи $k \le n$, а редоследот на избирањето не е важен, и
   d) се врши избор со враќање, а редоследот на избирањето не е важен.
4. Коцка за играње се фрла два пати. Определете ги настаните:
   a) во двете фрлања паднал број поголем од четири,
   b) паднала барем една шестка, и
   c) збирот на паднатите броеви е поголем од пет.
5. Монета се фрла два пати. Ако и двата пати падне иста страна, тогаш монетата се фрла и трет пат, а ако паднале различни страни, тогаш еднаш се фрла коцка за играње. Определете го просторот елементарни настани и настанот A дека во третото фрлање не е регистриран број.
6. Монета се фрла се додека два пати последователно не падне иста страна. Одредете го просторот елементарни настани и настанот дека експериментот ќе заврши после шестото фрлање.
7. Докажете дека за настаните A, B и C се исполнети тврдењата:
   1) $(A\cup B)C = AC\cup BC$,
   2) $(AB)\cup C = (A\cup C)(B\cup C)$,
   3) $\overline{A\cup B} = \overline{A}\,\overline{B}$,
   4) $\overline{AB} = \overline{A}\cup\overline{B}$,
   5) $A\setminus B = A\overline{B}$,
   6) $A\cup B = (A\overline{B})\cup(\overline{A}\,\overline{B})\cup(\overline{A}B)$,
   7) ако $A\subset B$, тогаш $B = A\cup(\overline{A}B)$,
   8) ако $A\subset B$, тогаш $\overline{B}\subset\overline{A}$.
8. Кои од наведените равенства се точни:
   1) $A\cup B = A\overline{B}$,
   2) $(\overline{A\cup B})C = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$,
   3) $(AB)(\overline{B}C) = \varnothing$.
9. Дадени се настаните A, B и C. Изразете ги со помош на операциите со настани следниве настани:
   1) “барем еден од настаните A и B“,
   2) “барем еден од настаните A, B и C“,
   3) “ниту A ниту B“,
   4) “ниту еден од настаните A, B и C“.
10. Во кутија се наоѓаат производи кои тежат 5, 10, 15, 20, 25 и 30 g. Да претпоставиме дека во кутијата има барем два производи со иста тежина. Два производи земаме од кутијата. Со X да ја означиме тежината на првиот и со Y тежината на вториот производ.

a) опишете го просторот на елементарни настани,
b) опишете го настанот { $X = Y$ },
c) опишете го настанот { $Y > X$ },
d) опишете го настанот: средната тежина на двата производа е поголема од 10.

11. Да ги разгледаме буквите *a, b, c, d*. Да претпоставиме дека редоследот во кој буквите се јавуваат е резултат од еден експеримент и да ги разгледаме настаните: *A – буквата a е на прво место* и *B – буквата b не е на второ место*.
    a) опишете го просторот на елементарни настани,
    b) определете го настанот AB,
    c) определете го настанот $A\cup B$.
12. Нека A и B се дисјунктни настани. Докажете дека $B=\overline{A}$ ако и само ако $A+B=\Omega$.
13. Докажете, дека ако $A\cap B=\varnothing$ и $\overline{A}\cap\overline{B}=\varnothing$, тогаш $B=\overline{A}$.
14. Докажете дека настаните $\overline{\overline{B}\cup A}$ и $B\setminus A$ се еквивалентни.
15. Докажете дека за произволни настани A и B важи $A\setminus(A\setminus B)=AB$.
16. Нека A и $B_i, i\in\mathbf{N}$ се настани во Ω. Докажете дека важи $A\cap(\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i)=\bigcup_{i=1}^{\infty}(A\cap B_i)$.
17. Докажете дека настаните A и B се дисјунктни ако и само ако $A\cup B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$ или $A\setminus B=A$.
18. Докажете дека за секој $n\in\mathbf{N}$ и секои настани $A_i, i=1,2,...,n$ важи $\bigcup_{k=1}^{n}A_k=\sum_{k=1}^{n}[A_k\setminus\bigcup_{i=1}^{k-1}A_i]$,

    каде $\bigcup_{i=1}^{0}A_i=\varnothing$.

3. АЛГЕБРИ И σ – АЛГЕБРИ

Во случај на бесконечен простор Ω ние не ги разгледуваме сите подмножества на Ω, туку разгледуваме само некои класи подмножества, кои ги нарекуваме алгебри и σ – алгебри, на кои подетално ќе се задржиме во оваа точка.

Дефиниција 6. Непразната фамилија $\boldsymbol{A}$ подмножества од множеството X ја нарекуваме *алгебра подмножества од множеството* X или кратко *алгебра множества* ако

i) $A\cup B\in\boldsymbol{A}$, за секои $A,B\in\boldsymbol{A}$ и

ii) $\overline{A}\in\boldsymbol{A}$, за секој $A\in\boldsymbol{A}$.

Лема 1. Ако $\boldsymbol{A}$ е алгебра множества, тогаш

iii) $A\cap B\in\boldsymbol{A}$, за секои $A,B\in\boldsymbol{A}$, и

iv) $\varnothing, X\in\boldsymbol{A}$.

Доказ. *iii*) Нека $\boldsymbol{A}$ е алгебра множества и $A,B\in\boldsymbol{A}$. Според *ii*) од дефиницијата 6 имаме $\overline{A},\overline{B}\in\boldsymbol{A}$, па затоа од *i*) следува дека $\overline{A}\cup\overline{B}\in\boldsymbol{A}$. Сега, повторно од *ii*) следува дека $\overline{\overline{A}\cup\overline{B}}\in\boldsymbol{A}$, што значи $A\cap B\in\boldsymbol{A}$.

iv) Нека A е произволно множество од $\boldsymbol{A}$. Од дефиниција 6 имаме $\overline{A} \in \boldsymbol{A}$ и $X = A \cup \overline{A} \in \boldsymbol{A}$, а од тврдењето iii) следува $\varnothing = A \cap \overline{A} \in \boldsymbol{A}$. ♦

Забелешка 2. Од дефиницијата на алгебра множества $\boldsymbol{A}$, лемата 1 и принципот на математичка индукција следува дека ако $A_i \in \boldsymbol{A}$, $i = 1, 2, ..., n$, тогаш

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \boldsymbol{A} \text{ и } \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \boldsymbol{A}.$$

Лема 2 (за минимална алгебра). Ако $\boldsymbol{S}$ е фамилија подмножества од множеството X, тогаш постои најмала алгебра множества $\boldsymbol{A}$ која ја содржи фамилијата $\boldsymbol{S}$.

Доказ. Нека $\boldsymbol{F}$ е фамилијата од сите алгебри подмножества од множеството X кои ја содржат фамилијата $\boldsymbol{S}$. Јасно оваа фамилија е непразна, бидејќи $\boldsymbol{S} \subseteq \boldsymbol{P}(X)$ т.е. за партитивното множество важи $\boldsymbol{P}(X) \in \boldsymbol{F}$. Нека $\boldsymbol{A} = \bigcap_{\boldsymbol{B} \in \boldsymbol{F}} \boldsymbol{B}$. Тогаш, $\boldsymbol{A}$ ја содржи фамилијата $\boldsymbol{S}$, бидејќи секоја алгебра $\boldsymbol{B} \in \boldsymbol{F}$ ја содржи $\boldsymbol{S}$. Ако $A, B \in \boldsymbol{A}$, тогаш $A, B \in \boldsymbol{B}$, за секој $\boldsymbol{B} \in \boldsymbol{F}$ и, бидејќи $\boldsymbol{B}$ е алгебра, добиваме $A \cup B \in \boldsymbol{B}$ и $\overline{A} \in \boldsymbol{B}$. Според тоа, $\boldsymbol{A} = \bigcap_{\boldsymbol{B} \in \boldsymbol{F}} \boldsymbol{B}$ е алгебра множества.

Од дефиницијата на $\boldsymbol{A}$ следува дека ако $\boldsymbol{B}$ е алгебра која ја содржи фамилијата $\boldsymbol{S}$, тогаш $\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B}$, што значи дека $\boldsymbol{A}$ е најмалата алгебра која ја содржи фамилијата $\boldsymbol{S}$. ♦

Дефиниција 7. Алгебрата множества $\boldsymbol{A}$ ја нарекуваме $\sigma-$*алгебра* ако секоја унија од пребројлива фамилија од $\boldsymbol{A}$ припаѓа на $\boldsymbol{A}$.

Пример 14. а) Фамилијата $\boldsymbol{A} = \{\varnothing, \Omega\}$ е $\sigma-$алгебра и истата ја нарекуваме тривијална $\sigma-$алгебра.

б) Партитивното множество на множеството Ω е $\sigma-$алгебра.

в) Нека A е произволно подмножество на множеството Ω. Тогаш фамилијата $\boldsymbol{A} = \{\varnothing, A, \overline{A}, \Omega\}$ е $\sigma-$алгебра.

г) Нека $\Omega = \{1, 2, 3, ..., n, ...\}$ и $\boldsymbol{A}$ е фамилијата која се состои од сите подмножества од Ω кои се конечни или имаат конечен комплемент. Лесно се проверува дека фамилијата $\boldsymbol{A}$ е алгебра. Меѓутоа $\boldsymbol{A}$ не е $\sigma-$алгебра. На пример, множеството од сите парни броеви не припаѓа на $\boldsymbol{A}$, но тоа може да се запише како унија на едноелементни множества, секое од кои припаѓа на $\boldsymbol{A}$. ♦

Лема 3. Ако $\boldsymbol{A}$ е $\sigma-$алгебра, тогаш пресекот на пребројлива фамилија множества од $\boldsymbol{A}$ припаѓа на $\boldsymbol{A}$.

Доказ. Нека $\boldsymbol{A}$ е $\sigma-$алгебра множества и $A_i, i = 1, 2, 3, ...$ е пребројлива фамилија множества од $\boldsymbol{A}$.

Од дефиницијата на $\sigma-$алгебра следува $\overline{A_i}\in \boldsymbol{A}$, за секој $i=1,2,3,...$, па затоа $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\overline{A_i}\in \boldsymbol{A}$, односно $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i=\overline{\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\overline{A_i}}\in \boldsymbol{A}$. ♦

Лема 4 (за минимална $\sigma-$алгебра). Ако $\boldsymbol{S}$ е фамилија подмножества од множеството X, тогаш постои најмала $\sigma-$алгебра множества $\boldsymbol{A}$ која ја содржи фамилијата $\boldsymbol{S}$, која ја означуваме со $\sigma(\boldsymbol{S})$

Доказ. Нека $\boldsymbol{F}$ е фамилијата од сите $\sigma-$алгебри подмножества од X кои ја содржат $\boldsymbol{S}$. Јасно оваа фамилија е непразна, бидејќи $\boldsymbol{S}\subseteq \boldsymbol{P}(X)$, т.е. за партитивното множество важи $\boldsymbol{P}(X)\in \boldsymbol{F}$. Ако $\boldsymbol{A}=\bigcap\limits_{\boldsymbol{B}\in\boldsymbol{F}}\boldsymbol{B}$, тогаш $\boldsymbol{A}$ ја содржи фамилијата $\boldsymbol{S}$, бидејќи секоја алгебра $\boldsymbol{B}\in\boldsymbol{F}$ ја содржи $\boldsymbol{S}$. Ако $A_i, i=1,2,3,...$, е произволна пребројлива фамилија множества од $\boldsymbol{A}$, тогаш $A_i\in\boldsymbol{B}$, $i=1,2,3,...$ за секој $\boldsymbol{B}\in\boldsymbol{F}$ и, бидејќи $\boldsymbol{B}$ е $\sigma-$алгебра, важи $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i\in\boldsymbol{B}$. Според тоа, $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i\in\bigcap\limits_{\boldsymbol{B}\in\boldsymbol{F}}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}$. Слично, ако $A\in\boldsymbol{A}$ тогаш $\overline{A}\in\boldsymbol{A}$. Според тоа, $\boldsymbol{A}=\bigcap\limits_{\boldsymbol{B}\in\boldsymbol{F}}\boldsymbol{B}$ е $\sigma-$алгебра множества.

Од дефиницијата на $\boldsymbol{A}$ следува дека ако $\boldsymbol{B}$ е $\sigma-$алгебра која ја содржи фамилијата $\boldsymbol{S}$, тогаш $\boldsymbol{A}\subseteq\boldsymbol{B}$, што значи дека $\boldsymbol{A}$ е најмалата $\sigma-$алгебра која ја содржи фамилијата $\boldsymbol{S}$. ♦

Пример 15. Нека $\Omega=\mathbf{R}$ и нека $\boldsymbol{S}=\{(a,b]\,|\,a,b\in\mathbf{R}, a<b\}$. Според лема 2 постои минимална алгебра која ја содржи фамилијата $\boldsymbol{S}$ и истата ќе ја означуваме со $\boldsymbol{B}_0$, а според лема 4 постои минимална $\sigma-$алгебра која ја содржи фамилијата $\boldsymbol{S}$, која ја нарекуваме *Борелова $\sigma-$алгебра* и истата ќе ја означуваме со $\boldsymbol{B}$. Елементите на $\sigma-$алгебрата $\boldsymbol{B}$ ќе ги нарекуваме *Борелови множества*.

Ќе докажеме дека $\sigma-$алгебрата Борелови множества $\boldsymbol{B}$ ги содржи сите интервали од видовите

$$[a,b],\ (a,b),\ (a,b],\ [a,b) \qquad (1)$$

со конечни и бесконечни граници, нивните конечни и пребројливи унии и сите отворени и затворени множества. Навистина,

$$\{a\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}(a-\tfrac{1}{n},a],\ (a,b)=\bigcup_{n=1}^{\infty}(a,b-\tfrac{1}{n}],\ [a,b]=\{a\}\cup(a,b],$$
$$(a,+\infty)=\bigcup_{n=1}^{\infty}(a,a+n],\ (-\infty,b)=\bigcup_{n=1}^{\infty}(b-n,b),$$
$$[a,+\infty)=\{a\}\cup(a,+\infty),\ (-\infty,b]=\{b\}\cup(-\infty,b).$$

Множеството рационални броеви може да се запише како унија на пребројливо многу едноелементни множества, па затоа е Борелово множество. Понатаму, бидејќи множеството ирационални броеви е комплемент на множеството рационални броеви, добиваме дека тоа е Борелово множество. Секое отворено множество е Борелово, бидејќи е унија на отворени интервали, а секој затворено множество е Борелово, како комплемент на отворено множество.

Според тоа, $\sigma-$алгебрата Борелови множества $\boldsymbol{B}$ е доволно богата и ги содржи сите подмножества од $\mathbf{R}$ кои ни се неопходни за натамошните разгледувања.

Да забележиме дека постојат подмножества на множеството реални броеви $\mathbf{R}$ кои не се Борелови множества, т.е. дека Бореловата $\sigma-$алгебра $\boldsymbol{B}$ е вистинско подмножество од партитивното множество на множеството реални броеви $\mathbf{R}$. ♦

Дефиниција 8. Нека $\{A_n\}$ е низа настани во $\sigma-$алгебрата $\boldsymbol{A}$. Тогаш настанот

$$A_* = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m = \sup_{n\ge1}(\inf_{m\ge n} A_m) = \liminf_{n\to\infty} A_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} A_n \tag{2}$$

го нарекуваме *долна граница* на низата $\{A_n\}$, а настанот

$$A^* = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m = \inf_{n\ge1}(\sup_{m\ge n} A_m) = \limsup_{n\to\infty} A_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} A_n \tag{3}$$

го нарекуваме *горна граница* на низата $\{A_n\}$.

Забелешка 3. Нека $\omega \in A_*$. Тогаш постои $N \in \mathbf{N}$ таков, да $\omega \in \bigcap_{m=N}^{\infty} A_m$, т.е. $\omega \in A_m$, за секој $m \ge N$. Според тоа, ω не припаѓа евентуално само на конечен број настани од низата $\{A_n\}$.

Ако $\omega \in A^*$, тогаш $\omega \in \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$, за секој $n \ge 1$, т.е. ω припаѓа на бесконечно многу настани од низата $\{A_n\}$. Очигледно $A_* \subseteq A^*$.

Дефиниција 9. Ако $A_* = A^*$, тогаш ќе велиме дека низата настани $\{A_n\}$ има *граница* и притоа важи $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \liminf\limits_{n\to\infty} A_n = \limsup\limits_{n\to\infty} A_n$, кога $n \to \infty$.

Пример 16. а) Нека $\{A_n\}$ е *монотоно опаѓачка низа настани*, т.е. нека

$$A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset A_{n+1} \supset \ldots . \tag{4}$$

Тогаш, од (2) и (3) следува, дека

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n ,$$

т.е. низата $\{A_n\}$ има граница и притоа важи $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

б) Нека $\{A_n\}$ е *монотоно растечка низа* настани, т.е. нека

$$A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n \subset A_{n+1} \subset \ldots . \tag{5}$$

Тогаш, од (2) и (3) следува, дека

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n ,$$

т.е. низата $\{A_n\}$ има граница и притоа важи $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. ♦

Дефиниција 10. Монотоно растечките и монотоно опаѓачките низи настани ги нарекуваме *монотони низи*. За фамилијата $\boldsymbol{B}$ подмножества на множеството Ω ќе велиме дека е *монотона класа* ако ги содржи границите на сите монотони низи чии членови припаѓаат на $\boldsymbol{B}$.

Теорема 1. Нека $\boldsymbol{A}$ е алгебра настани. Тогаш $\boldsymbol{A}$ е $\sigma-$алгебра ако и само ако $\boldsymbol{A}$ е монотона класа.

Доказ. Ако $\boldsymbol{A}$ е $\sigma-$алгебра, тогаш од дефиниција 7 следува дека е монотона класа.

Нека $\boldsymbol{A}$ е монотна класа и нека $\{A_n\}$ и низа множества од $\boldsymbol{A}$. Да означиме $B_n = \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$. Но, $\boldsymbol{A}$ е алгебра, па затоа $B_n \in \boldsymbol{A}$ и јасно низата $\{B_n\}$ е монотоно растечка. Конечно, $\boldsymbol{A}$ е монотона класа, па затоа

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \lim_{n\to\infty} B_n \in \boldsymbol{A} ,$$

што значи дека $\boldsymbol{A}$ е алгебра. ♦

Лема 5 (за минимална монотона класа). Ако $\boldsymbol{S}$ е фамилија подмножества на множеството Ω, тогаш постои најмала монотона класа $\boldsymbol{A}$ која ја содржи фамилијата $\boldsymbol{S}$, која ја означуваме со $m(\boldsymbol{S})$.

Доказ. Нека $\boldsymbol{F}$ е фамилијата од сите монотони класи подмножества од Ω кои ја содржат $\boldsymbol{S}$. Јасно оваа фамилија е непразна, бидејќи $\boldsymbol{S} \subseteq \boldsymbol{P}(X)$ и партитивното множество е монотона класа, имаме $\boldsymbol{P}(X) \in \boldsymbol{F}$. Ако $\boldsymbol{A} = \bigcap\limits_{\boldsymbol{B}\in\boldsymbol{F}} \boldsymbol{B}$, тогаш $\boldsymbol{A}$ ја содржи фамилијата $\boldsymbol{S}$, бидејќи секоја монотона класа $\boldsymbol{B} \in \boldsymbol{F}$ ја содржи $\boldsymbol{S}$. Ако $\{A_n\}$ е произволна монотона низа $\boldsymbol{A}$, тогаш $A_i \in \boldsymbol{B}$, $i = 1,2,3,\ldots$ за секој $\boldsymbol{B} \in \boldsymbol{F}$ и, бидејќи $\boldsymbol{B}$ е монотона класа $\lim\limits_{n\to\infty} A_n \in \boldsymbol{B}$. Според тоа, $\lim\limits_{n\to\infty} A_n \in \bigcap\limits_{\boldsymbol{B}\in\boldsymbol{F}} \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}$. Според тоа, $\boldsymbol{A} = \bigcap\limits_{\boldsymbol{B}\in\boldsymbol{F}} \boldsymbol{B}$ е монотона класа.

Од дефиницијата на $\boldsymbol{A}$ следува дека ако $\boldsymbol{B}$ е монотона класа која ја содржи фамилијата $\boldsymbol{S}$, тогаш $\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B}$, што значи дека $\boldsymbol{A}$ е најмалата монотона класа која ја содржи фамилијата $\boldsymbol{S}$. ♦

Теорема 2. Нека $\boldsymbol{A}_0$ е алгебра подмножества од Ω. Минималната монотона класа $m(\boldsymbol{A}_0)$ која ја содржи алгебрата $\boldsymbol{A}_0$ е алгебра множества.

Доказ. Ќе го докажеме *ii*) од дефиниција 6. Да означиме

$$\boldsymbol{K} = \{B \mid B, \overline{B} \in m(\boldsymbol{A}_0)\}. \qquad (6)$$

Очигледно, $\boldsymbol{A}_0 \subseteq \boldsymbol{K} \subseteq m(\boldsymbol{A}_0)$. Ќе докажеме дека $\boldsymbol{K}$ е монотона класа. Нека $\{A_n\}$ е монотона низа множества во $\boldsymbol{K}$, па затоа $\{\overline{A}_n\}$ е монотона низа множества во $\boldsymbol{K}$. Но, $\boldsymbol{K} \subseteq m(\boldsymbol{A}_0)$, па затоа $\{A_n\}$ и $\{\overline{A}_n\}$ се монотони низи множества во $m(\boldsymbol{A}_0)$ и како $m(\boldsymbol{A}_0)$ е монотона класа добиваме дека

$$\lim_{n\to\infty} A_n \in m(\boldsymbol{A}_0) \text{ и } \overline{\lim_{n\to\infty} A_n} = \lim_{n\to\infty} \overline{A}_n \in m(\boldsymbol{A}_0).$$

Сега од (6) следува дека $\lim\limits_{n\to\infty} A_n \in \boldsymbol{K}$, т.е. $\boldsymbol{K}$ е монотона класа. Но, $\boldsymbol{A}_0 \subseteq \boldsymbol{K} \subseteq m(\boldsymbol{A}_0)$ и како $m(\boldsymbol{A}_0)$ е минималната монотона класа која ја содржи $\boldsymbol{A}_0$, па затоа $\boldsymbol{K} = m(\boldsymbol{A}_0)$. Конечно, ако $A \in m(\boldsymbol{A}_0) = \boldsymbol{K}$, тогаш од (6) следува дека $\overline{A} \in \boldsymbol{K} = m(\boldsymbol{A}_0)$.

Ќе го докажеме *i*) од дефиниција 6. За секое множество $A \in m(\boldsymbol{A}_0)$ да означиме

$$m_A = \{B \mid B \in m(\boldsymbol{A}_0), A \cup B \in m(\boldsymbol{A}_0)\}. \qquad (7)$$

Очигледно, $\boldsymbol{A}_0 \subseteq m_A \subseteq m(\boldsymbol{A}_0)$. Прво ќе докажеме дека m_A е монотона класа. Навистина, ако $\{A_n\}$ е монотона низа множества од $m_A \subseteq m(\boldsymbol{A}_0)$, тогаш $\{A \cup A_n\}$ е монотона низа множества од $m(\boldsymbol{A}_0)$, па затоа

$$\lim_{n\to\infty} A_n \in m(\boldsymbol{A}_0) \text{ и } A \cup \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} (A \cup A_n) \in m(\boldsymbol{A}_0).$$

Сега, од (7) следува дека $\lim\limits_{n\to\infty} A_n \in m_A$, т.е. m_A е монотона класа. Но, $m(\boldsymbol{A}_0)$ е минималната монотона класа која ја содржи $\boldsymbol{A}_0$ и $m_A \subseteq m(\boldsymbol{A}_0)$, па затоа $m_A = m(\boldsymbol{A}_0)$. Конечно, ако $A, B \in m(\boldsymbol{A}_0) = m_A$, тогаш $A \cup B \in m_A = m(\boldsymbol{A}_0)$. ♦

Последица 1. Нека $\boldsymbol{A}_0$ е алгебра подмножества од Ω. Тогаш минималната $\sigma-$алгебра и минималната монотона класа кои ја содржат алгебрата $\boldsymbol{A}_0$ се совпаѓаат, т.е. $m(\boldsymbol{A}_0) = \sigma(\boldsymbol{A}_0)$.

Доказ. Бидејќи $\sigma(\boldsymbol{A}_0)$ е монотона класа, а $m(\boldsymbol{A}_0)$ е минимална монотона класа која ја содржи $\boldsymbol{A}_0$, добиваме дека важи $m(\boldsymbol{A}_0) \subseteq \sigma(\boldsymbol{A}_0)$. Обратно, од теорема 2 следува дека $m(\boldsymbol{A}_0)$ е алгебра, и како $m(\boldsymbol{A}_0)$ е монотона класа од теорема 1 следува дека $m(\boldsymbol{A}_0)$ е $\sigma-$алгебра. Но, $\sigma(\boldsymbol{A}_0)$ е минимална $\sigma-$алгебра која ја содржи $\boldsymbol{A}_0$, па затоа $\sigma(\boldsymbol{A}_0) \subseteq m(\boldsymbol{A}_0)$. ♦

На крајот од оваа точка ќе презентираме уште едно важно тврдење во врска со $\sigma-$алгебрите.

Теорема 3. Нека $\mathcal{A}_0$ е класа множества од Ω , $B \subseteq \Omega$ и да ставиме

$$\mathcal{A}_0 \cap B = \{A \cap B \mid A \in \mathcal{A}_0\} \tag{8}$$

и $\sigma(\mathcal{A}_0 \cap B)$ е најмалата $\sigma-$алгебра подмножества од B генерирана од $\mathcal{A}_0 \cap B$. Тогаш

$$\sigma(\mathcal{A}_0 \cap B) = \sigma(\mathcal{A}_0) \cap B\,. \tag{9}$$

Доказ. Јасно, од $\mathcal{A}_0 \subseteq \sigma(\mathcal{A}_0)$ следува

$$\mathcal{A}_0 \cap B \subseteq \sigma(\mathcal{A}_0) \cap B\,. \tag{10}$$

Но, $\sigma(\mathcal{A}_0) \cap B$ е $\sigma-$алгебра во B (види задача 7), па затоа од (10) следува дека

$$\sigma(\mathcal{A}_0 \cap B) \subseteq \sigma(\mathcal{A}_0) \cap B\,. \tag{11}$$

Обратно, да ставиме

$$\mathcal{A}_B = \{A \in \sigma(\mathcal{A}_0) \mid A \cap B \in \sigma(\mathcal{A}_0 \cap B)\}\,.$$

Бидејќи $\sigma(\mathcal{A}_0 \cap B)$ и $\sigma(\mathcal{A}_0)$ се $\sigma-$алгебри добиваме дека $\mathcal{A}_B$ е $\sigma-$алгебра, при што очигледно важи $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}_B \subseteq \sigma(\mathcal{A}_0)$, па затоа важи

$$\sigma(\mathcal{A}_0) \subseteq \sigma(\mathcal{A}_B) = \mathcal{A}_B \subseteq \sigma(\mathcal{A}_0)\,,$$

односно $\sigma(\mathcal{A}_0) = \mathcal{A}_B$. Затоа, за секое множество $A \in \sigma(\mathcal{A}_0)$ важи $A \cap B \in \sigma(\mathcal{A}_0 \cap B)$, што значи

$$\sigma(\mathcal{A}_0) \cap B \subseteq \sigma(\mathcal{A}_0 \cap B)\,. \tag{12}$$

Конечно, од инклузиите (11) и (12) следува тврдењето на теоремата. ♦

ЗАДАЧИ

1. Нека $\{A_n\}$ и $\{B_n\}$ се низи настани. Докажете дека
$$\overline{\limsup_{n\to\infty} A_n} = \liminf_{n\to\infty} \overline{A}_n\,,\ \overline{\liminf_{n\to\infty} A_n} = \limsup_{n\to\infty} \overline{A}_n\,,$$
$$\liminf_{n\to\infty} A_n \subseteq \limsup_{n\to\infty} A_n\,,\ \limsup_{n\to\infty}(A_n \cup B_n) = \limsup_{n\to\infty} A_n \cup \limsup_{n\to\infty} B_n \text{ и}$$
$$\limsup_{n\to\infty} A_n \cap \liminf_{n\to\infty} B_n \subseteq \limsup_{n\to\infty}(A_n \cap B_n) = \limsup_{n\to\infty} A_n \cap \limsup_{n\to\infty} B_n\,.$$
2. Нека $A_i, i = 1,2,...,n$ се по парови дисјунктни настани и $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$. Најдете ја минималната $\sigma-$алгебра која ги содржи настаните $A_i, i = 1,2,...,n$. Колку настани содржи оваа $\sigma-$алгебра?
3. Докажете дека унија на $\sigma-$алгебри не мора да биде $\sigma-$алгебра.
4. Докажете дека секоја конечна алгебра настани се состои од 2^k настани, каде k е природен број.
5. Нека $\Omega = \mathbf{N}$, $A_n = \{1,2,...,n\}$ и $\mathcal{A}$ е фамилијата множества од $A \subset \Omega$ за кои постои
$$\alpha(A) = \lim_{n\to\infty} \tfrac{|A \cap A_n|}{n}\,.$$
   а) Докажете дека α е субадитивна функција на фамилијата $\mathcal{A}$.

b) Докажете дека $\boldsymbol{A}$ не е алгебра множества.

6. Нека $\boldsymbol{B}_0$ е минималната алгебра која ги содржи сите интервали од видот $(a,b], a,b \in \mathbf{R}$, $a < b$, $\boldsymbol{B}$ е Бореловата $\sigma -$ алгебра подмножества од $\mathbf{R}$ и $\boldsymbol{A}$ е монотона класа за која важи $\boldsymbol{B}_0 \subseteq \boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B}$. Докажете дека $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$.

7. Докажете дека
   a) Ако $\boldsymbol{A}$ е алгебра во Ω и $A \subset \Omega$, тогаш $\boldsymbol{A} \cap A = \{B \mid A \cap B, B \in \boldsymbol{A}\}$ е алгебра во A.
   b) Ако $\boldsymbol{A}$ е $\sigma -$ алгебра во Ω и $A \subset \Omega$, тогаш $\boldsymbol{A} \cap A = \{B \mid A \cap B, B \in \boldsymbol{A}\}$ е $\sigma -$ алгебра во A.

4. ПРОСТОР НА ВЕРОЈАТНОСТИ

Дефиниција 11. Подредената тројка $(\Omega, \boldsymbol{A}, P)$, каде Ω е простор на елементарни настани, $\boldsymbol{A}$ е $\sigma -$ алгебра подмножества од Ω, кои ги нарекуваме *настани*, и P е бројна функција, дефинирана на множеството настани $\boldsymbol{A}$ и која ја нарекуваме *веројатност* (или *веројатностна мера*), го нарекуваме *простор на веројатности*, ако се исполнети следниве аксиоми:

1°. $P(A) \geq 0$ за секој $A \in \boldsymbol{A}$ (ненегативност на P);

2°. $P(\Omega) = 1$ (нормираност на P);

3°. $P(A+B) = P(A) + P(B)$, ако $AB = \varnothing$ (адитивност на P);

4°. ако $A_n \to \varnothing$, т.е.

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \ldots \text{ и } \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing,$$

тогаш $\lim\limits_{n \to \infty} P(A_n) = 0$ (непрекинатост на P).

Притоа, подредената двојка $(\Omega, \boldsymbol{A})$ ја нарекуваме *измерлив простор.*

Пример 17. Пресметај $P(A)$, ако $P(AB) = 0,15$ и $P(A\overline{B}) = 0,25$.

Решение. Ако го искористиме равенството

$$A = A\Omega = A(B \cup \overline{B}) = AB \cup A\overline{B},$$

тогаш бидејќи настаните AB и $A\overline{B}$ се дисјунктни, од аксиомата за адитвност добиваме

$$P(A) = P(AB \cup A\overline{B}) = P(AB) + P(A\overline{B}) = 0,15 + 0,25 = 0,40 \text{ . } \blacklozenge$$

Лема 6. а) Ако $A \subseteq B$, тогаш $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$.

б) Ако $A \subseteq B$, тогаш $P(A) \leq P(B)$.

в) За секој $A \in \boldsymbol{A}$ важи $P(A) \leq 1$.

г) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$, за секој $A \in \boldsymbol{A}$.

д) $P(\varnothing) = 0$.

ѓ) За секои настани $A_i, i = 1, 2, ..., n$ такви, што $A_i A_j = \varnothing$ за $i \neq j$ важи

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

е) Нека $A_n \in \boldsymbol{A}$ и $A_1 \subseteq A_2 \subseteq ... \subseteq A_n \subseteq ... \subseteq A$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$. Тогаш

$$\lim_{n \to \infty} P(A_n) = P(A).$$

ж) Нека $A_n \in \boldsymbol{A}$ и $A_1 \supseteq A_2 \supseteq ... \supseteq A_n \supseteq ... \supseteq A$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A$. Тогаш

$$\lim_{n \to \infty} P(A_n) = P(A).$$

Доказ. а) Бидејќи $B = A + (B \setminus A)$ и $A \cap (B \setminus A) = \varnothing$ од аксиомата 3° следува

$$P(B) = P(A) + P(B \setminus A). \tag{1}$$

б) Непосредно следува од равенството (1) и аксиома 1°.

в) Следува од аксиомата 2° и тврдењето б) бидејќи $A \subseteq \Omega$, за секој $A \in \boldsymbol{A}$.

г) Непосредно следува од аксиомите 3° и 2° бидејќи $A + \overline{A} = \Omega$ и $A\overline{A} = \varnothing$.

д) Непосредно следува од тврдењето под г) и аксиомата 2°.

ѓ) Тврдењето следува од аксиомата 3° и принципот на математичка индукција.

е) Од

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq ... \subseteq A_n \subseteq ... \subseteq A, \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$$

следува, дека

$$B_n = A \setminus A_n \to \varnothing, n \to \infty.$$

Понатаму, од аксиомата 4° следува дека $\lim_{n \to \infty} P(B_n) = 0$. Конечно, од а) добиваме

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n \to \infty} P(B_n) = \lim_{n \to \infty} P(A \setminus A_n) \\ &= \lim_{n \to \infty} [P(A) - P(A_n)] = P(A) - \lim_{n \to \infty} P(A_n) \end{aligned}.$$

ж) Постапете аналогно на доказот на својството е). ♦

Лема 7. За секои настани $A_i, i=1,2,...,n$ важи

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i) . \tag{2}$$

Доказ. Да земеме

$$A_0 = \varnothing \text{ и } B_k = A_k \setminus (A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_{k-1}) \text{ за } k=1,...,n .$$

Тогаш,

$$B_i B_j = \varnothing \text{, за } i \neq j \text{ и } \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{n} B_i ,$$

па од 6 ѓ) следува

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) .$$

Конечно, неравенството (2) следува од лема 6 б) бидејќи $B_i \subseteq A_i$ за $i=1,2,...,n$. ♦

Пример 18. При контрола на квалитетот на еден производ разгледувани се настаните

A: производот е со пропишаните димензии и
B: производот има квалитативни грешки.

Познато е дека $P(A)=0,92$ и $P(\overline{B})=0,95$. Дали може да се тврди дека

$$P(A\overline{B}) \geq 0,87 \text{ и } P(A \cup B) > 0,97 .$$

Решение. Настанот $\overline{B}$ е: производот нема квалитативни грешки. Но $\overline{B} \subseteq A$, од што следува $A\overline{B} = \overline{B}$. Според тоа, $P(A\overline{B}) = P(\overline{B}) = 0,95 > 0,87$.

Од друга страна, $P(AB) \geq 0$, па од лема 7 и лема 6 г) следува

$$P(A \cup B) \leq P(A)+P(B) = P(A)+1-P(\overline{B}) = 0,92+1-0,95 = 0,97$$

што значи дека не може да се тврди дека $P(A \cup B) > 0,97$. ♦

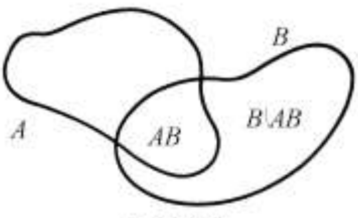
Лема 8. За секои настани A и B важи

$$P(A \cup B) = P(A)+P(B)-P(AB) .$$

Доказ. Имаме

$$A \cup B = A+(B \setminus AB) \text{, } A(B \setminus AB) = \varnothing \text{ и } AB \subseteq B ,$$

цртеж 7. Со последователна примена на аксиома 3° и лема 6 а) добиваме



Цртеж 7

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A)+P(B \setminus AB) \\ &= P(A)+P(B)-P(AB) . \end{aligned}$$ ♦

Последица 2 (принцип за вклучување и исклучување). За секои настани $A_1, A_2, ..., A_n$ важи

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le n} P(A_i A_j) + \sum_{1 \le i < j < k \le n} P(A_i A_j A_k) - ... + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 ... A_n) .$$

Доказ. Тврдењето ќе го докажеме со индукција по бројот на настаните. За $n = 2$ тврдењето е докажано во лема 8. Нека претпоставиме дека тврдењето важи за некој природен број n. Нека се $A_1, A_2, ..., A_n, A_{n+1}$ произволни настани. Од лема 8 следува дека

$$P(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i) = P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) + P(A_{n+1}) - P(\bigcup_{i=1}^{n} A_{n+1} A_i) .$$

Ако ја примениме индуктивната претпоставка на првиот и третиот собирок на десната страна во последното равенство, добиваме дека принципот за вклучување и исклучување важи и за $n+1$ настани, па од принципот на математичка индукција следува дека важи за секоја конечна фамилија настани. ♦

Забелешка 4. Аксиомите 3° и 4° од дефиниција 11 можат да се заменат со една аксиома на *пребројлива адитивност* (или, како што најчесто ќе ја нарекуваме аксиома на $\sigma -$ *адитивност*).

3^{*}. Ако настаните A_n во низата $A_1, A_2, A_3, ...$ се по парови дисјунктни, тогаш

$$P(\sum_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) . \qquad (3)$$

Теорема 4. Системот аксиоми $1^{\circ}, 2^{\circ}, 3^{\circ}, 4^{\circ}$ е еквивалентен на системот аксиоми $1^{\circ}, 2^{\circ}, 3^{*}$.

Доказ. Нека претпоставиме дека се исполнети аксиомите $1^{\circ}, 2^{\circ}, 3^{\circ}, 4^{\circ}$, и нека A_n е низа по парови дисјунктни настани. Да означиме $B_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} A_k$, $A = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$. Тогаш, настанот A за секој природен број n може да се претстави како конечен збир на по парови дисјунктни настани

$$A = A_1 + A_2 + ... + A_n + B_n ,$$

па затоа од лема 6 ѓ) следува

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) + P(B_n) . \qquad (4)$$

Понатаму, од конструкцијата на настаните B_n и фактот дека настаните A_n се по парови дисјунктни имаме

$$B_1 \supseteq B_2 \supseteq ... \text{ и } \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \varnothing ,$$

па затоа $\lim\limits_{n\to\infty} P(B_n)=0$. Конечно, од аксиомата 4° и од равенството (4) следува равенството (3).

Нека се исполнети аксиомите $1^{\circ}, 2^{\circ}, 3^{*}$ и нека $B_1 \supseteq B_2 \supseteq ...$ и $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n = \varnothing$. Да означиме $A_n = B_n \setminus B_{n+1}, n=1,2,...$. Јасно, настаните A_n се по парови дисјунктни и притоа важи $B_1 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ и $B_n = \sum\limits_{k=n}^{\infty} A_k$, па затоа од аксиома 3^{*} следува дека редот

$$P(B_1)=\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

конвергира, што значи дека за остатокот на овој ред важи

$$P(B_n)=\sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) \to 0\,. \ \blacklozenge$$

Последица 3 (σ – полуадитивност). За секоја низа настани $\{A_n\}$ важи

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \le \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)\,.$$

Доказ. Имаме

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup ... = A_1 \cup \overline{A}_1 A_2 \cup \overline{A}_1 \overline{A}_2 A_3 \cup \overline{A}_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3 A_4 \cup ...$$

и како настаните на десната страна на последното равенство се дисјунктни, од теорема 4 и лема 6 б) следува

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup ...) &= P(A_1)+P(\overline{A}_1 A_2)+P(\overline{A}_1 \overline{A}_2 A_3)+P(\overline{A}_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3 A_4)+... \\ &\le P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)+P(A_4)+.... \ \blacklozenge \end{aligned}$$

Лема 9. За секоја низа настани $\{A_n\}$ важи

$$P(\liminf_{n\to\infty} A_n) \le \liminf_{n\to\infty} P(A_n) \le \limsup_{n\to\infty} P(A_n) \le P(\limsup_{n\to\infty} A_n)\,.$$

Доказ. Ако ги искористиме равенствата (2) и (3) од дефиниција 8, тогаш од лема 6 следува

$$P(\liminf_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} P(\inf_{m\ge n} A_m) \le \liminf_{n\to\infty} P(A_n)\,,$$

$$P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} P(\sup_{m\ge n} A_m) \ge \limsup_{n\to\infty} P(A_n)\,. \ \blacklozenge$$

Забелешка 5. Системите аксиоми $1^{\circ}, 2^{\circ}, 3^{\circ}, 4^{\circ}$ и $1^{\circ}, 2^{\circ}, 3^{*}$ определуваат веројатностна мера на σ – алгебрата ***A*** на просторот Ω. Овие аксиоми се дадени од рускиот математичар А. Н. Колмогоров. Пред да преминеме на натамошна разработка ќе се осврнеме на идејата за формирање на овој аксиоматски систем.

Потеклото на аксиомите $1^{\circ}, 2^{\circ}, 3^{\circ}$ може да се објасни со стабилноста на релативната честота. Нека A и B се дисјунктни настани и $\frac{N(A)}{N}$ и $\frac{N(B)}{N}$ се нивните релативни честоти. Од $N(A) \geq 0$ следува дека $\frac{N(A)}{N} \geq 0$, што значи дека бројот $P(A)$, кој е близок до количникот $\frac{N(A)}{N}$ мора да биде ненегативен. За сигурниот настан имаме $N(\Omega) = N$, па затоа мора да биде $P(\Omega) = 1$. За дисјунктните настани A и B имаме

$$N(A+B) = N(A) + N(B)$$

па затоа

$$\frac{N(A+B)}{N} = \frac{N(A)}{N} + \frac{N(B)}{N},$$

што доведува до аксиомата 3°.

Потеклото на аксиомата 4° (односно 3^{*}) може да се објасни на неколку начини, кои не се поврзани со реалното својство на стабилноста на релативната честота, туку со потребата за развојот на аксиоматиката на секоја математичка теорија. Претходно кажаното ќе го објасниме на следниот пример. Нека на единичниот квадрат случајно паѓа честичка, при што веројатноста честичката да падне во секој внатрешен квадрат со страни, паралелни на страните на основниот квадрат, е еднаква на плоштината на малиот квадрат.

Со помош на аксиомата 3° може да се добие веројатноста честичката да падне во секоја фигура која е унија на конечен број мали квадрати. Но, ние сакаме тоа да можеме да го направиме за секоја сложена фигура, на пример, за круг. Ова можеме да го направиме со помош на аксиомата 3^{*}, приближувајќи го кругот со фигури кои се унија од конечен број такви квадрати. Да забележиме дека последното е и причина што не сите подмножества од Ω ги нарекуваме настани, туку истите мора да припаѓаат на некоја $\sigma -$ алгебра.

Во дефиниција 11 веројатностната мера (веројатноста) ја воведовме на множества кои припаѓаат на $\sigma -$ алгебра $\boldsymbol{A}_0$. Понатаму, во лема 4 покажавме дека секоја алгебра настани се содржи во минимална $\sigma -$ алгебра настани $\sigma(\boldsymbol{A}_0)$ и согласно со лема 5, последица 1 и теоремите 1 и 2 истата можеме да ја конструираме. Природно е да се запрашаме: Дали, ако е зададена веројатностна мера на алгебрата $\boldsymbol{A}_0$ истата можеме да ја прошириме на минималната $\sigma -$ алгебра $\sigma(\boldsymbol{A}_0)$. Одговорот на поставеното прашање е позитивен и е даден во следнава теорема.

Теорема 5 (за проширување на мера - Каратеодори). Нека $\boldsymbol{A}_0$ е алгебра настани (подмножества од Ω) и P е веројатностна мера дефинирана на алгебрата $\boldsymbol{A}_0$. Тогаш постои единствена веројатностна мера P, која е дефинирана на минималната $\sigma -$ алгебра $\sigma(\boldsymbol{A}_0)$, таква што за секој настан $A \in \boldsymbol{A}_0$ важи $P(A) = P(A)$.

Доказ. Нека $A \subseteq \Omega$. Функцијата $P^{*}(A)$ определена со

$$P^*(A)=\inf\{\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)\mid (\forall n)\ A_n\in \boldsymbol{A}_0,\ A\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\},\tag{5}$$

ја нарекуваме *надворешна мера* на множеството A, а функцијата $P_*(A)$ определена со

$$P_*(A)=1-P^*(\overline{A})\tag{6}$$

ја нарекуваме *внатрешна мера* на множеството A. Очигледно надворешната мера е нормирана, ненегативна и монотона, т.е.

$$P^*(\Omega)=1,\ P^*(A)\geq 0,\ A\subseteq B\Rightarrow P^*(A)\leq P^*(B).$$

Понатаму, ако важи $P^*(A)=P_*(A)$, тогаш дефинираме веројатностна мера

$$P(A)=P^*(A)=P_*(A).$$

Од (6) следува дека $P^*(A)=P_*(A)$ ако и само ако $P^*(A)+P^*(\overline{A})=1$, т.е. ако и само ако збирот на надворешните мери на множествата A и $\overline{A}$ е еднаков на 1. Понатаму, за множеството A ќе велиме дека е P^*-*мерливо* ако за секое множество $D\subseteq\Omega$ важи

$$P^*(AD)+P^*(\overline{A}D)=P^*(D).\tag{7}$$

Да забележиме дека за $D=\Omega$ равенството (7) го прима видот $P^*(A)+P^*(\overline{A})=1$. Со $\boldsymbol{A}$ да ја означиме фамилијата од сите P^*-мерливи множества. Сега тврдењето на теоремата ќе го докажеме во неколку чекори.

Чекор 1. Функцијата P^* е $\sigma-$полуадитивна.

Нека $\varepsilon>0$ е дадено. Од (5) следува дека за секое множество A_n постојат множества $B_{n1},B_{n2},B_{n3},...$ такви што важи

$$A_n\subseteq\bigcup_{k=1}^{\infty}B_{nk}\ \text{ и }\ P^*(A_n)\leq\sum_{k=1}^{\infty}P(B_{nk})<P^*(A_n)+\tfrac{\varepsilon}{2^n}.$$

Според тоа, важи $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\subseteq\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}B_{nk}$ и

$$P^*(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)\leq\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}P(B_{nk})\leq\sum_{n=1}^{\infty}(P^*(A_n)+\tfrac{\varepsilon}{2^n})=\sum_{n=1}^{\infty}P^*(A_n)+\varepsilon,$$

и од произволноста на ε следува дека функцијата P^* е $\sigma-$полуадитивна.

Чекор 2. Равенството (7) е еквивалентно со неравенството

$$P^*(AD)+P^*(\overline{A}D)\leq P^*(D).\tag{8}$$

Јасно, од (7) следува (8). Обратно, ако е испонето неравенството (8), тогаш од равенството $D=AD\cup\overline{A}D$ и од чекор 1 следува

$$P^*(D) \leq P^*(AD) + P^*(\overline{A}D) \leq P^*(D)$$

т.е. важи равенството (8).

Чекор 3. Фамилијата $\boldsymbol{A}$ е алгебра.

Ако $A \in \boldsymbol{A}$, тогаш A е $P^* -$мерливо, т.е. за секое множество $D \subseteq \Omega$ важи (7). Но, тогаш за множеството $\overline{A}$ важи

$$P^*(D) = P^*(AD) + P^*(\overline{A}D) = P^*(\overline{\overline{A}}D) + P^*(\overline{A}D),$$

за секое множество $D \subseteq \Omega$, што значи $\overline{A}$ е $P^* -$мерливо, т.е. $\overline{A} \in \boldsymbol{A}$. Понатаму, нека $A, B \in \boldsymbol{A}$ и $D \subseteq \Omega$. Тогаш, користејќи го чекор (1) добиваме

$$\begin{aligned} P^*(D) &= P^*(BD) + P^*(\overline{B}D) \\ &= P^*(ABD) + P^*(\overline{A}BD) + P^*(A\overline{B}D) + P^*(\overline{A}\overline{B}D) \\ &\geq P^*(ABD) + P^*(\overline{A}BD \cup A\overline{B}D \cup \overline{A}\overline{B}D) \\ &= P^*(ABD) + P^*((\overline{A}B \cup A\overline{B} \cup \overline{A}\overline{B})D) \\ &= P^*(ABD) + P^*(\overline{AB})D) \end{aligned}$$

што според чекор 2 значи $P^*(D) = P^*(ABD) + P^*(\overline{AB})D)$, па затоа $AB \in \boldsymbol{A}$, т.е. $\boldsymbol{A}$ е алгебра.

Чекор 4. Функцијата P^* е конечно адитивна на алгебрата $\boldsymbol{A}$.

Нека A и B се дисјункттни множества од $\boldsymbol{A}$. Тогаш

$$P^*(A \cup B) = P^*(A(A \cup B)) + P^*(\overline{A}(A \cup B)) = P^*(A) + P^*(B). \tag{9}$$

Сега тврдењето следува од равевенството (9) и принципот на математичка индукција.

Чекор 5. Фамилијата $\boldsymbol{A}$ е $\sigma -$алгебра.

Нека $A_i \in \boldsymbol{A}$, $i = 1, 2, ...$ и $A = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$. Прво ќе го разгледаме случајот кога множествата $A_i, i = 1, 2, ...$ се попарно дисјунктни. Нека $B_n = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$, а D е произволно подмножество на Ω. Ќе докажеме дека равенството

$$P^*(DB_n) = \sum_{k=1}^{n} P^*(DA_k) \tag{10}$$

важи за секој $n \in \mathbf{N}$. За $n = 1$ равенството е точно, бидејќи $B_1 = A_1$, а равенството (10) го прима видот $P^*(B_1) = P^*(A_1)$. Нека претпоставиме дека (10) важи за некој природен број n. Тогаш бидејќи $B_n B_{n+1} = B_n$, $\overline{B}_n B_{n+1} = A_{n+1}$ добиваме

$$\begin{aligned} P^*(DB_{n+1}) &= P^*(B_n DB_{n+1}) + P^*(\overline{B}_n DB_{n+1}) = P^*(B_n D) + P^*(DA_{n+1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} P^*(DA_k) + P^*(DA_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n+1} P^*(DA_k), \end{aligned}$$

т.е. (10) важи и за $n+1$, па од принципот на математичка индукција следува дека важи за секој природен број n. Понатаму, од $B_n \subset A$ следува $\overline{A} \subset \overline{B}_n$ и $D\overline{A} \subset D\overline{B}_n$, па затоа

$$P^*(D) = P^*(DB_n) + P^*(D\overline{B}_n) = \sum_{k=1}^{n} P^*(DA_k) + P^*(D\overline{B}_n) \ge \sum_{k=1}^{n} P^*(DA_k) + P^*(D\overline{A}) . \qquad (11)$$

Од произволноста на n следува дека неравенството (11) важи за секој природен број n, ако во истото земеме $n \to \infty$, тогаш од чекор 1 следува

$$P^*(D) \ge \sum_{k=1}^{\infty} P^*(DA_k) + P^*(D\overline{A}) \ge P^*(\bigcup_{k=1}^{\infty} DA_k) + P^*(D\overline{A}) = P^*(DA) + P^*(D\overline{A}) ,$$

што значи $A \in \boldsymbol{A}$, т.е. фамилијата $\boldsymbol{A}$ ги содржи преброjливите унии на заемно дисјунктните множества од $\boldsymbol{A}$.

Нека $A_i, i = 1, 2, \dots$ се произволни множества од $\boldsymbol{A}$. Тогаш

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup \overline{A}_1 A_2 \cup \overline{A}_1 \overline{A}_2 A_3 \cup \overline{A}_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3 A_4 \cup \dots ,$$

При што множествата $A_1, \overline{A}_1 A_2, \overline{A}_1 \overline{A}_2 A_3, \overline{A}_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3 A_4, \dots$ се заемно дисјунктни и како $\boldsymbol{A}$ е алгебра тие се елементи на $\boldsymbol{A}$. Сега од претходно изнесеното следува дека нивната унија A припаѓа на $\boldsymbol{A}$, што значи дека $\boldsymbol{A}$ е $\sigma-$алгебра.

Чекор 6. Функцијата P^* е $\sigma-$адитивна на $\sigma-$алгебрата $\boldsymbol{A}$.

Нека $A_i, i = 1, 2, \dots$ се заемно дисјунктни множества од $\boldsymbol{A}$ и нека $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.

Од $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \subset A$, ако ја искористиме конечната адитивност на P^* (чекор 4), добиваме дека за секој природен број n важи

$$\sum_{i=1}^{n} P^*(A_i) = P^*(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \le P^*(A) .$$

Сега од произволноста на n следува $\sum_{i=1}^{\infty} P^*(A_i) \le P^*(A)$, и како според чекор 1 важи $P^*(A) = P^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \le \sum_{i=1}^{\infty} P^*(A_i)$, добиваме дека $P^*(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P^*(A_i)$.

Чекор 7. $\sigma(\boldsymbol{A}_0) \subseteq \boldsymbol{A}$.

Нека $A \in \boldsymbol{A}_0$. За секое множество $D \subseteq \Omega$ и за секој $\varepsilon > 0$ постои низа $\{A_n\}$ множества од $\boldsymbol{A}_0$ таква што важи

$$D \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \text{ и } P^*(D) \le \sum_{i=1}^{\infty} P^*(A_i) \le P^*(D) + \varepsilon .$$

Но, $\boldsymbol{A}_0$ е алгебра, па затоа за секој природен број n важи $A_n A \in \boldsymbol{A}_0$ и $A_n \overline{A} \in \boldsymbol{A}_0$. Понатаму, добиваме

$$DA \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} AA_i, \ \ D\overline{A} \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A}A_i.$$

Сега од чекор 1, користејќи го принципот на математичка индукција следува:

$$\begin{aligned} P^*(DA) + P^*(D\overline{A}) &\le \sum_{i=1}^{\infty} P^*(AA_i) + \sum_{i=1}^{\infty} P^*(\overline{A}A_i) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} (P^*(AA_i) + P^*(\overline{A}A_i)) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} P^*(A_i) \le P^*(D) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Но, $\varepsilon > 0$ е произволен, па затоа од последното неравенство следува

$$P^*(DA) + P^*(D\overline{A}) \le P^*(D),$$

што според чекор 2 значи дека $A \in \boldsymbol{A}$. Според тоа, $\boldsymbol{A}_0 \subseteq \boldsymbol{A}$ и како $\boldsymbol{A}$ е $\sigma-$алгебра, а $\sigma(\boldsymbol{A}_0)$ е минималната $\sigma-$алгебра која ја содржи $\boldsymbol{A}_0$, добиваме дека $\sigma(\boldsymbol{A}_0) \subseteq \boldsymbol{A}$.

Чекор 8. За секој настан $A \in \boldsymbol{A}_0$ важи $P^*(A) = P(A)$.

Нека $A \in \boldsymbol{A}_0$. Од дефиницијата на надворешна мера следува $P^*(A) \le P(A)$. Обратно, нека $A \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, каде $\{A_i\}$ е низа множества од $\boldsymbol{A}_0$. Тогаш користејќи ја последица 3 и лема 6 б) добиваме

$$P(A) \le P(A(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)) = P(\bigcup_{i=1}^{\infty} AA_i) \le \sum_{i=1}^{\infty} P(AA_i) \le \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i),$$

и како низата $\{A_i\}$ е произволна добиваме $P(A) \le P^*(A)$, па затоа $P(A) = P^*(A)$.

Чекор 9. Функцијата P^* е веројатностна мера на $\sigma(\boldsymbol{A}_0)$.

Претходно видовме дека $P^*(\Omega) = 1$, $P^*(A) \ge A$, за секој $A \in \sigma(\boldsymbol{A}_0)$, а од чекор 6 и чекор 7 следува дека P^* е $\sigma-$адитивна на $\sigma(\boldsymbol{A}_0)$. Сега тврдењето следува од теорема 4.

Чекор 10. Нека P_1 и P_2 се веројатности мери на $\sigma(\boldsymbol{A}_0)$. Ако $P_1(A) = P_2(A)$, за секое множество $A \in \boldsymbol{A}_0$, тогаш $P_1(B) = P_2(B)$, за секое множество $B \in \sigma(\boldsymbol{A}_0)$.

Нека $\boldsymbol{B} = \{B \mid B \in \sigma(\boldsymbol{A}_0), P_1(B) = P_2(B)\}$ е фамилија множества од $\sigma(\boldsymbol{A}_0)$ на која функциите P_1 и P_2 се поклопуваат. Очигледно, $\boldsymbol{A}_0 \subseteq \boldsymbol{B} \subseteq \sigma(\boldsymbol{A}_0)$. Нека $\{B_n\}$ е монотона низа во фамилијата $\boldsymbol{B}$. Тогаш

$$P_1(\lim_{n\to\infty} B_n) = \lim_{n\to\infty} P_1(B_n) = \lim_{n\to\infty} P_2(B_n) = P_2(\lim_{n\to\infty} B_n),$$

па затоа $\lim\limits_{n\to\infty} B_n \in \mathbf{B}$, т.е. $\mathbf{B}$ е монотона класа. Но, $\mathbf{A}_0 \subseteq \mathbf{B}$, па затоа минималната монотона класа $m(\mathbf{A}_0)$ се содржи во $\mathbf{B}$. Но според последица 1 имаме $m(\mathbf{A}_0) = \sigma(\mathbf{A}_0)$, па затоа $\sigma(\mathbf{A}_0) \subseteq \mathbf{B}$, што значи $\sigma(\mathbf{A}_0) = \mathbf{B}$. ♦

Забелешка 6. За веројатноста P, која е продолжување на веројатноста P во натамошните разгледувања ќе ја задржиме истата ознака P.

Дефиниција 12. Просторот на веројатности $(\Omega, \mathbf{A}, P)$ го нарекуваме *комплетен*, ако $\sigma-$алгебрата $\mathbf{A}$ ги содржи сите подмножества на множествата чија веројатност е еднаква на нула.

Теорема 6. Нека $(\Omega, \mathbf{A}, P)$ е простор на веројатности. Тогаш постои комплетен простор на веројатности $(\Omega, \mathbf{A}, P)$ таков што $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{A}$ и $P(A) = P(A)$, за секој настан $A \in \mathbf{A}$.

Доказ. Нека P^* е надворешната мера дефинирана со равенството (5) и нека $\mathbf{A}$ е фамилијата од сите P^*-мерливи множества. Од чекор 5 во доказот на теорема 5 следува дека $\mathbf{A}$ е $\sigma-$алгебра. Ако $B \in \mathbf{A}$, $P^*(B) = 0$ и $A \subseteq B$, тогаш за секое множество $D \subseteq \Omega$ важи $AD \subseteq B$ и $\overline{A}D \subseteq D$, па ако ја искористиме монотоноста на функцијата P^* добиваме $P^*(AD) + P^*(\overline{A}D) \leq P^*(B) + P^*(D) = P^*(D)$, и од чекор 2 во доказот на теорема 5 следува $P^*(AD) + P^*(\overline{A}D) = P^*(D)$, што значи $A \in \mathbf{A}$ и како $A \subseteq B$ добиваме $P^*(A) = 0$. ♦

На крајот од оваа точка ќе ја докажеме теоремата за апроксимација на веројатностите на настаните од $\sigma-$алгебрата $\sigma(\mathbf{A}_0)$ со помош на веројатностите на настани од алгебрата $\mathbf{A}_0$.

Теорема 7. Нека $\mathbf{A}_0$ е алгебра настани, $\sigma(\mathbf{A}_0)$ е минималната $\sigma-$алгебра која ја содржи $\mathbf{A}_0$, $P : \sigma(\mathbf{A}_0) \to \mathbf{R}$ е веројатностна мера и $A \in \sigma(\mathbf{A}_0)$. Тогаш за секој $\varepsilon > 0$ постои настан $A_0 \in \mathbf{A}_0$, за кој важи

$$P(A \setminus A_0) + P(A_0 \setminus A) \leq \varepsilon . \tag{12}$$

Доказ. Од доказот на теорема 5 следува дека

$$P(A) = \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \mid (\forall i)\ A_i \in \mathbf{A}_0,\ A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\} .$$

Според тоа, постои низа настани $\{A_i\}$ во $\mathbf{A}_0$ таква што

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, \quad P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq P(A) + \tfrac{\varepsilon}{2} .$$

Бидејќи

$$\lim_{n\to\infty} P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i),$$

следува дека постои природен број n таков што за настанот $A_0 = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ важи

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \le P(A_0) + \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

Но, $\boldsymbol{A}_0$ е алгебра настани, па затоа $A_0 \in \boldsymbol{A}_0$. Понатаму, користејќи ги инклузиите $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ и $A_0 \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ ги добиваме неравенствата

$$P(A \setminus A_0) \le P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \setminus A_0) \le P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) - P(A_0) \le \tfrac{\varepsilon}{2}$$

$$P(A_0 \setminus A) \le P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \setminus A) \le P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) - P(A) \le \tfrac{\varepsilon}{2}$$

од кои следува неравенството (12). ♦

ЗАДАЧИ

1. Докажете дека $P(A) \le P(\overline{B})$, ако $A \cap B = \varnothing$.
2. Докажете дека за произволни настани A и B е исполнето неравенството
$$|P(AB) - P(A)P(B)| \le \tfrac{1}{4}.$$
3. Докажете дека за произволни настани A и B е исполнето неравенството
$$P(A \cap B) \ge P(A) + P(B) - 1.$$
4. Докажете дека за произволни настани $A_i, i = 1, 2, ..., m$ важи
$$P(\bigcap_{i=1}^{m} A_i) \ge \sum_{i=1}^{m} P(A_i) - (m-1).$$
5. Докажете дека за произволни настани A и B е исполнето неравенството
$$\max\{P(A), P(B)\} \le P(A \cup B) \le 2\max\{P(A), P(B)\}.$$
6. Нека $\{A_n\}$ и $\{B_n\}$ се две низи настани во просторот на веројатности $(\Omega, \boldsymbol{A}, P)$. Докажете го неравенството
$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) \le \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n \setminus B_n).$$
7. Нека $(\Omega, \boldsymbol{A}, P)$ и $X, Y \in \boldsymbol{A}$. Настанот $X \Delta Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$ го нарекуваме *симетрична разлика* на настаните X и Y. Докажете дека за секои настани A, B и C точни се неравенствата
   a) $|P(AB) - P(AC)| \le P(B\Delta C)$,
   b) $P(A\Delta B) \le P(A\Delta C) + P(C\Delta B)$.
8. Ако $\lim_{n\to\infty} A_n = A$, докажете дека $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(A)$.

9. Нека $\boldsymbol{B}_0$ е минималната алгебра која ги содржи сите интервали од видот $(a,b], a,b \in \mathbf{R}$, $a<b$, $\boldsymbol{B}$ е Бореловата $\sigma-$алгебра подмножества од реалната права и $\boldsymbol{C}$ е монотона класа за која важи $\boldsymbol{B}_0 \subseteq \boldsymbol{C} \subseteq \boldsymbol{B}$. Докажете дека $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{B}$.

10. Нека P е веројатносна мера дефинирана на алгебрата $\boldsymbol{A}_0$ (подмножества од Ω). За секое множество $A \subseteq \Omega$ нека се $P^*(A)$ и $P_*(A)$ надворешната и внатрешната мера на множеството A дефинирани со равенствата (5) и (6), соодветно.
    a) Докажете ги равенствата
    $$P^*(A) = \inf\{P(B) \mid A \subset B, B \in \sigma(\boldsymbol{A}_0)\},$$
    $$P^*(A) = \sup\{P(B) \mid B \subset A, B \in \sigma(\boldsymbol{A}_0)\}.$$
    b) Докажете дека множеството A е P^*-мерливо ако и само ако важи равенството
    $$P^*(A) = P_*(A).$$

11. Нека $\boldsymbol{A}_0$ е алгебра настани и $\sigma(\boldsymbol{A}_0)$ е минималната $\sigma-$алгебра која ја содржи алгебрата $\boldsymbol{A}_0$. Ако P_1 и P_2 се две веројатностни мери дефинирани на $\sigma(\boldsymbol{A}_0)$ и ако за секој настан $A \in \boldsymbol{A}_0$ важи $P_1(A) \le P_2(A)$, докажете дека за секој настан $A \in \sigma(\boldsymbol{A}_0)$ важи истото неравенство.

12. Нека $(\Omega, \boldsymbol{A}, P)$ е комплетен простор на веројатности. Докажете дека од $A, A\Delta B \in \boldsymbol{A}$ и $P(A\Delta B) = 0$ следува $B \in \boldsymbol{A}$.

13. Нека $(\Omega, \boldsymbol{A}, P)$ е простор на веројатности и $A, B \in \boldsymbol{A}$. Докажете дека од $P(A\Delta B) = 0$ следува $P(A) = P(B)$.

5. ДИСКРЕТЕН ПРОСТОР НА ВЕРОЈАТНОСТИ. КЛАСИЧНА ДЕФИНИЦИЈА НА ВЕРОЈАТНОСТ

Во претходната точка аксиоматски го воведовме поимот простор на веројатности. Наједноставни простори на веројатности се добиваат во случај кога просторот елементарни настани Ω е најмногу пребројлив, па затоа во овој дел одделно ќе го разгледаме овој случај. Во натамошните разгледувања кардиналниот број на множеството A ќе го означуваме со $|A|$, а партитивното множество на множеството A ќе го означуваме со $\boldsymbol{P}(A)$. Јасно, во општ случај $\boldsymbol{P}(\Omega)$ е $\sigma-$алгебра, а ако за Ω важи $|\Omega| < \infty$, тогаш $\boldsymbol{P}(\Omega)$ е алгебра (зошто?).

Дефиниција 13. Нека $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$ е простор од елементарни настани на некој експеримент и $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}(\Omega)$ За секој $j \in \mathbf{N}$ на настанот ω_j, му придружуваме број $p(\omega_j) = p_j$ така да се исполнети следниве услови:

1) $p_j \ge 0$, за секој $j \in \{1, 2, ..., n\}$ и

2) $\sum\limits_{k=1}^{n} p_k = 1$.

Бројот p_j го нарекуваме *веројатност на елементарниот настан* ω_j. Нека

$$A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, ..., \omega_{i_k}\}, \text{ каде } 1 \le i_1 < i_2 < ... < i_k \le n .$$

Бројот

$$P(A) = p_{i_1} + p_{i_2} + ... + p_{i_k} \tag{1}$$

го нарекуваме *веројатност на настанот* A.

Лесно се проверува дека подредената тројка $(\Omega, \boldsymbol{P}(\Omega), P)$, определена на опишаниот начин (заедно со $P(\varnothing) = 0$), е простор на веројатности во смисла на дефиниција 11. Овој простор на веројатности го нарекуваме *конечен простор на веројатности.*

Забелешка 7. Ако $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$ и $P : \boldsymbol{P}(\Omega) \to [0,1]$ е веројатност, тогаш ставаме $p_i = P(\{\omega_i\}), i = 1,2,3,...,n$. Јасно, $p_j \ge 0$, за секој $j \in \{1,2,...,n\}$ и притоа важи

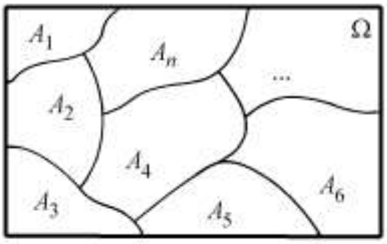
$$\sum_{k=1}^{n} p_k = \sum_{k=1}^{n} P(\{\omega_k\}) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\} = P(\Omega) = 1 .$$

Според тоа, задавањето на веројатностна мера на партитивното множество на конечно множество е еквивалентно на задавање на конечна низа ненегативни броеви чиј збир е еднаков на 1.

Во следните разгледувања ќе докажеме дека во случај кога просторот елементарни настани Ω е конечен, тогаш произволна веројатност зададена на алгебра $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{P}(\Omega)$ може да се прошири до веројатност на $\boldsymbol{P}(\Omega)$. За таа цел прво ќе ја докажеме неколку помошни тврдења.

Дефиниција 14. За фамилијата настани $A_i, i = 1,2,...,n$ ќе велиме дека е *конечно разбивање* (*конечна партиција*), цртеж 8, на просторот елементарни настани Ω ако $A_i A_j = \varnothing$, за $i \ne j$ и

$$\sum_{i=1}^{n} A_i = \Omega . \tag{2}$$



Цртеж 8

Дефиниција 15. Нека $\boldsymbol{S}$ е фамилија множества. Најмалата алгебра множества $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{S})$, која ја содржи $\boldsymbol{S}$, ја нарекуваме *алгебра генерирана од фамилијата* $\boldsymbol{S}$.

Аналогно се дефинира $\sigma -$ *алгебра генерирана* од $\boldsymbol{S}$, како најмала $\sigma -$ алгебра која ја содржи $\boldsymbol{S}$.

Забелешка 8. Ако за фамилија $\boldsymbol{S}$ земеме разбивање $A_i, i = 1,2,...,n$, т.е. такви множества $A_i, i = 1,2,...,n$ што $A_1 + ... + A_n = \Omega$ и $A_i A_j = \varnothing$ за $i \ne j$, тогаш лесно се гледа дека алгебрата $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{S})$, генерирана од разбивањето $\boldsymbol{S}$ е конечна, т.е. таа содржи конечен број множества и се состои од празното множество и од множествата од вид $A_{i_1}+...+A_{i_m}$. Точно е и обратното тврдење.

Теорема 8. Секоја конечна алгебра настани $\boldsymbol{B}$ е генерирана од некое конечно разбивање $\boldsymbol{S}=\{B_1,B_2,...,B_r\}$. Освен тоа,

1) ако $A\in\boldsymbol{B}$ и $A\subseteq B_i$ за некој $i\in\{1,2,...,r\}$, тогаш или $A=B_i$ или $A=\varnothing$,
2) секој елемент $A\in\boldsymbol{B}$, $A\neq\varnothing$ може на единствен начин да се запише како унија на елементи од $\boldsymbol{S}$ и
3) разбивањето $\boldsymbol{S}$ со овие својства е единствено,

Доказ. Нека $\boldsymbol{B}$ е конечна алгебра настани. Со $\boldsymbol{B}_\omega$ да ја означиме фамилијата од сите $B\in\boldsymbol{B}$, за кои $\omega\in B$. За секој $\omega\in\Omega$ дефинираме $B_\omega=\bigcap_{B\in\boldsymbol{B}_\omega}B$. Според тоа, за секои $B\in\boldsymbol{B}$ и $\omega\in\Omega$ важи: ако $\omega\in B$, тогаш $B_\omega\subseteq B$.

Ќе докажеме, дека за $\omega\neq\omega'$ или $B_\omega=B_{\omega'}$ или $B_\omega\cap B_{\omega'}=\varnothing$. Нека $B_\omega\cap B_{\omega'}\neq\varnothing$ и $\omega^*\in B_\omega\cap B_{\omega'}$. Според тоа, $\omega^*\in B_\omega$, па затоа $B_{\omega^*}\subseteq B_\omega$. Понатаму, или $\omega\in B_{\omega^*}$ или $\omega\in\overline{B_{\omega^*}}$. Ако $\omega\in\overline{B_{\omega^*}}$, тогаш $B_\omega\subseteq\overline{B_{\omega^*}}$, што значи $B_{\omega^*}\subseteq B_\omega$ $\subseteq\overline{B_{\omega^*}}$, а тоа е противречност. Значи $\omega\in B_{\omega^*}$, па затоа $B_\omega\subseteq B_{\omega^*}$ и како $B_{\omega^*}\subseteq B_\omega$ добиваме $B_{\omega^*}=B_\omega$. Аналогно се докажува дека $B_{\omega^*}=B_{\omega'}$. Конечно, $B_\omega=B_{\omega'}$.

За секој $\omega\in\Omega$ избираме множество B_ω. Од конечноста на алгебрата следува дека постојат конечно многу множества $B_1,B_2,...,B_r$ такви, што $B_1+...+B_r=\Omega$ и $B_iB_j=\varnothing$ за $i\neq j$. Бидејќи секое множество $B\in\boldsymbol{B}$ можеме да го запишеме во видот $B=\bigcup_{\omega\in B}B_\omega$, заклучуваме дека најденото разбивање $\boldsymbol{S}=\{B_1,B_2,...,B_r\}$ ја генерира алгебрата $\boldsymbol{B}$.

Нека $A\in\boldsymbol{B}$ и $A\subseteq B_i$ за некој $i\in\{1,2,...,r\}$. Ако $A\neq\varnothing$, тогаш постои $\omega\in\Omega$, таков што $\omega\in A\subseteq B_i=B_\omega$, па затоа $A\in\boldsymbol{B}_\omega$, што значи $B_i=B_\omega=\bigcap_{B\in\boldsymbol{B}_\omega}B\subseteq A$. Конечно, од $A\subseteq B_i$ и $B_i\subseteq A$ следува $A=B_i$, т.е. точно е тврдењето 1).

Нека $A\in\boldsymbol{B}$, $A\neq\varnothing$ и нека $A=B_{i_1}\cup B_{i_2}\cup...\cup B_{i_k}$, $\{i_1,i_2,...,i_k\}\subseteq\{1,2,...,r\}$ и $A=B_{p_1}\cup B_{p_2}\cup...\cup B_{p_t}$, $\{p_1,p_2,...,p_t\}\subseteq\{1,2,...,r\}$ се две различни претставувања на A како унија на елементи од $\boldsymbol{S}$. Ако $i\in\{i_1,i_2,...,i_k\}$, тогаш $B_i\subseteq B_{p_1}\cup...\cup B_{p_t}$, што значи постои $p\in\{p_1,p_2,...,p_t\}$ таков да $B_iB_p\neq\varnothing$. Но, тогаш од првиот дел од доказот следува $B_i=B_p$, па затоа $i\in\{p_1,p_2,...,p_t\}$, т.е. $\{i_1,i_2,...,i_k\}\subseteq\{p_1,p_2,...,p_t\}$. Понатаму, заради симетрија имаме дека $\{p_1,p_2,...,p_t\}\subseteq\{i_1,i_2,...,i_k\}$, што значи $\{p_1,p_2,...,p_t\}=\{i_1,i_2,...,i_k\}$, т.е. претставувањето на множеството $A\in\boldsymbol{B}$, $A\neq\varnothing$ како унија на елементи од $\boldsymbol{S}$ е единствено.

Точноста на тврдењето 3), т.е. единственоста на разбивањето $\boldsymbol{S}$ следува од првиот дел од доказот. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ♦

Пример 19. а) Разбивањето $A+\overline{A}=\Omega$ ја генерира алгебрата

$$\boldsymbol{B}=\{\varnothing, A, \overline{A}, \Omega\}.$$

б) Разбивањето $A+B+C=\Omega$ ја генерира алгебрата

$$\boldsymbol{B}=\{\varnothing, A, B, C, A+B, A+C, B+C, \Omega\}. ♦$$

Дефиниција 16. Нека Ω е простор на елементарни настани и $\boldsymbol{B}$ е конечна алгебра множества на Ω и $\boldsymbol{S}=\{B_1, B_2, ..., B_r\}$ е разбивањето на Ω од теорема 8. Тогаш за множествата $B_1, B_2, ..., B_r$ велиме дека се *атоми на алгебрата* $\boldsymbol{B}$.

Забелешка 9. Нека $(\Omega, \boldsymbol{A}, P)$ е простор на веројатности, Ω е конечно множество и $\boldsymbol{S}=\{B_1, B_2, ..., B_r\}$ е разбивањето од теорема 8. Веројатноста P на $\boldsymbol{A}$ наполно е определена со своите вредности на атомите $B_i, i=1,2,...,r$ на алгебрата $\boldsymbol{A}$, т.е. со низата $P(B_i), i=1,2,...,r$ и притоа за секој $A\in\boldsymbol{A}$ ако $A=\bigcup\limits_{i\in I} B_i$, тогаш

$$P(A)=\sum_{i\in I} P(B_i).$$

Обратно, ако $p_i, i=1,2,...,r$ е низа реални броеви таква да $p_i \geq 0, i=1,2,...,r$ и $\sum\limits_{i=1}^{r} p_i=1$, тогаш со

$$P(A)=\sum_{i\in I} p_i\ ,\ A\in\boldsymbol{A}\ ,\ A=\bigcup_{i\in I} B_i$$

е дефинирана веројатност P на $\boldsymbol{A}$ за која важи $P(B_i)=p_i, i=1,2,...,r$.

Од претходно изнесеното следува дека веројатноста на произволна алгебра на конечно множество е еквивалентна на задавањето на низа ненегативни реални броеви чиј збир е еднаков на 1.

Теорема 9. Нека Ω е конечно множество, $\boldsymbol{A}$ е алгебра множества на Ω и $P:\boldsymbol{A}\to[0,1]$ е веројатност. Тогаш постои веројатност $P':\boldsymbol{P}(\Omega)\to[0,1]$ таква што $P'|_{\boldsymbol{A}}=P$.

Доказ. Бидејќи $|\boldsymbol{A}|\leq 2^{|\Omega|}<+\infty$, постои фамилија $\boldsymbol{S}=\{B_1, B_2, ..., B_r\}\subseteq\boldsymbol{A}$ од атоми на $\boldsymbol{A}$ со својства од теорема 8 и притоа важи $r\leq|\Omega|$. Ставаме $P(B_i)=p_i$, $i=1,2,...,r$ и тогаш $\sum\limits_{i=1}^{r} p_i=1$ и веројатноста P е наполно определена со своите вредности на $\boldsymbol{S}$, т.е. со низата $p_i, i=1,2,...,r$. За секој $i=1,2,...,r$ произволно избираме $\omega_i\in B_i$ и ставаме $B=\{\omega_i \mid i=1,2,3,...,r\}\subseteq\Omega$. Од дефиниција 13 следува дека за да се дефинира веројатност P' на $\boldsymbol{P}(\Omega)$ доволно е да се зададат вредностите на функцијата P' на едноелементните подмножества од Ω , а потоа заради барањето за конечна адитивност со формулата (1) природно да се прошири P' на целата фамилија $\boldsymbol{P}(\Omega)$.

За секој $\omega \in B$ да ставиме

$$P'(\{\omega\}) = \begin{cases} p_i, & \omega = \omega_i \in B, \\ 0, & \omega \notin B, \end{cases}$$

и за секој $A \in \boldsymbol{P}(\Omega)$ земаме

$$P'(A) = \sum_{\omega \in A} P'(\{\omega\}) = \sum_{\omega_i \in A} p_i \,.$$

Тогаш $P' : \boldsymbol{P}(\Omega) \to [0,1]$ е веројатност. Тогаш за секој $A \in \boldsymbol{A}$, $A \neq \varnothing$ еднозначно е определено множество $I \subseteq \{1,2,...,r\}$ такво што $A = \bigcup_{i \in I} B_i$ и важи

$$P'(A) = \sum_{i \in I} P'(B_i) = \sum_{i \in I} p_i = \sum_{i \in I} P(B_i) = P(A) \,. \blacklozenge$$

Забелешка 10. а) Од доказот на претходната теорема следува дека проширувањето P' не е единствено. Едно проширување може да се добие на следниов начин. Ставаме

$$P'(\{\omega\}) = \tfrac{p_i}{|B_i|}, \ \omega \in B_i, \ i = 1,2,3,...,r \,,$$
$$P'(A) = \sum_{\omega \in A} P'(\{\omega\}), \ A \in \boldsymbol{P}(\Omega).$$

Тогаш $P' : \boldsymbol{P}(\Omega) \to [0,1]$ е веројатност и притоа важи

$$P'(A) = P'(\bigcup_{i=1}^{r} (A \cap B_i)) = \sum_{i=1}^{r} P'(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^{r} p_i \frac{|A \cap B_i|}{|B_i|},$$

па затоа

$$P'(B_i) = p_i = P(B_i), i = 1,2,...,r \,,$$

што значи дека P' е проширување на P.

б) Нека Ω е конечно множество, $\{B_1, B_2, ..., B_r\} \subseteq \boldsymbol{P}(\Omega)$ е разбивање на Ω и $p_i, i = 1,2,3,...,r$ е низа ненегативни реални броеви таква што таква што $\sum_{i=1}^{r} p_i = 1$. Тогаш постои веројатност $P : \boldsymbol{P}(\Omega) \to [0,1]$ таква што

$$P(B_i) = p_i, i = 1,2,3,...,r \,. \qquad (3)$$

Навистина за секој $\omega \in \Omega$ постои единствен $i \in \{1,2,3,...r\}$ таков што $\omega \in B_i$, па можеме да землеме

$$P(\{\omega\}) = \tfrac{p_i}{|B_i|}, \ \omega \in B_i, \ i = 1,2,3,...,r \,,$$
$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\}), \ A \subseteq \Omega \,.$$

Лесно се проверува дека функцијата $P:\boldsymbol{P}(\Omega)\to[0,1]$ е веројатност за која важи (3) и притоа имаме

$$P(A)=\sum_{i=1}^{r}p_i\frac{|A\cap B_i|}{|B_i|},\ \text{за}\ A\subseteq\Omega.$$

За нашите разгледувања од посебен интерес е случајот кога од причина на симетрија која постои меѓу исходите природно е да се смета дека сите исходи се еднакввоверојатни. Нека е $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,...,\omega_n\}$ и $p_1=p_2=...=p_n$. Притоа, од својството 2) во дефиниција 13 следува

$$p_1=p_2=...=p_n=\frac{1}{n}.$$

Во овој случај ќе велиме дека елементарните настани се *еднакввоверојатни* и тогаш од (1) следува дека веројатноста на настанот $A=\{\omega_{i_1},\omega_{i_2},...,\omega_{i_k}\}$ е дадена со

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{|A|}{|\Omega|}. \tag{4}$$

Според тоа, *во случај на еднакввоверојатни елементарни настани веројатноста на произволен настан A е еднаква на количникот на бројот на елементарните настани поволни за настанот A и вкупниот број елементарни настани.* Ваквото определување на веројатноста на настаните во случај на експеримент со еднакввоверојатни исходи го нарекуваме *класична дефиниција на веројатноста.*

Моделите на простори на веројатности, кои доведуваат до класичната дефиниција на веројатност, се користат во случаи кога елементарните настани имаат својство на "симетрија" во смисол да сите елементарни настани се наоѓаат во ист однос кон условите кои го определуваат карактерот на експериментот. На пример, фрлањето на хомогената коцка или хомогената монета на хоризонтална рамнина има својство на "симетрија" во однос дали ќе падне овој или оној број на точки или ќе падне една или друга страна на монетата, ако коцката и монетата се доволно високо над рамнината и нивното движење не е околу оската на симетријата нормална на рамнината.

Нека $\Omega=\{\omega_n\,|\,n=1,2,3,...\}$ е пребројливо множество и $P:\boldsymbol{P}(\Omega)\to[0,1]$ е веројатност. Ставаме $p_n=P(\{\omega_n\}),\,n=1,2,3,...$. Тогаш $p_n\geq 0$, $n=1,2,3,...$ и важи

$$\sum_{n=1}^{\infty}p_n=\sum_{n=1}^{\infty}P(\{\omega_n\})=P(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{\omega_n\})=P(\Omega)=1.$$

Освен тоа, важи

$$P(A)=\sum_{\omega\in A}P(\{\omega\})=\sum_{\omega_n\in A}p_n,\ \text{за}\ A\subseteq\Omega, \tag{5}$$

што значи дека функцијата P, заради $\sigma-$адитивноста, наполно е определена на $\boldsymbol{P}(\Omega)$ со своите веројатности на едноелементните подмножества $\{\omega\}$ од Ω.

Обратно, нека p_n, $n=1,2,3,...$ е низа реални броеви такви да

$$p_n\geq 0,\ n=1,2,3,...,\ \sum_{n=1}^{\infty}p_n=1. \tag{6}$$

Тогаш, со

$$P(A)=\sum_{\omega_n\in A} p_n,\ \text{за}\ A\subseteq\Omega, \tag{7}$$

е определена функција $P:\boldsymbol{P}(\Omega)\to\mathbf{R}^+$. Ќе докажеме дека вака определената функција е веројатност. Навистина, од (7) следува

$$P(\Omega)=\sum_{\omega_n\in\Omega} p_n=\sum_{n=1}^{\infty} p_n=1.$$

Понатаму, нека $A_k\in\boldsymbol{P}(\Omega)$, $k=1,2,3,...$ се заемно дисјунктни множества. Тогаш.од својствата на апсолутно конвергентните редови (види [74]) следува

$$P(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k)=\sum_{\omega_n\in\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k} p_n=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\omega_n\in A_k} p_n=\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k),$$

што значи дека функцијата $P:\boldsymbol{P}(\Omega)\to\mathbf{R}^+$ е $\sigma-$адитивна, па затоа таа е веројатност на $\boldsymbol{P}(\Omega)$.

Од досега изнесеното следува дека задавањето на веројатност на $\boldsymbol{P}(\Omega)$, каде $\Omega=\{\omega_n\mid n=1,2,...\}$ е еквивалентно на задавањето низа реални броеви p_n, $n=1,2,...$ која ги задоволува условите (6). Така ја имаме следнава дефиниција.

Дефиниција 17. Ако $\Omega=\{\omega_n\mid n=1,2,...\}$, тогаш просторот на веројатности $(\Omega,\boldsymbol{P}(\Omega),P)$, каде веројатноста $P:\boldsymbol{P}(\Omega)\to\mathbf{R}^+$ е зададена со условите (6), го нарекуваме *пребројлив дискретен простор на веројатности*.

Забелешка 11. Во натамошните разгледувања често пати истовремено ќе ги третираме конечниот и пребројливиот дискретен простор на веројатности и притоа ќе користиме заеднички термин: *дискретен простор на веројатности*.

Дефиниција 18. Нека $\Omega=\{\omega_n\mid n=1,2,...\}$. За фамилијата настани A_i, $i=1,2,3,...$ ќе велиме дека е *пребројливо разбивање* (*пребројлива партиција*) на просторот елементарни настани Ω ако $A_iA_j=\varnothing$, за $i\neq j$ и

$$\sum_{i=1}^{\infty} A_i=\Omega. \tag{8}$$

Теорема 10. Нека $\Omega=\{\omega_n\mid n=1,2,...\}$ и $\boldsymbol{B}$ е бесконечна $\sigma-$алгебра Ω. Тогаш постои пребројливо разбивање $\boldsymbol{S}=\{B_1,B_2,B_3,...\}$ на Ω такво што $\varnothing\neq B_i\in\boldsymbol{B}$, $i\in\mathbf{N}$ и важи

1) ако $A\in\boldsymbol{B}$ и $A\subseteq B_i$ за некој $i\in\{1,2,...,r\}$, тогаш или $A=B_i$ или $A=\varnothing$,
2) секој елемент $A\in\boldsymbol{B}$, $A\neq\varnothing$ може на единствен начин да се запише како унија на елементи од $\boldsymbol{S}$ и
3) разбивањето $\boldsymbol{S}$ со овие својства е единствено,

Доказ. Нека $\Omega=\{\omega_n \mid n=1,2,...\}$ и $\mathcal{B}$ е бесконечна $\sigma-$алгебра Ω. Со $\mathcal{B}_\omega$ да ја означиме фамилијата од сите $B\in\mathcal{B}$, за кои $\omega\in B$. За секој $\omega\in\Omega$ дефинираме $B_\omega=\bigcap\limits_{B\in\mathcal{B}_\omega} B$. Според тоа, за секои $B\in\mathcal{B}$ и $\omega\in\Omega$ важи: ако $\omega\in B$, тогаш $B_\omega\subseteq B$. Понатаму, аналогно како во доказот на теорема 8 се докажува дека за $\omega\neq\omega'$ или $B_\omega=B_{\omega'}$ или $B_\omega\cap B_{\omega'}=\varnothing$.

За $\omega_n\in\Omega, n=1,2,3,...$ според претходно опишаната постапка го наоѓаме множеството $B_{\omega_n}, n=1,2,3,...$. Тогаш $B_{\omega_n}\neq\varnothing$, $n=1,2,3,...$. Понатаму, од низата множества $B_{\omega_n}, n=1,2,3,...$ ја формираме низата множества $B_{\omega_{n_k}}, k=1,2,3,...$ кои се непразни и се заемно дисјунктни. Ако ставиме $B_k=B_{\omega_{n_k}}, k=1,2,3,...$ тогаш очигледно $B_iB_j=\varnothing$ за $i\neq j$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} B_k=\Omega$, т.е. $B_k, k=1,2,3,...$ е пребројливо разбивање на Ω. Бидејќи секое множество $B\in\mathcal{B}$ можеме да го запишеме во видот $B=\bigcup\limits_{\omega\in B} B_\omega$, заклучуваме дека најденото разбивање $\mathcal{S}=\{B_1,B_2,B_3,...\}$ ја генерира алгебрата $\mathcal{B}$.

Доказот на тврдењето 1) е наполно аналоген на доказот на соодветното тврдење од теорема 8.

Нека $A\in\mathcal{B}$, $A\neq\varnothing$ и нека $A=\bigcup\limits_{i\in I} B_i$, $I\subseteq\mathbf{N}$ и $A=\bigcup\limits_{j\in J} B_j$, $J\subseteq\mathbf{N}$. Ако $i_0\in I$, тогаш $B_{i_0}\subseteq\bigcup\limits_{j\in J} B_j$, што значи постои $j_0\in J$ таков да $B_{i_0}B_{j_0}\neq\varnothing$. Но, тогаш од првиот дел од доказот следува $B_{i_0}=B_{j_0}$, па затоа $i_0\in J$, т.е. $I\subseteq J$. Понатаму, заради симетрија имаме дека $J\subseteq I$, што значи $I=J$, т.е. претставувањето на множеството $A\in\mathcal{B}$, $A\neq\varnothing$ како унија на елементи од $\mathcal{S}$ е единствено.

Точноста на тврдењето 3), т.е. единственоста на разбивањето $\mathcal{S}$ следува од првиот дел од доказот. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ♦

Теорема 11. Нека Ω е пребројливо множество и $(\Omega,\mathcal{A},P)$ е простор на веројатности. Тогаш постои веројатност $P':\mathcal{P}(\Omega)\to[0,1]$ таква да $P'|_{\mathcal{A}}=P$.

Доказ. Нека $\mathcal{S}=\{B_n, n\in\mathbf{N}\}$ е разбивањето на Ω од теорема 10. Ставаме $p_n=P(B_n), n\in\mathbf{N}$. Тогаш $p_n\geq 0, n\in\mathbf{N}$ и важи

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n=\sum_{n=1}^{\infty} P(B_n)=\bigcup_{n=1}^{\infty} P(B_n)=P(\Omega)=1,$$

и веројатноста P е наполно определена со своите вредности на $\mathcal{S}$, т.е. со низата $p_n, n\in\mathbf{N}$. Нека фиксираме $\omega_n\in B_n, n\in\mathbf{N}$, за секој $\omega\in\Omega$ да ставиме

$$P'(\{\omega\})=\begin{cases} p_n, & \omega=\omega_n, \\ 0, & \omega\neq\omega_n, \end{cases}$$

и да дефинираме

$$P'(A)=\sum_{\omega\in A} P'(\{\omega\}) \text{, за секој } A\in \boldsymbol{P}(\Omega).$$

Лесно се покажува дека P' е веројатност на $\boldsymbol{P}(\Omega)$. Понатаму, ако $A\in \boldsymbol{A}$, $A\neq\varnothing$, тогаш постои $I\subseteq \mathbf{N}$ таков што $A=\bigcup_{i\in I} B_i$, па затоа

$$P'(A)=P'(\bigcup_{i\in I} B_i)=\sum_{i\in I} P'(B_i)=\sum_{i\in I} p_i=\sum_{i\in I} P(B_i)=P(\bigcup_{i\in I} B_i)=P(A)\,. \blacklozenge$$

Забелешка 12. Проширувањето P' од претходната теорема не е единствено. Едно од можните проширувања може да се добие на следниов начин: ако $|B_n|<\infty$, тогаш ставаме

$$P'(\{\omega\})=\tfrac{p_n}{|B_n|},\ \ \omega\in B_n,$$

а ако B_n е пребројливо, $B_n=\{\omega_{ni}, i\in\mathbf{N}\}$, тогаш ставаме

$$P'(\{\omega_{ni}\})=\tfrac{p_n}{2^i},\ \ \omega_{ni}\in B_n,$$

и

$$P'(A)=\sum_{\omega\in A} P'(\{\omega\}) \text{, за секој } A\in \boldsymbol{P}(\Omega).$$

Тогаш очигледно важи $P'(B_n)=P(B_n),\ n\in\mathbf{N}$, што значи $P'|_{\boldsymbol{A}}=P$.

5.1. ЕЛЕМЕНТИ ОД КОМБИНАТОРИКА

При наоѓање на веројатности со помош на класичната дефиниција на веројатност значителна е примената на комбинаториката, па затоа овде накратко ќе се задржиме на проблемот на групирањето на елементите на конечно множество.

Дефиниција 17. Нека е дадено конечното множеството од n елементи $A=\{a_1,a_2,...,a_n\}$ и множеството $\mathbf{N}_k=\{1,2,...,k\},\ k\le n$. Секоја инјекција $v:\mathbf{N}_k\to A$ ја нарекуваме *варијација без повторување* од n елементи од класа k, за множеството A.

Бројот на варијациите без повторување од n елементи од класа k го означуваме со $V_n^k,\ n=1,2,...,\ k=1,2,...,n$.

Лема 10. Множеството варијации без повторување од n елементи од класа k, за множеството $A=\{a_1,a_2,...,a_n\}$, е еквивалентно со множеството

$$C=\{(a_{i_1},a_{i_2},...,a_{i_k})\,|\ \ a_{i_j}\neq a_{i_t},\ \text{za}\ \ i_j\neq i_t;\, a_{i_j}\in A,\ \text{za}\, j=1,2,...,k\}\,.$$

Доказ. Нека $B=\{f\ |\ f:\mathbf{N}_k\to A,\ f \text{ е инјекција}\}$. Нека $\varphi:B\to C$ е дефинирано со $\varphi(f)=(f(1),...,f(k))\in C$, за $f\in B$. Јасно, пресликувањето φ е добро дефинирано.

Ако $(b_1,...,b_k)\in C$, со $g(i)=b_i, i=1,2,...,k$ дефинираме пресликување $g:\mathbf{N}_k\to A$. Вака дефинираното пресликување g е инјекција и притоа важи

$$\varphi(g)=(g(1),...,g(k))=(b_1,...,b_k),$$

што значи дека φ е сурјекција. Ако $f,g\in B$ се такви, што $\varphi(f)=\varphi(g)$, тогаш

$$(f(1),...,f(k))=(g(1),...,g(k)).$$

Значи, $f(i)=g(i)$, за $i=1,2,..,k$, т.е. $f\equiv g$, односно φ е инјекција. Според тоа, φ е биекција, па затоа $B\sim C$. ♦

Лема 11. Ако $k<n$, тогаш

$$V_n^{k+1}=(n-k)V_n^k. \tag{3}$$

Доказ. Ако се искористи претходната лема добиваме, дека од секоја варијација без повторување од n елементи од класа k, т.е. од секоја подредена k-ка од облик $(a_{i_1},...,a_{i_k})$, со додавање на уште еден елемент

$$a_{i_{k+1}}\neq a_{i_j},\ \text{за}\, j\neq k+1,\ j=1,...,k,$$

кои вкупно ги има $n-k$, може да се добијат $n-k$ варијации без повторување од n елементи од класа $k+1$ од облик $(a_{i_1},a_{i_2},...,a_{i_k},a_{i_{k+1}})$. Притоа секоја од новодобиените варијации се добива само по еднаш. Затоа важи формулата (3). ♦

Последица 4. За бројот на варијациите без повторување од n елементи од класа k точна е формулата

$$V_n^k=n(n-1)...(n-k+1),\ \text{za}\, k=1,2,...,n. \tag{4}$$

Доказ. Очигледно дека $V_n^1=n$. Нека за $k=i<n$ важи формулата (4), т.е. $V_n^i=n(n-1)...(n-i+1)$. Сега од (3) за $k=i+1$ добиваме

$$V_n^{i+1}=(n-i)V_n^i=n(n-1)...(n-i+1)(n-i),$$

т.е. формулата (4) е исполнета. Конечно од принципот на математичка индукција следува дека формулата (4) важи за $k=1,2,...,n$. ♦

Дефиниција 18. Нека е дадено конечното множеството од n елементи $A=\{a_1,a_2,...,a_n\}$. Секоја биекција $p:A\to A$ ја нарекуваме *пермутација без повторување* од n елементи.

Бројот на пермутациите без повторување од n елементи го означуваме со P_n.

Лема 12. Секоја пермутација без повторување од n елементи е варијација без повторување од n елементи од класа n, и обратно.

Доказ. Непосредно следува од дефинициите 17 и 18. ♦

Лема 13. Бројот на пермутациите без повторување од n елементи е

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n = n!.$$

Доказ. Непосредно следува од лемите 11 и 12. ♦

Дефиниција 19. Нека е дадено множеството $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Секое подмножество од k елементи, $k \leq n$ на множеството A го нарекуваме *комбинација без повторување* од k-та класа од n-те елементи. Бројот на комбинациите без повторување од n елементи од класа k го означуваме со C_n^k, $n = 1, 2, ...,$ $k = 1, 2, ..., n$.

Забелешка 13. Од дефиницијата следува дека две комбинации без повторување од иста класа се сметаат различни кога постои барем еден елемент од едната комбинација кој не е елемент на другата комбинација.

Нека $\{a_1, a_2, ..., a_k\}$ е една комбинација без повторување од n елементи од класа k. Ако оваа комбинација се пермутира ќе се добијат $k!$ пермутации, кои воедно се и варијации без повторување од n елементи од класа k. Бидејќи бројот на варијациите без повторување од n елементи од класа k е еднаков на V_n^k, добиваме дека за бројот на комбинациите без повторување од n елементи од класа k важи равенството $V_n^k = C_n^k P_k$. Според тоа, точна е следнава лема.

Лема 14. За бројот на комбинациите без повторување од n елементи од класа k точна е формулата

$$C_n^k = \frac{V_n^k}{P_k}, \tag{5}$$

каде што е $n = 1, 2, 3, ...,$ $k = 1, 2, ..., n$, т.е. формулата

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{k!}. \; ♦ \tag{6}$$

Последица 5. Точна е формулата

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{7}$$

Доказ. Формулата (7) се добива ако во броителот и именителот на десната страна на равенството (6) помножиме со $(n-k)!$. ♦

Пример 20 а) (равенство на Ван дер Монт). Нека $m, n, r \in \mathbf{N}$ и $r \leq \min\{m, n\}$. Ќе докажеме дека

$$C_{m+n}^r = \sum_{k=0}^{r} C_m^k C_n^{r-k} . \tag{8}$$

Нека множеството A има $m+n$ елементи. Тогаш бројот C_{m+n}^r е еднаков на бројот на подмножествата од A кои имаат r елементи. Секое вакво множество можеме да го добиеме на следниов начин: множеството A го делиме на две подмножества B и C кои имаат m и n елементи, соодветно, а потоа од подмножество B

избираме k елементи, а од подмножеството C избираме $r-k$ елементи и ова може да се направи на $C_m^k C_n^{r-k}$ начини. Обратно, ако за било кој $k \in \{0,1,2,...,r\}$ избереме k елементи од множеството B и $r-k$ елемени од множеството C, тогаш всушност сме избрале r елементи од множеството A. Според тоа, точна е формулата (8).

б) Ќе докажеме дека за секој $n \in \mathbf{N}$ важи

$$C_{2n}^n = \sum_{k=0}^{n} [C_n^k]^2 . \tag{9}$$

Според а) имаме $C_{2n}^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k C_n^{n-k}$ и ако во последното равенство земеме предвид дека

$$C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)![n-(n-k)]!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^k$$

го добиваме равенството (9). ♦

Дефиниција 20. Нека е дадено конечното множеството од n елементи $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ и множеството $\mathbf{N}_k = \{1,2,...,k\}$. Секое пресликување $v : \mathbf{N}_k \to A$ го нарекуваме *варијација со повторување* од n елементи од класа k. Бројот на варијациите со повторување од n елементи од класа k го означуваме со $\overline{V}_n^k$, $n = 1,2,...,$ $k = 1,2,...,n$.

Лема 15. За секои $k,n \in \mathbf{N}$ важи

$$\overline{V}_n^k = n^k . \tag{10}$$

Доказ. Нека $C = A^k$ е Декартовиот производ на множеството A, земено $k-$пати и $A^{\mathbf{N}_k} = \{ f \mid f : \mathbf{N}_k \to A\}$. Нека $\varphi : A^{\mathbf{N}_k} \to C$ е дефинирано со

$$\varphi(f) = (f(1),..., f(k)) \in C \text{, за } f \in A^{\mathbf{N}_k} .$$

Јасно, пресликувањето φ е добро дефинирано.

Ако $(b_1,...,b_k) \in C$, со

$$g(i) = b_i, i = 1,2,...,k$$

дефинираме пресликување $g : \mathbf{N}_k \to A$. За вака дефинираното пресликување g важи

$$\varphi(g) = (g(1),..., g(k)) = (b_1,...,b_k) ,$$

што значи дека φ е сурјекција. Ако $f, g \in A^{\mathbf{N}_k}$ се такви, што $\varphi(f) = \varphi(g)$, тогаш

$$(f(1),..., f(k)) = (g(1),..., g(k)) .$$

Значи, $f(i) = g(i)$, за $i = 1,2,..,k$, т.е. $f \equiv g$, односно φ е инјекција. Според тоа, φ е биекција, па затоа $| A^{\mathbf{N}_k} | = | C | = n^k$, т.е. важи (10). ♦

Дефиниција 21. Нека е дадено множеството $A=\{a_1,...,a_m\}$, $k_i \in \mathbf{N}$, за $i=1,2,...,m$ и $n=k_1+k_2+...+k_m$. Подредената $n-$торка елементи на множеството A во која за секој $i \in \{1,2,...,m\}$ елементот a_i се јавува точно k_i пати, ја нарекуваме *пермутација од* n *елементи од тип* $(k_1,k_2,...,k_m)$ или *пермутација со повторување.*

За бројот на пермутациите од n елементи од тип $(k_1,k_2,...,k_m)$, кој го означуваме со $P_n^{k_1,k_2,...,k_m}$, точна е следнава теорема.

Лема 16. Ако $k_i \in \mathbf{N}$, за $i=1,2,...,m$ и $n=k_1+k_2+...+k_m$, тогаш

$$P_n^{k_1,k_2,...,k_m}=\frac{n!}{k_1!k_2!...k_m!}. \tag{11}$$

Доказ. Од $n-$те места во подредената $n-$торка избираме k_1 места, што може да се направи на

$$C_n^{k_1}=\frac{n!}{k_1!(n-k_1)!}$$

начини и на нив го ставаме елементот a_1, потоа од преостанатите $n-k_1$ места избираме k_2 места, што може да се направи на

$$C_{n-k_1}^{k_2}=\frac{(n-k_1)!}{k_2!(n-k_1-k_2)!}$$

начини и на нив го ставаме елементот a_2 итн., во $(m-1)-$от чекор од преостанатите $n-k_1-k_2-...-k_{m-2}$ места избираме k_{m-1}, што може да се направи на

$$\begin{aligned} C_{n-k_1-k_2-...-k_{m-2}}^{k_{m-1}} &= \frac{(n-k_1-k_2-...-k_{m-2})!}{k_{m-1}!(n-k_1-k_2-...-k_{m-2}-k_{m-1})!} \\ &= \frac{(n-k_1-k_2-...-k_{m-2})!}{k_{m-1}!k_m!} \end{aligned}$$

начини и на нив го ставаме елементот a_{m-1}, за да на крајот на преостанатите k_m места го ставиме елементот a_m. Од досега изнесеното следува дека

$$\begin{aligned} P_n^{k_1,k_2,...,k_m} &= C_n^{k_1}C_{n-k_1}^{k_2}C_{n-k_1-k_2}^{k_3}...C_{n-k_1-k_2-...-k_{m-2}}^{k_{m-1}} \\ &= \frac{n!}{k_1!(n-k_1)!}\cdot\frac{(n-k_1)!}{k_2!(n-k_1-k_2)!}\cdot\frac{(n-k_1-k_2)!}{k_3!(n-k_1-k_2-k_3)!}\cdot...\cdot\frac{(n-k_1-k_2-...-k_{m-2})!}{k_{m-1}!k_m!}=\frac{n!}{k_1!k_2!...k_m!}, \end{aligned}$$

т.е. точна е формулата (11). ♦

Дефиниција 22. Нека е дадено множеството $A=\{a_1,...,a_n\}$ и нека за неговите елементи знаеме кој е прв, кој е втор итн., т.е. нека $a_1<a_2<...<a_n$. За подредената $k-$торка $(b_1,b_2,...,b_k)$, $b_i \in A$ ќе велиме дека е *комбинација со повторување од* n *елементи од класа* k ако $b_i \le b_j$, за $i<j$. Бројот на комбинациите со повторување од n елементи од класа k ќе го означуваме со $\overline{C}_n^k$.

Лема 17. Бројот на комбинациите со повторување од n елементи од класа k е

$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k. \tag{12}$$

Доказ. Даземеме една комбинација со повторување од n елементи од класа k и на истата да и ја придружиме низата од нули и единици формирана со следната постапка: запишуваме онолку единици колку што во комбинацијата се јавува елементот a_1, потоа запишуваме една 0, па запишуваме онолку единици колку што во комбинацијата се јавува елементот a_2, па запишуваме една 0 итн., за на крајот да запишеме онолку единици колку што во комбинацијата се јавува елементот a_n, а во случај кога во комбинацијата не се јавува некој елемент a_i наместо единици запишуваме една нула. На овој начин на секоја комбинација ќе и соодветствува единствена низа составена од k единици и $n-1$ нула и обратно, на секоја ваква низа ќе и соодветствува единствена комбинација со повторување од n елементи од класа k.

Секоја од конструираните низи е со должина $n+k-1$ и истата е определена со распоредот на $n-1$ нула на $n+k-1$ место, односно со распоредот на k единици на $n+k-1$ место. Според тоа, бројот на сите низи од разгледуваниот вид е еднаков на $C_{n+k-1}^{n-1} = C_{n+k-1}^k$ и како тој е еднаков на бројот на комбинациите со повторување од n елементи од класа k, добиваме дека важи формулата (12). ♦

5.2. ПРИМЕНА НА КЛАСИЧНАТА ДЕФИНИЦИЈА НА ВЕРОЈАТНОСТ

Пример 21 (избор без враќање). Нека имаме кутија со N топчиња, кои се нумерирани со броевите $1,2,...,N$. Да претпоставиме, дека топчињата со броеви $1,2,...,M$ се бели, а останатите се црни. Изборот без враќање се состои во тоа, што без да гледаме од кутијата последователно вадиме $n, (n \leq N)$ топчиња, кои не ги враќаме назад. Во овој случај просторот елементарни настани $\Omega = \{\omega\}$ е множеството од сите подредени $n-$торки

$$\omega = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \tag{13}$$

каде броевите $\alpha_i, 1 \leq \alpha_i \leq N$ се меѓусебно различни, што значи дека

$$|\Omega| = V_N^n. \tag{14}$$

Да ја пресметаме веројатноста на настанот A_m, кој се состои во тоа, да меѓу избраните n топчиња има точно m, $m \leq \min\{n, M\}$ бели. Имаме:

$$|A_m| = C_n^m \cdot V_M^m \cdot V_{N-M}^{n-m}. \tag{15}$$

Навистина, бројот на елементарните настани (13), во кои точно во m случаи важи $\alpha_i, 1 \leq \alpha_i \leq M$, се определува како производ од: бројот C_n^m на начините за избор на m координати од дадените n координати, во кои се наоѓаат броевите $\alpha_i, 1 \leq \alpha_i \leq M$; бројот V_M^m на различното распоредување на броевите $\alpha_i, 1 \leq \alpha_i \leq M$ во избраните m

координати и бројот V_{N-M}^{n-m} на различното распоредување на броевите α_i, $M+1 \le \alpha_i \le N$ во останатите $n-m$ координати. Од равенствата (2), (14) и (15) наоѓаме

$$P(A_m) = \frac{C_n^m \cdot V_M^m \cdot V_{N-M}^{n-m}}{V_N^n} = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}. \tag{16}$$

До решението на задачата може да дојдеме и на следниот начин. Просторот елементарни настани е множеството од сите n елементни подмножества на множество со N елементи, па затоа $|\Omega| = C_N^n$. Сега, настанот A_m се реализира ако при изборот на n топчиња имаме избрано m бели и $n-m$ црни топчиња, кој избор е можен на $C_M^m C_{N-M}^{n-m}$ начини, па $|A_m| = C_M^m C_{N-M}^{n-m}$. Конечно, со замена во формулата (2) го добиваме десното равенство во (16). ♦

Пример 22. Од еден шпил од 52 карти произволно се извлекуваат три карти. Пресметајте ја веројатноста на настаните:

а) $A_1 -$ во извлечените три карти има точно еден ас;

б) $B -$ во извлечените три карти има барем еден ас.

Решение. И во двата случаи просторот елементарни настани се состои од множеството комбинации од класа 3 од 52 елементи. Според тоа, просторот Ω ќе биде конечен и секои два елементарни настани ќе бидат еднакводверојатни. Затоа, $|\Omega| = C_{52}^3$.

а) За случајниот настан A_1 имаме $|A_1| = C_4^1 C_{48}^2$. Сега, од формулата (2) наоѓаме

$$P(A_1) = \frac{|A_1|}{|\Omega|} = \frac{C_4^1 C_{48}^2}{C_{52}^3}.$$

б) Со A_2, односно A_3 да ги означиме настаните во извлечените три карти има точно 2, односно 3 аса. Тогаш, настаните A_1, A_2 и A_3 се попарно дисјунктни $B = A_1 + A_2 + A_3$. Аналогно како под а) наоѓаме

$$P(A_2) = \frac{|A_2|}{|\Omega|} = \frac{C_4^2 C_{48}^1}{C_{52}^3} \text{ и } P(A_3) = \frac{|A_3|}{|\Omega|} = \frac{C_4^3 C_{48}^0}{C_{52}^3}.$$

Конечно, од лема 6 ѓ) имаме

$$P(B) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = \frac{C_4^1 C_{48}^2 + C_4^2 C_{48}^1 + C_4^3 C_{48}^0}{C_{52}^3}.$$

Да забележиме дека во дадениот случај настанот $\overline{B}$ означува дека меѓу избраните карти нема ниту еден ас и неговата веројатност е $P(\overline{B}) = \frac{C_3^0 C_{48}^3}{C_{52}^3}$. Сега, од лема 6 г) следува

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \frac{C_3^0 C_{48}^3}{C_{52}^3}. \ ♦$$

Пример 23 (избор со враќање). Нека ја имаме кутијата од пример 21, но изборот на n топки од кутијата го правиме последователно по една топка, и притоа истата ја враќаме назад во кутијата. Во овој случај просторот на елементарни настани се состои од сите вектори (11), за чии координати немаме никакви дополнителни ограничувања освен $1 \le \alpha_i \le N$. Затоа $|\Omega| = N^n$, а веројатноста на настанот A_m, која се пресметува на аналоген начин е еднаква на

$$P(A_m) = C_n^m \frac{M^m (N-M)^{n-m}}{N^n} = C_n^m (\tfrac{M}{N})^m (1-\tfrac{M}{N})^{n-m} . \blacklozenge \tag{15}$$

Пример 24. Секретарка адресирала n плика, при што сите адреси се различни. Потоа напишала n различни писма (од кои секое требало да биде испратено на една определена од запишаните n адреси) и на случаен начин ги распределила во пликата. Ако сите можни распределби на писмата се еднаквоверојатни, пресметајте ја веројатноста на настанот дека ниту едно од писмата нема да стигне на вистинската адреса.

Решение. Бројот на можните распореди на писмата е еднаков на $n!$. За секој $k \in \{1,2,...,n\}$ со A_k да го означиме множеството од сите распореди при кои $k-$тото писмо стигнува на вистинската адреса. Бројот на поволните распореди за настанот да ниту едно писмо не стидне на вистинска адреса е еднаков на

$$n! - |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup ... \cup A_n|.$$

Понатаму, бидејќи бројот на распоредите, при кои фиксирани i писма стигнуваат на вистинска адреса, е еднаков на $(n-i)!$, од формулата за вклучување и исклучување следува дека бројот на поволните распореди е

$$a_n = n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \binom{n}{3}(n-3)! + ... + (-1)^n \binom{n}{n} .$$

Конечно, бараната веројатност е

$$\frac{a_n}{n!} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + ... + (-1)^n \frac{1}{n!} .$$

Да забележиме, дека при $n \to \infty$, бараната веројатност тежи кон бројот $e^{-1} \approx 0,36788...$. ♦

Во претходните разгледувања рековме дека во многу ситуации, а заради симетрија и емпириските резултати, природно е да сметаме дека елементарните настани се еднакввоверојатни. Меѓутоа, има случаеви кога поприродно е на елементарните настани да им се придружат различни веројатности. Ќе разгледаме неколку примери.

Пример 25 (Парадокс на Де Мер). Коцка за играње се фрла три пати и во секое фрлање се бележи паднатиот број точки. Која веројатност е поголема: збирот на паднатите броеви да е еднаков на 11 или збирот на паднатите броеви да е еднаков на 12?

Бидејќи коцката се фрла три пати и во секое фрлање се бележи паднатиот број точки добиваме дека бројот на сите елементарни настани е еднаков на бројот на варијациите со повторување од трета класа од елементите 1,2,3, 4,5,6, што значи тој е еднаков на $\overline{V}_6^3 = 6^3 = 216$.

Бројот 11 може да се запише како збир на три собирци, од кои секој припаѓа на множеството $\{1,2,3,4,5,6\}$ и притоа редот на собирците не е важен, на следниве шест начини

$$11=6+4+1=6+3+2=5+5+1=5+4+2=5+3+3=4+4+3.$$

Секој од збировите $6+4+1, 6+3+2$ и $5+4+2$ може да се добие на $3!=6$ начини, а секој од останатите три збира може да се добие на три начини. Затоа веројатноста на збирот 11 е дадена со

$$P(11)=\frac{6+6+3+6+3+3}{216}=\frac{27}{216}.$$

Аналогно добиваме,

$$12=6+5+1=6+4+2=6+3+3=5+5+2=5+4+3=4+4+4,$$

и веројатноста на збирот е

$$P(12)=\frac{6+6+3+3+6+1}{216}=\frac{25}{216}.$$

Според тоа, ако коцката за играње се фрла три пати, тогаш веројатноста збирот на регистрираните броеви да е еднаков на 11 е поголема од веројатноста збирот на регистрираните броеви да е еднаков на 12. ♦

Пример 26. Страните на две хомогени коцки се означени со броевите 1, 1, 3, 3, 3, 3 и 2, 2, 2, 2, 4, 4, соодветно. Експериментот се состои во фрлање на коцките и регистрирање на паднатите броеви. Просторот елементарни настани е $\Omega=\{12,14,32,34\}$. Елементарните настани 12, 14, 32 и 34 може да се реализираат на 8, 4, 16 и 8 начини, соодветно. Веројатноста на настанот $A=\{12,14,34\}$ на првата коцка да падне помал број отколку на втората е

$$P(A)=\frac{8}{36}+\frac{4}{36}+\frac{8}{36}=\frac{5}{9}. \text{ ♦}$$

Пример 27. Дадени се четири коцки чии страни се нумерирани со следниве шесторки броеви

$$U(1,1,1,5,5,5),\quad V(2,2,2,2,6,6),\quad W(3,3,3,3,3,3),\quad X(0,0,4,4,4,4).$$

Двaца играчи, *A* и *B*, ја играат следнава игра: Прво играчот *A* по сопствена желба избира една коцка, а потоа од преостанатите коцки играчот *B* по сопствена желба избира една коцка. Потоа секој играч ја фрла својата коцка, а победува оној играч кој ќе добие поголем број. Кој играч е во поповолна положба?

Решение. На прв поглед може да се помисли, дека играчот A (кој прв избира коцка) не е во полоша положба од играчот B, од проста причина што има на располагање поголем број коцки. Но, се покажува дека тоа не е точно. Имено, проблемот е во тоа што играчот B избира коцка кога е веќе познат изборот на неговиот противник. Ќе ги разгледаме случаите кои може да се појават.

Со $\{U<V\}$ да го означиме настанот дека при фрлање на коцките U и V на коцката U ќе падне помал број отколку на коцката V. Овој настаната се реализира ако на коцката U падне единица, а на коцката V падне кој било број или ако на коцката U падне петка и на коцката V падне шестка. Лесно се проверува дека во случајов имаме

$$P\{U < V\} = \frac{3\cdot 6+3\cdot 2}{36} = \frac{2}{3}.$$

Според тоа, ако играчите ги избрале коцките U и V, тогаш со двапати поголема веројатност победува играчот кој ја избрал коцката V. Аналогно се покажува дека важат веројатностите

$$P\{V < W\} = \frac{2}{3}, \quad P\{W < X\} = \frac{2}{3}, \quad P\{X < U\} = \frac{2}{3}.$$

Според тоа, која било коцка да ја избере играчот A, играчот B секогаш може да избере коцка која му овозможува да победи со двапати поголема веројатност. Значи, играчот B е во поповолна положба од играчот A. ♦

ЗАДАЧИ

1. Пресметајте го збирот $\sum_{m=0}^{n-1} C_n^m C_{n-1}^m$.
2. Докажете дека за $n \geq 2$ важи:
   a) $\sum_{k=1}^{n} kC_n^k = n2^{n-1},$
   b) $\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} kC_n^k = 0,$
   c) $\sum_{k=2}^{n} k(k-1)C_n^k = n(n-1)2^{n-2}$.
3. Во сад се наоѓаат 3 бели, 7 црвени и 8 безбојни по форма еднакви топчиња. Одеднаш, без гледање извлекуваме две топчиња. Колкава е веројатноста дека топчињата ќе бидат 1 бело и 1 црвено?
4. Без гледање во еден ред ставаме 5 бели, 4 црвени и 3 црни топчиња. Колкава е веројатноста дека на првите три места ќе имаме бели топчиња?
5. Од шпил кој содржи 32 карти (по 8 карти од секоја боја) случајно и одеднаш се избираат 10 карти. Колкава е веројатноста меѓу избраните карти да има 2 пика, 4 трефа, 3 каро и 1 срце?
6. Од a бели и b црни по форма еднакви топчиња одеднаш и без гледање избираме m топчиња. Колкава е веројатноста дека меѓу избраните топчиња имаме p бели и q црни?
7. Во една кутија има топчиња на коишто се запишани броевите 1,2,3,4,5 и 6. На случаен начин се извлекува едно топче, се забележува бројот и потоа се враќа во кутијата. Забележано е дека бројот k, $k = 2,3,4,5,6$ се јавува 2^{k-1} пати почесто од бројот 1. Пресметај ја веројатноста на настаните:
   a) извлечено е топче со непарен број;
   b) бројот запишан на извлеченото топче е делив со 3.
8. Лотарија се состои од 250 лозови и се добиваат вкупно 10 награди. Еден играч купил 10 лозови. Колкава е веројатноста на настаните:
   a) A: Играчот добил 2 награди,
   b) B: Играчот добил најмалку 4 награди,
   c) C: Играчот не добил ниту една награда.
9. Цифрите 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 се наредени во низа. Колкава е веројатноста дека цифрите 0 и 1 не се соседни?

10. Група од десет студенти, меѓу кои само двајца се познаваат, седат во еден ред. Најдете ја веројатноста дека студентите кои се познаваат седат еден до друг, ако:
    1) редот има 10 места, 2) редот има 12 места.

11. Хомогена монета се фрла се додека два пати последователно не се појави иста страна. Елементарен настан е варијација со повторување од елементите P и G во редоследот во кој тие се појавуваат. На секоја таква n -варијација и ја придружуваме веројатноста 2^{-n}. На исходите *PGPGPGPG...* и *GPGPGPGP...* им придружуваме веројатност нула. Пресметајте ја веројатноста дека експериментот ќе заврши после
    a) најмногу шест фрлања на монетата,
    b) непарен број фрлања на монетата.

12. n особи меѓу кои се и особите A и B се распоредуваат во редица на случаен начин. Колкава е веројатноста на настанот дека меѓу особите A и B ќе има точно r особи?

13. Фрламе n коцки за играње. Колкава е веројатноста на настанот дека ќе паднат n_1 единици, n_2 двојки, ..., n_6 шестки ($\sum_{i=1}^{6} n_i = n$)?

14. Што е поверојатно: дека при четири фрлања на коцка барем еднаш ќе падне шестка или дека при 24 фрлања на две коцки барем еднаш ќе паднат две шестки?

15. Коцка за играње се фрла се додека шестката не се појави двапати последователно. Резултатот од експериментот е варијација со повторување од цифрите 1, 2, 3, 4, 5, 6. На секоја таква n -варијација и придружуваме веројатност 6^{-n}. Пресметајте ја веројатноста на настанот
    a) експериментот завршува после точно n фрлања,
    b) експериментот завршува после најмногу n фрлања.

16. На полица се наоѓаат n парови чевли и од нив случајно одбираме $2r$ чевли ($2r < n$). Колкава е веројатноста дека меѓу избраните чевли:
    a) нема ниту еден пар,
    b) има точно еден пар чевли.

17. На една роденденска забава има k гости и ниту еден од гостите не е роден на 29. февруари. Да претпоставиме дека секој од можните 365^k распореди на родендените на гостите по датуми има веројатност 365^{-k}.
    a) Пресметајте ја веројатноста p_k на настанот дека меѓу гостите постојат двајца кои се родени во ист ден.
    b) Определете го бројот k за кој важи $p_k < 0{,}5 < p_{k+1}$.

18. Група од $2n$ момчиња и $2n$ девојчиња случајно се дели на две еднакви групи. Пресметајте ја веројатноста дека во двете групи има ист број момчиња и девојчиња?

19. Најдете ја веројатноста P_n на настанот, при фрлање на n коцки да паднат точно две шестки. За кој n веројатноста P_n е најголема?

20. Група од n стрелци гаѓа во m мети. Секој стрелец си одбира мета на случаен начин независно од другите стрелци. Колкава е веројатноста дека сите ќе гаѓаат
    a) во иста мета,
    b) во различни мети.

21. Случајно се избира еден елемент од развиениот облик на детерминанта од $n-$ти ред. Најдете ја веројатноста p_n дека избраниот елемент не содржи ниту еден елемент од главната дијагонала. Пресметајте $\lim_{n\to\infty} p_n$?

22. На лотарија N особи добиваат влезници за спортски натпревар нумерирани со броевите $1,2,...,N$. Првите три особи добиле карти со броеви x_1, x_2 и x_3. Колкава е веројатноста на настанот $\min\{x_1, x_2\} < x_3 < \max\{x_1, x_2\}$.

23. Меѓу првите $2n$ природни броеви без да гледаме избираме $2k-1$ броеви, при што $k \leq \frac{n+1}{2}$. Колкава е веројатноста, дека:
    1) меѓу избраните броеви најголемиот е еднаков на n,
    2) меѓу избраните броеви најмалиот е еднаков на n,
    3) меѓу избраните броеви средниот по големина е еднаков на n.

24. На случаен начин распределуваме r топчиња во n кутии. Нека претпоставиме дека топчињата се сите различни и дека секоја кутија може да прими произволно многу топчиња. Пресметајте ја веројатноста на настанот:
    a) во секоја од првите r кутии има точно по едно топче ($n \geq r$),
    b) во првата кутија има r_1 топчиња, во втората кутија има r_2 топчиња, ..., во $n-$тата кутија има r_n топчиња, каде $\sum_{i=1}^{n} r_i = r$,
    c) во првата кутија има r_1 топчиња, во втората кутија има r_2 топчиња, ..., во $n-$тата кутија има r_n топчиња, при што броевите $r_1, r_2, ..., r_n$ се меѓусебно различни и $\sum_{i=1}^{n} r_i = r$,
    d) меѓу $n-$те кутии ќе има n_0 кутии во кои нема ниту едно топче, n_1 кутии во кои има точно едно топче, ..., n_m кутии во кои има точно m топчиња, при што $\sum_{i=0}^{m} n_i = n$ и $\sum_{i=0}^{m} in_i = r$, $m \leq r$.

6. ГЕОМЕТРИСКА ВЕРОЈАТНОСТ

Класичната дефиниција на веројатност е применлива за простор со конечно многу елементарни настани и како што видовме таа има практично значење кога елементарните настани можеме да ги сметаме за еднак787веројатни. Но, еднакввоверојатни елементарни настани можеме да имаме и во случај кога тие се непребројливо многу. Така, во пример 11 просторот елементарни настани е

$$\Omega = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$$

и јасно сите тие се еднакввоверојатни. Последното е непосреден повод за да ја разгледаме следнава "модификација" на класичната дефиниција. Имено, ќе се откажеме од претпоставката за конечност на просторот од елементарни настани, но на соодветен начин ќе ја задржиме претпоставката за еднаква веројатност на елементарните настани.

Нека просторот Ω е непребројлив, но нека Ω може да се претстави со некоја геометриска фигура, на пример, со лак на некоја крива (постои, значи биекција меѓу точките од лакот AB и множеството Ω), цртеж 9. Да ја означиме должината на лакот AB со $|\Omega|$. Ако S е некој случаен настан (подмножество од Ω) што може да се претстави со дел од лакот AB, со $|S|$ ќе ја означиме должината на тој дел од лакот. Претпоставувајќи дека на настани што се претставени со подлаци од лакот AB со исти должини им соодветствуваат исти веројатности, веројатноста на настанот S ќе ја пресметаме со формулата

$$P(S)=\tfrac{|S|}{|\Omega|}\,. \qquad (1)$$

Цртеж 9

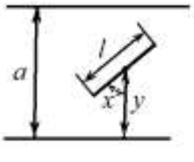
Оваа формула може да се искористи и кога Ω е област во Евклидовиот $n-$димензионален простор со конечен $n-$димензионален волумен (плоштина во рамнина, волумен во тридимензионален простор итн.). Настани ќе ги наречеме подмножествата од Ω, за кои може да се определи $n-$димензионалниот волумен. За алгебра настани ја земаме $\sigma-$алгебрата $\boldsymbol{B}$ од Борелови подмножества на Ω. Во овој случај $|\Omega|$ и $|S|$ ќе ги означуваат n-димензионалните волумени на S и Ω (плоштините во рамнината и волумените на соодветните фигури во тридимензионалниот простор на соодветните фигури). За вака определената веројатност ќе велиме дека е *геометриска веројатност* и соодветниот простор на веројатности ќе го означиме со $(\Omega,\boldsymbol{B},P)$ каде веројатноста P е определена со (1). Овој простор на веројатности е модел на задача, во која честичка случајно паѓа во област Ω и притоа претпоставуваме дека нејзината положба е рамномерно распределена во таа област, т.е. веројатноста честичката да падне во областа S е пропорционална со $n-$димензионалниот волумен на таа област.

Пример 28. Во внатрешноста на квадрат со страна a случајно е избрана точка. Колкава е веројатноста растојанието од таа точка до центарот на квадратот да не е поголемо од $\frac{a}{4}$?

Решение. Со A да го означиме настанот: растојанието од избраната точка до центарот на квадратот не е поголемо од $\frac{a}{4}$. Очигледно овој настан се реализира ако и само ако точката лежи во круг со радиус $\frac{a}{4}$ и центар во центарот на квадратот. Значи, $|A|=\pi(\frac{a}{4})^2=\frac{\pi a^2}{16}$. Но, $|\Omega|=a^2$, па затоа

$$P(A)=\tfrac{|A|}{|\Omega|}=\tfrac{\pi}{16}\,. \ ♦$$

Пример 29 (Бифонов проблем на игла). На рамнина, поделена со паралелни прави, кои се наоѓаат на растојание a една од друга, случајно се фрла игла со должина $l<a$. Определете ја веројатноста иглата да сече која било од паралелните прави.



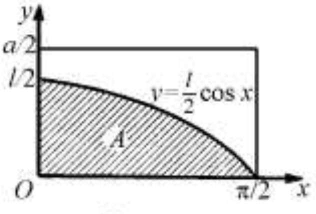
Цртеж 10

Решение. Со y да го означиме растојанието од средината на иглата до поблиската права, а со x да го означиме остриот агол меѓу иглата и нормалата на паралелните прави (цртеж 10).

Координатите (x, y) кои ја определуваат положбата на иглата во однос на паралелните прави ги задоволуваат условите

$$0 \le x \le \tfrac{\pi}{2}, 0 \le y \le \tfrac{a}{2}.$$

На рамнината (x, y) тие образуваат правоаголник Ω. Ако точката (x, y) падне во штрафираната област



Цртеж 11

$$A = \{(x, y) \mid 0 \le x \le \tfrac{\pi}{2}, 0 \le y \le \tfrac{a}{2}, y \le \tfrac{l}{2}\cos x\}$$

(цртеж 11), тогаш иглата се сече со една од паралелните прави. Ако ја искористиме формулата (1) за бараната веројатност наоѓаме

$$\frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{l}{2}\cos x dx}{\frac{a}{2} \cdot \frac{\pi}{2}} = \frac{2l}{a\pi}. \ \blacklozenge$$

Пример 30. Определете ја веројатноста дека збирот на два случајно избрани позитивни броја кои се помали од 1 да биде помал од 1, а нивниот производ да биде помал од $\frac{2}{9}$.

Решение. Јасно просторот елементарните настани ќе биде единичниот квадрат $\Omega = \{(x, y)\vdots\, 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$. Ги конструираме хиперболата $xy = \frac{2}{9}$ и правата $x + y = 1$. Поволно е кога точката (x, y) паѓа во областа

$$\Omega \cap \{(x, y) \mid \ x + y < 1, xy < \tfrac{2}{9}\}.$$

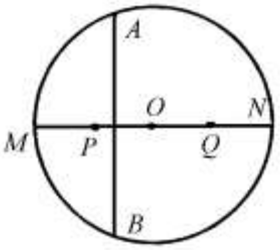
Пресеците на правата и хиперболата се точките $A(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ и $B(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ и како плоштината на квадратот е 1, за бараната веројатност добиваме

$$P = \int\limits_0^{\frac{1}{3}} (1 - x)dx + \int\limits_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{2dx}{9x} + \int\limits_{\frac{2}{3}}^{1} (1 - x)dx = \frac{1}{3} + \frac{2}{9}\ln 2. \ \blacklozenge$$

Пример 31 (Бертранов парадокс). Да претпоставиме дека “случајно избираме” тетива во круг со радиус 1. Колкава е “веројатноста” на настанот: растојанието од центарот на кругот до “случајно избраната” тетива да не е поголемо од $\frac{1}{2}$?

Прво да го забележиме следново: Ако сакаме да дадеме одговор на поставеното прашање, тогаш треба задачата коректно да ја формулираме, т.е. да прецизираме што подразбираме под “случаен избор” и како ја дефинираме “веројатност.” Ќе разгледаме неколку можности.

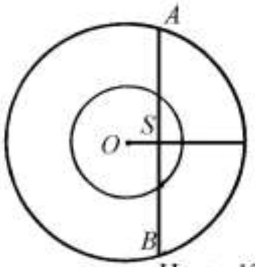
а) Нека O е центар на круг со круг со радиус 1, MN е дијаметар на кругот, а P и Q се средините на отсечките OM и ON, соодветно. Под “случаен избор” на



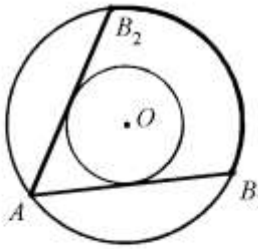
Цртеж 12

тетива на дадениот круг ќе подразбираме избор на тетива AB која е нормална на дијаметарот MN. Растојанието од точката O до тетивата AB не е поголемо од $\frac{1}{2}$ ако и само ако пресекот S на тетивата AB и дијаметарот MN припаѓа на отсечката PQ, цртеж 12. Понатаму, ако веројатноста ја дефинираме како количник на должината на отсечката PQ и должината на отсечката MN, добиваме дека бараната веројатност е $\frac{1}{2}$.

б) Под “случаен избор” го подразбираме изборот на средината S на тетивата во внатрешноста на дадениот круг. Центарот на кругот е на растојание не поголемо од $\frac{1}{2}$ од случајно избраната тетива ако и само ако точката S припаѓа на круг со радиус $\frac{1}{2}$ кој е концентричен со дадениот круг, цртеж 13. Овој круг да го наречеме поволен. “Веројатноста” која не интересира ја дефинираме како количник на плоштините на поволниот и дадениот круг и истата е еднаква на $\frac{\pi(\frac{1}{2})^2}{\pi \cdot 1^2} = \frac{1}{4}$.



Цртеж 13



Цртеж 14

в) Нека се A, B_1 и B_2 точки на граничната кружница $k(O,1)$ на дадениот круг, кои ја делат кружницата на три еднакви делови, цртеж 14. Да претпоставиме дека едниот крај на тетивата е фиксиран и нека тоа е точката A. Под “случаен избор” на тетивата го подразбираме изборот на другиот крај на тетивата на кружницата $k(O,1)$. Во тој случај растојанието од центарот на кругот до случајно избрана тетива не е поголемо од $\frac{1}{2}$ ако и само ако другиот крај на тетивата припаѓа на “поволниот лак” B_1B_2 кој не ја содржи точката A. “Веројатноста” која не интересира ја дефинираме како количник на должината на поволниот лак и целата кружница $k(O,1)$ и добиваме дека таа е еднаква на $\frac{\frac{2\pi}{3}}{2\pi} = \frac{1}{3}$. ♦

Пример 32. Од интервалот [0,1] случајно и независно еден од друг се избираат броевите x, y и z. Колкава е веројатноста за избраните броеви да важи неравенството

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1.$$

Решение. Очигледно задачата можеме да ја преформулираме на следниов начин:

Во единечна коцка случајно се фрла точка. Колкава е веројатноста точката да падне во топката која е впишана во коцката?

Понатаму, бидејќи волуменот на коцката е еднаков на 1, а волуменот на впишаната топка е еднаков на $\frac{4}{3}(\frac{1}{2})^3\pi$, добиваме дека бараната веројатност е $\frac{\pi}{6}$. ♦

Пример 33. Веројатноста дека во три независни фрлања на хомогена монета паднат три грба е еднаква на $\frac{1}{8}$. До овој резултат можеме да дојдеме на следниов начин.

Да претпоставиме дека се реализира низа независни фрлања на хомогена монета. Со 0 да ја означиме појавата на грб, а со 1 појавата на писмо. Резултатот од експериментот е низата $\{x_i\}$, каде

$$x_i = 0 \text{ или } 1, \text{ за } i = 1,2,3,\dots .$$

На секоја ваква низа можеме да и придружиме број во бинарен запис:

$$X = 0, x_1 x_2 x_3 x_4 \dots x_n \dots \in [0,1].$$

Настанот дека во првите три фрлања на монетата паднал грб можеме да го запишеме на следниов начин: $\{x_1 = x_2 = x_3 = 0\}$. Ако $X \in [0, \frac{1}{8})$, тогаш првите три цифри во бинарниот запис на бројот X се еднакви на нула. Јасно, ако првите три цифри во бинарниот запис на бројот X се еднакви на нула, тогаш $X \in [0, \frac{1}{8}]$, (бројот $\frac{1}{8}$ има два бинарни записи $X = 0,00100\dots = 0,000111\dots$). Понатаму, ако сметаме дека случајниот број X има рамномерна распределба на интервалот $[0,1]$, добиваме дека веројатноста на настанот во првите три фрлања да паднат три грба е еднаква на $\frac{1}{8}$. ♦

ЗАДАЧИ

1. Една хала на саемот за книги е отворена од 8 до 20 часот. Посетител влегува во салата во случаен момент X, а излегува од салата во случаен момент Y. Неговото време на задржување во халата е случајно.
   a) Најдете ја веројатноста дека посетителот ќе се задржи во салата помалку од 2 часа.
   b) Најдете ја веројатноста дека посетителот ќе се задржи во салата повеќе од 2 часа, а помалку од 4 часа.
   c) Најдете ја веројатноста дека посетителот дошол во халата пред моментот t_1, од неа излегол после моментот $t_2, t_1 < t_2$.
2. Колкава е веројатноста да за случајно избран агол α од интервалот $[0, 2\pi]$ важи релацијата $\frac{1}{2} \le \sin\alpha \le \frac{\sqrt{3}}{2}$?
3. На интервалот $[0, d]$ случајно и независно се избрани броевите a, b и c. Колкава е веројатноста дека избраните броеви се должини на страни на триаголник?
4. На отсечка со должина 1 случајно и независно се избрани три точки. Колкава е веројатноста на настанот третата избрана точка да лежи меѓу првите две?
5. На интервалот $[0,1]$ случајно и независно се избрани броеви a и b. Колкава е веројатноста дека квадратната равенка $x^2 + ax + b = 0$ има две реални решенија?
6. Колкава е веројатноста корените на равенката $x^2 + 2ax + b = 0$ да се реални ако коефициентите a и b се избираат случајно и независно од интервалите $[-3,3]$ и $[-12,12]$, соодветно?
7. На интервалот $[-1,1]$ случајно и независно се избрани броеви a и b. Пресметајте ја веројатноста дека полиномот $q(x) = \frac{1}{3}x^3 - a^2 x + b$ има точно k, $k \in \{0,1,2,3\}$ реални нули.

8. На бесконечна шаховска табла со должина на страна на квадратчињата еднаква на a паѓа монета со радиус $r, 2r < a$. Пресметајте ја веројатноста p_k дека монетата има заеднички точки со k точно квадрати, $k = 1, 2, 3, 4$.
9. Рамнината е поделена со паралелни прави при што растојанијата меѓу паралелните прави наизменично се менуваат и тие се еднакви на a и b. На рамнината случајно паѓа игла со должина l, $l < \min\{a, b\}$. Користејќи го решението на пример 28 и формулата за полна веројатност, најдете ја веројатноста дека иглата пресекува една од тие прави.
10. Во единичен квадрат е впишана кружница со што квадратот е поделен на пет делови. Во квадрат случајно паѓаат 6 честички. Најдете ја веројатноста дека на секој од петте делови во квадратот се наоѓа барем по една честичка.
11. Колкава е веројатноста дека случајно избрана точка во правоаголен триаголник ABC е поблиску до хипотенузата отколку до катетите?
12. Колкава е веројатноста дека случајно избрана точка во квадратот е поблиску до една од дијагоналите отколку до страните на квадратот?
13. Во рамнокрак триаголник со основа a и висина над основата h впишан е квадрат. Колкава е веројатноста дека случајно избрана точка во триаголникот нема да лежи во квадратот?
14. Во круг со радиус r се повлекуваат тетиви паралелно со дадена права. Колкава е веројатноста дека должината на произволно избрана тетива нема да биде поголема од r ?
15. На кружница со радиус r случајно се избираат три точки A, B и C. Колкава е веројатноста дека триаголникот ABC е остроаголен?
16. Колкава треба да биде дебелината на работ на монета, за да веројатноста монетата да падне на раб е $\frac{1}{3}$?
17. Случајно се избира точка во правоаголник чиј однос на страните е $a : b = 1 : \sqrt{3}$. Најдете ја веројатноста растојанието од избраната точка до најблиската страна да е помало од растојанието од таа точка до поблиската дијагонала.

7. УСЛОВНА ВЕРОЈАТНОСТ. ТЕОРЕМА ЗА МНОЖЕЊЕ

Нека при N експерименти настаните A, B и AB се реализирале со честоти $N(A), N(B) \neq 0$ и $N(AB)$, соодветно. Количникот $\frac{N(AB)}{N(B)}$ го нарекуваме *релативна условна честота* на настанот A, при услов дека настапил настанот B. Ако ја земеме предвид стабилноста на релативната честота

$$\frac{N(A)}{N} \approx P(A), \ \frac{N(B)}{N} \approx P(B), \ \frac{N(AB)}{N} \approx P(AB)$$

и како $P(B) > 0$, тогаш за релативната условна честота добиваме

$$\frac{N(AB)}{N(B)} = \frac{\frac{N(AB)}{N}}{\frac{N(B)}{N}} \approx \frac{P(AB)}{P(B)}, \tag{1}$$

што значи дека таа е стабилна.

Пример 34. Во едно одделение има 22 ученици и тоа 13 момчиња и 9 девојчиња. Притоа одлична оценка по математика имаат 6 момчиња и 4 девојчиња. Нека случајно се избира еден ученик, при што за сите ученици веројатноста да бидат избрани е еднаква. Веројатноста на настанот A дека е избрано девојче е $P(A)=\frac{9}{22}$, веројатноста на настанот B дека избраниот ученик има одлична оценка е $P(B)=\frac{10}{22}$, а веројатноста дека е избрано девојче која има одлична оценка по математика е $P(AB)=\frac{4}{22}$. Сега да претпоставиме дека е познато дека е избрано девојче и сакаме да дадеме одговор на прашањето колкава е веројатност дека избраниот ученик има одлична оценка по математика. Во случајот бројот на можните исходи е 9, а бројот на поволните исходи е 4. Природно е да сметаме дека сите можни исходи се еднаквоверојатни, т.е. дека под претпоставка да се реализирал настанот A веројатноста да се реализирал и настанот B е еднаква на

$$\frac{4}{9}=\frac{\frac{4}{22}}{\frac{9}{22}}=\frac{P(AB)}{P(A)}\,. \blacklozenge$$

Релацијата (1) и пример 27 нé доведуваат до следнава природна дефиниција.

Дефиниција 23. Нека $P(A)>0$. *Условна веројатност* $P(B\,|\,A)$ на настанот B при услов дека се реализирал настанот A, го нарекуваме количникот

$$P(B\,|\,A)=\frac{P(AB)}{P(A)}\,. \tag{2}$$

Во литературата за условната веројатност $P(B\,|\,A)$ се користи и ознаката $P_A(B)$, која ние воглавно ќе ја користиме во нашите разгледувања.

Пример 35. Хомогена коцка за играње се фрла два пати. Нека A е настанот дека двата пати паднал број поголем од 3, т.е.

$$A=\{44,45,46,54,55,56,64,65,66\}.$$

Условната веројатност на настанот B, дека збирот на паднатите броеви е парен, при услов дека и двата пати паднал број поголем од 3, е

$$P(B\,|\,A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{5}{36}}{\frac{9}{36}}=\frac{5}{9}\,. \blacklozenge$$

Пример 36. Хомогена монета се фрла три пати. Ако во првото фрлање паднало писмо, колкава е веројатноста дека паднале барем две писма?

Решение. Просторот елементарни настани е множеството

$$\Omega=\{PPP, PPG, PGP, GPP, PGG, GPG, GGP, GGG\}$$

и притоа секој елементарен настан има веројатност $\frac{1}{8}$. Со A да го означиме настанот дека во првото фрлање паднало писмо, а со B настанот дека паднале барем две писма. Тогаш,

$$A=\{PPP, PPG, PGP, PGG\},$$

$$B=\{PPP, PPG, PGP, GPP\},$$
$$AB=\{PPP, PPG, PGP\}.$$

Според тоа, $P(A)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$, $P(AB)=\frac{3}{8}$, па затоа $P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{3}{8}}{\frac{1}{2}}=\frac{3}{4}$. ♦

Пример 37. Докажи дека ако A е произволен настан, а настанот B е таков што $P(B)\neq 0$, тогаш $P_B(A)\geq 1-\frac{P(\overline{A})}{P(B)}$.

Решение. Од дефиницијата на условната веројатност имаме

$$P_B(A)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A)+P(B)-P(A+B)}{P(B)}=1-\frac{P(A+B)-P(A)}{P(B)}\geq 1-\frac{1-P(A)}{P(B)}=1-\frac{P(\overline{A})}{P(B)}. \ ♦$$

Забелешка 14. Формулата (2) ја запишуваме во видот

$$P(AB)=P(B)P_B(A), \tag{3}$$

и добиеното равенство ќе го наречеме *теорема за множење*. На прв поглед изгледа сосема непотребно равенството (3), но овде да забележиме дека често пати условната веројатност $P_B(A)$ можеме да ја пресметаме директно, па затоа формулата (3) можеме да ја искористиме за пресметување на веројатноста $P(AB)$ со помош на веројатностите $P_B(A)$ и $P(B)$, како што може да се види од следниов пример.

Пример 38. а) Од еден шпил од 52 карти на произволен начин се извлечени две карти, една по друга без враќање. Пресметајте ја веројатноста и двете карти да се асови.

б) Во кутија се наоѓаат M бели и $N-M$ црни топчиња. Со влечење без враќање се избираат две топчиња. Пресметајте ја веројатноста и двете топчиња да се бели.

Решение. а) Ги разгледуваме настаните

$A=\{$првиот пат е извлечен ас$\}$ и $B=\{$вториот пат е извлечен ас$\}$.

Тогаш, $P(A)=\frac{4}{52}$ и $P_A(B)=\frac{3}{51}$ и ако ја искористиме формулата (3) за бараната веројатност наоѓаме

$$P(AB)=P(A)P_A(B)=\frac{4}{52}\cdot\frac{3}{51}=\frac{1}{221}.$$

б) Аналогно, како во решението на задачата под а) за бараната веројатност имаме $\frac{M(M-1)}{N(N-1)}$. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ♦

Теорема 12 (теорема за множење). Нека настаните $A_1,\ldots,A_n$ се такви што $P(A_1\ldots A_{n-1})>0$. Тогаш:

$$P(A_1\ldots A_n)=P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1A_2}(A_3)\ldots P_{A_1\ldots A_{n-1}}(A_n)\ . \tag{4}$$

Доказ. Од условот на теоремата следува дека постојат сите условни веројатности во (4). Тврдењето ќе го докажеме со индукција по n.

За $n=2$ тврдењето непосредно следува од равенството (3) при $A=A_2$ и $B=A_1$.

Нека претпоставиме дека тврдењето важи за $n=k-1$, т.е. дека

$$P(A_1...A_{k-1})=P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1A_2}(A_3)...P_{A_1...A_{k-2}}(A_{k-1}).$$

За $n=k$, при $B=A_1...A_{k-1}$ и $A=A_k$ од (3) и од индуктивната претпоставка последователно добиваме:

$$\begin{aligned}P(A_1...A_{k-1}A_k)&=P(A_1...A_{k-1})P_{A_1...A_{k-1}}(A_k)\\&=P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1A_2}(A_3)...P_{A_1...A_{k-2}}(A_{k-1})P_{A_1...A_{k-1}}(A_k)\end{aligned}$$

т.е. тврдењето важи за $n=k$, па од принципот на математичка индукција следува дека важи за секој природен број n. ♦

Забелешка 15. Нека B е фиксиран настан од некој простор на веројатности $(\Omega,\boldsymbol{A},P)$. Тогаш условната веројатност $P_B(A)$, $A\in\boldsymbol{A}$, разгледувана како функција P_B од настаните $A\in\boldsymbol{A}$, определува нов простор на веројатности $(\Omega,\boldsymbol{A},P_B)$, т.е. точна е следнава теорема.

Теорема 13. Нека $P(B)>0$. Тогаш важи:

а) $P_B(\Omega)=1,\ P_B(B)=1,\ P_B(\varnothing)=0$,

б) ако $B\subset A$, тогаш $P_B(A)=1$,

в) ако $A_1A_2=\varnothing$, тогаш $P_B(A_1+A_2)=P_B(A_1)+P_B(A_2)$,

г) $P_B(\overline{A})=1-P_B(A)$, за секој $A\in\boldsymbol{A}$,

д) ако $A_1\supseteq A_2\supseteq A_3\supseteq...$ и $\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i=\varnothing$, тогаш $\lim_{n\to\infty}P_B(A_n)=0$

Доказ. а) Имаме

$$P_B(\Omega)=\frac{P(\Omega B)}{P(B)}=\frac{P(B)}{P(B)}=1,\ P_B(B)=\frac{P(BB)}{P(B)}=\frac{P(B)}{P(B)}=1 \text{ и}$$

$$P_B(\varnothing)=\frac{P(\varnothing B)}{P(B)}=\frac{P(\varnothing)}{P(B)}=\frac{0}{P(B)}=0.$$

б) Ако $B\subset A$, тогаш $AB=B$, па затоа $P_B(A)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(B)}{P(B)}=1$.

в) Ако $A_1A_2=\varnothing$, тогаш $(A_1B)(A_2B)=\varnothing$, па затоа

$$\begin{aligned}P_B(A_1+A_2)&=\frac{P(A_1B+A_2B)}{P(B)}=\frac{P(A_1B)}{P(B)}+\frac{P(A_2B)}{P(B)}\\&=P_B(A_1)+P_B(A_2)\end{aligned}.$$

г) Од $\Omega=\overline{A}\cup A,\ \overline{A}A=\varnothing$ и својствата а) и в) следува:

$$1 = P_B(\Omega) = P_B(\bar{A} \cup A) = P_B(\bar{A}) + P_B(A)\text{, т.е. } P_B(\bar{A}) = 1 - P_B(A)\,.$$

д) Од $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq A_4 \supseteq \ldots$ и $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i = \varnothing$ следува $A_1 B \supseteq A_2 B \supseteq A_3 B \supseteq \ldots$ и $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i B = \varnothing$, па затоа $\lim\limits_{n\to\infty} P(BA_n) = 0$, односно $\lim\limits_{n\to\infty} P_B(A_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{P(BA_n)}{P(B)} = 0$. ♦

Пример 39. Хомогена коцка за играње се фрла два пати. Просторот елементарни настани се состои од 36 еднакво веројатни настани (варијации со повторување од втора класа од 6 елементи). Ако паднал барем еден парен број, пресметај ја веројатноста на настанот дека паднал и непарен број.

Решение. Нека A е настанот дека паднал барем еден парен број, а B е настанот дека во двете фрлања паднал парен број. Тогаш

$$A = \Omega \setminus \{11, 13, 15, 31, 33, 35, 51, 53, 55\},\quad B = \{22, 24, 26, 42, 44, 46, 62, 64, 66\} = AB\,.$$

Од теорема 9 г) следува

$$P_A(\bar{B}) = 1 - P_A(B) = 1 - \frac{P(AB)}{P(A)} = 1 - \frac{\frac{9}{36}}{\frac{27}{36}} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}\,.\ ♦$$

ЗАДАЧИ

1. За настаните A и B важи: $P(A) = P(B)$, $P_B(A) = 2P_{\bar{B}}(A)$ и $P(\overline{AB}) = \frac{1}{3}$. Пресметајте

   $$P(A) \text{ и } P_A(B)\,.$$

2. Нека A, B и C се настани кои можат да се реализираат при некој експеримент. Познато е дека:

   $$P(A) \neq 0 \neq P(C),\ P(AB\bar{C}) = 0{,}1,$$
   $$3P_A(B) = 2P_A(C),\ P_C(A) = 2P_C(B) \text{ и}$$
   $$P(A+B) + P(A+C) = P(B+C) + 2P(A) - 0{,}7\,.$$

   Пресметајте ги веројатностите на настаните $\bar{A}BC$ и $A\bar{B}C$.

3. Нека A и B се дисјунктни настани, такви што $P(A \cup B) \neq 0$. Докажете дека:

   $$P_{A\cup B}(A) = \frac{P(A)}{P(A)+P(B)}\,.$$

4. Ако B_1, B_2 и A се произволни настани и $P(A) > 0$, докажете дека:

   $$P_A(B_1 \cup B_2) = P_A(B_1) + P_A(B_2) - P_A(B_1 B_2)\,.$$

5. Настаните A и B се дисјунктни и притоа важи $P(A) = 0{,}3$ и $P(B) = 0{,}2$. Пресметајте ги веројатностите:

   $$P(\bar{A}),\ P(\bar{B}),\ P(A \cup B),\ P_B(A) \text{ и } P_A(B)\,.$$

6. За настаните A и B е познато дека: $P(A) = 0{,}30$, $P(B) = 0{,}75$ и $P(AB) = 0{,}25$. Пресметајте ги веројатностите:

   $$P(\bar{A}),\ P(\bar{B}),\ P(A \cup B),\ P(\bar{A}\bar{B}),\ P_B(A) \text{ и } P_A(B)\,.$$

7. Во кутија се наоѓаат n топчиња означени со броевите од 1 до n. Од кутијата на случаен начин се извлекува прво едно, а потоа друго топче. Ако првото извлечено топче е озна-

чено со бројот 1, тогаш не го враќаме во кутијата, а во спротивен случај го враќаме. Колкава е веројатноста дека второто извлечено топче ќе биде означено со бројот 2?

8. Три играчи A, B и C играат шаховски турнир. Првата партија ја играат A и B, а C е слободен. Секоја следна партија се игра меѓу победникот и слободниот играч од претходната партија. Турнирот се завршува со победа на оној играч кој прв последователно ќе победи во две партии. На секој можен настан турнирот да трае n партии му придружуваме веројатност $\frac{1}{2^n}$, а на елементарните настани дека турнирот нема никогаш да заврши им придружуваме веројатност нула. Пресметајте ја веројатноста за победа на турнирот на секој од играчите A, B и C.

9. Хомогена коцка за играње се фрла се додека не паднат сите шест страни барем по еднаш. Пресметајте ја веројатноста на настанот дека ќе бидат реализирани точно n фрлања.

10. Од кутија во која се наоѓаат n топчиња означени со броевите од 1 до n, $n \geq 5$, без враќање се извлекуваат едно по едно топче. Најдете ги веројатностите на настаните:
    1) Во третото извлекување се извлекува топчето со реден број 2.
    2) Во второто извлекување се извлекува топчето со реден број 1, а во петтото извлекување топчето со реден број 4.
    3) Во k извлекувања, ($k \leq n$), броевите на извлечените топчиња да се поклопат со редните броеви на извлекувањата.

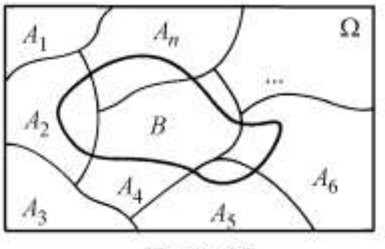
8. ПОЛНА ВЕРОЈАТНОСТ. ФОРМУЛИ НА БАЈЕС

Теорема 14 (формула за полна веројатност). Ако $A_i, i = 1, ..., n$ е разбивање на Ω и $P(A_i) > 0$, за секој $i = 1, 2, ..., n$, тогаш за секој настан B важи

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) P_{A_i}(B). \tag{1}$$

Доказ. Од тоа што $A_i, i = 1, ..., n$ е разбивање на Ω, следува разложувањето на B на збир $\sum_{i=1}^{n} BA_i = B$ на по парови дисјунктни настани цртеж 15. Затоа

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(BA_i).$$



Цртеж 15

Конечно, ако на собирците $P(BA_i)$ ја примениме теоремата за множење го добиваме равенството (1). ♦

Пример 40. а) Во една кутија има две бели и три црни топчиња, а во друга четири бели и три црни топчиња. Ако случајно се избере една кутија и од неа се извлече едно топче, најдете ја веројатноста дека извлеченото топче е црно. (Со еднаква веројатност се избира било која кутија.)

б) Колкава е веројатноста дека сите m случајно земени сијалици, од складиште кое содржи n сијалици, се исправни, ако се знае дека бројот на неисправните сијалици меѓу 0 и r е со еднаква веројатност, т.е. може да има $0,1,...,r$ неисправни сијалици, соодветно?

Решение. а) Нека со A го означиме настанот: избрано е црно топче, а со B_1 и B_2 ги означиме настаните избрана е првата и избрана е втората кутија, соодветно. Тогаш, $P(B_1)=P(B_2)=\frac{1}{2}$, па затоа од теорема 14 следува

$$P(A)=P(B_1)P_{B_1}(A)+P(B_2)P_{B_2}(A)=\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{5}+\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{7}=\tfrac{18}{35}\,.$$

Забелешка. *Ако топчињата од двете кутии ги ставиме во една, тогаш веројатноста дека ќе извлечеме црно топче е* $p^*=\frac{3+3}{5+7}=\frac{1}{2}$.

б) Да ги разгледаме настаните:

$A=\{$сите извлечени сијалици се исправни$\}$ и

$B_k=\{$меѓу n сијалици има k неисправни$\}$, $k=0,1,2,...,r$.

Тогаш, од (1) следува

$$P(A)=P(\sum_{i=0}^{r}AB_i)=\sum_{i=0}^{r}P(B_i)P_{B_i}(A)=\sum_{i=0}^{r}\frac{1}{r+1}P_{B_i}(A)=\frac{1}{r+1}\sum_{i=0}^{r}\frac{\binom{n-i}{m}}{\binom{n}{m}}\,.\ \blacklozenge$$

Пример 41. Професорот подготвил десет испитни ливчиња. Секој од двајцата студенти ги знае одговорите на прашањата од осум (не обавезно исти осум испитни ливчиња). Ваквите ливчиња ги нарекуваме добри. Студентите испитот го полагаат така што избираат по едно испитно ливче, еден по друг, без враќање.

а) Колкава е веројатноста првиот студент да избере добро ливче?
b) Колкава е веројатноста вториот студент да избере добро ливче?

Решение. а) Јасно е дека веројатноста првиот студент да избере добро ливче е $\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$.

б) Со A_1 да го означиме настанот првиот студент да избере ливче кое е добро за вториот, со A_2 настанот првиот студент да избере ливче кое не е добро за вториот и со B настанот вториот студент да избере добро ливче. Тогаш,

$$P(A_1)=\tfrac{8}{10},\ P_{A_1}(B)=\tfrac{7}{9},\ P(A_2)=\tfrac{2}{10}\ \text{и}\ P_{A_2}(B)=\tfrac{8}{9}\,.$$

Ако ја искористиме формулата (1) добиваме:

$$P(B)=P(A_1)P_{A_1}(B)+P(A_2)P_{A_2}(B)=\tfrac{8}{10}\bullet\tfrac{7}{9}+\tfrac{2}{10}\bullet\tfrac{8}{9}=\tfrac{72}{90}=\tfrac{4}{5}\,.\ \blacklozenge$$

Теорема 15. Ако $A_i, i=1,2,...,n$ е разбивање на Ω, $P(A_i)>0$, за секој $i=1,2,...,n$ и $P(B)>0$, тогаш

$$P_B(A_i)=\frac{P(A_i)P_{A_i}(B)}{\sum\limits_{j=1}^{n}P(A_j)P_{A_j}(B)},\quad i=1,2,...,n\,. \tag{2}$$

Формулите (2) во литературата се познати како *Бајесови формули.*

Доказ. Од теоремата за множење имаме

$$P(A_iB)=P(A_i)P_{A_i}(B)=P(B)P_B(A_i)\,,\ i=1,2,...,n$$

па затоа

$$P_B(A_i)=\frac{P(A_i)P_{A_i}(B)}{P(B)}\,,\ i=1,2,...,n\,.$$

Ако во последните равенства ја примениме формулата за полна веројатност (1) ги добиваме формулите (2). ♦

Коментар 1. Бајесовите формули можеме да ги интерпретираме на следниот начин. Да ги наречеме настаните A_i хипотези. Нека настанот B е некој резултат од некој експеримент. Веројатноста $P(A_i)$ е *априорна веројатност*, пресметана до спроведување на експериментот, а условната веројатност $P_B(A_i)$ е *апостериорна веројатност* на хипотезата, пресметана после спроведување на експериметот, кога станал познат резултатот на експериментот B. Бејесовите формули овозможуваат со априорните веројатности на хипотезите и условните веројатности на настанот B при хипотези A_i да се пресметаат апостериорните веројатности $P_B(A_i)$.

Пример 42. Во кутија се наоѓаат m бели и n црни топчиња. Од кутијата е загубено едно топче со непозната боја. За да се констатира бојата на загубеното топче од кутијата одеднаш се извлекуваат неколку топчиња. Најдете ја веројатноста дека загубеното топче има бела боја, ако при извлекувањето е добиено:

а) две бели и едно црно топче,
б) $m-2$ бели и $n-1$ црни топче.

Решение. Дефинираме настани:

H_1 - загубено е бело топче, H_2 - загубено е црно топче,
A - извлечени се две бели и едно црно топче, и
B - извлечени се $m-2$ бели и $n-1$ црни топче.

Бидејќи H_1, H_2 е разбивање на Ω со помош на Бајесовите формули можеме да ги определиме веројатностите $P_A(H_1)$ и $P_B(H_1)$.

а) Имаме

$$P(H_1)=\frac{m}{m+n},\ P(H_2)=\frac{n}{m+n},\ P_{H_1}(A)=\frac{C_{m-1}^2C_n^1}{C_{m-1+n}^3},\ P_{H_2}(A)=\frac{C_m^2C_{n-1}^1}{C_{m-1+n}^3}$$

и ако ги искористиме Бајесовите формули добиваме

$$P_A(H_1)=\frac{P(H_1)P_{H_1}(A)}{P(H_1)P_{H_1}(A)+P(H_2)P_{H_2}(A)}=\frac{\frac{m}{m+n}\frac{C_{m-1}^2C_n^1}{C_{m-1+n}^3}}{\frac{m}{m+n}\frac{C_{m-1}^2C_n^1}{C_{m-1+n}^3}+\frac{n}{m+n}\frac{C_m^2C_{n-1}^1}{C_{m-1+n}^3}}=\frac{m-2}{m+n-3}.$$

б) Имаме

$$P(H_1)=\frac{m}{m+n},\ P(H_2)=\frac{n}{m+n},\ P_{H_1}(B)=\frac{C_{m-1}^{m-2}C_n^{n-1}}{C_{m-1+n}^{m+n-3}},\ P_{H_2}(B)=\frac{C_{m-1}^{m-2}C_{n-1}^{n-1}}{C_{m-1+n}^{m+n-3}}\ ,$$

и ако ги искористиме Бајесовите формули добиваме

$$P_B(H_1)=\frac{P(H_1)P_{H_1}(B)}{P(H_1)P_{H_1}(B)+P(H_2)P_{H_2}(B)}=\frac{\frac{m}{m+n}\frac{C_{m-1}^{m-2}C_n^{n-1}}{C_{m-1+n}^{m+n-3}}}{\frac{m}{m+n}\frac{C_{m-1}^{m-2}C_n^{n-1}}{C_{m-1+n}^{m+n-3}}+\frac{n}{m+n}\frac{C_{m-1}^{m-2}C_{n-1}^{n-1}}{C_{m-1+n}^{m+n-3}}}=\frac{2}{3}. \ \blacklozenge$$

Пример 43. Во сад имаме n топчиња, од кои определен број се бели. Можни се $n+1$ хипотези H_i, $i=0,1,2,...,n$, каде H_i е хипотезата дека во садот има точно i бели топчиња. Во недостаток на други информации можеме да претпоставиме, дека априорните веројатности се еднакви меѓу себе, т.е. дека

$$P(H_0)=P(H_1)=...=P(H_n)=\frac{1}{n+1}.$$

Од садот случајно е извлечено едно топче, кое е бело. Со B да го означиме настанот “случајно извлеченото топче од садот е бело” и да ги пресметаме веројатностите $P_B(H_k)$, $k=0,1,2,...,n$. Бидејќи $P_{H_i}(B)=\frac{i}{n}$ од Бејесовите формули добиваме

$$P_B(H_k)=\frac{\frac{1}{n+1}\bullet\frac{k}{n}}{\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{n+1}\bullet\frac{i}{n}}=\frac{2k}{n(n+1)}.$$

Според тоа, ако е извлечено бело топче, тогаш најверојатна е хипотезата H_n и за нејзината апостериорна веројатност имаме

$$P_B(H_n)=\frac{2}{n+1}=2P(H_n). \ \blacklozenge$$

ЗАДАЧИ

1. На испит се задаваат десет прашања. Студентот ќе положи ако знае точно да одговори на две произволно избрани прашања или ако точно одговори на едно од прашањата и потоа одговори и на третото поставено прашање. На колку прашања студентот треба да знае да одговори за да со веројатност поголема од 0,8 го положи испитот?
2. Во кутија се наоѓаат m бели и $n-m$ црни топчиња. Двајца играчи последователно извлекуваат топче од кутијата и враќаат топче со обратна боја. Играта ја добива играчот кој прв ќе извлече бело топче. Најдете ја веројатноста на настанот:
   a) играта ја добива играчот кој ја започнува,
   b) играта ја добива играчот кој извлекува втор.
3. Група од n студенти се јавува на испит и ги извлекува последователно и без враќање сите n испитни комбинации. Фиксиран студент е подготвен по k од сите n испитни комбинации и ја извлекува $i-$тата по ред комбинација. Најдете ја веројатноста тој студент да извлече комбинација за која е подготвен.
4. Тенисер во понеделникот имал четири некористени и пет користени тениски топчиња. Во вторникот случајно избрал три топчиња и ги користел. Во средата случајно одбрал и користел едно до тогаш некористено и едно користено топче. Колкава е веројатноста дека во четврток, бирајќи на случаен начин, ќе избере две неискористени топчиња?
5. 2^n играчи учествуваат во следната игра: играчите се делат во парови на случаен начин и играат 2^{n-1} утакмица, а веројатноста за победа на секој од нив е $\frac{1}{2}$. Во следното коло

2^{n-1}-те победници од првиот круг се делат на случаен начин во парови итн. Играта трае се додека не остане еден победник. Во играта учествуваат играчите A и B. Колкава е веројатноста играчите A и B да се сретнат како противници? Колкава е веројатноста играчите A и B да играат во финалето?

6. Во една група има a одлични, b просечни и c слаби студенти. Одличен студент на претстојниот испит може да добие само одлична оценка, просечниот со еднаква веројатност добива одлична или добра оценка, а слаб студент со еднаква веројатност добива добра, задоволителна или слаба оценка.
   i) На испитот случајно се повикува еден студент од спомнатата група. Колкава е веројатноста тој да добие одлична или добра оценка.
   ii) На испитот случајно се повикуваат два студента од споменатата група. Колкава е веројатноста еден од нив да добие добра, а другиот задоволителна оценка?
7. Во секоја од k кутии се наоѓаат m бели и n црни топчиња. Од првата кутија случајно се извлекува едно топче и се става во втората кутија. Потоа од втората кутија случајно се извлекува едно топче и се става во третата кутија итн. На крајот од последната кутија се извлекува едно топче. Пресметајте ја веројатноста извлеченото топче од последната кутија да биде црно.
8. Имаме m бели и n црни топчиња, $1 \leq m < n$. Во сад ги ставаме сите бели и $n-m$ црни топчиња. Најди експеримент, настани $A_k, k = 1, 2, ..., m$ и нивните веројатности, со кои ќе го докажеш идентитетот
$$\frac{n-m}{n} + \sum_{k=1}^{m} \frac{m(m-1)...(m-k+1)}{n^k} \cdot \frac{n-m+k}{n} = 1 .$$
9. Лотаријата има n лозови, од кои $m, m \leq n$ се добитни. Дали веројатноста за извлекување на наград за одделните играчи зависи од бројот на преостанатите купони?

9. НЕЗАВИСНИ НАСТАНИ, РАЗБИВАЊА, АЛГЕБРИ И $\sigma-$АЛГЕБРИ

Поимот независност на настани е еден од основните поими во теоријата на веројатност. Ако настаните A и B се такви, што $P(B) > 0$, тогаш постои условната веројатност $P_B(A)$. Во случај кога $P_B(A) = P(A)$ ќе велиме дека *настанот* A *не зависи од настанот* B. Ако $P(A) > 0$, тогаш во овој случај
$$P_A(B) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(B)P_B(A)}{P(A)} = P(B)$$
и од независноста на A од B следува независноста на B од A, т.е. релацијата независност на настани е симетрична. Од теоремата за множење на веројатност $P(AB) = P(B)P_B(A)$ следува, дека за независни настани A и B важи
$$P(AB) = P(A)P(B) .$$

Претходното равенство не доведува до следнава дефиниција за независност на настани.

Дефиниција 24. За настаните A и B ќе велиме дека се *независни*, ако
$$P(AB) = P(A)P(B) . \qquad (1)$$

Ако равенството (1) не е исполнето, тогаш за настаните A и B ќе велиме дека се *зависни*.

Лема 18. а) Ако настаните A и B се независни, тогаш и настаните $\overline{A}$ и B се независни.

б) Ако настаните A_1 и B се независни, настаните A_2 и B се независни и $A_1A_2 = \varnothing$, тогаш настаните $A_1 + A_2$ и B се независни.

Доказ. а) Од независноста на настаните A и B следува

$$P(B\overline{A}) = P(B \setminus AB) = P(B) - P(AB) = P(B) - P(A)P(B) = P(B)(1 - P(A)) = P(B)P(\overline{A}),$$

што значи дека настаните $\overline{A}$ и B се независни.

б) Од независноста на A_i и B следува $P(A_iB) = P(A_i)P(B)$, $i = 1,2$. Според тоа

$$\begin{aligned} P((A_1 + A_2)B) &= P(A_1B + A_2B) = P(A_1B) + P(A_2B) \\ &= P(A_1)P(B) + P(A_2)P(B) = [P(A_1) + P(A_2)]P(B) \\ &= P(A_1 + A_2)P(B), \end{aligned}$$

што значи дека настаните $A_1 + A_2$ и B се независни. ♦

Коментар 2. Дефиницијата 24 веќе не содржи ограничувања од типот $P(A) > 0$. Имено, ако $P(A) = 0$, тогаш од $AB \subseteq A$ следува, дека и $P(AB) = 0$, а тогаш согласно со дефиниција 24 настаните A и B се независни. Јасно, од (1) следува

$$P_B(A) = P(A) \text{ и } P_A(B) = P(B),$$

ако овие условни веројатности постојат, т.е. ако $P(B) > 0$ и $P(A) > 0$, соодветно.

Обично независноста на A и B, која понекогаш ја нарекуваме теориско-веројатностна или статистичка независност (за разлика од причинската независност на реалните појави), не ја констатираме со помош на равенството (1), туку со помош на равенството (1) најчесто ја пресметуваме веројатноста $P(AB)$, знаејќи ги веројатностите $P(A)$ и $P(B)$ на независните настани A и B.

Пример 44. Од шпил со 52 карти случајно влечиме една карта. Да ги разгледаме настаните

$$A = \{\text{Извлечената карта е ас}\} \text{ и } B = \{\text{Извлечената карта е каро}\}.$$

Во овој случај имаме

$$P(A) = \tfrac{4}{52} = \tfrac{1}{13},\ P(B) = \tfrac{13}{52} = \tfrac{1}{4} \text{ и } P(AB) = \tfrac{1}{52} = P(A)P(B),$$

што значи дека настаните A и B се независни. Меѓутоа, ако земеме дека шпилот карти содржи и еден џокер, тогаш настаните A и B стануваат зависни бидејќи

$$P(A) = \tfrac{4}{53},\ P(B) = \tfrac{13}{53} \text{ и } P(AB) = \tfrac{1}{53} \neq \tfrac{52}{53^2} = P(A)P(B). \ ♦$$

Пример 45. Се фрла хомогена коцка за играње. Просторот елементарни настани е $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$. Нека е

$$A = \{1,3,5\},\ B = \{1,2\} \text{ и } C = \{1,2,3\}.$$

Тогаш

$$AB = \{1\},\ BC = \{1,2\},\ CA = \{1,3\}$$

и притоа важи

$$P(A) = \tfrac{1}{2},\ P(B) = \tfrac{1}{3},\ P(C) = \tfrac{1}{2},$$
$$P(AB) = \tfrac{1}{6} = \tfrac{1}{2} \bullet \tfrac{1}{3} = P(A)P(B),$$
$$P(BC) = \tfrac{1}{3} \neq \tfrac{1}{3} \bullet \tfrac{1}{2} = P(B)P(C),$$
$$P(CA) = \tfrac{1}{3} \neq \tfrac{1}{2} \bullet \tfrac{1}{2} = P(C)P(A).$$

Според тоа, настаните A и B се независни, настаните B и C се зависни и настаните C и A се зависни. ♦

Пример 46. Во кутија се наоѓаат по три бели и црни топчиња кои се означени со броевите 1, 2 и 3. Од кутијата случајно избираме едно топче. Да претпоставиме дека секое топче може да биде избрано со веројатност $\tfrac{1}{6}$. Нека е:

A настанот дека избраното топче е означено со единица,
B настанот дека е избрано бело топче и
C настанот дека избраното топче е означено со 1 или 2.

Тогаш важи:

$$P(A) = \tfrac{1}{3},\ P(B) = \tfrac{1}{2},\ P(C) = \tfrac{2}{3},\ P(AB) = \tfrac{1}{6} = P(A)P(B),$$
$$P(BC) = \tfrac{1}{3} = P(B)P(C),\ P(CA) = \tfrac{1}{3} \neq P(C)P(A).$$

Според тоа, настаните A и B се независни, настаните B и C се независни и настаните C и A се зависни. ♦

Дефиниција 25. За настаните $A_i, i = 1,2,...,n$ ќе велиме дека се *независни*, ако за секои $1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_m \leq n,\ 2 \leq m \leq n$ важи

$$P(A_{i_1} A_{i_2} ... A_{i_m}) = P(A_{i_1}) P(A_{i_2}) ... P(A_{i_m}). \tag{3}$$

Во спротивно за настаните $A_i, i = 1,2,...,n$ ќе велиме дека се *зависни*.

Независноста на неколку настани понекогаш ја нарекуваме *независност на настани во целина*. Јасно, од дефиниција 25 следува, дека секое подмножество A_{i_j}, $j = 1,2,...,r$ од независните настани $A_i, i = 1,2,...,n$ исто така е независно.

Дефиниција 26. За настаните $A_i, i = 1,2,...,n$ ќе велиме дека *се независни во парови*, ако за секои $i_1 \neq i_2$ важи $P(A_{i_1} A_{i_2}) = P(A_{i_1}) P(A_{i_2})$.

Со следниот пример ќе покажеме дека независноста на настаните во целина е посилно својство од независноста на настаните по парови.

Пример 46. а) Страните на еден правилен и хомоген тетраедар се обоени на следниот начин: едната страна е бела, другата црвена, третата сина, додека четвртата страна ги содржи сите три бои. Тетраедарот се фрла на рамнина и се бележи бојата на страната што лежи на рамнината. Ако таа страна содржи бела боја ќе сметаме дека настапил настанот A, ако содржи црвена боја ќе сметаме дека настапил настанот B, а ако содржи сина боја дека настапил настанот C. Јасно,

$$P(A)=P(B)=P(C)=\tfrac{1}{2},\ P(AB)=P(AC)=P(BC)=\tfrac{1}{4} \text{ и } P(ABC)=\tfrac{1}{4}.$$

Забележуваме дека

$$P(AB)=P(A)P(B),\ P(BC)=P(B)P(C) \text{ и } P(CA)=P(C)P(A)$$

што значи дека разгледуваните настани се по парови независни. Меѓутоа, од

$$P(ABC)=\tfrac{1}{4}\neq\tfrac{1}{8}=P(A)P(B)P(C)$$

следува дека овие настани не се независни во целина.

б) Хомогена монета се фрла два пати. Просторот елементарни настани е

$$\Omega=\{PP,PG,GP,GG\}.$$

Да ги разгледаме настаните $A=\{PP,PG\}$, $B=\{PP,GP\}$ и $C=\{PP,GG\}$. Тогаш важи

$$P(A)=P(B)=P(C)=\tfrac{1}{2} \text{ и}$$

$$P(AB)=P(A)P(B)=P(BC)=P(B)P(C)=P(CA)=P(C)P(A)=\tfrac{1}{4}.$$

Според тоа, настаните A, B и C се независни по парови. Меѓутоа, настаните A, B и C не се независни во целина, бидејќи

$$P(ABC)=\tfrac{1}{4}\neq\tfrac{1}{8}=P(A)P(B)P(C).$$

в) Коцка за играње се фрла два пати. Нека A е настанот дека во првото фрлање паднал некој од броевите 1, 2 или 5; B е настанот дека во првото фрлање ќе падне број поголем од 3; C е настанот дека збирот на паднатите броеви е еднаков на 9. Имаме,

$$P(A)=\tfrac{1}{2},\ P(B)=\tfrac{1}{2},\ P(C)=\tfrac{1}{9},\ P(AB)=\tfrac{1}{6},\ P(AC)=\tfrac{1}{36},\ P(BC)=\tfrac{1}{12} \text{ и } P(ABC)=\tfrac{1}{36}.$$

Очигледно настаните A, B и C не се независни по парови, меѓутоа

$$P(ABC)=\tfrac{1}{36}=P(A)P(B)P(C).\ \blacklozenge$$

Пред да преминеме на разгледување на независноста на алгебрите и $\sigma-$алгебрите во врска со независните настани ќе докажеме две тврдења. Во следнава теорема ќе докажеме една формула за условната веројатност, која е аналогна на формулата за полна веројатност.

Теорема 16. Нека е даден просторот на веројатности $(\Omega,\boldsymbol{A},P)$ и нека H_1, $H_2,...,H_n$ е разбивање на просторот елементарни настани Ω. Ако а) $P(AH_i) > 0$, за $i = 1,2,...,n$ и

б) настанот A е независен со секој од настаните $H_1, H_2, ..., H_n$,

тогаш за секој настан $B \in \boldsymbol{A}$ е исполнето равенството:

$$P_A(B) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) P_{AH_i}(B).$$

Доказ. Од условите на теоремата и од својствата на веројатноста и условната веројатност следува:

$$P_A(B) = \frac{P(BA)}{P(A)} = \frac{1}{P(A)} P(\sum_{i=1}^{n} BAH_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{P(BAH_i)}{P(A)}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{P(H_i)P(BAH_i)}{P(A)P(H_i)} = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \frac{P(BAH_i)}{P(AH_i)} = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) P_{AH_i}(B). \ \blacklozenge$$

Теорема 17. а) Ако $A_n \in \boldsymbol{A}$, $n \in \mathbf{N}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$, тогаш $P(\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n) = 0$.

б) Нека $A_n \in \boldsymbol{A}$, $n \in \mathbf{N}$ е низа независни настани во просторот $(\Omega, \boldsymbol{A}, P)$. Ако $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$, тогаш $P(\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n) = 1$.

Доказ. а) Од $\overline{\lim\limits_{i\to\infty}} A_i \subseteq \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$, за секој $n \in \mathbf{N}$ следува

$$P(\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n) \le P(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k) \le \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k), \text{ за секој } n \in \mathbf{N}.$$

Но, десната страна е остаток на конвергентен ред, па затоа таа тежи кон 0 кога $n \to \infty$, што значи $P(\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n) = 0$.

б) Имаме

$$P(\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n) = P(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k) = \lim_{n\to\infty} P(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k) = \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} P(\bigcup_{k=n}^{m} A_k).$$

Понатаму, од $1 - x \le e^{-x}, x \ge 0$, независноста на настаните $A_n, n \in \mathbf{N}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$ следува

$$P(\overline{\bigcup_{k=n}^{m} A_k}) = P(\bigcap_{k=n}^{m} \overline{A}_k) = \prod_{k=n}^{m} P(\overline{A}_k) = \prod_{k=n}^{m} [1 - P(A_k)] \le \prod_{k=n}^{m} e^{-P(A_k)} = e^{-\sum\limits_{k=n}^{m} P(A_k)} \to 0,$$

кога $m \to \infty$ и произволно n. Според тоа,

$$\lim_{m\to\infty} P(\bigcup_{k=n}^{m} A_k) = 1, \ n \in \mathbf{N},$$

па затоа

$$P(\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n)=1. \blacklozenge$$

Забелешка 16. Тврдењето под а) во теорема 17 важи за произволни настани $A_n \in \boldsymbol{A}$, $n\in \mathbf{N}$, што значи и во случај кога настаните $A_n \in \boldsymbol{A}$, $n\in \mathbf{N}$ се независни. Имајќи го ова во предвид двете тврдења во горната теорема можат да се искажат заедно. Имено, точна е следнава теорема.

Теорема 17* (Борелов закон нула-еден). Нека $A_n \in \boldsymbol{A}$, $n\in \mathbf{N}$ е низа независни настани во просторот $(\Omega, \boldsymbol{A}, P)$. Тогаш

$$P(\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n)=\begin{cases} 0, & \text{ако } \sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n)<\infty, \\ 1, & \text{ако } \sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n)=\infty. \end{cases}$$

Дефиниција 27. За разбивањата

$$\alpha_k: \quad A_{k1}+A_{k2}+...+A_{kr_k}+...=\Omega, \quad k=1,2,...,n$$

ќе велиме дека се *независни,* ако за секои $i_k=1,2,...,r_k,..., k=1,2,...,n$ важи

$$P(A_{1i_1}A_{2i_2}...A_{ni_n})=P(A_{1i_1})P(A_{2i_2})...P(A_{ni_n}).$$

Дефиниција 28. За алгебрите (или $\sigma-$алгебрите) настани $\boldsymbol{A}_1,...,\boldsymbol{A}_n$ ќе велиме дека се *независни*, ако за секои $A_i \in \boldsymbol{A}_i$, $i=1,2,...,n$ важи

$$P(A_1A_2...A_n)=P(A_1)P(A_2)...P(A_n).$$

Теорема 18. Алгебрите ($\sigma-$алгебрите) $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,...,\boldsymbol{A}_n$ се независни ако и само ако се независни разбивањата $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ кои ги генерираат.

Доказ. Бидејќи разбивањето α_i кое ја генерира алгебрата $\boldsymbol{A}_i$ е потфамилија од $\boldsymbol{A}_i$, т.е. $\alpha_i \subseteq \boldsymbol{A}_i$, добиваме дека од независноста на $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,...,\boldsymbol{A}_n$ следува независноста на $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$.

Обратно, тврдењето следува од фактот дека секој $A\in \boldsymbol{A}_i$ е збир на по парови дисјунктни настани од α_i. ♦

Последица 6. Секој настан A генерира разбивање $A+\overline{A}=\Omega$, кое од своја страна генерира алгебра $\boldsymbol{A}(A)$. Од теорема 18 следува дека независноста на настаните $A_1,A_2,...,A_n$ и независноста на алгебрите $\boldsymbol{A}(A_1),...,\boldsymbol{A}(A_n)$ се еквивалентни. ♦

ЗАДАЧИ

1. Докажете дека од равенството $P_B(A)=P_{\overline{B}}(A)$ следува независноста на настаните A и B.

2. Нека A и B се независни настани за кои важи $P(A \cup B) = 1$. Докажете дека $P(A) = 1$ или $P(B) = 1$.

3. Нека A и B се независни настани. Докажете, дека ако настаните $A \cup B$ и $A \cap B$ се независни, тогаш $P(A) = 1$ или $P(B) = 1$ или $P(A) = 0$ или $P(B) = 0$.

4. Нека настаните A, B и C се независни во целина и нека веројатноста на секој од нив е различна од 0 и 1. Дали настаните AB, BC и CA можат да бидат:
   a) независни во целина,
   b) независни по парови.

5. Настаните A, B и C се независни во целина. Веројатноста на настанот A е $a, 0 < a < 1$, веројатноста да не се случи ниту еден од настаните A, B и C е еднаква на b и веројатноста да не се случи барем еден од настаните A, B и C е еднаква на c, $0 \le b \le 1, 0 \le c \le 1$. Пресметајте ја веројатноста на настанот AB.

6. Докажете дека ако настаните A, B, C се независни во целина, тогаш и настаните:
   a) A, B, $\overline{C}$,
   b) A, $\overline{B}$, $\overline{C}$,
   c) $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$

   се независни во целина.

7. Докажете дека ако настаните $A_1, A_2, ..., A_n$ се независни во целина, тогаш

$$P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = 1 - P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)...P(\overline{A}_n).$$

8. За настаните A и B е познато дека $P(A) = 0,30$, $P(B) = 0,45$ и $P(AB) = 0,25$.
   a) Дали A и B се дисјунктни настани? А дали се независни?
   b) Пресметајте ја веројатноста на настанот $A \cup B$.

9. Настаните $A_i, i = 1, 2, ..., n$ се независни и имаат веројатности $p_i, i = 1, 2, ..., n$, соодветно. Пресметајте ја веројатноста на настанот:
   a) $B = \{$не се реализира ниту еден од настаните $A_i, i = 1, 2, ..., n\}$
   b) $\overline{B}$,
   c) $\overline{B}$ во случај кога $p_i = p, i = 1, 2, ..., n$.

10. Независните настани $A_1, A_2, ..., A_n$ имаат веројатности $p_1, p_2, ..., p_n$, соодветно. Докажете, дека за веројатноста p на настанот: се реализирал барем еден од настаните $A_1, A_2, ..., A_n$, се исполнети неравенствата

$$1 - e^{p_1 + p_2 + ... + p_n} \le p \le p_1 + p_2 + ... + p_n.$$

11. Нека $A_1, A_2, ..., A_n$ се независни настани, кои имаат позитивни веројатности. Со B да го означиме настанот: се реализирале барем $n-1$ од настаните $A_1, A_2, ..., A_n$.
    a) Изрази го настанот B со помош на настаните $A_1, A_2, ..., A_n$.
    b) Најди цел број k таков, што е исполнето равенството

$$\frac{P(B)}{P(A_1)P(A_2)...P(A_n)} + k = \frac{1}{P(A_1)} + \frac{1}{P(A_2)} + ... + \frac{1}{P(A_n)}.$$

12. Коцка за играње се фрла три пати. Нека A, B и C се настаните дека во првото и второто, во второто и третото, односно во третото и првото фрлање паднал ист број. Дали настаните A, B и C се:
    a) независни во парови,
    b) независни во целина?

13. Таткото му ветил награда на синот која може да ја освои ако играјќи три партии шах против таткото и чичкото по една од шемите “татко-чичко-татко” или “чичко-татко-чичко”, победи барем две партии последователно. Чичкото и подобар шахист од таткото. Која шема е поповолна за синот?
14. Тројца стрелци независно еден од друг гаѓаат иста цел и притоа секоја од стрелците, при едно стрелање, целта ја погодува со веројатност p,q и r, соодветно. Колкава е веројатноста целта да биде погодена
    a) точно еднаш,
    b) барем еднаш?
15. Двајца играчи A и B играат три партии шах. Веројатноста дека во секоја партија ќе победи играчот A е еднаква на p, а резултатите од различните партии се меѓусебно независни. Колкава е веројатноста дека играчот A ќе добие
    a) точно една партија,
    b) барем една партија?
16. Двајца играчи A и B играат низа шаховски партии се додека еден од нив не добие три партии. Веројатноста дека во секоја партија ќе победи играчот A е еднаква на p, а резултатите од различните партии се меѓусебно независни. Најдете ги веројатностите на настаните:
    a) мечот да заврши со победа на играчот A после четвртата партија,
    b) мечот да заврши после четвртата партија.
17. Жирито има три члена. Членовите на жирито донесуваат одлука независно еден од друг. Два члена донесуваат правилна одлука со веројатност $p=0,95$, а третиот член на жирито донесува правилна одлука со веројатност $\frac{1}{2}$. Конечната одлука жирито ја донесува со мнозинство гласови. Пресметајте ја веројатноста на настанот дека конечната одлука на жирито ќе биде правилна.

10. ПОВТОРУВАЊЕ НА ЕКСПЕРИМЕНТИ. БЕРНУЛИЕВА ШЕМА

10.1. ДЕКАРТОВ ПРОИЗВОД НА ДИСКРЕТНИ ВЕРОЈАТНОСТНИ ПРОСТОРИ

Теорема 19. Нека $(\Omega_i, \boldsymbol{A}_i, P_i)$, $i=1,2$ се дискретни простори на веројатности и $\Omega=\Omega_1\times\Omega_2=\{(\omega_1,\omega_2)\,|\,\omega_1\in\Omega_1,\omega_2\in\Omega_2\}$. Тогаш постои единствена веројатност P таква што важи

$$P(A_1\times A_2)=P_1(A_1)P_2(A_2),\ A_1\subseteq\Omega_1, A_2\subseteq\Omega_2. \qquad (1)$$

Доказ. Множествата Ω_1 и Ω_2 се најмногу пребројливи, што значи дека множеството Ω е најмногу пребројливо. Сега, од дефиниција 17 и дискусијата по истата следува дека за задавање на веројатноста P на $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_1\times\boldsymbol{A}_2$ доволно е да се зададат вредностите на функцијата P во точките на множеството Ω.

За $\omega=(\omega_1,\omega_2)\in\Omega$ ставаме

$$P(\omega)=P_1(\omega_1)P_2(\omega_2), \qquad (2)$$

а за $A\subseteq\Omega$ ставаме

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega)\,. \tag{3}$$

Ќе докажеме дека со (3) е определена веројатност на Ω. Јасно, за секој $A \subseteq \Omega$ важи $P(A) \geq 0$. Понатаму, од $\Omega = \bigcup_{(\omega_1,\omega_2)\in\Omega} \{(\omega_1,\omega_2)\}$ и апсолутната конвергенција на двојниот ред $\sum_{\omega_1\in\Omega_1} \sum_{\omega_2\in\Omega_2} P_1(\omega_1)P_2(\omega_2)$ следува

$$P(\Omega) = \sum_{\omega\in\Omega} P(\omega) = \sum_{\omega_1\in\Omega_1,\, \omega_2\in\Omega_2} P_1(\omega_1)P_2(\omega_2) = \sum_{\omega_1\in\Omega_1} \sum_{\omega_2\in\Omega_2} P_1(\omega_1)P_2(\omega_2)$$
$$= \sum_{\omega_1\in\Omega_1} P_1(\omega_1) \sum_{\omega_2\in\Omega_2} P_2(\omega_2) = 1.$$

Понатаму, ако $A_n \subseteq \Omega, n \in \mathbf{N}$ се заемно дисјунктни множества, тогаш од својствата на двојните и повторените редови добиваме

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{\omega \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n} P(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\omega\in A_n} P(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)\,,$$

што заедно со претходно изнесеното, имајќи ја предвид теорема 4 значи дека P е веројатностна мера (веројатност).

Останува да го докажеме равенството (1). Нека $A_1 \subseteq \Omega_1, A_2 \subseteq \Omega_2$. Тогаш $A_1 \times A_2 = \bigcup_{\omega_1\in A_1,\omega_2\in A_2} \{(\omega_1,\omega_2)\}$, па аналогно како во претходните разгледувања имаме

$$P(A_1 \times A_2) = \sum_{\omega_1\in A_1,\, \omega_2\in A_2} P_1(\omega_1)P_2(\omega_2) = \sum_{\omega_1\in A_1} \sum_{\omega_2\in A_2} P_1(\omega_1)P_2(\omega_2)$$
$$= \sum_{\omega_1\in A_1} P_1(\omega_1) \sum_{\omega_2\in \Omega A_2} P_2(\omega_2) = P(A_1)P(A_2),$$

што и требаше да се докаже. ♦

Аналогно на доказот на теорема 19 може да се докаже следнава теорема.

Теорема 20. Нека $(\Omega_i, \mathbf{A}_i, P_i)$, $i = 1,2,...,n$ се дискретни простори на веројатности и $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times ... \times \Omega_n$. Тогаш постои единствена веројатност таква што P важи

$$P(A_1 \times A_2 \times ... \times A_n) = P_1(A_1)P_2(A_2)...P_n(A_n)\,,\ A_i \subseteq \Omega_i, i = 1,2,...,n\,. \ ♦ \tag{4}$$

Дефиниција 29. Дискретниот простор на веројатности $(\Omega, \mathbf{A}, P)$ од теорема 20 го нарекуваме *директен* (*Декартов*) *производ на дискретните простори веројатности* $(\Omega_i, \mathbf{A}_i, P_i)$, $i = 1,2,...,n$. Веројатноста P за која ќе ја користиме и ознаката $\prod_{i=1}^{n} P_i$ ја нарекуваме *директен* (*Декартов*) *производ на веројатностите* P_i, алгебрата $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 \times ... \times \mathbf{A}_n$ е *директен* (*Декартов*) *производ на алгебри.*

Пример 47. Фрламе коцка за играње и независно од тоа монета. Експериментот фрлање коцка го опишуваме со просторот на веројатности $(\Omega_1, \mathbf{A}_1, P_1)$, каде

$\Omega_1 = \{1,2,3,4,5,6\}$, $\boldsymbol{A}_1$ е партитивното множество на множеството Ω_1, а веројатноста P_1 е определена со условот $P_1(k) = \frac{1}{6}$, $k = 1,2,3,4,5,6$. Експериментот фрлање монета го опишуваме со просторот на веројатности $(\Omega_2, \boldsymbol{A}_2, P_2)$, каде $\Omega_2 = \{P, G\}$, $\boldsymbol{A}_2$ е партитивното множество на множеството Ω_2, а веројатноста P_2 е определена со условот $P_1(P) = P_1(G) = \frac{1}{2}$. Понатаму,

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 = \{1P, 2P, 3P, 4P, 5P, 6P, 1G, 2G, 3G, 4G, 5G, 6G\}$$

и веројатностите на елементарните настани за директниот производ $(\Omega, \boldsymbol{A}, P)$ на просторите на веројатности $(\Omega_1, \boldsymbol{A}_1, P_1)$ и $(\Omega_2, \boldsymbol{A}_2, P_2)$ се зададени со

$$P(\omega) = \frac{1}{12}, \ \omega \in \Omega. \ \blacklozenge$$

Дефиниција 30. Нека $(\Omega_i, \boldsymbol{A}_i, P_i)$, $i = 1,2,...,n$ се дискретни веројатностни простори и нека $(\Omega, \boldsymbol{A}, P)$ е нивниот Декартов производ. Ако $A_i \in \boldsymbol{A}_i$, $i = 1,...,n$, тогаш множеството

$$A = A_1 \times ... \times A_n \tag{5}$$

го нарекуваме *правоаголник* (*n-димензионален паралелопипед*) чии елементи се

$$\omega = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n), \ \omega_i \in A_i, \ i = 1,...,n$$

и согласно со теорема 20 неговата веројатност е дадена со (4).

Со $\boldsymbol{A}_i^{'}$ да ја означиме $\sigma -$ подалгебрата на $\sigma -$ алгебрата $\boldsymbol{A}$ која се состои од сите правоаголници (5), за кои $A_k = \Omega_k$, $k \neq i$. Лесно се гледа дека меѓу настаните

$$A_i^{'} = \Omega_1 \times ... \Omega_{i-1} \times A_i \times \Omega_{i+1} \times ... \times \Omega_n \in \boldsymbol{A}_i^{'}$$

и настаните $A_i \in \boldsymbol{A}_i$ постои природен изоморфизам $A_i^{'} \sim A_i$, па затоа за секој $i = 1,2, ..., n$, наместо настанот A_i од просторот на веројатности $(\Omega_i, \boldsymbol{A}_i, P_i)$ можеме да го разгледуваме изоморфниот настан $A_i^{'}$ од подалгебрата $\boldsymbol{A}_i^{'}$ на просторот на веројатности $(\Omega, \boldsymbol{A}, P)$. Од дефиницијата на веројатноста (4) следува дека $P(A_i^{'}) = P_i(A_i)$. Понатаму, бидејќи

$$A = A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \bigcap_{k=1}^{n} A_k^{'}$$

од (4) добиваме дека за секои $A_i^{'} \in \boldsymbol{A}_i^{'}$, $i = 1,2,...,n$ важи

$$P(\bigcap_{k=1}^{n} A_k^{'}) = \prod_{k=1}^{n} P(A_k^{'}),$$

што значи дека алгебрите $\boldsymbol{A}_1^{'}, \boldsymbol{A}_2^{'}, ..., \boldsymbol{A}_n^{'}$ се независни.

10.2. ПОВТОРУВАЊЕ НА ЕКСПЕРИМЕНТИ

Нека имаме два недетерминирани експерименти со придружени простори на елементарни настани Ω_1 и Ω_2. Сега како случаен експеримент можеме да го разгледуваме подредениот пар од овие два експерименти, па затоа неговиот исход ќе биде репрезентиран со точка од Декартовиот производ $\Omega_1 \times \Omega_2$. Според тоа, Декартовиот производ $\Omega_1 \times \Omega_2$ е природен простор на елементарни настани придружени на овој подреден пар недетерминирани експерименти. На сличен начин на низа од n недетерминирани експерименти со простори на елементарни настани $\Omega_i, i = 1, 2, ..., n$, како простор елементарни настани и го придружуваме множеството $\prod_{i=1}^{n} \Omega_i$, а на низа од преброjливо многу експерименти со простори на елементарни настани $\Omega_i, i = 1, 2, ...$ и го придружуваме множеството $\prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$. Притоа, во практиката особено е чест случајот на n повторувања на даден експеримент, при што за простор на елементарни настани се зема Декартовиот степен Ω^n, каде Ω е просторот на елементарни настани на секој одделен експеримент.

Ќе разгледаме како во случај на конечно многу експерименти со дискретни простори на елементарни настани се конструира соодветниот простор на веројатности, кој исто така е дискретен. Пред да преминеме на натамошните разгледувања, да забележиме дека разликуваме експерименти кои меѓусебно се зависни и кои меѓусебно се независни.

Пример 48. Нека имаме три кутии. Во првата кутија нека се 2 бели и 3 црни топчиња, во втората 2 бели и 2 црни, а во третата 3 бели и 1 црно топче. Од првата кутија на случаен начин извлекуваме едно топче и го ставаме во втората кутија. Потоа од втората кутија на случаен начин извлекуваме топче и го ставаме во третата кутија. На крајот, од третата кутија на случаен начин извлекуваме топче и го ставаме во првата кутија. Што е поверојатно: составот на топчињата во однос на боите во првата кутија се променил или останал ист?

Овде имаме три недерминирани експерименти, т.е. три случајни преместувања на топче. Да ставиме

$$A_k = \{\text{во } k\text{-тото преместување преместено е бело топче}\},\ k = 1, 2, 3\ .$$

Тогаш за простор Ω на сите елементарни настани на нашиот експеримент може да се земе множеството

$$\Omega = \{(A_1, A_2, A_3), (\overline{A}_1, A_2, A_3), (A_1, \overline{A}_2, A_3), (A_1, A_2, \overline{A}_3),$$
$$(\overline{A}_1, \overline{A}_2, A_3), (\overline{A}_1, A_2, \overline{A}_3), (A_1, \overline{A}_2, \overline{A}_3), (\overline{A}_1, \overline{A}_2, \overline{A}_3)\}.$$

Резултатот на второто преместување зависи од резултатот на првото преместување, резултатот на третото од резултатите на првото и вората. Бидејќи составот на кутиите ни е познат, дадени ни се веројатностите

$$P(A_1),\ P(\overline{A}_1),\ P_{A_1}(A_2),\ P_{(A_1, A_2)}(A_3) \text{ итн}$$

Имаме

$$P(A_1)=\tfrac{2}{5},\ P_{A_1}(A_2)=\tfrac{3}{5},\ P_{(A_1,A_2)}(A_3)=\tfrac{4}{5}\ \text{итн.}$$

Јасно, подредената тројка (A_1,A_2,A_3) можеме да ја интерпретираме како пресек на настаните A_1,A_2,A_3, па затоа

$$P(A_1,A_2,A_3)=P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{(A_1,A_2)}(A_3)=\tfrac{2}{5}\cdot\tfrac{3}{5}\cdot\tfrac{4}{5}=\tfrac{24}{125}\,.$$

На потополно аналоген начин ги наоѓаме веројатностите на останатите елементарни настани на просторот Ω. Да ставиме

$B_k=\{$после извршените 3 преместувања во првата кутија има k бели топчиња$\}$,

$k=1,2,3$. Тогаш

$$B_1=\{(A_1,A_2,\overline{A}_3),(A_1,\overline{A}_2,\overline{A}_3)\},$$
$$B_2=\{(A_1,A_2,A_3),(A_1,\overline{A}_2,A_3),(\overline{A}_1,A_2,\overline{A}_3),(\overline{A}_1,\overline{A}_2,\overline{A}_3)\}\ \text{и}$$
$$B_3=\{(\overline{A}_1,A_2,A_3),(\overline{A}_1,\overline{A}_2,A_3)\}.,$$

и притоа важи

$$P(B_1)=\tfrac{14}{125},\ P(B_2)=\tfrac{60}{125}\ \text{и}\ P(B_3)=\tfrac{51}{125}\,.$$

Конечно, како е

$B_2=\{$бројот на белите точниња во првата кутија после преместувањата останал ист$\}$,

добиваме дека поверојатно е дека бројот на белите топчиња во првата кутија ќе се промени. ♦

Претходниот пример е пример на зависни експерименти и истиот ни ја сугерира следнава дефинција.

Дефиниција 31. *Низа од n зависни експерименти* е дискретниот простор на веројатности $(\Omega,\boldsymbol{A},P)$ каде $\Omega=\prod\limits_{i=1}^{n}\Omega_i$, а веројатноста P е таква што

$$P((\omega_{i_1}^{(1)},\omega_{i_2}^{(2)},...,\omega_{i_n}^{(n)}))=P_1(\omega_{i_1}^{(1)})P_2(\omega_{i_2}^{(2)}\mid\omega_{i_1}^{(1)})...P_n(\omega_{i_n}^{(n)}\mid(\omega_{i_1}^{(1)},\omega_{i_2}^{(2)},...,\omega_{i_{n-1}}^{(n-1)})),\qquad(1)$$

за $i_r=1,2,3,...,k_r$, $|\Omega_r|=k_r$, $r=1,2,...,n$, а броевите

$$P_1(\omega_{i_1}^{(1)}),P_2(\omega_{i_2}^{(2)}\mid\omega_{i_1}^{(1)}),P_3(\omega_{i_3}^{(3)}\mid(\omega_{i_1}^{(1)},\omega_{i_2}^{(2)})),...,P\ (\omega_{i_n}^{(n)}\mid(\omega_{i_1}^{(1)},\omega_{i_2}^{(2)},...,\omega_{i_{n-1}}^{(n-1)}))\qquad(2)$$

ги задоволуваат условите

$P_1(\omega_{i_1}^{(1)})\geq 0,$ за секој i_1 и $\sum\limits_{i_1=1}^{k_1}P_1(\omega_{i_1}^{(1)})=1$,

$P_2(\omega_{i_2}^{(2)}\mid\omega_{i_1}^{(1)})\geq 0,$ за секои i_1,i_2 и $\sum\limits_{i_2=1}^{k_2}P_2(\omega_{i_2}^{(2)}\mid\omega_{i_1}^{(1)})=1$, за секој i_1,

$P_3(\omega_{i_3}^{(3)} \mid (\omega_{i_1}^{(1)}, \omega_{i_2}^{(2)})) \geq 0$, за секои i_1, i_2, i_3 и $\sum\limits_{i_3=1}^{k_3} P_3(\omega_{i_3}^{(3)} \mid (\omega_{i_1}^{(1)}, \omega_{i_2}^{(2)})) = 1$, за секои i_1, i_2,

……

$P_n(\omega_{i_n}^{(n)} \mid (\omega_{i_1}^{(1)}, \omega_{i_2}^{(2)}, ..., \omega_{i_{n-1}}^{(n-1)})) \geq 0$, за секои $i_1, i_2, ..., i_n$ и

$\sum\limits_{i_n=1}^{k_n} P_n(\omega_{i_n}^{(n)} \mid (\omega_{i_1}^{(1)}, \omega_{i_2}^{(2)}, ..., \omega_{i_{n-1}}^{(n-1)})) = 1$, за секои $i_1, i_2, ..., i_{n-1}$.

Забелешка 17. а) Од условите за броевите (2) дадени во претходната дефиниција следува:

- низата $P_1(\omega_{i_1}^{(1)}) \geq 0,\ i_1 = 1, 2, 3, ..., k_1$ дефинира веројатност на Ω_1,
- за секој $\omega_{i_1}^{(1)} \in \Omega_1$ низата $P_2(\omega_{i_2}^{(2)} \mid \omega_{i_1}^{(1)}),\ i_2 = 1, 2, 3, ..., k_2$ дефинира веројатност на Ω_2,
- за секој подреден пар $(\omega_{i_1}^{(1)}, \omega_{i_2}^{(2)}) \in \Omega_1 \times \Omega_2$ низата $P_3(\omega_{i_3}^{(3)} \mid (\omega_{i_1}^{(1)}, \omega_{i_2}^{(2)}))$, $i_3 = 1, 2, 3, ..., k_3$ дефинира веројатност на Ω_3 итн.

Понатаму, од претходната точка следува дека функцијата P определена со (1) природно може да се прошири на партитивното множество на Ω, односно бидејќи од $A \subseteq \Omega$ следува $A = \bigcup\limits_k \{\omega^{(k)}\}$, $\omega^{(k)} \in \Omega$ можеме да ставиме $P(A) = \sum\limits_k P(\omega^{(k)})$ и вака дефинираната функција е конечно адитивна на партитивното множество на Ω. Освен тоа, ако се искористат условните веројатности, тогаш од условите за броевите (2) дадени во дефиниција 31 следува:

$$P(\Omega) = \sum_{i_1=1}^{k_1} \sum_{i_2=1}^{k_2} ... \sum_{i_n=1}^{k_n} P((\omega_{i_1}^{(1)}, \omega_{i_2}^{(2)}, ..., \omega_{i_n}^{(n)})) = 1,$$

што значи дека функцијата P навистина е веројатност на партитивното множество на Ω.

б) Нека $B_r \subseteq \Omega_r,\ r = 1, 2, ..., n$ и $B = B_1 \times B_2 \times ... \times B_n$. Тогаш

$$P(B) = \sum_{\omega \in B} P(\omega) = \sum_{\omega_{i_1}^{(1)} \in B_1, \omega_{i_2}^{(2)} \in B_2, ..., \omega_{i_n}^{(n)} \in B_n} P((\omega_{i_1}^{(1)}, \omega_{i_2}^{(2)}, ..., \omega_{i_n}^{(n)}))$$

$$= \sum_{\omega_{i_1}^{(1)} \in B_1} \sum_{\omega_{i_2}^{(2)} \in B_2} ... \sum_{\omega_{i_n}^{(n)} \in B_n} P_1(\omega_{i_1}^{(1)}) P_2(\omega_{i_2}^{(2)} \mid \omega_{i_1}^{(1)}) ... P_n(\omega_{i_n}^{(n)} \mid (\omega_{i_1}^{(1)}, \omega_{i_2}^{(2)}, ..., \omega_{i_{n-1}}^{(n-1)}))$$

$$= \sum_{\omega_{i_1}^{(1)} \in B_1} P_1(\omega_{i_1}^{(1)}) \sum_{\omega_{i_2}^{(2)} \in B_2} P_2(\omega_{i_2}^{(2)} \mid \omega_{i_1}^{(1)}) ... \sum_{\omega_{i_n}^{(n)} \in B_n} P_n(\omega_{i_n}^{(n)} \mid (\omega_{i_1}^{(1)}, \omega_{i_2}^{(2)}, ..., \omega_{i_{n-1}}^{(n-1)})).$$

Опишаниот простор на веројатности $(\Omega, \boldsymbol{A}, P)$ е математички модел за низа од n *зависни експерименти*. Притоа во подредената $n-$торка $(\omega_{i_1}^{(1)}, \omega_{i_2}^{(2)}, ..., \omega_{i_n}^{(n)})$ симболот $\omega_{i_k}^{(k)}$ означува дека во $k-$от експеримент се случил елементарниот настан $\omega_{i_k}^{(k)}$.

Јасно, $P_k(\omega_{i_k}^{(k)} \mid (\omega_{i_1}^{(1)}, \omega_{i_2}^{(2)}, ..., \omega_{i_{k-1}}^{(k-1)}))$ е условната веројатност дека во во $k-$от експеримент се случил елементарниот настан $\omega_{i_k}^{(k)}$ при услов дека во претходните $k-1$ настани се случил елементарниот настан $(\omega_{i_1}^{(1)}, \omega_{i_2}^{(2)}, ..., \omega_{i_{k-1}}^{(k-1)})$.

Дефиниција 32. *Низа од n независни експерименти* е дискретниот простор на веројатности $(\Omega, \boldsymbol{A}, P)$ каде $\Omega = \prod_{i=1}^{n} \Omega_i$ а веројатноста P е $P = \prod_{i=1}^{n} P_i$

Забелешка 18. Според теорема 20 во случај на низа од n независни експерименти веројатноста е наполно определена со

$$P((\omega_{i_1}^{(1)}, \omega_{i_2}^{(2)}, ..., \omega_{i_n}^{(n)})) = P_1(\omega_{i_1}^{(1)}) P_2(\omega_{i_2}^{(2)}) ... P_n(\omega_{i_n}^{(n)}), \qquad (3)$$

за $i_r = 1, 2, 3, ..., k_r$, $|\Omega_r| = k_r$, $r = 1, 2, ..., n$. Понатаму, ако $B_r \subseteq \Omega_r$, $r = 1, 2, ..., n$, тогаш повторно според теорема 20 имаме $P(B_1 \times B_2 \times ... \times B_n) = P_1(B_1) P_2(B_2) ... P_n(B_r)$.

Низата од n независни експерименти е математички модел за серија експерименти кои воопшто се различни и кај кои изходите на секој одделен експеримент не зависат од исходите на останатите експерименти.

Дефиниција 33. *Низа од n повторени независни експерименти* е дискретен простор на веројатности $(\Omega, \boldsymbol{A}, P)$ кој е еднаков на Декартовиот производ на дискретниот простор на веројатности $(\Omega_1, \boldsymbol{A}_1, P_1)$ со самиот себе n пати.

Забелешка 19. Од претходните разгледувања следува дека $\Omega = \Omega_1^n$, $P = P_1^n$, па од (3) следува дека

$$P((\omega_{i_1}^{(1)}, \omega_{i_2}^{(2)}, ..., \omega_{i_n}^{(n)})) = P_1(\omega_{i_1}^{(1)}) P_1(\omega_{i_2}^{(2)}) ... P_1(\omega_{i_n}^{(n)}), \ i_r = 1, 2, 3, ..., k, \ r = 1, 2, ..., n.$$

Понатаму, од разгледувањата во точка 10.1 следува дека ако со $A_1(\omega_{i_r})$ го означиме дека во првиот експеримент се појавил елементарниот настан ω_{i_r}, тогаш од

$$A_1(\omega_{i_r}) = \{(\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, ..., \omega_{i_n}) \mid \omega_{i_1} = \omega_{i_r}, \omega_{i_k} \in \Omega_1, k \neq 1\} = \{\omega_{i_r}\} \times \Omega_1^{n-1},$$

па затоа

$$P(A_1(\omega_{i_r})) = P_1(\omega_{i_r}) P(\Omega_1)^{n-1} = P_1(\omega_{i_r}).$$

Аналогно, веројатноста за појавување на исходот ω_{i_r} во произволен експеримент е еднаква на $P_1(\omega_{i_r})$.

Нека сега $k_1, k_2, ..., k_s$ се меѓусебно различни елементи од множеството $\{1, 2, ..., n\}$. За фиксни $\omega_{r_1}, \omega_{r_2}, ..., \omega_{r_s}$ да ставиме

$$A_{k_1 \dots k_s}(\omega_{r_1}, \dots, \omega_{r_s}) = \{(\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_n}) \mid \omega_{k_1} = \omega_{r_1}, \dots, \omega_{k_s} = \omega_{r_s}, \omega_{i_p} \in \Omega_1, i_p \in \{1, \dots, n\} \setminus \{k_1, \dots, k_s\}\}.$$

Слично, како и во претходниот случај важи

$$P(A_{k_1 \dots k_s}(\omega_{r_1}, \dots, \omega_{r_s})) = \prod_{p=1}^{s} P_1(\omega_{r_p})[P_1(\Omega_1)]^{n-s} = \prod_{p=1}^{s} P_1(\omega_{r_p}).$$

Нека се $\{k_1, k_2, \dots, k_s\}$ и $\{m_1, m_2, \dots, m_p\}$ две дисјунктни подмножества од множеството $\{1, 2, \dots, n\}$ и нека

$$A = A_{k_1 k_2 \dots k_s}(\omega_{r_1}, \omega_{r_2}, \dots, \omega_{r_s}) \text{ и } B = A_{m_1 m_2 \dots m_p}(\omega_{t_1}, \omega_{t_2}, \dots, \omega_{t_p}).$$

Тогаш лесно се докажува дека настаните A и B се независни, т.е. дека важи $P(AB) = P(A)P(B)$. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

Пример 49 (Проблем на Де Мер). Дали е препорачливо да се кладите дека во 24 последователни фрлања на две хомогени коцки за играње барем еднаш ќе паднат две шестки?

Решение. Просторот елементарни настани за недетерминираниот експеримент за еднократно фрлање на две хомогени коцки е $\Omega_1 = \{(i, j) \mid i, j = 1, 2, \dots, 6\}$, $|\Omega_1| = 36$, а соодветниот простор на веројатности се $(\Omega_1, \boldsymbol{A}_1, P_1)$, $P_1(\omega) = \frac{1}{36,}$, $\omega \in \Omega_1$.

Нека земеме дека парот коцки се фрла n пати. Јасно, станува збор за низа од n повторени независни експерименти, т.е. за простор на веројатности $\Omega = \Omega_1^n$, $|\Omega| = 36^n$ и $P = P_1^n$, т.е.

$$P((\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)) = \frac{1}{36^n}, \ (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) \in \Omega.$$

Нека е

$$A = \{\text{во } n \text{ фрлања се појавила барем една двојна шестка}\}.$$

Тогаш

$$\overline{A} = \{\text{во } n \text{ фрлања нема ниту една двојна шестка}\}$$

па имаме

$$\overline{A} = \{(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) \mid \omega_n \neq (6,6), i = 1, 2, \dots, n\},$$

што значи $P(\overline{A}) = (\frac{35}{36})^n$, т.е.

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - (\tfrac{35}{36})^n.$$

Јасно, $P(A)$ е монотоно растечка функција од n. Ќе го определиме n од условот $P(A) \geq \frac{1}{2}$. Имаме

$$1 - (\tfrac{35}{36})^n \geq \tfrac{1}{2} \qquad \Rightarrow \qquad (\tfrac{35}{36})^n \leq \tfrac{1}{2} \qquad \Rightarrow$$

$$n(\ln 35 - \ln 36) \le -\ln 2 \qquad \Rightarrow \qquad n \ge \frac{\ln 2}{\ln 36 - \ln 35} \qquad \Rightarrow \qquad n \ge 25 .$$

Според тоа, одговорот е дека не е препорачливо да се кладите дека во последователни 24 фрлања на две хомогени коцки за играње еднаш ќе паднат две шестки, бидејќи веројатноста на тој настан е помала од $\frac{1}{2}$. ♦

Забелешка 20. При решавањето на едноставни проблеми од теоријата на веројатност не е секогаш неопходно експлицитно да се конструира просторот на веројатности кој е математички модел на недетермираниот експеримент. Меѓутоа, треба да се има предвид дека проблемот за егзистенција на просторот на веројатности кој го репрезентира недермираниот некспериментне е секогаш едноставен.

Да разгледаме уште еден пример.

Пример 50 (Процес на чисто размножување). Нека претпоставиме дека имаме некој физички систем кој заради влијанието на случајни фактори е подложен на промени. Системот го разгледуваме во текот на времето и да претпоставиме дека случајните фактори кои го условуваат однесувањето на системот не се менуваат, што значи дека веројатноста на произволен настан поврзан со системот е еднаква во сите временски интервали со еднаква должина.

Нека системот се наоѓа во една од пребројливо многуте состојби S_n, $n = 0,1, 2,3,\ldots$. Ќе велиме дека однесувањето на овој систем има својство на *процес на чисто размножување* ако од состојбата S_n може само да се премине во состојбата S_{n+1} или да се остане во состојбата S_n, $n = 0,1,2,3,\ldots$, т.е. ако системот во моментот t се наоѓа во состојбата S_n, тогаш веројатноста во временскиот интервал $(t, t+\Delta t), \Delta t > 0$ системот да премине во состојба S_{n+1} е еднаква на $\lambda_n \Delta t + o(\Delta t)$, $\lambda_n > 0$, $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0$, а веројатностите за премин во останатите состојби се големини кои побрзо тежат кон нула од Δt.

Со $P_n(t)$ да ја означиме веројатноста дека во моментот t системот се наоѓа во состојба S_n. Нека земеме $\Delta t > 0$. Тогаш, заради претпоставката за процес на чисто раѓање од формулата за полна веројатност, при $n \ge 1$, добиваме

$$P_n(t+\Delta t) = P_n(t)(1-\lambda_n \Delta t) + P_{n-1}(t)\lambda_{n-1}\Delta t + o(\Delta t) \tag{4}$$

$$P_n(t) = P_n(t-\Delta t)(1-\lambda_n \Delta t) + P_{n-1}(t-\Delta t)\lambda_{n-1}\Delta t + o(\Delta t) . \tag{5}$$

Од (4) и (5) следува дека функцијата $t \to P_n(t)$ е непрекината, па ако поделиме со Δt и земеме $\Delta t \to 0$ добиваме

$$P_n^{'} = -\lambda_n P_n + \lambda_{n-1} P_{n-1}, \ n \ge 1. \tag{6}$$

Аналогно добиваме

$$P_0^{'} = -\lambda_0 P_0 . \tag{7}$$

Ако претпоставиме дека системот во $t = 0$ со веројатност 1 се наоѓа во "почетната" состојба S_0, т.е. $P_0(0) = 1$, тогаш од (7) следува дека $P_0(t) = e^{-\lambda_0 t}$, $t \ge 0$, па сега од (6) може последователно да се најдат $P_n, n \ge 1$.

Ако претпоставиме дека системот во време $t=0$ се наоѓа во состојба $S_i, i>0$, т.е. дека

$$P_i(0)=1,\ P_n(0)=0, \text{ за } n\neq i, \tag{8}$$

тогаш овие услови повторно еднозначно ги определуваат решението на системот диференцијални равенки (6) и (7). Во овој случај наоѓаме

$$P_0(t)=P_1(t)=...=P_{i-1}(t)=0, t\geq 0,\ P_i(t)=e^{-\lambda_i t}, t\geq 0\ .$$

Може да се покаже дека $P_n(t)\geq 0$, за секои n и t. Исто така, очекуваме дека

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(t)=1, \quad t\geq 0\ . \tag{9}$$

Сепак, во [65] е докажано дека во случај кога λ_n доволно брзо растат може да се случи за некои вредности на t да важи $\sum\limits_{n=0}^{\infty} P_n(t)<1$. Последното важи бидејќи во овие случаеви системот за конечно време со позитивна веројатност може да помине низ сите состојби. Јасно, во овие случаи низата $\{\lambda_n\}$ не дефинира процес за секој $t>0$. Понатаму, во [65] исто така е докажано дека важи (9) ако и само ако редот $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n}$ дивергира. ♦

10.3. БЕРНУЛИЕВА ШЕМА

Парцијалниот случај на низа n од повторени независни независни експерименти е таканаречената Бернулиева шема. Таа ни служи за опишување на ситуации кога под исти услови независно n пати повторуваме недетерминиран експеримент кој има само два исходи.

Дефиниција 34. Нека

$$\Omega_1=\{0,1\}, \boldsymbol{A}_1=\{\varnothing,\{0\},\{1\},\Omega_1\}, P_1(0)=p, P_1(1)=q,\ p+q=1\ .$$

Тогаш, дискретниот простор на веројатности $(\Omega,\boldsymbol{A},P)$ каде имаме $\Omega=\Omega_1^n$, $P=P_1^n$ го нарекуваме *Бернулиева шема*.

Според тоа, Бернулиевата шема е модел за n независни експерименти кој го има следново олкување: нека некој настан A, кој го нарекуваме *успех*, при секое испитување се реализира со една и иста веројатност p, а спротивниот настан $\overline{A}$ (*неуспех*) при секое испитување се реализира со веројатност $q=1-p$. Во елементарните настани $\omega=(\omega_1,\omega_2,...,\omega_n)$ имаме $\omega_i=1$ ако при $i-$то испитување имаме успех, а $\omega_i=0$ во спротивен случај. Понатаму, од дефиницијата 34 и релацијата (3) во 10.2 следува дека за

$$\Omega=\{\omega\},\ \omega=(\omega_1,...,\omega_n),\ \omega_i\in\{0,1\}$$

важи

$$p(\omega)=\prod_{i=1}^{n} p^{\omega_i} q^{1-\omega_i}\ . \tag{1}$$

Со $B_k=\{\omega \mid \omega_1+...+\omega_n=k\}$ да го означиме настанот кој се состои во тоа да при n испитувања во Бернулиевата шема имаме точно k успеси. Тогаш, од (1) следува дека за $\omega \in B_k$ важи $p(\omega)=p^k q^{n-k}$, па затоа

$$P(B_k)=p^k q^{n-k} \times (\text{бројот на елементарните настани } \omega \in B_k),$$

што значи

$$P(B_k)=C_n^k p^k q^{n-k},\, k=0,1,2,...,n\,. \tag{2}$$

Веројатностите (2) ги нарекуваме *веројатности на биномната распределба*.

Пример 51. Во секој од n независни експерименти изведени под исти услови настанот A се реализира со веројатност p.

а) Најдете ја веројатноста дека настанот A ќе се реализира барем два пати, знаејќи дека $n>2$.

б) Колку треба да биде најмалиот n за да со веројатност не помала од $\alpha \in (0,1)$ може да се тврди дека настанот A ќе се реализира барем еднаш.

Решение. а) Од (2) следува дека веројатностите настанот A да не се случи ниту еднаш и се случи само еднаш се $(1-p)^n$ и $np(1-p)^{n-1}$, соодветно. Според тоа, бараната веројатност е

$$1-(1-p)^n-np(1-p)^{n-1}\,.$$

б) Согласно со размислувањата во а) веројатноста дека настанот A ќе се реализира барем еднаш е $1-(1-p)^n$, па затоа n го определуваме од неравенството $1-(1-p)^n \geq \alpha$, од што се добива

$$n \geq \log_{1-p}(1-\alpha)\,.\ ♦$$

Пример 52. За кое k веројатноста во биномната распределба на настанот B_k е најголема?

Решение. Од (2) имаме

$$\begin{aligned} P(B_k)-P(B_{k-1}) &= C_n^k p^k q^{n-k} - C_n^{k-1} p^{k-1} q^{n-k+1} \\ &= \tfrac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} - \tfrac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} p^{k-1} q^{n-k+1} \\ &= \tfrac{n!}{(k-1)!(n-k)!} p^{k-1} q^{n-k} (\tfrac{p}{k}-\tfrac{q}{n-k+1}) \\ &= \tfrac{n!}{(k-1)!(n-k)!} p^{k-1} q^{n-k} \tfrac{np-pk+p-qk}{k(n-k+1)} \\ &= \tfrac{n!}{k!(n-k+1)!} p^{k-1} q^{n-k} ((n+1)p-k). \end{aligned}$$

Можни се два случаи.

а) Ако $(n+1)p$ е цел број, тогаш за $k<(n+1)p$ важи

$$P(B_k)>P(B_{k-1}),$$

т.е. веројатностите растат и за $k=(n+1)p$ важи $P(B_k)=P(B_{k-1})$ и потоа веројатностите опаѓаат. Според тоа, во овој случај имаме две вредности на k за кои веројатноста во биномната распределба на настанот B_k е најголема.

б) Ако $(n+1)p$ не е цел број, тогаш до $k=[(n+1)p]$ веројатностите растат, најголема веројатност има настанот B_k, $k=[(n+1)p]$, а потоа веројатностите опаѓаат. ♦

Пример 53. а) Хомогена коцка за играње се фрла n пати. Веројатноста дека ќе падне шестка во секое од овие фрлања е $p=\frac{1}{6}$. Веројатноста на настанот дека во сите n фрлања шестка ќе падне точно k пати, каде $k\in\{0,1,2,...,n\}$ е дадена со

$$C_n^k(\tfrac{1}{6})^k(\tfrac{5}{6})^{n-k}=C_n^k\frac{5^{n-k}}{6^n}\,.\ ♦$$

б) При прегледот на еден пациент симптомите наведуваат на три болести A,B и C, со веројатности на болестите A,B и C:

$$p_1=\tfrac{1}{2},\ \ p_2=\tfrac{1}{6}\ \text{и}\ p_3=\tfrac{1}{3},$$

соодветно. За да се утврди вистинската дијагноза направена е нова анализа, која дава позитивен резултат со веројатност: 0,1 во случај на болеста A, 0,2 во случај на болеста B и 0,9 во случај на болеста C. Анализата е извршена пет пати и притоа четири пати е добиен позитивен резултат. Која е веројатноста дека пациентот боледува од секоја од болестите A,B и C?

Според формулата (2), при $p=0,1$ и $q=0,9$ во случајот на болеста A веројатноста дека анализата потврдува дека пациентот боледува од оваа болест е

$$q_1=C_5^4\cdot0,1^4\cdot0,9\,.$$

Аналогно за болестите *B* и *C* имаме

$$q_2=C_5^4\cdot0,2^4\cdot0,8$$

и

$$q_3=C_5^4\cdot0,9^4\cdot0,1$$

соодветно. Сега, со примена на Бејесовите формули за веројатноста дека пациентот боледува од болеста A добиваме

$$P(A)=\frac{p_1q_1}{p_1q_1+p_2q_2+p_3q_3}=\frac{\frac{1}{2}\cdot0,1^4\cdot0,9}{\frac{1}{2}\cdot0,1^4\cdot0,9+\frac{1}{6}\cdot0,2^4\cdot0,8+\frac{1}{3}\cdot0,9^4\cdot0,1}\approx0,002\,.$$

На ист начин, за веројатноста дека пациентот боледува од болеста B наоѓаме

$$P(B)=\frac{p_2q_2}{p_1q_1+p_2q_2+p_3q_3}=\frac{\frac{1}{3}\cdot 0{,}2^4\cdot 0{,}8}{\frac{1}{2}\cdot 0{,}1^4\cdot 0{,}9+\frac{1}{6}\cdot 0{,}2^4\cdot 0{,}8+\frac{1}{3}\cdot 0{,}9^4\cdot 0{,}1}\approx 0{,}01$$

и за болеста C имаме

$$P(C)=\frac{p_3q_3}{p_1q_1+p_2q_2+p_3q_3}=\frac{\frac{1}{3}\cdot 0{,}9^4\cdot 0{,}1}{\frac{1}{2}\cdot 0{,}1^4\cdot 0{,}9+\frac{1}{6}\cdot 0{,}2^4\cdot 0{,}8+\frac{1}{3}\cdot 0{,}9^4\cdot 0{,}1}\approx 0{,}988\ .$$

Како што можеме да забележиме, после извршената анализа веројатноста $P(C)$ е многу блиска до 1, па затоа логично е лекарот да се заклучи дека пациентот боледува од болеста C . ♦

Дефиниција 35. Нека $\Omega_1=\{1,2,...,r\}$, $p_1,p_2,...,p_r$ се веројатностите на елементарните настани $\omega_1=\{1\},\omega_2=\{2\},...,\omega_r=\{r\}$, соодветно ($p_1+...+p_r=1$), а $\boldsymbol{A}_1$ се состои од сите подмножества од Ω_1. Тогаш, дискретниот простор на веројатности $(\Omega,\boldsymbol{A},P)$ каде имаме $\Omega=\Omega_1^n$, $P=P_1^n$ го нарекуваме *полиномна шема.*

Во директниот производ на просторите на веројатности $(\Omega,\boldsymbol{A},P)$ елементарен настан $\omega\in\Omega$ е настанот $\omega=(\omega_1,\omega_2,...,\omega_n)$, каде ω_i е бројот на резултатот при $i-$от експеримент. Понатаму, од дефиницијата 35 и релацијата (3) во 10.2 следува дека за $\omega=(\omega_1,\omega_2,...,\omega_n)$ важи

$$p(\omega)=p_{\omega_1}p_{\omega_2}\cdots p_{\omega_n}\,. \tag{3}$$

Ќе ја пресметаме веројатноста на настанот

$B_{n_1n_2...n_r}=\{$во n независни експерименти имаме точно по n_k k-ти исходи$\}$

каде

$$n=n_1+n_2+...+n_r\,.$$

Бидејќи за секој $\omega\in B_k$ важи

$$p(\omega)=\prod_{k=1}^{r}p_k^{n_k}\ ,$$

а бројот на елементите на $B_{n_1n_2...n_r}$ е еднаков на $\frac{n!}{n_1!n_2!...n_r!}$ добиваме

$$P(B_{n_1n_2...n_r})=\frac{n!}{n_1!n_2!...n_r!}p_1^{n_1}p_2^{n_2}...p_r^{n_r}\ , \tag{4}$$

$n=n_1+n_2+...+n_r$, $n_1,n_2,...,n_r\in\{0,1,2,...,n\}$. Распределбата (4) ја нарекуваме *полиномна*, а опишаната шема на независни испитувања со r резултати исто така ја нарекуваме *полиномна*. Да забележиме дека за $r=2$ полиномната шема всушност е биномната шема, па затоа истата во литературата може да се сретне и под името *генерализирана Бернулиева шема.*.

Пример 54. Нехомогена коцка за играње е конструирана така што при фрлање на рамнина веројатноста да падне страната на која имаме i точки, $i=1,2,3,4,5,6$

е еднаква на $p_i = \frac{i}{21}$, $i = 1,2,3,4,5,6$. Колкава е веројатноста на настанот A: при дваесет и едно фрлање на коцката страната на која имаме i точки да падне i пати, $i = 1,2,3,4,5,6$.

Решение. Очигледно станува збор за полиномна шема во која $n = 21$, $p_i = \frac{i}{21}$, $i = 1,2,3,4,5,6$ и $n_i = i,\ i = 1,2,3,4,5,6$. Ако ја искористиме формулата (4), тогаш

$$P(A) = \frac{21!}{1!2!3!4!5!6!}\,\frac{1^1 2^2 3^3 4^4 5^5 6^6}{21^{21}}\,.$$ ♦

10.4. БЕСКОНЕЧНО ПОВТОРУВАЊЕ НА ЕКСПЕРИМЕНТИ

Нека претпоставиме дека имаме недерминиран експеримент со два можни исходи и нека $\Omega_1 = \{0,1\}$ е придружениот простор елементарни настани, $(\Omega_1, \boldsymbol{A}_1, P_1)$ е соодветниот простор на веројатности, $P_1(1) = p,\ {}_1(0) = q,\ p+q = 1$. Сега ќе ја разгледаме конструкцијата на бесконечна низа независни експерименти со два можни исходи во секој експеримент.

Нека

$$\Omega = \Omega_1^{\infty} = \{\omega = \{\omega_n\},\ \omega_n = 0 \text{ или } 1,\ n \in \mathbf{N}\}\,. \tag{1}$$

Јасно, ова множество е непребројливо и има кардинален број на континиум.

Дефиниција 36. Нека $E_k \subseteq \Omega_1^k$ и $n_i \in \mathbf{N}$, $i = 1,2,...,k$, $n_1 < n_2 < ... < n_k$. Множеството

$$A_{n_1 n_2 ... n_k}(E_k) = \{\omega \in \Omega \mid (\omega_{n_1}, \omega_{n_2}, ..., \omega_{n_k}) \in E_k\} \tag{2}$$

го нарекуваме *цилиндар со база* E_k *над координатите* $n_1, n_2, ..., n_k$.

Пример 55. Имаме

$$\begin{gathered} A_1(\{0\}) = \{\omega \mid \omega_1 = 0\} = \{(0, \omega_2, ..., \omega_n)\},\ A_1(\{1\}) = \{\omega \mid \omega_1 = 1\} = \{(1, \omega_2, ..., \omega_n)\} \\ A_{12}(\{(1,0),(1,1)\}) = \{\omega \mid \omega_1 = 1, \omega_2 = 0 \text{ или } \omega_1 = 1, \omega_2 = 1\} = \{(1, \omega_2, ..., \omega_n)\} \end{gathered} \tag{3}$$

следува дека дека репрезентацијата на цилиндарот $A_{n_1 n_2 ... n_k}(E_k)$ во (2) не е единствена. Имено, цилиндрите $A_1(\{1\})$ и $A_{12}(\{(1,0),(1,1)\})$ се совпаѓаат. ♦

Со $\boldsymbol{A}_0$ да ја означиме фамилијата од сите цилиндри во Ω. Ќе докажеме дека формално можеме да го зголемиме бројот на координатите во приказот на секој цилиндар така да за произволно конечно множество цилиндри можеме да земеме дека се зададени над исто множество координати.

Навистина, нека $A_{n_1 n_2 ... n_k}(E_k)$ и $A_{n_1' n_2' ... n_j'}(E_j')$ се два произволни цилиндри и

нека

$$\{n_1,n_2,...,n_k\}\cup\{n_1',n_2',...,n_j'\}=\{n_1'',n_2'',...,n_l''\},$$

каде $n_1''<n_2''<...<n_l''$. Дефинираме пресликувања $\pi_{l,k}:\Omega_1^l\to\Omega_1^k$ и $\pi_{l,j}:\Omega_1^l\to\Omega_1^j$ со:

$$\pi_{l,k}(x_{n_1''},x_{n_2''},...,x_{n_l''})=(x_{n_1},x_{n_2},...,x_{n_k}),$$
$$\pi_{l,k}(x_{n_1''},x_{n_2''},...,x_{n_l''})=(x_{n_1'},x_{n_2'},...,x_{n_j'})$$

и нека $F_l=\pi_{l,k}^{-1}(E_k),\ F_l'=\pi_{l,j}^{-1}(E_j')$. Тогаш очигледно важи

$$A_{n_1n_2...n_k}(E_k)=A_{n_1''n_2''...n_l''}(F_l)\ \text{ и }\ A_{n_1'n_2'...n_j'}(E_j')=A_{n_1''n_2''...n_l''}(F_l'),$$

од што следува дека $\boldsymbol{A}_0$ е алгебра на Ω, (проверете!).

Дефинираме функција $P':\boldsymbol{A}_0\to\mathbf{R}$ така да за секој цилиндар определен со (2) ставаме

$$P'(A_{n_1n_2...n_k}(E_k))=\sum_{(\omega_{n_1},...,\omega_{n_k})\in E_k}p^{\omega_{n_1}}q^{1-\omega_{n_1}}...p^{\omega_{n_k}}q^{1-\omega_{n_k}}\ .\qquad(4)$$

Од $p+q=1$ следува дека функцијата P' е добро дефинирана на $\boldsymbol{A}_0$, т.е. (4) не зависи од репрезентацијата на цилиндарот $A_{n_1n_2...n_k}(E_k)$, (докажете!). Ќе докажеме дека функцијата P' е конечно адитивна на $\boldsymbol{A}_0$. Нека $C_1,C_2\in\boldsymbol{A}_0, C_1\cap C_2=\varnothing$. Од претходно изнесеното следува дека без ограничување на општоста можеме да земеме

$$C_1=A_{12...n}(E_n'),\ C_2=A_{12...n}(E_n''),$$

и тогаш $E_n'\cap E_n''=\varnothing$. Но, $C_1\cup C_2=A_{12...n}(E_n'\cup E_n'')$, па затоа

$$\begin{aligned}P'(C_1\cup C_2)&=\sum_{(\omega_1,...,\omega_1)\in E_n'\cup E_n''}p^{\omega_{n_1}}q^{1-\omega_{n_1}}...p^{\omega_{n_k}}q^{1-\omega_{n_k}}\\&=\sum_{(\omega_1,...,\omega_1)\in E_n'}p^{\omega_{n_1}}q^{1-\omega_{n_1}}...p^{\omega_{n_k}}q^{1-\omega_{n_k}}+\sum_{(\omega_1,...,\omega_1)\in\cup E_n''}p^{\omega_{n_1}}q^{1-\omega_{n_1}}...p^{\omega_{n_k}}q^{1-\omega_{n_k}}\\&=P'(C_1)+P'(C_2).\end{aligned}$$

Освен тоа,

$$P'(\Omega)=P'(A_1(\{0,1\}))=p+q=1\ \text{ и }\ P'(C)\geq0,\ C\in\boldsymbol{A}_0.$$

Нека, $A_n\in\boldsymbol{A}_0,\ n\in\mathbf{N}, A_n\supseteq A_{n+1}$, за секој $n\in\mathbf{N}$ и $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n=\varnothing$. Тогаш постои $n_0\in\mathbf{N}$ таков што $A_n=\varnothing$, за $n\geq n_0$, бидејќи во спротивно заради (2) ќе важи $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n\neq\varnothing$, (зошто?). Според тоа, $\lim\limits_{n\to\infty}P'(A_n)=0$. Конечно, согласно со дефиниција 11 функцијата P' е веројатностна мера на $\boldsymbol{A}_0$.

Според тоа $\boldsymbol{A}_0$ е алгебра настани (подмножества од Ω) и P' е веројатностна мера дефинирана на алгебрата $\boldsymbol{A}_0$. Сега од теорема 5 следува дека постои единствена веројатностна мера P , која е дефинирана на минималната $\sigma-$ алгебра $\sigma(\boldsymbol{A}_0)$, таква што за секој настан $A \in \boldsymbol{A}_0$ важи $P(A) = P'(A)$. Конечно, добивме простор на веројатности $(\Omega, \sigma(\boldsymbol{A}_0), P)$ кој е математички модел за бесконечна низа независни експерименти.

Пример 56 (проблем на коцкаровата загуба). Нека претпоставиме дека коцкар започнува игра со x денари и дека игра низа игри со противник кој располага со $b-x$ денари. Во секоја игра (експеримент) коцкарот добива 1 денар со веројатност p, а губи 1 денар со веројатност $q = 1-p$. Нека претпоставиме дека игрите се независни и дека $0 < p < 1$, $0 < x < b$. Играта трае се додека капиталот на играчот не биде 0 (загуба) или b (добивка). Ќе ја пресметаме веројатноста $h(x)$ играчот да ја изгуби играта.

Да ги разгледаме настаните

$A =$ {Играчот ја изгубил играта},
$H_1 =$ {Играчот добил во првата игра},
$H_2 =$ {Играчот изгубил во првата игра} .

Од формулата за полна веројатност следува

$$P(A) = P(H_1)P_{H_1}(A) + P(H_2)P_{H_2}(A),$$

а оттука добиваме

$$h(x) = ph(x+1) + qh(x-1), \quad h = 1, 2, 3, ..., b-1 . \tag{5}$$

Според тоа, веројатноста $h(x)$ играчот да ја изгуби играта ја задоволува диференцната равенка (5). Јасно, почетните услови за оваа равенка се $h(0) = 1$, $h(b) = 0$. Равенката (5) ќе ја запишеме во еквивалентниот вид

$$ph(x+2) - h(x+1) + qh(x) = 0, \quad h = 0, 1, 2, 3, ..., b-2 , \ h(0) = 1, \ h(b) = 0 . \tag{6}$$

Карактеристичната равенка на равенката (6) е

$$p\lambda^2 - \lambda + q = 0 \tag{7}$$

и нејзини решенија се

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1-4pq}}{2p} = \frac{1 \pm \sqrt{(p+q)^2 - 4pq}}{2p} = \frac{1 \pm \sqrt{(p-q)^2}}{2p} = \frac{1 \pm |p-q|}{2p},$$

односно $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \frac{q}{p}$. Можни се два случаја:

а) ако $p \neq q$, тогаш $\lambda_1 \neq \lambda_2$, па затоа решението на равенката (6) е

$$h(x) = C_1\lambda_1^x + C_2\lambda_2^x = C_1 + C_1(\tfrac{q}{p})^x ,$$

и ако ги искористиме почетните услови го добиваме системот

$$\begin{cases} C_1 + C_1(\frac{q}{p})^0 = h(0) = 1 \\ C_1 + C_1(\frac{q}{p})^b = h(b) = 0 \end{cases}$$

чие решение е $C_1 = \frac{-(\frac{q}{p})^b}{1-(\frac{q}{p})^b}$, $C_1 = \frac{1}{1-(\frac{q}{p})^b}$, па затоа

$$h(x) = \frac{(\frac{q}{p})^x - (\frac{q}{p})^b}{1-(\frac{q}{p})^b} . \tag{8}$$

б) Ако $p = q = \frac{1}{2}$, тогаш $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, па затоа $h(x) = C_1 + C_2 x$ и ако искористат почетните услови добиваме

$$h(x) = 1 - \frac{x}{b} . \tag{9}$$

Нека сега $g(x)$ е веројатноста играчот да ја добие играта. Не можеме одма да заклучиме дека $g(x) = 1 - h(x)$, бидејќи може да се случи играта никогаш да не заврши, т.е. капиталот на играчот секогаш да варира меѓу 1 и $b-1$. Но, ќе докажеме дека веројатноста на овој настан е еднаква на 0. Аналогно како за равенката (5) добиваме

$$g(x) = pg(x+1) + qg(x-1),\ x = 1, 2, ..., b-1,\ g(0) = 0,\ g(b) = 1. \tag{10}$$

Со непосредна проверка добиваме дека $g(x) = 1 - h(x)$ ја задоволува равенката (10), па како решението на (10) е единствено заклучуваме дека мора да важи

$$g(x) = 1 - h(x)$$

од што следува дека играта завршува со веројатност 1.

Да видиме како изгледа просторот на веројатности во рамките на кој го решаваме поставениот проблем. Нека $\Omega_1 = \{-1, 1\}$, а $(\Omega_1, \boldsymbol{A}_1, P_1)$ е просторот на веројатности кој е модел за еден експеримент, $P_1(1) = p,\ P_1(-1) = q$. Нека $\Omega = \Omega_1^\infty$, $\boldsymbol{A}_0$ е алгебрата од сите цилиндри во Ω и $(\Omega, \sigma(\boldsymbol{A}_0), P)$ е просторот веројатности чија конструкција ја опишавме на почетокот на оваа точка. Јасно, $(\Omega, \sigma(\boldsymbol{A}_0), P)$ е математичкиот модел за оваа игра. ♦

ЗАДАЧИ

1. Нека е $(\Omega, \boldsymbol{A}, P)$ низа од независни експерименти, каде $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times ... \times \Omega_n$ и $P = \prod_{r=1}^{n} P_r$. Нека се $\{i_1, i_2, ..., i_k\}$ и $\{j_1, j_2, ..., j_l\}$ две дисјунктни подмножества на множеството $\{1, 2, ..., n\}$, $A_{i_p} \subseteq \Omega_{i_p}$, $B_{j_q} \subseteq \Omega_{j_q}$, $p = 1, 2, ..., k; q = 1, 2, ..., l$ и нека $A, B \subseteq \Omega$ се дефинирани со

$$A = \{\omega = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n) \in \Omega,\ \omega_{i_p} \in A_{i_p},\ p = 1, 2, ..., k\},$$
$$B = \{\omega = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n) \in \Omega,\ \omega_{j_q} \in B_{j_q},\ q = 1, 2, ..., l\}.$$

Докажете дека A B се независни настани во $(\Omega, \boldsymbol{A}, P)$.

2. Авион се изгубил во еден од два сектори. Веројатноста авионот да се наоѓа во првиот сектор е 0,8, а веројатноста да се наоѓа во вториот сектор е о,2. За наоѓање на авионот на располагање се 14 хеликоптери, секој од кои може да се употреби само во еден од двата сектори. Како треба да се распределат хеликоптерите по сектори за да веројатноста за наоѓање на авионот биде максимална, ако секој хеликоптер го наоѓа авионот во секторот во кој е распореден со веројатност 0,4, а пребарувањата се меѓусебно независни? Најдете ја веројатноста за наоѓање на авионот при оптимална процедура.

3. Група од три авиони напаѓа еден објект. Објектот го штитат четири батерии противавионски ракети. Секоја батерија покрива аголен сектор од 60^0, така што од полниот агол околу објектот се заштитени 240^0. Ако авионот прелета низ заштитениот сектор, го погаѓаат и го соборуваат со веројатност p, а низ незаштитен сектор авионот поминува без опасност. Секој авион кој ќе се пробие до објектот фрла една бомба и го погаѓа објектот со веројатност p^*. Посадите на авионите не знаат како се распоредени противавионските батерии. Најдете ја веројатноста дека објектот ќе биде погоден ако нападот е организираа така што:
   a) Сите три авиони авиони летаа по иста случајно избрана патека,
   b) Секој авион лета по патека која случајно избира патека, независно од другите авиони.

4. Група од три авиони е испратена во непријателски сектор да ги определи координатите на објект кој ќе се гаѓа со ракети. Објектот ќе се гаѓа со n ракети. Ако координатите на објектот се определени, веројатноста за погаѓање на објектот со една ракета е p_1, а ако не се определени, таа веројатност е p_2 ($p_1 > p_2$). Секој авион при прелетувањето на непријателскиот сектор може да биде соборен со веројатност p_3. Ако авионот не е соборен, тогаш тој ги соопштува координатите на објектот. Радио-апаратурата на авионот има сигурност p_4. За одредување на координатите на објектот доволно е да се прими соопштение барем од еден авион. Најдете ја веројатноста дека објектот ќе биде погоден.

5. Десет топчиња независно ги фрламе во пет кутии, при што секое топче со иста веројатност може да падне во произволна кутија. Колкава е веројатноста дека сите кутии ќе содржат ист број топчиња?

6. Веројатноста на настанот A во секој од n експерименти е еднаква на p. Колкава е веројатноста $P_{n,m}$ дека бројот на последователните реализации на настанот A при овие n експерименти е помал од m ($n \le 2m$)?

7. Вршиме n независни експерименти. Нека p_i, $i=1,2,...,n$ е веројатноста да се реализира настанот A во $i-$от експеримент. Со $P_n(m)$ да ја означиме веројатноста дека настанот A ќе се реализира точно m пати во текот на овие n експерименти ($m=0,1,...,n$). Докажете дека важи

$$\frac{P_n(1)}{P_n(0)} \ge \frac{P_n(2)}{P_n(1)} \ge ... \ge \frac{P_n(n)}{P_n(n-1)}.$$

8. Веројатноста за реализирање на настанот A во секој одделен експеримент е еднаква на 0,1. Експериментите се меѓусебно независни. Колку експерименти треба да се направат за да со веројатност поголема или еднаква на 0,9 настанот A се реализира најмалку 6 пати?

9. Играчите A и B играат низа тениски гемови секој од кои завршува со победа на едниот, односно загуба на другиот. Веројатноста A да го победи B во секој одделен гем е еднаква на p. Пред почетокот на натпреварот било договорено колку гемови треба да победи еден играч за да биде победник во натпреварот, но натпреварот е прекинат пред некој од играчите да го освои потребниот број гемови.

   a) Колкава е веројатноста за победа на играчот *A* ако тој треба да победи уште во два гема, а играчот *B* треба да победи уште во три гема.
   b) Колкава е веројатноста за победа на играчот *A* ако тој треба да победи уште во m гемови, а играчот *B* треба да победи уште во n гемови.

10. Топовска батерија испукала 14 гранати на еден воен објект, при што веројатноста за погодок на секоја граната е еднаква на 0,2 (пукањата се независни). Пресметајте
    a) Најверојатниот број погодоци и неговата веројатност,
    b) Веројатноста за уништување на објект, ако за истото се потребни барем 4 погодоци.

11. Авион се напаѓа со n независни гаѓања на противавионски ракети. Секоја ракета со веројатност p_1 оштетува дел од авионот после кој истиот одма паѓа, со веројатност p_2 го погодува резервоарот за гориво и со веројатност p_3 воопшто не го погодува авионот, $p_1 + p_2 + p_3 = 1$. Ракетата која го погодува резервоарот за гориво предизвикува негово истекување и тоа по k литри во минута. После загуба од M литри гориво авионот не е веќе борбено способен. Пресметајте ја веројатноста дека една минуа после нападот авионот нема да биде борбено способен.

12. Играчите *A* и *B* играат низа партии во игра во која победникот на секоја партија освојува 1 поен. Веројатноста да победи играчот *A* во одделна партија е *p*, а веројатноста да победи играчот *B* е *q*, $p+q=1, p>q$, независно од партија. За победник во играта се смета оној играч кој во првиот момент ќе направи разлика 2 во поени.
    a) Најдете ги веројатностите за победа во играта на секој играч.
    b) Што е поверојатно за играчот *A*: дека ќе добие една партија или целата игра.

ГЛАВА II
ДИСКРЕТНИ СЛУЧАЈНИ ПРОМЕНЛИВИ

1. ПОИМ ЗА ДИСКРЕТНА СЛУЧАЈНА ПРОМЕНЛИВА

Често пати во секојдневниот живот, игрите или научните истражувања се среќаваме со величини чии вредности се менуваат од случај до случај. На пример, бројот на автомобилите кои минуваат низ раскрсницата во текот на еден час или бројот на остварените телефонски разговори од една говорница во текот на еден ден итн. Во секој од овие примери величината за која станува збор може да прими некоја од вредностите $0,1,2,3,...,M$, каде M е некој природен број. Ако се фрлаат две хомогени коцки за играње и се пресметува аритметичката средина на добиените броеви, тогаш оваа величина прима вредности од множеството броеви $\{\frac{k}{2}\,|\,k=2,3,...,12\}$. Меѓутоа, за подобро разбирање на оваа величина не е доволно да се знаат само нејзините вредности, туку пожелно е да се знае со кои веројатности величината ги прима одделните вредности. Величните од опишаниот тип ќе ги нарекуваме случајни променливи. Поточно ја имаме следнава дефиниција.

Дефиниција 1. Нека $(\Omega,\mathcal{A},P)$ е дискретен простор на веројатности. *Дискретна случајна променлива* е таква функција $X:\Omega\to\mathbf{R}$ која прима вредности

$$x_1,x_2,x_3,... \tag{1}$$

со веројатности

$$P(x_1),P(x_2),P(x_3),..., \tag{2}$$

соодветно, при што важи

$$\sum_i P(x_i)=1. \tag{3}$$

Според тоа, кога ќе кажеме дека е зададена дискретна случајна променлива X, ќе подразбираме дека се зададени вредностите (1) на функцијата $X:\Omega\to\mathbf{R}$ и соодветните веројатности (2). За означување на случајните променливи ќе ги користиме големите букви на латиничната азбука $X,Y,Z,U,V,...$. Нека X е случајна променлива и $B\subseteq\mathbf{R}$. Во натамошните разгледувања ќе ги користиме ознаките

$$X^{-1}(B)=\{\omega\in\Omega\,|\,X(\omega)\in B\}=\{X\in B\}\text{ и }P(\{X\in B\})=P\{X\in B\}=P(X\in B).$$

Понатаму, ако $B=(a,b)$ ставаме $X^{-1}(B)=\{a<X<b\}=(a<X<b)$, ако $B=(-\infty,a]$ ставаме $X^{-1}(B)=\{X\le a\}=(X\le a)$, ако $B=\{a\}$ ставаме $X^{-1}(B)=\{X=a\}=(X=a)$ итн.

Пример 1. Монета се фрла два пати. Просторот елементарни настани е $\Omega=\{PP,PG,GP,GG\}$. Нека веројатноста на секој елементарен настан е $\frac{1}{4}$. Ќе дефинираме три случајни променливи.

а) Нека X_1 е бројот на појавување на писмо во двете фрлања на монетата, т.е.

$$X_1(GG)=0,\ X_1(PG)=X_1(GP)=1,\ X_1(PP)=2\,.$$

б) Нека X_2 прима вредност 0 ако прво падне грб, а вредност 1 ако прво падне писмо, т.е.

$$X_2(GG)=X_2(GP)=0,\ X_2(PG)=X_2(PP)=1.$$

в) $X_3=X_1+X_2$, т.е.

$$X_3(GG)=0,\ X_3(GP)=1,\ X_3(PG)=2,\ X_3(PP)=3\,.\ \blacklozenge$$

Пример 2. Во Бернулиевата шема на независни испитувања множеството Ω се состои од елементарни настани $\omega=(\omega_1,\omega_2,...,\omega_n)$, каде $\omega_i=1$, ако при $i-$от експеримент имаме успех, и $\omega_i=0$, ако при $i-$от експеримент имаме неуспех. Случајната променлива

$$X=X(\omega)=\sum_{i=1}^{n}\omega_i$$

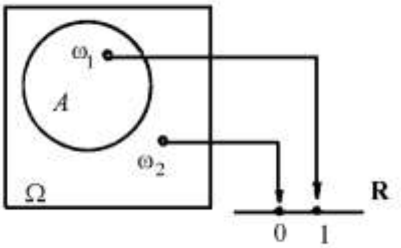
е еднаква на бројот на успесите при n испитувања во Бернулиевата шема. ♦

Пример 3. Нека во кутија имаме N топчиња, од кои M се бели, а останатите се црни. Со влечење без враќање извлекуваме n топчиња. Топчињата се нумерирани со броевите $1,...,N$, при што белите топчиња се нумерирани со броевите $1,2,...,M$. Тогаш, множеството Ω се состои од елементарни настани, кои се состојат од подмножества $\omega=\{i_1,i_2,...,i_n\}$, $i_1<i_2<...<i_n$ на множеството $\{1,2,...,N\}$. Елементарниот настан $\omega=\{i_1,i_2,...,i_n\}$ соодветствува на изборот во кој влегле топчињата означени со бревите $i_1,i_2,...,i_n$. Случајната променлива X, еднаква на бројот на белите топчиња во изборот, се определува како функција од ω на следниот начин: $X(\omega)=m$, ако $\omega=\{i_1,i_2,...,i_n\}$, $i_m\le m<i_{m+1}$ кога $1\le m<n$; $\xi(\omega)=0$, ако $M<i_1$; $X(\omega)=n$ ако $i_n\le M$. ♦

Дефиниција 2. Нека $A\subset\Omega$ е произволен настан во просторот $(\Omega,\boldsymbol{A},P)$. Случајната променлива $I_A:\Omega\to\mathbf{R}$ определена со

$$I_A(\omega)=\begin{cases}1, & \omega\in A,\\ 0, & \omega\notin A,\end{cases}$$

$\omega\in\Omega$, ја нарекуваме *индикатор* (*карактеристична* функција) на настанот A, цртеж 1.



Цртеж 1

Во пример 1 случајната променлива X_2 е индикаторот на настанот

$$A=\{PG,PP\}\,.$$

Лема 1. а) За индикаторите на настаните важат следните равенства:

$$I_{\varnothing} \equiv 0, \quad I_{\Omega} \equiv 1, \quad I_{AB} = I_A I_B, \quad I_{\overline{A}} = 1 - I_A . \tag{4}$$

б) Ако настаните $A_i, i = 1, 2, ..., n$ се по парови дисјунктни, тогаш

$$I_{\sum\limits_{k=1}^{n} A_k} = \sum_{k=1}^{n} I_{A_k} .$$

Доказ. Непосредно следува од дефиниција 2. ♦

Теорема 1. За секои настани $A_i, i = 1, 2, ..., n$ важи

$$I_{\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k} = \sum_{k=1}^{n} I_{A_k} - \sum_{1 \le k < l \le n} I_{A_k A_l} + \sum_{1 \le k < l < m \le n} I_{A_k A_l A_m} - ... + (-1)^n I_{A_1 A_2 ... A_n} . \tag{5}$$

Доказ. Од $\overline{\bigcup\limits_k A_k} = \bigcap\limits_k \overline{A_k}$, користејќи ги својствата (4) го добиваме равенството

$$I_{\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k} = 1 - I_{\overline{\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k}} = 1 - I_{\bigcap\limits_{k=1}^{n} \overline{A_k}} = 1 - \prod_{k=1}^{n} I_{\overline{A_k}} = 1 - \prod_{k=1}^{n} (1 - I_{A_k}) ,$$

кое е еквивалентно на равенството (5). ♦

Забелешка 1. Веројатноста индикаторот на настанот A да прими вредност 1 е еднаква на веројатноста на настанот A. Навистина,

$$P\{I_A = 1\} = P\{\omega \mid \omega \in A\} = P(A) .$$

Јасно, веројатноста индикаторот на настанот A да прими вредност 0 е

$$1 - P(A) = P(\overline{A}) . ♦$$

Лема 2. Со $x_1 < x_2 < ... < x_k < ...$ да ги означиме сите вредности кои ги прима случајната променлива X. Постои разбивање α_X кое се состои од настаните

$$A_i = \{\omega \mid X(\omega) = x_i\} ,\ i = 1, 2, ..., k, ...$$

Доказ. Навистина, бидејќи $x_i \neq x_j$ добиваме дека $A_i A_j = \varnothing$ за $i \neq j$, т.е. настаните $A_i, i = 1, 2, ..., k$ се дисјунктни. Сега, бидејќи $x_1, x_2, ..., x_k, ...$ се сите вредности на случајната променлива X добиваме дека збирот $A_1 + ... + A_k + ...$ е сигурниот настан Ω што значи дека $A_i = \{\omega \mid X(\omega) = x_i\}$, $i = 1, 2, ..., k, ...$ е разбивање на Ω. ♦

Дефиниција 3. Разбивањето α_X од лема 2 генерира $\sigma-$алгебра настани $\boldsymbol{A}_X$, која се состои од настаните, кои можат да се запишат во видот

$$\{X \in B\} = \{\omega \mid X(\omega) \in B\} ,\ B \subseteq \mathbf{R} .$$

За разбивањето α_X и $\sigma-$алгебрата $\boldsymbol{A}_X$ ќе велиме дека се *генерирани од случајната променлива* X.

Забелешка 2. Секој настан $\{X \in B\}$ може да се запише во вид на збир $\sum\limits_{i} A_i$, каде сумирањето е по оние i, за кои $x_i \in B$. Понатаму, случајната променлива X може да се изрази со помош на индикаторите на разбивањето $A_1 + ... + A_k + ... = \Omega$ и притоа имаме

$$X = X(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i I_{A_i}(\omega), \tag{6}$$

бидејќи како левата, така и десната страна на равенството (6) прима една и иста вредност x_i кога $\omega \in A_i$.

Дефиниција 4. Соодветствието меѓу вредностите на дискретната случајна променлива (1) и припадните веројатности (2) го нарекуваме *закон на распределба на случајната променлива*.

Забелешка 3. а) Во поедноставни случаи, ако ја прифатиме ознаката

$$p_i = P\{X = x_i\} = P\{\omega \,|\, X(\omega) = x_i\}, \;\; i = 1, 2, 3, ...$$

законот на распределба на случајната променлива X можеме да го запишеме со помош на табелата 1.

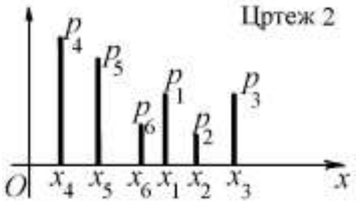
X	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_{k-1}	x_k	$\cdots$
p	p_1	p_2	p_3	$\cdots$	p_{k-1}	p_k	$\cdots$

Табела 1. *Закон на распределба на случајната променлива* X

Понатаму, ако е познат законот на распределба на случајната променлива X, тогаш за секое множество $B \subseteq \mathbf{R}$ е определена веројатност на настанот: X прима вредност од множеството B. Оваа веројатност е еднаква на збирот на веројатностите да случајната променлива X ги прима оние вредности $x_1, x_2, x_3, ...$ кои припаѓаат на множеството B, т.е.

$$P_X(B) = P\{X \in B\} = \sum_{i:\, x_i \in B} p_i .$$

б) Законот на распределба на случајната променлива X можеме да го претставиме графички (цртеж 2). Притоа на апсисната оска во Декартов правоаголен координатен систем ги нанесуваме координатите на точките x_i, $i = 1, 2, ...$ и од секоја точка во позитивната насока на ординатната оска нанесуваме отсечка со должина еднаква на вредноста на соодветната веројатност p_i. Ваквиот графички приказ е полезен при наоѓање на различни веројатности поврзани со случајната променлива X. Нека, на пример, треба да ја најдеме веројатноста $F_X(x_0)$ таква што $X \leq x_0$, каде x_0 е некој зададен број. За да ја најдеме оваа веројатност во точката $(x_0, 0)$ повлекуваме нормала на апцисата и ги собираме должините на отсечките кои се наоѓаат на нормалата и се лево од неа.


Цртеж 2

Пример 4. Законот на распределба на индикаторот I_A на настанот A е определен со табелата 2. Јасно на секоја случајна променлива и соодветствува закон на распределба. Овде да забележиме дека на различни случајни променливи може да им соодветствува еден ист закон на распределба. Така, на пример, ако имаме два различни настани A и B, но $P(A) = P(B)$, тогаш различните случајни променливи I_A и I_B имаат еден ист закон на распределба.

0	1
$1-P(A)$	$P(A)$

Табела 2. *Закон на распределба на индикаторот* I_A

Дефиниција 5. Функцијата

$$F_X(x_0) = \sum_{x_i \le x_0} P(x_i)\,,\; x_0 \in \mathbf{R} \tag{7}$$

ја нарекуваме *функција на распределба* на случајната променлива X.

Забелешка 4. Јасно, функцијата на распределба всушност покажува колкава е веројатноста случајната променлива X да ја прими која било вредност која е помала или еднаква на x_0. Според тоа, за случајниот настан $\{x \le x_0\}$ важи:

$$P\{x \le x_0\} = F_X(x_0)\,.$$

Пример 5. Нека е дадена случајната променлива X со закон на распределба

x_i	3	4	5	6	7
p_i	$\frac{2}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{8}{20}$	$\frac{5}{20}$	$\frac{1}{20}$

Непосредно од дефиниција 5 следува дека функцијата на распределба на случајната променлива X е дадена со:

	$x<3$	$3 \le x < 4$	$4 \le x < 5$	$5 \le x < 6$	$6 \le x < 7$	$x \ge 7$
$F_X(x)$	0	$\frac{2}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{14}{20}$	$\frac{19}{20}$	1

и истата може да се запише во видот:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{za} \quad x < 3 \\ 0{,}1 & \text{za} \quad 3 \le x < 4 \\ 0{,}3 & \text{za} \quad 4 \le x < 5 \\ 0{,}7 & \text{za} \quad 5 \le x < 6 \\ 0{,}95 & \text{za} \quad 6 \le x < 7 \\ 1 & \text{za} \quad x \ge 7. \end{cases}$$

Забележуваме дека функцијата F_X монотоно расте, а во секоја од точките 3, 4, 5, 6 и 7 има скок кој е еднаков на веројатноста на настанот да случајната променлива ја прими таа вредност. ♦

Пример 6. Монета се фрла три пати. Нека секој од елементарните настани *GGG, GGP, GPG, PGG, GPP, PGP, PPG, PPP* има веројатност $\frac{1}{8}$ и нека X е бројот на паднатите писма. Законот на распределба на случајната променлива X е даден во следната табела:

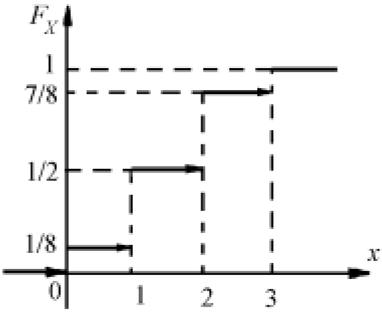
x_i	0	1	2	3
p_i	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Веројатноста на настанот: *случајната променлива* X *прима вредност од интервалот* $[0,2]$ е:

$$P_X([0,2]) = P\{X=0\} + P\{X=1\} + P\{X=2\} = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8}.$$

Функцијата на распределба на случајната променлива X е дадена со

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{za} \quad x < 0 \\ \frac{1}{8}, & \text{za} \quad 0 \le x < 1 \\ \frac{1}{2}, & \text{za} \quad 1 \le x < 2 \\ \frac{7}{8}, & \text{za} \quad 2 \le x < 3 \\ 1, & \text{za} \quad x \ge 3. \end{cases}$$



Цртеж 3

Графикот на функцијата F_X е даден на цртеж 3. ♦

Пример 7. Во кутија се наоѓаат пет исправни и седум неисправни сијалици. Со X да го означиме бројот на исправните сијалици при влечење на четири сијалици. Определи го законот на распределба на случајната променлива X.

Решение. Четири сијалици од вкупно $5+7=12$ сијалици можат да се изберат на C_{12}^4 начини. Притоа, ако со x го означиме бројот на исправните сијалици добиваме дека тие можат да се изберат на $C_5^x C_7^{4-x}$ начини, за $x = 0,1,2,3,4$. Според тоа, веројатноста дека при избор на 4 сијалици имаме x исправни е дадена со

$$P(x) = \frac{C_5^x C_7^{4-x}}{C_{12}^4}, \text{ за } x = 0,1,2,3,4.$$

Законот на распределба на случајната променлива X можеме да го претставиме со следнава табела:

x_i	0	1	2	3	4
p_i	$\frac{7}{99}$	$\frac{35}{99}$	$\frac{42}{99}$	$\frac{14}{99}$	$\frac{1}{99}$

На читателот за вежба му оставаме да ја најде функцијата на распределба на оваа случајна променлива. ♦

Теорема 2. Нека X е дискретна случајна променлива. Тогаш

а) Функцијата на распределба F_X монотоно не опаѓа на целата реална права.

б) Функцијата F_X е непрекината од десно, т.е. ако $\{a_n\}$ е монотоно опаѓачка реална низа таква што $a_n > 0, n = 1, 2, ...$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, тогаш

$$\lim_{n\to\infty} F_X(x + a_n) = F_X(x), \text{ за секој } x \in \mathbf{R}.$$

в) $\lim\limits_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$.

Доказ. а) Нека $x < y$. Тогаш, бидејќи збирот $\sum\limits_{x<x_i\le y} P(x_i)$ е ненегативен добиваме

$$F_X(y) = \sum_{x_i \le y} P(x_i) = \sum_{x_i \le x} P(x_i) + \sum_{x<x_i\le y} P(x_i) \ge \sum_{x_i\le x} P(x_i) = F_X(x),$$

т.е. функцијата F_X монотоно не опаѓа на целата реална права.

б) Нека $\varepsilon > 0$ е дадено. Од $\sum\limits_i p_i = \sum\limits_i P(x_i) = 1$, следува дека постои конечно множество $I_0 \subseteq \mathbf{N}$ такво што $\sum\limits_{i\in I_0} p_i > 1 - \varepsilon$, што значи

$$\sum_{i\notin I_0} p_i < \varepsilon. \tag{8}$$

Но, множеството I_0 е конечно, па затоа постои $\delta > 0$ таков што во интервалот $(x, x+\delta)$ не се содржат елементи од множеството $x_i, i \in I_0$. Понатаму, од условот на теоремата следува дека постои $n_0 \in \mathbf{N}$ е таков што $a_n < \delta$, за секој $n \ge n_0$. Тогаш

$$F_X(x + a_n) = \sum_{x_i \le x + a_n} p_i = \sum_{x_i\le x} p_i + \sum_{x<x_i\le x+a_n} p_i = F_X(x) + \sum_{x<x_i\le x+a_n} p_i\ ,$$

за секој $n \ge n_0$, и како F_X е монотона добиваме

$$0 \le F_X(x+a_n) - F_X(x) = \sum_{x<x_i\le x+a_n} p_i\ , \tag{9}$$

за секој $n \ge n_0$. Од друга страна, од неравенствата $x < x_i \le x + a_n$ и $a_n < \delta$, за секој $n \ge n_0$ следува дека $x < x_i < x + \delta$, па затоа $i \notin I_0$, што според (8) значи дека

$$0 \le \sum_{x<x_i\le x+a_n} p_i \le \sum_{i\notin I_0} p_i < \varepsilon. \tag{10}$$

Конечно, од неравенствата (9) и (10) следува дека

$$0 \le F_X(x+a_n) - F_X(x) < \varepsilon, \text{ за секој } n \ge n_0,$$

т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} F_X(x+a_n) = F_X(x)$.

в) Нека $\varepsilon > 0$ е дадено. Како и во доказот под б) наоѓаме конечно множество $I_0 \subseteq \mathbf{N}$ такво што $\sum\limits_{i \in I_0} p_i > 1 - \varepsilon$, т.е. важи неравенството (8). Ставаме

$$a = \min_{i \in I_0} x_i, \ b = \max_{i \in I_0} x_i .$$

Ако $x < a$, тогаш

$$F_X(x) = \sum_{x_i \le x} p_i \le \sum_{i \notin I_0} p_i ,$$

и од неравенството (8) следува $F_X(x) < \varepsilon$, па затоа $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$. Ако $x > b$, тогаш бидејќи за секој $i \in I_0$ важи $x_i \le b$, добиваме дека за секој $i \in I_0$ важи $x_i < x$, па затоа

$$F_X(x) = \sum_{x_i \le x} p_i \ge \sum_{i \in I_0} p_i > 1 - \varepsilon ,$$

што значи $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$. ♦

ЗАДАЧИ

1. Од 28 плочки за играње домино случајно се избира една. Најдете го законот на распределба на збирот на точките на половинките од плочките. (Плочка за играње домино е правоаголник поделен на два дела. Секој од деловите има 0,1,2,3,4,5 или 6 точки. Сите 28 комбинации на паровите (i, j), $0 \le i \le j \le 6$ го сочинуваат комплетот плочки за играње домино).
2. Од множеството од сите $n!$ пермутации $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{smallmatrix}\right)$ случајно и еднаквоверојатно се избира една. Најдете ја веројатноста на настанот: $x_k \ne k, k = 1,2,\dots,n$.
3. Хомогена коцка за играње се фрла четири пати. Нека X е бројот на паднатите шестки, а Y е бројот на паднатите броеви кои се деливи со три. Најдете ги распределбите на случајните променливи X и Y .
4. Хомогена монета се фрла осум пати. Најдете ја распределбата на паднатиот број писма и веројатноста на настанот дека тој број е парен.
5. Веројатноста дека произведениот телевизор ќе биде неисправен е $\frac{1}{100}$. Нека X е бројот на неисправните телевизори во серија од 100 произведени телевизори. Определете ја распределбата на случајната променлива X и веројатноста на настанот дека во таа серија ќе има најмалку два неисправни телевизори.
6. Хомогена коцка за играње се фрла се до појавувањето на шестка, но најмногу четири пати. Нека X е бројот на изведените фрлања. Најдете ја распределбата на случајната променлива X .
7. Хомогена коцка за играње се фрла се додека збирот на падните броеви не е поголем од три. Нека X е бројот на фрлањата на коцката. Најдете ја распределбата на случајната променлива X .
8. Двајца играчи играат пет сетови тенис. Секој сет првиот играч го добива со веројатност $\frac{2}{3}$ независно од резултатот на останатите сетови. Нека X е бројот на сетовите кои ги добил првиот играч. Најдете ја распределбата на случајната променлива X .

9. Определете ги функциите на распределба на следниве случајни променливи

x_i	-2	-1	0	1	2
$P(x_i)$	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

y_i	5	7	10	15
$P(y_i)$	0,2	0,5	0,2	0,1

10. Дискретната случајна променлива X има функција на распределба

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<3 \\ 0,2, & 3\le x<0 \\ 0,6, & 0\le x<2 \\ 0,9, & 2\le x<5 \\ 1, & x\ge 5. \end{cases}$$

Најдете ги вредностите кои ги прима случајната променлива X и соодветните веројатности.

11. Случајната променлива X има закон на распределба

$$P\{X=k\}=\tfrac{a}{k}\tbinom{k}{m}p^m(1-p)^{k-m}\text{ , } k=m,m+1,m+2,...$$

каде $m\in\mathbf{N}$ и $p\in(0,1)$ се дадени броеви. Најдете ја константата a .

2. ПОВЕЌЕДИМЕНЗИОНАЛНИ ДИСКРЕТНИ СЛУЧАЈНИ ПРОМЕНЛИВИ

Во претходната точка го воведовме поимот за дискретна случајна променлива. Притоа ги разгледавме таканаречените еднодимензионални дискретни случајни променливи. Во оваа точка ќе ги разгледаме повеќедимензионалните дискретни случајни променливи. Така ја имаме следнава дефиниција.

Дефиниција 6. *Дводимензионална дискретна случајна променлива* (*случаен вектор*) го нарекуваме подредениот пар (X,Y), каде X и Y се дискретни случајни променливи дефинирани над ист простор на веројатности $(\Omega,\boldsymbol{A},P)$ кои примаат вредности $x_1,x_2,...,x_n,...$ и $y_1,y_2,...,y_m,...$, соодветно при што подредениот пар (X,Y) прима вредности

$$(x_i,y_j),\, i=1,2,...,n,...;\ j=1,2,...,m,... \tag{1}$$

со веројатности

$$P(x_i,y_j),\, i=1,2,...,n,...;\ j=1,2,...,m,...\text{ ,} \tag{2}$$

соодветно, и притоа важи

$$\sum_i\sum_j P(x_i,y_j)=1\text{ .} \tag{3}$$

Според тоа, кога ќе кажеме дека е зададена дводимензионална дискретна случајна променлива (X,Y), ќе подразбираме дека се зададени нејзините вредности (1) и соодветните веројатности (2).

Дефиниција 7. Соодветствието меѓу вредностите на дводимензионалната дискретната случајна променлива и нивните веројатности го нарекуваме *закон на распределба на дводимензионалната случајна променлива*.

Да забележиме дека во поедноставни случаи, ако ја прифатиме ознаката

$$P(x_i, y_j) = p_{ij},\ \ i = 1, 2, ..., n, ...,\ \ j = 1, 2, ..., m, ...$$

законот на распределба на дводимензионалната случајна променлива (X, Y) можеме да го запишеме со помош на следнава табела.

$Y \backslash X$	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_i	$\cdots$	x_n	$\cdots$
y_1	p_{11}	p_{21}	p_{31}	$\cdots$	p_{i1}	$\cdots$	p_{n1}	$\cdots$
y_2	p_{12}	p_{22}	p_{32}	$\cdots$	p_{i2}	$\cdots$	p_{n2}	$\cdots$
...	...	...	...	...	...	...	...	...
y_j	p_{1j}	p_{2j}	p_{3j}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	p_{nj}	$\cdots$
...	...	...	...	...	...	...	...	...
y_m	p_{1m}	p_{2m}	p_{3m}	$\cdots$	p_{im}	$\cdots$	p_{nm}	$\cdots$
...	...	...	...	...	...	...	...	...

Табела 3. *Дводимензионален закон на распределба*

Пример 8. Хомогена монета се фрла два пати, при што секој од елементарните настани PP, PG, GP, GG има веројатност $\frac{1}{4}$. Со X да го означиме бројот на паднатите писма, а со Y бројот на паднатите грбови. Заедничката распределба на парот случајни променливи (X, Y) е дадена во следнава табела.

	$X = 0$	$X = 1$	$X = 2$
$Y = 0$	0	0	0,25
$Y = 1$	0	0,5	0
$Y = 2$	0,25	0	0

♦

Пример 9. Истовремено фрламе хомогена коцка за играње и хомогена монета. Резултатот од фрлањето коцка е случајна променлива X која прима вредности 1, 2, 3, 4, 5, 6. Појавата на грб на монетата да ја означиме со 0, а појавата на писмо да ја означиме со 1. Резултатот од фрлањето на монетата е случајна променлива Y која прима вредности 0 и 1. Елементарните настани при истовременото фрлање на коцката и монетата се подредените парови броеви (x_i, y_j), кои вкупно ги има 12. Заради хомогеноста на коцката и монетата сите елементарни настани се еднакввоверојатни, па затоа

$$P(x_i, y_j) = \frac{1}{12},\ i = 1, 2, 3, 4, 5, 6;\ j = 1, 2\,.$$

Распределбата на дводимензионалната случајна променлива (X, Y) можеме да ја прикажеме со следнава табела.

$Y \backslash X$	1	2	3	4	5	6
0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$
1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

♦

Забелешка 5. Парот случајни променливи (X, Y) генерира разбивање $\alpha_{(X,Y)}$, кое се состои од настаните

$$A_{ij} = \{\omega \mid X(\omega) = x_i, Y(\omega) = y_j\},\ i = 1,2,\dots,k,\dots;\ j = 1,2,\dots,m,\dots\ .$$

За вака добиеното разбивање, а и за $\sigma-$алгебрата $\mathcal{A}_{(X,Y)}$ која се добива со помош на ова разбивање ќе велиме дека се *генерирани* од парот (X,Y). Секој настан $A \in \mathcal{A}_{(X,Y)}$ може да се запише во видот

$$A = \{\omega \mid (X(\omega), Y(\omega)) \in B\}, \text{ каде } B \subseteq \mathbf{R}^2. \tag{4}$$

Обратно, секој настан од видот (4) припаѓа на $\sigma-$алгебрата $\mathcal{A}_{(X,Y)}$. Лесно се гледа, дека $\sigma-$алгебрите $\mathcal{A}_X$ и $\mathcal{A}_Y$, генерирани од случајните променливи X и Y соодветно, се подалгебри од $\sigma-$алгебрата $\mathcal{A}_{(X,Y)}$, при што $\sigma-$алгебрата $\mathcal{A}_{(X,Y)}$ е генерирана од унијата на $\sigma-$алгебрите $\mathcal{A}_X$ и $\mathcal{A}_Y$. Ако $\alpha_{(X,Y)} = \{A_{ij}\}$ и

$$A_{i*} = \sum_j A_{ij},\ A_{*j} = \sum_i A_{ij}\ ,$$

тогаш $\{A_{i*}\}$ е разбивање α_X , а $\{A_{*j}\}$ е разбивање α_Y .

Аналогно на еднодимензионалните случајни променливи се дефинира поимот функција на распределба на дводимензионална случајна променлива. Така ја имаме следнава дефинција.

Дефиниција 8. Нека (X,Y) е дводимензионална случајна променлива која прима вредности (1) со веројатности (2). Функцијата

$$F(x_0, y_0) = \sum_{x_i \le x_0} \sum_{y_j \le y_0} P(x_i, y_j) \tag{5}$$

ја нарекуваме *функција на распределба* на дводимензионалната случајна променлива (X,Y).

Да забележиме дека функцијата на распределба всушност покажува колкава е веројатноста дводимензионалната случајната променлива (X,Y) да прими која било вредност при што истовремено $x \le x_0$ и $y \le y_0$. Според тоа, за случајниот настан $\{x \le x_0, y \le y_0\}$ важи $P\{x \le x_0, y \le y_0\} = F(x_0, y_0)$.

Пример 10. Дводимензионалната дискретна случајна променлива (X,Y) е зададена со следнава табела:

$Y \backslash X$	1	2	3	4
1	$\frac{3}{40}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{5}{40}$	$\frac{2}{40}$
2	$\frac{7}{40}$	$\frac{4}{40}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{40}$
3	0	$\frac{2}{40}$	$\frac{8}{40}$	$\frac{6}{40}$

Да ја определиме функцијата на распределба на оваа случајна променлива. Јасно е дека $F(x,y) = 0$ ако $x < 1$ или $y < 1$ и дека $F(x,y) = 1$ ако $x \ge 4$ и $y \ge 3$. Понатаму, користејќи ја формулата (4) за функцијата на распределба на случајната променлива (X,Y) ја добиваме следнава табела.

$F(x,y)$	$x<1$	$1\leq x<2$	$2\leq x<3$	$3\leq x<4$	$x\geq 4$
$y<1$	0	0	0	0	0
$1\leq y<2$	0	$\frac{3}{40}$	$\frac{4}{40}$	$\frac{9}{40}$	$\frac{11}{40}$
$2\leq y<3$	0	$\frac{10}{40}$	$\frac{15}{40}$	$\frac{21}{40}$	$\frac{24}{40}$
$y\geq 3$	0	$\frac{10}{40}$	$\frac{17}{40}$	$\frac{31}{40}$	1

◆

Забелешка 6. Аналогно, n*-димензионална дискретна случајна променлива* (n*-димензионален случаен вектор*) ја нарекуваме подредената n-торка $(X_1,X_2,\ldots,X_n)$, каде $X_i, i=1,2,\ldots,n$ се дискретни случајни променливи дефинирани над ист простор на веројатности $(\Omega,\boldsymbol{A},P)$ кои примаат вредности $x_{i1},x_{i2},\ldots,x_{ik_i},\ldots,$ $i=1,$ $2,\ldots,n$, соодветно. Јасно, при тоа подредената n-торка $(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ прима вредности

$$(x_{1j_1},x_{2j_2},\ldots,x_{nj_n}),\ j_i=1,2,\ldots,k_i,\ldots,\ \text{за}\ i=1,2,\ldots,n \tag{6}$$

со веројатности

$$P\{X_i=x_{ij_i}, i=1,2,\ldots,n\}=p_{j_1j_2\ldots j_n},\ j_i=1,2,\ldots,k_i,\ldots,\ \text{за}\ i=1,2,\ldots,n \tag{7}$$

каде $p_{j_1j_2\ldots j_n}\geq 0$ и

$$\sum_{j_1,j_2,\ldots,j_n} p_{j_1j_2\ldots j_n}=1\,. \tag{8}$$

Аналогно, како и при еднодимензионална случајна променлива, често пати ќе сметаме, дека n-димензионалната случајна променлива $(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ е зададена, ако е зададен нејзиниот $n-$димензионален закон на распределба (6) и (7).

$n-$димензионалната случајна променлив $(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ генерира разбивање $\alpha_{(X_1,X_2,\ldots,X_n)}$ кое се состои од настаните

$$A_{j_1j_2\ldots j_n}=\{\omega\,|\,X_i(\omega)=x_{ij_i}, i=1,2,\ldots,n\}$$

и $\sigma-$алгебра $\boldsymbol{A}_{(X_1,X_2,\ldots,X_n)}$, која се состои од настаните $\{(X_1,X_2,\ldots,X_n)\in B\}$, каде $B\subseteq\mathbf{R}^n$.

Забелешка 7. Нека X и Y се дискретни случајни променливи над ист простор на веројатности $(\Omega,\boldsymbol{A},P)$, при што X прима вредности $x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots$ со веројатности $p_1,p_2,\ldots,p_n,\ldots$, соодветно и Y прима вредности $y_1,y_2,\ldots,y_m,\ldots$ со веројатности $q_1,q_2,\ldots,q_m,\ldots$, соодветно. Тогаш подредениот пар (X,Y) прима вредности

$$(x_i,y_j),\ i=1,2,\ldots,n,\ldots;\ j=1,2,\ldots,m,\ldots$$

и на истите им ги придружуваме веројатностите

$$P(x_i, y_j) = p_i q_j,\ i = 1, 2, ..., n, ...;\ j = 1, 2, ..., m, ...$$

Притоа важи

$$\sum_i \sum_j P(x_i, y_j) = \sum_i \sum_j p_i q_j = \sum_i p_i \sum_j q_j = 1,$$

што според дефиниција 6 значи дека (X, Y) е дводимензионална дискретна случајна променлива. Аналогно, ако се дадени n дискретни случајни променливи X_i, $i = 1, 2, ..., n$ над ист простор на веројатности $(\Omega, \boldsymbol{A}, P)$ може да се конструира n-димензионална дискретна случајна променлива $(X_1, X_2, ..., X_n)$.

ЗАДАЧИ

1. Дискретната дводимензионална случајна променлива (X, Y) е зададена со таблицата:

$Y \setminus X$	2	3	4	5
-1	$\frac{1}{60}$	$\frac{3}{60}$	$\frac{4}{60}$	$\frac{7}{60}$
1	$\frac{2}{60}$	$\frac{6}{60}$	$\frac{8}{60}$	$\frac{14}{60}$
3	$\frac{2}{60}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{3}{60}$	$\frac{9}{60}$

Најдете ја функцијата на распределба на дводимензионалната случајна променлива (X, Y) .

2. Дискретната дводимензионална случајна променлива (X, Y) е зададена со таблицата:

$Y \setminus X$	-1	0	1
0	0,25	0,25	0,10
1	0,10	0,15	0,15

Најдете ја функцијата на распределба на дводимензионалната случајна променлива (X, Y) .

3. Хомогена монета се фрла два пати. Нека со X го означиме бројот на регистрираните писма, а со Y го означиме бројот на регистрираните грбови. Најдете ја распределбата на дводимензионалната случајна променлива (X, Y) .

4. Дискретната дводимензионална случајна променлива (X, Y) има функција на распределба:

$Y \setminus X$	$x < 1$	$1 \le x < 3$	$3 \le x < 5$	$x \ge 5$
$y < 1$	0	0	0	0
$1 \le y < 4$	0	0,025	0,025	0,25
$4 \le y < 7$	0	0,075	0,075	0,75
$y \ge 7$	0	0,025	0,425	1

Најдете го законот на распределба на веројатностите.

5. Даден е законот на веројатност на дводимензионалната дискретна случајна променлива (X, Y):

$$p(x_i, y_j) = \frac{1}{54}(3x_i + 2y_j - 4),\ x_i, y_j \in \{1, 2, 3\} .$$

Прикажете го законот на веројатност со помош на табела.

6. Законите на распределба на случајните променливи X и Y се дадени во следниве табели:

x_i	-1	0	1	2
$P(x_i)$	0,2	0,15	0,4	0,25

y_i	0	2	4
$P(y_i)$	0,3	0,2	0,5

Користејќи ја забелешка 7 формирајте закон на распределба на дводимензионална случајна променлива (X,Y).

3. МАРГИНАЛНИ И УСЛОВНИ РАСПРЕДЕЛБИ

Нека е дадена дводименизоналната дискретна случајна променлива (X,Y) која прима вредности

$$(x_i, y_j),\ i=1,2,...,n,...;\ j=1,2,...,m,... \tag{1}$$

со веројатности

$$P(x_i, y_j),\ i=1,2,...,n,...;\ j=1,2,...,m,...\ , \tag{2}$$

Бидејќи настаните

$$\{X=x_i, Y=y_j\} \text{ и } \{X=x_i, Y=y_k\},\ j \neq k$$

се заемно дисјунктни, од својствата на веројатноста следува дека за секој $i=1,2,...,$ $n,...$ веројатноста $P(x_i)$ случајната променлива X да ја прими вредноста x_i, без разлика која вредност истовремено ќе ја прими случајната променлива Y се пресметува според формулата:

$$P(x_i) = \sum_j P(x_i, y_j) = \sum_j p_{ij}\ . \tag{3}$$

Аналогно, за секој $j=1,2,...,m...$ веројатноста $P(y_j)$ случајната променлива Y да ја прими вредноста y_j, без разлика која вредност ќе ја прими случајната променлива X се пресметува според формулата:

$$Q(y_j) = \sum_i P(x_i, y_j) = \sum_i p_{ij}\ . \tag{4}$$

Претходно изнесеното ни дава за право да ги воведеме таканаречените маргинални распределби. Во оваа смисла ја имаме следнава дефиниција.

Дефиниција 9. Нека (X,Y) е дводимензионална дискретна случајна променлива која прима вредности (1) со веројатности (2). Распределбата на случајната променлива X која прима вредности $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ со веројатности (3) ја нарекуваме *маргинална распределба на случајната променлива* X. Распределбата на случајната променлива Y која прима вредности $y_1, y_2, ..., y_m, ...$ со веројатности (4) ја нарекуваме *маргинална распределба на случајната променлива* Y.

Пример 11. Ќе ги определиме маргиналните распределби на случајните променливи X и Y од пример 10.

$Y \setminus X$	1	2	3	4	$Q(y_j)$
1	$\frac{3}{40}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{5}{40}$	$\frac{2}{40}$	$\frac{11}{40}$
2	$\frac{7}{40}$	$\frac{4}{40}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{13}{40}$
3	0	$\frac{2}{40}$	$\frac{8}{40}$	$\frac{6}{40}$	$\frac{16}{40}$
$P(x_i)$	$\frac{10}{40}$	$\frac{7}{40}$	$\frac{14}{40}$	$\frac{9}{40}$	1

Ако ја искористиме формулата (3) за случајната променлива X која прима вредности 1, 2, 3 и 4 добиваме:

$$P(1) = \frac{10}{40},\ P(2) = \frac{7}{40},\ P(3) = \frac{14}{40} \text{ и } P(4) = \frac{9}{40},$$

и тоа се броевите во последната редица од претходната табела, кои се добиваат со собирање на броевите по колони.

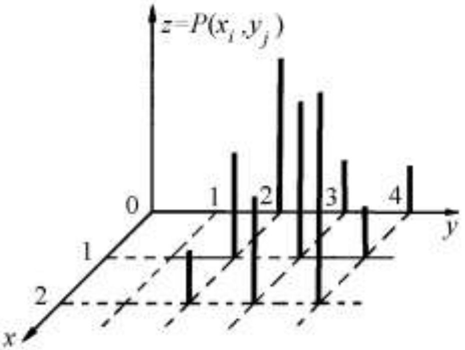
Аналогно, користејќи ја формулата (4) наоѓаме:

$$Q(1) = \frac{11}{40},\ Q(2) = \frac{13}{40} \text{ и} Q(3) = \frac{16}{40}$$

и тоа се броевите во последната колона од претходната табела, кои се добиваат со собирање на броевите по редици. ♦

Пример 12. Распределбата на дводимензионалната дискретна случајна променлива (X,Y) и маргиналните распределби на случајните променливи X и Y се дадени во табелата десно.

$Y \setminus X$	0	1	2	$Q(y_j)$
2	$\frac{3}{18}$	$\frac{2}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{6}{18}$
3	$\frac{1}{18}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{2}{18}$	$\frac{6}{18}$
4	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{4}{18}$	$\frac{6}{18}$
$P(x_i)$	$\frac{5}{18}$	$\frac{6}{18}$	$\frac{7}{18}$	1



Цртеж 4

На цртеж 4 е прикажана распределбата на случајната променлива (X,Y) така што во секој точка (x_i, y_j) по $z-$оската е нанесена веројатноста $P(x_i, y_j)$. ♦

Забелешка 8. Како и во дводимензионалниот случај, од $n-$димензионалниот закон на распределба се определуваат маргинални еднодимензионални, дводимензионални итн. закони на распределба. На пример,

$$P\{X_1 = x_{1j}\} = \sum_{j_2,\dots,j_n} p_{jj_2\dots j_n},\ P\{X_1 = x_{1i}, X_2 = x_{2j}\} = \sum_{j_3,\dots,j_n} p_{ijj_3\dots j_n}.$$

Нека е дадена дводимензионалната дискретна случајна променлива (X,Y) која прима вредности (1) со веројатности (2). Ако не интересира законот на распределба на случајната променлива X, под претпоставка дека случајната променлива Y прима некоја вредност $Y = y_j$, тогаш од својствата на условната веројатност добиваме

$$P(x_i \mid y_j) = P\{X = x_i \mid Y = y_j\} = \frac{P\{X=x_i, Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}} = \frac{P(x_i,y_j)}{Q(y_j)}, \tag{5}$$

за $i = 1, 2, ..., n, ...$. Слично, ако не интересира законот на распределба на случајната променлива Y, под претпоставка дека случајната променлива X прима некоја вредност $X = x_i$, тогаш повторно од својствата на условната веројатност добиваме

$$P(y_j \mid x_i) = P\{Y = y_j \mid X = x_i\} = \frac{P\{X=x_i, Y=y_j\}}{P\{X=x_i\}} = \frac{P(x_i,y_j)}{P(x_i)}, \tag{6}$$

за $j = 1, 2, ..., m, ...$.

Претходно изнесеното ни дава за право да ги воведеме таканаречените условни распределби. Во оваа смисла ја имаме следнава дефиниција.

Дефиниција 10. Нека (X,Y) е дводимензионална дискретна случајна променлива која прима вредности (1) со веројатности (2). За секој $j = 1, 2, ..., m, ...$ распределбата на случајната променлива X која прима вредности $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ со веројатности (5) ја нарекуваме *условна распределба на случајната променлива X при услов дека $Y = y_j$*. За секој $i = 1, 2, ..., n, ...$ распределбата на случајната променлива Y која прима вредности $y_1, y_2, ..., y_m, ...$ со веројатности (6) ја нарекуваме *условна распределба на случајната променлива Y при услов дека $X = x_i$*.

Пример 13. Условната распределба на случајната променлива X од пример 12, при услов $Y = 4$ е:

$$P(x_i \mid 4) = \frac{P(x_i,4)}{Q(4)} = \frac{P(x_i,4)}{\frac{6}{18}}, \quad i = 0, 1, 2$$

односно

X	0	1	2
$P(x_i \mid 4)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$.

◆

Забелешка 9. а) Дефиницијата 10 има смисла само при $Q(y_j) > 0$, односно $P(x_i) > 0$. Притоа, согласно дефиниција 9, за секој j добиваме

$$\sum_i P(x_i \mid y_j) = \sum_i \frac{P(x_i,y_j)}{Q(y_j)} = \frac{1}{Q(y_j)} \sum_i P(x_i, y_j) = 1.$$

Аналогно, за секој i важи $\sum_j P(y_j \mid x_i) = 1$. Според тоа, условните распределби претставуваат распределби во обична смисла.

б) Нека е дадена n-димензионална дискретна случајна променлива $(X_1, X_2, ..., X_n)$, каде $X_i, i = 1, 2, ..., n$ се дискретни случајни променливи дефинирани над ист простор на веројатности $(\Omega, \boldsymbol{A}, P)$ кои примаат вредности $x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ik_i}, \ldots,\ i = 1, 2, \ldots, n$, соодветно. Понатаму, нека $1 \le m < n$ и нека се фиксирани вредностите $X_{m+1} = x_{m+1\, i_{m+1}}, X_{m+2} = x_{m+2\, i_{m+2}}, \ldots, X_n = x_{n\, i_n}$. Тогаш функцијата

$$P(x_{1i_1}, \ldots, x_{mi_m} \mid x_{m+1\, i_{m+1}}, \ldots, x_{ni_n}) = \frac{P(x_{1i_1}, \ldots, x_{mi_m}, x_{m+1\, i_{m+1}}, x_{m+2\, i_{m+2}}, \ldots, x_{ni_n})}{P(x_{m+1\, i_{m+1}}, x_{m+2\, i_{m+2}}, \ldots, x_{ni_n})}, \tag{7}$$

каде

$$P(x_{m+1\, i_{m+1}}, \ldots, x_{ni_n}) = P(X_{m+1} = x_{m+1\, i_{m+1}}, \ldots, X_n = x_{n\, i_n})$$

е маргинална $(n-m)-$распределба ја нарекуваме *условна распределба на* $m-$*димензионалната случајна променлива* $(X_1, X_2, \ldots, X_m)$ *при услов дека* $X_{m+1} = x_{m+1\, i_{m+1}}$, $X_{m+2} = x_{m+2\, i_{m+2}}, \ldots, X_n = x_{n\, i_n}$. Ако равенствата (7) ги сумираме по сите индекси $i_1, i_2, \ldots, i_m$ добиваме

$$\begin{aligned}\sum_{i_1,\ldots,i_m} P(x_{1i_1}, \ldots, x_{mi_m} \mid x_{m+1\, i_{m+1}}, \ldots, x_{ni_n}) &= \sum_{i_1,\ldots,i_m} \frac{P(x_{1i_1}, \ldots, x_{mi_m}, x_{m+1\, i_{m+1}}, x_{m+2\, i_{m+2}}, \ldots, x_{ni_n})}{P(x_{m+1\, i_{m+1}}, x_{m+2\, i_{m+2}}, \ldots, x_{ni_n})} \\ &= \frac{1}{P(x_{m+1\, i_{m+1}}, x_{m+2\, i_{m+2}}, \ldots, x_{ni_n})} \sum_{i_1,\ldots,i_m} P(x_{1i_1}, \ldots, x_{mi_m}, x_{m+1\, i_{m+1}}, \ldots, x_{ni_n}) \\ &= \frac{1}{P(x_{m+1\, i_{m+1}}, x_{m+2\, i_{m+2}}, \ldots, x_{ni_n})} P(x_{m+1\, i_{m+1}}, x_{m+2\, i_{m+2}}, \ldots, x_{ni_n}) = 1\end{aligned}$$

што повторно покажува дека условната распределба претставува распределба во обична смисла.

Пример 14. Нека од шпил од 52 карти за играње на случаен начин извлекуваме 12 карти. Нека X_1 е бројот на извлечените асови, X_2 е бројот на извлечените двојки, X_3 е бројот на извлечените тројки и X_4 е бројот на извлечените четворки. Ќе ја определиме условната распределба $P(x_2, x_4 \mid x_1, x_3)$.

Станува збор за четиридимензионална случајна променлива за која законот на распределба е:

$$P(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{\binom{4}{x_1}\binom{4}{x_2}\binom{4}{x_3}\binom{4}{x_4}\binom{36}{12-x_1-x_2-x_3-x_4}}{\binom{52}{12}},$$

каде $x_i \in \{0,1,2,3,4\}, i = 1,2,3,4$ и $\sum_{i=1}^{4} x_i \le 12$. Од друга страна

$$P(x_1, x_3) = \frac{\binom{4}{x_1}\binom{4}{x_3}\binom{44}{12-x_1-x_3}}{\binom{52}{12}}$$

и ако ја искористиме формулата (7) добиваме

$$\begin{aligned}P(x_2, x_4 \mid x_1, x_3) = \frac{P(x_1,x_2,x_3,x_4)}{P(x_1,x_3)} &= \frac{\binom{4}{x_1}\binom{4}{x_2}\binom{4}{x_3}\binom{4}{x_4}\binom{36}{12-x_1-x_2-x_3-x_4}/\binom{52}{12}}{\binom{4}{x_1}\binom{4}{x_3}\binom{44}{12-x_1-x_3}/\binom{52}{12}} \\ &= \frac{\binom{4}{x_1}\binom{4}{x_2}\binom{4}{x_3}\binom{4}{x_4}\binom{36}{12-x_1-x_2-x_3-x_4}}{\binom{4}{x_1}\binom{4}{x_3}\binom{44}{12-x_1-x_3}}\end{aligned}$$

каде $x_i \in \{0,1,2,3,4\}, i = 1,2,3,4$ и $x_2 + x_4 \le 12 - x_1 - x_2$. ♦

ЗАДАЧИ

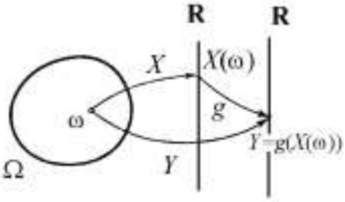
1. Најдете ги маргиналните и условните закони на распределби на случајните променливи X и Y од задача 2.1.
2. Најдете ги маргиналните и условните закони на распределби на случајните променливи X и Y од задача 2.2.
3. Најдете ги маргиналните и условните закони на распределби на случајните променливи X и Y од задача 2.4.
4. Докажете дека маргиналните закони на распределби на случајните променливи X и Y од задача 2.5 се дадени со формулите: $p(x_i)=\frac{x_i}{6}$ и $q(y_j)=\frac{y_j+1}{9}$. Пресметајте ги условните закони на распределба.

4. ФУНКЦИИ ОД ДИСКРЕТНИ СЛУЧАЈНИ ПРОМЕНЛИВИ

Нека е дадена дискретната случајна променлива $X:\Omega\to\mathbf{R}$, т.е. нека е дадена нејзината функција на распределба или законот на распределба и нека е дадена функција $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$. Логично е да се запрашаме дали функцијата $Y:\Omega\to\mathbf{R}$ определена со

$$Y(\omega)=g(X(\omega)),\ \omega\in\Omega, \tag{1}$$

цртеж 21, е случајна променлива.



Цртеж 5

Одговорот на поставеното прашање е позитивен, т.е. функцијата $Y:\Omega\to\mathbf{R}$ определена со (1) е дискретна случајна променлива. Навистина, нека законот на распределба на случајната променлива X е

X	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_{k-1}	x_k	$\cdots$
p	p_1	p_2	p_3	$\cdots$	p_{k-1}	p_k	$\cdots$

а функцијата g строго монотона (или растечка или опаѓачка). Тогаш функцијата g има инверзна функција $x=g^{-1}(y)$, па затоа на секоја вредност $y_i=g(x_i), i=1,2,...$ и соодветствува единствена вредност $x_i=g^{-1}(y_i)$, $i=1,2,...$, што значи дека законот на распределба на случајната променлива Y е даден во следнава табела:

Y	$g(x_1)$	$g(x_2)$	$g(x_3)$	$\cdots$	$g(x_{k-1})$	$g(x_k)$	$\cdots$
p	p_1	p_2	p_3	$\cdots$	p_{k-1}	p_k	$\cdots$

Ако функцијата g не е монотона, т.е. ако на пример постојат точно две вредности x_i и x_j такви што од $x_i\neq x_j$ следува $g(x_i)=g(x_j)$, тогаш настанот $\{Y=g(x_i)\}$ е еквивалентен на настанот $\{X=x_i, X=x_j\}$ и како настаните $\{X=x_i\}$ и $\{X=x_j\}$ се дисјунктни добиваме

$$P\{Y=g(x_i)\}=P\{X=x_i,\ X=x_j\}=P\{X=x_i\}+P\{X=x_j\}=p_i+p_j\,.$$

Пример 15. Случајната променлива X е дадена со законот на распределба:

X	0	1	2	3	4
p	0,1	0,2	0,3	0,2	0,2

Најдете го законот на распределба на случајната променлива Y, ако

а) $Y=2(X-1)$ б) $Y=X^2-6$.

Решение. а) Функцијата $g(x)=2(x-1)$ е монотоно растечка, и како множеството вредности на случајната променлива Y е: -2, 0, 2, 4 и 6, за нејзиниот закон на распределба наоѓаме:

Y	-2	0	2	4	6
p	0,1	0,2	0,3	0,2	0,2

б) Функцијата $g(x)=x^2-6$ на разгледуваниот интервал $[0,4]$, кој ги содржи вредностите на случајната променлива X е монотоно растечка и како множеството вредности на случајната променлива Y е: -6, -5, -2, 3 и 10, за нејзиниот закон на распределба наоѓаме:

Y	-6	-5	-2	3	10
p	0,1	0,2	0,3	0,2	0,2

♦

Пример 16. Случајната променлива X е дадена со законот на распределба:

X	-1	0	1
p	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

Најдете го законот на распределба на случајната променлива $Y=X^2$.

Решение. Множеството вредности на случајната променлива Y е: 0 и 1 и притоа важи: $\{Y=0\}=\{X=0\}$ и $\{Y=1\}=\{X=-1\}+\{X+1\}$, па затоа законот на распределба на случајната променлива Y е:

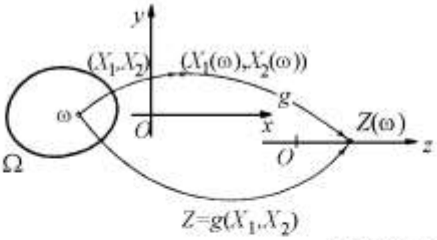
Y	0	1
p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$

♦

Нека е дадена $n-$димензионалната случајна променлива $(X_1,...,X_n)$ и нека е дадена функцијата $g:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$. Тогаш, аналогно како и во претходниот случај, функцијата $Z:\Omega\to\mathbf{R}$ определена со

$$Z(\omega)=g(X_1(\omega),...,X_n(\omega))\,,\ \omega\in\Omega\,,\quad(1)$$

(за $n=2$ види цртеж 6) е функција на



Цртеж 6

распределба. Законот на распределба на случајната променлива $Z = g(X_1,...,X_n)$ го добиваме на следниов начин: вредностите на случајната променлива Z ги наоѓаме користејќи ја функцијата g и тие се

$$z_i = g(x_{1i}, x_{2i},..., x_{ni}),$$

по сите индекси $(1i, 2i,..., ni)$, а соодветните веројатности се еднакви на

$$P\{Z = z_i\} = P\{X_1 = x_{1i}, X_2 = x_{2i},..., X_n = x_{ni}\},$$

При што, повторно, веројатностите на повторените вредности z_i треба да ги собереме.

Пример 17. Ќе го определиме законот на распределба на случајната променлива $Z = X + Y$, каде (X,Y) е дводимензионалната случајна променлива од пример 10. Множеството вредности на случајната променлива Z е: 2, 3, 4, 5, 6 и 7. Притоа имаме

$$P\{Z = k\} = \sum_{i+j=k} P\{X = i, Y = j\},$$

па затоа за законот на распределба на случајната променлива Z имаме:

$P\{Z = 2\} = P\{X = 1, Y = 1\} = \frac{3}{40}$,

$P\{Z = 3\} = P\{X = 1, Y = 2\} + P\{X = 2, Y = 1\} = \frac{7}{40} + \frac{1}{40} = \frac{8}{40}$,

$P\{Z = 4\} = P\{X = 1, Y = 3\} + P\{X = 2, Y = 2\} + P\{X = 3, Y = 1\} = 0 + \frac{4}{40} + \frac{5}{40} = \frac{9}{40}$,

$P\{Z = 5\} = P\{X = 2, Y = 3\} + P\{X = 3, Y = 2\} + P\{X = 4, Y = 1\} = \frac{2}{40} + \frac{1}{40} + \frac{2}{40} = \frac{5}{40}$,

$P\{Z = 6\} = P\{X = 3, Y = 3\} + P\{X = 4, Y + 2\} = \frac{8}{40} + \frac{1}{40} = \frac{9}{40}$,

$P\{Z = 7\} = P\{X = 4, Y = 3\} = \frac{6}{40}$. ♦

ЗАДАЧИ

1. Случајната променлива X прима вредности 3, 6 и 10 со веројатности 0,2; 0,1 и 0,7 соодветно. Најдете го законот на распределба на случајната променлива $Y = 2X + 1$.
2. Законот на распределба на случајната променлива X е

$$P\{X = k\} = C(\tfrac{a}{a+1})^k, k = 1,2,....,$$

каде a е даден реален број. Најдете ја константата C. Вредностите на случајната променлива Y се остатоците при делење на X со 3. Најдете го законот на распределба на случајната променлива Y.

3. Најдете ја распределбата на случајната променлива Y ако:

а) $Y = X + 2$, б) $Y = X^2$, в) $Y = X^2 + X - 2$
при што X е дадена со

x_i	-2	-1	1	2
$P(x_i)$	0,3	0,1	0,2	0,4

4. Најдете ја распределбата на случајната променлива Y ако:

а) $Y = 2X + 1$, б) $Y = X^3 - 1$, в) $Y = X^3 + X - 2$
при што X е дадена со

x_i	-2	-1	1	2
$P(x_i)$	0,4	0,2	0,1	0,3

5. Случајната променлива X има закон на распределба

$$P\{X = m\} = 2(\tfrac{1}{3})^m, \quad m = 1, 2, \ldots .$$

Најдете го законот на распределба на случајната променлива

$$Y = \begin{cases} -1, & x \text{ е парен број}, \\ 1, & x \text{ е непарен број}. \end{cases}$$

6. Законот на распределба на случајната променлива X е

$$P\{X = m\} = (\tfrac{1}{2})^m, \quad m = 1, 2, 3, 4, \ldots ,$$

Најдете го законот на распределба на случајната променлива $Y = X^3$.

7. Законот на распределба на случајната променлива X е

$$P\{X = k\} = \tfrac{a}{k^3 - k}, \; k = 2, 3, \ldots .$$

Најдете ја константата a. Најдете го законот на распределба на случајната променлива $Y = (X - 3)^2$.

8. Дводимензионалната случајна променлива (X, Y) има закон на распределба

$$P(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{36}, & x = 1, 2, 3; \; y = 1, 2, 3, \\ 0, & \text{во останатите случаи.} \end{cases}$$

a) Најдете го законот на распределба на дводимензионалната случајна променлива (U, V), каде $U = XY, V = Y$.

b) Најдете ја го законот на распределба на случајната променлива $Z = X + Y$.

9. Најдете го законите на распределба на случајните променливи:

а) $Y = X + X$ и $Z = 2X$, б) $Y = XX$ и $Z = X^2$
ако случајната променлива X има закон на распределба

x_i	1	2
$P(x_i)$	0,6	0,4

10. Најдете го законот на распределба на случајната променлива $Y = \sin \frac{\pi}{3} X$, каде X е бројот на точките кои се јавуваат при фрлање на коцка за играње.

5. МАТЕМАТИЧКО ОЧЕКУВАЊЕ НА ДИСКРЕТНА СЛУЧАЈНА ПРОМЕНЛИВА

Пред да го воведеме поимот математичко очекување на дискретна случајна променлива X ќе покажеме како истиот треба да се дефинира за да на некој начин претставува “средна вредност” на случајната променлива X.

Нека X е дискретна случајна променлива која прима конечно многу вредности $x_1, x_2, \ldots, x_k$ со веројатности $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Во N повторени независни експерименти ги регистрираме вредностите на случајната променлива X. Ако вредноста x_1 е регистрирана во N_1 експерименти, вредноста x_2 во N_2, ..., вредноста x_k во N_k експерименти, тогаш од $N = N_1 + N_2 + ... + N_k$ следува дека аритметичката средина на сите регистрирани вредности е

$$\overline{x}_N = \frac{N_1x_1+N_2x_2+...+N_kx_k}{N} = x_1 \frac{N_1}{N} + x_2 \frac{N_2}{N} + ... + x_k \frac{N_k}{N}.$$

Понатаму, во некоја друга серија од N повторени независни експерименти во општ случај вредноста x_1 нема со сигурност да се регистрира N_1 пати, туку некој друг број $N_1^{'}$ пати итн. Затоа бројот $\overline{x}_N$ е случајна променлива. Меѓутоа, ако земеме $N \to \infty$, тогаш релативната честота $\frac{N_i}{N}$ на настанот $\{X = x_i\}$ ќе се натрупува околу веројатноста $P\{X = x_i\} = p_i$, па затоа "граничната вредност" на бројот $\overline{x}_N$ кога $N \to \infty$ не е случајна променлива, туку тоа е бројот

$$x_1p_1 + x_2p_2 + ...x_kp_k.$$

Овој број, кој на извесен начин е некоја "средна вредност" на случајната променлива X го нарекуваме математичко очекување на случајната променлива X. Попрецизно ја имаме следнава дефинција.

Дефиниција 11. Нека е дадена дискретната случајна променлива X која прима вредности $x_1, x_2, x_3, ...$ со веројатности $p_1, p_2, p_3, ...$, соодветно. Ако редот $\sum_i x_i p_i$ апсолутно конвергира, тогаш неговата граница ја нарекуваме *математичко очекување* на случајната променлива X. Притоа ја прифаќаме ознаката

$$E(X) = \sum_i x_i p_i. \tag{1}$$

Ако редот $\sum_i x_i p_i$ апсолутно не конвергира, тогаш ќе велиме дека случајната променлива X *нема конечно математичко* очекување.

Пример 18. а) За случајната променлива од пример 5 имаме

$$E(X) = \sum_i x_i p_i = 3 \bullet \frac{2}{20} + 4 \bullet \frac{4}{20} + 5 \bullet \frac{8}{20} + 6 \bullet \frac{5}{20} + 7 \bullet \frac{1}{20} = \frac{6+16+40+30+7}{20} = \frac{99}{20}.$$

б) За случајната променлива од пример 7 имаме:

$$E(X) = \sum_i x_i p_i = 0 \bullet \frac{7}{99} + 1 \bullet \frac{35}{99} + 2 \bullet \frac{42}{99} + 3 \bullet \frac{14}{99} + 4 \bullet \frac{1}{99} = \frac{0+35+84+42+4}{99} = \frac{165}{99}.$$

в) Нека случајната променлива X прима вредности $1, 2, 3, ..., n, ...$ со веројатности $\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, ..., \frac{1}{2^n}, ...$, соодветно. Имаме

$$\sum_i p_i = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + ... = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + ...) = \frac{1}{2} \bullet \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1,$$

т.е. X навистина е дискретна случајна променлива. За нејзиното математичко очекување наоѓаме

$$E(X)=\sum_{i=1}^{\infty}x_i p_i=\sum_{i=1}^{\infty}i\frac{1}{2^i}=\sum_{i=1}^{\infty}iz^i\,\Big|_{z=\frac{1}{2}}=z\sum_{i=1}^{\infty}iz^{i-1}\,\Big|_{z=\frac{1}{2}}=z\sum_{i=1}^{\infty}\frac{d(z^i)}{dz}\,\Big|_{z=\frac{1}{2}}$$

$$=z\frac{d}{dz}(\sum_{i=1}^{\infty}z^i)\,\Big|_{z=\frac{1}{2}}=z\frac{d}{dz}(\frac{z}{1-z})\,\Big|_{z=\frac{1}{2}}=\frac{z}{(1-z)^2}\,\Big|_{z=\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1}{2}}{(1-\frac{1}{2})^2}=2.\ \blacklozenge$$

Пример 19. Случајните променливи кои се среќаваат во практиката имаат конечно математичко очекување. Меѓутоа, на конкретни примери ќе покажеме дека постојат и такви случајни променливи кои немаат конечно математичко очекување.

а) Да ја разгледаме случајната променлива X која прима вредности $2,2^2,2^3,2^4,...$ со веројатноисти $\frac{1}{2},\frac{1}{2^2},\frac{1}{2^3},\frac{1}{2^4},...$, соодветно. Имаме

$$E(X)=\sum_i x_i p_i=2\bullet\frac{1}{2}+2^2\bullet\frac{1}{2^2}+2^3\bullet\frac{1}{2^3}+2^4\bullet\frac{1}{2^4}+...=1+1+1+1+...$$

и како последниот ред дивергира кон $+\infty$, заклучуваме дека $E(X)=+\infty$.

б) Да ја разгледаме случајната променлива X која прима вредности $-2,2^2,-2^3,2^4,...,(-1)^n 2^n,...$ со веројатноисти $\frac{1}{2},\frac{1}{2^2},\frac{1}{2^3},\frac{1}{2^4},...$, соодветно. Имаме

$$E(X)=\sum_i x_i p_i=\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i 2^i 2^{-i}=-1+1-1+1-....$$

Последниот ред е дивергентен и притоа за оваа случајна променлива математичкото очекување не постои. ♦

Забелешка 8. а) Токму пример 19 укажува на потребата од ограничувањето во дефиниција 11, т.е. за потребата од условот редот $\sum_i x_i p_i$ апсолутно да конвергира.

б) Нека е дадена случајната променлива X, која прима конечно многу вредности $x_i, i=1,2,...,n$ со веројатности $p_i, i=1,2,...,n$ и со $\underline{x}=\min_i x_i$ и $\overline{x}=\max_i x_i$ да ја означиме најмалата и најголемата вредност на случајната променлива X. Тогаш, очигледно важи

$$\underline{x}=\sum_i \underline{x}p_i\le\sum_i x_i p_i\le\sum_i \overline{x}p_i=\overline{x}\text{, т.е. }\underline{x}\le E(X)\le\overline{x}.$$

Како што рековме математичкото очекување на случајната променлива е еден вид нејзина средна вредност. Суштината на претходно кажаното најдобро се гледа ако имаме

$$p_i=\frac{1}{n},\ i=1,2,...,n$$

и притоа добиваме:

$$E(X)=\sum_i x_i p_i=\sum_i x_i\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\sum_i x_i\ ,$$

т.е. математичкото очекување во овој случај е еднакво на аритметичката средина на вредностите на случајната променлива, па затоа во литературата за поимот математичко очекување се користат и термините: *средна вредност* и *средина*.

Теорема 3. а) $E(I_A) = P(A)$, за секој настан A.

б) Математичкото очекување на константа е еднакво на таа константа, т.е. ако C е константа, тогаш $E(C) = C$.

Доказ. а) Навистина, според забелешка 1 случајната променлива I_A прима вредност 1 со веројатност $P(A)$ и прима вредност 0 со веројатност $1-P(A)$. Затоа

$$E(I_A) = 1 \cdot P(A) + 0 \cdot (1-P(A)) = P(A) . \qquad (2)$$

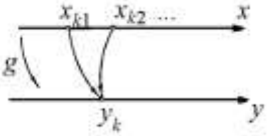
б) Константата C можеме да ја разгледуваме како дискретна случајна променлива, која прима само една вредност C со веројатност 1. Затоа $E(C) = 1 \bullet C = C$. ♦

Теорема 4. Нека X е дискретна случајна променлива со конечно математичко очекување $E(X)$ и g е реална функција чиј домен ги содржи вредностите на X. Тогаш математичкото очекување на случајната променлива $Y = g(X)$ е дадено со формулата

$$E(Y) = \sum_i g(x_i) p_i \; , \qquad (3)$$

под претпоставка дека редот (3) апсолутно конвергира.

Доказ. Нека $x_{k1}, x_{k2}, x_{k3}, ...$ се вредностите на случајната променлива X кои со функцијата g се пресликуваат во точката y_k на случајната променлива $Y = g(X)$, т.е. нека



Цртеж 7

$$y_k = g(x_{ki}), i = 1, 2, 3, ...$$

(цртеж 7). Тогаш

$$P(y_k) = P\{Y = y_k\} = \sum_i P\{X = x_{ki}\} = \sum_i P(x_{ki}) \; ,$$

па затоа

$$E(Y) = \sum_k y_k P(y_k) = \sum_k g(x_{ki}) \sum_i P(x_{ki}) = \sum_k \sum_i g(x_{ki}) P(x_{ki}) = \sum_j g(x_j) p_j ,$$

бидејќи сумирањето по $k = 1, 2, 3, ...$ и $i = 1, 2, 3, ...$ всушност претставува сумирање по сите вредности x_j на случајната променлива X. ♦

Последица 1. Ако X е дискретна случајна променлива со конечно математичко очекување $E(X)$ и $a, b \in \mathbf{R}$, тогаш за случајната променлива $Y = aX + b$ важи $E(Y) = aE(X) + b$.

Доказ. Нека X е дискретна случајна променлива $a, b \in \mathbf{R}$ и да ја разгледаме непрекинатата реална функција $g(x) = ax + b$. Според теорема 4 за математичкото очекување на случајната променлива $Y = g(X) = aX + b$ добиваме

$$E(Y) = \sum_i g(x_i) p_i = \sum_i (ax_i + b) p_i = a \sum_i x_i p_i + b \sum_i p_i = aE(X) + b \; . \; ♦$$

Забелешка 9. Тврдењето од теорема 3 б) непосредно следува од последица 1. Имено, ако во последица 1 ставиме $a=0$ и $b=C$, добиваме $Y=C$ и притоа

$$E(C)=E(Y)=0\cdot E(X)+C=C\,.$$

Последица 2. Ако X е дискретна случајна променлива со конечно математичко очекување $E(X)$, тогаш за случајната променлива $Y=X-E(X)$ важи $E(Y)=0$.

Доказ. Непосредно следува од последица 1, за $a=1$ и $b=-E(X)$ имаме

$$E(Y)=E(X-E(X))=E(X)-E(X)=0\,.\ \blacklozenge$$

Пример 20. Со X да го означиме резултатот од фрлањето на хомогена коцка за играње. Добиваме случајна променлива која прима вредности 1, 2, 3, 4, 5, 6 и тоа секоја со веројатност $\frac{1}{6}$. Според тоа, математичкото очекување на оваа случајна променлива е:

$$E(X)=1\bullet\tfrac{1}{6}+2\bullet\tfrac{1}{6}+3\bullet\tfrac{1}{6}+4\bullet\tfrac{1}{6}+5\bullet\tfrac{1}{6}+6\bullet\tfrac{1}{6}=\tfrac{21}{6}=3{,}5\,.$$

Сега, да ја разгледаме случајната променлива $Y=2X+1$. Вредностите на оваа случајна променлива се броевите 3, 5, 7, 9, 11, 13 и на секоја од нив и припаѓа веројатност $\frac{1}{6}$. Затоа

$$E(2X+1)=3\bullet\tfrac{1}{6}+5\bullet\tfrac{1}{6}+7\bullet\tfrac{1}{6}+9\bullet\tfrac{1}{6}+11\bullet\tfrac{1}{6}+13\bullet\tfrac{1}{6}=\tfrac{48}{6}=8\,.$$

Јасно, до истиот резултат можеме да дојдеме и со помош на последица 1 и притоа имаме

$$E(2X+1)=2E(X)+1=2\bullet3{,}5+1=8\,.\ \blacklozenge$$

Теорема 5. Нека (X,Y) е дводимензионална дискретна случајна променлива со закон на распределба

$$(x_i,y_j);P(x_i,y_j);\,i=1,2,...,n,...;\ j=1,2,...,m,...$$

и нека $z=g(x,y)$ е реална функција. Тогаш математичкото очекување на случајната променлива $Z=g(X,Y)$ е

$$E(Z)=\sum_i\sum_j g(x_i,y_j)P(x_i,y_j)\,.$$

Доказ. Нека $(x_{k1},y_{k1}),(x_{k2},y_{k2}),...$ се точките на случајната променлива (X,Y) кои со функцијата g се пресликуваат во точката z_k на случајната променлива $Z=g(X,Y)$, т.е. нека

$$z_k=g(x_{ki},y_{ki}),\,i=1,2,3,...\,.$$

Тогаш

$$P(z_k)=P\{Z=z_k\}=\sum_i P\{X=x_{ki},Y=y_{ki}\}=\sum_i P(x_{ki},y_{ki})\,,$$

па затоа

$$E(Z)=\sum_k z_k P(z_k)=\sum_k g(x_{ki},y_{ki})\sum_i P(x_{ki},y_{ki})$$
$$=\sum_k\sum_i g(x_{ki},y_{ki})P(x_{ki},y_{ki})=\sum_i\sum_j g(x_i,y_j)P(x_i,y_j),$$

бидејќи сумирањето по $k=1,2,3,...$ и $i=1,2,3,...$ всушност претставува сумирање по сите точки (x_i,y_j) на случајната променлива (X,Y). ♦

Последица 3. Нека X и Y се дискретни случајни променливи дефинирани над ист простор елементарни настани за кои математичките очекувања $E(X)$ и $E(Y)$ постојат. Тогаш,

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y).$$

Доказ. Нека случајната променлива X прима вредности $x_i, i=1,2,..., \ n,...$ со веројатности

$$P\{X=x_i\}=p_i, i=1,2,...,n,...,$$

а случајната променлива Y прима вредности $y_j, \ j=1,2,...,m,...$ со веројатности

$$P\{Y=y_j\}=q_j, \ j=1,2,...,m,...$$

и нека (X,Y) е дводимензионалната случајна променлива од забелешка 5 која прима вредности

$$(x_i,y_j), i=1,2,...,n,...; \ j=1,2,...,m,...$$

со веројатности

$$P(x_i,y_j)=p_iq_j; i=1,2,...,n,...; \ j=1,2,...,m,... .$$

Од теорема 5 следува дека математичкото очекување на случајната променлива $Z=X+Y$ е:

$$E(Z)=E(X+Y)=\sum_i\sum_j(x_i+y_j)P(x_i,y_j)=\sum_i\sum_j x_ip_iq_j+\sum_i\sum_j y_jp_iq_j$$
$$=\sum_i x_ip_i\sum_j q_j+\sum_j y_jq_j\sum_i p_i=\sum_i x_ip_i+\sum_j y_jq_j$$
$$=E(X)+E(Y),$$

што и требаше да се докаже. ♦

Последица 4. а) Нека $X_1,X_2,...,X_k$ се дискретни случајни променливи дефинирани над ист простор елементарни настани, за кои математичките очекувања $E(X_1),E(X_2),...,E(X_k)$ постојат. Тогаш

$$E(X_1+X_2+...+X_k)=E(X_1)+E(X_2)+...+E(X_k).$$

б) Ако настаните A и B се дисјунктни, тогаш за секоја случајна променлива X важи

$$E(XI_{A\cup B})=E(XI_A)+E(XI_B).$$

Доказ. а) Непосредно следува од последица 3 и принципот на математичка индукција.

б) Од лема 1 б) следува $I_{A\cup B} = I_A + I_B$, па затоа $XI_{A\cup B} = XI_A + XI_B$. Сега тврдењето следува од последица 3. ♦

Забелешка 10. Ако го пресметаме математичкото очекување на двете страни на равенството (5) од теорема 1 и ги искористиме последиците 1 и 4, ја добиваме формулата за вклучување и исклучување (*формула на Силвестер*) која ја докажавме во последица I.2, т.е. добиваме дека за произволни настани $A_k, k = 1,2,...,n$ важи

$$\begin{aligned} P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) - \sum_{1\le k_1<k_2\le n} P(A_{k_1}A_{k_2}) + \sum_{1\le k_1<k_2<k_3\le n} P(A_{k_1}A_{k_2}A_{k_3}) - \\ - \sum_{1\le k_1<k_2<k_3<k_4\le n} P(A_{k_1}A_{k_2}A_{k_3}A_{k_4}) + ... + (-1)^n P(A_1...A_n). \end{aligned} \tag{4}$$

Пример 21. Нека имаме N клетки, во кои независно една од друга се разместуваат n честички. Секоја честичка со веројатност $\frac{1}{N}$ може да падне во секоја фиксирана клетка. Со X_0 да го означиме бројот на празните клетки после таквото разместување. Ќе ја пресметаме веројатноста $P\{X_0 = 0\}$. Ги воведуваме настаните A_i, ставајќи дека настанот A_i се реализирал ако и само ако $i-$та клетка е празна. Тогаш $\{X_0 > 0\} = \bigcup_{i=1}^{N} A_i$. Понатаму, бидејќи

$$P(A_i) = (1-\tfrac{1}{N})^n,\ P(A_iA_j) = (1-\tfrac{2}{N})^n$$

и воопшто

$$P(A_{i_1}A_{i_2}...A_{i_k}) = (1-\tfrac{k}{N})^n$$

од формулата (4) следува

$$P\{X_0 > 0\} = \sum_{k=1}^{N} C_N^k (-1)^{k-1} (1-\tfrac{k}{N})^n\ ,$$

па затоа

$$P\{X_0 = 0\} = 1 - P\{X_0 > 0\} = \sum_{k=0}^{N} C_N^k (-1)^k (1-\tfrac{k}{N})^n\ .♦$$

Теорема 6. а) Ако дискретната случајна променлива X е ненегативна, т.е. ако $x_i \ge 0, i = 1,2,3,...$ и ако постои $E(X)$, тогаш $E(X) \ge 0$.

б) $X \ge 0$ и $E(X) = 0$ ако и само ако $P\{X = 0\} = 1$.

в) Ако за дискретните случајни променливи X и Y важи $X \ge Y$ и постојат $E(X)$ и $E(Y)$, тогаш $E(X) \ge E(Y)$.

Доказ. а) Од $x_i \ge 0, i = 1,2,3,...$ следува $x_i p_i \ge 0, i = 1,2,3,...$, па затоа

$$E(X)=\sum_i x_i p_i \geq 0 .$$

б) Ако $X \geq 0$ и $E(X)=0$, тогаш за секој i важи $x_i p_i = 0$ и како $p_i > 0$ добиваме дека за секој i важи $x_i = 0$, т.е. $X = 0$, односно $P\{X = 0\} = 1$.

Обратно, ако $P\{X = 0\} = 1$, тогаш е јасно дека $X \geq 0$ и $E(X) = 0$.

в) Ако $X \geq Y$, тогаш $X - Y \geq 0$, па од а), последица 1 и последица 3 следува $E(X) - E(Y) = E(X - Y) \geq 0$, т.е. $E(X) \geq E(Y)$. ♦

Дефиниција 12. *Мода* на случајната променлива X ја нарекуваме вредноста $\mathrm{mo}\, X$ на X со најголема веројатност.

Медијана на случајната променлива X ја нарекуваме нејзината вредност $\mathrm{me}\, X$ за која се исполнети неравенствата

$$P\{X \leq \mathrm{me}\, X\} \geq 0,5 \text{ и } P\{X \geq \mathrm{me}\, X\} \geq 0,5 .$$

Пример 22. Ќе ги определиме модата и медијаната на случајната променлива X зададена со следнава табела.

X	10	20	30	40
p	0,20	0,15	0,25	0,4

Од табелата се гледа дека најголема веројатност има вредноста $X = 40$, па затоа $\mathrm{mo}\, X = 40$. За $X = 30$ важи $P\{X \leq 30\} = 0,6 \geq 0,5$ и $P\{X \geq 30\} = 0,65 \geq 0,5$, па затоа $\mathrm{me}\, X = 30$. ♦

На крајот од оваа точка ќе се осврниме на математичкото очекување на повеќедимензионалните дискретни случајни променливи. Така ја имаме следнава дефиниција.

Дефиниција 13. Нека $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$ е $n-$димензионална случајна променлива таква што математичките очекувања $E(X_i), i = 1, 2, ..., n$ постојат. Векторот

$$E(X) = (E(X_1), E(X_2), ..., E(X_n)) , \tag{5}$$

го нарекуваме *математичко очекување на случајната променлива* X.

Пример 23. За дводимензионалната случајна променлива $Z = (X, Y)$ од пример 12 имаме $E(X) = \frac{20}{18} = \frac{10}{9}$ и $E(Y) = \frac{54}{18} = 3$, па затоа $E(Z) = (\frac{10}{9}, 3)$. ♦

ЗАДАЧИ

1. Во еден сад имаме 8 топчиња на кои се напишани броевите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и 8. Без гледање извлекуваме 3 топчиња и со X да го означиме најголемиот од извлечените броеви.
   a) Кои вредности може да ги прими случајната променлива X.
   b) Најдете го законот на распределба на случајната променлива X.
   c) Пресметајте го математичкото очекување $E(X)$.

2. Во еден сад се наоѓаат n топчиња кои се нумерирани со броевите 1, 2, 3, ..., n . Без гледање извлекуваме r топчиња. Со Y да го означиме збирот на броевите на извлечените топчиња. Пресметајте $E(Y)$.

3. Случајната променлива X е зададена со табелата:

x_i	-1	0	1
$P(x_i)$	p	q	r

Најдете ги веројатностите p,q и r ако се знае дека $E(X)=0{,}1$ и $E(X^2)=0{,}9$.

4. Дискретната случаајна променлива X е распределена по законот

$$P\{X=k\}=\frac{aq^k}{k},\ \ k=1,2,3,...,\ \ q\in(0,1)\ .$$

Најдете ја константата k . Пресметајте $E(X)$.

5. Пресметајте го математичкото очекување на случајната променлива $Z=X^2+Y$, каде X и Y се случајните променливи од задача 2.1.

6. Дискретната дводимензионална случајна променлива (X,Y) е зададена со таблицата:

$Y \setminus X$	-1	0	1
0	0,25	0,25	0,10
1	0,10	0,15	0,15

Пресметајте го математичкото очекување на случајната променлива $Z=X+2Y^2$.

7. Нека m е инфимумот, а M супремумот од вредностите на дискретната случајна променлива X . Докажете дека $m\leq E(X)\leq M$.

8. Нека X е дискретна случајна променлива која прима вредности $0,1,2,...$ со веројатности $p_k=P\{X=k\}=\frac{a^k}{(1+a)^{k+1}},\ k=0,1,2,...;\ a>0$. Пресметајте $E(X)$.

9. Нека $X_i,\ i=1,2,...,n$ се позитивни и еднакво распределени дискретни случајни променливи над ист дискретен простор на веројатности. Докажете дека

$$E(X_i/\sum_{k=1}^{n}X_k)=\frac{1}{n}\text{ , за секој } i=1,2,...,n\ .$$

5. МОМЕНТИ ОД ПОВИСОК РЕД. ДИСПЕРЗИЈА И СТАНДАРДНА ДЕВИЈАЦИЈА

Во овој дел ќе ги разгледаме моментите од повисок ред, за чија егзистенција и начинот на нивно определување важи теорема 4. Така ја имаме следнава дефиниција.

Дефиниција 14. Нека е дадена дискретната случајна променлива X која прима вредности $x_1,x_2,x_3,...$ со веројатности $p_1,p_2,p_3,...$, соодветно. Математичкото очекување

$$E(X^n)=\sum_i x_i^n p_i$$

на случајната променлива X^n го нарекуваме *$n-$ти момент* (или *момент од $n-$ти ред*) на случајната променлива X. *Апсолутен $n-$ти момент* го нарекуваме математичкото очекување

$$E\,|\,X\,|^n = \sum_i |\,x_i\,|^n\; p_i$$

на случајната променлива $|\,X\,|^n$. Да означиме $E(X)=m_1$. *Централен момент од $n-$ти ред* го нарекуваме математичкото очекување

$$E(X-m_1)^n = \sum_i (x_i - m_1)^n\, p_i \;,$$

а *апсолутен централен момент од $n-$ти ред* го нарекуваме математичкото очекување

$$E\,|\,X-m_1\,|^n = \sum_i |\,x_i - m_1\,|^n\; p_i \;.$$

Централниот момент од втор ред го нарекуваме *дисперзија на случајната променлива X* и го означуваме со

$$D(X) = E(X-m_1)^2 .$$

Квадратниот корен од дисперзијата $\sigma = \sqrt{D(X)}$ го нарекуваме *средно квадратно отстапување на случајната променлива X* или *стандардна девијација на случајната променлива X* и таа е мерка за отстапување на случајната променлива од нејзиното математичко очекување.

Пример 24. За случајната променлива X од пример 20 имаме

$$E(X^2)=\tfrac{91}{6}\,,\; D(X)=E(X-E(X))^2=\tfrac{17{,}5}{6}\,,$$

па затоа средно квадратното отстапување на оваа случајна променлива е

$$\sqrt{D(X)}=\sqrt{\tfrac{17{,}5}{6}}\approx 1{,}7078251 \,.\; ♦$$

Лема 3. Нека $r>0$ и $E(|\,X\,|^r)<\infty$. Тогаш $E(|\,X\,|^s)<\infty$, за секој $s,\, 0<s<r$.

Доказ. Очигледно важи $|\,X\,|^s \le 1+|\,X\,|^r$. Сега неравенството следува од теорема 6 в). ♦

Теорема 7. а) $D(X)\ge 0$ и $D(X)=0$ ако и само ако постои константа C таква што $P\{X=C\}=1$.

б) Ако X е дискретна случајна променлива со конечна дисперзија $D(X)$ и $a,b\in\mathbf{R}$, тогаш за случајната променлива $Y=aX+b$ важи

$$D(Y)=a^2D(X)\,.$$

Доказ. а) Од $(X-E(X))^2\ge 0$ и до теорема 6 а) следува

$$D(X)=E(X-E(X))^2\geq 0.$$

Вториот дел од тврдењето следува од теорема 6 б).

б) Од дефиниција 14 и последица 1 непосредно следува дека

$$D(Y)=E(Y-E(Y))^2=E(aX+b-aE(X)-b)^2=E[a^2(X-E(X))^2]$$
$$=a^2E(X-E(X))^2=a^2D(X),$$

што и требаше да се докаже. ♦

Последица 5. Ако X е дискретна случајна променлива со конечни математичко очекување $E(X)$ и дисперзија $D(X)$, тогаш за случајната променлива $Y=\frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}}$ важи $D(Y)=1$.

Доказ. Непосредно следува од теорема 7, за $a=\frac{1}{\sqrt{D(X)}}$ и $b=\frac{E(X)}{\sqrt{D(X)}}$. Навистина,

$$D(Y)=D(\tfrac{1}{\sqrt{D(X)}}X-\tfrac{E(X)}{\sqrt{D(X)}})=\tfrac{1}{D(X)}D(X)=1.\ ♦$$

Забелешка 11. Според последиците 2 и 5 секоја случајна променлива X со конечни математичко очекување $E(X)$ и дисперзија $D(X)$ може да се трансформира во случајна променлива $Y=\frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}}$, која ја нарекуваме *нормирана случајна променлива* за случајната променлива X и за која важи $E(Y)=0$ и $D(Y)=1$.

Пример 25. Нека X е случајната променлива од пример 20 и $Y=3X-1$. Во пример 24 пресметавме дека $D(X)=\frac{17,5}{6}$, па затоа од теорема 7 б) следува дека

$$D(Y)=D(3Y-1)=3^2D(X)=9\bullet\tfrac{17,5}{6}=\tfrac{52,5}{2}.\ ♦$$

Теорема 8. $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$.

Доказ. Имаме

$$(X-E(X))^2=X^2-2XE(X)+[E(X)]^2,$$

па затоа

$$D(X)=E(X-E(X))^2=E(X^2-2XE(X)+[E(X)]^2)$$
$$=E(X^2)-E(2XE(X))+E([E(X)]^2)=E(X^2)-2E(X)E(X)+[E(X)]^2$$
$$=E(X^2)-[E(X)]^2,$$

што и требаше да се докаже. ♦

Пример 26. За случајната променлива X од пример 17 имаме

$$E(X)=\tfrac{21}{6}\text{ и }E(X^2)=\tfrac{91}{6}.$$

Понатаму, од теорема 8 имаме

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{91}{6} - (\frac{21}{6})^2 = \frac{546-441}{36} = \frac{105}{36} = \frac{17,5}{6}. \ \blacklozenge$$

Теорема 9. Нека X е случајна променлива и нека постои $E(X^2)$. Тогаш функцијата $f: a \to E((X-a)^2)$ има строг минимум еднаков на $D(X)$ во точката $a = E(X)$.

Доказ. Имаме

$$\begin{aligned} E((X-a)^2) &= E[((X - E(X)) + (E(X) - a))^2] \\ &= E[(X - E(X)^2 + 2(E(X) - a)E(X - E(X)) + (E(X) - a)^2 \\ &= D(X) + 2(E(X) - a)(E(X) - E(X)) + (E(X) - a)^2 \\ &= D(X) + (E(X) - a)^2 \leq D(X). \end{aligned}$$

Сега тврдењето следува од теорема 6 б). ♦

Пример 27. а) Еден плоштад има форма на квадрат. Според аерофотометриските мерења должината на страната изнесува $350m$. Квалитетот на аерофотометриските мерења се цени според тоа што грешката од

$0m$ има веројатност $0,42$,
$\pm 10m$ има веројатност $0,16$,
$\pm 20m$ има веројатност $0,08$ и
$\pm 30m$ има веројатност $0,05$.

Ќе ја определиме средната вредност на плоштината на плоштадот. Имено, должината на страната на плоштадот е случајна променлива X, која зависи од случајноста на аерофотометриските снимања, па затоа нејзиниот закон на распределба е:

x_i	320	330	340	350	360	370	380
p_i	0,05	0,08	0,16	0,42	0,16	0,08	0,05

што значи дека математичкото очекување на оваа случајна променлива е

$$E(X) = (320 + 380) \cdot 0,05 + (330 + 370) \cdot 0,08 + (340 + 360) \cdot 0,16 + 350 \cdot 0,42 = 350m.$$

Врз основа на претходно кажаното може да се помисли дека средната вредност на плоштината на плоштадот е $350^2 m^2 = 122500m^2$. Меѓутоа, ова не е точно, бидејќи плоштината на плоштадот може да ги има следниве вредности:

$$320^2, 330^2, 340^2, 350^2, 360^2, 370^2, 380^2$$

и тоа се вредностите на случајната променлива X^2 чиј закон на распределба е даден во следната табела

x_i^2	320^2	330^2	340^2	350^2	360^2	370^2	380^2
p_i	0,05	0,08	0,16	0,42	0,16	0,08	0,05

Според тоа, средната вредност на плоштината на плоштадот е

$$E(X^2)=\sum_{i=1}^{7} p_i x_i^2 = 122686 m^2 .$$

За средноквадратното отстапување на случајната променлива X имаме

$$\sqrt{D(X)}=\sqrt{E(X^2)-[E(X)]^2}=\sqrt{122686-122500}=\sqrt{186}\approx 13,64 .$$

б) Експертска група врши проценка на ефективноста на нова инвестиција, која проценка е изразена во вид на добивка, односно загуба за промашено инвестирање во 000 денари. Законот на распределба на веројатностите за ефективноста на инвестицијата е даден во следнава табела:

x_i	-400	-200	-100	0	100	200	300	400
p_i	0,05	0,15	0,30	0,10	0,30	0,03	0,04	0,03

Како што можеме да видиме исплатливоста на новата инвестиција е случајна променлива X, за која математичкото очекување и средноквадратното отстапување се

$$E(X)=\sum_{i=1}^{8} x_i p_i = -20 \text{ и}$$

$$\sqrt{D(X)}=\sqrt{E(X^2)-[E(X)]^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{8} x_i^2 p_i-(\sum_{i=1}^{8} x_i p_i)^2}=170,88 .$$

Во случајов, математичкото очекување го покажува очекуваниот финансиски резултат, а како тоа е негативно, природно е раководството на компанијата да одлучи да не пласира средства во оваа инвестиција, бидејќи пласманот е ризичен. Понатаму, стандардната девијација е 170,88, т.е имаме големо отстапување од математичкото очекување, што повторно не наведува на заклучок дека пласманот е ризичен.

Веројатноста за загуба е

$$F(-100)=P\{X\le -100\}=p_1+p_2+p_3=0,05+0,15+0,30=0,50 ,$$

а веројатноста за остварување добивка меѓу 100000 и 300000 е

$$P\{100\le X\le 300\}=p_5+p_6+p_7=0,30+0,03+0,04=0,37 . \ ♦$$

Да ги разгледаме моментот од $r-$ти ред и централниот момент од $r-$ти ред, кои во натамошните разгледувања ќе ги означуваме со m_r и M_r, соодветно. Имаме,

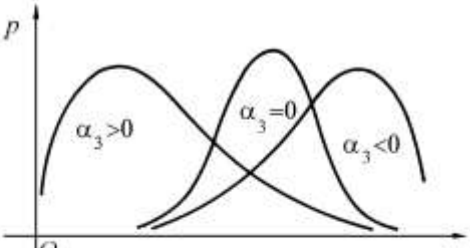
$$\begin{aligned} M_r &= E(X-m_1)^r=\sum_i (x_i-m_1)^r p_i=\sum_i p_i \sum_{k=0}^{r}(-1)^k C_r^k x_i^{r-k} m_1^k \\ &= \sum_{k=0}^{r}(-1)^k C_r^k m_1^k \sum_i p_i x_i^{r-k}=\sum_{k=0}^{r}(-1)^k C_r^k m_1^k m_{r-k}. \end{aligned} \tag{1}$$

Јасно,

$$M_1=E(X-m_1)=E(X)-m_1=m_1-m_1=0 .$$

Понатаму, во (1) ставаме $r=2,3,4$ и добиваме:

$$M_2 = m_2 - m_1^2,$$
$$M_3 = m_3 - 3m_1m_2 + 2m_1^3,$$
$$M_4 = m_4 - 4m_1m_3 + 6m_1^2m_2 - 3m_1^4.$$



Цртеж 8

Во нашите натамошни разгледувања ќе ги користиме моментите M_3 и M_4, со чија помош ги дефинираме *коефициентот на асиметрија* α_3 и *коефициентот на сплоштеност* α_4:

$$\alpha_3 = \frac{M_3}{\sigma^3},\ \ \alpha_4 = \frac{M_4}{\sigma^4}.$$

Што се однесува до коефициентот на асиметрија α_3, да забележиме дека за симетричните закони на распределба истиот е еднаков на нула. Меѓутоа α_3 може да биде еднаков на нула и за некои асиметрични закони на распределба, па затоа во неговата интерпретација како мерка за асиметријата треба да се биде внимателен. Сепак, распределбите кои ќе бидат предмет на нашите разгледувања, и кои обично се среќаваат во практика, имаат својство асиметријата да расте со растењето на апсолутната вредност на коефициентот на асиметрија. Притоа, видот на распределбата непосредно влијае на коефициентот на асиметрија и тоа за таканаречените непрекинати случајни променливи, кои ќе ги разгледуваме во следната глава, графички е прикажано на цртеж 8.

Коефициентот α_4 служи како мерка за сплоштеноста на законот на распределба, но самата негова геометриска интерпретација не е најпогодна, па затоа истата нема да ја презентираме. Сепак, да забележиме дека законот на распределба за кој важи $\alpha_4 = 3$ ќе го сметаме за нормално сплоштен.

ЗАДАЧИ

1. Пресметајте ги математичкото очекување и дисперзијата на случајните променливи X и Y зададени со табелите:

x_i	-2	-1	0	1	2
$P(x_i)$	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

y_i	5	7	10	15
$P(y_i)$	0,2	0,5	0,2	0,1

2. Во еден сад имаме 4 бели и 3 црвени топчиња. Без гледање извлекуваме 3 топчиња и со X да го означиме бројот на извлечените бели топчиња.
   a) Кои вредности може да ги прими случајната променлива X.
   b) Најдете го законот на распределба на случајната променлива X.
   c) Пресметајте ги математичкото очекување $E(X)$ и дисперзијата $D(X)$.
3. Фрламе две коцки за играње и со X да ја означиме разликата на паднатите броеви.
   a) Кои вредности може да ги прими случајната променлива X.
   b) Најдете го законот на распределба на случајната променлива X.
   c) Пресметајте ги математичкото очекување $E(X)$ и дисперзијата $D(X)$.

4. Определен артикл се произведува на две производни ленти, при што капацитетот на првата лента е 5, а на втората лента е 3 производи. Притоа броевите на произведените артикли на секоја лента се случајни и нека законот на распределба на случајната променлива (X,Y) е:

$Y \setminus X$	0	1	2	3	4	5
0	0	0,01	0,03	0,05	0,07	0,09
1	0,01	0,02	0,04	0,05	0,06	0,08
2	0,01	0,03	0,05	0,05	0,05	0,06
3	0,01	0,02	0,04	0,06	0,06	0,05

a) Најдете ги маргиналните и условните закони на распределба.

b) Најдете го законот на распределба на случајната променлива $Z = X + Y$ и пресметајте ги нејзините математичко очекување и дисперзија.

c) Најдете го законот на распределба на случајната променлива $Z = \max\{X,Y\}$ и пресметајте ги нејзините математичко очекување и дисперзија.

d) Најдете го законот на распределба на случајната променлива $Z = \min\{X,Y\}$ и пресметајте ги нејзините математичко очекување и дисперзија.

e) Најдете го законот на распределба на случајната променлива $Z =| X - Y |$ и пресметајте ги нејзините математичко очекување и дисперзија.

5. Брокерот, последниот работен ден во август 2005 година, акциите на корпорацијата OMEGA ги проценува на следниов начин: 100 USD со веројатност 0,10; 102 USD со веројатност 0,35; 103 USD со веројатност 0,20; 105 USD со веројатност 0,25; 107 USD со веројатност 0,05; 108 USD со веројатност 0,03 и 98 USD со веројатност 0,02.

a) Претставете ги наведените податоци на вообичаен начин со помош на табела.

b) Определете ги функцијата на распределба, математичкото очекување и дисперзијата и толкувајте ги добиените податоци.

6. Инвеститорот ги разгледува можностите за пласирање на средства во два инвестициони проекти. Оценката на остварената добивка со соодветните веројатности е наведена во следнава табела:

Добивка во илјада евра	1000	1500	2000	2500	3000
Проект I	0,0	0,3	0,4	0,3	0,0
Проект II	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

a) Пресметајте ги математичкото очекување, дисперзијата и средноквартното отстапување за секој проект одделно.

b) Ако одлуката за пласирање на средствата се донесува врз база на пресметаните вредности, за кој проект ќе се одлучи инвеститорот?

7. Пресметајте ја дисперзијата на случајната променлива X од задача 4.8.

8. Случајната променлива X прима $k > 1$ различни вредности $x_i, i = 1,2,...,k$ со позитивни веројатности $p_i, i = 1,2,...,k$; $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$. Докажете дека $\lim_{n\to\infty} \frac{E(X^{n+1})}{E(X^n)} = x_m$, каде x_m е најголемата по апсолутна вредност меѓу $x_i, i = 1,2,...,k$.

9. Нека X е дискретна случајна променлива која прима вредности $0,1,2,...$ со веројатности

$$p_k = P\{X = k\} = \frac{M}{(a+k)(a+k+1)(a+k+2)}\ ,\ k = 0,1,2,...\ ,\ a > 0\ .$$

a) Пресметајте ги веројатностите p_k ако $E(X) = A$.

b) Докажете дека $D(X)$ не постои.

c) Најдете $P\{X \le 10\}$.

7. СТАНДАРДНИ ДИСКРЕТНИ СЛУЧАЈНИ ПРОМЕНЛИВИ

7.1. БИНОМНА РАСПРЕДЕЛБА

Бројот на успеси X при n независни испитувања во Бернулиевата шема е даден со:

$$P\{X = m\} = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}, \quad m = 0,1,2,...,n, \tag{1}$$

и множеството парови $(X = m, P\{X = m\}), m = 0,1,2,...,n$ ја дава таканаречената *биномна распределба*. Од релацијата (1) следува дека биномната распределба е определена со параметрите n и p, па затоа за оваа распределба ќе ја користиме ознаката $B\{n, p\}$.

Пример 28. Потполно автоматизирана машина произведува 6% дефектни производи. Колкава е веројатноста во случајно избрани пет производи да има три дефектни?

Решение. Од условот на задачата следува дека веројатноста за изработка на дефектен производ е $p = 0,06$, а веројатноста за изработка на исправен производ е $1 - p = 0,94$. Значи, бројот на дефектните производи во пет избрани производи е случајна променлива со биномна распределба $B\{n = 5,\ p = 0,06\}$. Според (1) бараната веројатност е

$$P\{X = 2\} = C_5^2 0,06^2 0,94^3 = 10 \bullet 0,06^2 0,94^3 = 0,0318096\,.$$

Добиениот резултат го толкуваме на следниов начин: ако добиените производи ги пакуваме во кутии кои содржат по пет производи, без притоа да ги одделуваме дефектните од исправните производи, тогаш приближно во 3,2% од кутиите ќе имаме точно по 2 дефектни производи. ♦

Пресметувањето на веројатноста $P\{X = m\}$ по формулата (1) не е секогаш најпогодно. Имено, за големи вредности на m и n претставувањето на биномниот коефициент C_n^m не е едноставно. Затоа, овде ќе најдеме рекурентна формула за наоѓање на веројатностите кај биномната распределба. Имаме,

$$P\{X = m-1\} = C_n^{m-1} p^{m-1} (1-p)^{n-m+1}\,,$$

па затоа

$$\frac{P\{X=m\}}{P\{X=m-1\}} = \frac{C_n^m p^m (1-p)^{n-m}}{C_n^{m-1} p^{m-1} (1-p)^{n-m+1}} = \frac{\frac{n!}{m!(n-m)!}}{\frac{n!}{(m-1)!(n-m+1)!}} \frac{p}{1-p} = \frac{n-m+1}{m} \frac{p}{1-p}\,,$$

односно

$$P\{X = m\} = \frac{n-m+1}{m} \frac{p}{1-p} P\{X = m-1\}\,. \tag{2}$$

Рекурентната формула (2) ни овозможува веројатноста $P\{X = m\}$ да ја пресметаме поедноставно користејќи ја веројатноста $P\{X = m-1\}$. Според тоа, знаејќи ја веројатноста

$$P\{X=0\}=C_n^0 p^0 (1-p)^n=(1-p)^n$$

едноставно можеме да ги пресметаме веројатностите

$$P\{X=1\},\ P\{X=2\},\dots.$$

Пример 29. Веројатноста дека еден производ е дефектен е $p=0,05$. Од големо складиште се земаат 5 производи. Пресметајте ги веројатностите дека меѓу нив има $m=0,1,2,3,4,5$ дефектни.

Решение. Од условот на задачата имаме

$$n=5,\ p=0,05 \text{ и } 1-p=0,95.$$

Според тоа,

$$P\{X=0\}=0,95^5=0,7737809375.$$

Останатите веројатности можеме да ги пресметаме користејќи ја формулата (2). Имено,

$$P\{X=1\}=\tfrac{5-1+1}{1}\bullet\tfrac{0,05}{0,95}P\{X=0\}=5\bullet 0,0526315789\bullet 0,7737809375=0,2036265623.$$

m	$\frac{n-m+1}{m}$	$\frac{p}{1-p}$	$P\{X=m\}$
0	-	0,0526315789	0,7737809375
1	$\frac{5}{1}$	0,0526315789	0,2036265623
2	$\frac{4}{2}$	0,0526315789	0,0214343750
3	$\frac{3}{3}$	0,0526315789	0,0011281250
4	$\frac{2}{4}$	0,0526315789	0,0000296875
5	$\frac{1}{5}$	0,0526315789	0,0000003125

Вредностите на бараните веројатности се дадени во горната табела. ♦

Ќе го определиме математичкото очекување на биномната распределба $B\{n,p\}$. Ставаме $q=1-p$ и ако ја искористиме дека

$$kC_n^k=nC_{n-1}^{k-1},$$

тогаш за математичкото очекување добиваме

$$\begin{aligned}E(X)&=\sum_{i=1}^{n}x_iP\{X=x_i\}=\sum_{m=0}^{n}mP\{X=m\}\\&=1\cdot C_n^1pq^{n-1}+2\cdot C_n^2p^2q^{n-2}+3\cdot C_n^3p^3q^{n-3}+\dots+n\cdot C_n^np^n\\&=nC_{n-1}^0pq^{n-1}+nC_{n-1}^1p^2q^{n-2}+nC_{n-1}^2p^3q^{n-3}+\dots+n\cdot C_{n-1}^{n-1}p^n\\&=np(C_{n-1}^0q^{n-1}+C_{n-1}^1pq^{n-2}+C_{n-1}^2p^2q^{n-3}+\dots+C_{n-1}^{n-1}p^{n-1})\\&=np(q+p)^{n-1}=np.\end{aligned}$$

Ќе ја определиме дисперзијата на биномната распределба За таа цел ќе ја искористиме теорема 8. Претходно покажавме дека $E(X) = np$. За да пресметаме $E(X^2)$ во формулата

$$(q + px)^n = \sum_{j=0}^{n} C_n^j p^j q^{n-j} x^j$$

ќе диференцираме по x, при што добиваме:

$$np(q + px)^{n-1} = \sum_{j=1}^{n} jC_n^j p^j q^{n-j} x^{j-1} .$$

Ако последното равенство го помножиме со x добиваме

$$npx(q + px)^{n-1} = \sum_{j=1}^{n} jC_n^j p^j q^{n-j} x^j ,$$

од што со повторно диференцирање наоѓаме:

$$np(q + px)^{n-1} + n(n-1)p^2 x(q + px)^{n-2} = \sum_{j=1}^{n} j^2 C_n^j p^j q^{n-j} x^{j-1} .$$

Сега во последното равенство ставаме $x = 1$ и ако земеме во предвид дека $p + q = 1$ добиваме

$$np + n(n-1)p^2 = \sum_{j=1}^{n} j^2 C_n^j p^j q^{n-j} = \sum_{j=0}^{n} j^2 P\{X = j\} = E(X^2) .$$

Конечно,

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = np + n^2 p^2 - np^2 - n^2 p^2 = np(1 - p) = npq .$$

Со тоа ја докажавме следнава теорема.

Теорема 10. Ако случајната променлива X има биномна распределба $B\{n, p\}$, тогаш нејзиното математичко очекување е

$$E(X) = np , \tag{3}$$

а дисперзијата е

$$D(X) = npq . \;\blacklozenge \tag{4}$$

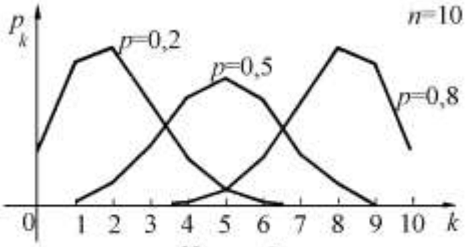
Со аналогни постапки можеме да ги пресметаме и централните моменти од повисок ред. Понатаму, може да се докаже дека коефициентите на асиметрија и сплоштеност на биномната распределба $B\{n, p\}$ се дадени со формулите

$$\alpha_3 = \frac{q-p}{\sqrt{npq}}, \text{ и} \tag{5}$$

$$\alpha_4 = 3 + \frac{1-6pq}{npq} , \tag{6}$$

соодветно.

Од формулата (6) непосредно следува дека независно од вредноста на p важи $\alpha_4 \to 3$, кога $n \to \infty$, што значи дека во овој случај сплоштеноста на биномната распределба тежи кон нормална сплоштеност.



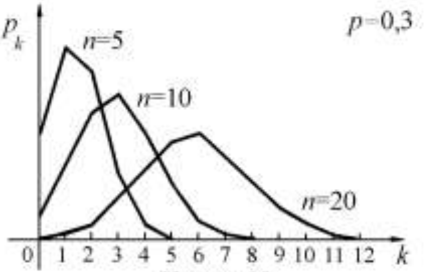
Цртеж 9

Од формулата (5) непосредно следува дека биномната распределба е позитивно асиметрична за $q > p$, односно кога $q > \frac{1}{2}$, а негативно асиметрична за $q < p$, односно $q < \frac{1}{2}$. Понатаму, биномната распределба е симетрична ако и само ако $p = q = \frac{1}{2}$. Претходно изнесеното е илустрирано со биномните распределби

$$B\{0,2;10\},\ B\{0,5;10\} \text{ и } B\{0,8;10\},$$

чии графици се прикажани на цртеж 9.

Понатаму, повторно од формулата (5) следува дека независно од вредноста на веројатноста p важи $\alpha_3 \to 0$, кога $n \to \infty$, што значи дека биномната распределба станува се помалку асиметрична со зголемувањето на параметарот n. Влијанието на големината на параметарот n на обликот на биномната распределба е прикажано на цртеж 10, на кој се прикажани биномните распределби: $B\{0,3;5\}$, $B\{0,3;10\}$ и $B\{0,3;20\}$.



Цртеж 10

Пример 30. а) Ревизорот ја контролира точноста на книжењето на книговодствените записи. Од искуство знае дека записот е неточен во приближно 5% случаи. Ако се контролираат 20 случајно избрани записи, колкава е веројатноста: сите записи да се точни, 3 записи од избраните 20 да содржат грешка во книжењето? Колкав е очекуваниот број неточни записи и колкаво е просечното отстапување од очекуваниот број неточни записи?

б) Продавачот во договор со произведувачот дава едногодишна гаранција за исправност на сите делови на автомобилот од марка ИСП. Според податоците кои се однесуваат на претходниот период 15% од купувачите пријавуваат дефект во гарантниот рок. Ако во еден ден се продадени 8 автомобили и ако случајната променлива X е бројот на автомобили донесени за поправка во гарантниот рок, да се најде законот на распределба на X? Колкаво е математичкото очекување и средноквадратното отстапување на случајната променлива X?

Решение. а) При контролата на точноста на книговодствените записи можни се два резултати: записот е неточен и записот е точен, при што веројатноста за неточен запис е еднаква на $5\% = \frac{5}{100} = 0,05$. Според тоа, бројот на неточните записи во дадената контрола е случајна променлива со биномна распределба, т.е.

$$P\{X=m\}=C_{20}^{m}0,05^{m}0,95^{20-m};\quad m=0,1,2,...,20\,.$$

Веројатноста сите записи да се точни е

$$P\{X=0\}=C_{20}^{0}0,05^{0}0,95^{20-0}=0,95^{20},$$

а веројатноста 3 записи да содржат грешка е

$$P\{X=3\}=C_{20}^{3}0,05^{3}0,95^{20-3}=C_{20}^{3}0,05^{3}0,95^{17}.$$

Очекуваниот број неточни записи е $E(X)=np=20\bullet 0,05=1$, а просечното отстапување од очекуваниот број неточни записи е еднакво на средноквадратното отстапување

$$\sqrt{D(X)}=\sqrt{npq}=\sqrt{20\bullet 0,05\bullet 0,95}=0,97468\,.$$

б) Случајната променлива *број на пријавени автомобили за поправка во гарантниот рок* има биномна распределба со параметри $n=8$ и $p=0,15$, т.е.

$$P\{X=m\}=C_{8}^{m}0,15^{m}0,85^{8-m};\quad m=0,1,2,...,8\,.$$

Очекуваниот број пријавени автомобили за поправка е

$$E(X)=np=8\bullet 0,15=1,2\,,$$

а просечното отстапување од очекуваниот број пријавени автомобили е еднакво на средноквадратното отстапување

$$\sqrt{D(X)}=\sqrt{npq}=\sqrt{8\bullet 0,15\bullet 0,85}=1,00995\,.\ \blacklozenge$$

На крајот од овој дел, користејќи ја рекурзивната формула (2), за биномната распределба $B\{p,n\}$, ќе ја определиме вредноста m_0 на случајната променлива X која има најголема веројатност (види пример I.52). Имено, ако m_0 е онаа вредност на случајната променлива X која има најголема веројатност, тогаш важи

$$P\{X=m_0-1\}\le P\{X=m_0\}\ge P\{X=m_0+1\}\,.$$

Да го разгледаме неравенството $P\{X=m_0-1\}\le P\{X=m_0\}$. Ако $P\{X=m_0\}$ го изразиме со помош на рекурентната формула (2), го добиваме неравенството

$$1\le \frac{n-m_0+1}{m_0}\frac{p}{1-p}\,,$$

кое е еквивалентно со неравенството $m_0\le np+p$. Понатаму, ако од (2) го изразиме $P\{X=m_0+1\}$ и замениме во неравенството

$$P\{X=m_0\}\ge P\{X=m_0+1\},$$

после средувањето го добиваме неравенството $m_0\ge np+p-1$. Со тоа ја докажавме следнава теорема.

Теорема 11. Во биномната распределба $B\{p,n\}$ најголема веројатност има онаа вредност m_0 на променливата X која ги задоволува неравенствата

$$np+p-1\le m_0\le np+p\,.\ \blacklozenge \tag{7}$$

Интервалот во кој припаѓа вредноста m_0 на променливата X со најголема веројатност во биномната распределба $B\{p,n\}$ има должина

$$np+p-(np+p-1)=1.$$

Ако $np+p-1$ не е природен број, тогаш постои еден единствен природен број m_0 кој ги задоволува неравенствата (7), што значи дека во овој случај бројот m_0 е еднозначно определен. Меѓутоа, ако $np+p-1$ е природен број, тогаш и бројот $np+p$ е природен број, што значи дека постојат два природни броја кои ги задоволуваат неравенствата (7). Имено, во овој случај лесно се докажува дека

$$P\{X=np+p-1\}=P\{X=np+p\}.$$

Пример 31. Потполно автоматизирана машина произведува 9% дефектни производи. Производот без контрола се пакува во кутии по 30 парчиња. Колку дефектни производи најчесто ќе има во кутиите?

Решение. Ако со X го означиме бројот на дефектните производи во една кутија, тогаш X е случајна променлива со биномна распределба $B\{n=30;\ p=0,09\}$. Бидејќи $np=2,7$ не е природен број, од теорема 7 следува дека најголема веројатност има природниот број m_0 за кој важи

$$2,7+0,09-1\le m_0\le 2,7+0,09,$$

т.е.

$$1,79\le m_0\le 2,79.$$

Според тоа, во кутиите најчесто ќе има $m_0=2$ дефектни производи. ♦

7.2. ПОАСОНОВА РАСПРЕДЕЛБА

Нека $a>0$. Да ја разгледаме функцијата X која прима вредности $k=0,1,2,3,...$ со веројатности

$$P(k)=\frac{a^k}{k!}e^{-a},\quad k=0,1,2,\dots. \tag{1}$$

Бидејќи

$$\sum_{k=0}^{\infty}P(k)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k}{k!}e^{-a}=e^{-a}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k}{k!}=e^{-a}e^{a}=1,$$

од дефиниција 1 следува дека X е дискретна случајна променлива, за која ќе велиме дека има *Поасонова распределба* со параметар a и истата ќе ја означуваме со $\boldsymbol{P}(a)$. За случајната променлива X со Поасонова распределба $\boldsymbol{P}(a)$ имаме

$$E(X)=\sum_{k=0}^{\infty}k\frac{a^k}{k!}e^{-a}=ae^{-a}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a^{k-1}}{(k-1)!}=ae^{-a}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k}{k!}=ae^{-a}e^{a}=a$$

и

$$E(X^2)=\sum_{k=0}^{\infty}k^2\frac{a^k}{k!}e^{-a}=ae^{-a}\sum_{k=1}^{\infty}k\frac{a^{k-1}}{(k-1)!}=ae^{-a}\sum_{k=1}^{\infty}[(k-1)+1]\frac{a^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$=ae^{-a}\sum_{k=1}^{\infty}(k-1)\frac{a^{k-1}}{(k-1)!}+ae^{-a}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a^{k-1}}{(k-1)!}=ae^{-a}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{a^{k-1}}{(k-2)!}+ae^{-a}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k}{k!}$$

$$=a^2e^{-a}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{a^{k-2}}{(k-2)!}+ae^{-a}e^{a}=a^2e^{-a}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k}{k!}+a=a^2e^{-a}e^{a}+a=a^2+a$$

па затоа

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=a^2+a-a^2=a\,.$$

Со тоа ја докажавме следнава теорема.

Теорема 12. Ако случајната променлива X има Поасонова распределба $\boldsymbol{P}(a)$, тогаш нејзиното математичко очекување е

$$E(X)=a\,, \qquad (2)$$

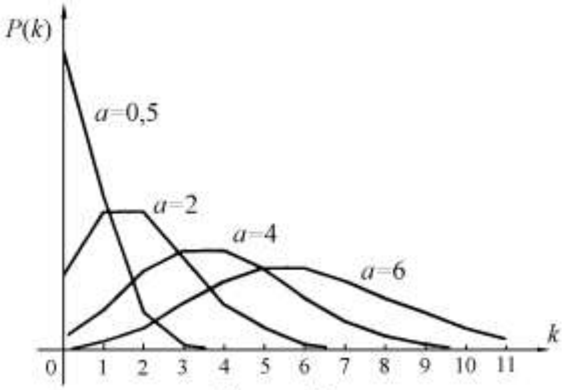
а дисперзијата е

$$D(X)=a\,.\ \blacklozenge \qquad (3)$$

Со аналогни постапки можеме да ги пресметаме и централните моменти од повисок ред. Понатаму, може да се докаже дека коефициентите на асиметрија и сплоштеност на Поасоновата распределба $\boldsymbol{P}(a)$ се дадени со формулите

$$\alpha_3=\frac{1}{\sqrt{a}}, \text{ и} \qquad (4)$$

$$\alpha_4=3+\frac{1}{a}, \qquad (5)$$



Цртеж 11

соодветно. Од равенството (4) следува дека Поасоновата распределба $\boldsymbol{P}(a)$ секогаш, што значи за секој параметар a, е позитивно асиметрична. Притоа, со зголемувањето на параметарот a се намалува асиметричноста на Поасоновата распределба $\boldsymbol{P}(a)$. Јасно, со зголемувањето на параметарот a и сплоштеноста на Поасоновата распределба $\boldsymbol{P}(a)$ се приближува кон нормална сплоштеност. Претходно изнесеното, за вредностите на параметарот $a=0,5$; $a=2$; $a=4$ и $a=6$, е илустрирано на цртеж 11.

Како и кај биномната распределба, така и во случај на Поасоновата распределба, ако треба да ги пресметаме веројатностите $P(k)$ за неколку последователни вредности на k, тогаш формулата (1) не е најпогодна. Затоа, овде ќе изведеме рекурентна формула за пресметување на веројатностите $P(k)$, $k=0,1,2,3,...$. Со помош на формулата (1) ги изразуваме веројатностите $P(k)$ и $P(k-1)$ и ако ги поделиме добиените равенства наоѓаме $\frac{P(k)}{P(k-1)}=\frac{a}{k}$ што значи

$$P(k)=\frac{a}{k}P(k-1). \tag{6}$$

Последната формула покажува како на релативно едноставен начин може да се пресметаат веројатностите

Пример 32. Зададена е Поасонова распределба со параметар $a=2$. Пресметајте ги веројатностите кои припаѓаат на вредностите $k=0,1,...,7$.

Решение. Од (1) наоѓаме

$$P(0)=\frac{2^0}{0!}e^{-2}=e^{-2}=0{,}1353434.$$

Понатаму, ако ја искористиме рекурентната формула (6) добиваме

$$P(1)=\frac{2}{1}P(0)=2\bullet 0{,}1353434=0{,}2706868,$$

Во следната табела се дадени бараните веројатности.

k	$\frac{a}{k}$	$P(k)$
0	-	0,1353434
1	$\frac{2}{1}$	0,2706868
2	$\frac{2}{2}$	0,2706868
3	$\frac{2}{3}$	0,1804579
4	$\frac{2}{4}$	0,0902289
5	$\frac{2}{5}$	0,0360916
6	$\frac{2}{6}$	0,0120305
7	$\frac{2}{7}$	0,0034373

За некои вредности на параметарот a веројатностите $P(k)$, со точност до петтата децимала се дадени во посебна таблица. ♦

Поасоновата распределба е од посебен интерес во теоријата на веројатност и теоријата на случајни процеси. Имено, може да се докаже дека следниов математички модел, кој е доста чест во различните примени, е тесно поврзан со Поасоновата распределба.

Да претпоставиме дека во време $[0,+\infty)$ регистрираме определени моменти, на пример, звонење на телефон, доаѓање на клиенти на шалтер во банка, поминување на автомобили покрај определен објект и слично. Така имаме еден "проток на настани". Зборот "настан" овде не е употребен во смисла на случаен настан, туку означува една случајна точка на временската полуоска. Со $X[a,b]$ ја означуваме случајната променлива која го дава бројот на "настаните" во временскиот интервал $[a,b]$. Јасно, оваа случајна променлива е од дискретен вид и истата прима вредности од множеството $\{0,1,2,3,...\}$. Голем број случаи со кои се среќаваме во практиката можеме да ги опишеме со следниве претпоставки:

- *хомогеност*: распределбата на веројатностите на случајната променлива $X[a,b]$ не зависи од положбата на интервалот $[a,b]$, туку само од неговата должина $b-a$:
$$p_k(b-a)=P\{X[a,b]=k\},\quad k=0,1,2,3,...;$$
- *независност*: ако интервалите $[a,b]$ и $[c,d]$ дисјунктни, тогаш настаните $\{X[a,b]=k_1\}$ и $\{X[c,d]=k_2\}$ се независни за секои $k_1,k_2=0,1,2,3,...$;
- *сепарабилност*:
$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P\{X[t,t+\Delta t]>1\}}{\Delta t}=0,$$
што практично значи дека не е можно во кој било момент t "реализира" повеќе од еден "настан".

Може да се докаже дека при вакви претпоставки случајната променлива $X[0,t]=X(t)$ има $\boldsymbol{P}(at)$ распределба, каде $a>0$ е фиксиран параметар кој го карактеризира интензитетот на "протокот на настаните". Очигледно, параметарот a е еднаков на бројот на "настаните" во единица време.

Пример 33. Според расположливите податоци на банката X, во просек пет клиенти на час поднесуваат барање за краткорочен кредит. Ако претпоставиме дека клиентите доаѓаат во банката независно и со иста веројатност во текот секој час, колкава е веројатноста во банката да има:

a) три клиенти,
b) повеќе од седум клиенти.

Решение. Бројот на клиентите кои секој ден во текот на еден час од работното време доаѓаат во банката за да поднесат барање е дискретна случајна променлива која има Поасонова распределба со параметар $a=5$, т.е.

$$P(k)=\frac{5^k}{k!}e^{-5},\quad k=0,1,2,....$$

Бараните веројатности се

а) $P(3)=\frac{5^3}{3!}e^{-5}\approx 0,14037$ и

б) $P(X>7)=1-\sum_{k=0}^{7}P(k)\approx 1-0,8666=0,1334$. ♦

7.3. ХИПЕРГЕОМЕТРИСКА РАСПРЕДЕЛБА

Распределбата на белите топчиња X при избор одеднаш на k топчиња од кутија во која има m бели и $n-m$ црни топчиња е дадена со:

$$P(j)=\frac{C_m^j C_{n-m}^{k-j}}{C_n^k},\quad j=0,1,2,...,s,\quad \text{kade}\quad s=\min\{m,k\},\qquad (1)$$

и истата ја нарекуваме *хипергеометриската* распределба. Забележуваме дека хипергеометриската распределба еднозначно е определена со параметрите n, m и k, па затоа оваа распределба ќе ја означуваме со $H\{n, m, k\}$.

Применувајќи слична постапка како и кај биномната и Поасоновата распределба, добиваме рекурентна формула со која веројатноста $P(j)$ се изразува со помош на веројатноста $P(j-1)$:

$$P(j) = \frac{(m-j+1)(k-j+1)}{j(n-m-k+j)} P(j-1) . \tag{2}$$

Пример 34. Во пратката на производот *BAX* има 24 исправни и 6 дефектни производи. Од пратката земаме 5 производи. Колкави се веројатностите меѓу избраните производи да има $j = 0,1,2,3,4,5$ дефектни производи?

Решение. Од условот на задачата заклучуваме дека станува збор за хипергеометриска прогресија $H\{n = 30, m = 6, k = 5\}$. За да ја примениме рекурентната формула (2), потребно е прво да ја пресметаме веројатноста $P(0)$. Имаме:

$$P(0) = \frac{C_6^0 C_{30-6}^{5-0}}{C_{30}^5} = \frac{\frac{6!}{0!6!} \bullet \frac{24!}{5!19!}}{\frac{30!}{5!25!}} = \frac{24 \bullet 23 \bullet 22 \bullet 21 \bullet 20}{30 \bullet 29 \bullet 28 \bullet 27 \bullet 26} = 0,298261 .$$

j	$m-j+1$ $=7-j$	$k-j+1$ $=6-j$	$n-m-k+j$ $=19+j$	$\frac{P(j)}{P(j-1)}$	$P(j)$
0	7	6	19	-	0,298261
1	6	5	20	$\frac{6 \bullet 5}{1 \bullet 20}$	0,447392
2	5	4	21	$\frac{5 \bullet 4}{2 \bullet 21}$	0,213044
3	4	3	22	$\frac{4 \bullet 3}{3 \bullet 22}$	0,038735
4	3	2	23	$\frac{3 \bullet 2}{4 \bullet 23}$	0,002526
5	2	1	24	$\frac{2 \bullet 1}{5 \bullet 24}$	0,000042

Останатите веројатности ги добиваме со помош на рекурзивната формула. Пресметките се дадени во горната табела. ♦

Пример 35. Произведувачот му испорачува на купувачот производ *A* разглобен во 15 делови. Бидејќи трошоците за испитување на исправноста на деловите се високи, купувачот ќе ја прифати испораката ако меѓу 5 случајно избрани делови има најмногу еден неисправен. Колкава е веројатноста дека купувачот ќе ја прифати испораката иако во неа има четири неисправни делови?

Решение. Бараната веројатност ќе ја определиме користејќи ја хипергеометриската распределба. Имаме $n = 15, k = 5, m = 4$, па затоа

$$P(j) = \frac{C_4^j C_{15-4}^{5-j}}{C_{15}^5}, \quad j = 0,1,2,3,4 .$$

Веројатноста да се прифати испорака со четири неисправни производи е

$$P(0 \le X \le 1) = P(0) + P(1) = 0,5934\ .\ \blacklozenge$$

Ќе го пресметаме математичкото очекување на хипергеометрискаста распределба. Ако ги искористиме равенствата

$$jC_m^j = mC_{m-1}^{j-1} \text{ и } C_n^k = \tfrac{n}{k} C_{n-1}^{k-1}$$

и равенството на Ван дер Монт (пример I.19 а)) добиваме:

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{j=0}^{s} j \frac{C_m^j C_{n-m}^{k-j}}{C_n^k} = \sum_{j=1}^{s} m \frac{C_{m-1}^{j-1} C_{n-m}^{k-j}}{\frac{n}{k} C_{n-1}^{k-1}} = \sum_{j=1}^{s} \frac{mk}{n} \frac{C_{m-1}^{j-1} C_{n-m}^{k-j}}{C_{n-1}^{k-1}} \\ &= \frac{mk}{nC_{n-1}^{k-1}} \sum_{j=1}^{s} C_{m-1}^{j-1} C_{n-m}^{k-j} = \frac{mk}{nC_{n-1}^{k-1}} \sum_{j=0}^{s-1} C_{m-1}^{j} C_{n-m}^{k-j-1} \\ &= \frac{mk}{nC_{n-1}^{k-1}} C_{n-1}^{k-1} = \frac{mk}{n}. \end{aligned}$$

Ќе ја определиме дисперзијата на хипергеометриската распределба. Прво да забележиме дека од равенството на Ван дер Монт добиваме:

$$C_{n-2}^{k-2} = \sum_{j=0}^{s-2} C_{m-2}^{j-2} C_{n-m}^{k-j}\ .$$

Ако го искористиме последното равенство и равенствата

$$jC_m^j = mC_{m-1}^{j-1} \text{ и } C_n^k = \frac{n(n-1)}{k(k-1)} C_{n-2}^{k-2}$$

добиваме

$$\begin{aligned} E(X(X-1)) &= \sum_{j=0}^{s} j(j-1) \frac{C_m^j C_{n-m}^{k-j}}{C_n^k} = \frac{k(k-1)m(m-1)}{n(n-1)} \sum_{j=2}^{s} \frac{C_{m-2}^{j-2} C_{n-m}^{k-j}}{C_{n-2}^{k-2}} \\ &= \frac{k(k-1)m(m-1)}{n(n-1)C_{n-2}^{k-2}} \sum_{j=0}^{s} C_{m-2}^{j-2} C_{n-m}^{k-j} = \frac{k(k-1)m(m-1)}{n(n-1)C_{n-2}^{k-2}} C_{n-2}^{k-2} \\ &= \frac{k(k-1)m(m-1)}{n(n-1)}. \end{aligned}$$

Конечно, за дисперзијата на хипергеометриската распределба добиваме

$$\begin{aligned} D(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 = E(X(X-1)) + E(X) - [E(X)]^2 \\ &= \frac{k(k-1)m(m-1)}{n(n-1)} + \frac{mk}{n} - \frac{m^2k^2}{n^2} \\ &= \frac{mk}{n}\left(\frac{(k-1)(m-1)}{n-1} + 1 - \frac{mk}{n}\right) = \frac{mk(n-m)(n-k)}{n^2(n-1)}. \end{aligned}$$

Со тоа ја докажавме следнава теорема.

Теорема 13. Ако случајната променлива X има хипергеометриска распределба $H\{n,m,k\}$, тогаш нејзиното математичко очекување е

$$E(X) = \tfrac{mk}{n}\ , \tag{3}$$

а дисперзијата е

$$D(X)=\frac{mk(n-m)(n-k)}{n^2(n-1)}. \ \blacklozenge \qquad (4)$$

На крајот од овој дел, користејќи ја рекурзивната формула (2), за хипергеометриската распределба $H\{n,m,k\}$, ќе ја определиме вредноста j_0 на случајната променлива X која има најголема веројатност. Имено, ако j_0 е онаа вредност на случајната променлива X која има најголема веројатност, тогаш важи

$$P(j_0-1)\le P(j_0)\ge P(j_0+1).$$

Да го разгледаме неравенството $P(j_0-1)\le P(j_0)$. Ако $P(j_0)$ го изразиме со помош на рекурентната формула (2), го добиваме неравенството

$$1\le\frac{(m-j_0+1)(k-j_0+1)}{j_0(n-m-k+j_0)},$$

кое е еквивалентно со неравенството

$$j_0\le\frac{(m+1)(k+1)}{n+2}.$$

Понатаму, ако од (2) го изразиме $P(j_0+1)$ и замениме во неравенството $P(j_0)\ge P(j_0+1)$, го добиваме неравенството

$$1\ge\frac{(m-j_0)(k-j_0)}{(j_0+1)(n-m-k+j_0+1)}$$

кое е еквивалентно на неравенството

$$j_0\ge\frac{m(k+1)-(n-k)-1}{n+2}.$$

Со тоа ја докажавме следнава теорема.

Теорема 14. Во хипергеометриската распределба $H\{n,m,k\}$ најголема веројатност има онаа вредност j_0 на променливата X која ги задоволува неравенствата

$$\frac{m(k+1)-(n-k)-1}{n+2}\le j_0\le\frac{(m+1)(k+1)}{n+2}. \ \blacklozenge \qquad (5)$$

Интервалот во кој припаѓа вредноста j_0 на променливата X со најголема веројатност во хипергеометриската распределба $H\{n,m,k\}$ има должина

$$\frac{(m+1)(k+1)}{n+2}-\frac{m(k+1)-(n-k)-1}{n+2}=\frac{m(k+1)+k+1-m(k+1)+n-k+1}{n+2}=\frac{n+2}{n+2}=1.$$

Ако $\frac{m(k+1)-(n-k)-1}{n+2}$ не е природен број, тогаш постои еден единствен природен број j_0 кој ги задоволува неравенствата (5), што значи дека во овој случај бројот j_0 е еднозначно определен. Меѓутоа, ако $\frac{m(k+1)-(n-k)-1}{n+2}$ е природен број, тогаш и бројот $\frac{(m+1)(k+1)}{n+2}$ е природен број, што значи дека постојат два природни броја кои ги задоволуваат неравенствата (5). Имено, во овој случај лесно се докажува дека

$$P(\tfrac{m(k+1)-(n-k)-1}{n+2}) = P(\tfrac{(m+1)(k+1)}{n+2}) .$$

7.4. РАМНОМЕРНА ДИСКРЕТНА РАСПРЕДЕЛБА

Нека N е природен број. Да ја разгледаме функцијата X која прима вредности $m = 1, 2, ..., N$ со веројатности

$$P\{X = m\} = \tfrac{1}{N}, \quad m = 1, 2, ..., N .$$

Бидејќи

$$\sum_{m=1}^{N} P\{X = m\} = N \bullet \tfrac{1}{N} = 1,$$

од дефиниција 1 следува дека X е дискретна случајна променлива за која ќе велиме дека има *рамномерна распределба* на множеството $\{1, 2, ..., N\}$. За случајната променлива X со рамномерна дискретна распределба на множеството $\{1, 2, ..., N\}$ имаме:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{N} i \cdot P\{X = i\} = \sum_{i=1}^{N} \tfrac{i}{N} = \tfrac{1}{N} \cdot \tfrac{N(N+1)}{2} = \tfrac{N+1}{2} .$$

Но,

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^{N} i^2 P\{X = i\} = \sum_{i=1}^{N} \tfrac{i^2}{N} = \tfrac{1}{N} \cdot \tfrac{N(N+1)(2N+1)}{6} = \tfrac{(N+1)(2N+1)}{6} ,$$

што значи дека дисперзијата на рамномерната дискретна распределба е

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \tfrac{(N+1)(2N+1)}{6} - \tfrac{(N+1)^2}{4} = \tfrac{N^2-1}{12} .$$

Со тоа ја докажавме следнава теорема.

Теорема 15. Ако случајната променлива X има рамномерна дискретна распределба на множеството $\{1, 2, ..., N\}$, тогаш нејзиното математичко очекување е

$$E(X) = \tfrac{N+1}{2}, \tag{4}$$

а дисперзијата е

$$D(X) = \tfrac{N^2-1}{12} . \blacklozenge \tag{5}$$

7.5. ГЕОМЕТРИСКА РАСПРЕДЕЛБА

Да ја разгледаме функцијата X која прима вредности $0, 1, 2, 3, ...$ со веројатности

$$P(k) = p(1-p)^k, \quad k = 0, 1, 2, ...; \quad 0 < p < 1 . \tag{1}$$

Бидејќи

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(k) = \sum_{k=0}^{\infty} p(1-p)^k = p\sum_{k=0}^{\infty}(1-p)^k = p \bullet \tfrac{1}{1-(1-p)} = 1,$$

од дефиниција 1 следува дека X е дискретна случајна променлива, за која ќе велиме дека има *геометриска распределба* со параметар p.

Пример 36. На една производна линија се склопуваат телефонски апарати и истите одма подлежат на тестирање. Веројатноста тестираниот апарат да е исправен, т.е. тестот да е позитивен е $\frac{4}{5}$, а да е неисправен, т.е. тестот да е негативен е $\frac{1}{5}$. Тестирањето се реализира заклучно со првиот позитивен тест. Нека X е бројот на тестирањата заклучно со првиот позитивен тест. Најдете ја распределбата на веројатностите на случајната променлива X и веројатноста на настанот A: тестирањето завршува после парен број тестирања.

Решение. Очигледно, случајната променлива X прима вредности $1,2,3,$ $4,5,...$. Настанот $\{X = n\}$ се реализира ако и само ако првите $n-1$ тестирања се негативни, а $n-$тото тестирање е позитивно. Резултатите од тестирањата се независни во различните тестирања, па затоа

$$P(n) = P\{X = n\} = \underbrace{\tfrac{1}{5} \bullet \tfrac{1}{5} \bullet ... \bullet \tfrac{1}{5}}_{n-1 \text{ пати}} \bullet \tfrac{4}{5} = \tfrac{4}{5}(\tfrac{1}{5})^{n-1}, \quad n = 1,2,3,...,$$

што значи дека случајната променлива има геометриска распределба со параметар $p = \frac{4}{5}$, (зошто?).

Настанот A се реализира ако и само ако вредноста на случајната променлива X е парен број, т.е. $A = \{2,4,6,8,...\}$. Според тоа,

$$P(A) = \sum_{k=1}^{\infty} P(2k) = \tfrac{4}{5}\sum_{k=1}^{\infty}(\tfrac{1}{5})^{2k-1} = 4\sum_{k=1}^{\infty}(\tfrac{1}{5})^{2k} = 4\sum_{k=1}^{\infty}(\tfrac{1}{25})^{k} = \tfrac{4}{25} \bullet \tfrac{1}{1-\frac{1}{25}} = \tfrac{1}{6}.$$

◆

Ако ставиме $1 - p = q$, тогаш за случајната променлива X со геометриска распределба зададена со (1) имаме

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} kpq^k = p\sum_{k=1}^{\infty} kq^k = pq\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = pq \cdot \tfrac{1}{(1-q)^2} = \tfrac{pq}{p^2} = \tfrac{q}{p}$$

и

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2pq^k = pq\sum_{k=1}^{\infty} k^2q^{k-1} = pq \cdot \tfrac{1+q}{(1-q)^3} = pq \cdot \tfrac{1+q}{p^3} = \tfrac{q(1+q)}{p^2},$$

па затоа

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \tfrac{q+q^2}{p^2} - \tfrac{q^2}{p^2} = \tfrac{q}{p^2}.$$

Со тоа ја докажавме следнава теорема.

Теорема 16. Ако случајната променлива X има геометриска распределба зададена се (1), тогаш нејзиното математичко очекување е

$$E(X)=\frac{q}{p}, \tag{2}$$

а дисперзијата е

$$D(X)=\frac{q}{p^2}. \ \blacklozenge \tag{3}$$

Пример 37. Ќе ги пресметаме математичкото очекување и дисперзијата на случајната променлива X од пример 36. Имаме

$$E(X)=\sum_{n=1}^{\infty}nP(n)=\frac{4}{5}\sum_{n=1}^{\infty}n(\tfrac{1}{5})^{n-1}=\frac{4}{5}\bullet\frac{1}{(1-\frac{1}{5})^2}=1,25\,.$$

Понатаму,

$$E(X^2)=\sum_{n=1}^{\infty}n^2\,\tfrac{4}{5}(\tfrac{1}{5})^{n-1}=\tfrac{4}{5}\sum_{n=1}^{\infty}n^2(\tfrac{1}{5})^{n-1}$$

$$=\frac{4}{5}\cdot\frac{1+\frac{1}{5}}{(1-\frac{1}{5})^3}=\frac{4}{5}\cdot\frac{\frac{6}{5}}{(\frac{4}{5})^3}=1,875,$$

па затоа

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=1,875-1,25^2=0,3125\,. \ \blacklozenge$$

7.6. ПАСКАЛОВА РАСПРЕДЕЛБА

Нека претпоставиме дека настанот A во секој експеримент се реализира со иста веројатност

$$P(A)=p\neq 0$$

и дека експериментот можеме да го повториме произволно многу пати, при што резултатите од истиот се независни. Понатаму, нека експериментот го повторуваме се додека настанот A се реализира k пати. Со X да го означиме бројот на потребните експерименти за да настанот A се реализира k пати. Тогаш, очигледно X може да биде кој било од броевите

$$k,k+1,k+2,k+3,\dots. \tag{1}$$

Колкава е веројатноста на секоја од овие вредности на X ? Ако експериментот треба да се повтори n пати, тоа значи дека во претходните $n-1$ експерименти настанот A се реализирал $k-1$ пати и дека A се реализирал уште во $n-$от експеримент. Според биномната распределба веројатноста настанот A да се реализира $k-1$ пати во $n-1$ експерименти е дадена со

$$C_{n-1}^{k-1}p^{k-1}q^{n-k}\text{, каде } p+q=1.$$

Множејќи го последното равенство со веројатноста p дека настанот A се реализирал во $n-$от експеримент и земајќи предвид дека

$$C_{n-1}^{k-1}=C_{n-1}^{n-1-(k-1)}=C_{n-1}^{n-k}$$

добиваме

$$P(n) = C_{n-1}^{n-k} p^k q^{n-k}\ ,\ n = k, k+1, k+2, k+3, \ldots . \qquad (2)$$

Ќе докажеме дека збирот на веројатностите (3) е еднаков на 1, т.е. дека со (3) навистина е дефинирана случајна променлива. Навистина, ако искористиме дека за секој $x \in (0,1)$ важи

$$\frac{1}{(1-x)^k} = 1 + C_k^1 x + C_{k+1}^2 x^2 + C_{k+2}^3 x^3 + \ldots \qquad (3)$$

и земеме во предвид дека $q \in (0,1)$ добиваме:

$$\begin{aligned} \sum_{n=k}^{\infty} P(n) &= \sum_{n=k}^{\infty} C_{n-1}^{n-k} p^k q^{n-k} = p^k \sum_{n=k}^{\infty} C_{n-1}^{n-k} q^{n-k} \\ &= p^k (1 + C_k^1 q + C_{k+1}^2 q^2 + \ldots) = p^k \frac{1}{(1-q)^k} = 1. \end{aligned}$$

Сега од дефиниција 1 следува дека X е дискретна случајна променлива која прима вредности (1) со веројатности (2), за која ќе велиме дека има *Паскалова распределба* со параметри k и p.

Фактот дека $\sum_{n=k}^{\infty} P(n) = 1$ може да се интерпретира на следниов начин: без разлика колку е мала веројатноста p за реализирање на настанот A, во бесконечна серија експерименти настанот A ќе се реализира k пати со веројатност 1. За примена на овој резултат од посебен интерес е да се знае просечниот број потребни експерименти за да настанот A се реализира k пати, т.е. да се знае математичкото очекување $E(X)$ на случајната променлива X.

Пред да преминеме на пресметување на математичкото очекување да забележиме дека со диференцирање на (3) по x добиваме дека за секој $x \in (0,1)$ важи:

$$\frac{k}{(1-x)^{k+1}} = C_k^1 + 2C_{k+1}^2 x + 3C_{k+2}^3 x^2 + 4C_{k+3}^4 x^3 + \ldots , \qquad (4)$$

а со диференцирање на (4) по x добиваме дека за секој $x \in (0,1)$ важи:

$$\frac{k(k+1)}{(1-x)^{k+2}} = 2C_{k+1}^2 + 3 \bullet 2C_{k+2}^3 x + 4 \bullet 3C_{k+3}^4 x^2 + \ldots . \qquad (5)$$

Сега, ако земеме $x = q$ и ги искористиме формулите (3) и (4), за математичкото очекување на случајната променлива X добиваме:

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{n=k}^{\infty} nP(n) = \sum_{n=k}^{\infty} nC_{n-1}^{n-k} p^k q^{n-k} \\ &= p^k [k + (k+1)C_k^1 q + (k+2)C_{k+1}^2 q^2 + (k+3)C_{k+2}^3 q^3 + \ldots] \\ &= kp^k [1 + C_k^1 q + C_{k+1}^2 q^2 + C_{k+2}^3 q^3 + \ldots] + qp^k [C_k^1 + 2C_{k+1}^2 q + 3C_{k+2}^3 q^2 + \ldots] \\ &= kp^k \frac{1}{(1-q)^k} + qp^k \frac{1}{(1-q)^{k+1}} = kp^k \frac{1}{p^k} + qp^k \frac{1}{p^{k+1}} = k[1 + \frac{q}{p}] = \frac{k}{p}. \end{aligned}$$

Со тоа ја докажавме следнава теорема.

Теорема 17. Ако случајната променлива X има Паскалова распределба зададена се (2), тогаш нејзиното математичко очекување е

$$E(X)=\frac{k}{p}. \ \blacklozenge \qquad (6)$$

Забелешка 12. Нека настанот A настапува во еден експеримент со веројатност $p=\frac{1}{6}$, на пример, при фрлање на коцка веројатноста за појава на шестка е $p=\frac{1}{6}$. Тогаш $E(X)=6k$, што значи дека во просек се потребни шест пати повеќе експерименти за однапред фиксиран број на појавување на настанот A, во случајов: паднатиот број точки е еднаков на 6.

Пример 38. Сакаме да направиме 500 единици од еден производи на машина која константно дава 10% дефектни производи. Заради можноста од изработка на дефектен производ контролата ја вршиме на секој производ непосредно после неговата изработка. Кога ќе го изработиме тристотиот добар производ го запираме производството. Колкава ќе биде просечната големина на серијата (во серијата ги вбројуваме и добрите и лошите производи)?

Решение. Изработката на добар производ да ја означиме со настан A, а со X да го означиме бројот на производите во една серија. Јасно, X е случајна променлива со Паскалова распределба и параметри: $p=0,90$ и $k=500$. Затоа $E(X)=\frac{500}{0,90}=555,5555$. Според тоа, за да изработиме 500 добри производи, треба во просек да изработиме 556 производи. Овде да напоменеме дека 556 е само просек, а бројот на производите во серијата може да биде 550, 551, 552, 553, ...♦

7.7. ПОЛИНОМНА РАСПРЕДЕЛБА

Полиномната шема ја добивме како генерализација на Бернулиевата шема. Притоа, ако во серија n независни експерименти во секој екперимент може да се реализира еден од r по парови независни настани, тогаш како што знаеме веројатноста на настанот

$$B_{n_1 n_2 \dots n_r}=\{\text{во } n \text{ независни експерименти имаме точно по } n_k \ k\text{-ти исходи}\}$$

каде $n=n_1+n_2+\dots+n_r$ е дадена со

$$P(B_{n_1 n_2 \dots n_r})=\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_r!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_r^{n_r}, \ n=n_1+n_2+\dots+n_r. \qquad (1)$$

Веројатностите $P(B_{n_1 n_2 \dots n_r})$ всушност се членовите во развојот на полиномот

$$(p_1+\dots+p_r)^n,$$

па затоа важи

$$\sum_{n=n_1+n_2+\dots+n_r} P(B_{n_1 n_2 \dots n_r})=\sum_{n=n_1+n_2+\dots+n_r} \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_r!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_r^{n_r}=1,$$

што значи дека со (1) е даден закон на распределба, која распределба ја нарекуваме *полиномна*. Да забележиме дека за $r=2$ полиномната распределба всушност е биномната распределба.

Пример 39. При спроведување на експериментот S може да се реализираат само независните настани A_1, A_2 и A_3 со веројатности p_1, p_2 и $p_3 = 1 - p_1 - p_2$. Со X да го означиме бројот на појавувања на настанот A_1, а со Y бројот на појавувања на настанот A_2. Реализираме серија од n независни експерименти и нека настанот A_1 се случил k пати, а настанот A_2 се случил m пати. Според тоа, во овие n независни експерименти настанот A_3 се случил $n-k-m$ пати, при што $k+m \le n$. Законот на распределба на дводимензионалната случајна променлива (X,Y) е:

$$P(k,m) = \frac{n!}{k!m!(n-k-m)!} p_1^k p_2^m (1-p_1-p_2)^{n-k-m}.$$

Во случајов случајните променливи X и Y можат да примат вредности $k, m = 0$, 1, 2, ..., n, но притоа важи $k+m \le n$. Вака определената распределба ја нарекуваме *триномна распределба*.

Ќе ја определиме маргиналната распределба на случајната променлива X. Имаме:

$$\begin{aligned} P(k) &= \sum_{m=0}^{n-k} P(k,m) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p_1^k \sum_{m=0}^{n-k} \frac{(n-k)!}{y!(n-k-m)!} p_2^m (1-p_1-p_2)^{n-k-m} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} p_1^k [(1-p_1-p_2)+p_2]^{n-k} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} p_1^k (1-p_1)^{n-k} = C_n^k p_1^k (1-p_1)^{n-k}, \end{aligned}$$

што значи дека маргиналната распределба на случајната променлива X е биномната распределба $B\{n, p_1\}$. Аналогно се докажува маргиналната распределба на случајната променлива Y има биномна распределба $B\{n, p_2\}$. ♦

ЗАДАЧИ

1. Случајната променлива X има биномна распределба $B\{p;n\}$, т.е.
$$P\{X=m\} = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}, \quad m = 0,1,2,...,n.$$
Најдете го законот на распределба на случајната променлива $Y = 3X + 1$.

2. Нека случајните променливи X и Y имаат биномни распределби $B\{p;n\}$ и $B\{p;m\}$, соодветно. Најдете го законот на распределба на дводимензионалната случајна променлива (U,V), каде $U = X+Y, V = Y$.

3. Докажете дека коефициентот на асиметрија и коефициентот на сплоштеност на биномната распределба $B\{n,p\}$ се $\alpha_3 = \frac{q-p}{\sqrt{npq}}$ и $\alpha_4 = 3 + \frac{1-6pq}{npq}$, соодветно.

4. Случајната променлива X има Поасонов закон на распределба $\boldsymbol{P}(a)$, т.е.
$$P(k) = \frac{a^k}{k!} e^{-a}, \quad k = 0,1,2,...$$
Најдете го законот на распределба на случајната променлива $Y = 2X + 3$.

5. Докажете дека коефициентот на асиметрија и коефициентот на сплоштеност на Поасоновата распределба $\boldsymbol{P}(a)$ се $\alpha_3 = \frac{1}{\sqrt{a}}$ и $\alpha_4 = 3 + \frac{1}{a}$, соодветно.

6. Случајната променлива Y има Поасонова распределба $\boldsymbol{P}(a)$. Ако $Y = n$, тогаш случајната променлива X има биномна распределба $B\{n, p\}$, каде $p \in (0,1)$. Најдете ја распределбата на случајната променлива X.

7. Во една телефонска централа просечниот број на позиви е 2,5 во секунда. Распределбата на позивите во секунда е според Поасоновата распределба. Колкава е веројатноста дека во текот на една секунда ќе имаме најмалку еден позив?

8. Пресметајте ги коефициентот на асиметрија и коефициентот на сплоштеност на хипергеометриската распределба $H\{n, m, k\}$.

9. Пресметајте ги коефициентот на асиметрија и коефициентот на сплоштеност на дискретната рамномерна распределба на множеството $\{1, 2, 3, ..., N\}$.

10. Пресметајте ги коефициентот на асиметрија и коефициентот на сплоштеност на геометриската распределба со параметар p.

11. Пресметајте ги дисперзијата, коефициентот на асиметрија и коефициентот на сплоштеност на Паскаловата распределба со параметри k и p.

12. Нека $p \in (0,1)$ и $q = 1 - p$. Ќе велиме дека случајната променлива X има *логаритамска распределба* ако има закон на распределба
$$P\{X = k\} = -\frac{q^k}{k \ln p}, \ k \in \mathbf{N}.$$
Бројот p го нарекуваме *паратметар на логаритамската распределба*. Пресметајте $E(X)$ и $D(X)$.

13. Случајната променлива X има функција на распределба $F(x)$. Најдете го законот на веројатност на случајната променлива $Y = F(X)$, ако
    a) X има биномна распределба $B\{1, 1/2\}$,
    b) X има Поасонова распределба $\boldsymbol{P}(a)$.

8. НЕЗАВИСНОСТ НА СЛУЧАЈНИ ПРОМЕНЛИВИ

Во овој дел ќе се осврнеме на еден од најважните поими во теоријата на веројатност, а тоа е независноста на случајните променливи.

Дефиниција 15. Нека (X, Y) е дводимензионална дискретна случајна променлива која прима вредности
$$(x_i, y_j), i = 1, 2, ..., n, ...; \ j = 1, 2, ..., m, ...$$
со веројатности
$$P(x_i, y_j), i = 1, 2, ..., n, ...; \ j = 1, 2, ..., m, ...$$

За случајните променливи X и Y ќе велиме дека се *независно распределени* (*независни*) ако за секои i и j важи
$$P(x_i, y_j) = P(x_i)Q(y_j), \qquad (1)$$
каде

$$P(x_i)=\sum_j P(x_i,y_j) \text{ и } Q(y_j)=\sum_i P(x_i,y_j)$$

се маргиналните распределби на случајните променливи X и Y.

Пример 39. За случајните променливи X и Y од пример 11 важи

$$P(1)Q(1)=\frac{10}{40}\bullet\frac{11}{40}=\frac{110}{40^2}\neq\frac{3}{40}=P(1,1)$$

што според дефиниција 15 значи дека тие не се независни. ♦

Пример 40. Во табелата е дадена дводимензионалната случајна променлива (X,Y) и се пресметани маргиналните распределби на случајните променливи X и Y.

$Y\setminus X$	0	1	2	$Q(y_j)$
0	0,250	0,125	0,125	0,500
1	0,250	0,125	0,125	0,500
$P(x_i)$	0,500	0,250	0,250	

Лесно се гледа дека за секои x_i и y_j е исполнетао равенството (1), што значи дека случајните променливи X и Y се независно распределени. ♦

Теорема 18. а) Случајните променливи X и Y се независни ако и само ако $P\{X\in A,Y\in B\}=P\{X\in A\}\cdot Q\{Y\in B\}$ за секои $A,B\subseteq\mathbf{R}$.

б) Случајните променливи X и Y се независни ако и само ако за секои $x,y\in\mathbf{R}$ важи $F_{(X,Y)}(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$, каде $F_{(X,Y)}(x,y)$, $F_X(x)$, $F_Y(y)$ се функциите на распределба на (X,Y), X и Y, соодветно.

Доказ. а) Нека X и Y се независни случајни променливи $A,B\subseteq\mathbf{R}$. Тогаш

$$\begin{aligned}P\{X\in A,Y\in B\}&=P\Big(\bigcup_{x_i\in A}\bigcup_{y_k\in B}\{X=x_i,Y=y_k\}\Big)=\sum_{x_i\in A}\sum_{y_k\in B}P\{X=x_i,Y=y_k\}\\&=\sum_{x_i\in A}\sum_{y_k\in B}P\{X=x_i\}P\{Y=y_k\}=\sum_{x_i\in A}P\{X=x_i\}\sum_{y_k\in B}P\{Y=y_k\}\\&=P\{X\in A\}\cdot Q\{Y\in B\}.\end{aligned}$$

Обратно, нека i_0 и j_0 се дадени. Земаме $A=\{x_{i_0}\}$ и $B=\{y_{j_0}\}$. Тогаш

$$P\{X=x_{i_0}\}\cdot Q\{Y=y_{i_0}\}=P\{X\in A\}\cdot Q\{Y\in B\}=P\{X\in A,Y\in B\}=P\{X=x_{i_0},Y=y_{i_0}\},$$

и од произволноста на i_0 и j_0 следува дека случајните променливи X и Y се независни.

б) Нека случајните променливи X и Y се независни и $x_0,y_0\in\mathbf{R}$. На множествата $A=(-\infty,x_0]$ и $B=(-\infty,y_0]$ го применуваме тврдењето под а) и добиваме

$$\begin{aligned}F_{(X,Y)}(x_0,y_0)&=\sum_{x_i\le x_0}\sum_{y_j\le y_0}P(x_i,y_j)=P\{X\in A,Y\in B\}=P\{X\in A\}\cdot Q\{Y\in B\}\\&=\sum_{x_i\le x_0}P(x_i)\sum_{y_j\le y_0}Q(y_j)=F_X(x_0)F_X(y_0).\end{aligned}$$

Обратно, нека за секои $x, y \in \mathbf{R}$ важи $F_{(X,Y)}(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$. Тогаш за секои $\varepsilon, \delta > 0$ и за секои i и j имаме

$$\begin{aligned} P\{x_i - \delta < X \le x_i, y_j - \varepsilon < Y \le y_j\} = \\ &= P\{X \le x_i, Y \le y_j\} - P\{X \le x_i, Y \le y_j - \varepsilon\} \\ &\quad - P\{X \le x_i - \delta, Y \le y_j\} + P\{X \le x_i - \delta, Y \le y_j - \varepsilon\} \\ &= F(x_i, y_j) - F(x_i - \delta, y_j) - F(x_i, y_j - \varepsilon) + F(x_i - \delta, y_j - \varepsilon) \\ &= F_X(x_i)F_Y(y_j) - F_X(x_i - \delta)F_Y(y_j) \\ &\quad - F_X(x_i)F_Y(y_j - \varepsilon) + F_X(x_i - \delta)F_Y(y_j - \varepsilon) \\ &= [F_X(x_i) - F_X(x_i - \delta)][F_Y(y_j) - F_Y(y_j - \varepsilon)] \\ &= P\{x_i - \delta < X \le x_i\}Q\{y_j - \varepsilon < Y \le y_j\}. \end{aligned}$$

Конечно, од лема I.6 ж) и од произволноста на $\varepsilon, \delta > 0$ следува дека за секои i и j важи

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = P\{X = x_i\}Q\{Y = y_j\},$$

што значи дека случајните променливи X и Y се независни. ♦

Теорема 19. Случајните променливи X и Y се независни ако и само ако се независни $\sigma-$ алгебрите $\mathcal{A}_X$ и $\mathcal{A}_Y$ кои ги генерираат.

Доказ. Непосредно следува од теорема 18 и фактот дека $\sigma-$ алгебрата $\mathcal{A}_X$ се состои од настани $\{X \in A\}$, $A \subseteq \mathbf{R}$, а $\sigma-$ алгебрата $\mathcal{A}_Y$ се состои од настани $\{Y \in B\}$, $B \subseteq \mathbf{R}$. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ♦

Забелешка 13. а) Може да се говори и за независност на поголем број дискретни случајни променливи. Така, случајните променливи од непразната фамилија $\Re$ се *независни во целина*, ако за секој $k \ge 2$ и за секој избор на случајни променливи $X_1, X_2, ..., X_k \in \Re$ важи

$$\begin{aligned} P(x_1, x_2, ..., x_k) &= P\{X_1 = x_1, X_2 = x_2, ..., X_k = x_k\} \\ &= P\{X_1 = x_1\}P\{X_2 = x_2\}...P\{X_k = x_k\} \\ &= P(x_1)P(x_2)...P(x_k), \end{aligned}$$

каде $x_i \in V_i, i = 1, 2, ..., k$, а $V_i, i = 1, 2, ..., k$ се множествата вредности на случајните променливи $X_i, i = 1, 2, ..., k$, соодветно.

б) Аналогно како во теорема 18 може да се докаже дека случајните променливи $X_1, X_2, ..., X_k$ се независни ако и само ако

$$F(x_1, x_2, ..., x_k) = F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2)...F_{X_k}(x_k),$$

каде $F(x_1, x_2, ..., x_k), F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2), ..., F_{X_k}(x_k)$ се функциите на распределба на $(X_1, X_2, ..., X_k)$, $X_1, X_2, ..., X_k$, соодветно, односно ако и само ако

$$P\{X_1 \in A_1, X_2 \in A_2, ..., X_n \in A_n\} = P\{X_1 \in A_1\} \cdot P\{X_2 \in A_2\} \cdot ... \cdot P\{X_n \in A_n\},$$

за секои $A_1 \subseteq \mathbf{R}, A_2 \subseteq \mathbf{R}, ..., A_n \subseteq \mathbf{R}$.

в) Аналогно на теорема 19 може да се докаже дека $X_1, X_2, ..., X_k$ се независни ако и само ако се независни $\sigma-$ алгебрите $\boldsymbol{A}_{X_1}, \boldsymbol{A}_{X_2}, ..., \boldsymbol{A}_{X_n}$ кои ги генерираат.

Пример 41. Случајната променлива $X_i, i=1,2,...,n$ се независни и еднакво распределени:

$$P\{X_i = k\} = \tfrac{1}{3}, \text{ за } k=-1,0,1 \text{ и } i=1,2,...,n.$$

Ќе ја пресметаме веројатноста на настанот $X_1 = \prod\limits_{i=1}^{n} X_i$.

Ако $X_1 = 0$, тогаш производот на останатите множители може да биде произволен. Ако пак, $X_1 = 0$, тогаш производот на останатите множители мора да биде еднаков на 1. Притоа, од причини на симетричност и заради независност на случајните променливи имаме

$$2P\{X_2X_3...X_n = 1\} = P\{X_2X_3...X_n \neq 0\} = P\{X_2 \neq 0, X_3 \neq 0, ..., X_n \neq 0\}$$
$$= \prod_{i=2}^{n} P\{X_i \neq 0\} = (\tfrac{2}{3})^{n-1}.$$

Конечно,

$$P\{\prod_{i=1}^{n} X_i\} = P\{X_1 = 0\} + P\{X_1 \neq 0\}P\{X_2X_3...X_n = 1\} = \tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{3}(\tfrac{2}{3})^{n-1}\tfrac{1}{2} = \tfrac{2^{n-1}+3^{n-1}}{3^n}. \blacklozenge$$

Дефиниција 16. За дискретната случајна променлива X која прима само целобројни ненегативни вредности велиме дека е *целобројна слачајна променлива*.

Јасно, законот на целобројната случајна променлива е определен со веројатностите

$$p_n = P\{X = n\}, n = 0,1,2,...$$

за кои

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1.$$

Нека X и Y се целобројни случајни променливи со закони на веројатности

$$p_n = P\{X = n\}, q_n = Q\{Y = n\}, \; n = 0,1,2,... .$$

Тогаш, случајната променлива $Z = X + Y$ е целобројна и притоа важи

$$\begin{aligned} r_n = P\{Z = n\} = P\{X + Y = n\} &= \sum_{k=0}^{n} P\{X = k, Y = n-k\} \\ &= \sum_{k=0}^{n} P\{Y = n-k \mid X = k\}P\{X = k\}, \end{aligned} \qquad (2)$$

за $n = 0,1,2,...$. Меѓутоа, ако случајните променливи X и Y се независни, тогаш формулата (2) го прима видот

$$r_n = P\{X+Y=n\} = \sum_{k=0}^{n} P\{X=k\}Q\{Y=n-k\} = \sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k} \tag{3}$$

за $n=0,1,2,...$ и притоа случајната променлива Z ја нарекуваме *конволуција на случајните променливи* X и Y .

Пример 42. а) Нека независните случајни променливи X и Y имаат биномни распределби $B\{n_1,p\}$ и $B\{n_2,p\}$. Тогаш, ако ги искористиме равенството (3) и равенството на Ван дер Монт

$$\sum_{k=0}^{n} C_{n_1}^{k} C_{n_2}^{n-k} = C_{n_1+n_2}^{n} \tag{4}$$

добиваме дека за случајната променлива $Z = X+Y$ веројатностите се дадени со

$$r_n = P\{X+Y=n\} = \sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_{n_1}^{k} p^k (1-p)^{n_1-k} C_{n_2}^{n-k} p^{n-k} (1-p)^{n_2-(n-k)}$$

$$= p^n (1-p)^{n_1+n_2-n} \sum_{k=0}^{n} C_{n_1}^{k} C_{n_2}^{n-k} = C_{n_1+n_2}^{n} p^n (1-p)^{n_1+n_2-n},$$

за $n=0,1,2,...,n_1+n_2$, што значи дека конволуцијата на случајни променливи X и Y со биномни распределби $B\{n_1,p\}$ и $B\{n_2,p\}$ има биномна распределба $B\{n_1+n_2,p\}$.

Нека $X_i, i=1,2,...,k$ се независни случајни променливи со биномни распределби $B\{n_i,p\}, i=1,2,...,k$. Тогаш од претходно изнесеното и од принципот на математичка индукција непосредно следува дека случајната променлива $Z=\sum_{i=1}^{k} X_i$ има биномна распределба $B\{\sum_{i=1}^{k} n_i, p\}$.

б) Нека независните случајни променливи X и Y имаат Поасонови распределби $\boldsymbol{P}(a_1)$ и $\boldsymbol{P}(a_2)$. Тогаш, од равенството (3) и Њутновата биномна формула следува дека за случајната променлива $Z = X+Y$ веројатностите се дадени со

$$r_n = P\{X+Y=n\} = \sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_1^k}{k!} e^{-a_1} \frac{a_2^{n-k}}{(n-k)!} e^{-a_2}$$

$$= e^{-(a_1+a_2)} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a_1^k a_2^{n-k} = \frac{(a_1+a_2)^n}{n!} e^{-(a_1+a_2)},$$

за $n=0,1,2,3,...$, што значи дека конволуцијата на случајни променливи X и Y со Поасонови распределби $\boldsymbol{P}(a_1)$ и $\boldsymbol{P}(a_2)$ има биномна распределба $\boldsymbol{P}(a_1+a_2)$.

Нека $X_i, i=1,2,...,k$ се независни случајни променливи со Поасонови распределби $\boldsymbol{P}(a_i), i=1,2,...,k$. Тогаш од претходно изнесеното и од принципот на математичка индукција непосредно следува дека случајната променлива $Z=\sum_{i=1}^{k} X_i$ има Поасонова распределба $\boldsymbol{P}(\sum_{i=1}^{k} a_i)$. ♦

Теорема 20. Дискретните случајните променливи X и Y се независни ако и само ако за секои функции f и g, такви што $|E(f(X))|<\infty$ и $|E(g(Y))|<\infty$, важи

$$E(f(X)g(Y))=E(f(X))E(g(Y))\,. \tag{5}$$

Доказ. Нека (X,Y) е дводимензионална дискретна случајна променлива која прима вредности

$$(x_i,y_j),\ i=1,2,...,n,...;\ j=1,2,...,m,...$$

со веројатности

$$P(x_i,y_j),\ i=1,2,...,n,...;\ j=1,2,...,m,...$$

и

$$P(x_i)=\sum_j P(x_i,y_j)\,,\ i=1,2,...,n,...\ \text{и}\ Q(y_j)=\sum_i P(x_i,y_j)\,,\ j=1,2,...,m,...$$

се маргиналните распределби на независните случајните променливи X и Y, соодветно. Понатаму, бидејќи случајните променлви X и Y се независно распределени, за секои i и j важи (1). Нека f и g се функции такви што математичките очекувања $E(f(X))$ и $E(g(Y))$ постојат. Притоа важи

$$\begin{aligned}E(f(X))\bullet E(g(Y))&=[\sum_i f(x_i)P(x_i)]\bullet[\sum_j g(y_j)Q(y_j)]\\&=\sum_i\sum_j f(x_i)g(y_j)P(x_i)Q(y_j)\\&=\sum_i\sum_j f(x_i)g(y_j)P(x_i,y_j)=E(f(X)g(Y)),\end{aligned}$$

т.е. точно е равенството (5).

Обратно, нека за секои функции f и g такви што за кои математичките очекувања $E(f(X))$ и $E(g(Y))$ постојат е исполнето равенството (5). Фиксираме i_0 и j_0 и да ги разгледаме функциите f и g определени со равенствата

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{ако}\ x=x_{i_0}\,,\\0, & \text{ако}\ x\neq x_{i_0}\,,\end{cases}\quad \text{и}\quad g(y)=\begin{cases}1, & \text{ако}\ y=y_{j_0}\,,\\0, & \text{ако}\ y\neq y_{j_0}\,.\end{cases}$$

Тогаш

$$\begin{aligned}&E(f(X))=1\cdot P\{X=x_{i_0}\}+0\cdot P\{X\neq x_{i_0}\}=P(x_{i_0})\,,\\&E(g(Y))=1\cdot P\{Y=y_{j_0}\}+0\cdot P\{Y\neq y_{j_0}\}=Q(y_{j_0})\ \text{и}\\&E(f(X)g(Y))=1\cdot P\{X=x_{i_0},Y=y_{j_0}\}+0\cdot P\{X\neq x_{i_0}\ \text{или}\ Y\neq y_{j_0}\}\\&\qquad=P\{X=x_{i_0},Y=y_{j_0}\}=P(x_{i_0},y_{j_0}).\end{aligned}$$

Конечно, од последните три равенства и од равенството (5) следува

$$P(x_{i_0},y_{j_0})=E(f(X)g(Y))=E(f(X))E(g(Y))=P(x_{i_0})Q(y_{j_0})$$

и од произволноста на индексите i_0 и j_0 заклучуваме дека случајните променливи X и Y се независни. ♦

Забелешка 14. Ако се земе предвид забелешка 13, тогаш аналогно како во доказот на теорема 20 може да се докаже дека случајните променливи $X_1, X_2, ..., X_n$ се независни во целина ако и само ако за секои функции $f_1, f_2, \ ..., f_n$ такви што $| E(f_i(X_i)) | < \infty, i = 1, 2, ..., n$ важи

$$E(f_1(X_1) f_2(X_2) ... f_n(X_n)) = E(f_1(X_1)) E(f_2(X_2)) ... E(f_n(X_n)) .$$

Последица 6. Ако случајните променливи X и Y се независни и постојат $E(X)$ и $E(Y)$, тогаш

$$E(XY) = E(X) \bullet E(Y) . \qquad (6)$$

Доказ. За функциите $f(x) = x$ и $g(y) = y$ се исполнети условите од теорема 20, па затоа

$$E(XY) = E(f(X) g(Y)) = E(f(X)) \cdot E(g(Y)) = E(X) \cdot E(Y) . \ \blacklozenge$$

Забелешка 15. Аналогно како во доказот на последица 6, ако се земе предвид забелешка 14 може да се докаже тврдењето:

Ако случајните променливи $X_1, X_2, ..., X_n$ *се независни во целина и имаат конечни математички очекувања, тогаш*

$$E(X_1 X_2 ... X_n) = E(X_1) E(X_2) ... E(X_n) .$$

Пример 43. Ќе го пресметаме математичкото очекување на производот XY на случајните променливи X и Y од пример 40.

За математичките очекувања на случајните променливи X и Y имаме

$$E(X) = 0 \bullet 0,5 + 1 \bullet 0,25 + 2 \bullet 0,25 = 0,75 \text{ и } E(Y) = 0 \bullet 0,5 + 1 \bullet 0,5 = 0,5 .$$

Но, според пример 40 случајните променливи X и Y се независно распределени, па од последица 6 следува дека

$$E(XY) = E(X) \bullet E(Y) = 0,75 \bullet 0,5 = 0,375 . \ \blacklozenge$$

Последица 7. Ако X_1, X_2 се независни дискретни случајни променливи и $g_1(x), \ g_2(x)$ се произволни функции, тогаш случајните променливи $Y_1 = g_1(X_1)$, $Y_2 = g_2(X_2)$ се независни.

Доказ. Нека $f_1(y), f_2(y)$ се функции такви што $| E(f_i(Y_i)) | < \infty, i = 1, 2$. Имаме

$$f_i(Y_i) = f_i(g_i(X_i)) = \overline{f}_i(X_i), i = 1, 2$$

и притоа важи

$$| E(\overline{f}_i(X_i)) | = | E(f_i(Y_i)) | < \infty, i = 1, 2 .$$

Но, случајните променливи X_1, X_2 се независни, па од теорема 20 следува

$$
\begin{aligned}
E(f_1(Y_1)f_2(Y_2)) &= E(\overline{f}_1(X_1)\overline{f}_2(X_2)) \\
&= E(\overline{f}_1(X_1))E(\overline{f}_2(X_2)) \\
&= E(f_1(Y_1))E(f_2(Y_2)),
\end{aligned}
$$

што повторно според теорема 20 значи дека случајните променливи Y_1, Y_2 се независни. ♦

Забелешка 16. Аналогно како во последица 7, ако се земе предвид забелешка 14 може да се докаже следново тврдење.

Ако $X_1, X_2, ..., X_n$ *се независни во целина дискретни случајни променливи и* $g_1(x), g_2(x), ..., g_n(x)$ *се произволни функции, тогаш случајните променливи* $Y_1 = g_1(X_1), Y_2 = g_2(X_2), ..., Y_n = g_n(X_n)$ *се независни во целина.*

Теорема 21 Ако X и Y се независно распределени случајни променливи со дисперзии $D(X)$ и $D(Y)$, тогаш $D(X+Y) = D(X) + D(Y)$.

Доказ. Бидејќи X и Y се независно распределени случајни променливи од последица 6 следува $E(XY) = E(X) \bullet E(Y)$. За дисперзијата на збирот $X+Y$ имаме:

$$
\begin{aligned}
D(X+Y) &= E(X+Y)^2 - [E(X+Y)]^2 = E(X^2 + 2XY + Y^2) - [E(X) + E(Y)]^2 \\
&= E(X^2) + 2E(XY) + E(Y^2) - [E(X)]^2 - [E(Y)]^2 - 2E(X)E(Y) \\
&= E(X^2) + 2E(X)E(Y) + E(Y^2) - [E(X)]^2 - [E(Y)]^2 - 2E(X)E(Y) \\
&= E(X^2) - [E(X)]^2 + E(Y^2) - [E(Y)]^2 = D(X) + D(Y)
\end{aligned}
$$

што и требаше да се докаже. ♦

Пример 44. Ќе ја пресметаме дисперзијата на збирот $X+Y$ на случајните променливи X и Y од пример 40. Во пример 43 најдовме $E(X) = 0,75$ и $E(Y) = 0,5$. Понатаму,

$$
E(X^2) = 0^2 \bullet 0,50 + 1^2 \bullet 0,25 + 2^2 \bullet 0,25 = 1,25 \text{ и } E(Y^2) = 0^2 \bullet 0,50 + 1^2 \bullet 0,50 = 0,50 \ ,
$$

па затоа

$$
D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 1,25 - 0,75^2 = 0,6875 \text{ и}
$$

$$
D(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = 0,50 - 0,50^2 = 0,25 .
$$

Конечно, во пример 40 докажавме дека овие случајни променливи се независно распределени, па од теорема 21 добиваме

$$
D(X+Y) = D(X) + D(Y) = 0,6875 + 0,25 = 0,9375 . \ ♦
$$

Забелешка 17. Од теорема 21 и принципот на математичка индукција следува дека, ако случајните променливи X_i, $i = 1, 2, ..., n$ се по парови независни, тогаш

$$
D(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} D(X_i) .
$$

Пример 45. Нека имаме настан A за кој $P(A) = p$, $p+q=1$, $p,q>0$ и да ја разгледаме случајната променлива X која има *Бернулиева распределба* со параметар p зададена со следнава табела:

x_i	1	0
$P(x_i)$	p	q

Математичкото очекување на оваа случајна променлива е

$$E(X) = 1 \bullet p + 0 \bullet q = p$$

и како

$$E(X^2) = 1^2 \bullet p + 0^2 \bullet q = p,$$

за дисперзијата на истата добиваме

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq\ .$$

Нека сега имаме независни случајни променливи $X_i = X$, $i = 1,2,...,n$ и да ја разгледаме случајната променлива $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$, со која всушност е даден бројот на реализирањето на настанот A во серија од n независни експерименти, па затоа Y има биномна распределба. Сега, бидејќи $E(X_i) = p$, $i = 1,2,...,n$ од последица 4 следува дека

$$E(Y) = E(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = np\ ,$$

резултат, кој на доста покомплициран начин го добивме во точка 7.1.

Понатаму, бидејќи случајните променливи $X_i = X$, $i = 1,2,...,n$ се независни по парови и притоа важи

$$D(X_i) = D(X) = pq\ ,\ i = 1,2,...,n$$

од забелешка 17 добиваме

$$D(Y) = D(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} D(X_i) = npq\ ,$$

резултат, кој на доста покомплициран начин го добивме во точка 7.1. ♦

Теорема 22. Ако X и Y се независни случајни променливи, тогаш

$$D(XY) \geq D(X) \cdot D(Y)\ . \tag{7}$$

Доказ. Бидејќи случајните променливи X и Y се независни и

$$E(X^2) \geq (EX)^2,\ E(Y^2) \geq (EY)^2\ ,$$

добиваме

$$\begin{aligned} D(X) \cdot D(Y) &= E(X^2) \cdot E(Y^2) - E(X^2) \cdot (E(Y))^2 - E(Y^2) \cdot (E(X))^2 + (E(X))^2 \cdot (E(Y))^2 \\ &\leq E(X^2) \cdot E(Y^2) - (E(X))^2 \cdot (E(Y))^2 = E(XY)^2 - (E(XY))^2 = D(XY), \end{aligned}$$

што и требаше да се докаже. ♦

Забелешка 18. Ако случајните променливи X и Y се зависни, тогаш неравенството (4) не мора да важи. На пример, за распределбата

$$P\{X=0,Y=0\}=P\{X=1,Y=1\}=0,\ P\{X=1,Y=0\}=P\{X=0,Y=1\}=\tfrac{1}{2}$$

важи $XY=0$, па затоа $D(XY)=0$, меѓутоа $D(X)\cdot D(Y)=\tfrac{1}{16}$.

ЗАДАЧИ

1. Даден е законот на веројатност на дводимензионалната дискретна случајна променлива (X, Y):

$$p(x_i,y_j)=\tfrac{1}{54}(3x_i+2y_j-4),\ x_i,y_j\in\{1,2,3\}.$$

   Дали случајните променливи X и Y се независни?

2. Тридимензионалната случајна променлива (X,Y,Z) е рамномерно распределена на множеството вектори:

$$\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,1,1)\}.$$

   Проверете дали случајнатите променливи X,Y,Z се независни по парови. А дали се независни во целина?

3. Нека X,Y и Z се независни случајни променливи и нека $g:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$. Докажете дека случајните променливи $W=g(X,Y)$ и Z се независни.

4. Нека $X_i, i=1,2,...,n$ се независни случајни променливи, $1\le k<n$ и $g_1:\mathbf{R}^k\to\mathbf{R}$ и $g_2:\mathbf{R}^{n-k}\to\mathbf{R}$. Докажете дека счучајните променливи

$$Y_1=g_1(X_1,...,X_k) \text{ и } Y_2=g_2(X_{k+1},...,X_n)$$

   се независни.

5. Од броевите 0000, 0001, ..., 9999 случајно и еднакvoверојатно се избира бројот $X_1X_2X_3X_4$. Докажете дека случајните променливи $X_i, i=1,2,3,4$ се независни во целина.

6. Независните случајни променливи X и Y примаат вредности 0,1 и 2 со веројатност $\tfrac{1}{3}$. Најдете ја распределбата на случајната променлива $X+Y$.

7. Случајните променливи X и Y се независни и нивните закони на веројатност се

$$P\{X=k\}=2^{-k-1},\quad P\{Y=k\}=2^k3^{-k-1},\ k=0,1,2,3,....$$

   Најдете го законот на веројатност на случајната променлива $Z=|X-Y|$.

8. Нека $X_1,X_2,...,X_n$ се независни случајни променливи и нека $U=\min\{X_1,X_2,...,X_n\}$ и $V=\max\{X_1,X_2,...,X_n\}$. Докажете дека за секој $x\in\mathbf{R}$ важи

$$P\{U\ge x\}=\prod_{i=1}^{n}P\{X_i\ge x\} \text{ и } P\{V\le x\}=\prod_{i=1}^{n}P\{X_i\le x\}.$$

9. Нека се $X_1,X_2,...,X_n$ независни случајни променливи и нека секоја од нив има рамномерна распределба, т.е. $P\{X_i=k\}=\tfrac{1}{M}$, $k=1,2,...,M; i=1,2,...,n$. Нека

$$U_n=\min\{X_1,X_2,...,X_n\} \text{ и } V_n=\max\{X_1,X_2,...,X_n\}.$$

   Најдете ги распределбите на U_n и V_n.

10. Определете ги функциите на распределба на следниве случајни променливи XY и $X+Y$, ако X и Y се независни случајни променливи распределени на следниов начин:

x_i	0	1	2
$P(x_i)$	0,25	0,5	0,25

y_i	0	1	2	3
$P(y_i)$	0,4	0,3	0,2	0,1

11. Нека независните случајни променливи X и Y имаат закони на распределби

x_i	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$P(x_i)$	0,3	0,2	0,1	0,2	0,2

y_i	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$P(y_i)$	0,2	0,5	0,3

Најдете го законот на распределба на случајната променлива:

а) $Z=\sin X+\cos Y$, б) $Z=\sin X-\cos Y$.

12. Случајните променливи X и Y се независно распределени и зададени со следниве табели:

x_i	0	1	2
$P(x_i)$	0,25	0,5	0,25

y_i	0	1	2	3
$P(y_i)$	0,3	0,3	0,3	0,1

Пресметајте ги математичките очекувања и дисперзиите на случајните променливи $X, Y, X+Y$ и XY.

13. Случајните променливи X и Y се независно распределени и зададени со следниве табели:

x_i	-1	0	1	2
$P(x_i)$	0,2	0,15	0,4	0,25

y_i	0	2	4
$P(y_i)$	0,3	0,2	0,5

Пресметајте ги математичките очекувања и дисперзиите на случајните променливи $X+Y$ и $X+2Y$.

14. Нека $X_1, X_2, ..., X_n$ се независни, еднакво распределени случајни променливи и нека важи $E(X_i)=m$, $D(X_i)=\sigma^2, i=1,2,...,n$. Ставаме $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$. Докажете дека важи

$$\frac{1}{n-1}E[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2]=\sigma^2 .$$

15. Во секој експеримент настанот A се реализира со веројатност p. Со X_i да ја означиме случајната променлива која прима вредност i ако во $i-$от експеримент се реализирал настанот A. Реализираме серија од n независни експерименти, со што дефинираме n независни случајни променливи $X_i, i=1,2,...,n$. Пресметајте ги $E(X)$ и $D(X)$, каде $X=X_1+X_2+...+X_n$.

16. Веројатноста за реализација на настанот A во $i-$тиот експеримент е еднаква на p_i. Нека X е бројот на појавување на настанот A во првите n независни експерименти. Најдете: $E(X)$, $D(X)$, $E(X-\sum_{i=1}^{n}p_i)^3, E(X-\sum_{i=1}^{n}p_i)^4$.

17. Нека $X_i, i=1,2,3,...$ се независни, позитивни и еднакво распределени случајни променливи такви што постојат $E(X_i)=a$ и $E(X_i^{-1})=b$. Нека $S_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$. Докажете дека постои $E(S^{-1})$ и дека важи

$$E(\frac{S_m}{S_n}) = \begin{cases} \frac{m}{n}, & m \leq n, \\ 1+(m-n)aE(S^1), & m \geq n. \end{cases}$$

18. Случајните променливи X и Y се независни и важи

$$E(X) = \sigma(Y) = a,\ E(Y) = \sigma(X) = b,\ a,b \in \mathbf{R}\ .$$

Пресметајте $D(XY)$.

19. Случајните променливи X_1, X_2, X_3 и Y се независни и имаат закони на распределба

Сл. п. X_1, X_2, X_3	x_i	-1	0	1
	$P(x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Сл. п. Y	y_j	1	2	3
	$Q(y_j)$	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$

Најдете го законот на распределба на случајната променлива $Z = X_1 \cdot ... \cdot X_Y$.

20. Случајните променливи X_1, X_2, X_3, X_4 и Y се независни и имаат закони на распределба

Сл. п. X_1, X_2, X_3, X_4	x_i	-1	0	3
	$P(x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Сл. п. Y	y_j	1	2	4
	$Q(y_j)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$

Пресметајте $E(Z)$ и $D(Z)$ ако $Z = X_1 \cdot ... \cdot X_Y$.

21. Независните случајни променливи $X_i, i = 1,2,3,...$ имаат закони на веројатност

$$P\{X_i = 0\} = \frac{1}{i+1},\ P\{X_i = 1\} = \frac{i}{i+1}\ , \text{ за } i = 1,2,3,...$$

соодветно. Од нив независната случајна променлива Y има закон на веројатност

$$P\{Y = n\} = 2^{-n},\ n = 1,2,3,.... .$$

Пресметајте го математичкото очекување на случајната променлива

$$Z_Y = \min\{X_1, X_2, ..., X_Y\}$$

22. Во сад имаме пет топчиња нумерирани со броевите од 1 до 5. Без гледање од садот земаме по едно топче и не го враќаме. Со X_i да го означиме бројот на извлеченото топче во $i-$тото влечење, $i = 1,2,3,4,5$. Најдете го законот на распределба на случајната променлива $X_i, i = 1,2,3$ и пресметајте $D(X_1 + X_2 + X_3)$.

9. УСЛОВНО МАТЕМАТИЧКО ОЧЕКУВАЊЕ

Нека е дадено разбивањето

$$\alpha :\ A_1 + ... + A_n + ... = \Omega\ ,$$

при што $P(A_k) > 0,$ за $k = 1,2,...,n,...$. За секој настан A_k од разбивањето α и секој настан $B \in \mathbf{A}$ може да се најдат условните веројатности $P_{A_k}(B) = \frac{P(BA_k)}{P(A_k)}$. Нека $\mathbf{A}(\alpha)$ е $\sigma-$алгебрата настани генерирана од разбивањето α . Дефинираме *условна веројатност* $P_{\mathbf{A}(\alpha)}(B)$ *во однос на* $\mathbf{A}(\alpha)$ како случајна променлива, која прима вредност $P_{A_k}(B)$ кога $\omega \in A_k$. Законот на распределба на случајната променлива $P_{\mathbf{A}(\alpha)}(B)$ е определен со табела 1.

Вредности на $P_{\mathbf{A}(\alpha)}(B)$	$P_{A_1}(B)$	$P_{A_2}(B)$	$\cdots$	$P_{A_n}(B)$
Веројатности	$P(A_1)$	$P(A_2)$	$\cdots$	$P(A_n)$

Табела 4. *Закон на распределба на условните веројатности*

Сега десната страна во формулата за полна веројатност

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P_{A_i}(B)$$

може да се разгледува како математичко очекување $E(P_{\mathbf{A}(\alpha)}(B))$ на случајната променлива $P_{\mathbf{A}(\alpha)}(B)$.

Нека разбивањето α_X е определено со случајната променлива X, т.е. нека $A_k=\{X=x_k\}$. Со $\mathbf{A}_X$ да ја означиме $\sigma-$алгебрата генерирана од X. Јасно, во овој случај условната веројатност $P_{\mathbf{A}_X}(B)$ е функција од вредностите на X и затоа истата ќе ја означуваме со $P_X(B)$, а нејзините вредности ќе ги означуваме со $P_{X=x_k}(B)$.

Нека (X,Y) е дводимензионална дискретна случајна променлива која прима вредности

$$(x_i,y_j),\ i=1,2,...,n,...;\ j=1,2,...,m,...,$$

со веројатности

$$P(x_i,y_j),\ i=1,2,...,n,...;\ j=1,2,...,m,...$$

и нека $B_j=\{Y=y_j\},\ j=1,2,3,...$ е разбивање генерирано од случајната променлива Y. *Условен закон на распределба на* Y *при зададена вредност* $X=x_k$ го нарекуваме законот зададен со условните веројатности

$$P(y_j\mid x_i)=\frac{P(x_i,y_j)}{P(x_i)},\ j=1,2,...,m,...$$

па затоа можеме да го пресметаме математичкото очекување на случајната променлива Y при зададена вредност $X=x_i$. Од дефиниција 9 следува:

$$E(Y\mid X=x_i)=\sum_j y_jP(y_j\mid x_i)=\frac{1}{P(x_i)}\sum_j y_jP(x_i,y_j). \qquad (1)$$

Понатаму, можеме да сметаме дека $E(Y\mid X=x_i)$ е вредност на случајна променлива $E(Y\mid X)$, која е функција од X и која е еднаква на $E(Y\mid X=x_i)$ при $X=x_i$. Од оваа случајна променлива можеме да пресметаме математичко очекување и како $X=x_i$ со веројатност $P(x_i)$ добиваме

$$E[E(Y\mid X)]=\sum_i E(Y\mid X=x_i)P(x_i). \qquad (2)$$

Така ја имаме следнава дефиниција.

Дефиниција 17. *Условно математичко очекување на случајната променлива* Y *при зададена вредност* $X = x_i$ ја нарекуваме величината $E(Y \mid X = x_i)$ зададена со формулата (1). Случајната променлива $E(Y \mid X)$ ја *нарекуваме условно математичко очекување при зададено* X .

Теорема 23. Нека X, Y и Z се случајни променливи кои имаат математичко очекување и $a, b \in \mathbf{R}$. Тогаш

а) Ако $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ и за случајната променлива $g(Y)$ постои математичкото очекување, тогаш $E[E(g(Y) \mid X)] = E(g(Y))$,

б) $E(C \mid X) = C$, за секој $C \in \mathbf{R}$,

в) $E[XE(Y \mid X)] = E(XY)$.

г) $E(aX + bY \mid Z) = aE(X \mid Z) + bE(Y \mid Z)$,

д) Ако $g_1, g_2 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ и за случајната променлива $g_1(Y)$ постои математичкото очекување, тогаш $E(g_1(Y) g_2(X) \mid X) = g_2(X) E(g_1(Y) \mid X)$,

ѓ) Ако $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ и за случајната променлива $g(X)$ постои математичкото очекување, тогаш $E(g(X) \mid X) = g(X)$

Доказ. а) Ако во равенството (2) од (1) ги замениме вредностите за $E(g(Y) \mid X = x_i)$ добиваме

$$\begin{aligned} E[E(g(Y) \mid X)] &= \sum_i E(g(Y) \mid X = x_i) P(x_i) = \sum_i \sum_j g(y_j) P(x_i, y_j) \\ &= \sum_j g(y_j) \sum_i P(x_i, y_j) = \sum_j g(y_j) P(y_j) = E(g(Y)). \end{aligned}$$

б) Нека $C \in \mathbf{R}$. Ако ставиме $Y = C$, тогаш $P\{Y = C \mid X = x_i\} = 1$, па затоа од (1) следува

$$E(C \mid X = x_i) = C \cdot P\{Y = C \mid X = x_i\} = C ,$$

што значи $E(C \mid X) = C$.

в) Имаме

$$\begin{aligned} E[XE(Y \mid X)] &= \sum_i x_i E(Y \mid X = x_i) P(x_i) \\ &= \sum_i x_i [\tfrac{1}{P(x_i)} \sum_j y_j P(x_i, y_j)] P(x_i) \\ &= \sum_i \sum_j x_i y_j P(x_i, y_j)] = E(XY). \end{aligned}$$

г) Ако искористиме дека

$$\begin{aligned} \sum_j P(ax_i + by_j, z_k) &= \sum_j P\{aX + bY = ax_i + by_j, Z = z_k\} \\ &= \sum_j P\{X = x_i, Y = y_j, Z = z_k\} \\ &= P\{X = x_i, Z = z_k\} = P(x_i, z_k), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_i P(ax_i+by_j,z_k)&=\sum_i P\{aX+bY=ax_i+by_j,Z=z_k\}\\&=\sum_i P\{X=x_i,Y=y_j,Z=z_k\}\\&=P\{Y=y_j,Z=z_k\}=P(y_j,z_k),\end{aligned}$$

тогаш од равенството (1) следува

$$\begin{aligned}E(aX+bY\mid Z=z_k)&=\sum_i\sum_j(ax_i+by_j)P(ax_i+by_j\mid z_k)\\&=\tfrac{1}{P(z_k)}\sum_i\sum_j(ax_i+by_j)P(ax_i+by_j,z_k)\\&=\tfrac{a}{P(z_k)}\sum_i x_i\sum_j P(ax_i+by_j,z_k)+\tfrac{b}{P(z_k)}\sum_j y_j\sum_i P(ax_i+by_j,z_k)\\&=\tfrac{a}{P(z_k)}\sum_i x_iP(x_i,z_k)+\tfrac{b}{P(z_k)}\sum_j y_jP(y_j,z_k)\\&=aE(X\mid Z=z_k)+bE(Y\mid Z=z_k),\end{aligned}$$

што значи дека

$$E(aX+bY\mid Z)=aE(X\mid Z)+bE(Y\mid Z)\,.$$

д) Ако земеме предвид дека

$$P\{X=x_j,Y=y_k\mid X=x_i\}=\begin{cases}P\{Y=y_k\mid X=x_i\}, & j=i,\\ 0, & j\neq i,\end{cases}$$

добиваме

$$\begin{aligned}E(g_1(Y)g_2(X)\mid X=x_i)&=\sum_k\sum_j g_1(y_k)g_2(x_j)P\{X=x_j,Y=y_k\mid X=x_i\}\\&=\sum_k g_1(y_k)g_2(x_i)P\{Y=y_k\mid X=x_i\}\\&=g_2(x_i)\sum_k g_1(y_k)P\{Y=y_k\mid X=x_i\}\\&=g_2(x_i)E(g_1(Y)\mid X=x_i),\end{aligned}$$

што значи

$$E(g_1(Y)g_2(X)\mid X)=g_2(X)E(g_1(Y)\mid X)\,.$$

ѓ) Ако во тврдењето под г) ставиме $g_1(Y)=1$ и $g_2(X)=g(X)$ и го искористиме тврдењето под б) добиваме

$$E(g(X)\mid X)=E(1\cdot g(X)\mid X)=g(X)E(1\mid X)=g(X)\cdot 1=g(X)\,.\ \blacklozenge$$

Последица 8. Ако X и Y се случајни променливи кои имаат математичко очекување, тогаш $E[E(Y\mid X)]=E(Y)$.

Доказ. а) Непосредно следува од теорема 20 а) применета на функцијата $g(y)=y$. ♦

Пример 46. а) Случајната променлива X има геометриска распределба

$$P(k) = p(1-p)^k, \quad k = 0,1,2,...; \quad 0 < p < 1$$

За случајната променлива Y важи

$$Y = \begin{cases} -1, & \text{ако } X \text{ е непарен број,} \\ 1, & \text{ако } X \text{ е парен број,} \end{cases}$$

па затоа

$$P\{Y=1\} = \sum_{k=0}^{\infty} p^{2k}(1-p) = \frac{1}{1+p} \text{ и } P\{Y=-1\} = \sum_{k=0}^{\infty} p^{2k+1}(1-p) = \frac{p}{1+p}.$$

Ако ја искористиме формулата (1) добиваме

$$E(X \mid Y=1) = \frac{1}{P\{Y=1\}} \sum_{k=1}^{\infty} 2k(1-p)p^{2k} = 2(1-p^2)p^2 \sum_{k=0}^{\infty} k(p^2)^{k-1} = \frac{2p^2}{1-p^2}$$

и

$$E(X \mid Y=-1) = \frac{1}{P\{Y=-1\}} \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1)(1-p)p^{2k+1} = (1-p^2) \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1)p^{2k} = \frac{1+p^2}{1-p^2}.$$

Конечно, од формулата (2) добиваме

$$E[E(X \mid Y)] = \sum_i E(X \mid Y = y_i)Q(y_i) = \frac{2p^2}{1-p^2}\frac{1}{1+p} + \frac{1+p^2}{1-p^2}\frac{p}{1+p} = \frac{p(1+2p+p^2)}{(1+p)^2(1-p)} = \frac{p}{1-p}.$$

б) (*Равенство на Валд*) Нека $X_i, i = 1,2,...,n,...$ се дискретни случајни променливи со еднакви математички очекувања $E(X_i)$, а Y е независна од нив случајна променлива, која прима само цели ненегативни вредности. Нека Z_Y е случаен збир на случајните променливи $X_i, i = 1,2,...,n,...$, т.е.

$$Z_Y = X_1 + X_2 + ... + X_Y \text{, ако } Y \geq 1 \text{ и } Z_Y = 0 \text{, ако } Y = 0.$$

Ќе го определиме математичкото очекување на случајната променлива Z_Y.

За секој $Y = k$ имаме

$$\begin{aligned} E(Z_Y \mid Y = k) &= E(X_1 + X_2 + ... + X_k) \\ &= E(X_1) + E(X_2) + ... + E(X_k) = kE(X_i), \end{aligned}$$

што значи дека $E(Z_Y \mid Y) = Y \cdot E(X_i)$. Конечно, од последното равенство и од последица 8 следува дека

$$E(Z_Y) = E(E(Z_Y \mid Y)) = E(Y)E(X_i). \blacklozenge$$

Пример 47. Во Гајгер-Милеровиот бројач доспева поток на космички честички. Бројот X_1 на честичките кои доспеваат во бројачот во текот на време $t > 0$ има Поасонова распределба $\boldsymbol{P}(at)$, каде $a > 0$ е константа, т.е.

$$P\{X_1 = n\} = \frac{(at)^n}{n!}e^{-at}, \quad n = 0,1,2,3,....$$

Секоја честичка независно од другите може да биде регистрирана од бројачот со веројатност $p, 0 < p < 1$. Со X_2 да го означиме бројот на честичките кои ќе бидат регистрирани за време t. Ќе ја определиме условната распределба на случајната променлива X_1 при услов дека $X_2 = k$, а исто така и условното математичко очекување на X_1 при услов $X_2 = k$.

Јасно, со веројатност 1 важи $X_1 \ge X_2$. Затоа

$$P\{X_1 = n \mid X_2 = k\} = 0 \text{, ако } n < k .$$

Нека $n \ge k$. Имаме

$$P\{X_1 = n \mid X_2 = k\} = \frac{P\{X_1 = n,\, X_2 = k\}}{P\{X_2 = k\}} .$$

Настанот $\{X_1 = n,\, X_2 = k\}$ означува дека во бројачот доспеале n честички и од нив k се регистрирани, па затоа

$$P\{X_1 = n,\, X_2 = k\} = \frac{(at)^n}{n!} e^{-at} C_n^k p^k q^{n-k} = (atq)^n e^{-at} \frac{1}{k!(n-k)!} (\tfrac{p}{q})^k , \quad q = 1 - p .$$

Понатаму, од формулата за полна веројатност добиваме

$$P\{X_2 = k\} = \sum_{i=k}^{\infty} P\{X_1 = i,\, X_2 = k\} = e^{-at} \sum_{i=k}^{\infty} \frac{(atq)^i}{k!(i-k)!} (\tfrac{p}{q})^k = e^{-atp} \frac{(atp)^k}{k!}, \quad k > 0 .$$

Оттука

$$P\{X_1 = n \mid X_2 = k\} = \frac{P\{X_1 = n,\, X_2 = k\}}{P\{X_2 = k\}} = e^{-atq} \frac{(atq)^{n-k}}{(n-k)!}, \quad n \ge k .$$

Со аналогни пресметувања наоѓаме

$$\begin{aligned} E(X_1 \mid X_2 = k) &= e^{-atq} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n(atq)^{n-k}}{(n-k)!} = e^{-atq} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(n-k)(atq)^{n-k}}{(n-k)!} + e^{-atq} k \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(atq)^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= atqe^{-atq}e^{atq} + ke^{-atq}e^{atq} = atq + k. \end{aligned}$$

Сега да ја разгледаме случајната променлива $X_3 = X_1 - X_2$. Од претходно изнесеното и од доказот на теорема 18 следува

$$\begin{aligned} E(X_3 \mid X_2 = k) &= E(X_1 - X_2 \mid X_2 = k) = E(X_1 \mid X_2 = k) - E(X_2 \mid X_2 = k) \\ &= atq + k - k = atq . \ \blacklozenge \end{aligned}$$

Теорема 24. Ако случајните променливи X и Y се независни, тогаш

$$E(Y \mid X) = E(Y) .$$

Доказ. Од независноста на случајните променливи X и Y и од равенството (1) добиваме дека за секоја вредност x_i на случајната променлива X важи

$$E(Y \mid X = x_i) = \frac{1}{P(x_i)} \sum_j y_j P(x_i, y_j) = \frac{1}{P(x_i)} \sum_j y_j P(x_i) Q(y_j) = \sum_j y_j Q(y_j) = E(Y) ,$$

што значи дека $E(Y \mid X) = E(Y)$. ♦

Пример 48. а) Нека X и Y се независни случајни променливи со Бернулиева распределба со параметар p. Од теоремите 23 и 24 и од пример 45 следува

$$E(X+Y\,|\,Y)=E(X\,|\,Y)+E(Y\,|\,Y)=E(X)+Y=p+Y\ .$$

б) Нека X и Y се независни еднакво распределени случајни променливи кои примаат вредности на множеството $\{1,2,...,m\}$. Тогаш за $1\leq k\leq m$ и $2\leq i\leq 2m$ имаме

$$\begin{aligned}P\{X=k\,|\,X+Y=i\}&=\frac{P\{X=k,X+Y=i\}}{P\{X+Y=i\}}=\frac{P\{X=k,Y=i-k\}}{P\{X+Y=i\}}=\frac{P\{X=k\}P\{Y=i-k\}}{P\{X+Y=i\}}\\&=\frac{P\{Y=k\}P\{X=i-k\}}{P\{X+Y=i\}}=\frac{P\{Y=k,X=i-k\}}{P\{X+Y=i\}}=\frac{P\{Y=k,X+Y=i\}}{P\{X+Y=i\}}\\&=P\{Y=k\,|\,X+Y=i\},\end{aligned}$$

од што следува $E(X\,|\,X+Y)=E(Y\,|\,X+Y)$. Според тоа,

$$2E(X\,|\,X+Y)=E(X\,|\,X+Y)+E(Y\,|\,X+Y)=E(X+Y\,|\,X+Y)=X+Y$$

па затоа

$$E(X\,|\,X+Y)=\tfrac{X+Y}{2}\ .\ \blacklozenge$$

Пример 49. а) Нека се $X_1,X_2,...,X_n,\,n>1$ независни случајни променливи со Бернулиева распределба со параметар p. Ќе го определиме условното математичко очекување $E(X_1\,|\sum\limits_{i=1}^{n}X_i)$.

Од дефиниција 17, пример 45 и независноста на $X_1,X_2,...,X_n,\,n>1$ имаме

$$\begin{aligned}E(X_1\,|\sum_{i=1}^{n}X_i=k)&=1\cdot P(X_1=1\,|\sum_{i=1}^{n}X_i=k)+0\cdot P(X_1=0\,|\sum_{i=1}^{n}X_i=k)\\&=P(X_1=1\,|\sum_{i=1}^{n}X_i=k)=\frac{P(X_1=1,\sum\limits_{i=1}^{n}X_i=k)}{P(\sum\limits_{i=1}^{n}X_i=k)}=\frac{P(X_1=1,\sum\limits_{i=2}^{n}X_i=k-1)}{P(\sum\limits_{i=1}^{n}X_i=k)}\\&=\frac{P(X_1=1)P(\sum\limits_{i=2}^{n}X_i=k-1)}{P(\sum\limits_{i=1}^{n}X_i=k)}=\frac{pC_{n-1}^{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n-k}}{C_{n-1}^{k}p^{k}(1-p)^{n-k}}=\frac{k}{n},\end{aligned}$$

што значи дека $E(X_1\,|\sum\limits_{i=1}^{n}X_i)=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$.

б) Нека се $X_1,X_2,...,X_n,\,n>1$ независни и еднакво распределени случајни променливи такви што $E(|\,X_i\,|)<+\infty$, $i=1,2,...,n$. Ставаме $X=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$. Ќе докажеме дека $E(X_i\,|\,X)=X$, за $i=1,2,...,n$.

Случајните променливи $X_1,X_2,...,X_n,\,n>1$ се независни и еднакво распределени, па затоа $E(X_i\,|\,X)=E(X_j\,|\,X)$, за секои $i,j=1,2,...,n$. Според тоа,

$$E(X_i \mid X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i \mid X) = E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \mid X) = E(X \mid X) = X \ ,$$

за $i = 1, 2, ..., n$. ♦

Дефиниција 18. Ако X и Y се дискретни случајни променливи за кои постојат $E(X), E(Y)$ и $E(Y^2)$, тогаш *условна дисперзија* на Y при услов X е случајната променлива

$$D(Y \mid X) = E((Y - E(Y \mid X))^2 \mid X) .$$

Пример 50. Нека $X_i, i = 1, 2, ..., N$ се независни случајни променливи со Поасонови распределби $\boldsymbol{P}(a_i), i = 1, 2, ..., N$. Најдете го математичкото очекување и дисперзијата на случајната променлива

$$(X_1 + ... + X_k) \mid X_1 + ... + X_N = n, k \le N$$

Решение. Нека X и Y се независни случајни променливи со Поасонови распределби $\boldsymbol{P}(a)$ и $\boldsymbol{P}(b)$, соодветно. Тогаш, од пример 42 б) следува дека случајната променлива $X + Y$ има Поасонова распределба $\boldsymbol{P}(a + b)$. Ќе ја најдеме распределбата на случајната променлива $X \mid X + Y$. Имаме

$$P\{X = m \mid X + Y = n\} = \frac{P\{X=m, X+Y=n\}}{P\{X+Y=n\}} = \frac{P\{X=m, Y=n-m\}}{P\{X+Y=n\}} = \frac{P\{X=m\}P\{Y=n-m\}}{P\{X+Y=n\}}$$

$$= \frac{\frac{a^m}{m!}e^{-a}\frac{b^{n-m}}{(n-m)!}e^{-b}}{\frac{(a+b)^n}{n!}e^{-(a+b)}} = C_n^m (\frac{a}{a+b})^m (\frac{b}{a+b})^{n-m},$$

каде $n = 0, 1, 2, ..., m = 0, 1, 2, ..., n$. Според тоа, $X \mid X + Y$ има биномна распределба $B\{n, \frac{a}{a+b}\}$.

Ако сега ставиме

$$X = X_1 + ... + X_k, \ Y = X_{k+1} + ... + X_N, k \le N \ ,$$

тогаш според пример 42 б) случајните променливи X и Y имааат Поасонови распределби $\boldsymbol{P}(\sum_{i=1}^{k} a_i)$ и $\boldsymbol{P}(\sum_{i=k+1}^{N} a_i)$, па од претходно изнесеното следува дека

$$(X_1 + ... + X_k) \mid X_1 + ... + X_N = n$$

има биномна распределба $B\{n, \frac{a_1+...+a_k}{a_1+...+a_N}\}$. Конечно

$$E((X_1 + ... + X_k) \mid X_1 + ... + X_N = n) = n\frac{a_1+...+a_k}{a_1+...+a_N} ,$$

$$D((X_1 + ... + X_k) \mid X_1 + ... + X_N = n) = n\frac{a_1+...+a_k}{a_1+...+a_N}(1 - \frac{a_1+...+a_k}{a_1+...+a_N})$$

$$= n\frac{(a_1+...+a_k)(a_{k+1}+...+a_N)}{(a_1+...+a_N)^2} . ♦$$

Теорема 25. Ако X и Y се дискретни случајни променливи за кои постојат $E(X), E(Y)$ и $E(Y^2)$, тогаш

а) $D(Y \mid X) = E(Y^2 \mid X) - [E(Y \mid X)]^2$,

б) $D(Y) = E[D(Y \mid X)] + D[E(Y \mid X)]$.

Доказ. а) Од теорема 23 и фактот дека $E(Y \mid X)$ и $[E(Y \mid X)]^2$ се функции од X следува

$$\begin{aligned} D(Y \mid X) &= E((Y - E(Y \mid X))^2 \mid X) \\ &= E((Y^2 - 2YE(Y \mid X) + [E(Y \mid X)]^2) \mid X) \\ &= E(Y^2 \mid X) - 2E(YE(Y \mid X) \mid X) + E([E(Y \mid X)]^2 \mid X) \\ &= E(Y^2 \mid X) - 2E(Y \mid X)E(Y \mid X) + [E(Y \mid X)]^2 \\ &= E(Y^2 \mid X) - [E(Y \mid X)]^2. \end{aligned}$$

б) Од тврдењето под а), теорема 23 а) за $g(y) = y^2$ и последица 8 непосредно следува

$$\begin{aligned} E[D(Y \mid X)] &= E[E(Y^2 \mid X)] - E\{[E(Y \mid X)]^2\} \\ &= E(Y^2) - E\{[E(Y \mid X)]^2\} \\ &= E(Y^2) - [E(Y)]^2 - E\{[E(Y \mid X)]^2\} + [E(Y)]^2 \\ &= D(Y) - E\{[E(Y \mid X)]^2\} + \{E[E(Y \mid X)]\}^2 \\ &= D(Y) - D[E(Y \mid X)], \end{aligned}$$

кое е еквивалентно со даденото равенство. ♦

ЗАДАЧИ

1. Докажете дека за секои случајни променливи X и Y и за произволна функција $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ важи
$$E[f(Y)E(X \mid Y)] = E(Xf(Y)).$$

2. Распределбите на случајните променливи X и Y се дадени во следниве табели

x_i	-1	1
$P(x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

y_j	-1	2
$Q(y_j)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

Со помош на бројот $P\{X = 1, Y = 1\} = c$ изразете ги останатите веројатности во распределбата на дводимензионалната случајна променлива (X, Y). Најдете го множеството допустливи вредности за параметарот c и пресметајте $E(Y \mid X = k)$, за $k \in \{-1, 1\}$.

3. Нека имаме $n \geq 3$ топчиња, од кои n_1 се бели и n_2 црни ($n_1 + n_2 < n$). Извлекуваме m, $m < n$ топчиња.
   а) Докажете дека веројатноста p_{ij} меѓу извлечените топчиња да има i бели и j црни ($i = 0,1,2,...,\min\{n_1, m\}$, $j = 0,1,2,...,\min\{n_2, m\}$, $i + j \leq m$) е:

$$p_{ij} = \frac{\binom{n_1}{i}\binom{n_2}{j}\binom{n-n_1-n_2}{m-i-j}}{\binom{n}{m}}, \qquad (1)$$

што значи дека со (1) е дефинирана дводимензионална дискретна случајна променлива (X, Y) која прима вредности

$$(i, j),\ i = 0,1,2,...,\min\{n_1, m\},\ j = 0,1,2,...,\min\{n_2, m\},\ i + j \leq m$$

со веројатности (1). Во случајов за случајната променлива (X, Y) велиме дека има *дводимензионална хипергеометриска распределба* $H\{n, m, \frac{n_1}{n}, \frac{n_2}{n}\}$.

b) Најдете ги маргиналните распределби на дводимензионалната хипергеометриска распределба $H\{n, m, \frac{n_1}{n}, \frac{n_2}{n}\}$.

c) Нека $H\{n, m, p, q\}$, $\frac{n_1}{n} = p > 0, \frac{n_2}{n} = q > 0$, $p + q < 1$ е дводимензионална хипергеометриска распределба. Докажете дека

$$E(X) = mp,\ E(Y) = mq,\ D(X) = mp(1-p)\frac{n-m}{n-1},$$

$$D(Y) = mq(1-q)\frac{n-m}{n-1},\ \rho = -\sqrt{\frac{pq}{(1-p)(1-q)}}.$$

d) Најдете го условното математичко очекување $E(Y \mid X)$.

4. Нека дводимензионалната случајна променлива (X, Y) има триномна распределба:

$$P(k, m) = \frac{n!}{k!m!(n-k-m)!} p^k q^m (1-p-q)^{n-k-m},\ k, m = 0,1,2,...,n, k + m \leq n.$$

a) Најдете ги условните и маргиналните закони на распределба.

b) Пресметајте $E(X), E(Y), D(X)$ и $D(Y)$.

c) Најдете го условното математичко очекување $E(Y \mid X)$.

5. Бројот X случајно се избира од множеството $\{1, 2, 3\}$. Потоа коцка за играње се фрла X пати и притоа бројот на паднатите шестки е еднаков на Y.

a) Најдете ги распределбата на случајната променлива (X, Y) и маргиналните распределби на X и Y. Дали X и Y се независни случајни променливи?

b) Најдете го условното математичко очекување $E(X \mid Y = 2)$.

10. КОРЕЛАЦИЈА И РЕГРЕСИЈА

Во претходните разгледувања се осврнавме на независноста на случајните променливи. Притоа, ако случајните променливи X и Y не се независни, ќе велиме дека тие се *зависни*. Во општ случај зависноста меѓу случајните X и Y не може да се изрази со строга функционална врска, т.е. таа има *веројатностен* (*стохастички*) *карактер* и истата ќе биде предмет на нашите разгледувања во оваа точка.

10.1. КОЕФИЦИЕНТ НА КОРЕЛАЦИЈА

Дефиниција 19. Нека X и Y се дискретни случајни променливи со конечни и позитивни дисперзии. *Коваријанса* на случајните променливи X и Y го нарекуваме бројот

$$\operatorname{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X) \bullet E(Y). \qquad (1)$$

Коефициент на корелација на случајните променливи X и Y го нарекуваме бројот

$$\rho(X,Y)=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}\ . \tag{2}$$

Теорема 26. Ако случајните променливи X и Y се независни, тогаш

$$\operatorname{cov}(X,Y)=0 \text{ и } \rho(X,Y)=0\ .$$

Доказ. Ако случајните променливи X и Y се независни, тогаш од последица 6 следува

$$E(XY)=E(X)\bullet E(Y)\,,$$

па од равенството (1) добиваме

$$\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)\bullet E(Y)=0\,,$$

и со замена во равенството (2) добиваме

$$\rho(X,Y)=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=0\ .\ \blacklozenge$$

Обратното тврдење на теоремата 26 не важи, што може да се види од следниов пример.

Пример 51. Нека X е случајна променлива таква што секоја од вредностите $-2,-1,1,2$ ја прима со веројатност $\frac{1}{4}$ и нека $Y=X^2$. Тогаш, случајната променлива Y секоја од вредностите 1 и 4 ја прима со веројатност $\frac{1}{2}$, а случајната променлива $XY=X^3$ секоја од вредностите $-8,-1,1,8$ ја прима со веројатност $\frac{1}{4}$. За математичките очекувања на овие случајни променливи имаме

$$E(X)=0,\ E(Y)=\tfrac{5}{2} \text{ и } E(XY)=0\,,$$

па затоа

$$\operatorname{cov}(X,Y)=\rho(X,Y)=0\,.$$

Меѓутоа,

$$P\{X=1,Y=1\}=P\{X=1\}=\tfrac{1}{4}\neq\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{2}=P\{X=1\}\cdot P\{Y=1\}$$

што значи дека случајните променливи X и Y се зависни. ♦

Дефиниција 20. За случајните променливи X и Y ќе велиме дека се *некорелирани* ако $\rho(X,Y)=0$.

Последица 9. Ако случајните променливи X и Y се независни, тогаш тие се некорелирани.

Доказ. Непосредно следува од теорема 26. ♦

Пример 52. За случајните променливи X и Y зададени со табелата

$Y \setminus X$	-1	0	1
-2	$\frac{3}{40}$	$\frac{7}{40}$	0
-1	$\frac{1}{40}$	$\frac{4}{40}$	$\frac{2}{40}$
1	$\frac{5}{40}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{8}{40}$
2	$\frac{2}{40}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{6}{40}$

ќе го пресметаме коефициентот на корелација $\rho(X,Y)$.

Маргиналните распределби на случајните променливи X и Y се дадени во следниве табели

$X = x_i$	-1	0	1
$P(x_i)$	$\frac{11}{40}$	$\frac{13}{40}$	$\frac{16}{40}$

$Y = y_i$	-2	-1	1	2
$P(y_i)$	$\frac{10}{40}$	$\frac{7}{40}$	$\frac{14}{40}$	$\frac{9}{40}$

Понатаму, случајната променлива XY може да ги прима вредностите $-2,-1,0,1,2$ и тоа со веројатности:

$$P(XY=-2)=\tfrac{2}{40}\,,\, P(XY=-1)=\tfrac{7}{40}\,,\, P(XY=0)=\tfrac{13}{40},\; P(XY=1)=\tfrac{9}{40} \text{ и } P(XY=2)=\tfrac{9}{40}\,,$$

па затоа нејзината распределба е дадена во табелата

XY	-2	-1	0	1	2
p_{XY}	$\frac{2}{40}$	$\frac{7}{40}$	$\frac{13}{40}$	$\frac{9}{40}$	$\frac{9}{40}$

Понатаму, лесно се пресметува дека

$$E(X)=\tfrac{1}{8}\,,\; E(X^2)=\tfrac{27}{40}\,,\; D(X)=\tfrac{211}{320}\,,\; E(Y)=\tfrac{1}{8}\,,$$

$$E(Y^2)=\tfrac{97}{40}\,,\; D(Y)=\tfrac{771}{320} \text{ и } E(XY)=\tfrac{2}{5}\,.$$

Според тоа,

$$\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)\bullet E(Y)=\tfrac{2}{5}-\tfrac{1}{64}=\tfrac{123}{320}\,,$$

па затоа

$$\rho(X,Y)=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\frac{\frac{123}{320}}{\sqrt{\frac{211}{320}}\bullet\sqrt{\frac{771}{320}}}=\frac{\frac{123}{320}}{\frac{\sqrt{211\bullet 771}}{320}}=\frac{123}{\sqrt{162681}}\approx 0{,}3\,.$$

Бидејќи коефициентот на корелација на случајните променливи X и Y е различен од нула заклучуваме дека тие не се независно распределени. Имено, ако тие беа независно распределени, тогаш според теорема 26 коефициентот на корелација требаше да биде еднаков на нула. Потврда за нашиот заклучок е и неравенството

$$P(X=-1,Y=-2)=\tfrac{3}{40}\neq\tfrac{11}{40}\bullet\tfrac{10}{40}=P(X=-1)\bullet P(Y=-2)\,.\ \blacklozenge$$

Теорема 27. Ако X и Y се случајни променливи со конечни дисперзии и $a,b\in\mathbf{R}$, тогаш

$$\operatorname{cov}(X+a,Y+b)=\operatorname{cov}(X,Y) \text{ и } \rho(X+a,Y+b)=\rho(X,Y)\,.$$

Доказ. Имаме:

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(X+a,Y+b) &= E(X+a)(Y+b)-E(X+a)\bullet E(Y+b)\\ &= E(XY+aY+bX+ab)-(E(X)+a)\bullet(E(Y)+b)\\ &= E(XY)+aE(Y)+bE(X)+ab-E(X)\bullet E(Y)-aE(Y)-bE(X)-ab\\ &= \operatorname{cov}(X,Y).\end{aligned}$$

Понатаму, од претходно изнесеното и од теорема 7 б) следува

$$\rho(X+a,Y+b)=\frac{\operatorname{cov}(X+a,Y+b)}{\sqrt{D(X+a)}\sqrt{D(Y+b)}}=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\rho(X,Y)\ .\ \blacklozenge$$

Теорема 28. Нека X и Y се дискретни случајни променливи. За коефициентот на корелација на овие случајни променливи важи неравенството $|\rho(X,Y)|\leq 1$. Притоа равенството $|\rho(X,Y)|=1$ важи ако и само ако зависноста на случајните променливи X и Y е линеарна.

Доказ. За случајните променливи $X_1=\frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}}, Y_1=\frac{Y-E(Y)}{\sqrt{D(Y)}}$ важи

$$E(X_1)=E(Y_1)=0\,,\ D(X_1)=D(Y_1)=1 \text{ и } \rho(X,Y)=\operatorname{cov}(X_1,Y_1)\,.$$

Понатаму, добиваме

$$\begin{aligned}D(X_1\pm Y_1) &= E(X_1\pm Y_1)^2-[E(X_1\pm Y_1)]^2\\ &= E(X_1^2)\pm 2E(X_1Y_1)+E(Y_1^2)-[E(X_1)]^2\mp 2E(X_1)E(Y_1)-[E(Y_1)]^2\\ &= D(X_1)\pm 2\operatorname{cov}(X_1,Y_1)+D(Y_1)\\ &= 2[1\pm\operatorname{cov}(X_1,Y_1)]=2[1\pm\rho(X,Y)]\end{aligned}$$

од каде заради ненегативноста на дисперзијата добиваме $|\rho(X,Y)|\leq 1$. Равенството $\rho(X,Y)=1$ важи ако и само ако $D(X_1-Y_1)=0$, т.е. ако и само ако $X_1-Y_1=\text{const}$. Равенството $\rho(X,Y)=-1$ важи ако и само ако $D(X_1+Y_1)=0$, т.е. ако и само ако $X_1+Y_1=\text{const}$. Јасно и во двата случаи зависноста меѓу случајните променливи X и Y е линеарна и притоа важи

$$\frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}}\pm\frac{Y-E(Y)}{\sqrt{D(Y)}}=\text{const}\ .\ \blacklozenge$$

Теорема 29. За секои случајни променливи $X_1,X_2,...,X_n$ важи

$$D(X_1+X_2+...+X_n)=\sum_{i=1}^{n}D(X_i)+2\sum_{1\leq i<j\leq n}\operatorname{cov}(X_i,X_j)\,.$$

Доказ. Тврдењето ќе го докажеме за две случајни променливи. Општиот случај се докажува аналогно.

Нека се дадени случајните променливи X_1 и X_2. Тогаш,

$$\begin{aligned}D(X_1+X_2) &= E((X_1-E(X_1))+(X_2-E(X_2)))^2\\ &= E(X_1-E(X_1))^2+E(X_2-E(X_2))^2+2E(X_1-E(X_1))(X_2-E(X_2))\end{aligned}$$

$$= D(X_1) + D(X_2) + 2\operatorname{cov}(X_1, X_2)$$

што и требаше да се докаже. ♦

Пример 52. Случајните променливи $X_1, X_2, ..., X_n$ имаат еднакви ненулти дисперзии и по парови еднакви коефициенти на корелација

$$\rho(X_i, X_j) = a \text{, за } i \neq j.$$

Докажете дека

$$a \geq \tfrac{1}{1-n}.$$

Решение. Нека

$$D(X_i) = s^2 \text{, за } i = 1, 2, ..., n.$$

Од условот следува

$$\operatorname{cov}(X_i, X_j) = \rho(X_i, X_j) \cdot \sqrt{D(X_i)} \cdot \sqrt{D(X_j)} = as^2 \text{, за } i \neq j.$$

Сега од теорема 27 добиваме:

$$0 \leq D(X_1 + X_2 + ... + X_n) = \sum_{i=1}^{n} D(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \operatorname{cov}(X_i, X_j),$$
$$= ns^2 + n(n-1)s^2 a$$

и ако поделиме со $s^2 \neq 0$, добиваме неравенство кое е еквивалентно со бараното неравенство. ♦

Теорема 30. Коваријансата на случајните променливи

$$Z = a_1 X_1 + a_2 X_2 + ... + a_n X_n \text{ и}$$
$$V = b_1 X_1 + b_2 X_2 + ... + b_n X_n,$$

каде $X_1, X_2, ..., X_n$ се независни и еднакво распределени случајни променливи со ненулта дисперзија е еднаква на нула ако и само ако $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = 0$.

Доказ. Нека претпоставиме дека независните случајни променливи X_i, $i = 1, 2, .., n$ се еднакво распределени, т.е. дека

$$E(X_i) = a, D(X_i) = \sigma^2 \text{, за } i = 1, 2, ..., n.$$

За случајните променливи

$$Z = a_1 X_1 + a_2 X_2 + ... + a_n X_n$$
$$V = b_1 X_1 + b_2 X_2 + ... + b_n X_n.$$

имаме

$$E(Z) = a \sum_{i=1}^{n} a_i \text{ и } E(V) = a \sum_{i=1}^{n} b_i.$$

Затоа важи:

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(Z,V) &= E[(Z-E(Z))(V-E(V))] \\ &= E[(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i - a\sum_{i=1}^{n} a_i)(\sum_{i=1}^{n} b_i X_i - a\sum_{i=1}^{n} b_i)] \\ &= E[(\sum_{i=1}^{n} a_i (X_i - a))(\sum_{i=1}^{n} b_i (X_i - a))] \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i b_i E(X_i - a)^2 + \sum_{\substack{i,j \\ i\neq j}} a_i b_j E[(X_i - a)(X_j - a)]\end{aligned}$$

Понатаму, бидејќи случајните променливи $X_1, X_2, ..., X_n$ се независни, од забелешка 16 следува дека случајните променливи $X_1 - a, X_2 - a, ..., X_n - a$ се независни, па од последиците 6 и 2 добиваме

$$E[(X_i - a)(X_j - a)] = E(X_i - a)E(X_j - a) = 0\cdot 0 = 0,$$

за $i \neq j$. Затоа,

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(Z,V) = E[(Z-E(Z))(V-E(V))] &= \sum_{i=1}^{n} a_i b_i E(X_i - a)^2 \\ = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \sigma^2 = \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} a_i b_i\end{aligned},$$

и како $\sigma^2 \neq 0$ добиваме дека $\operatorname{cov}(Z,V) = 0$ ако и само ако $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = 0$. ♦

Дефиниција 21. Нека $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$ е $n-$димензионална случајна променлива. Матрицата $B = [b_{ij}]_{n\times n}$, каде $b_{kl} = \operatorname{cov}(X_k, X_l)$ ја нарекуваме *матрица на коваријанси на* $n-$*димензионална случајна променлива* X.

Во следнава теорема ќе дадеме критериум за определување дали една матрица е матрица на коваријанси на некоја $n-$димензионална случајна променлива или не.

Теорема 31. Ако матрицата $B = [b_{ij}]_{n\times n}$ е матрица на коваријанси на случајниот вектор $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$, тогаш таа е симетрична и ненегативно определена (дефинитна).

Доказ. Нека $B = [b_{ij}]_{n\times n}$ е матрица на коваријанси на случајниот вектор $(X_1, X_2, ..., X_n)$. Јасно B е симетрична матрица. Понатаму, ако $(a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathbf{R}^n$, тогаш

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} b_{kl} a_k a_l = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_k a_l \operatorname{cov}(X_k, X_l) = E[\sum_{k=1}^{n} (X_k - E(X_k)) a_k]^2 \geq 0,$$

што значи дека матрицата B е ненегативно определена. ♦

Забелешка 19. Важи и обратното тврдење на теорема 31 и истото покасно ќе го докажеме.

Воведените термини и добиените резултати од оваа точка допуштаат геометриска интерпретација во терминологијата на бесконечнодимензионалните Евклидски простори.

Да го разгледаме множеството $\mathbf{L}$ од сите дискретни случајни променливи $X(\omega)$ определени на еден ист простор на елементарни настани Ω, такви што $E(X)=0$ и $D(X)<+\infty$. Не е тешко да се провери, дека ова множество во однос на операциите собирање на функции и множење на функција со реален број е векторски простор. Елементите на овој векторски простор се случајни променливи, кои согласно усвоената терминологија ги нарекуваме вектори. Во овој простор дефинираме $(X,Y):\mathbf{L}\times\mathbf{L}\to\mathbf{R}$ функција со:

$$(X,Y)=E(XY)=\mu_{XY}\,. \tag{3}$$

Во теорема 28 докажавме дека $|\rho(X,Y)|\leq 1$ и како

$$\rho(X,Y)=\frac{E(XY)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\frac{\mu_{XY}}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$$

добиваме

$$|(X,Y)|=|\mu_{XY}|\leq\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}\,,$$

што значи дека функцијата (X,Y) е добро дефинирана, т.е. (X,Y) постои за секој пар случајни променливи X и Y кои припаѓаат на нашиот простор. Понатаму, од претходните разгледувања, ако се земе предвид дека $E(X)=0$ за секоја случајна променлива $X\in\mathbf{L}$, следува дека

1) $(X,Y)=(Y,X),$ за секои $X,Y\in\mathbf{L}$;
2) $(\lambda Y,X)=\lambda(X,Y),$ за секои $X,Y\in\mathbf{L}$ и за секој $\lambda\in\mathbf{R}$;
3) $(X+Y,Z)=(X,Y)+(Y,Z),$ за секои $X,Y,Z\in\mathbf{L}$; и
4) $(X,X)\geq 0$, за секој $X\in\mathbf{L}$ и $(X,X)=0$ ако и само ако $X=0$,

што значи дека со (3) е дефиниран скаларен производ на просторот $\mathbf{L}$, односно дека $\mathbf{L}$ е Евклидски простор.

Користејќи ги својствата на скаларниот производ добиваме дека

$$\|X\|=\sqrt{(X,X)}=\sqrt{E(X^2)}=\sqrt{D(X)}=\sigma_X$$

е норма на просторот $\mathbf{L}$, а

$$d(X-Y)=\sqrt{E(X-Y)^2}$$

е растојание во просторот $\mathbf{L}$. Сега, ако се има предвид дека за секои $X,Y\in\mathbf{L}$ важи

$$\cos\measuredangle(X,Y)=\frac{(X,Y)}{\|X\|\cdot\|Y\|}=\frac{E(XY)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\rho(X,Y)\,,$$

добиваме дека коефициентот на корелација меѓу случајните променливи X и Y всушност е еднаков на косинусот од аголот меѓу векторите $X, Y \in \mathbf{L}$. Јасно, ако $\rho(X,Y) = \pm 1$, тогаш $\cos\measuredangle(X,Y) = \pm 1$, што значи дека $\measuredangle(X,Y) = 0$ или π, т.е. векторите векторите X и Y се колинеарни. Последното значи дека $X = aY$, за некој $a \in \mathbf{R}$, што значи дека зависноста на случајните променливи X и Y е линеарна, резултат кој го добивме во теорема 28. Понатаму, ако се земе предвид дека $|\cos\measuredangle(X,Y)| \le 1$, го добиваме неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц

$$|(X,Y)| \le \|X\| \cdot \|Y\|. \tag{4}$$

Последното укажува дека доказот на неравенството $|\rho(X,Y)| \le 1$ може да се реализира на потполно аналоген начин како и доказот на неравенството (4). Притоа за секој $t \in \mathbf{R}$ имаме

$$0 \le E[(X - E(X)) + t(Y - E(Y)]^2 = D(X) + 2t\,\mathrm{cov}(X,Y) + t^2 D(Y),$$

што значи дека квадратниот трином на десната страна на последното неравенство е ненегативен за секој $t \in \mathbf{R}$, од што следува дека неговата дискриминанта е непозитивна, т.е.

$$[\mathrm{cov}(X,Y)]^2 - D(X)D(Y) \le 0,$$

односно

$$|\mathrm{cov}(X,Y)| \le \sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)} \text{ или } |\rho(X,Y)| = \frac{|\mathrm{cov}(X,Y)|}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}} \le 1.$$

Конечно, некорелираноста на случајните променливи X и Y значи $\rho(X,Y) = 0$, т.е. $\cos\measuredangle(X,Y) = 0$, што значи $\measuredangle(X,Y) = \frac{\pi}{2}$, па затоа од независноста на X и Y следува нивната ортогоналност како вектори во Евклидскиот простор $\mathbf{L}$.

10.2. СРЕДНОКВАДРАТНА РЕГРЕСИЈА. ЛИНЕАРНА РЕГРЕСИЈА

Нека (X,Y) е дводимензионална дискретна случајна променлива, на пример X и Y се броевите на возилата кои минуваат низ две последователни раскрсници на една сообраќајница. Во многу случаи од особена важност е едната случајна променлива, на пример Y, да се изрази како функција $g(X)$ од другата случајна променлива. Претставувањето $Y = g(X)$, по правило, не е можно, па затоа ја разгледуваме задачата за можно приближно претставување: $Y \approx g(X)$. Значи, меѓу сите функции $g(X)$ од случајната променлива X треба да ја најдеме онаа функција која *најдобро ја апроксимира* случајната променлива Y. Ќе го појасниме терминот најдобро ја апроксимира, бидејќи истиот може да се толкува на повеќе начини. Во нашите разгледувања под терминот најдобро ја апроксимира ќе ја подразбираме апроксимацијата по методот на најмали квадрати. Така ја имаме следнава дефиниција.

Дефиниција 22. Случајната променлива $g(X)$ *најдобра апроксимација* на случајната променлива Y во смисла на методот на најмали квадрати, ако $E(Y - g(X))^2$

прима минимална вредност. Притоа случајната променлива $g(X)$ ја нарекуваме *средноквадратна регресија* на случајната променлива Y по случајната променлива X .

Теорема 32. Нека X и Y се дискретни случајни променливи. Тогаш за секоја случајна променлива Z , која е функција од важи X , важи

$$E(Y-Z)^2 \geq E(Y-E(Y\,|\,X))^2\,, \tag{1}$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $Z = E(Y\,|\,X)$.

Доказ. Имаме

$$\begin{aligned} E(Y-Z)^2 &= E(Y-E(Y\,|\,X)+E(Y\,|\,X)-Z)^2 \\ &= E(Y-E(Y\,|\,X))^2 + E(Z-E(Y\,|\,X))^2 - 2E[(Y-E(Y\,|\,X))(Z-E(Y\,|\,X))]. \end{aligned}$$

Понатаму, бидејќи $Z-E(Y\,|\,X)$ е функција од X , прво од теорема 23 г), а потоа од теорема 23 в) и последица 8 следува

$$\begin{aligned} E[(Y-E(Y\,|\,X))(Z-E(Y\,|\,X))\,|\,X] &= (Z-E(Y\,|\,X))E[(Y-E(Y\,|\,X))\,|\,X] \\ &= (Z-E(Y\,|\,X))[E(Y\,|\,X)-E(E(Y\,|\,X)\,|\,X)] \\ &= (Z-E(Y\,|\,X))[E(Y\,|\,X)-E(Y\,|\,X)] = 0. \end{aligned}$$

Сега, ако повторно ја примениме последица 8 и го искористиме претходното равенство добиваме

$$E[(Y-E(Y\,|\,X))(Z-E(Y\,|\,X))] = E\{E[(Y-E(Y\,|\,X))(Z-E(Y\,|\,X))\,|\,X]\} = E(0) = 0\,.$$

Со замена во почетното равенство на доказот и примена на теорема 6 а) наоѓаме

$$E(Y-Z)^2 = E(Y-E(Y\,|\,X))^2 + E(Z-E(Y\,|\,X))^2 \geq E(Y-E(Y\,|\,X))^2\,,$$

т.е. важи (1) и знак за равенство важи ако и само ако $E(Z-E(Y\,|\,X))^2 = 0$, што според теорема 6 б) значи ако и само ако $Z = E(Y\,|\,X)$. ♦

Според теорема 31 средноквадратната регресија на случајната променлива Y по случајната променлива X е еднаква на условното математичко очекување $E(Y\,|\,X)$. Но, за да се најде $E(Y\,|\,X)$ потребно е да се знае распределбата на дводимензионалната случајна променлива (X,Y), а познавањето на оваа распределба ни дава комплетна информација за случајните променливи X и Y и нивната врска. Затоа од интерес е да се бараат други апроксимации на случајната променлива Y со помош на случајната променлива X , при што не се бара комплетно познавање на распределбата за (X,Y). Наједноставен е случајот на линеарна апроксимација, т.е. кога Y се апроксимира со линеарна функција

$$Y = g(X) = \alpha X + \beta\text{, каде } \alpha, \beta \in \mathbf{R}\,.$$

Ако ги прифатиме ознаките $\sigma_X^2 = D(X)$ и $\sigma_Y^2 = D(Y)$, тогаш точна е следнава теорема.

Теорема 33. Нека X и Y се случајни променливи со конечни позитивни дисперзии. Тогаш равенката на *линеарната регресија* на Y по X е

$$Y = E(Y) + \rho \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(X - E(X)) . \qquad (2)$$

Доказ. Нека $Y = \alpha X + \beta$, каде $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ е равенката на линеарна регресија Y по X, при што параметрите α и β се такви што грешката на апроксимацијата $E[Y - (\alpha X + \beta)]^2$ е најмала.

Грешката на апроксимацијата е функција од параметрите α и β:

$$f(\alpha, \beta) = E[Y - (\alpha X + \beta)]^2 . \qquad (3)$$

Значи, треба да најдеме минимум од функцијата (3). Имаме

$$f(\alpha, \beta) = E(Y^2) + \alpha^2 E(X^2) + \beta^2 - 2\alpha E(XY) - 2\beta E(Y) + 2\alpha\beta E(X)$$

и

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 2\alpha E(X^2) - 2E(XY) + 2\beta E(X) , \ \frac{\partial f}{\partial \beta} = 2\beta - 2E(Y) + 2\alpha E(X) ,$$

па ако замениме во системот $\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0, \ \frac{\partial f}{\partial \beta} = 0$, после кратко средување го добиваме системот

$$\begin{cases} \alpha E(X^2) + \beta E(X) = E(XY), \\ \alpha E(X) \ \ + \beta \qquad = E(Y), \end{cases}$$

чија детерминанта е $E(X^2) - [E(X)]^2 = \sigma_X^2 > 0$, што значи дека тој има единствено решение:

$$\alpha_0 = \rho \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} , \ \beta_0 = E(Y) - \rho \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} E(X) . \qquad (4)$$

Понатаму:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} = 2E(X^2) , \ \frac{\partial^2 f}{\partial \beta^2} = 2 \ \text{ и } \ \frac{\partial^2 f}{\partial \beta \partial \alpha} = 2E(X) ,$$

т.е.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \beta^2} - (\frac{\partial^2 f}{\partial \beta \partial \alpha})^2 = 4\{E(X^2) - [E(X)]^2\} = 4\sigma_X^2 > 0 ,$$

што значи дека во точката (4) функцијата (3) има екстрем и како $\frac{\partial^2 f}{\partial \beta^2} > 0$, тој екстрем е минимум

$$f_{\min} = f(\alpha_0, \beta_0) = \sigma_Y^2 (1 - \rho^2) .$$

Конечно, ако од (4) замениме во $Y = \alpha X + \beta$ добиваме дека равенката на линеарната регресија на Y по X е дадена со (2). ♦

Дефиниција 23. Изразот $\sigma_Y^2 (1 - \rho^2)$ го нарекуваме *остаточна дисперзија* на Y по X, а $\alpha_0 = \rho \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}$ го нарекуваме *коефициент на линеарна регресија* на Y по X .

Забелешка 20. а) Од теорема 33 следува дека остаточната дисперзија е мерка за големината на грешката која ја правиме при користење на приближното равенство $Y = \alpha X_0 + \beta_0$.

б) Случајната променлива

$$Y_1 = Y - Y = Y - E(Y) - \rho \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(X - E(X))$$

ја нарекуваме *остаток на случајната променлива* Y *во однос на случајната променлива* X. Ќе ја определиме коваријансата на Y_1 и X. Ако земеме предвид дека $E(Y_1) = 0$, добиваме

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(X, Y_1) &= \operatorname{cov}(X, Y - E(Y) - \rho \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(X - E(X))) \\ &= E((X - E(X))(Y - E(Y) - \rho \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(X - E(X))) \\ &= E((X - E(X))(Y - E(Y)) - \rho \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} E(X - E(X))^2 \\ &= \operatorname{cov}(X, Y) - \rho \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\sigma_X^2 = \operatorname{cov}(X, Y) - \rho\sigma_X\sigma_Y = 0.\end{aligned}$$

Според тоа, остатокот Y_1 на случајната променлива Y во однос на случајната променлива X е некорелиран со случајната променлива X. Може да се докаже дека $E(Y_1^2) = \sigma_Y^2(1 - \rho^2)$. Проверете!

в) Претходно ја разгледавме линеарната регресија на Y по X. Аналогно може да се разгледува линеарна регресија на X по Y:

$$X = E(X) + \rho \frac{\sigma_X}{\sigma_Y}(Y - E(Y)), \tag{5}$$

при што коефициентот на линеарна регресија на X по Y е еднаков на $\rho \frac{\sigma_X}{\sigma_Y}$, а остаточната дисперзија на X по Y е $\sigma_X^2(1 - \rho^2)$. Како што може да се види правите (2) и (5) минуваат низ точката $(E(X), E(Y))$, но тие не се совпаѓаат, освен кога $\rho = \pm 1$. Но, во овој случај, согласно со теорема 25 зависноста на случајните променливи X и Y е линеарна. Понатаму, ако $\rho = 0$, т.е. ако случајните променливи X и Y се некорелирани, тогаш правите (2) и (5) го добиваат видот $Y = E(Y)$ и $X = E(X)$, соодветно.

Пример 53. Нека X и Y се независни Бернулиеви случајни променливи со параметар $p = 0,5$ и нека

$$Z = \min\{X, Y\},\ V = \max\{X, Y\}.$$

Најдете го законот на распределба на случајниот вектор (Z, V), коефициентот $\rho(Z, V)$ и равенките на линеарна регресија на Z по V и на V по Z.

Решение. Од независноста на случајните променливи X и Y следува дека законот на распределба на случајниот вектор (Z, V) е даден со

$$P\{(Z,V)=(0,0)\}=0,25;\ P\{(Z,V)=(1,1)\}=0,25;\ P\{(Z,V)=(0,1)\}=0,5.$$

Понатаму, за коефициентот на корелација имаме

$$\rho(Z,V)=\frac{E(ZV)-E(Z)\cdot E(V)}{\sqrt{D(Z)}\sqrt{D(V)}}=\frac{0,25-0,25\cdot 0,75}{\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}}=\frac{1}{3}.$$

Ако ја искористиме равенката (2) за равенката на линеарна регресија на Z по V добиваме $Z=3V$, а за равенката на линеарната регресија на V по Z имаме $V=\frac{1}{3}Z+\frac{2}{3}$. ♦

Како и кај корелацијата и овде воведените поими и добиените резултати можеме да ги интерпретираме геометриски. Ќе се ограничиме на разгледување на случајните променливи X за кои $E(X)=0$ и $D(X)<+\infty$. Како што видовме во точка 10.1 множеството од овие случајни променливи е Евклидски простор, кој го означивме со $\mathbf{L}$.

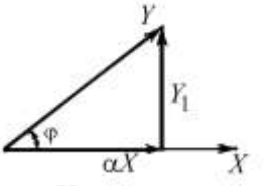
Нека X и Y се два вектори од просторот $\mathbf{L}$, т.е. случајни променливи такви што

$$E(X)=E(Y)=0,\ D(X)=\|X\|^2<+\infty \text{ и } D(Y)=\|Y\|^2<+\infty .$$

Да ја разгледаме задачата за наоѓање проекција на векторот Y врз векторот X, т.е. задачата за претставување на векторот Y во вид

$$Y=\alpha X+Y_1,\ \alpha\in\mathbf{R},$$

каде $Y_1\perp X$, цртеж 12. Ако двете страни на последното равенство скаларно ги помножиме со X добиваме



Цртеж 12

$$(X,Y)=\alpha(X,X)+(X,Y_1)=\alpha\|X\|^2,$$

од каде наоѓаме

$$\alpha=\frac{(X,Y)}{\|X\|^2}=\frac{E(X,Y)}{D(X)}=\rho\frac{\sigma_X\sigma_Y}{\sigma_X^2}=\rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X},$$

т.е. коефициентот α е еднаков на коефициентот на линеарната регресија на Y по X. Јасно, векторот αX за најдената вредност на α е *проекцијата на векторот Y врз векторот X*.

Векторот $Y_1=Y-\rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}X$ е ортогонален на векторот X, што значи дека меѓу векторите од видот $Y-\alpha X$ векторот $Y_1=Y-\rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}X$ има најмала должина, односно $\|Y_1\|^2=E(Y_1^2)=E(Y-\alpha X)^2$ достигнува минимум за $\alpha=\rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}$, резултат кој го добивме во теорема 33 при услов $E(X)=E(Y)=0$. Понатаму, ако јаземеме во предвид претпоставката дека $E(X)=E(Y)=0$ од претходно изнесеното следува точноста на следново тврдење:

Линеарната регресија на Y по X е еднаква на проекцијата на векторот Y врз векторот X.

Како што рековме векторот $Y_1 = Y - \rho \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} X$ е еднаков на разликата на векторот Y и неговата проекција на векторот X и како $E(X) = E(Y_1) = 0$, $Y_1 \perp X$ добиваме $\operatorname{cov}(Y_1, X) = E(Y_1 X) = (Y_1, X) = 0$, што всушност е само потврда на претходно докажаната некорелираност на случајните променливи X и Y_1. Конечно, од Питагоровата теорема која е точна во произволен Евклидски простор имаме

$$\| Y \|^2 = \| Y_1 \|^2 + \| \alpha X \|^2 ,$$

односно

$$\| Y_1 \|^2 = \| Y \|^2 - \alpha^2 \| X \|^2 = \sigma_Y^2 - \rho^2 \frac{\sigma_Y^2}{\sigma_X^2} \sigma_X^2 = \sigma_Y^2 (1 - \rho^2) ,$$

што значи дека остаточна дисперзија на Y по X е еднаква на квадратот на должината на нормалата спуштена од крајот на векторот Y врз правецот на векторот X, факт кој го констатиравме во забелешка 20 б).

10.3. ПРОПОРЦИЈА НА ДИСПЕРЗИИ

Нека е дадена дводимензионалната случајна променлива (X, Y). Во точка 9 го воведовме условното математичко очекување $E(Y \mid X)$, за кое констатиравме дека е случајна променлива и е функција од случајната променлива X. Понатаму, во последица 8 докажаве дека $E[E(Y \mid X)] = E(Y)$, во теорема 25 докажавме дека

$$D(Y) = E[D(Y \mid X)] + D[E(Y \mid X)] ,$$

а согласно со дефиниција 18 и теорема 23 а) добиваме

$$E(D(Y \mid X)) = E[E((Y - E(Y \mid X))^2 \mid X)] = E(Y - E(Y \mid X))^2 .$$

Ако замениме во горното равенство добиваме

$$D(Y) = E(Y - E(Y \mid X))^2 + D[E(Y \mid X)] .$$

Нека претпоставиме дека $D(Y) > 0$. Од последното равенство следува

$$D[E(Y \mid X)] = D(Y)[1 - \frac{E(Y - E(Y|X))^2}{D(Y)}]$$

и да ја воведеме ознаката

$$\eta_{Y|X}^2 = \frac{D[E(Y|X)]}{D(Y)} = 1 - \frac{E(Y - E(Y|X))^2}{D(Y)} . \qquad (1)$$

Бројот $\eta_{Y|X}$ го нарекуваме *пропорција на дисперзијата* на случајната променлива Y во однос на случајната променлива X.

Значењето на пропорцијата на дисперзија, како определена мерка на стохастичната зависност меѓу случајните променливи X и Y, како компоненти на случајната променлива (X, Y), може да се согледа од неговите својства кои ќе ги докажеме во следнава теорема.

Теорема 34. За пропорцијата на дисперзија $\eta_{Y|X}$, определена со равенството (1), важи

а) $0 \le \eta_{Y|X}^2 \le 1$,

б) ако случајните променливи X и Y се независни, тогаш $\eta_{Y|X} = 0$,

в) $\eta_{Y|X}^2 = 1$ ако и само ако Y функционално зависи од X,

г) $\rho^2 \le \eta_{Y|X}^2$, каде ρ е коефициентот на корелација, а знак за равенство важи ако и само ако имаме линеарна регресија.

Доказ. а) Од

$$D(Y) > 0, E(Y - E(Y \mid X))^2 \ge 0 \text{ и } D[E(Y \mid X)] \ge 0$$

следува $\eta_{Y|X}^2 \ge 0$ и $1 - \eta_{Y|X}^2 \ge 0$, т.е. следува дека $0 \le \eta_{Y|X}^2 \le 1$.

б) Нека случајните променливи X и Y се независни. Тогаш од теорема 21 следува дека $E(Y \mid X) = E(Y) = \text{const}$, па затоа $D(E(Y \mid X)) = 0$, т.е. $\eta_{Y|X} = 0$.

в) Нека $\eta_{Y|X}^2 = 1$. Тогаш од (1) следува дека $E(Y - E(Y \mid X))^2 = 0$ и како $(Y - E(Y \mid X))^2 \ge 0$, од теорема 6 б) следува дека $Y = E(Y \mid X)$ со веројатност 1. Но, случајната променлива $E(Y \mid X)$ е функција од случајната променлива X, што значи дека Y функционално зависи од X.

Обратно, нека Y функционално зависи од X, т.е. нека $Y = g(X)$. Тогаш од теорема 23 д) следува дека

$$E(Y \mid X) = E(g(X) \mid X) = g(X) = Y,$$

па затоа

$$E(Y - E(Y \mid X))^2 = E(Y - Y)^2 = 0.$$

Конечно, од (1) следува дека $\eta_{Y|X}^2 = 1$.

г) Ако $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, тогаш $g(X)$ е случајна променлива. Понатаму, според теорема 32 имаме

$$E(Y - g(X))^2 \ge E(Y - E(Y \mid X))^2. \tag{2}$$

Ако за функцијата $g(X)$ ја земеме правата на линеарна регресија

$$g(X) = E(Y) + \rho \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(X - E(X)),$$

тогаш

$$E(Y - g(X))^2 = E(Y - E(Y) - \rho \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(X - E(X)))^2$$

$$= E(Y-E(Y))^2 - 2\rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}E[(Y-E(Y))(X-E(X))] + \rho^2\frac{\sigma_Y^2}{\sigma_X^2}E(X-E(X))^2$$

$$= \sigma_Y^2 - 2\rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\rho\sigma_Y\sigma_X + \rho^2\frac{\sigma_Y^2}{\sigma_X^2}\sigma_X^2 = \sigma_Y^2(1-\rho^2) = D(Y)(1-\rho^2).$$

Понатаму, од (1) добиваме

$$E(Y-E(Y\mid X))^2 = D(Y)(1-\eta_{Y|X}^2),$$

и ако од последните две равенства замениме во неравенството (2) добиваме

$$D(Y)(1-\rho^2) \geq D(Y)(1-\eta_{Y|X}^2), \text{ т.е. } \rho^2 \leq \eta_{Y|X}^2 .$$

Притоа знак за равенство имаме ако и само ако имаме линеарна регресија. Навистина, ако

$$E(Y\mid X) = E(Y) + \rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(X-E(X)),$$

тогаш

$$D(E(Y\mid X)) = D(E(Y) + \rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(X-E(X))) = \rho^2\frac{\sigma_Y^2}{\sigma_X^2}D(X) = \rho^2\sigma_Y^2 = \rho^2 D(Y)$$

и ако замениме во (1) добиваме

$$\eta_{Y|X}^2 = \frac{D[E(Y|X)]}{D(Y)} = \frac{\rho^2 D(Y)}{D(Y)} = \rho^2 . \ \blacklozenge$$

Забелешка 21. Од теорема 34 можеме да кажеме дека пропорцијата на дисперзија покажува во колкава мера вредностите на случајниот вектор се растураат околу кривата на регресија. Притоа, ако $\eta_{Y|X}^2 = 1$, можеме да кажеме дека немаме растурање, а ако $\eta_{Y|X} = 0$, тогаш растурањето е максимално.

10.4. МНОЖЕСТВЕНА ЛИНЕАРНА РЕГРЕСИЈА

Нека $X_1, X_2, ..., X_n$ се произволни дискретни случајни променливи кои имаат конечни математички очекувања $E(X_i) = m_i$ и дисперзии $D(X_i) = \sigma_i^2, \ \ i = 1, 2, \ \ ..., n$. Според последица 2 математичкото очекување на случајната променлива $X_i - m_i$ е еднакво на нула, а според теорема 6 б) дисперзијата е повторно еднаква на σ_i^2. Затоа во натамошните разгледувања заради поедноставно изложување на материјалот ќе претпоставиме дека $m_i = 0, i = 1, 2, ..., n$. Притоа, во општ случај, сите формули можат да се добијат од формулите во оваа точка ако X_i се замени со $X_i - m_i$.

Да ја разгледаме задачата да се најде таква линеарна функција

$$g(X_2, X_3, ..., X_n) = \alpha_{12.34...n}X_2 + \alpha_{13.24...n}X_3 + ... + \alpha_{1n.23...(n-1)}X_n , \qquad (1)$$

која во смисол на методот на најмали квадрати дава најдобро приближување на случајната променлива X_1. Последното значи да се изберат коефициентите

$$\alpha_{12.34...n}, \alpha_{13.24...n}, ..., \alpha_{1n.23...(n-1)}$$

така што функцијата

$$f(\alpha_{12.34...n}, ..., \alpha_{1n.23...(n-1)}) = E(X_1 - \alpha_{12.34...n} X_2 - ... - \alpha_{1n.23...(n-1)} X_n)^2 \quad (2)$$

има минимум. При таков избор на $\alpha_{12.34...n}, \alpha_{13.24...n}, ..., \alpha_{1n.23...(n-1)}$ функцијата (1) дава најдобра линеарна оценка на случајната променлива X_1, која ја нарекуваме *линеарна* (*множествена*) *регресија на случајната променлива* X_1 *по случајните променливи* $X_2, X_3, ..., X_n$. Коефициентите $\alpha_{12.34...n}, \alpha_{13.24...n}, ..., \alpha_{1n.23...(n-1)}$ ги нарекуваме *коефициенти на множествената регресија* или *парцијални коефициенти на регресија*. Секој од овие коефициенти има n индекси, при што првите два од останатите се одделени со точка. Првиот индекс укажува на случајната променлива за која се разгледува регресијата, а вториот индекс на случајната променлива која влегува во равенката на регресијата. Во некои разгледувања ќе ги испуштаме индексите кои се наоѓаат после точката, на пример, наместо $\alpha_{12.34...n}$ ќе пишуваме α_{12} и слично.

За да ги определиме коефициентите $\alpha_{1i}, i = 2, 3, ..., n$ ги наоѓаме парцијалните изводи $\frac{\partial f}{\partial \alpha_{1i}}, i = 2, 3, ..., n$ и го решаваме системот равенки

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha_{1i}} = 0, i = 2, 3, ..., n,$$

кој со елементарни трансформации се сведува на системот равенки

$$\begin{cases} \mu_{22}\alpha_{12} + \mu_{23}\alpha_{13} + ... + \mu_{2n}\alpha_{1n} = \mu_{21}, \\ \mu_{32}\alpha_{12} + \mu_{33}\alpha_{13} + ... + \mu_{3n}\alpha_{1n} = \mu_{31}, \\ .... \\ \mu_{n2}\alpha_{12} + \mu_{n3}\alpha_{13} + ... + \mu_{nn}\alpha_{1n} = \mu_{n1}, \end{cases} \quad (3)$$

каде

$$\mu_{ij} = E(X_i X_j) - E(X_i)E(X_j) = E(X_i X_j),$$

бидејќи по претпоставка зедовме дека

$$E(X_i) = m_i = 0, \; i = 1, 2, ..., n.$$

Понатаму, ако

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} \mu_{22} & \mu_{23} & \cdots & \mu_{2n} \\ \mu_{32} & \mu_{33} & \cdots & \mu_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mu_{n2} & \mu_{n3} & \cdots & \mu_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

тогаш системот (3) има единствено решение. Може да се докаже дека $\Delta_{11} \neq 0$ ако и само ако

$$\Delta = \begin{vmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \cdots & \mu_{1n} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \cdots & \mu_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mu_{n1} & \mu_{n2} & \cdots & \mu_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

и притоа системот (3) има единствено решение, кое го определуваме со формулите

$$\alpha_{1k} = -\frac{\Delta_{1k}}{\Delta_{11}}, \; k = 2,3,\ldots,n, \tag{4}$$

каде Δ_{ij} е алгебарскиот комплемент на елементот μ_{ij} во детерминантата Δ.

Забелешка 22. а) Ако случајните променливи $X_1, X_2, \ldots, X_n$ се некорелирани, т.е. ако $\mu_{ij} = 0$, за $i \neq j$, тогаш од (3) следува дека $\alpha_{1k} = 0,$ за $k = 2,3,\ldots,n$.

б) Очигледно претходните размислувања за случајната променлива X_1 важат за секоја од случајните променливи $X_2, X_3, \ldots, X_n$, што значи дека можеме да најдеме линеарна (множествена) регресија на случајната променлива X_i по случајните променливи $X_1, \ldots, X_{i-1}, X_{i+1}, \ldots, X_n$.

Дефиниција 24. Случајната променлива

$$Y_{1.23\ldots n} = X_1 - \alpha_{12} X_2 - \alpha_{13} X_3 - \ldots - \alpha_{1n} X_n$$

ја нарекуваме *остаток на случајната променлива* X_1 *во однос на случајните променливи* $X_2, X_3, \ldots, X_n$.

Ќе докажеме дека остатокот $Y_{1.23\ldots n}$ е некорелиран со секоја од случајните променливи $X_2, X_3, \ldots, X_n$. Прво да забележиме дека

$$E(Y_{1.23\ldots n}) = E(X_1) - \alpha_{12} E(X_2) - \alpha_{13} E(X_3) - \ldots - \alpha_{1n} E(X_n) = 0,$$

па затоа за секој $k = 2,3,\ldots,n$ важи

$$\begin{aligned} \operatorname{cov}(X_k, Y_{1.23\ldots n}) &= E(X_k Y_{1.23\ldots n}) - E(X_k) E(Y_{1.23\ldots n}) = E(X_k Y_{1.23\ldots n}) \\ &= E(X_k (X_1 - \alpha_{12} X_2 - \alpha_{13} X_3 - \ldots - \alpha_{1n} X_n)) \\ &= E(X_k X_1) - \alpha_{12} E(X_k X_2) - \alpha_{13} E(X_k X_3) - \ldots - \alpha_{1n} E(X_k X_n) \\ &= \mu_{k1} - \mu_{k2}\alpha_{12} - \mu_{k3}\alpha_{13} - \ldots - \mu_{kn}\alpha_{1n} = 0, \end{aligned}$$

што значи дека случајната променлива $Y_{1.23\ldots n}$ е некорелирана со секоја од случајните променливи $X_2, X_3, \ldots, X_n$. Значи, системот равенки (3) е еквивалентен на условот за некорелираност на случајната променлива $Y_{1.23\ldots n}$ со секоја од случајните променливи $X_2, X_3, \ldots, X_n$. Според тоа, барањето за наоѓање најмала дисперзија на случајната променлива

$$X_1 - \alpha_{12} X_2 - \alpha_{13} X_3 - \ldots - \alpha_{1n} X_n$$

е еквивалентно на барањето за нејзина некорелираност со секоја од случајните променливи $X_2, X_3, \ldots, X_n$.

Дефиниција 25. Математичкото очекување

$$E(Y_{1.23...n}^2) = \sigma_{1.23...n}^2$$

го нарекуваме *остаточна дисперзија на случајната променлива* X_1 *во однос на случајните променливи* $X_2, X_3, ..., X_n$.

Ќе ја определиме $\sigma_{1.23...n}^2$. Од $E(X_k Y_{1.23...n}) = 0$, за секој $k = 2,3,...,n$ и од равенствата (4) следува

$$\begin{aligned}\sigma_{1.23...n}^2 &= E(Y_{1.23...n}^2) = E((X_1 - \alpha_{12}X_2 - \alpha_{13}X_3 - ... - \alpha_{1n}X_n)Y_{1.23...n}) \\ &= E(X_1 Y_{1.23...n}) - \alpha_{12}E(X_2 Y_{1.23...n}) - \alpha_{13}E(X_3 Y_{1.23...n}) - ... - \alpha_{1n}E(X_n Y_{1.23...n}) \\ &= E(X_1 Y_{1.23...n}) = E(X_1(X_1 - \alpha_{12}X_2 - \alpha_{13}X_3 - ... - \alpha_{1n}X_n) \\ &= E(X_1X_1) - \alpha_{12}E(X_1X_2) - \alpha_{13}E(X_1X_3) - ... - \alpha_{1n}(X_1X_n) \\ &= \mu_{11} - \alpha_{12}\mu_{12} - \alpha_{13}\mu_{13} - ... - \alpha_{1n}\mu_{1n} \\ &= \mu_{11} + \frac{\Delta_{12}}{\Delta_{11}}\mu_{12} + \frac{\Delta_{13}}{\Delta_{11}}\mu_{13} + ... + \frac{\Delta_{1n}}{\Delta_{11}}\mu_{1n} \\ &= \frac{\mu_{11}\Delta_{11} + \mu_{12}\Delta_{12} + \mu_{13}\Delta_{13} + ... + \mu_{1n}\Delta_{1n}}{\Delta_{11}} = \frac{\Delta}{\Delta_{11}},\end{aligned}$$

т.е.

$$\sigma_{1.23...n}^2 = \frac{\Delta}{\Delta_{11}} . \tag{5}$$

Да ја разгледаме случајната променлива X_1 и нејзината линеарна регресија по случајните променливи $X_2, X_3, ..., X_n$:

$$X_1^* = \alpha_{12}X_2 + \alpha_{13}X_3 + ... + \alpha_{1n}X_n .$$

Притоа коефициентот на корелација меѓу X_1 и X_1^* можеме да го земеме за мерка на зависноста меѓу случајната променлива X_1 и севкупноста случајни променливи $X_2, X_3, ..., X_n$. Коефициентот на корелација $\rho(X_1, X_1^*) = \rho_{1(23...n)}$ го нарекуваме *мешан коефициент на корелација меѓу случајната променлива* X_1 *и севкупноста случајни променливи* $X_2, X_3, ..., X_n$. Понатаму, од $E(X_1) = 0$ и $E(X_1^*) = 0$ следува

$$D(X_1) = E(X_1^2)\,,\ D(X_1^*) = E(X_1^{*2})\,,\ \mathrm{cov}(X_1, X_1^*) = E(X_1X_1^*)$$

па затоа

$$\rho_{1(23...n)} = \frac{E(X_1X_1^*)}{\sqrt{E(X_1^2)}\sqrt{E(X_1^{*2})}} . \tag{6}$$

Но, $X_1 = X_1^* + Y_1$ и како $E(X_1Y_1) = \frac{\Delta}{\Delta_{11}}$ наоѓаме

$$E(X_1X_1^*) = E(X_1(X_1 - Y_1)) = E(X_1^2) - E(X_1Y_1) = \mu_{11} - \frac{\Delta}{\Delta_{11}} ,$$

$$E(X_1^{*2}) = E(X_1^2) - 2E(X_1Y_1) + E(Y_1^2) = \mu_{11} - 2\frac{\Delta}{\Delta_{11}} + \frac{\Delta}{\Delta_{11}} = \mu_{11} - \frac{\Delta}{\Delta_{11}} ,$$

и ако замениме во (6) добиваме $\rho_{1(23...n)} = \pm\sqrt{1-\frac{\Delta}{\mu_{11}\Delta_{11}}}$.

Забелешка 23. Мешаниот коефициент на корелација всушност е обичен коефициент на корелација на случајните променливи X_1 и X_1^* , па затоа за него важат сите познати својства на коефициентот на корелација, како на пример $|\rho_{1(23...n)}| \leq 1$. Може да се докаже дека $\rho_{1(23...n)}$ го има следново екстремално својство.

> *Меѓу сите коефициенти на корелација на случајната променлива X_1 со линеарни функции на случајните променливи $X_2, X_3, ..., X_n$ најголем е коефициентот на корелација меѓу X_1 и X_1^*, т.е. $\rho_{1(23...n)}$.*

Да ги разгледаме линеарните регресии на случајните променливи X_1 и X_2 во однос на случајните променливи $X_3, X_4, ..., X_n$. Ако ги прифатиме претходно воведените ознаки добиваме

$$X_1 = \alpha_{13.45...n}X_3 + \alpha_{14.35...n}X_4 + ... + \alpha_{1n.34...(n-1)}X_n + Y_{1.34...n},$$
$$X_2 = \alpha_{23.45...n}X_3 + \alpha_{24.35...n}X_4 + ... + \alpha_{2n.34...(n-1)}X_n + Y_{2.34...n}.$$

Коефициентот на корелација меѓу остатоците $Y_{1.34...n}$ и $Y_{2.34...n}$ можеме да го разгледуваме како карактеристика на корелацијата на случајните променливи X_1 и X_2 откако од нив ќе ги отстраниме најдобрите линеарни оценки со случајните променливи $X_3, X_4, ..., X_n$. Овој коефициент на корелација го нарекуваме *парцијален коефициент на корелација на случајните променливи X_1 и X_2 во однос на променливите $X_3, X_4, ..., X_n$*. Притоа пишуваме

$$\rho_{12.34...n} = \rho(Y_{1.34...n}, Y_{2.34...n}).$$

Забелешка 24. Парцијалниот коефициент на корелација всушност е обичен коефициент на корелација на случајни променливи $Y_{1.34...n}$ и $Y_{2.34...n}$, па затоа за него важат познатите својства на коефициентот на корелација, како на пример $|\rho_{12.34...n}| \leq 1$.

За наоѓање на парцијалниот коефициент на корелација ќе ја искористиме формулата (5) применета кон фамилиите од $(n-1)$-случајна променлива $X_1, X_3, ..., X_n$ и $X_2, X_3, ..., X_n$. Имаме

$$\begin{aligned} \sigma^2_{1.34...n} &= E(Y^2_{1.34...n}) = E(X_1 Y_{1.34...n}) = \frac{\Delta_{22}}{\Delta_{22.11}}, \\ \sigma^2_{2.34...n} &= E(Y^2_{2.34...n}) = E(X_2 Y_{2.34...n}) = \frac{\Delta_{11}}{\Delta_{11.22}}, \end{aligned} \tag{7}$$

каде со Δ_{11} и Δ_{22} се означени алгебарските комплементи на елементите μ_{11} и μ_{22} на детерминантата Δ, соодветно, а со $\Delta_{11.22}$, односно $\Delta_{22.11}$ е означен алгебарскиот комплемент на елементот μ_{22} во детерминантата Δ_{11}. Од некорелираноста на остатокот $Y_{2.34...n}$ со случајните променливи $X_3, X_4,..., X_n$ и ако ги искористиме формулите за $\alpha_{23.45...n}$, $\alpha_{24.35...n}$, ..., $\alpha_{2n.34...(n-1)}$ аналогни на формулите (4) добиваме

$$\begin{aligned} E(Y_{1.34...n}Y_{2.34...n}) &= E(X_1Y_{2.34...n}) = E(X_1(X_2-\alpha_{23.45...n}X_3+...+\alpha_{2n.34...(n-1)}X_n)) \\ &= E(X_1X_2)-\alpha_{23.45...n}E(X_1X_3)-...-\alpha_{2n.34...(n-1)}E(X_1X_n) \\ &= \mu_{12}+\mu_{13}\frac{\Delta_{11.23}}{\Delta_{11.22}}+\mu_{14}\frac{\Delta_{11.24}}{\Delta_{11.22}}+...+\mu_{1n}\frac{\Delta_{11.2n}}{\Delta_{11.22}} \\ &= \frac{\mu_{12}\Delta_{11.22}+\mu_{13}\Delta_{11.23}+\mu_{14}\Delta_{11.24}+...+\mu_{1n}\Delta_{11.2n}}{\Delta_{11.22}} \\ &= -\frac{\Delta_{21}}{\Delta_{11.22}} = -\frac{\Delta_{12}}{\Delta_{11.22}}, \end{aligned}$$

т.е.

$$E(Y_{1.34...n}Y_{2.34...n}) = -\frac{\Delta_{21}}{\Delta_{11.22}} = -\frac{\Delta_{12}}{\Delta_{11.22}}, \qquad (8)$$

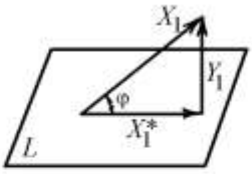
каде за секој $k = 2,3,...,n$ со $\Delta_{11.2k}$ е означен алгебарскиот комплемент на елементот μ_{2k} во детерминантата Δ_{11}. Притоа, бидејќи $\mu_{ij} = \mu_{ji}$, за секои $i, j = 1,2,...,n$ добиваме дека $\Delta_{12} = \Delta_{21}$. Конечно, ако ги искористиме формулите (7) и (8) наоѓаме

$$\rho_{12.34...n} = \frac{E(Y_{1.34...n}Y_{2.34...n})}{\sqrt{\sigma^2_{1.34...n}}\sqrt{\sigma^2_{2.34...n}}} = -\frac{\Delta_{12}}{\sqrt{\Delta_{11}\Delta_{22}}}. \qquad (9)$$

Забелешка 25. Ако случајните променливи $X_1, X_2,..., X_n$ се некорелирани, тогаш од последното равенство следува дека сите парцијални коефициенти на корелација се еднакви на нула. Ако пак случајните променливи $X_1, X_2,..., X_n$ се корелирани, тогаш во општ случај $\rho(X_1, X_2) \neq \rho_{12.34...n}$.

Воведените поими и добиените резултати во оваа точка имаат своја геометриска интерпретација. Да го разгледаме векторот X_1 и линеарната обвивка $\mathbf{L}$ на векторите $X_2,..., X_n$. Векторот X_1 го проектираме на линеарната обвивка $\mathbf{L}$, т.е. го претставуваме во видот

$$X_1 = \alpha_{12}X_2 + \alpha_{13}X_3 + ... + \alpha_{1n}X_n + Y_1, \qquad (10)$$



Цртеж 13

каде $X_1^* = \alpha_{12}X_2 + \alpha_{13}X_3 + ... + \alpha_{1n}X_n \in \mathbf{L}$, а $Y_1 \perp \mathbf{L}$, т.е. векторот Y_1 е ортогонален на сите елементи на линеарната обвивка $\mathbf{L}$, цртеж 29. Понатаму, векторот Y_1 е ортогонален на сите елементи на линеарната обвивка $\mathbf{L}$ ако и само ако Y_1 е ортогонален на векторите $X_2, X_3,..., X_n$. Векторот X_1^* го нарекуваме *проекција на векторот* X_1 *на линеарната обвивка* $\mathbf{L}$, а векторот Y_1 го *нарекуваме нормала спуштена од крајот на* X_1 *кон* $\mathbf{L}$. Ако равенството (10) скаларно го помножиме со секој од векторите $X_2, X_3,..., X_n$ го добиваме следниов систем линеарни равенки

$$\begin{cases} \mu_{12} = \alpha_{12}\mu_{22} + \alpha_{13}\mu_{32} + \ldots + \alpha_{1n}\mu_{n2}, \\ \mu_{13} = \alpha_{12}\mu_{23} + \alpha_{13}\mu_{33} + \ldots + \alpha_{1n}\mu_{n3}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mu_{1n} = \alpha_{12}\mu_{2n} + \alpha_{13}\mu_{3n} + \ldots + \alpha_{1n}\mu_{nn}, \end{cases}$$

од кој ги наоѓаме коефициентите $\alpha_{12}, \alpha_{13}, ..., \alpha_{1n}$. Но, $\mu_{ij} = \mu_{ji}$, за секои $i, j = 1, ..., n$, што значи дека повторно го добивме системот (3). Според тоа, коефициентите на бараната линеарна комбинација, која е проекција на векторот X_1 на линеарната обвивка $\mathbf{L}$ на векторите $X_2, X_3, ..., X_n$ всушност се коефициентите на линеарната регресија на случајната променлива X_1 по случајните променливи $X_2, X_3, ..., X_n$, а *случајната променлива* X_1^* *која е регресија на* X_1 *по случајните променливи* $X_2, X_3, ..., X_n$ *всушност е еднаква на проекцијата на векторот* X_1 *на линеарната обвивка* $\mathbf{L}$ *на векторите* $X_2, X_3, ..., X_n$. Остатокот Y_1 е еднаков на нормалата спуштена од крајот на векторот X_1 на линеарната обвивка $\mathbf{L}$. Но, нормалата има најкратко растојание, па затоа

$$E(Y_1^2) = E(X_1 - \alpha_{12}X_2 - \alpha_{13}X_3 - \ldots - \alpha_{1n}X_n)^2$$

е минимално ако $\alpha_{12}, \alpha_{13}, ..., \alpha_{1n}$ се коефициентите на линеарната регресија на случајната променлива X_1 по случајните променливи $X_2, X_3, ..., X_n$. Значи, остаточната дисперзија е еднаква на квадратот на должината на нормалата Y_1. Од Питагоровата теорема следува

$$\| X_1 \|^2 = \| X_1^* \|^2 + \| Y_1 \|^2,$$

односно

$$\| Y_1 \|^2 = \sigma_{1.23...n}^2 = \mu_{11} - \| X_1^* \|^2 .$$

Мешаниот коефициент на корелација, кој е еднаков на коефициентот на корелација меѓу X_1 и X_1^* е еднаков на косинусот на аголот φ меѓу векторите X_1 и X_1^*. Понатаму, како што е познато од линеарна алгебра, меѓу сите линеарни комбинации на векторите $X_2, X_3, ..., X_n$ најмал агол φ со векторот X_1 формира проекцијата на векторот X_1 на линеарната обвивка $\mathbf{L}$ на овие вектори. Јасно, притоа $\cos\varphi$ достигнува најголема вредност, што всушност е тврдењето од забелешка 23.

Парцијалниот коефициент на корелација $\rho_{12.34...n}$ на случајните променливи X_1 и X_2 по случајните променливи $X_3, X_4, ..., X_n$, кој еднаков на коефициентот на корелација меѓу остатоците $Y_{1.34...n}$ и $Y_{2.34...n}$, е еднаков на косинусот од аголот меѓу нормалите спуштени од краевите на векторите X_1 и X_2 на линеарната обвивка на векторите $X_3, X_4, ..., X_n$.

ЗАДАЧИ

1. Дискретната дводимензионална случајна променлива (X,Y) има функција на распределба:

$Y \setminus X$	$x<1$	$1 \le x < 3$	$3 \le x < 5$	$x \ge 5$
$y<1$	0	0	0	0
$1 \le y < 4$	0	0,025	0,025	0,25
$4 \le y < 7$	0	0,075	0,075	0,75
$y \ge 7$	0	0,025	0,425	1

   a) Најдете го законот на распределба на веројатностите.
   b) Пресметајте го коефициентот на корелација $\rho(X,Y)$.
   c) Дали случајните променливи X и Y се независни?

2. Дводимензионалната случајна променлива (X,Y) е зададена со таблицата:

$Y \setminus X$	0	1	2	3
0	0,12	0,10	0,08	0,10
1	0,09	0,10	0,06	0,05
2	0,06	0,07	0,04	0,03
3	0,03	0,03	0,02	0,02

   a) Пресметајте го коефициентот на корелација $\rho(X,Y)$.
   b) Дали случајните променливи X и Y се независни?
   c) Најдете ја равенката на линеарна регресија на X по Y .
   d) Пресметајте ја дисперзијата на случајната променлива $Z = X^2 + 2Y$

3. Дводимензионалната случајна променлива (X,Y) е зададена со таблицата:

$Y \setminus X$	-1	0	1	4
-1	$\frac{3}{40}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{5}{40}$	$\frac{2}{40}$
0	$\frac{7}{40}$	$\frac{4}{40}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{40}$
1	0	$\frac{2}{40}$	$\frac{8}{40}$	$\frac{6}{40}$

   a) Пресметајте го коефициентот на корелација $\rho(X,Y)$.
   b) Дали случајните променливи X и Y се независни?
   c) Пресметајте ја дисперзијата на случајната променлива $Z = X + Y$.
   d) Најдете ја равенката на линеарна регресија на Y по X .

4. Дводимензионалната случајна променлива (X,Y) е зададена со таблицата:

$Y \setminus X$	1	2	3
-4	0,25	0,05	0,10
0	0,10	0,05	0,15
7	0,15	0,10	0,05

   a) Пресметајте го коефициентот на корелација $\rho(X,Y)$.
   b) Дали случајните променливи X и Y се независни?
   c) Пресметајте ја дисперзијата на случајната променлива $Z = X + Y$.
   d) Најдете ја равенката на линеарна регресија на X по Y .

5. Во еден трговски центар се анализира продажбата на видорекордери. Податоците за бројот на продадените видеорекордери и одделните продавачи на одделот за техничка роба во текот на 400 работни денови се дадени во следнава табела:

Број на продадени видорекордери	Број на продавач		
	1	2	3
0	13	17	10
1	24	39	50
2	12	35	43
3	16	44	40
4	6	34	17

a) Определете го законот на веројатност и најдете ги маргиналните закони на веројатност за дводимензионалната случајна променлива: *број на продавач и број на продадени видеорекордери.*
b) Дали случајните променливи се независни?
c) Пресметајте го коефициентот на корелација.
d) Најдете ги равенките на линеарна регресија.

6. Пресметајте го коефициентот на корелација меѓу случајните променливи X и X^2, ако $P\{X=0\}=\frac{1}{3}$, $P\{X=1\}=\frac{1}{2}$ и $P\{X=-1\}=\frac{1}{6}$.

7. Случајните променливи $X_1, X_2, ..., X_{n+m}$, $n>m$ се независни, еднакво распределени и имаат конечни дисперзии. Најдете го коефициентот на корелација меѓу сумите
$$X_1+X_2+...+X_n \text{ и } X_{m+1}+X_{m+2}+...+X_{m+n}.$$

8. Пресметајте $\operatorname{cov}(Z,X)$, каде $Z=2X-Y$ и X и Y се независни случајни променливи.

9. Докажете дека $\rho^2(X,Z)+\rho^2(Y,Z)=1$, ако X и Y се независни случајни променливи и $Z=X+Y$.

10. Нека X и Y се случајни променливи и $a,b,c\in\mathbf{R}$ се такви што $aX+bY=c$. Најдете ги коефициентот на корелација $\rho(X,Y)$ и коефициентите на линеарна регресија на X по Y и на Y по X.

11. Случајните променливи $X_i, i=1,2,...,n$ се по парови некорелирани и имаат еднаква дисперзија s^2. Пресметајте $\operatorname{cov}(Y,Z)$, каде $Y=\sum_{i=1}^{n}2^i X_i$ и $Z=\sum_{i=1}^{n}3^i X_i$.

12. За случајниот вектор (X,Y) важи: $D(X)=2, D(Y)=4$ и $\operatorname{cov}(X,Y)=1$. Најдете таква линеарна комбинација Z на случајните променливи X и Y, така што $D(X)=D(Z)$ и $\operatorname{cov}(X,Z)=0$.

13. Нека X и Y се случајни променливи такви, што $E(X)=E(Y)=0$, $D(X)=D(Y)=1$ и коефициент на корелација ρ. Докажете дека
$$E(\max\{X^2,Y^2\})\le 1+\sqrt{1-\rho^2}.$$

14. Нека $X_1, X_2, ..., X_n$ се независни и еднаквораспределени случајни променливи и нека за секоја од нив централниот момент од трет ред е еднаков на нула. Докажете дека случајните променливи
$$Y=\sum_{i=1}^{n}X_i \text{ и } Z=\sum_{i=1}^{n}(X_i-Y)^2$$
се некорелирани.

15. Случајниот вектор (X,Y) има матрица на коваријанси A. Определете ги сите вредности на параметрите a и b такви, што случајниот вектор (U,V) каде $U=aX+bY$ и $V=aX-bY$ да има матрица на коваријанси B:

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2\\ -2 & 4\end{bmatrix} \text{ и } B=\begin{bmatrix}9 & -3\\ -3 & 1\end{bmatrix}.$$

16. Матрицата на коваријанси на случајниот вектор (X,Y,Z) е
$$B=\begin{bmatrix}2 & 1 & -2\\ 1 & 3 & -3\\ -2 & -3 & 4\end{bmatrix}.$$
Пресметајте $\operatorname{cov}(U,V)$, каде $U = X+Y+Z$ и $V = X+2Y+3Z$.

17. Пресметајте ја матрицата на коваријанси на случајниот вектор (X,Y) ако:
$$U = X+Y,\ V = X-Y,\ \operatorname{cov}(U,V)=1,\ \operatorname{cov}(X,U)=5 \text{ и } \operatorname{cov}(X,V)=-1.$$

18. Случајниот вектор (U,V) има математичко очекување $(2,-3)$ и матрица на коваријанси
$$\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 3\end{bmatrix}.$$
Пресметајте го математичкото очекување и матрицата на коваријанси на случајниот вектор (X,Y), каде $X = 2U+V$, $Y = U-V$.

19. Докажете дека остатокот $Y_{1.23...n}$ на случајната променлива X_1 во однос на случајните променливи $X_2, X_3, ..., X_n$ е еднаков на остатокот на случајната променлива $Y_{1.23...(n-1)}$ во однос на случајната променлива $Y_{n.23...(n-1)}$.

11. ГРАНИЧНИ ТЕОРЕМИ ЗА БИНОМНАТА РАСПРЕДЕЛБА

Практиката покажува дека Бернулиевата шема, односно биномната распределба, која го дава бројот на успесите X при n независни испитувања во Бернулиевата шема е една од најчесто среќаваните дискретни распределби. Токму затоа во овој дел ќе разгледаме неколку својства на биномната распределба, кои се исполнети при соодветни услови на нејзините параметри n и p.

11.1. ТЕОРЕМА НА ПОАСОН

Во претходните разгледувања ја воведовме биномната распределба за бројот на успесите Y при n независни испитувања во Бернулиевата шема. Притоа ако веројатноста на успехот во секое испитување е p имаме

$$P\{Y=m\} = C_n^m p^m q^{n-m}, \quad m = 0,1,...,n;\ q = 1-p. \qquad (1)$$

Формулата (1) се запишува доста компактно, меѓутоа самото пресметување на веројатностите не е така едноставно, бидејќи имаме три влезни параметри p, m и n. Тешкотиите се наголемуваат ако сакаме да ја пресметаме веројатноста

$$P\{m_1 \le Y \le m_2\} = \sum_{m=m_1}^{m_2} C_n^m p^m q^{n-m}, \qquad (2)$$

која зависи од четири параметри p, n, m_1 и m_2.

Бидејќи шемата на независни испитувања е веројатностен модел на многу реални случајни појави, од посебен интерес е да се најдат асимптотски формули, со чија помош може приближно да се пресметаат веројатностите (1) и (2) при големи вредности на n, m, m_1 и m_2. Во натамошните разгледувања овие формули ќе ги определиме со граничните теореми. На почетокот ќе го разгледаме случајот за големи вредности на n и мали вредности на p.

Теорема 35 (Поасон). Нека за секој $n \in \mathbf{N}$ случајната променлива X_n има биномна распределба $B\{n, p_n\}$ и нека $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} np_n = a$, каде a е фиксиран позитивен реален број. Тогаш за секој $m = 0,1,...$ важи

$$\lim_{n\to\infty} P\{X_n = m\} = \lim_{n\to\infty} C_n^m p_n^m q_n^{n-m} = \frac{a^m}{m!} e^{-a}. \tag{3}$$

Доказ. Ставаме $np_n = a_n, n \in \mathbf{N}$. Тогаш $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, па за секој $m = 0,1,2,...$ имаме

$$\begin{aligned} P\{X_n = m\} &= C_n^m p_n^m q_n^{n-m} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{m!} (\tfrac{a_n}{n})^m (1 - \tfrac{a_n}{n})^{n-m} \\ &= \frac{a_n^m}{m!} (1 - \tfrac{a_n}{n})^{n-m} (1 - \tfrac{1}{n})(1 - \tfrac{2}{n})...(1 - \tfrac{m-1}{n}). \end{aligned} \tag{4}$$

Но, $\lim\limits_{n\to\infty} mp_n = 0$, за секој $m = 0,1,...$, па затоа

$$\lim_{n\to\infty} (1 - \tfrac{a_n}{n})^{n-m} = \lim_{n\to\infty} [(1 - \tfrac{1}{p_n})^{-\frac{1}{p_n}}]^{-p_n n + mp_n} = e^{-a}, \text{ за секој } m = 0,1,... .$$

и како $\lim\limits_{n\to\infty} (1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n})...(1 - \frac{m-1}{n}) = 0$, од равенството (4) следува равенството (3). ♦

Забелешка 26. Од теорема 35 не е јасно како формулата (3) може да се искористи во конкретни ситуации. Едноставно кажано од теорема 35 следува дека за големи вредности на n и мали вредности на p_n следува дека

$$P\{X_n = m\} \approx \frac{a_n^m}{m!} e^{-a_n}, \quad a_n = np_n, m = 0,1,2,...,n. \tag{5}$$

Формулата (5) обично се применува ако $n \geq 20$ и $np_n < 10$.

Пример 54. При стрелање со пушка целта може да се погоди со веројатност 0,001. Колкава е веројатноста при серија од 5000 независни стрелања од пушката целта да биде погодена:

а) точно два пати, б) целта да биде погодена најмалку два пати.

Решение. Станува збор за Биномна распределба со $p_n = 0{,}001$ и $n = 5000$. Бидејќи p_n има вредност блиска до 0, а n има доволно голема вредност од теоремата на Поасон следува дека е точна приближната формула (5). Од $a_n = np_n = 5$ и приближната формула (5) добиваме:

а) $P\{X_n = 2\} \approx \frac{5^2}{2!} e^{-5} \approx 0,0842$;

б) треба да се најде $\sum_{i=2}^{5000} P\{X_n = i\}$ и како $\sum_{i=0}^{5000} P\{X_n = i\} = 1$ имаме

$\sum_{i=2}^{5000} P\{X_n = i\} = 1 - P\{X_n = 0\} - P\{X_n = 1\} \approx 1 - e^{-5} - 5e^{-5} \approx 0,9596$. ♦

Забелешка 27. Приближната формула (5) може да се примени и во случај кога веројатноста p на настанот A е блиска до 1. Имено, ако со $P'\{X_n = m\}$ ја означиме веројатноста во серија од n независни експерименти случајниот настан $\overline{A}$ да се реализира m пати, тогаш $P\{X_n = n - m\} = P'\{X_n = m\}$. За последнава веројатност, при доволно големи вредности на n, формулата (5) е применлива бидејќи веројатноста $P(\overline{A})$ ќе биде блиска до 0, па затоа може да се пресмета $P'\{X_n = m\}$, што значи и $P\{X_n = n - m\}$.

Може да се докаже дека во формулата (3) важи следнава оценка

$$| P\{X_n = m\} - \frac{a^m}{m!} e^{-a} | \le \frac{a^2}{n}, \; a = np . \qquad (6)$$

Ќе докажеме дека важи посилно тврдење во поопшта шема независни испитувања. Да разгледаме n независни испитувања со различни веројатности во различните испитувања. Со p_i да ја означиме веројатноста за успех, а со $q_i = 1 - p_i$ веројатноста за неуспех во $i -$то испитување. Распределбата X_n на бројот на успесите при n испитувања да ја означиме со

$$P\{X_n = m\} = P_n(m) = P_n(m; p_1, ..., p_n) . \qquad (6)$$

Ваквата шема на независни испитувања со различни p_i ја нарекуваме *Поасонова шема*, која при $p_i = p, i = 1, 2, ..., n$ преминува во Бернулиевата шема. Веројатностите $P\{X_n = m\}$ во Поасоновата шема не можат да се запишат со еден израз како кај Бернулиевата шема. Така,

$$P\{X_n = 0\} = q_1 q_2 ... q_n ,$$

$$P\{X_n = 1\} = p_1 q_2 ... q_n + q_1 p_2 q_3 ... q_n + ... + q_1 q_2 ... q_{n-1} p_n ,$$

....

$$P\{X_n = n\} = p_1 p_2 ... p_n ,$$

$$P\{X_n = m\} = 0 , \text{ за } m < 0 \text{ и } m > n .$$

каде

$$q_i = 1 - p_i , i = 1, 2, ..., n .$$

Да означиме

$$\Pi(m, a) = \frac{a^m}{m!} e^{-a} . \qquad (7)$$

Точна е следнава теорема.

Теорема 36. Во Поасоновата шема за секој природен број n, секои веројатности $p_i, i=1,2,...,n$ и секое множество $B \subseteq \mathbf{R}$ е исполнето неравенството

$$|P\{X_n \in B\} - \sum_{m \in B} \Pi(m,a)| \leq \sum_{i=1}^{n} p_i^2 \, . \tag{8}$$

каде $a = \sum_{i=1}^{n} p_i$.

Доказ. Формулата (7) ги дава веројатноста $\Pi(m,a)$, $m = 0,1,2,3,...$ на Поасоновата распределба за кои важи $\sum_{m=0}^{\infty} \Pi(m,a) = 1$. Ќе докажеме дека левата страна на неравенството (8) е помала или еднаква од V_n, каде

$$V_n = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} | P_n(m; p_1, p_2,..., p_n) - \Pi(m,a) | \, .$$

Множеството ненегативни цели броеви ќе го разбиеме на две множества. Ставаме $m \in B^+$, ако $P_n(m) > \Pi(m,a)$ и $m \in B^-$ во останатите случаи. Да означиме

$$\sum{}^{+} = \sum_{m \in B^+} (P_n(m) - \Pi(m,a)) \, ,$$

$$\sum{}^{-} = \sum_{m \in B^-} (P_n(m) - \Pi(m,a)) \, .$$

Понатаму, бидејќи $\sum_{m=0}^{\infty} P_n(m) = \sum_{m=0}^{\infty} \Pi(m,a) = 1$, добиваме

$$0 = \sum_{m=0}^{\infty} (P_n(m) - \Pi(m,a)) = \sum{}^{+} + \sum{}^{-} \, ,$$

па затоа $\sum{}^{+} = -\sum{}^{-}$, од што следува дека

$$V_n = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} | P_n(m) - \Pi(m,a) | = \sum{}^{+} \, .$$

Од друга страна, за секое множество $B \subseteq \mathbf{R}$ имаме

$$| \sum_{m \in B} (P_n(m) - \Pi(m,a)) | \leq \max\{ \sum_{m \in B \cap B^+} (P_n(m) - \Pi(m,a)), \; | \sum_{m \in B \cap B^-} (P_n(m) - \Pi(m,a)) | \}$$

$$\leq \sum{}^{+} = V_n .$$

Според тоа, за да го докажеме неравенството (8) доволно е да докажеме дека

$$V_n \leq \sum_{i=1}^{n} p_i^2 \, . \tag{9}$$

Последното неравенство ќе го докажеме со индукција. За $n = 1$ и $p_1 = p$ имаме

$$| P_1(0; p) - \Pi(0; p) | = e^{-p} + p - 1,$$

$$| P_1(1; p) - \Pi(1; p) |= p - pe^{-p},$$
$$| P_1(m; p) - \Pi(m; p) |= \frac{p^m}{m!} e^{-p}, \ m \geq 2 .$$

Сега од претходните равенства и од неравенството $0 \leq 1 - e^{-x} \leq x$, за $x \geq 0$ следува

$$V_n = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} | P_n(m; p) - \Pi(m, p) | = \frac{1}{2}(-1 + p + e^{-p} + p - pe^{-p} + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{p^m}{m!} e^{-p}) \qquad (10)$$
$$= p(1 - e^{-p}) \leq p^2.$$

Понатаму, ако ја искористиме формулата за полна веројатност добиваме

$$P_n(m; p_1, ..., p_n) = P_{n-1}(m; p_1, ..., p_{n-1}) P_1(0; p_n) + P_{n-1}(m-1; p_1, ..., p_{n-1}) P_1(1; p_n)$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty} P_{n-1}(m-k) P_1(k; p_n), \qquad (11)$$

и за секои $a_1 \geq 0, a_2 \geq 0$

$$\Pi(m; a_1 + a_2) = \sum_{k=0}^{n} \Pi(m-k; a_1) \Pi(k; a_2) . \qquad (12)$$

Да означиме $a_n = \sum_{k=1}^{n} p_k$, $A_n = \sum_{k=1}^{n} p_k^2$. Да претпоставиме дека

$$V_{n-1} \leq A_{n-1}. \qquad (13)$$

Користејќи ги формулите (10) – (13), ќе дадеме оценка на V_n . Имаме

$$V_n = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} | P_n(m; p) - \Pi(m, p) |$$
$$= \frac{1}{2} \sum_{m} | \sum_{k} P_{n-1}(m-k) P_1(k; p_n) - \sum_{k} \Pi(m-k, a_{n-1}) \Pi(k, p_n) |$$
$$\leq \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{m} | P_{n-1}(m-k) - \Pi(m-k, a_{n-1}) | P_1(k; p_n) +$$
$$+ \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{m} \Pi(m-k, a_{n-1}) | P_1(k; p_n) - \Pi(k, p_n) |$$
$$\leq V_{n-1} + p_n^2 \leq A_n.$$

Конечно, од принципот на математичка индукција следува точноста на неравенството (8). ♦

Последица 10. Во Бернулиевата шема важи

$$| P\{X_n \in B\} - \sum_{m \in B} \Pi(m, a) | \leq np^2 = \frac{a^2}{n} ,$$

каде $a = np$. ♦

Забелешка 28. Лесно се гледа дека во Поасоновата шема веројатноста

$$P\{X_n = m\} = P_n(m) = P_n(m; p_1, ..., p_n),$$

случајниот настан A да настапи m пати во серија од n независни експерименти е еднаква на коефициентот пред x^k во развојот по степените од x на полиномот

$$R(x) = \prod_{i=1}^{n}(p_i x + q_i). \tag{14}$$

Пример 55. Од едно оружје се извршени 4 стрелања во цел што е во движење, при што веројатностите целта да биде погодена, по ред на стрелање, се

$$p_1 = \frac{1}{10},\ p_2 = \frac{2}{10},\ p_3 = \frac{3}{10} \text{ и } p_4 = \frac{4}{10}.$$

Пресметајте ја веројатноста целта да биде погодена m пати за $m = 0,1,2,3,4$.

Решение. Јасно, станува збор за Поасонова шема и треба да најдеме

$$P\{X_4 = m\} = P_4(m),\ m = 0,1,2,3,4.$$

Во случајот полиномот (7) е

$$\begin{aligned} R(x) &= (0,1x+0,9)(0,2x+0,8)(0,3x+0,7)(0,4x+0,6) \\ &= 0,0024x^4 + 0,0404x^3 + 0,2144x^2 + 0,4404x + 0,3024 \end{aligned}$$

од што следува дека

$$P_4(4) = 0,0024;\ P_4(3) = 0,0404;\ P_4(2) = 0,2144;$$

$$P_4(1) = 0,4404 \text{ и } P_4(0) = 0,3024.$$ ♦

На крајот од оваа точка ќе докажеме аналоген резултат за хипергеометриската распределба $H\{n,m,k\}$ за која веројатностите беа зададени со:

$$P(j) = \frac{C_m^j C_{n-m}^{k-j}}{C_n^k}. \tag{8}$$

Имено ќе ја докажеме следнава теорема.

Теорема 37. Ако во распределбата $H\{n,m,k\}$ земеме $n,m \to \infty$, но така што $\lim\limits_{m,n\to\infty} \frac{m}{n} = p_0$, тогаш за секој фиксиран $j = 0,1,2,...,k$ важи

$$P(j) = \frac{C_m^j C_{n-m}^{k-j}}{C_n^k} \to C_k^j p_0^j (1-p_0)^{k-j}. \tag{9}$$

Доказ. Ги воведуваме ознаките $\frac{m}{n} = p, \frac{n-m}{n} = q$ и ако во (8) ставиме $m = np$, $n-m = nq$, добиваме

$$P(j) = \frac{C_{np}^j C_{nq}^{k-j}}{C_n^k} = \frac{\frac{(np)!}{j!(np-j)!}\frac{(mq)!}{(k-j)!(nq-(k-j))!}}{\frac{n!}{k!(n-k)!}}$$

$$=\frac{[np(np-1)(np-2)...(np-(j-1))][nq(nq-1)(nq-2)...(nq-(k-j-1)]k!}{j!(k-j)!n(n-1)(n-2)...(n-(k-1))}$$

$$=C_k^j\,\frac{[np(np-1)(np-2)...(np-(j-1))][nq(nq-1)(nq-2)...(nq-(k-j-1))]}{n(n-1)(n-2)...(n-(k-1))}.$$

Во првата средна заграда на последното равенство имаме j множители, а во втората имаме $k-j$ множители, што значи дека во броителот вкупно имаме $k-j+j=k$ множители, колку што имаме и во именителот. Ако броителот и именителот ги поделиме со n^k и земеме предвид дека k и j се фиксни броеви, тогаш од последното равенство и од равенствата

$$\lim_{m,n\to\infty}\frac{m}{n}=\lim_{m,n\to\infty}p=p_0,$$

$$\lim_{m,n\to\infty}q=\lim_{m,n\to\infty}\frac{n-m}{n}=\lim_{m,n\to\infty}(1-p)=1-p_0,$$

добиваме

$$\lim_{n\to\infty}P(j)=C_k^j\lim_{n\to\infty}\frac{p(p-\frac{1}{n})(p-\frac{2}{n})...(p-\frac{j-1}{n})q(q-\frac{1}{n})(q-\frac{2}{n})...(q-\frac{k-j-1}{n})]}{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})...(1-\frac{k-1}{n})}$$

$$=C_k^j\,p_0^j(1-p_0)^{k-j},$$

што и требаше да се докаже. ♦

11.2. ЛОКАЛНА ТЕОРЕМА НА МОАВР-ЛАПЛАС

Како што знаеме ако случајната променлива Y има биномна распределба

$$P\{Y=m\}=C_n^m p^m q^{n-m},\quad p+q=1,\ m=0,1,2,...,n\,, \tag{1}$$

тогаш $E(Y)=np$ и $D(Y)=npq$. Во следната теорема е дадена асимптотска формула за биномните веројатности (1) кога p не е блиску ниту до 0 ниту до 1. При доказот на оваа теорема ќе ја користиме Стирлинговата формула

$$n!\sim\sqrt{2\pi n}\cdot n^n e^{-n}\text{, кога } n\to\infty\ . \tag{2}$$

Исто така ќе користиме дека

$$\log(1+t)=t-\frac{t^2}{2}+O(t^3)\,. \tag{3}$$

Теорема 38 (локална теорема на Моавр-Лаплас). Ако со X_n го означиме бројот на успесите во Бернулиева шема со $p>0$ и n експерименти, тогаш кога $n\to\infty$ важи

$$P\{X_n=j\}\sim\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{npq}}e^{-\frac{x^2}{2}},\quad x=\frac{j-np}{\sqrt{npq}} \tag{4}$$

по x во секој конечен интервал.

Доказ. Бидејќи x припаѓа на конечен интервал од условот на теоремата имаме:

$$j = np + x\sqrt{npq} \to \infty \text{ и } k = n - j = nq - x\sqrt{npq} \to \infty, \text{ кога } n \to \infty,$$

па затоа за $n!$, $j!$ и $k!$ можеме да ја примениме Стирлинговата формула (2). Според тоа,

$$\begin{aligned} P\{X_n = j\} &= C_n^j p^j q^{n-j} = \frac{n!}{j!k!} p^j q^k \sim \frac{\sqrt{2\pi n}\cdot n^n e^{-n}}{\sqrt{2\pi j}\cdot j^j e^{-j}\sqrt{2\pi k}\cdot k^k e^{-k}} p^j q^k \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{n}{jk}}\cdot(\frac{np}{j})^j(\frac{nq}{k})^k. \end{aligned} \qquad (5)$$

Од друга страна

$$\frac{jk}{n} = n(p + x\sqrt{\frac{pq}{n}})(q - x\sqrt{\frac{pq}{n}}) = n[pq + (q-p)x\sqrt{\frac{pq}{n}} - \frac{pqx^2}{n}] \sim npq\,,$$

од што заради (5) добиваме

$$P\{X_n = j\} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{n}{jk}}\cdot(\frac{np}{j})^j(\frac{nq}{k})^k \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{npq}}\cdot(\frac{np}{j})^j(\frac{nq}{k})^k\,. \qquad (6)$$

Понатаму, користејќи го (3) добиваме

$$\begin{aligned} \log(\frac{np}{j})^j(\frac{nq}{k})^k &= -\log(\frac{j}{np})^j(\frac{k}{nq})^k \\ &= -(np + x\sqrt{npq})\log(1 + x\sqrt{\frac{q}{np}}) - (nq - x\sqrt{npq})\log(1 - x\sqrt{\frac{p}{nq}}) \\ &= -(np + x\sqrt{npq})[\frac{x\sqrt{q}}{\sqrt{np}} - \frac{1}{2}\frac{x^2 q}{np} + O(\frac{x^3\sqrt{q^3}}{\sqrt{np}^3})] \\ &\quad - (nq - x\sqrt{npq})[-\frac{x\sqrt{p}}{\sqrt{nq}} - \frac{1}{2}\frac{x^2 p}{nq} + O(\frac{x^3\sqrt{p^3}}{\sqrt{nq}^3})] \\ &= -\frac{x^2}{2} + O(\frac{1}{\sqrt{n}}) \end{aligned}$$

што значи дека $\log(\frac{np}{j})^j(\frac{nq}{k})^k \sim -\frac{x^2}{2}$, односно

$$(\frac{np}{j})^j(\frac{nq}{k})^k \sim e^{-\frac{x^2}{2}}\,. \qquad (7)$$

Конечно, од (6) и (7) следува (4). ♦

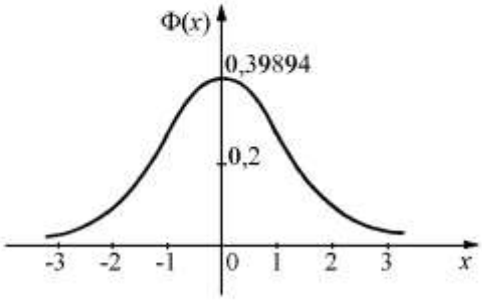
Забелешка 29. а) Примената на приближната формула (4) е олеснета бидејќи се табелирани вредностите на функцијата $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x \geq 0$ и бидејќи Φ е парна функција. Така релацијата (4), при ознака $x_j = \frac{j-np}{\sqrt{npq}}$, преминува во формулата $P\{X_n = j\} \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\Phi(x_j)$. Функцијата Φ ја нарекуваме Гаусова или нормална функција и таа е во непосредна врска со стандардната (единичната) нормална распределба за која покасно ќе стане збор. Графикот на оваа функција е прикажан на цртеж 14.

б) При усвоените ознаки всушност кога $n \to \infty$ важи

$$P\{X_n = j\} \sim \frac{1}{\sqrt{npq}} \Phi(x_j),$$

за $x_j = \frac{j-np}{\sqrt{npq}}$, што значи дека е точно равенството $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{npq}}\Phi(x_j)}{P\{X_n=j\}} = 1$, кое е еквивалентно со равенството

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P\{X_n=j\} - \frac{1}{\sqrt{npq}}\Phi(x_j)}{P\{X_n=j\}} = 0. \qquad (8)$$



Цртеж 14

Пример 56. Веројатноста за изработка на висококвалитетни предмети на една машина е 0,4. Колкава е веројатноста дека меѓу 26 случајно избрани предмети половината се висококвалитетни?

Решение. Јасно, станува збор за Бернулиева шема со $n = 26$, $j = 13$ и $p = 0,4$. Имаме,

$$P\{X_n = 13\} = C_{26}^{13} \cdot 0,4^{13} \cdot 0,6^{13},$$

што несомнено е корисно како теориски резултат. Но, ако сакаме оваа веројатност да ја пресметаме за да истата практично ја користиме, тогаш ќе се соочиме со голем број пресметувања. Меѓутоа, ако ја искористиме теоремата 33 последователно добиваме:

$$n = 26,\ p = 0,4,\ q = 0,6,\ \sqrt{npq} = 2,498,\ j - np = 2,6 \text{ и } x = \frac{j-np}{\sqrt{npq}} = 1,04083 .$$

Се чини дека, заради сложеноста на функцијата на десната страна во (2), практично ништо не сме постигнале во поглед на намалување на пресметувањата. Но, како што рековме, за пресметување на вредностите на функцијата $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ е изработена таблица која ја олеснува постапката и според таблицата имаме $\Phi(1,04083) \approx 0,2323$, од што конечно добиваме

$$P\{X_n = 13\} \approx \frac{\Phi(1,04083)}{2,498} \approx 0,09299. \ \blacklozenge$$

11.1. ИНТЕГРАЛНА ТЕОРЕМА НА МОАВР-ЛАПЛАС

Теорема 39 (интегрална теорема на Моавр-Лаплас). Нека со X_n го означиме бројот на успесите во Бернулиева шема со $p > 0$ и n експерименти. Тогаш за секои $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, важи

$$\lim_{n\to\infty} P\{a \le \frac{X_n - np}{\sqrt{npq}} \le b\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx. \qquad (1)$$

Доказ. Нека

$$x_k = \frac{k-np}{\sqrt{npq}},\ k = 0,1,2,\dots,n\,.$$

Тогаш од забелешка 1 следува

$$P\{a \le \frac{X_n - np}{\sqrt{npq}} \le b\} = \sum_{k:\, x_k \in [a,b]} P\{X_n = k\}\,. \tag{2}$$

Понатаму, ако го искористиме равенството (8) од забелешка 27 б) добиваме дека за секој $\varepsilon > 0$ постои природен број $n_0(\varepsilon)$ таков што

$$\frac{|P\{X_n = k\} - \frac{1}{\sqrt{npq}}\Phi(x_k)|}{P\{X_n = k\}} < \frac{\varepsilon}{3}, \text{ за секој } n \ge n_0(\varepsilon),$$

за секој k таков што $x_k \in [a,b]$. Од овде следува дека

$$|\sum_{x_k \in [a,b]} P\{X_n = k\} - \sum_{x_k \in [a,b]} \frac{1}{\sqrt{npq}}\Phi(x_k)| < \frac{\varepsilon}{3} \sum_{x_k \in [a,b]} P\{X_n = k\} \le \frac{\varepsilon}{3}\,. \tag{3}$$

Но,

$$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k = \frac{k+1-np}{\sqrt{npq}} - \frac{k-np}{\sqrt{npq}} = \frac{1}{\sqrt{npq}}$$

и ако го искористиме равенството (2), тогаш равенството (3) можеме да го запишеме во видот

$$|P\{a \le \frac{X_n - np}{\sqrt{npq}} \le b\} - \sum_{x_k \in [a,b]} \Phi(x_k)\Delta x_k| < \frac{\varepsilon}{3}, \text{ за секој } n \ge n_0(\varepsilon)\,. \tag{4}$$

Нека $k' = \min\{k \mid k = 0,\dots,n,\ x_k \in [a,b]\}$, $k'' = \max\{k \mid k = 0,\dots,n,\ x_k \in [a,b]\}$, $x' = \frac{k'-np}{\sqrt{npq}}$ и $x'' = \frac{k''-np}{\sqrt{npq}}$. Тогаш $\sum\limits_{k=k'+1}^{k''} \Phi(x_k)\Delta x_k$ е Риманова сума на функцијата $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ на интервалот $[x', x'']$. Бидејќи $\lim\limits_{n\to\infty} \Delta x_k = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{npq}} = 0$, за дадениот $\varepsilon > 0$ постои природен број $n_1(\varepsilon)$ таков што

$$|\sum_{x_k \in [a,b]} \Phi(x_k)\Delta x_k - \int_{x'}^{x''} \Phi(x)dx| < \frac{\varepsilon}{3}, \text{ за секој } n \ge n_1(\varepsilon)\,. \tag{5}$$

Понатаму, од $x' - a \le \frac{1}{\sqrt{npq}}$, $b - x'' \le \frac{1}{\sqrt{npq}}$ и $|\Phi(x)| < 1$, за секој $x \in \mathbf{R}$ следува дека постои $n_2(\varepsilon)$ таков што

$$|\int_{x'}^{x''} \Phi(x)dx - \int_a^b \Phi(x)dx| < \frac{\varepsilon}{3}, \text{ за секој } n \ge n_2(\varepsilon)\,. \tag{6}$$

Ако земеме $n(\varepsilon) = \max\{n_0(\varepsilon), n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon)\}$, тогаш од (4), (5) и (6) следува дека

$$|P\{a \le \frac{X_n - np}{\sqrt{npq}} \le b\} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx| < \varepsilon, \text{ за секој } n \ge n(\varepsilon),$$

т.е. важи (1). ♦

Забелешка 30. а) Теоремата 39 е специјален случај на таканаречената централна гранична теорема, која покасно ќе ја разгледуваме.

б) Може да се докаже дека конвергенцијата во (1) е рамномерна во однос на a и b, $-\infty \le a < b \le +\infty$, т.е. дека важи

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{-\infty\le a<b\le+\infty} \Big| \sum_{k;\, x_k\in[a,b]} P\{X = k\} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx \Big| = 0 . \tag{1a}$$

в) Ја воведуваме функцијата $\Phi_0 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ со

$$\Phi_0(x) = \int_0^x \Phi(u)du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}} du ,\ x \in \mathbf{R} \tag{7}$$

Бидејќи функцијата Φ е ненегативна и парна, функцијата Φ_0 е монотоно растечка и е непарна (цртеж 15), што значи

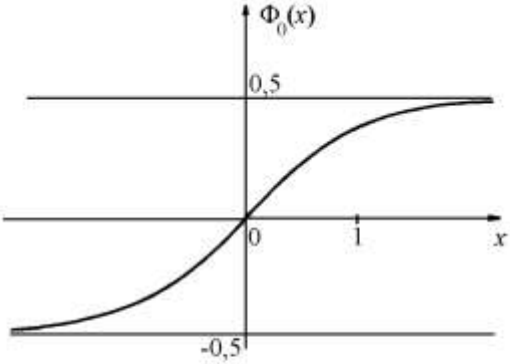
$$\Phi_0(-x) = -\Phi_0(x),\ x \in \mathbf{R} .$$

Специјално важи $\Phi_0(0) = 0$. Подоцна ќе докажеме дека

$$\lim_{x\to+\infty} \Phi_0(x) = \tfrac{1}{2} ,$$

а заради непарноста важи

$$\lim_{x\to-\infty} \Phi_0(x) = -\tfrac{1}{2} .$$



Цртеж 15

Ако $a \le b$, тогаш

$$\Phi_0(b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^b e^{-\frac{u^2}{2}} du = \Phi_0(a) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

односно

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{u^2}{2}} du = \Phi_0(b) - \Phi_0(a) \text{, за } a \le b$$

и формулата (1) го добива видот

$$\lim_{n\to\infty} P\{a \le \frac{X_n - np}{\sqrt{npq}} \le b\} = \Phi_0(b) - \Phi_0(a) \text{, за } a \le b . \tag{8}$$

Интегралната теорема на Моавр-Лаплас, односно формулата (8) може да се искористи за приближно пресметување на веројатноста

$$P\{m_1 \le X_n \le m_2\} = P\{\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} \le \frac{X_n - np}{\sqrt{npq}} \le \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}\}$$

во Бернулиевата шема при големи вредности на n. Ако имаме n независни испитувања со веројатност на успех p, тогаш ги пресметуваме

$$x_{m_1} = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} \text{ и } x_{m_2} = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$$

и согласно претходно изнесеното добиваме

$$P\{m_1 \le X_n \le m_2\} \approx \Phi_0(x_{m_2}) - \Phi_0(x_{m_1}) \,. \tag{9}$$

Јасно, при користење на формулата (9) можни се грешки, кои значително се намалуваат ако се искористи формулата

$$P\{m_1 \le X_n \le m_2\} \approx \Phi_0(x_{m_2+\frac{1}{2}}) - \Phi_0(x_{m_1-\frac{1}{2}}) \,, \tag{10}$$

каде

$$x_{m_1-\frac{1}{2}} = \frac{m_1 - \frac{1}{2} - np}{\sqrt{npq}} \text{ и } x_{m_2+\frac{1}{2}} = \frac{m_2 + \frac{1}{2} - np}{\sqrt{npq}} \,.$$

Приближната формула (9) дава вредности на веројатностите $P\{m_1 \le X_n \le m_2\}$ со точност до трета-четврта децимала веќе кога n прима вредност поголема од 100, што не е случај со приближната формула (7).

Пример 57. Од сите редовни студенти на Универзитетот 70% редовно ја следат наставата. Колкава е веројатноста меѓу 1000 случајно избрани анкетирани студенти бројот на студентите кои редовно ја следат наставата да е меѓу 654 и 739.

Решение. Треба да пресметаме $P\{654 \le X \le 737\}$. Бидејќи бројот на анкетираните студенти е 1000, т.е. доволно голем, можеме да ја користиме приближната формула (10). Имаме:

$$n = 1000 \,,\ p = 0{,}7 \,,\ q = 0{,}3 \,,\ m_1 = 654 \text{ и } m_2 = 737 \,.$$

Според тоа,

$$x_{m_1-\frac{1}{2}} = \frac{m_1 - \frac{1}{2} - np}{\sqrt{npq}} = -3{,}20 \text{ и } x_{m_2+\frac{1}{2}} = \frac{m_2 + \frac{1}{2} - np}{\sqrt{npq}} = 2{,}59 \,.$$

Сега, од таблицата 2 за функцијата $\Phi_0(x)$ наоѓаме:

$$\Phi_0(-3{,}20) = -\Phi_0(3{,}20) = -0{,}49931 \text{ и } \Phi_0(2{,}59) = 0{,}49520 \,.$$

Конечно, од формулата (10) имаме:

$$P\{654 \le X_n \le 737\} \approx \Phi_0(2{,}59) - \Phi_0(-3{,}20) = 0{,}49520 + 0{,}49931 = 0{,}99451 \,.$$

На читателот му препуштаме истата задача да ја реши користејќи ја формулата (9). ♦

Забелешка 31. Од релацијата (8) и од својствата на функцијата Φ_0 следува дека за секој $\varepsilon > 0$ важи

$$\begin{aligned} P\{\left|\frac{X_n}{n} - p\right| < \varepsilon\} &= P\{\frac{|X_n - np|}{\sqrt{npq}} < \varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\} = P\{-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}} < \frac{X_n - np}{\sqrt{npq}} < \varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\} \\ &\approx \Phi_0(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}) - \Phi_0(-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}) = 2\Phi_0(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}). \end{aligned} \tag{11}$$

Со последната формула се поврзани n, ε и $P\{\left|\frac{X_n}{n} - p\right| < \varepsilon\}$, па ако две од овие три големини ги знаеме, тогаш лесно можеме да ја определиме третата.

Релацијата (11) ја има следнава интерпретација:

Ако во Бернулиевата шема n *е доволно големо, тогаш веројатноста на настанот: апсолутната вредност на разликата на релативната фрекфенција* $\frac{X_n}{n}$ *на бројот на успесите во* n *експерименти и веројатноста за успех во секој одделен експеримент* p *е помала од произволен број* ε *е приближно еднаква на* 1.

Пример 58. Колкава е веројатноста при 3600 фрлања на хомогена монета релативната честота на грбовите по апсолутна вредност да се разликува од 0,5 за помалку од 0,01?

Решение. Имаме, $n = 3600, \varepsilon = 0,5$ и ако замениме во (11) добиваме

$$P\{|\frac{X_n}{3600} - 0,5| < 0,01\} \approx 2\Phi_0(0,01 \cdot \sqrt{\frac{3600}{0,5 \cdot 0,5}}) = 2\Phi_0(1,2) \approx 2 \cdot 0,38493 = 0,76986 \text{ . } ♦$$

Пример 59. Колку пати треба да се фрли хомогена коцка за играње за да релативната фрекфенција на шестките со веројатност 0,95 биде меѓу $\frac{19}{120}$ и $\frac{21}{120}$?

Решение. Имаме $p = \frac{1}{6}$, $\varepsilon = \frac{1}{120}$ и ако замениме во (11) добиваме

$$0,95 = P\{|\frac{X_n}{n} - \frac{1}{6}| < \frac{1}{120}\} \approx 2\Phi_0(\frac{1}{120} \cdot \sqrt{\frac{36n}{5}}) = 2\Phi_0(\frac{1}{60} \cdot \sqrt{\frac{n}{5}}),$$

т.е. $\Phi_0(\frac{1}{20} \cdot \sqrt{\frac{n}{5}}) \approx 0,475$. За функцијата Φ_0 добиваме $\Phi_0(1,96) \approx 0,475$, па затоа

$$\frac{1}{20} \cdot \sqrt{\frac{n}{5}} = 1,96 .$$

Решението на последната равенка е $n = 7683,2$, што значи дека коцката треба да ја фрлиме приближно 7700 пати. ♦

Пример 60. Хомогена коцка за играње ја фрламе 4500 пати. Во кои граници со веројатност 0,9 треба да ја очекуваме релативната фреквенција на единиците?

Решение. Имаме $p = \frac{1}{6}$, $n = 4500$ и ако замениме во (11) добиваме

$$0,90 = P\{|\frac{X_n}{4500} - \frac{1}{6}| < \varepsilon\} \approx 2\Phi_0(\varepsilon \cdot \sqrt{\frac{36 \cdot 4500}{5}}) = 2\Phi_0(180\varepsilon),$$

т.е. $\Phi_0(180\varepsilon) \approx 0,45$. Но, $\Phi_0(1,645) \approx 0,45$, па затоа $180\varepsilon = 1,645$, т.е. $\varepsilon \approx 0,00914$. Значи,

$$|\frac{X_n}{4500} - \frac{1}{6}| < 0,00914 \text{, т.е. } 0,15753 < \frac{X_n}{4500} < 0,17581,$$

а фрекфенцијата е меѓу 708 и 792. ♦

ЗАДАЧИ

1. Бернулиевата низа случајни променливи, во која настанот A се реализира со веројатност p, ја прекинуваме кога настанот ќе се реализира K-пати. Овде K е дискретна случајна

променлива, независна од Бернулиевата низа случајни променливи и со закон на веројатност

$$P\{K=k\}=\tfrac{1}{k(k+1)},\; k=1,2,\dots .$$

Пресметајте ја веројатноста на настанот B_n, дека низата ќе се прекине со $n-$от настан, $n \in \mathbf{N}$.

2. Во една голема серија на производи 2% се неисправни. Од серијата на случаен начин се избираат 100 производи. Користејќи ја теоремата на Поасон пресметајте ја веројатноста меѓу овие производи:
   a) да има точно 3 неисправни производи,
   b) да има најмалку 3 неисправни производи,
   c) да има најмногу 5 неисправни производи, и
   d) бројот на неисправните производи да не е помал од 2 и да не е поголем од 6.

3. Во една телефонска централа имаме просечно по три повици во секунда. Пресметајте ја веројатноста во текот на една секунда:
   1) да има најмногу еден повик,
   2) да има точно два повици и
   3) да има точно три повици.

4. Во еден град во текот на една година се раѓаат 20000 деца. Сметајќи дека веројатноста да се роди момче е 0,51, најдете таков број t, за да со веројатност 0,99 може да се тврди дека меѓу родените деца во текот на една година бројот на родените момчиња го надминува бројот на родените девојчиња за не помалку од t.

5. Во текот на еден час во амбулантата за брза помош со веројатност p се јавува еден пациент. Колкава е веројатноста дека во текот на три последователни часа во амбулантата ќе се јават повеќе од 10 пациенти?

6. Колкава е веројатноста во група од 30 студенти, ниту еден да не се родил во месец јануари? Пресметајте ја оваа веројатност според точната формула и според Поасоновото приближување.

7. Докажете дека во теоремата на Поасон се исполнети следниве оценки:
   1) $\sup\limits_{k} | P\{X_n=k\}-\frac{a^k e^{-a}}{k!} | \le \frac{2a^2}{n}$,
   2) $\sum\limits_{k=0}^{n} | P\{X_n=k\}-\frac{a^k e^{-a}}{k!} | \le \frac{2a}{n}\min\{2,a\}$, (оценка на Прохоров).

8. Нека p е веројатноста за успех во Бернулиевата шема и X_n е бројот на успесите во n независни експерименти. Докажете дека
   1) $P\{| X_n-np | \le x\} \approx 2\Phi_0(\frac{x}{\sqrt{np(1-p)}})$,
   2) $\sup\limits_{x\in\mathbf{R}} | P\{\frac{\mu-np}{\sqrt{np(1-p)}} \le x\}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}dt | \le \frac{p^2+(1-p)^2}{np(1-p)}$,
   3) $\lim\limits_{n\to\infty}\;\sup\limits_{-\infty\le a<b\le+\infty}\;| \sum\limits_{k;\, x_k\in[a,b]} P\{X=k\}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{a}^{b} e^{-\frac{x^2}{2}}dx |=0$.

9. Колкава е веројатноста меѓу 1000 новороденчиња да има најмалку 490 момчиња, ако за секое новороденче е еднакввоверојатно дали ќе биде машко или женско?

10. Колку пати треба да се фрли хомогена коцка за да релативната фреквенција на шестките со веројатност 0,95 биде меѓу $\frac{18}{120}$ и $\frac{22}{120}$?

11. Хомогена коцка ја фрламе 4500 пати. Во кои граници со веројатност 0,9 треба да ја очекуваме релативната фреквенција на двојките?

12. Во една оранжерија 80% од производството на краставици е од прва класа. Колкава е веројатноста меѓу 2000 случајно избрани производи бројот на производите од прва класа да е меѓу 1546 и 1624.

13. Визуелното воочување на некој вештачки Земјин сателит од определено место на набљудување е можно со веројатност 0,12 и тоа секој пат кога сателитот ќе го прелета тоа место. Колку пати сателитот треба да го прелета тоа место за да со веројатност не помала од 0,9975 го забележиме сателитот барем 5 пати?

14. Веројатноста за реализирање на настанот A во секој одделен експеримент е 0,1. Експериментите се независни меѓусебно. Колку експерименти треба да се направат за да со веројатност 0,9 или поголема настанот A се реализира барем 6 пати?

12. ГЕНЕРАТОРНИ ФУНКЦИИ НА ЦЕЛОБРОЈНИ СЛУЧАЈНИ ПРОМЕНЛИВИ

Како што претходно рековме, за дискретната случајна променлива X, која прима само целобројни ненегативни вредности, ќе велиме дека е *целобројна случајна променлива.* Притоа, законот на распределба на целобројната случајна променлива е определен со веројатностите

$$p_n = P\{X = n\}, \quad n = 0,1,2,\dots, \tag{1}$$

за кои

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1. \tag{2}$$

Дефиниција 26. Нека X е целобројна случајна променлива. За функцијата $\varphi_X(s) = E(s^X)$ ќе велиме дека е *генераторна функција за случајната променлива* X.

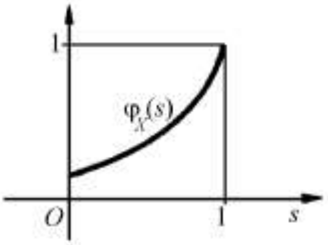
Забелешка 32. Користејќи го законот на распределба (1) генераторната функција може да се запише во вид на степенски ред

$$\varphi_X(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n s^n, \tag{3}$$

кој апсолутно конвергира за $|s| \le 1$. Понатаму, бидејќи

$$p_n = \frac{\varphi_X^{(n)}(0)}{n!}, \quad n = 0,1,2,\dots \tag{4}$$

добиваме дека меѓу законите на распределба и генераторните функции, со помош на равенствата (3) и (4), е воспоставена биекција.



Цртеж 16

Во интервалот [0,1] генераторната функција $\varphi_X(s)$ и сите нејзини изводи $\varphi_X^{(k)}(s), k = 1,2,\dots$ се ненегативни неопаѓачки и конвексни функции (цртеж 32), бидејќи за $s \in [0,1]$ важи

$$\varphi_X^{(k)}(s) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)...(n-k+1)p_n s^{n-k} \geq 0 .$$

Ако за $s > 1$ генераторната функција $\varphi_X(s)$ не е определена, тогаш во точката $s = 1$ изводот на $\varphi_X(s)$ го определуваме како лев извод, т.е.

$$\varphi_X^{(k)}(1) = \lim_{s \to 1^-} \frac{\varphi_X^{(k-1)}(1) - \varphi_X^{(k-1)}(s)}{1-s}, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Понекогаш генераторната функција определена со редот (3) ќе ја нарекуваме *веројатносна генераторна функција.*

Пример 61. а) Од дефиниција 26 непосредно следува дека генераторната функција на биномната распределба

$$P\{X = m\} = C_n^m p^m q^{n-m}, \quad m = 0, 1, 2, ..., n; \ p + q = 1$$

е дадена со

$$\varphi(s) = \sum_{m=0}^{n} C_n^m p^m q^{n-m} s^m = (ps + q)^n .$$

б) За Поасоновата распределба

$$P\{X = n\} = \frac{a^n}{n!} e^{-a}, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

генераторната функција има вид:

$$\varphi(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} e^{-a} s^n = e^{-a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(as)^n}{n!} = e^{-a} e^{as} = e^{a(s-1)} .$$

в) За геометриската распределба

$$P\{X = n\} = q^n p, \quad n = 0, 1, 2, ...; \ p + q = 1$$

генераторната функција има вид:

$$\varphi(s) = \sum_{n=0}^{\infty} q^n p s^n = p \sum_{n=0}^{\infty} (qs)^n = \frac{p}{1-qs} . \ \blacklozenge$$

Пример 62. Целобројната случајната променлива X има генераторна функција

$$\varphi_X(s) = \frac{2s}{(s-2)(s-3)} .$$

Ќе ја определиме распределбата на X . Имаме

$$\varphi_X(s) = \frac{2s}{(s-2)(s-3)} = \frac{4}{2-s} - \frac{6}{3-s} = 2 \cdot \frac{1}{1-\frac{s}{2}} - 2 \cdot \frac{1}{1-\frac{s}{3}}$$

$$= 2\sum_{k=1}^{\infty} (\tfrac{s}{2})^k - 2\sum_{k=1}^{\infty} (\tfrac{s}{3})^k = 2\sum_{k=1}^{\infty} [\tfrac{1}{2^k} - \tfrac{1}{3^k}] s^k , ,$$

од што следува дека распределбата на целобројната случајната променлива X е дадена со

$$P\{X=k\}=2(\tfrac{1}{2^k}-\tfrac{1}{3^k}),\ k=1,2,3,\dots\ .\ \blacklozenge$$

Теорема 40. Ако $X_i, i=1,2,\dots,n$ се независни целобројни случајни променливи и $\varphi_{X_i}(s), i=1,2,\dots,n$ се нивните генераторни функции, тогаш

$$\varphi_{X_1+\dots+X_n}(s)=\prod_{i=1}^{n}\varphi_{X_i}(s)\,. \tag{5}$$

Доказ. Од независноста на $X_i, i=1,2,\dots,n$ следува независноста на s^{X_i}, $i=1,\dots,n$. Сега, од мултипликативното својство на математичкото очекување следува равенството

$$E(s^{X_1+\dots+X_n})=E(s^{X_1}\dots s^{X_n})=\prod_{i=1}^{n}E(s^{X_i})$$

кое е еквивалентно на равенството (5). ♦

Пример 63. Независните целобројни случајни променливи X и Y имаат генераторни функции φ_X и φ_Y. Со овие генераторни функции изразете ја генераторната функција на случајната променлива $Z=mX+nY+k$, каде $m,n,k\in\mathbf{N}$.

Решение. Бидејќи X и Y се независни случајни променлива, од теорема 40 добиваме

$$\begin{aligned}\varphi_Z(s)&=\varphi_{mX+nY+k}(s)=\varphi_{mX}(s)\varphi_{nY+k}(s)=E(s^{mX})\cdot E(s^{n\eta+k})\\&=E(s^m)^X\cdot E[(s^n)^y s^k]=s^k\varphi_X(s^m)\varphi_Y(s^n)\,.\ \blacklozenge\end{aligned}$$

Пример 64. Случајната променлива X е распределена по законот

$$P\{X=2k\}=C_{n-1}^{k-1}p^n q^{k-n}\,,\ k=n,n+1,n+2,\dots\ ,$$

каде $n\in\mathbf{N}$, $p\in(0,1)$ и $q=1-p$. Докажете, дека X е збир на n еднакво распределени независни целобројни случајни променливи.

Решение. Генераторната функција на случајната променлива X е

$$\begin{aligned}\varphi_X(s)&=\sum_{k=n}^{\infty}C_{k-1}^{n-1}p^n q^{k-n}s^{2k}=s^{2n}p^n\sum_{k=n}^{\infty}C_{k-1}^{n-1}(qs^2)^{k-n}\\&=s^{2n}p^n\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j C_{j+n-1}^{j}(-qs^2)^j\\&=s^{2n}p^n\sum_{j=0}^{\infty}C_{-n}^{j}(-qs^2)^j=\frac{p^n s^{2n}}{(1-qs^2)^n}.\end{aligned}$$

Во претпоследното равенство искористивме дека $(-1)^j C_{j+n-1}^{j}=C_{-n}^{j}$, а во последното равенство развојот во ред на функцијата $f(x)=(1+x)^{-n}$, при $x=-qs^2$, кој лесно можеме да го покажеме со помош на релациите

$$f(x) = (1+x)^{-n} = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}[(1+x)^{-1}] \text{ и}$$

$$(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots .$$

Понатаму, од

$$\varphi(s) = \frac{ps^2}{1-qs^2} = ps^2 \sum_{k=0}^{\infty} q^k s^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} pq^k s^{2k+2}$$

следува дека $\varphi(s) = \varphi_Y(s)$ е генераторна функција на случајната променлива Y чиј закон на распределба е

$$P\{Y = 2k+2\} = pq^k \text{ , } k = 0,1,2,\dots \text{ .}$$

Конечно, од $\varphi_X(s) = [\varphi(s)]^n$ и од теорема 40 следува дека X е збир на n еднакво распределени независни целобројни случајни променливи. ♦

Забелешка 33. Во дефиниција 16 го воведовме поимот конволуција на дискретни случајни променливи, а во пример 42 ги определивме конволуциите на две биномни и на две Поасонови распределби. Овде ќе покажеме како со помош на теорема 40 понекогаш може, користејќи ги генераторните функции, да се определи конволуција на распределби.

Пример 65. а) Од равенството

$$(ps+q)^{n_1}(ps+q)^{n_2} = (ps+q)^{n_1+n_2}$$

и фактот дека меѓу законите на распределба и генераторните функции постои биекција следува дека конволуција на две независни биномни распределби $B\{n_1, p\}$ и $B\{n_2, p\}$ е биномната распределба $B\{n_1 + n_2, p\}$.

б) Од равенството

$$e^{a_1(s-1)}e^{a_2(s-1)} = e^{(a_1+a_2)(s-1)}$$

и фактот дека меѓу законите на распределба и генераторните функции постои биекција следува дека конволуција на две независни Поасонови распределби $\boldsymbol{P}(a_1)$ и $\boldsymbol{P}(a_2)$ е Поасоновата распределба $\boldsymbol{P}(a_1 + a_2)$.

Нека X има Поасонова распределба со параметар a_1 и Y има Поасонова распределба со параметар a_2, $a_2 < a_1$. Да земеме случајна променлива Z независна од Y и која има Поасонова распределба со параметар $a_1 - a_2$. Од претходно изнесеното следува дека случајните променливи X и $Y + Z$ се еднакво распределени и како Z е ненегативна и ненулта случајна променлива добиваме

$$P\{X \le k\} = P\{Y + Z \le k\} < P\{Y \le k\} \text{ . ♦}$$

Во забелешка 32 видовме дека меѓу законите на распределба на целобројните случајни променливи и генераторните функции, со помош на равенствата (3) и (4), е воспоставена биекција. На крајот од овој дел да забележиме дека оваа биекција е непрекината, т.е. дека е точна следнава теорема.

Теорема 41 (теорема за непрекинатост). Нека

$$\varphi_r(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n^{(r)} s^n, \; r = 1, 2, \ldots$$

е низа веројатностни генераторни функции и

$$\varphi(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n s^n$$

е генераторна функција. Тогаш, $\lim_{r\to\infty} p_n^{(r)} = p_n$, за секој n ако и само ако за секој $s \in [0,1)$ важи $\lim_{r\to\infty} \varphi_r(s) = \varphi(s)$.

Доказ. Да претпоставиме дека $\lim_{r\to\infty} p_n^{(r)} = p_n$, за секој n. Нека $\varepsilon > 0$ и $s \in [0,1)$. На десната страна на неравенството

$$|\varphi_r(s) - \varphi(s)| \le \sum_{k=0}^{\infty} | p_k^{(r)} - p_k | \cdot s^k \le \sum_{k=0}^{N-1} | p_k^{(r)} - p_k | + \sum_{k=N}^{\infty} s^k = \sum_{k=0}^{N-1} | p_k^{(r)} - p_k | + \tfrac{s^N}{1-s}$$

избираме N таков, што $\frac{s^N}{1-s} < \frac{\varepsilon}{2}$, а потоа избираме r_0 таков што $\sum_{k=0}^{N-1} | p_k^{(r)} - p_k | < \frac{\varepsilon}{2}$, кога $r \ge r_0$. Тогаш, при $r \ge r_0$ важи $|\varphi_r(s) - \varphi(s)| < \varepsilon$, што значи дека $\lim_{r\to\infty} \varphi_r(s) = \varphi(s)$.

Обратно, нека за секој $s \in [0,1)$ важи $\lim_{r\to\infty} \varphi_r(s) = \varphi(s)$. Од ограничената низа $0 \le p_0^{(r)} \le 1$ избираме конвергентна подниза $p_0^{(r,1)} \to p_0$. Понатаму, од ограничената подниза $0 \le p_1^{(r,1)} \le 1$ избираме конвергентна подниза $p_1^{(r,2)} \to p_1$ итн. Од поднизата

$$\begin{array}{l} p_n^{(1,1)},\; p_n^{(2,1)},\; p_n^{(3,1)}, \ldots \\ p_n^{(1,2)},\; p_n^{(2,2)},\; p_n^{(3,2)}, \ldots \\ p_n^{(1,3)},\; p_n^{(2,3)},\; p_n^{(3,3)}, \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

избираме дијагонална конвергентна подниза $p_n^{(r,r)}$ која конвергира кон p_n за секој n. Нека претпоставиме, дека барем за еден n низата $p_n^{(r)}$ не конвергира кон p_n. Тогаш може да се изберат две поднизи конвергентни кон различни граници $p_n^{(r')} \to p_n^{*}$ и $p_n^{(r'')} \to p_n^{**}$. Од претходно докажаното следува дека

$$\varphi_{r'}(s) \to \varphi^*(s) = \sum_n p_n^{*} s^n \text{ и } \varphi_{r''}(s) \to \varphi^{**}(s) = \sum_n p_n^{**} s^n .$$

Од условот имаме дека $\varphi_r(s) \to \varphi(s)$, па затоа $\varphi(s) = \varphi^*(s) = \varphi^{**}(s)$, што значи дека $p_n = p_n^{*} = p_n^{**}$, т.е. $\lim_{r\to\infty} p_n^{(r)} = p_n$. ♦

Забелешка 34. Ако земеме, на пример, $\varphi_r(s) = s^r \to 0 \equiv \varphi(s)$, $s \in [0,1)$ добиваме дека граничните броеви p_n може да не формираат распределба на веројатности. Имено, во општ случај важи $\sum\limits_{n=0}^{\infty} p_n \le 1$. Но, ако дополнително имаме услов дека $\lim\limits_{s \to 1^-} \varphi(s) = 1$, тогаш $\sum\limits_{n=0}^{\infty} p_n = 1$ и за граничната низа $\{p_n\}$ добиваме дека образува распределба на веројатности.

Пример 66. Ќе покажеме како теорема 41 може да се искористи за доказ на теоремата на Поасон, т.е. дека

$$\lim_{n \to \infty} C_n^m (\tfrac{a}{n})^m (1 - \tfrac{a}{n})^{n-m} = \frac{a^m}{m!} e^{-a} . \qquad (8)$$

Генераторната функција на биномната распределба, при $p = \frac{a}{n}$ има вид

$$(s\tfrac{a}{n} + 1 - \tfrac{a}{n})^n = (1 + \tfrac{a}{n}(s-1))^n$$

и притоа важи

$$\lim_{n \to \infty} (1 + \tfrac{a}{n}(s-1))^n = e^{a(s-1)} .$$

Сега равенството (8) следува од теорема 41, забелешка 32 и пример 65 б). ♦

Теорема 42. Нека за секој $n \in \mathbf{N}$ целобројните случајни променливи $Z, X_1, ..., X_n$ се независни и нека X_i, $i = 1, 2, 3, ...$ се еднакво распределени. Да ставиме

$$Y_Z = X_1 + X_2 + ... + X_Z, \; Y_0 = 0 .$$

Тогаш

$$\varphi_{Y_Z}(s) = \varphi_Z(\varphi_{X_1}(s)) . \qquad (9)$$

Доказ. Случајните променливи $Z, X_1, ..., X_n$ се независни, па затоа важи

$$P\{Y_Z = m\} = \sum_{k=0}^{\infty} P\{Z = k, Y_k = m\} = \sum_{k=0}^{\infty} P\{Z = k,\; X_1 + X_2 + ... + X_k = m\}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P\{Z = k\} P\{\; X_1 + X_2 + ... + X_k = m\}.$$

Ако последното равенство го помножиме со s^m и сумираме по сите $m = 0, 1, 2, 3, ...$ добиваме

$$\varphi_{Y_Z}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} P\{Z = k\} [\sum_{m=0}^{\infty} s^m P\{\; X_1 + X_2 + ... + X_k = m\}] . \qquad (10)$$

Редот во средните загради во (10) е генераторната функција на $X_1 + X_2 + ... + X_k$ и како случајните променливи $X_1, ..., X_k$ се независни и еднакво распределени од теорема 40 следува дека

$$\sum_{m=0}^{\infty} s^m P\{ X_1 + X_2 + ... + X_k = m\} = [\varphi_{X_1}(s)]^k .$$

Конечно, со замена во (10) добиваме

$$\varphi_{Y_Z}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} P\{Z = k\}[\varphi_{X_1}(s)]^k = \varphi_Z(\varphi_{X_1}(s)) . \blacklozenge$$

12.1. ФАКТОРИЕЛНИ МОМЕНТИ

Во дефиниција 14 за дискретна случајна променлива X воведовме обични моменти $E(X^r)$, $r = 1, 2, 3, ...$. Во овој дел за целобројните случајни променлива ќе ги разгледаме таканаречените факториелни моменти, кои се далеку попогодни за практична работа.

Дефиниција 27. Нека X е целобројна случајна променлива. Математичкото очекување $E(X^{[r]})$, каде $X^{[r]} = X(X-1)...(X-r+1)$, $X^{[0]} = 1$ го нарекуваме *$r-$ти факториелен момент на случајната променлива* X .

Забелешка 35. Преку факториелните моменти $E(X^{[r]})$, $r = 1, 2, ...$ можеме да ги изразиме обичните моменти на $E(X^r)$, $r = 1, 2, ...$ на случајната променлива X , и обратно.

На пример, првиот факториелен момент е математичкото очекување, а

$$E(X^2) = E(X^{[2]}) + E(X) ,$$

па затоа

$$D(X) = E(X^{[2]}) + E(X) - (E(X))^2 .$$

Теорема 43. Нека X е целобројна случајна променлива и $\varphi_X(s)$ е нејзината генераторна функција. Тогаш, за секој ненегативен цел број r важи

$$E(X^{[r]}) = \varphi_X^{(r)}(1) . \tag{1}$$

Доказ. Ако редот $\varphi_X(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n s^n$ конвергира во некоја точка $s > 1$, тогаш истиот може почлено да се диференцира во точката $s = 1$ и притоа добиваме

$$\varphi_X^{(r)}(1) = \sum_n n^{[r]} p_n . \tag{2}$$

Во спротивно $\varphi_X^{(r)}(1)$ го определуваме како $\lim\limits_{s \to 1^-} \varphi_X^{(r)}(s)$, или како лев извод во точката $s = 1$, кој го наоѓаме како граница

$$\varphi_X^{(k)}(1) = \lim_{h\to 0^+} \frac{\varphi_X^{(k-1)}(1)-\varphi_X^{(k-1)}(1-h)}{h}$$

последователно за $k=1,2,...,r;\ \varphi_X^{(0)}(s)=\varphi_X(s)$. Јасно и во двата случаи го добиваме равенството (2). Бидејќи

$$E(X^{[r]})=\sum_n n^{[r]}p_n\ , \tag{3}$$

од равенствата (2) и (3) го добиваме равенството (1). ♦

Забелешка 36. Да споменеме дека за некои целобројни случајни променливи во равенството (1) и двете страни можат да бидат бесконечни (зошто?). Од забелешка 20 и лема 2 непосредно следува дека $E(X)$ и $D(X)$ можат да се пресметаат според формулите

$$E(X)=\varphi_X^{'}(1)\ , \tag{4}$$

$$D(X)=\varphi_X^{''}(1)+\varphi_X^{'}(1)-[\varphi_X^{'}(1)]^2\ . \tag{5}$$

Пример 67. а) За биномната распределба имаме

$$\varphi_X^{'}(s)=np(ps+q)^{n-1},\ \varphi_X^{''}(s)=n(n-1)p^2(ps+q)^{n-2}\ .$$

Сега од (4) и (5) следува дека

$$E(X)=np\ ,\ D(X)=n(n-1)p^2+np-n^2p^2=npq\ .$$

б) За Поасоновата распределба имаме

$$\varphi_X^{'}(s)=ae^{a(s-1)},\ \varphi_X^{''}(s)=a^2e^{a(s-1)}\ .$$

Сега од (4) и (5) следува дека $E(X)=a$, $D(X)=a^2+a-a^2=a$.

в) За геометриската распределба имаме

$$\varphi_X^{'}(s)=\frac{pq}{(1-qs)^2},\ \varphi_X^{''}(s)=\frac{2pq^2}{(1-qs)^3}\ .$$

Сега од (4) и (5) следува дека

$$E(X)=\frac{q}{p},\ D(X)=\frac{2q^2}{p^2}+\frac{q}{p}-\frac{q^2}{p^2}=\frac{q}{p^2}\ .\ ♦$$

Забелешка 37. Нека $X_1,X_2,X_3,...$ е низа целобројни независни еднакво распределени случајни променливи со генераторна функција $\varphi_X(s)$ и Z е независна од нив целобројна случајна променлива со генераторна функција $\varphi_Z(s)$. Со равенствата

$$Y_Z=X_1+X_2+...+X_Z,Y\geq 1,\ X_0=0 \tag{6}$$

дефиниравме *збир на случаен број случајни променливи.* Во теорема 42 докажавме дека

$$\varphi_{Z_Y}(s)=\varphi_Y(\varphi_X(s))\ . \tag{7}$$

Сега од равенството (7) за генераторната функција на случајната променлива Z_Y добиваме

$$\varphi'_{Z_Y}(s)=\varphi'_Y(\varphi_X(s))\varphi'_X(s)\,,\ \varphi'_{Z_Y}(1)=\varphi'_Y(1)\varphi'_X(1)\,,$$
$$\varphi''_{Z_Y}(s)=\varphi''_Y(\varphi_X(s))[\varphi'_X(s)]^2+\varphi''_X(s)\varphi'_Y(\varphi_X(s))\,,$$
$$\varphi''_{Z_Y}(1)=\varphi''_Y(1)[\varphi'_X(1)]^2+\varphi''_X(1)\varphi'_Y(1)\,.$$

па од равенствата (4) и (5) за дисперзијата и математичкото очекување на случајната променлива Z_Y добиваме

$$E(Z_Y)=E(Y)\cdot E(X) \text{ и}$$
$$\begin{aligned} D(Z_Y)&=\varphi''_Y(1)[\varphi'_X(1)]^2+\varphi''_X(1)\varphi'_Y(1)+E(Z_Y)-(E(Z_Y))^2\\ &=(E(Y^2)-E(Y))\cdot(E(X))^2+E(Y)\cdot(E(X^2)-E(X))+\\ &\quad+E(Y)\cdot E(X)-(E(Y))^2\cdot(E(X))^2\\ &=D(Y)\cdot(E(X))^2+E(Y)\cdot D(X). \end{aligned}$$

Дефиниција 28. Нека $X=(X_1,X_2,...,X_r)$ е случаен вектор со целобројни ненегативни компоненти $X_i,\ i=1,2,...,r$. Функцијата

$$\varphi_X(s_1,s_2,...,s_r)=E(s_1^{X_1}s_2^{X_2}...s_r^{X_r})=\sum_t p_t s_1^{t_1}s_2^{t_2}...s_r^{t_r}\ ,$$

ја нарекуваме *генератотна функција* на случајниот вектор $X=(X_1,X_2,...,X_r)$.

Забелешка 38. Повеќедимензионалните генераторни функции ги имаат истите својства како и еднодимензионалните генераторни функции. Така, на пример, со помош на парцијалните изводи на $\varphi_X(s_1,s_2,...,s_r)$ можат да се пресметаат нивните факториелни моменти

$$E(X_1^{[k_1]}X_2^{[k_2]}...X_r^{[k_r]})=\frac{\partial^{k_1+k_2+...+k_r}\varphi_\xi(s_1,s_2,...,s_r)}{\partial s_1^{k_1}\partial s_2^{k_2}...\partial s_r^{k_r}}\Big|_{s_1=s_2=...=s_r=1} \qquad (8)$$

Пример 68. Генераторната функција на полиномната распределба

$$P\{X=(n_1,n_2,...,n_r)\}=\frac{n!}{n_1!n_2!...n_r!}p_1^{n_1}p_2^{n_2}...p_r^{n_r}\ ,$$

$\sum\limits_{i=1}^{r}p_i=1,\ \sum\limits_{i=1}^{r}n_i=n$, е дадена со

$$\varphi_X(s_1,s_2,...,s_r)=(s_1p_1+s_2p_2+...+s_rp_r)^n\,.$$

Обидете се, користејќи ја формулата (8), да ги пресметате факториелните моменти на оваа распределба. ♦

ЗАДАЧИ

1. Најдете ја генераторната функција за рамномерната распределба сконцентрирана на точките $0,1,2,...,N-1$. Со помош на генераторната функција пресметајте ги математичкото очекување и дисперзијата.

2. Случајната променлива X има генераторна функција $\varphi_X(s)=1-\sqrt{1-s}$. Најдете ја соодветната функција на распределба. Што може да се каже за математичкото очекување? Пресметајте $P\{X<12\}$.

3. Случајната променлива X има генераторна функција $\varphi_X(s)=e^{s-1}$ и од неа независната случајна променлива X има распределба $P\{X=0\}=\frac{1}{3}$ и $P\{X=1\}=\frac{2}{3}$. Најдете ја распределбата на случајната променлива $Z=X+Y$.

4. Нека a,b,c,d се реални броеви такви, што $c\neq 0$ и $ad-bc\neq 0$. Докажете, дека функцијата $\varphi(t)=\frac{a+bt}{c+dt}$ е генераторна функција ако се исполнети условите $\frac{a}{c}=\alpha$, $\frac{d}{c}=-\beta$ и $\frac{b}{c}=1-\alpha-\beta$ за некои реални броеви α и β такви, што $0\leq\alpha,\beta<1$.

5. Нека $\varphi_X(s)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}p_k s^k$ е генераторна функција за случајната променлива X. Докажете дека генераторната функција на низата $q_n=P\{X>n\}$ е дадена со
$$Q(s)=\sum_{k=1}^{\infty}q_k s^k=\frac{1-\varphi_X(s)}{1-s}$$
и дека притоа важи $Q(1)=E(X)$.

6. Независните случајни променливи X,Y и Z се сите рамномерно распределени на множеството $\{1,2,...,k\}$. Пресметајте $P\{X+Y=Z\}$.

7. Независните случајни променливи X_1,X_2,X_3,X_4 се рамномерно распределени на множеството $\{0,1,2\}$. Најдете го законот на распределба на нивниот збир.

8. Коцка за играње фрламе се додека r, $r\in\mathbf{N}$ пати не падне петка или шестка. Најдете ја генераторната функција за случајната променлива X која го претставува бројот на потребните фрлања на коцката.

9. Нека во Бернулиевата шема со X_r го означиме бројот на експериментите до r – от успех.
   a) Каква распределба има случајната променлива X ?
   b) Докажете дека $X_r=r-1+Y_1+Y_2+...+Y_r$, каде $\{Y_i\}$ се независни и еднакво распределени случајни променливи, при што Y_k е бројот на експериментите меѓу $(k-1)$ – от и k – от успех.
   c) Докажете дека $\varphi_{X_r}(s)=\frac{s^{r-1}p^r}{(1-qs)^r}$.
   d) Докажете дека $P\{X_r=j\}=C_j^{r-1}p^r q^{j-r+1}$, $j=r-1,r,r+1,...$

Забелешка. Понекогаш наместо X_r се разгледува случајната променлива $Z_r=X_r-r+1$. Јасно,
$$P\{Z_r=k\}=C_{r+k-1}^{k}p^r q^k,\ k=0,1,2,....$$
За случајната променлива Z_r ќе велиме дека има *негативна биномна распределба,* во ознака $NB\{r,p\}$.

10. Нека случајната променлива X има $NB\{r,p\}$ распределба. Докажете дека

a) $E(X)=\frac{rq}{p}$ и $D(X)=\frac{rq}{p^2}$,

b) ако X има $NB\{n,p\}$ и Y има $NB\{m,p\}$ распределба, тогаш $X+Y$ има $NB\{n+m,p\}$ распределба.

13. НЕРАВЕНСТВО НА ЧЕБИШЕВ

Во оваа точка ќе го разгледаме неравенството на Чебишев кое само по себе е од посебен интерес, меѓутоа е од особена корист при докажувањето на таканречените закони на големите броеви.

Теорема 44 (неравенство на Марков). Ако случајната променлива X е ненегативна и постои $E(X)$, тогаш за секој $x>0$ важи

$$P\{X\geq x\}\leq\frac{E(X)}{x}. \tag{1}$$

Доказ. За математичкото очекување на случајната променлива X имаме

$$E(X)=\sum_j x_jP\{X=x_j\}=\sum_{j:x_j<x}x_jP\{X=x_j\}+\sum_{j:x_j\geq x}x_jP\{X=x_j\}$$
$$\geq\sum_{j:x_j\geq x}x_jP\{X=x_j\}\geq\sum_{j:x_j\geq x}xP\{X=x_j\}=x\sum_{j:x_j\geq x}P\{X=x_j\}.$$

Последното неравенство е точно бидејќи сите x_j се заменети со x, а сумирањето се врши само по оние индекси j за кои $x_j\geq x$. Понатаму, збирот на сите веројатности $P\{X=x_j\}$ за $x_j\geq x$ е еднаков на веројатноста на настанот $\{X\geq x\}$, т.е. на $P\{X\geq x\}$ и ако замениме во последното неравенство го добиваме неравенството $E(X)\geq xP\{X\geq x\}$ кое е еквивалентно на неравенството (1). ♦

Пример 69. Нека X е случајна променлива, φ е монотона позитивна функција таква што $E(\varphi(X))=m$ постои. Докажете дека

$$P\{X\geq t\}\leq\frac{m}{\varphi(t)}.$$

Решение. Функцијата е монотона и ненегативна, па затоа настаните $\{X\geq t\}$ и $\{\varphi(X)\geq\varphi(t)\}$ се еквивалентни. Според тоа,

$$P\{X\geq t\}=P\{\varphi(X)\geq\varphi(t)\}$$

и како за случајната променлива $\varphi(X)$ се исполнети условите од теорема 44 добиваме

$$P\{X\geq t\}=P\{\varphi(X)\geq\varphi(t)\}\leq\frac{E(\varphi(X))}{\varphi(t)}=\frac{m}{\varphi(t)}.$$ ♦

Последица 11 (Неравенство на Чебишев). Ако за случајната променлива X постојат конечни математичко очекување $E(X)$ и дисперзија $D(X)$, тогаш за секој $x>0$ важи

$$P\{|X-E(X)|\geq x\}\leq \frac{D(X)}{x^2}. \qquad (2)$$

Доказ. Настаните $\{|X-E(X)|\geq x\}$ и $\{(X-E(X))^2\geq x^2\}$ се еднакви и затоа

$$P\{|X-E(X)|\geq x\}=P\{(X-E(X))^2\geq x^2\}.$$

Понатаму, случајната променлива $Y=(X-E(X))^2$ е ненегативна и притоа важи $E(Y)=E(X-E(X))^2=D(X)$, т.е исполнети се условите од теорема 44. Затоа $P\{Y\geq x^2\}\leq \frac{E(Y)}{x^2}$, т.е.

$$P\{|X-E(X)|\geq x\}=P\{(X-E(X))^2\geq x^2\}\leq \frac{D(X)}{x^2}. \ \blacklozenge$$

Пример 70. При изработка на серија од еднакви производи со должина $l=10mm$ производот се смета дека е исправен ако $\Delta l=\pm 0,1mm$. Оценете ја веројатноста дека случајно избран производ е неисправен, ако $\sigma^2=0,0025$.

Решение. Нека X е должината на производот. Според условот $E(X)=10$, $\varepsilon=0,1$ и $D(X)=0,0025$. Треба да ја оцениме веројатноста $P\{|X-10|>0,1\}$. Од неравенството (2) на Чебишев имаме

$$P\{|X-10|>0,1\}\leq \frac{0,0025}{0,1^2}=0,25,$$

што значи дека бараната веројатност не надминува 0,25. ♦

Забелешка 39. Неравенството на Чебишев (2) покажува дека при мали дисперзии $D(X)$ со веројатност блиска до 1, случајната променлива X е концентрирана околу математичкото очекување $E(X)$. Навистина, од неравенството (2) имаме:

$$-P\{|X-E(X)|\geq x\}\geq -\frac{D(X)}{x^2}, \text{ т.е. } 1-P\{|X-E(X)|\geq x\}\geq 1-\frac{D(X)}{x^2}$$

и како

$$1-P\{|X-E(X)|\geq x\}=P\{|X-E(X)|<x\}$$

добиваме

$$P\{|X-E(X)|<x\}\geq 1-\frac{D(X)}{x^2} \qquad (3)$$

Пример 71 (правило на "три сигми"). Ќе ја оцениме веројатноста на следниов случаен настан: отклонувањето на која било случајна променлива X која има конечна дисперзија $D(X)=\sigma^2$, по апсолутна вредност да е помало од 3σ.

Акло го искористиме неравенството (3), за $x=3\sigma$, имаме

$$P\{|X-E(X)|<3\sigma\}\geq 1-\frac{D(X)}{(3\sigma)^2}=1-\frac{\sigma^2}{9\sigma^2}=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}\,.\ ♦$$

Неравенствата на Марков и Чебишев имаат посебно значење во теоријата на веројатност, па затоа ги искажавме во посебни тврдења. Меѓутоа, истите се непосредна последица од следново попшто тврдење.

Теорема 45. Нека X е случајна променлива и $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ е ненегативна функција таква што постои постои $E(g(X))$, тогаш за секој $x>0$ важи

$$P\{g(X)\geq x\}\leq \frac{E(g(X))}{x}. \tag{4}$$

Доказ. За математичкото очекување на случајната променлива $g(X)$ имаме

$$\begin{aligned}E(g(X))&=\sum_j g(x_j)P\{X=x_j\}=\sum_{j:g(x_j)<x} g(x_j)P\{X=x_j\}+\sum_{j:g(x_j)\geq x} g(x_j)P\{X=x_j\}\\ &\geq \sum_{j:g(x_j)\geq x} g(x_j)P\{X=x_j\}\geq \sum_{j:g(x_j)\geq x} xP\{X=x_j\}\\ &=x\sum_{j:g(x_j)\geq x} P\{X=x_j\}=xP\{g(X)\geq x\},\end{aligned}$$

од каде следува неравенството (4). ♦

ЗАДАЧИ

1. Користејќи го неравенството на Чебишев, оценете ја веројатноста дека при 2000 фрлања на монета бројот на паднатите грбови Y ќе се наоѓа меѓу 900 и 1100.
2. Нека X и Y се независни случајни променливи такви што $E(X)=1, E(Y)=2$, $D(X)=\frac{1}{4}$ и $D(Y)=\frac{1}{16}$. За неравенството на Чебишев најдете симетричен интервал околу $E(X+Y)$ во кој случајната променлива $Z=X+Y$ се наоѓа со веројатност не помала од 0,9.
3. Нека X е случајна променлива таква, што $E(X)=0$ и $D(X)=\sigma^2\neq 0$.
   a) Докажете, дека за произволни позитивни броеви a и c е исполнето неравенството
   $$P\{X\geq a\}\leq \frac{1}{(a+c)^2}E((X+c)^2).$$
   b) Докажете ги неравенствата:
   $$P\{X\geq a\}\leq \frac{\sigma^2}{a^2+\sigma^2},\ \text{за}\ a\geq 0\ \text{и}$$
   $$P\{X\geq a\}\geq \frac{a^2}{a^2+\sigma^2},\ \text{за}\ a\leq 0.$$
4. Нека $\{X_n\}$ е низа случајни променливи за кои постојат диспезиите $D(X_n)$, $n=1,2,3,...$ и нека $\lim\limits_{n\to\infty} D(X_n)=0$. Докажете дека за секој $\varepsilon>0$ важи $\lim\limits_{n\to\infty} P\{|X_n-E(X_n)|>\varepsilon\}=0$.
5. Ако $E(|X|^n)<+\infty$, докажете дека $\lim\limits_{n\to\infty} x^nP\{|X|>x\}=0$.
6. a) Докажете дека за секој $x>0$ постои случајна променлива X таква, што

$$E(|X|) \le x \text{ и } P\{|X| \ge x\} = \frac{E(|X|)}{x}$$

b) Докажете дека за секој $x > 0$ постои случајна променлива X таква, што

$$D(|X|) \le x^2 \text{ и } P\{|X - E(X)| \ge x\} = \frac{D(X)}{x^2}.$$

7. Нека X и Y се случајни променливи со коефициент на корелација ρ. Докажете дека за секој $\varepsilon > 0$ важи

$$P\{|X - E(X)| \ge \varepsilon\sqrt{D(X)} \quad \text{или} \quad |Y - E(Y)| \ge \varepsilon\sqrt{D(Y)}\} \le \frac{1}{\varepsilon^2}(1 + \sqrt{1 - \rho^2}).$$

8. Нека $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$ е монотоно растечка функција на $\mathbf{R}^+$ и X случајната променлива таква што $|X(\omega)| \le C$, за секој $\omega \in \Omega$. Докажете дека за секој $\varepsilon > 0$ важи

$$\frac{E(g(X)) - g(\varepsilon)}{g(C)} \le P\{|X - E(X)| \ge \varepsilon\} \le \frac{E(g(X - E(X)))}{g(\varepsilon)}.$$

14. КЛАСИЧНИ НЕРАВЕНСТВА ЗА МАТЕМАТИЧКОТО ОЧЕКУВАЊЕ

Многу познати неравенства за збирови од математичката анализа се применуваат во теоријата на веројатноста, при што во тие неравенства се користи поимот математичко очекување. Ќе разгледаме некои од овие неравенства.

Дефиниција 29. За функцијата $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ велиме дека е конвексна ако за секои $x, y \in \mathbf{R}$ и за секој $t \in (0,1)$ важи

$$g(tx + (1-t)y) \le tg(x) + (1-t)g(y). \tag{1}$$

Забелешка 40. Во врска со конвексни функции точни се следниве тврдења:

а) Нека $f : (a,b) \to \mathbf{R}$ и за секој $x \in (a,b)$ постои $f'(x)$. Функцијата f е конвексна (строго конвексна) на (a,b) ако и само ако функцијата f' монотоно расте (строго монотоно расте) на (a,b).

б) Нека $f : (a,b) \to \mathbf{R}$ и за секој $x \in (a,b)$ постои $f''(x)$. Функцијата f е конвексна на (a,b) ако и само ако за секој $x \in (a,b)$ важи $f''(x) \ge 0$. Функцијата f е строго конвексна на (a,b) ако и само ако $f''(x) \ge 0$, за секој $x \in (a,b)$ и не постои интервал $(\alpha, \beta) \subset (a,b)$ таков, што за секој $x \in (\alpha, \beta)$ важи $f''(x) = 0$.

в) Функцијата $f : (a,b) \to \mathbf{R}$ е конвексна ако и само ако за секоја точка $x_0 \in (a,b)$ функцијата

$$g(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad x \in (a,b) \setminus \{x_0\}$$

монотоно расте на (a,b),

чии докази може да се видат во [77].

Теорема 46 (неравенство на Јенсен). Ако функцијата $g(x)$ е конвексна на интервалот (c,d), тогаш за секоја случајна променлива X, за која $g(E(X))$ постои и таква што $X(\Omega)\subset(c,d)$, е исполнето неравенството

$$E(g(X))\geq g(E(X))\,. \qquad (2)$$

Доказ. Бидејќи функцијата $g(x)$ е конвексна на интервалот (c,d), од забелешка 40 в) следува дека за секој $a\in(c,d)$ функцијата $\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$ монотоно расте на $(c,d)\setminus\{a\}$, т.е.

$$\frac{g(x_1)-g(a)}{x_1-a}<\frac{g(x_2)-g(a)}{x_2-a}\,,$$

за секои $x_1,x_2\in(c,d)\setminus\{a\}$ такви, што $x_1<x_2$. Според тоа,

$$\sup_{x_1<a}\frac{g(x_1)-g(a)}{x_1-a}\leq\inf_{a<x_2}\frac{g(x_2)-g(a)}{x_2-a}\,,$$

па затоа постои $k\in\mathbf{R}$ таков, што

$$g(x)\geq g(a)+k(x-a) \qquad (3)$$

за секој $x\in(c,d)$. Ако во (3) ставиме $x=X,\ a=E(X)$ го добиваме неравенството

$$g(X)\geq g(E(X))+k(X-E(X))\,.$$

Сега од монотоноста на математичкото очекување следува

$$E(g(X))\geq g(E(X))+k(E(X)-E(X))=g(E(X))\,.\blacklozenge$$

Забелешка 41. Ако функцијата g е конкавна на интервалот (c,d), тогаш $-g$ е конвексна на (c,d), па затоа

$$E(-g(X))\geq -g(E(X))\,,$$

што значи

$$-E(g(X))\geq -g(E(X))$$

т.е.

$$E(g(X))\leq g(E(X))\,. \qquad (4)$$

Пример 72. За природниот број $N>1$ да ја разгледаме рамномерната распределба

$$P\{X=m\}=\tfrac{1}{2N+1},\quad m=\pm N,\pm(N-1),...,\pm1,0$$

и функциите $f(x)=(x+1)^3$ и $h(x)=(x-1)^3$ кои не се ниту конкавни ниту конвексни на произволен интервал (c,d) таков, што $X(\Omega)\subset(c,d)$. Имаме $E(X)=0$, па затоа

$$E(f(X))=\tfrac{1}{2N+1}\sum_{m=-N}^{N}(m+1)^3=N^2+N+1>1=f(E(X))\ \text{и}$$

$$E(h(X)) = \frac{1}{2N+1}\sum_{m=-N}^{N}(m-1)^3 = -(N^2+N+1) < -1 = h(E(X))$$

т.е. за функцијата f е исполнето неравенството (2), а за функцијата h е исполнето неравенството (4). ♦

Последица 12 (неравенство на Љапунов). За секои $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ такви, што $\alpha \le \beta$ важи

$$(E(|X|^{\alpha}))^{\frac{1}{\alpha}} \le (E(|X|^{\beta}))^{\frac{1}{\beta}}. \qquad (5)$$

Доказ. Да ја разгледаме непрекинатата конвексна функција $g(x) = x^{\frac{\beta}{\alpha}}$, $x \ge 0, \beta \ge 0$ и случајната променлива $Y = |X|^{\alpha}$. Од неравенството на Јенсен следува неравенството $E(g(Y)) \ge g(E(Y))$, т.е. неравенството

$$E(|X|^{\alpha \cdot \frac{\beta}{\alpha}}) \ge (E(|X|^{\alpha}))^{\frac{\beta}{\alpha}}$$

кое е еквивалентно на неравенството (5). Ако $\beta < 0$, ја разгледуваме непрекинатата конвексна функција $g(x) = x^{\frac{\alpha}{\beta}}, x \ge 0$ и случајната променлива $Y = |X|^{\beta}$. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ♦

Теорема 47 (неравенство на Коши-Буњаковски-Шварц). За секои случајни променливи X и Y, такви што $E(X^2) < +\infty$ и $E(Y^2) < +\infty$ важи

$$|E(XY)| \le \sqrt{E(X^2) \cdot E(Y^2)}. \qquad (6)$$

Доказ. Прво да забележиме дека од неравенството $2|XY| \le X^2 + Y^2$ и од монотоноста на математичкото очекување следува дека

$$2E(|XY|) \le E(X^2) + E(Y^2) < +\infty.$$

Понатаму, за секои случајни променливи X и Y важи $(xX+Y)^2 \ge 0$, за секој $x \in \mathbf{R}$ па затоа за секои случајни променливи X и Y важи $E((xX+Y)^2) \ge 0$, за секој $x \in \mathbf{R}$ што значи дека за секој $x \in \mathbf{R}$ полиномот

$$Q(x) = x^2 E(X^2) + 2xE(XY) + E(Y^2)$$

е ненегативен. Според тоа, дискриминанта на $Q(x)$ е непозитивна, т.е. точно е неравенството

$$(E(XY))^2 \le E(X^2) \cdot E(Y^2),$$

кое е еквивалентно на неравенството (6). ♦

Теорема 48 (неравенство на Холдер). Нека $p, q \in \mathbf{R}$, $p, q > 1$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, а X и Y се случајни променливи $E(|X|^p) < \infty, E(|X|^q) < \infty$, тогаш

$$E(|XY|) \le (E(|X|^p))^{1/p}(E(|Y|^q))^{1/q} . \tag{7}$$

Доказ. Во неравенството на Јанг $ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$, $a,b > 0$, $p,q > 1$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, (види [77]), ставаме

$$a = \frac{|X|}{(E(|X|^p))^{1/p}} \text{ и } b = \frac{|Y|}{(E(|Y|^q))^{1/q}}$$

и последователно добиваме

$$\frac{|X|}{(E(|X|^p))^{1/p}} \cdot \frac{|Y|}{(E(|Y|^q))^{1/q}} \le \frac{1}{p}\frac{|X|^p}{E(|X|^p)} + \frac{1}{q}\frac{|Y|^q}{E(|Y|^q)} ,$$

$$|XY| \le (E(|X|^p))^{1/p}(E(|Y|^q))^{1/q}[\frac{1}{p}\frac{|X|^p}{E(|X|^p)} + \frac{1}{q}\frac{|Y|^q}{E(|Y|^q)}] .$$

Конечно, од последното неравенство и својствата на математичкото очекување следува $E(|XY|) < \infty$ и неравенството (7). ♦

Забелешка 42. Неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц непосредно следува од неравенството на Холдер при $p = q = 2$.

Лема 4. Ако $a,b > 0$ и $p \ge 1$, тогаш

$$(a+b)^p \le 2^{p-1}(a^p + b^p) . \tag{8}$$

Доказ. Да ја разгледаме функцијата $F(x) = (a+x)^p - 2^{p-1}(a^p + x^p)$. Имаме,

$$F'(x) = p(a+x)^{p-1} - 2^{p-1}px^{p-1}$$

и како $p \ge 1$, добиваме $F'(a) = 0, F'(x) > 0$ за $x < a$ и $F'(x) < 0$ за $x > a$. Затоа

$$F(b) \le \max F(x) = F(a) ,$$

т.е. точно е неравенството (8). ♦

Теорема 49 (неравенство на Минковски). Ако $1 \le p < \infty$ и X и Y се случајни променливи такви што $E(|X|^p) < +\infty$ и $E(|Y|^p) < +\infty$, тогаш

$$[E(|X+Y|^p)]^{\frac{1}{p}} \le [E(|X|^p)]^{\frac{1}{p}} + [E(|Y|^p)]^{\frac{1}{p}} . \tag{9}$$

Доказ. Од неравенството (8), при $a = |X|$ и $b = |Y|$ имаме

$$|X+Y|^p \le (|X| + |Y|)^p \le 2^{p-1}(|X|^p + |Y|^p) .$$

Сега, од својствата на математичкото очекување и претпоставката $E(|X|^p) < +\infty$ и $E(|Y|^p) < +\infty$ следува

$$E(|X+Y|^p) \le 2^{p-1}[E(|X|^p) + E(|Y|^p)] < +\infty .$$

Ако $E(|X+Y|^p)=0$, тогаш равенството (9) е очигледно. Нека претпоставиме дека $E(|X+Y|^p)>0$. За $p=1$, неравенството (9) следува од неравенството

$$|X+Y| \leq |X|+|Y|.$$

Нека $p>1$ и да земеме $q>1$ таков, што $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Тогаш,

$$|X+Y|^p = |X+Y|\cdot|X+Y|^{p-1} \leq |X|\cdot|X+Y|^{p-1}+|Y|\cdot|X+Y|^{p-1}. \quad (10)$$

Понатаму, од неравенството (10), неравенството на Холдер и равенството $(p-1)q=p$ следува неравенството

$$\begin{aligned} E(|X+Y|^p) &\leq E(|X|\cdot|X+Y|^{p-1})+E(|Y|\cdot|X+Y|^{p-1}) \\ &\leq [E(|X|^p)]^{\frac{1}{p}}\cdot[E(|X+Y|^{q(p-1)})]^{\frac{1}{q}}+[E(|Y|^p)]^{\frac{1}{p}}\cdot[E(|X+Y|^{q(p-1)})]^{\frac{1}{q}} \\ &= [E(|X+Y|^p)]^{\frac{1}{q}}\{[E(|X|^p)]^{\frac{1}{p}}+[E(|Y|^p)]^{\frac{1}{p}}\}, \end{aligned}$$

кое при $E(|X+Y|^p)>0$ е еквивалентно на неравенството (9). ♦

Пример 73. За случајната променлива X важи

$$E(|X|)=a\geq 0 \text{ и } E(X^2)=1.$$

Докажете дека за секој $\lambda\in[0,1]$ важи

$$P\{|X|\geq \lambda a\}\geq(1-\lambda)^2a^2.$$

Решение. Да означиме $A=\{|X|\geq\lambda a\}$. Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц имаме

$$[E(|X|I_A)]^2\leq E(X^2)\cdot E(I_A^2)=1\cdot E(I_A)=P(A)=P\{|X|\geq\lambda a\}.$$

Од друга страна, точно е неравенството

$$E(|X|I_A)\geq E((|X|-\lambda a)I_A)\geq E(|X|-\lambda a)=(1-\lambda)a.$$

Конечно, неравенството следува од последните две неравенства. ♦

Пример 74. За ненултата случајна променлива X важи

$$m_p=E(|X|^p)<+\infty, \text{ за секој } p\geq 0.$$

Ќе докажеме дека ако $0\leq a\leq b\leq c$, тогаш

$$m_c^{b-a}m_b^{a-c}m_a^{c-b}\geq 1.$$

Навистина, ако означиме $\frac{c-b}{c-a}=\frac{1}{p}$ и $\frac{b-a}{c-a}=\frac{1}{q}$, тогаш $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ и треба да го докажеме неравенството

$$E(|X|^b)\leq[E(|X|^a)]^{\frac{1}{p}}[E(|X|^c)]^{\frac{1}{q}},$$

кое следува од неравенството на Холдер бидејќи $\frac{a}{p}+\frac{c}{q}=b$. ♦

ЗАДАЧИ

1. За која случајна променлива X нејзините обични апсолутни моменти $E(|X|^n)$, $n=1,2,...$ формираат геометриска прогресија.
2. За која случајна променлива X нејзините обични апсолутни моменти $E(|X|^n)$, $n=1,2,...$ формираат аритметичка прогресија.
3. Нека за случајната променлива X важи $E(|X|^n)<+\infty$. Докажете дека важат неравенствата

$$E(|X|)\leq[E(|X|^2)]^{1/2}\leq[E(|X|^3)]^{1/3}\leq...\leq[E(|X|^n)]^{1/n}$$

15. СЛАБИ ЗАКОНИ НА ГОЛЕМИТЕ БРОЕВИ

Неравенството на Чебишев овозможува едноставно да се докажат некои гранични случаи, во кои учествуваат низи независни случајни променливи. Во следните теореми земаме дека за секој n случајните променливи $X_1, X_2, X_3,...$ се определени на некој дискретен простор на веројатности $(\Omega, \boldsymbol{A}, P)$.

Теорема 50 (Марков). Ако $X_1, X_2, X_3,...$ е низа случајни променливи (независни или зависни) над ист простор на веројатности таква што

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}D(\sum_{i=1}^{n}X_i)=0, \tag{1}$$

тогаш за секој $\varepsilon>0$ важи

$$\lim_{n\to\infty}P\{|\frac{X_1+...+X_n}{n}-\frac{E(X_1)+...+E(X_n)}{n}|<\varepsilon\}=1. \tag{2}$$

Доказ. Нека

$$Y_n=X_1+...+X_n,\ n\geq1.$$

Од неравенството (3) во забелешка 39 добиваме дека за случајната променлива $\frac{Y_n}{n}$ и за секој $\varepsilon>0$ важи

$$1\geq P\{|\frac{Y_n}{n}-\frac{E(Y_n)}{n}|<\varepsilon\}\geq1-\frac{D(Y_n)}{n^2\varepsilon^2}. \tag{3}$$

Конечно, ако во неравенствата (3) преминеме кон граница кога $n\to\infty$ и земеме предвид дека

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}D(Y_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}D(\sum_{i=1}^{n}X_i)=0$$

го добиваме равенството (1). ♦

Пример 75. Да ја разгледаме низата независни случајни променливи

$$X_n : \begin{pmatrix} -n\alpha & 0 & n\alpha \\ \frac{1}{2^n} & 1-\frac{1}{2^{n-1}} & \frac{1}{2^n} \end{pmatrix},\ n = 1,2,3,\ldots\ .$$

За дадената низа имаме

$$E(X_n) = -n\alpha\frac{1}{2^n} + 0\cdot(1-\frac{1}{2^{n-1}}) + n\alpha\frac{1}{2^n} = 0,\ n = 1,2,3,\ldots \text{ и}$$

$$D(X_n) = E(X_n^2) - [E(X_n)]^2 = \frac{n^2\alpha^2}{2^n} + 0^2\cdot(1-\frac{1}{2^{n-1}}) + \frac{n^2\alpha^2}{2^n} = \frac{n^2\alpha^2}{2^{n-1}},\ n = 1,2,3,\ldots,$$

па затоа

$$\begin{aligned} \frac{1}{k^2}D(\sum_{n=1}^{k} X_n) &= \frac{1}{k^2}D(\sum_{n=1}^{k} X_n) = \frac{1}{k^2}\sum_{n=1}^{k} D(X_n) = \frac{1}{k^2}\sum_{n=1}^{k}\frac{n^2\alpha^2}{2^{n-1}} = \frac{\alpha^2}{k^2}\sum_{n=1}^{k}\frac{n^2}{2^{n-1}} \\ &= \frac{\alpha^2}{k^2}\sum_{n=1}^{[\sqrt{k}]}\frac{n^2}{2^{n-1}} + \frac{\alpha^2}{k^2}\sum_{n=[\sqrt{k}]+1}^{k}\frac{n^2}{2^{n-1}} < \frac{\alpha^2}{k^2}\sum_{n=1}^{[\sqrt{k}]} n^2 + \alpha^2\sum_{n=[\sqrt{k}]+1}^{k}\frac{1}{2^{n-1}} \\ &= \frac{\alpha^2}{k^2}\frac{[\sqrt{k}]([\sqrt{k}]+1)(2[\sqrt{k}]+1)}{6} + \alpha^2(\frac{1}{2^{[\sqrt{k}]}} + \ldots + \frac{1}{2^k}) \\ &< \frac{\alpha^2}{k^2}\frac{\sqrt{k}(\sqrt{k}+1)(2\sqrt{k}+1)}{6} + \alpha^2\frac{1}{2^{[\sqrt{k}]-1}} < \alpha^2(\frac{\sqrt{k}(\sqrt{k}+1)(2\sqrt{k}+1)}{6k^2} + \frac{1}{2^{\sqrt{k}-2}}) \to 0, \end{aligned}$$

кога $k \to \infty$, што значи дека за дадената низа важи теоремата на Марков. ♦

Последица 13 (теорема на Чебишев). Ако $X_1, X_2, X_3, \ldots$ се независни случајни променливи над ист простор на веројатности и постои константа $c > 0$ таква што $D(X_i) \le c,\ i = 1,2,\ldots$, тогаш за секој $\varepsilon > 0$ важи (2).

Доказ. Случајните променливи $X_1, X_2, X_3, \ldots$ се независни, па затоа ако се искористи дека $D(X_i) \le c,\ i = 1,2,\ldots$, добиваме

$$\frac{1}{n^2}D(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D(X_i) \le \frac{nc}{n^2} = \frac{c}{n} \to 0,\ n \to \infty,$$

т.е. исполнет е условот (1), па од теоремата на Марков следува дека за секој $\varepsilon > 0$ важи (2). ♦

Пример 76. Да ја разгледаме низата независни случајни променливи

$$X_n : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix},\ n = 1,2,3,\ldots\ .$$

За секој $n = 1,2,3,\ldots$ важи

$$E(X_n) = -1\cdot\frac{1}{4} + 0\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot\frac{1}{4} = 0,\ D(X_n) = E(X_n^2) = (-1)^2\cdot\frac{1}{4} + 0\cdot\frac{1}{2} + (1)^2\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

што значи дека за дадената низа важи теоремата на Чебишев. ♦

Последица 14. Ако случајните променливи $X_1, X_2, X_3, \ldots$ се независни и еднакво распределени, $E(X_i) = a,\ D(X_i) = \sigma^2 < \infty,\ i = 1,2,3,\ldots$, тогаш за секој $\varepsilon > 0$ важи:

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n} - a| < \varepsilon\} = 1. \qquad (4)$$

Доказ. Од условот следува дека

$$\frac{E(X_1)+E(X_2)+...+E(X_n)}{n}=\frac{na}{n}=a\ .$$

Понатаму, $D(X_i)=\sigma^2<\infty,\ i=1,2,3,...$, па затоа се исполнети условите од теоремата на Чебишев и ако замениме во (2) добиваме дека важи (4). ♦

Забелешка 43. а) Граничните равенства од типот (2) и (4) во литературата се познати како *слаби закони на големите броеви*. Слабите закони на големите броеви тврдат дека кога $n\to\infty$ со веројатност блиска до 1 аритметичката средина на n независни собирци при определени услови станува блиска до константа.

б) Нека $X_1,X_2,...,X_n$ се независни набљудувања (мерења) на случајната променлива X . Тоа значи дека случајните променливи $X_1,X_2,...,X_n$ се независни и еднакво распределени како и случајната променлива X . Затоа $E(X_i)=E(X)=a,$ $D(X_i)=\sigma^2<\infty,\ i=1,2,3,...$ па од последица 14 следува дека за големи броеви n со веројатност блиска до 1 математичкото очекување $E(X)$ и $\frac{X_1+...+X_n}{n}$ се разликуваат за помалку од ε .

Теорема 51 (Бернули). Нека Y_n е бројот на успесите при n испитувања во шемата на Бернули со веројатност $p,\ 0<p<1$ во секое испитување. Тогаш за секој $\varepsilon>0$ важи

$$\lim_{n\to\infty}P\{|\frac{Y_n}{n}-p|<\varepsilon\}=1\,. \tag{5}$$

Доказ. Случајната променлива Y_n можеме да ја претставиме како збир од n независни собироци $X_1+X_2+...+X_n$, каде $X_i=1$, ако во $i-$от експеримент имаме успех и $X_i=0$ во спротивен случај. Бидејќи

$$E(X_i)=p,\ \ D(X_i)=p(1-p),\ \ i=1,2,...,$$

тврдењето на теоремата следува од последица 14 применета на случајната променлива $Y_n=X_1+X_2+...+X_n$. ♦

Забелешка 44. Теоремата на Бернули тврди дека за големи n разликата меѓу релативната честота $\frac{Y_n}{n}$ и веројатноста за успех е мала, со веројатност блиска до 1. Затоа, во услови кога важи својството за стабилност на релативната честота, може да се примени следниот принцип: *при единечно испитување настан со мала веројатност практично е невозможен*. Така, ако се земе серија од n испитувања во Бернулиевата шема за единечно испитување и ако избереме ε таков, што $\frac{D(Y_n)}{n\varepsilon^2}=\frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}$ е мала величина, тогаш можеме да тврдиме дека неравенството $|\frac{Y_n}{n}-p|>\varepsilon$ практично е невозможно.

Во следниот пример ќе покажеме како практично може да се искористат претходните резултати во случај на n испитувања во шемата на Бернули.

Пример 77. Кој е најмалиот број n испитувања кои треба да се направат во шемата на Бернули за да за произволен $p, 0<p<1$ важи

$$P\{|\tfrac{Y_n}{n}-p|<\varepsilon\}\geq 1-\alpha \tag{6}$$

каде α е однапред даден мал позитивен број?

Решение. Со Y_n да го означиме бројот на успесите во шемата на Бернули и нека $X=\frac{Y_n}{n}$. Тогаш,

$$E(X)=E(\tfrac{Y_n}{n})=\tfrac{np}{n}=p\,,\ D(X)=D(\tfrac{Y_n}{n})=\tfrac{npq}{n^2}=\tfrac{pq}{n}$$

и ако го искористиме неравенството Чебишев добиваме $P\{|\frac{Y_n}{n}-p|\geq\varepsilon\}\leq\frac{pq}{n\varepsilon^2}$. Но, $p+q=1$, па затоа $pq\leq\frac{1}{4}$ и ако замениме во последното неравенство наоѓаме

$$P\{|\tfrac{Y_n}{n}-p|\geq\varepsilon\}\leq\tfrac{1}{4n\varepsilon^2}\,,$$

т.е.

$$P\{|\tfrac{Y_n}{n}-p|<\varepsilon\}=1-P\{|\tfrac{Y_n}{n}-p|\geq\varepsilon\}\geq 1-\tfrac{1}{4n\varepsilon^2}\,.$$

Конечно, за да го најдеме најмалиот број n испитувања кои треба да се направат во шемата на Бернули за да за произволен $p, 0<p<1$ важи (5) доволно е да земеме $1-\frac{1}{4n\varepsilon^2}\geq 1-\alpha$ од каде наоѓаме

$$n\geq\tfrac{1}{4\alpha\varepsilon^2}\,. \tag{7}$$

Ако е, на пример, $\varepsilon=0,02$ и $\alpha=0,05$, тогаш од (7) следува дека, ако направиме 12500 експерименти, релацијата (6) важи без обзир на вредноста на бројот p. ♦

Резултатите дадени во следниве две теореми се поопшти форми на слаби закони на големи броеви. Доказот на следнава теорема ќе го презентираме покасно, при изучувањето на таканаречените карактеристични функции.

Теорема 52 (Хинчин). Ако $X_1, X_2, X_3, \ldots$ се независни и еднакво распределени дискретни случајни променливи такви што $E(X_i)=a<+\infty$ $i=1,2,3,\ldots$, тогаш за секој $\varepsilon>0$ важи (4). ♦

Пример 78. Нека $\zeta(s)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ е Римановата ζ – функција и да ја разгледаме низата независни и еднаквораспределени случајни променливи $X_1, X_2, X_3, \ldots$ зададена со

$$P\{X_i=n\}=\tfrac{1}{n^3\zeta(3)}\,,\ n=1,2,3,\ldots\,,\ \text{за}\ i=1,2,3,\ldots\,.$$

Притоа, за секој $i=1,2,3,\ldots$ имаме

$$E(X_i)=\sum_{n=1}^{\infty} nP\{X_i=n\}=\sum_{n=1}^{\infty} n\frac{1}{n^3\zeta(3)}=\frac{1}{\zeta(3)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\zeta(2)}{\zeta(3)}<\infty \quad \text{и}$$

$$D(X_i)=E(X_i^2)-[E(X_i)]^2=\sum_{n=1}^{\infty} n^2P\{X_i=n\}-[\frac{\zeta(2)}{\zeta(3)}]^2=\frac{1}{\zeta(3)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}-[\frac{\zeta(2)}{\zeta(3)}]^2=+\infty\,,$$

па затоа за низата $X_1, X_2, X_3,...$ не важат теоремите на Марков и Чебишев, но важи теоремата на Хинчин. ♦

Теорема 53. Нека $\varepsilon>0$. За низата случајни променливи $\{Y_n\}$ важи

$$\lim_{n\to\infty} P\{|Y_n|\geq\varepsilon\}=0\,, \tag{8}$$

ако и само ако

$$\lim_{n\to\infty} E(\frac{Y_n^2}{1+Y_n^2})=0\,. \tag{9}$$

Доказ. Нека е исполнет условот (9) и нека $\varepsilon>0$ е дадено. Ако за секој $n\in\mathbf{N}$ случајната променлива Y_n прима вредности $y_{nk}, k=1,2,3,...$ соодветно со веројатности $p_{nk}, k=1,2,3,...$, тогаш од $|y_{nk}|\geq\varepsilon$ следува

$$y_{nk}^2+y_{nk}^2\varepsilon^2\geq\varepsilon^2+y_{nk}^2\varepsilon^2\,, \text{ т.е. } \frac{y_{nk}^2}{1+y_{nk}^2}\frac{1+\varepsilon^2}{\varepsilon^2}\geq 1\,,$$

па затоа

$$0\leq P\{|Y_n|\geq\varepsilon\}=\sum_{|y_{nk}|\geq\varepsilon} p_{nk}\leq\frac{1+\varepsilon^2}{\varepsilon^2}\sum_{|y_{nk}|\geq\varepsilon}\frac{y_{nk}^2}{1+y_{nk}^2}p_{nk}\leq\frac{1+\varepsilon^2}{\varepsilon^2}\sum_{k}\frac{y_{nk}^2}{1+y_{nk}^2}p_{nk}=\frac{1+\varepsilon^2}{\varepsilon^2}E(\frac{Y_n^2}{1+Y_n^2})\to 0\,,$$

кога $n\to\infty$, што значи точно е равенството (8).

Нека е исполнет условот (8) и нека $\varepsilon>0$ е дадено. Тогаш

$$\begin{aligned}P\{|Y_n|\geq\varepsilon\}&=\sum_{|y_{nk}|\geq\varepsilon} p_{nk}\geq\sum_{|y_{nk}|\geq\varepsilon}\frac{y_{nk}^2}{1+y_{nk}^2}p_{nk}=\sum_{k}\frac{y_{nk}^2}{1+y_{nk}^2}p_{nk}-\sum_{|y_{nk}|<\varepsilon}\frac{y_{nk}^2}{1+y_{nk}^2}p_{nk}\\&\geq E(\frac{Y_n^2}{1+Y_n^2})-\sum_{|y_{nk}|<\varepsilon} y_{nk}^2p_{nk}\geq E(\frac{Y_n^2}{1+Y_n^2})-\varepsilon^2\sum_{|y_{nk}|<\varepsilon} p_{nk}\geq E(\frac{Y_n^2}{1+Y_n^2})-\varepsilon^2.\end{aligned}$$

Според тоа,

$$0\leq E(\frac{Y_n^2}{1+Y_n^2})\leq P\{|Y_n|\geq\varepsilon\}+\varepsilon^2\,,$$

и ако во последните неравенстваземеме $n\to\infty$, тогаш од произволноста на $\varepsilon>0$ следува равенството (9). ♦

Последица 15. За низата случајни променливи $\{X_n\}$ условот (9) е потребен и доволен услов за равенството (2), каде случајните променливи $\{Y_n\}$ се определени со

$$Y_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k-E(X_k)),\ n=1,2,3,...\,. \tag{10}$$

Доказ. При ознаки (10) условот (2) е еквивалентен со условот

$$1=\lim_{n\to\infty}P\{|Y_n|<\varepsilon\}=1-\lim_{n\to\infty}P\{|Y_n|\geq\varepsilon\},$$

а овој е еквивалентен со условот (8). Сега тврдењето следува од теорема 53. ♦

Забелешка 45. Последица 15 всушност е најопштата форма на слабиот закон на големите броеви. Меѓутоа, важно е да напоменеме дека во практиката условот (9) многу тешко можеме да го провериме.

ЗАДАЧИ

1. Дали за низата случајни променливи

$$X_n:\begin{pmatrix}-\sqrt{\ln n} & \sqrt{\ln n}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix},\ n=1,2,3,...$$

важи теоремата на Марков?

2. Дали за низата случајни променливи

$$X_n:\begin{pmatrix}-k & 0 & k\\ \frac{1}{2\sqrt{k}} & 1-\frac{1}{\sqrt{k}} & \frac{1}{2\sqrt{k}}\end{pmatrix},\ n=1,2,3,...$$

важи теоремата на Марков?

3. Дадена е низата $X_n,\ n=1,2,3,...$ случајни променливи кои имаат исто математичко очекување и ограничени дисперзии. Ако за секои $i,k\in\mathbf{N}$ коваријансите

$$\operatorname{cov}(X_i,X_k)=E[(X_i-E(X_i))(X_k-E(X_k))]$$

се ненегативни, докажете дека може да се примени теоремата на Марков.

4. (*Теорема на Бернштајн*). Нека $X_n,\ n=1,2,3,...$ е низа случајни променливи такви што $D(X_n)\leq C$ и $\rho_{ik}\to 0,$ ако $|i-k|\to\infty$, каде ρ_{ik} е коефициентот на корелација меѓу случајните променливи X_i и Y_k. Тогаш за случајните променливи $X_n,\ n=1,2,3,...$ важи теоремата на Марков. Докажете!

5. Дали за низата случајни променливи

$$X_n:\begin{pmatrix}-\sqrt{n} & 0 & \sqrt{n}\\ \frac{1}{n} & 1-\frac{2}{n} & \frac{1}{n}\end{pmatrix},\ n=2,3,...$$

важи теоремата на Чебишев?

6. Дали за низата случајни променливи

$$X_n:\begin{pmatrix}-n\alpha & 0 & n\alpha\\ \frac{1}{2n^2} & 1-\frac{1}{n^2} & \frac{1}{2n^2}\end{pmatrix},\ n=1,2,3,...\ .$$

важи теоремата на Чебишев?

7. Дадена е низата независни случајни променливи $X_n,\ n=1,2,3,...$ при што за секој $n\in\mathbf{N}$ случајната променлива X_n прима вредности $-n,-n+1,...,-1,0,1,...,n-1,n$ со веројатности $P\{X_n=k\}=P\{X_n=-k\}=\frac{1}{3k^3}$, за $k=1,2,...,n$ и $P\{X_n=0\}=1-\frac{2}{3}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^3}$. Дали во случајов може да се примени теоремата на Марков?

ВТОР ДЕЛ

ОПШТА ТЕОРИЈА НА ВЕРОЈАТНОСТИ

ГЛАВА III
СЛУЧАЈНИ ПРОМЕНЛИВИ

1. ПОИМ ЗА СЛУЧАЈНА ПРОМЕНЛИВА

Нека S е произволно непразно множество, $\boldsymbol{A}$ е фамилија подмножества од S и $\sigma(\boldsymbol{A})$ е $\sigma-$алгебрата генерирана од фамилијата $\boldsymbol{A}$. Понатаму, ако S_1 и S_2 се произволни множества, $h: S_1 \to S_2$ и $\boldsymbol{A}_2$ е фамилија подмножества од S_2, тогаш означуваме

$$h^{-1}(\boldsymbol{A}_2) = \{h^{-1}(A) \mid A \in \boldsymbol{A}_2\} . \tag{1}$$

Според тоа, $h^{-1}(\boldsymbol{A}_2)$ е фамилија подмножества од S_1.

Лема 1. Нека S_1 и S_2 се произволни множества и $h: S_1 \to S_2$.

а) Ако $\boldsymbol{S}_2$ е $\sigma-$алгебра на S_2, тогаш $h^{-1}(\boldsymbol{S}_2)$ е $\sigma-$алгебра на S_1.

б) Ако $\boldsymbol{S}_1$ е $\sigma-$алгебра на S_1, тогаш фамилијата $\boldsymbol{E}_2 = \{E \subseteq S_2, h^{-1}(E) \in \boldsymbol{S}_1\}$ е $\sigma-$алгебра на S_2.

Доказ. а) Од $S_2 \in \boldsymbol{S}_2$ следува $S_1 = h^{-1}(S_2) \in h^{-1}(\boldsymbol{S}_2)$. Ако $A \in h^{-1}(\boldsymbol{S}_2)$, тогаш $A = h^{-1}(B)$, $B \in \boldsymbol{S}_2$, па затоа $\overline{A} = \overline{h^{-1}(B)} = h^{-1}(\overline{B})$. Но, $\boldsymbol{S}_2$ е $\sigma-$алгебра, што значи $\overline{B} \in \boldsymbol{S}_2$, односно $\overline{A} \in h^{-1}(\boldsymbol{S}_2)$, што значи дека $h^{-1}(\boldsymbol{S}_2)$ е затворена во однос на комплементот. Нека $A_n \in h^{-1}(\boldsymbol{S}_2), n \in \mathbf{N}$, т.е. $A_n = h^{-1}(B_n), B_n \in \boldsymbol{S}_2, n \in \mathbf{N}$. Тоа значи дека $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} h^{-1}(B_n) = h^{-1}(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n)$. Но, $\boldsymbol{S}_2$ е $\sigma-$алгебра, што значи $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n \in \boldsymbol{S}_2$, па затоа $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in h^{-1}(\boldsymbol{S}_2)$, односно $h^{-1}(\boldsymbol{S}_2)$ е $\sigma-$алгебра на S_1.

б) Имаме $h^{-1}(S_2) = S_1 \in \boldsymbol{S}_1$, па затоа $S_2 \in \boldsymbol{E}_2$. Од $E \in \boldsymbol{E}_2$, имаме $h^{-1}(E) \in \boldsymbol{S}_1$, па затоа бидејќи $\boldsymbol{S}_1$ е $\sigma-$алгебра добиваме $h^{-1}(\overline{E}) = \overline{h^{-1}(E)} \in \boldsymbol{S}_1$, што значи дека $\overline{E} \in \boldsymbol{E}_2$, т.е. $\boldsymbol{E}_2$ е затворена во однос на комплементот. Нека $E_n \in \boldsymbol{E}_2, n \in \mathbf{N}$, т.е. $h^{-1}(E_n) \in \boldsymbol{S}_1, n \in \mathbf{N}$. Но, $\boldsymbol{S}_1$ е $\sigma-$алгебра, па затоа $h^{-1}(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} h^{-1}(E_n) \in \boldsymbol{S}_1$ што значи $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n \in \boldsymbol{E}_2$, односно $\boldsymbol{E}_2$ е $\sigma-$алгебра на S_2. ♦

Лема 2. Ако S_1 и S_2 се произволни множества, $h: S_1 \to S_2$ и $\boldsymbol{A}_2$ е фамилија подмножества од S_2. Тогаш

$$\sigma(h^{-1}(\boldsymbol{A}_2)) = h^{-1}(\sigma(\boldsymbol{A}_2))\,. \qquad (2)$$

Доказ. Според лема 1 а) фамилијата $h^{-1}(\sigma(\boldsymbol{A}_2))$ е $\sigma-$алгебра на S_1 и како $h^{-1}(\boldsymbol{A}_2) \subseteq h^{-1}(\sigma(\boldsymbol{A}_2))$ добиваме $\sigma(h^{-1}(\boldsymbol{A}_2)) \subseteq h^{-1}(\sigma(\boldsymbol{A}_2))$.

Од друга страна, според лема 1 б) фамилијата

$$\boldsymbol{E}_2 = \{E \subseteq S_2, h^{-1}(E) \in \sigma(h^{-1}(\boldsymbol{A}_2))\}$$

е $\sigma-$алгебра на S_2 и како $\boldsymbol{A}_2 \subseteq \boldsymbol{E}_2$ добиваме $\sigma(\boldsymbol{A}_2) \subseteq \boldsymbol{E}_2$, т.е.

$$h^{-1}(\sigma(\boldsymbol{A}_2)) \subseteq h^{-1}(\boldsymbol{E}_2) \subseteq h^{-1}(\sigma(\boldsymbol{A}_2))\,. \blacklozenge$$

Дефиниција 1. Нека $(\Omega, \boldsymbol{A}, P)$ е произволен простор на веројатности и $\boldsymbol{B}$ е $\sigma-$алгебрата Борелови множества. Функцијата $X : \Omega \to \mathbf{R}$, $X = X(\omega)$, $\omega \in \Omega$ ја нарекуваме *случајна променлива*, ако $X^{-1}(B) \in \boldsymbol{A}$, за секое множество $B \in \boldsymbol{B}$, т.е. ако $X^{-1}(\boldsymbol{B}) \subseteq \boldsymbol{A}$. Фамилијата случајни променливи во натамошните разгледувања ќе ја означуваме со $\Re$.

Како и претходно, во натамошните разгледувања случајните променливи ќе ги означуваме со големите букви од латиничната азбука $X, Y, Z, \dots$. Во терминологијата на теоријата на мера случајната променлива е реална Борел-измерлива функција, т.е. функција од Ω во $\mathbf{R}$ измерлива во парот $\sigma-$алгебри $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$. Од лема 1 а) следува дека фамилијата

$$\boldsymbol{A}_X = \{A \mid A = X^{-1}(B), B \in \boldsymbol{B}\}$$

е $\sigma-$алгебра, која ја нарекуваме *$\sigma-$алгебра генерирана* од X и ја означуваме со $\boldsymbol{A}_X = \sigma(X)$. Јасно, $\sigma(X) \subseteq \boldsymbol{A}$.

Теорема 1. Нека $(\Omega, \boldsymbol{A}, P)$ е простор на веројатности и $X : \Omega \to \mathbf{R}$. Следниве тврдења се еквивалентни:

а) X е случајна променлива.

б) $X^{-1}(G) \in \boldsymbol{A}$, за секое отворено множество G во $\mathbf{R}$,

в) $X^{-1}((-\infty, x]) = \{X \le x\} \in \boldsymbol{A}$, за секој $x \in \mathbf{R}$,

г) $X^{-1}((-\infty, x)) = \{X < x\} \in \boldsymbol{A}$, за секој $x \in \mathbf{R}$,

д) $X^{-1}((x, \infty)) = \{X > x\} \in \boldsymbol{A}$, за секој $x \in \mathbf{R}$,

ѓ) $X^{-1}([x, \infty)) = \{X \ge x\} \in \boldsymbol{A}$, за секој $x \in \mathbf{R}$.

Доказ. Нека X е случајна променлива. Според пример I 15 за секое отворено множество G во $\mathbf{R}$ и за секој $x \in \mathbf{R}$ важи $G, (-\infty, x], (-\infty, x), [x, \infty), (x, \infty) \in \boldsymbol{B}$, па од дефиниција 1 следува дека

$$X^{-1}(G),\, X^{-1}((-\infty, x]),\, X^{-1}((-\infty, x)),\, X^{-1}([x, \infty)),\, X^{-1}((x, \infty)) \in \boldsymbol{B},$$

што значи дека се точни тврдењата б) – ѓ).

Ќе докажеме дека од б) следува а). Нека $\boldsymbol{U}$ е фамилијата од сите отворени множества во $\mathbf{R}$. Но, секое отворено множество е пребројлива унија на отворени интервали, па затоа $\boldsymbol{U} \subseteq \boldsymbol{B}$, што значи $\sigma(\boldsymbol{U}) \subseteq \boldsymbol{B}$. Од друга страна, од

$$(a,b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} (a, b+\tfrac{1}{n})$$

следува $\boldsymbol{S} = \{(a,b] \mid a,b \in \mathbf{R},\, a<b\} \subseteq \sigma(\boldsymbol{U})$, па затоа $\boldsymbol{B} = \sigma(\boldsymbol{S}) \subseteq \sigma(\boldsymbol{U})$, т.е $\boldsymbol{B} = \sigma(\boldsymbol{U})$. Од б) следува $X^{-1}(\boldsymbol{U}) \subseteq \boldsymbol{A}$, па од лема 2 добиваме

$$X^{-1}(\boldsymbol{B}) = X^{-1}(\sigma(\boldsymbol{U})) = \sigma(X^{-1}(\boldsymbol{U})) \subseteq \boldsymbol{A},$$

што според дефиниција 1 значи дека X е случајна променлива.

Доказите дека од тврдењата под в) – ѓ) следува тврдењето под а) се аналогни, со тоа што претходно треба да докажеме дека

$$\sigma\{(-\infty, x],\, x\in\mathbf{R}\} = \sigma\{(-\infty, x),\, x\in\mathbf{R}\} = \sigma\{[x,\infty),\, x\in\mathbf{R}\} = \sigma\{(x,\infty),\, x\in\mathbf{R}\} = \boldsymbol{B}.$$

Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ♦

Забелешка 1. а) Смислата на претходно изнесеното се состои во следново. Бидејќи не секое подмножество од Ω е настан, а сите настани формираат $\sigma-$алгебра подмножества $\boldsymbol{A}$, природно е да разгледуваме такви функции $X = X(\omega)$, за кои има смисол да се говори за веројатноста вредностите на X да припаѓаат во доволно елементарни подмножества од $\mathbf{R}$, во случајот, на пример, во множествата од видот $\{X \le x\}$. Притоа тврдењето во теорема 1 в) гарантира дека за секој x множеството $\{X \le x\}$ е настан, па затоа има смисол да се говори за неговата веројатност.

б) Од дефиниција 1 следува дека ако $(\Omega, \boldsymbol{A}, P)$ е дискретен простор на веројатности, т.е. ако секое подмножесво од Ω е настан, тогаш секоја реална функција на Ω е случајна променлива (види дефиниција II 1).

Пример 1. Нека $(\Omega, \boldsymbol{A}, P)$ е простор на веројаности, $A \subseteq \Omega$ и I_A е карактеристичната функција (индикаторот) на множеството A. Тогаш за $x \in \mathbf{R}$ имаме $I_A^{-1}([x,+\infty)) = \emptyset, A \text{ или } \Omega$. Според тоа, I_A е случајна променлива ако и само ако $A \in \boldsymbol{A}$, т.е. A е настан. ♦

Теорема 2. Нека X_1 и X_2 се реални функции дефинирани на комплетен простор на веројатности $(\Omega, \boldsymbol{A}, P)$ и нека $P\{\omega \in \Omega \mid X_1(\omega) \ne X_2(\omega)\} = 0$. Тогаш или и двете функции X_1 и X_2 се случајни променливи или ниту една од нив не е случајна променлива.

Доказ. Доволно е да докажеме дека ако една од функциите X_1 или X_2 е случајна променлива, тогаш и другата е случајна променлива. Да ставиме $D = \{\omega \in \Omega \mid X_1(\omega) \ne X_2(\omega)\}$. Од претпоставката следува дека $D \in \boldsymbol{A}$ и $P(D) = 0$.

Да претпоставиме дека X_1 е случајна променлива, т.е. дека $X_1^{-1}(B) \in \boldsymbol{A}$, за секој $B \in \boldsymbol{B}$. Тогаш за секој $B \in \boldsymbol{B}$ важи

$$X_2^{-1}(B)=[X_2^{-1}(B)\cap(\Omega\setminus D)]\cup[X_2^{-1}(B)\cap D]=[X_1^{-1}(B)\cap(\Omega\setminus D)]\cup[X_2^{-1}(B)\cap D].$$

Но, просторот $(\Omega,\boldsymbol{A},P)$ е комплетен и $P(D)=0$, па затоа $X_2^{-1}(B)\cap D\in\boldsymbol{A}$ и како $X_1^{-1}(B)\cap(\Omega\setminus D)\in\boldsymbol{A}$ добиваме $X_2^{-1}(B)\in\boldsymbol{A}$, т.е. X_2 е случајна променлива. ♦

Теорема 3. Нека X и Y се случајни променливи дефинирани над ист простор на веројатности $(\Omega,\boldsymbol{A},P)$. Тогаш

$$\{\omega\,|\,X(\omega)<Y(\omega)\}\in\boldsymbol{A},\ \{\omega\,|\,X(\omega)\le Y(\omega)\}\in\boldsymbol{A}\ \text{и}\ \{\omega\,|\,X(\omega)=Y(\omega)\}\in\boldsymbol{A}.$$

Доказ. Нека $\mathbf{Q}=\{q_1,q_2,q_3,...\}$ е множеството рационални броеви. Тогаш од теорема 1 и својствата на $\sigma-$алгебрата следува

$$\begin{aligned}\{\omega\,|\,X(\omega)<Y(\omega)\} &= \bigcup_{k=1}^{\infty}\{\omega\,|\,X(\omega)<q_k<Y(\omega)\}\\ &= \bigcup_{k=1}^{\infty}(\{\omega\,|\,X(\omega)<q_k\}\cap\{\omega\,|\,q_k<Y(\omega)\})\in\boldsymbol{A}.\end{aligned}$$

Понатаму,

$$\{\omega\,|\,X(\omega)\le Y(\omega)\}=\Omega\setminus\{\omega\,|\,Y(\omega)<X(\omega)\}\in\boldsymbol{A}\ \text{и}$$

$$\{\omega\,|\,X(\omega)=Y(\omega)\}=\{\omega\,|\,X(\omega)\le Y(\omega)\}\cap\{\omega\,|\,Y(\omega)\le X(\omega)\}\in\boldsymbol{A}.\ ♦$$

Забелешка 2. Во теоријата на веројатност понекогаш се појавуваат и функции дефинирани на Ω со вредности во проширеното множество реални броеви $\overline{\mathbf{R}}=\mathbf{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$. Ако земеме $\overline{\boldsymbol{B}}=\sigma\{(a,b]\,|-\infty\le a<b\le+\infty\})$, тогаш ја добиваме таканаречената *$\sigma-$алгебра Борелови множества на* $\overline{\mathbf{R}}$. Во теоријата на веројатност се разгледуваат функции $X:\Omega\to\overline{\mathbf{R}}$ такви што $X^{-1}(B)\in\boldsymbol{A}$, за секој $B\in\overline{\boldsymbol{B}}$. Овие функции исто така ќе ги нарекуваме случајни променливи или понекогаш ќе велиме дека тоа се проширени случајни променливи.

Нека X е таква функција и нека $A=\{\omega\in\Omega\,|\,|X(\omega)|=\infty\}$. Тогаш очигледно $A\in\boldsymbol{A}$. Воглавном се разгледуваат функции за кои $P(A)=0$. Тогаш обично воведуваме модифицирана функција X^* дефинирана со

$$X^*(\omega)=\begin{cases}X(\omega), & X(\omega)\in\mathbf{R},\\ 0, & |X(\omega)|=\infty,\end{cases}$$

за $\omega\in\Omega$. Тогаш $X^*:\Omega\to\mathbf{R}$ и $P(\{\omega\in\Omega\,|\,X(\omega)=X^*(\omega)\})=P(\overline{A})=1$. Во поголемиот број проблеми со кои се среќаваме функцијата X можеме да ја замениме со функцијата X^* која е случајна променлива. Имено, за $B\in\boldsymbol{B}$, $0\notin B$ важи

$$(X^*)^{-1}(B)=X^{-1}(B)\in\boldsymbol{A},$$

а за $B\in\boldsymbol{B}$, $0\in B$ имаме $(X^*)^{-1}(B)=X^{-1}(B)\cup A\in\boldsymbol{A}$.

ЗАДАЧИ

1. Докажете дека од тврдењата под в) – ѓ) од теорема 1 следува тврдењето а).
2. Нека $(\Omega, \boldsymbol{A}, P)$ е простор на веројатности и функцијата $X:\Omega \to \mathbf{R}$ е таква што за секој $x \in \mathbf{R}$ важи $\{\omega \mid X(\omega)=x\} \in \boldsymbol{A}$. Дали функцијата X мора да биде случајна променлива?
3. Нека $(\Omega, \boldsymbol{A}, P)$ е простор на веројатности и D е густо множество во $\mathbf{R}$. Ако функцијата $X:\Omega \to \mathbf{R}$ е таква што $X^{-1}((-\infty, x]) \in \boldsymbol{A}$, за секој $x \in D$, тогаш X е случајна променлива. Докажете!

2. ПОВЕЌЕДИМЕНЗИОНАЛНА СЛУЧАЈНА ПРОМЕНЛИВА

Со $\boldsymbol{B}^n$ да ја означиме $\sigma-$алгебрата генерирана од фамилијата од сите отворени подмножества на $\mathbf{R}^n$. $\boldsymbol{B}^n$ ја нарекуваме *$\sigma-$алгебра Борелови множества во* $\mathbf{R}^n$, а елементите на $\boldsymbol{B}^n$ ги нарекуваме Борелови множества во $\mathbf{R}^n$. Може да се докаже дека за секои $m,n \in \mathbf{N}$ важи

$$\boldsymbol{B}^{m+n} = \sigma\{E \times F \mid E \in \boldsymbol{B}^m, F \in \boldsymbol{B}^n\}. \tag{1}$$

Специјално во $\mathbf{R}^2$ имаме

$$\boldsymbol{B}^2 = \sigma\{E \times F \mid E, F \in \boldsymbol{B}\}. \tag{2}$$

Нека имаме случаен експеримент, чиј математички модел е просторот на веројатности $(\Omega, \boldsymbol{A}, P)$ и нека во врска со овој експеримент мериме две големини, X_1 и X_2. Тоа значи дека на секоја точка $\omega \in \Omega$ и придружуваме точка $X(\omega)=(X_1(\omega), X_2(\omega)) \in \mathbf{R}^2$. Често пати е од интерес да ја знаеме веројатноста $X_1(\omega) \in (a,b),\ X_2(\omega) \in (c,d)$, т.е. X да припаѓа на правоаголникот $(a,b)\times(c,d)$ во $\mathbf{R}^2$. Според тоа, сакаме да ја пресметаме веројатноста

$$\begin{aligned} P\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in (a,b)\times(c,d)\} &= P(X^{-1}((a,b)\times(c,d))) \\ &= P\{a < X_1 < b, c < X_2 < d\}. \end{aligned}$$

За да е ова можно, потребно е $X^{-1}(B) \in \boldsymbol{A}$ за секој правоаголник $B=(a,b)\times(c,d)$ во $\mathbf{R}^2$. Понатаму, бидејќи секое отворено множество во $\mathbf{R}^2$ е пребројлива унија на отворени правоаголници, лесно се докажува дека важи

$$\boldsymbol{B}^2 = \sigma\{(a,b)\times(c,d),\ a,b,c,d \in \mathbf{R},\ a<b,\ c<d\}.$$

Оттука и од лема 1 б) следува дека ако $X^{-1}(B) \in \boldsymbol{A}$ за секој правоаголник B во $\mathbf{R}^2$, тогаш $X^{-1}(B) \in \boldsymbol{A}$ за секое множество $B \in \boldsymbol{B}^2$. Во врска со претходно изнесеното ја имаме следнава дефиниција.

Дефиниција 2. Нека $(\Omega, \boldsymbol{A}, P)$ е простор на веројатности и $X:\Omega \to \mathbf{R}^n$. Ќе велиме дека X е $n-$*димензионална случајна променлива* (*случаен вектор*) на Ω ако $X^{-1}(B) \in \boldsymbol{A}$ за секое множество $B \in \boldsymbol{B}^n$, т.е. ако $X^{-1}(\boldsymbol{B}^n) \subseteq \boldsymbol{A}$.

Забелешка 3. а) Како и во случај на еднодимензионална случајна променлива и овде од лема 1 а) следува дека фамилијата $\boldsymbol{A}_{X_1,X_2,...,X_n} = \{A \mid A = X^{-1}(B), B \in \boldsymbol{B}^n\}$ е $\sigma-$алгебра, која ја нарекуваме *$\sigma-$алгебра генерирана од случајниот вектор* $X=(X_1, X_2,..., X_n)$ и ја означуваме со $\boldsymbol{A}_{X_1,X_2,...,X_n} = \sigma(X_1, X_2,..., X_n)$.

б) Аналогно како во множеството реални броеви $\mathbf{R}$ се дефинираат интервали во $\mathbf{R}^n$. Нека $a,b \in \mathbf{R}^n$, $a=(a_1,a_2,...,a_n)$ и $b=(b_1,b_2,...,b_n)$. Тогаш ставаме

$$(a,b] = \{x=(x_1,x_2,...,x_n) \in \mathbf{R}^n, a_i < x_i \le b_i, i=1,2,...,n\},$$

$$(-\infty,b] = \{x=(x_1,x_2,...,x_n) \in \mathbf{R}^n, x_i \le b_i, i=1,2,...,n\},$$

$$(a,+\infty) = \{x=(x_1,x_2,...,x_n) \in \mathbf{R}^n, x_i > b_i, i=1,2,...,n\} \text{ итн.}$$

Аналогно, како теорема 1 може да се докаже следнава теорема .

Теорема 4. Нека $(\Omega, \boldsymbol{A}, P)$ е простор на веројатности и $X:\Omega \to \mathbf{R}^n$. Следниве тврдења се еквивалентни:

а) X е случајна променлива.

б) $X^{-1}(G) \in \boldsymbol{A}$, за секое отворено множество G во $\mathbf{R}^n$,

в) $X^{-1}((-\infty, x]) = \{X \le x\} \in \boldsymbol{A}$, за секој $x \in \mathbf{R}^n$,

г) $X^{-1}((-\infty, x)) = \{X < x\} \in \boldsymbol{A}$, за секој $x \in \mathbf{R}^n$,

д) $X^{-1}((x, \infty)) = \{X > x\} \in \boldsymbol{A}$, за секој $x \in \mathbf{R}^n$,

ѓ) $X^{-1}([x, \infty)) = \{X \ge x\} \in \boldsymbol{A}$, за секој $x \in \mathbf{R}^n$. ♦

Нека $X:\Omega \to \mathbf{R}^n$ и $\pi_k : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ е $k-$тата проекција ($k=1,2,3,...,n$), т.е.

$$\pi_k(x) = \pi_k(x_1,x_2,...,x_n) = x_k,\ x=(x_1,x_2,...,x_n) \in \mathbf{R}^n .$$

Ставаме $X_k = \pi_k(X) = \pi_k \circ X : \Omega \to \mathbf{R}$. Тогаш $X=(X_1,X_2,...,X_n)$, односно

$$X(\omega) = (X_1(\omega), X_2(\omega),..., X_n(\omega)),\ \ \omega \in \Omega .$$

Точна е следнава теорема.

Теорема 5. Нека $X:\Omega \to \mathbf{R}^n$, $X=(X_1,X_2,...,X_n)$. Тогаш X е случаен вектор ако и само ако $X_1, X_2,..., X_n$ се еднодимензионални случајни променливи.

Доказ. Нека $X_1, X_2,..., X_n$ се случајни променливи. Тогаш за секој $x=(x_1,x_2,...,x_n) \in \mathbf{R}^n$ важи

$$X^{-1}((-\infty,x])=\{\omega\,|\,(X_1(\omega),...,X_n(\omega))\in(-\infty,x]\}=\bigcap_{k=1}^{n}\{\omega\,|\,(X_k(\omega)\in(-\infty,x_k]\}$$
$$=\bigcap_{k=1}^{n}X_k^{-1}((-\infty,x_k])\in\boldsymbol{A}.$$

Оттука и од теорема 4 в) следува дека $X=(X_1,X_2,...,X_n)$ е случаен вектор.

Обратно, нека X е случаен вектори нека $B\in\boldsymbol{B}$ е произволно Борелово множество. Тогаш множеството $B\times\underbrace{\mathbf{R}\times...\times\mathbf{R}}_{n-1\text{ пати}}$ е Борелово во просторот $\mathbf{R}^n$, па затоа

$$X_1^{-1}(B)=\{\omega\,|\,X_1(\omega)\in B\}=\{\omega\,|\,(X_1(\omega),X_2(\omega),...,X_n(\omega))\in B\times\mathbf{R}\times...\times\mathbf{R}\}$$
$$=X^{-1}(B\times\mathbf{R}\times...\times\mathbf{R})\in\boldsymbol{A}$$

што значи дека X_1 е случајна променлива. Аналогно се докажува дека $X_2,...,X_n$ се случајни променливи. ♦

ЗАДАЧИ

1. Нека $\boldsymbol{B}^n$ е *$\sigma-$алгебра Борелови множества во* $\mathbf{R}^n$ Докажете дека за секои $m,n\in\mathbf{N}$ важи $\boldsymbol{B}^{m+n}=\sigma\{E\times F\,|\,E\in\boldsymbol{B}^m,F\in\boldsymbol{B}^n\}$.
2. Докажете ја теорема 4.

3. БОРЕЛОВИ ФУНКЦИИ ОД СЛУЧАЈНИ ПРОМЕНЛИВИ

Нека $(\Omega,\boldsymbol{A},P)$ е простор на веројатности. Природно е да го разгледаме множеството случајни променливи дефинирани на Ω и да ги проучиме неговите својства. За таа цел прво ќе ги разгледаме таканаречените Борелови функции од случајни променливи.

Дефиниција 3. Нека $m,n\in\mathbf{N}$. Функцијата $g:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$ ја нарекуваме *Борелова функција* ако $g^{-1}(B)\in\boldsymbol{B}^n$, за секој $B\in\boldsymbol{B}^m$, т.е. ако $g^{-1}(\boldsymbol{B}^m)\subseteq\boldsymbol{B}^n$.

Лема 3. Ако функцијата $g:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$ е непрекината, тогаш таа е Борелова.

Доказ. Нека $\boldsymbol{U}^m$ е фамилијата отворени множества во $\mathbf{R}^m$, $m\in\mathbf{N}$. Тогаш $\boldsymbol{B}^m=\sigma(\boldsymbol{U}^m)$ и како функцијата g е непрекината добиваме дека инверзната слика на секое отворено множество во $\mathbf{R}^m$ е отворено множество во $\mathbf{R}^n$, што значи дека

$$g^{-1}(\boldsymbol{U}^m)\subseteq\boldsymbol{U}^n\subseteq\boldsymbol{B}^n.$$

Сега од лема 2 и од претходната инклузија следува дека

$$g^{-1}(\boldsymbol{B}^m)=g^{-1}(\sigma(\boldsymbol{U}^m))=\sigma(g^{-1}(\boldsymbol{U}^m))\subseteq\sigma(\boldsymbol{U}^n)=\boldsymbol{B}^n,$$

што значи дека функцијата g е Борелова. ♦

Последица 1. а) Секоја непрекината функција $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ е Борелова.

б) Секоја непрекината функција $g:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ е Борелова.

Доказ. Непосредно следува од лема 3 за: а) $m=n=1$ и б) $m=1$. ♦

Лема 4. Ако функцијата $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ е монотоно растечка, тогаш таа е Борелова.

Доказ. Функцијата g е монотоно растечка, па затоа за секој $x\in\mathbf{R}$ множеството $g^{-1}((-\infty,x])$ е интервал (проверете!), што значи е Борелово множество во $\mathbf{R}$. Но, секое Борелово множество B може да се добие со помош на интервали од видот $(-\infty,x]$ со најмногу пребројливо многу примени на операциите унија, пресек и комплемент, па ако ги искористиме равенствата

$$g^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)=\bigcup_{n=1}^{\infty}g^{-1}(A_n),\quad g^{-1}(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n)=\bigcap_{n=1}^{\infty}g^{-1}(A_n)$$

добиваме дека $g^{-1}(B)\in\boldsymbol{B}$, за секое $B\in\boldsymbol{B}$, т.е. функцијата g е Борелова. ♦

Забелешка 4. Аналогно на доказот во лема 4 може да се докаже дека секоја монотоно опаѓачка функција $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ е Борелова. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

Теорема 6. Ако $g_k:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$, $k=1,2,...$ е низа Борелови функции и за секој $x\in\mathbf{R}^n$ постои $\lim\limits_{k\to\infty}g_k(x)=g(x)\in\mathbf{R}$, тогаш $g:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ е Борелова функција.

Доказ. За секој реален број c важи

$$\begin{aligned}g^{-1}((-\infty,c))&=\{x\mid x\in\mathbf{R}^n,\,g(x)<c\}=\{x\mid\lim_{k\to\infty}g_k(x)<c\}\\&=\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcup_{p=1}^{\infty}\bigcap_{k=p}^{\infty}\{x\mid g_k(x)<c-\tfrac{1}{m}\}\\&=\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcup_{p=1}^{\infty}\bigcap_{k=p}^{\infty}g_k^{-1}((-\infty,c-\tfrac{1}{m}))\in\boldsymbol{B}^n.\end{aligned}$$

Но, секое Борелово множество B може да се добие со помош на интервали од видот $(-\infty,x)$ со најмногу пребројливо многу примени на операциите унија, пресек и комплемент, па ако ги искористиме равенствата

$$g^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)=\bigcup_{n=1}^{\infty}g^{-1}(A_n),\quad g^{-1}(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n)=\bigcap_{n=1}^{\infty}g^{-1}(A_n)$$

добиваме дека $g^{-1}(B) \in \boldsymbol{B}^n$, за секое $B \in \boldsymbol{B}$, т.е. функцијата g е Борелова. ♦

Теорема 7. а) Нека $(\Omega, \boldsymbol{A}, P)$ е простор на веројатности, X е случајна променлива и $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ е Борелова функција. Тогаш $g(X) = g \circ X$ е случајна променлива на $(\Omega, \boldsymbol{A}, P)$.

б) Нека $(\Omega, \boldsymbol{A}, P)$ е простор на веројатности, $g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, $m, n \in \mathbf{N}$ е Борелова функција и X е $n-$димензионален случаен вектор. Тогаш $g(X) = g \circ X$ е $m-$димензионален случаен вектор на $(\Omega, \boldsymbol{A}, P)$.

Доказ. а) Функцијата g е Борелова, па затоа за секое $B \in \boldsymbol{B}$ важи $g^{-1}(B) \in \boldsymbol{B}$. Но, X е случајна променлива, па затоа

$$[g(X)]^{-1}(B) = X^{-1}(g^{-1}(B)) \in \boldsymbol{A},$$

што според дефиниција 1 значи дека $g(X) = g \circ X$ е случајна променлива.

б) Јасно, $g(X) = g \circ X : \Omega \to \mathbf{R}^m$. Понатаму, функцијата g е Борелова, па затоа за секое $B \in \boldsymbol{B}^m$ важи $g^{-1}(B) \in \boldsymbol{B}^n$. Но, X е $n-$димензионален случаен вектор, па затоа

$$[g(X)]^{-1}(B) = X^{-1}(g^{-1}(B)) \in \boldsymbol{A},$$

што според дефиниција 2 значи дека $g(X) = g \circ X$ е $m-$димензионален случаен вектор на $(\Omega, \boldsymbol{A}, P)$. ♦

Последица 2. Ако $X_i, i = 1, 2, ..., n$ се случајни променливи дефинирани на просторот на веројатности $(\Omega, \boldsymbol{A}, P)$ и $g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ е Борелова функција, тогаш $Y = g(X_1, ..., X_n)$ е случајна променлива.

Доказ. Од теорема 5 следува дека $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$ е $n-$димензионална случајна променлива. Сега, тврдењето следува од теорема 7 б) за $m = 1$. ♦

Пример 2. Нека $X, X_1, X_2, ..., X_n$ се случајни променливи на просторот на веројатности $(\Omega, \boldsymbol{A}, P)$ и $C, a_i \in \mathbf{R}, i = 1, 2, ..., n$. Тогаш, следниве функции на Ω:

$$Y = X + C, Y = \sin X, Y = \cos X, Y = e^X, Y = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i, Y = (\sum_{i=1}^{n} X_i^2)^{1/2}, Y = \prod_{i=1}^{n} X_i.$$

се случајни променливи на $(\Omega, \boldsymbol{A}, P)$.

Навистина, функциите

$$g(x) = x + C,\ g(x) = \sin x,\ g(x) = \cos x \text{ и } g(x) = e^x$$

се непрекинати функции од $\mathbf{R}$ во $\mathbf{R}$, што значи дека се Борелови функции, па затоа од теорема 7 а) следува дека функциите

$$Y = X + C, Y = \sin X, Y = \cos X, Y = e^X$$

се случајни променливи. Слично, функциите

$$g(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i,\ g(x_1, x_2, ..., x_n) = (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^{1/2},\ g(x_1, x_2, ..., x_n) = \prod_{i=1}^{n} x_i$$

се непрекинати функции од $\mathbf{R}^n$ во $\mathbf{R}$, што значи дека се Борелови функции, па затоа од последица 2 следува дека функциите

$$Y = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i, Y = (\sum_{i=1}^{n} X_i^2)^{1/2}, Y = \prod_{i=1}^{n} X_i$$

се случајни променливи. ♦

Пример 3. Нека $(\Omega, \boldsymbol{A}, P)$ е простор на веројатности, $a_i \in \mathbf{R}, i = 1, 2, ..., n$ и $A_i, i = 1, 2, ..., n$ е разбивање на Ω. Според пример 1 индикаторот I_{A_i}, за секој $i = 1, 2, ..., n$ е случајна променлива на Ω. Сега од пример 2 следува дека функцијата $Y = \sum_{i=1}^{n} a_i I_{A_i}$ е случајна променлива, која ја нарекуваме *проста* (*елементарна*) *случајна променлива.* Фамилијата прости случајни променливи во натамошните разгледувања ќе ја означуваме со $\Re_0$. ♦

Забелешка 5. Понекогаш во теоријата на веројатност се појавуваат реални функции кои не се дефинирани на целиот простор Ω. Нека $E \subset \Omega$ и $X : E \to \mathbf{R}$. Ќе велиме дека X е *случајна променлива на* E ако

$$X^{-1}(B) = \{\omega \in E \mid X(\omega) \in B\} \in \boldsymbol{A}, \text{ за секој } B \in \boldsymbol{B}.$$

Специјално $X^{-1}(\mathbf{R}) = E \in \boldsymbol{A}$, т.е. доменот на случајната променлива треба да е настан.

Дефиниција 4. Нека $X_1, X_2 : \Omega \to \mathbf{R}$. Дефинираме функции $X_1 * X_2$ и $X_1 \bullet X_2$ на Ω со релациите

$$(X_1 * X_2)(\omega) = \max\{X_1(\omega), X_2(\omega)\},\ \omega \in \Omega \tag{1}$$

$$(X_1 \bullet X_2)(\omega) = \min\{X_1(\omega), X_2(\omega)\}, \omega \in \Omega. \tag{2}$$

Функциите $X^+ = X * 0$, $X^- = (-X) * 0$ ги нарекуваме *позитивен* и *негативен* дел од реалната функција X на Ω.

Јасно, X^+ и X^- се ненегативни реални функции и лесно се докажува дека важи $X = X^+ - X^-$, $| X |= X^+ + X^-$.

Теорема 8. Нека $(\Omega, \boldsymbol{A}, P)$ е простор на веројатности, X, X_1 и X_2 се случајни променливи и $c \in \mathbf{R}$. Тогаш функциите $X_1 * X_2$, $X_1 \bullet X_2$, X^+ и X^- се случајни променливи на $(\Omega, \boldsymbol{A}, P)$.

Доказ. а) X_1 и X_2 се случајни променливи, па од теорема 1 следува дека за секој $x \in \mathbf{R}$ важи $\{X_1 < x\}, \{X_2 < x\} \in \boldsymbol{A}$. Но, тоа значи дека за секој $x \in \mathbf{R}$ важи

$$\{(X_1 * X_2) < x\} = \{\max\{X_1, X_2\} < x\} = \{X_1 < x\} \cap \{X_2 < x\} \in \boldsymbol{A},$$

па повторно од теорема 1 следува дека $X_1 * X_2$ е случајна променлива на $(\Omega, \boldsymbol{A}, P)$.

Понатаму, повторно од теорема 1 следува дека за секој $x \in \mathbf{R}$ важи $\{X_1 > x\}$, $\{X_2 > x\} \in \boldsymbol{A}$. Но, тоа значи дека за секој $x \in \mathbf{R}$ важи

$$\{(X_1 \bullet X_2) < x\} = \{\min\{X_1, X_2\} > x\} = \{X_1 > x\} \cap \{X_2 > x\} \in \boldsymbol{A},$$

па повторно од теорема 1 следува дека $X_1 \bullet X_2$ е случајна променлива на $(\Omega, \boldsymbol{A}, P)$.

Конечно, од пример 2 следува дека $Y = 0$ и $Y = -X$ се случајни променливи и како $X^+ = X * 0$ и $X^- = (-X) * 0$ од претходно изнесеното следува дека X^+ и X^- се случајни променливи на $(\Omega, \boldsymbol{A}, P)$. ♦

Последица 3. X е случајна променлива ако и само ако X^+ и X^- се случајни променливи.

Доказ. Непосредно следува од пример 2 и теорема 8. ♦

Теорема 9. Нека $(\Omega, \boldsymbol{A}, P)$ е простор на веројатности, X_1 и X_2 се случајни променливи и $c \in \mathbf{R}$. Тогаш функциите $\frac{X_1}{X_2}$ и $|X_2|^c$ се случајни променливи на множеството $\{X_2 \neq 0\}$,

Доказ. Според пример 2 $Y = 0$ е случајна променлива, па од теорема 3 следува дека $\{X_2 = 0\} \in \boldsymbol{A}$, па затоа $E = \Omega \setminus \{X_2 = 0\} \in \boldsymbol{A}$. Функциите X_1 и X_2 се случајни променливи на множеството E (зошто?) и функцијата $g(x_1, x_2) = \frac{x_1}{x_2}$ е непрекината на $\mathbf{R}^2 \setminus \{(x,0) \mid x \in \mathbf{R}\}$, т.е. таа е Борелова функција на $\mathbf{R}^2 \setminus \{(x,0) \mid x \in \mathbf{R}\}$, па од последица 2 следува дека $Y = \frac{X_1}{X_2}$ е случајна променлива на множеството E.

Аналогно, ако $c > 0$, тогаш функцијата $g(x) = |x|^c$ е непрекината на $\mathbf{R}$, што значи таа е Борелова функција, па затоа $Y = |X_2|^c$ е случајна променлива. Ако $c < 0$, тогаш функцијата X_2 е случајна променлива на множеството E и како $g(x) = |x|^c$ е непрекината на $\mathbf{R} \setminus \{0\}$, т.е. е Борелова на $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ од теорема 7 а) следува дека $|X_2|^c$ е случајна променлива на множеството E. ♦

ЗАДАЧИ

1. Нека $A_n, n = 1, 2, 3, \dots$ се по парови дисјунктни настани. Докажете дека $I_{\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i} = \sum\limits_{i=1}^{\infty} I_{A_i}$.

2. Нека $(\Omega,\boldsymbol{A},P)$ е простор на веројатности и $X:\Omega\to\mathbf{R}$ е функција таква да функцијата
а) X^2, б) $|X|$, в) $\sin X$, г) 2^X, д) $[X]$
е случајна променлива. Дали X мора да биде случајна променлива?

3. Нека $X_1, X_2, ..., X_n$ се случајни променливи на просторот на веројатности $(\Omega,\boldsymbol{A},P)$. Со $\sigma(X_1, X_2, ..., X_n)$ да ја означиме минималната $\sigma-$ алгебра која ги содржи множествата од видот $\{\omega | X_k(\omega)\in B\}$, за $k=1,2,...,n$ и B е Борелово множество и нека $Y:\Omega\to\mathbf{R}$ е произволна функција. Докажете дека за секое Борелово множество B важи
$$\{\omega | Y(\omega)\in B\}\in\sigma(X_1, X_2, ..., X_n)$$
ако и само ако постои Борелова функција $g:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ таква да $Y=g(X_1, X_2, ..., X_n)$.

4. НИЗИ ОД СЛУЧАЈНИ ПРОМЕНЛИВИ

Често пати имаме потреба да разгледуваме настани поврзани со низи случајни променливи кои се дефинирани над ист простор на веројатности. Во оваа точка ќе разгледаме неколку тврдења поврзани со ова прашање, при што посебно внимание ќе обрнеме на таканаречената конвергенција скоро сигурно.

Теорема 10. Ако $\{X_n\}$ е низа случајни променливи дефинирани над ист простор на веројатности $(\Omega,\boldsymbol{A},P)$, тогаш функциите
$$\sup_n X_n,\quad \inf_n X_n,\quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\, X_n,\quad \underline{\lim_{n\to\infty}}\, X_n$$
се случајни променливи.

Доказ. Дефинираме функција $X:\Omega\to\overline{\mathbf{R}}$ таква што
$$X(\omega)=\sup_n X_n(\omega), \text{ за секој } \omega\in\Omega.$$
Бидејќи X_n, $n=1,2,3,...$ се случајни променливи, од теорема 1 следува дека за секој $x\in\mathbf{R}$ и за секој $n=1,2,3,...$ важи $\{X_n\le x\}\in\boldsymbol{A}$. Но, $\boldsymbol{A}$ е $\sigma-$ алгебра и од дефиницијата на супремумот следува дека
$$\{X\le x\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\{X_n\le x\}\in\boldsymbol{A}, \text{ за секој } x\in\mathbf{R},$$
што повторно според теорема 1 значи дека $X=\sup_n X_n$ е случајна променлива. Понатаму, ако земеме предвид дека
$$\inf_n X_n(\omega)=-\sup_n(-X_n(\omega)), \text{ за секој } \omega\in\Omega$$
добиваме дека $\inf_n X_n$ е случајна променлива.

Дефинираме функции

$$Y_k = \sup_{n\ge k} X_n, \text{ за } k=1,2,3,... \text{ и } Z_k = \inf_{n\ge k} X_n, \text{ за } k=1,2,3,... .$$

Од претходно изнесеното следува дека $\{Y_k\}$ и $\{Z_k\}$ се случајни променливи. Сега, повторно од претходните разгледувања следува дека

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} X_n = \inf_k (\sup_{n\ge k} X_n) = \inf_k Y_k \text{ и } \underline{\lim_{n\to\infty}} X_n = \sup_k (\inf_{n\ge k} X_n) = \sup_k Z_k$$

се случајни променливи. ♦

Дефиниција 5. За низата случајни променливи $\{X_n\}$ дефинирани над ист простор на веројатности $(\Omega, \boldsymbol{A}, P)$ ќе велиме дека *конвергира* кон случајната променлива X ако

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} X_n(\omega) = \underline{\lim_{n\to\infty}} X_n(\omega) = X(\omega), \text{ за секој } \omega \in \Omega.$$

Притоа пишуваме $\lim\limits_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$.

Последица 4. Нека $\{X_n\}$ е низа случајни променливи дефинирани над ист простор на веројатности $(\Omega, \boldsymbol{A}, P)$ и X е случајна променлива дефинирана на истиот простор на веројатности. Тогаш важи $\{\omega \mid \text{ постои } \lim\limits_{n\to\infty} X_n(\omega)\} \in \boldsymbol{A}$,

Доказ. Според дефиниција 5 имаме

$$\{\omega \mid \text{ постои } \lim_{n\to\infty} X_n(\omega)\} = \{\omega \in \Omega \mid \overline{\lim_{n\to\infty}} X_n(\omega) = \underline{\lim_{n\to\infty}} X_n(\omega)\}$$

и како $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} X_n$ и $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} X_n$ се случајни променливи од теорема 3 следува дека

$$\{\omega \mid \text{ постои } \lim_{n\to\infty} X_n(\omega)\} \in \boldsymbol{A}. ♦$$

Последица 5. Ако $\{X_n\}$ е низа случајни променливи дефинирани над ист простор на веројатности $(\Omega, \boldsymbol{A}, P)$ и ако $\{X_n\}$ конвергира на Ω кон X, тогаш и X е случајна променлива на Ω.

Доказ. Нека низата $\{X_n\}$ конвергира на Ω кон X, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$, $\omega \in \Omega$, тогаш за секој $\omega \in \Omega$ важи $X(\omega) = \lim\limits_{n\to\infty} X_n(\omega) = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} X_n(\omega) = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} X_n(\omega)$, од што следува дека X е случајна променлива. ♦

Дефиниција 6. За случајната променлива X определена на просторот на веројатности $(\Omega, \boldsymbol{A}, P)$ ќе велиме дека е *ненегативна* ако $X(\omega) \ge 0$, за секој $\omega \in \Omega$.

Теорема 11. Нека X е ненегативна случајна променлива на просторот на веројатности $(\Omega, \boldsymbol{A}, P)$. Тогаш постои монотоно растечка низа $\{X_n\}$ ненегативни прости случајни променливи таква да

$$\lim_{n\to\infty} X_n = X \text{ на } (\Omega, \boldsymbol{A}, P).$$

Доказ. За $\omega \in \Omega$ и $n \in \mathbf{N}$ дефинираме

$$X_n(\omega) = \frac{k-1}{2^n}, \text{ ако } \frac{k-1}{2^n} \le X(\omega) < \frac{k}{2^n}, k = 1, 2, \ldots, n2^n \text{ и}$$

$$X_n(\omega) = n, \text{ ако } X(\omega) \ge n.$$

Очигледно $\{X_n\}$ е низа прости ненегативни случајни променливи и важи $0 \le X_1 \le X_2 \le X_3 \le \ldots$. Потаму, ако $X(\omega) < n$, тогаш важи $|X_n(\omega) - X(\omega)| < \frac{1}{2^n}$, што значи $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = X$. ♦

Забелешка 6. а) Тврдењето од претходната теорема важи и кога X може да прима и вредност $+\infty$. Растечката низа $\{X_n\}$ ненегативни прости случајни променливи која конвергира кон X се конструира аналогно на доказот во теорема 11. Ако $X(\omega) = +\infty$, тогаш $X_n(\omega) = n$ за секој n.

б) Лесно се докажува дека, ако случајната променлива X во теорема 11 е ограничена, т.е. ако постои реален број $M > 0$ таков да $0 \le X(\omega) \le M$, $\omega \in \Omega$, тогаш конвергенцијата на низата $\{X_n\}$ кон X е рамномерна на $(\Omega, \boldsymbol{A}, P)$.

Последица 6. Ако X е случајна променлива на $(\Omega, \boldsymbol{A}, P)$, тогаш таа е граница на низа прости случајни променливи.

Доказ. Имаме $X = X^+ - X^-$, каде X^+ и X^- се ненегативни случајни променливи. Според теорема 11 постојат растечки низи $\{X_n\}$ и $\{Y_n\}$ ненегативни прости случајни променливи такви да $X^+ = \lim\limits_{n\to\infty} X_n$ и $X^- = \lim\limits_{n\to\infty} Y_n$. Ставаме $Z_n = X_n - Y_n$, $n \in \mathbf{N}$. Јасно $\{Z_n\}$ е низа прости случајни променливи за која важи $X = \lim\limits_{n\to\infty} Z_n$. ♦

На крајот од оваа точка ќе докажеме уште една теорема која често се користи во статистиката.

Теорема 12. а) Ако X и Y се случајни променливи на $(\Omega, \boldsymbol{A}, P)$ такви што $\sigma(Y) \subseteq \sigma(X)$, тогаш постои Борелова функција $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ таква што $Y = g(X)$, т.е. $Y(\omega) = g(X(\omega))$, за секој $\omega \in \Omega$.

б) Ако X и Y се случајни променливи и $Y = g(X)$ за некоја Борелова функција g, тогаш $\sigma(Y) \subseteq \sigma(X)$.

Доказ. б) Ако $Y = g(X)$ за некоја Борелова функција g, тогаш

$$\sigma(Y) = (g(X))^{-1}(\boldsymbol{B}) = X^{-1}(g^{-1}(\boldsymbol{B})) \subseteq X^{-1}(\boldsymbol{B}) = \sigma(X).$$

а) Нека претпоставиме дека $A \in \sigma(X)$ и $Y = I_A$. Тогаш постои $B \in \boldsymbol{B}$ таков што $A = \{\omega \mid X(\omega) \in B\}$. Да означиме

$$\chi_B(x) = \begin{cases} 1, & x \in B, \\ 0, & x \notin B. \end{cases}$$

Јасно, функцијата χ_B е Борелова и притоа важи $Y(\omega) = I_A(\omega) = \chi_B(X(\omega))$, за секој $\omega \in \Omega$.

Нека Y е проста функција таква што $\sigma(Y) \subseteq \sigma(X)$. Тогаш постојат $c_i \in \mathbf{R}$, $A_i \in \sigma(X)$, $i = 1, 2, ..., n$ такви да $Y(\omega) = \sum_{i=1}^{n} c_i I_{A_i}(\omega)$, за секој $\omega \in \Omega$. Од претходно изнесеното следува дека постојат Борелови функции $g_i : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $i = 1, 2, ..., n$ такви да $I_{A_i} = g_i(X)$, $i = 1, 2, ..., n$. Но, тогаш $Y = g(X)$, каде $g = \sum_{i=1}^{n} a_i g_i$ е Борелова функција.

Нека Y е произволна случајна променлива таква што $\sigma(Y) \subseteq \sigma(X)$. Од последица 6 следува дека постои низа прости случајни променливи $\{Y_n\}$ таква што $Y(\omega) = \lim_n Y_n(\omega)$, за секој $\omega \in \Omega$. Од претходно изнесеното следува дека постојат Борелови функции $g_n = g_n(x)$ такви што $Y_n(\omega) = g_n(X(\omega))$, за секој $\omega \in \Omega$ и притоа важи $Y(\omega) = \lim_n g_n(X(\omega))$, за секој $\omega \in \Omega$. Да означиме $B = \{x \in \mathbf{R} \mid \lim_n g_n(x) \text{ постои}\}$. Ова множество е Борелово. Затоа функцијата

$$g(x) = \begin{cases} \lim_n g_n(x), & x \in B \\ 0, & x \notin B, \end{cases}$$

е Борелова и притоа важи $Y(\omega) = \lim_n g_n(X(\omega)) = g(X(\omega))$, за секој $\omega \in \Omega$. ♦

ЗАДАЧИ

1. Нека I е непребројливо множество индекси и $\{X_i \mid i \in I\}$ е множество случајни променливи над ист простор на веројатности $(\Omega, \boldsymbol{A}, P)$. Да претпоставиме дека за секој $\omega \in \Omega$ важи $\sup_{i \in I} X_i(\omega) \in \mathbf{R}$ и $\inf_{i \in I} X_i(\omega) \in \mathbf{R}$. Докажете дека $\sup_{i \in I} X_i(\omega)$ и $\inf_{i \in I} X_i(\omega)$ не мора да се случајни променливи.
2. Нека X и Y се случајни променливи над ист простор на веројатности $(\Omega, \boldsymbol{A}, P)$ и $A \in \boldsymbol{A}$. Докажете дека функцијата $Z(\omega) = X(\omega) I_A + Y(\omega) I_{\overline{A}}$ е случајна променлива.

5. ФУНКЦИИ НА РАСПРЕДЕЛБА

Нека $(\Omega, \boldsymbol{A}, P)$ е простор на веројатности и X е случајна променлива на Ω. Множеството Ω на кое е дефинирана X може да биде произволно, но ако не интересираат проблемите поврзани со определена случајна променлива, тогаш во таков случај попогодно е да оперираме со простор на веројатности кој е индуциран од случајната променлива X.

Нека $B \in \boldsymbol{B}$ и да ставиме

$$P_X(B) = P(X^{-1}(B)) = P\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B\} = P\{X \in B\}. \qquad (1)$$

Со релацијата (1) е дефинирана функција $P_X : \boldsymbol{B} \to \mathbf{R}$. Лесно се проверува дека P_X е веројатностна мера на $\boldsymbol{B}$, која ја нарекуваме *веројатностна мера* (*веројатност*) *индуцирана* од случајната променлива X. Според тоа, на секоја случајна променлива X со помош на релацијата (1) на природен начин и се придружува простор на веројатности $(\mathbf{R}, \boldsymbol{B}, P_X)$, кој го нарекуваме *простор на веројатности индуциран од* X и проблемите поврзани со случајната променлива X се решаваат во рамките на овој простор на веројатности.

Дефиниција 7. Функцијата $P_X(B)$, $B \in \boldsymbol{B}$ ја нарекуваме *закон на распределба на случајната променлива* X.

Дефиниција 8. Нека X е случајна променлива на просторот на веројатности $(\Omega, \boldsymbol{A}, P)$. Функцијата $F_X : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ определена со

$$F_X(x) = P_X((-\infty, x]) = P(X^{-1}(-\infty, x]) = P\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \le x\} = P\{X \le x\}, \qquad (2)$$

$x \in \mathbf{R}$, ја нарекуваме *функција на распределба на случајната променлива* X. Често пати, ако е јасно за која случајна променлива станува збор, ќе ја користиме ознаката $F_X = F$

Забелешка 7. Со помош на функцијата на распределба (2) може да се изразат веројатностите X да припаѓа во интервалите од вид

$$x_1 \le x \le x_2,\ x_1 < x < x_2,\ x_1 < x \le x_2,\ x_1 \le x < x_2. \qquad (3)$$

Нека $x_1 < x_2$. Тогаш, од разложувањето на настанот $\{X \le x_2\}$ на збир од дисјунктни настани

$$\{X \le x_1\} + \{x_1 < X \le x_2\}$$

следува

$$P\{X \le x_2\} = P\{X \le x_1\} + P\{x_1 < X \le x_2\},$$

т.е.

$$P\{x_1 < X \le x_2\} = F(x_2) - F(x_1). \qquad (4)$$

Настанот $\{X < x\}$ може да се запише како пребројлива унија на дисјунктни настани

$$\{X \le x-1\} + \sum_{n=2}^{\infty} \{x - \tfrac{1}{n-1} < X \le x - \tfrac{1}{n}\},$$

па затоа од (4) следува

$$\begin{aligned} P\{X < x\} &= P\{X \le x-1\} + \sum_{n=2}^{\infty} P\{x - \tfrac{1}{n-1} < X \le x - \tfrac{1}{n}\} \\ &= F(x-1) + \lim_{k\to\infty} \sum_{n=2}^{k} (F(x - \tfrac{1}{n}) - F(x - \tfrac{1}{n-1}) = \lim_{k\to\infty} F(x - \tfrac{1}{k}) = F(x-0). \end{aligned} \qquad (5)$$

Во овој дел, а и понатаму ќе ги користиме ознаките

$$F(x-0)=\lim_{y\to x^-}F(y),\quad F(x+0)=\lim_{y\to x^+}F(y),$$
$$F(+\infty)=\lim_{y\to+\infty}F(y),\quad F(-\infty)=\lim_{y\to-\infty}F(y).$$

Со помош на (3), (4) и (5) лесно се покажува дека

$$\begin{aligned}P\{x_1\le X\le x_2\}&=F(x_2)-F(x_1-0),\\ P\{x_1< X< x_2\}&=F(x_2-0)-F(x_1),\\ P\{x_1\le X< x_2\}&=F(x_2-0)-F(x_1-0).\end{aligned}\qquad(6)$$

Теорема 13. За функцијата на распределба $F(x)$ на случајната променлива X се исполнети следните својства

i. $F(x)\in[0,1]$, за секој $x\in\mathbf{R}$,

ii. $F(x)$ монотоно расте,

iii. $F(x)$ е непрекината од десно,

iv. $F(+\infty)=1,\ F(-\infty)=0.$ (7)

Доказ. *i.* Непосредно следува од (2), т.е. од тоа што $F(x)$ е веројатност.

ii. Нека $x_1<x_2$. Од равенството (4) имаме

$$0\le P\{x_1<X\le x_2\}=F(x_2)-F(x_1).$$

iii. Следува од аксиомата за непрекинатост. Навистина, бидејќи

$$B_n=\{x<X\le x+\tfrac{1}{n}\}\to\varnothing,$$

добиваме дека

$$P(B_n)=F(x+\tfrac{1}{n})-F(x)\to 0$$

т.е. $F(x+0)=F(x)$.

iv. За настаните $A_n=\{X\le -n\}$, $n=1,2,\ldots$ важи $A_n\to\varnothing$, $n\to\infty$ па затоа

$$F(-\infty)=\lim_{n\to\infty}F(-n)=\lim_{n\to\infty}P(A_n)=0.$$

Понатаму, важи $\Omega=\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_n$, каде $A_n=\{\omega\colon n-1<X(\omega)\le n\}$ па затоа

$$\begin{aligned}1=P(\Omega)&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}P(A_n)=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N+1}^{N}P(A_n)=\lim_{N\to\infty}[F(N)-F(-N)]\\ &=F(+\infty)-F(-\infty)=F(+\infty),\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже. ♦

Лема 5. Функцијата на распределба F е непрекината во точката $x\in\mathbf{R}$ ако и само ако $P\{X=x\}=0$.

Доказ. Од (5) следува дека

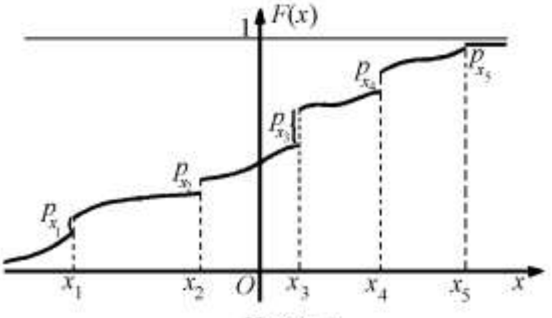
$$P\{X = x\} = P\{X \le x\} - P\{X < x\} = F(x) - F(x-0)\,, \tag{8}$$

па затоа F е непрекината во x ако и само ако $P\{X = x\} = 0$. ♦

Забелешка 8. а) Во натамошните разгледувања со $C(F)$ ќе го означуваме множеството точки на непрекинатост на функцијата на распределба X.

б) Во лема 5 докажавме дека $P\{X = x\} = F(x) - F(x-0)$. Јасно, ако F не е непрекината во точката x, тогаш од монотоноста на F следува дека

$$p_x = P\{X = x\} > 0\,.$$



Цртеж 1

Точките во кои $p_x > 0$ се *точки на скок* (*точки на прекин*) на функцијата F. Во таква точка графикот на функцијата F има скок со големина p_x, цртеж 1. Но, функцијата F монотоно расте, па затоа таа може да има најмногу пребројливо многу точки на прекин и тоа од прв вид. Што се однесува до големината на скоковите во точките на прекин јасно е дека F не може да има повеќе од 1 скок поголем од $\frac{1}{2}$, потоа скокови при кои $\frac{1}{4} < p \le \frac{1}{2}$ се не повеќе од 3, скокови при кои $\frac{1}{8} < p \le \frac{1}{4}$ се не повеќе од 7 итн. Воопшто земено функцијата F може да има најмногу $2^n - 1$ скокови такви да $\frac{1}{2^n} < p \le \frac{1}{2^{n-1}}$.

Дефиниција 9. Функцијата $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ која ги има својствата i- iv од теорема 13 ја нарекуваме *функција на распределба* (*функција на распределба на веројатности на* $\mathbf{R}$).

Лема 6. а) Нека F_1 и F_2 се функции на распределба и D е густо множество во $\mathbf{R}$. Ако

$$F_1(x) = F_2(x), \text{ за секој } x \in D\,,$$

тогаш $F_1 \equiv F_2$.

б) Ако F_1 и F_2 се функции на распределба и

$$F_1(x) = F_2(x), \text{за секој } x \in C(F_1) \cap C(F_2)\,,$$

тогаш $F_1 \equiv F_2$.

Доказ. а) Нека $x \in \mathbf{R}$. Множеството D е густо во $\mathbf{R}$, па затоа постои монотоно опаѓачка низа $\{x_n\}$ таква што $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Но, F_1 и F_2 се функции на распределба, што значи тие се непрекинати од десно, па затоа важи

$$F_1(x) = \lim_{n\to\infty} F_1(x_n) = \lim_{n\to\infty} F_2(x_n) = F_2(x).$$

Конечно, од произволноста на точката $x \in \mathbf{R}$ следува дека $F_1 \equiv F_2$.

б) Од забелешка 8 б) следува дека множествата $\mathbf{R}\setminus C(F_1)$ и $\mathbf{R}\setminus C(F_2)$ се најмногу пребројливи, па затоа множеството

$$\mathbf{R}\setminus[C(F_1)\cap C(F_2)] = [\mathbf{R}\setminus C(F_1)]\cup[\mathbf{R}\setminus C(F_2)]$$

е најмногу пребројливо. Но, тоа значи дека множеството $C(F_1)\cap C(F_2)$ е густо во $\mathbf{R}$, па од тврдењето под а) следува дека $F_1 \equiv F_2$. ♦

Во следната теорема ќе докажеме дека секоја функција на распределба на веројатности на $\mathbf{R}$ определува единствена веројатностна мера на $\sigma-$алгебрата $\boldsymbol{B}$.

Теорема 14. Ако F е функција на распределба на веројатности на $\mathbf{R}$, тогаш постои единствена веројатностна мера $P_F = P$ на $\sigma-$алгебрата $\boldsymbol{B}$, која со помош на F е определена со релацијата

$$P((-\infty, x]) = F(x),\ x \in \mathbf{R}. \tag{9}$$

Доказ. Со $\boldsymbol{S}$ да ја означиме фамилијата од сите интервали од видот $(a,b]$, $(-\infty,b]$, $(a,+\infty)$, $(-\infty,+\infty)$, каде $a,b \in \mathbf{R}$, $a<b$. За дадената фнкција на распределба дефинираме функција $P:\boldsymbol{S}\to\mathbf{R}$ со

$$\begin{aligned} &P((a,b]) = F(b)-F(a), && P((-\infty,b]) = F(b),\\ &P((a,+\infty)) = 1-F(a), && P((-\infty,+\infty)) = 1. \end{aligned} \tag{10}$$

Доказот на теоремата ќе го реализираме во неколку чекори.

Чекор 1. Нека $I_0 \in \boldsymbol{S}$ и нека $\{I_n\}$ е низа заемно дисјунктни интервали од $\boldsymbol{S}$ такви да $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n \subseteq I_0$. Тогаш

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(I_n) \le P(I_0). \tag{11}$$

Доказ. а) Ќе го разгледаме случајот кога сите интервали се конечни. Да земеме дека низата $\{I_n\}$ има конечно многу елементи $I_1, I_2, ..., I_m$ и да ставиме $I_n = (a_n, b_n]$, $n = 0,1,2,...,m$. Без ограничување на општоста можеме да земеме $a_1 < a_2 < ... < a_m$. Но, множествата $I_1, I_2, ..., I_m$ се заемно дисјунктни и $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n \subseteq I_0$, па затоа важи

$$a_0 \le a_1 < b_1 \le a_2 < b_2 \le ... < a_m < b_m \le b_0.$$

Функцијата F монотоно расте, па затоа од (10) следува

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{m} P(I_n) &= \sum_{n=1}^{m} [F(b_n)-F(a_n)] \le \sum_{n=1}^{m} [F(b_n)-F(a_n)] + \sum_{n=1}^{m-1} [F(a_{n+1})-F(b_n)]\\ &= F(b_m)-F(a_1) \le F(b_0)-F(a_0) = P(I_0). \end{aligned}$$

б) Нека $I_0 = (-\infty, b_0]$ (аналогно се разгледуваат останатите случаи на бесконечни интервали). Да земеме дека низата $\{I_n\}$ има конечно многу елементи $I_1, I_2, ..., I_m$. Заради дисјунктноста на интервалите $I_1, I_2, ..., I_m$ сите интервали, освен можда интервалот I_1 се конечни. Нека $I_n = (a_n, b_n],\ n = 1, 2, ..., m$ се конечни интервали. Аналогно како во доказот под а) добиваме дека без ограничување на општоста важи

$$-\infty < a_1 < b_1 \le a_2 < b_2 \le ... < a_m < b_m \le b_0,$$

па затоа

$$\sum_{n=1}^{m} P(I_n) = \sum_{n=1}^{m} [F(b_n) - F(a_n)] \le F(b_m) - F(a_1) \le F(b_0) = P(I_0).$$

Нека $I_1 = (-\infty, b_1]$. Аналогно како во доказот под а) добиваме дека без ограничување на општоста важи

$$-\infty < b_1 \le a_2 < b_2 \le ... < a_m < b_m \le b_0,$$

па затоа

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{m} P(I_n) &= F(b_1) + \sum_{n=2}^{m} [F(b_n) - F(a_n)] \\ &\le F(b_1) + \sum_{n=2}^{m} [F(b_n) - F(a_n)] + \sum_{n=1}^{m-1} [F(a_{n+1}) - F(b_n)] \\ &= F(b_m) \le F(b_0) = P(I_0).\end{aligned}$$

Ако низата $\{I_n\}$ има бесконечно многу елементи, тогаш од претходно изнесеното следува $\sum_{n=1}^{m} P(I_n) \le P(I_0)$, за секој $m \in \mathbf{N}$ и ако во последното неравенство земеме $m \to \infty$ го добиваме неравенството (11).

Чекор 2. Нека $I \in \boldsymbol{S}$ и нека $I_k, k \in \mathbf{N}$ е низа интервали од $\boldsymbol{S}$ такви да $I \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$. Тогаш

$$P(I) \le \sum_{k=1}^{\infty} P(I_k). \tag{12}$$

Доказ. а) Прво ќе го разгледаме случајот кога сите интервали се конечни. Нека $I = (a, b]$ и $I_k = (a_k, b_k]$. Ако низата интервали има конечен број членови, тогаш неравенството (12) има го добива видот

$$F(b) - F(a) \le \sum_{k=1}^{n} [F(b_k) - F(a_k)]. \tag{13}$$

Неравенството (13) ќе го докажеме со индукција по n. За $n = 1$ тврдењето очигледно важи. Нека претпоставиме дека тврдењето важи за $n-1$. Нека $(a, b] \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} (a_k, b_k]$, при што $b \in (a_n, b_n]$. Ако $a_n \le a$, тогаш $(a, b] \subseteq (a_n, b_n]$, па користејќи го фактот дека функцијата F монотоно расте, добиваме

$$F(b)-F(a)\le F(b_n)-F(a_n)\le \sum_{k=1}^{n}[F(b_k)-F(a_k)]\,.$$

Ако $a<a_n$, тогаш важи $(a,a_n]\subseteq \bigcup_{k=1}^{n-1}(a_k,b_k]$, па од индуктивната претпоставка следува

$$F(a_n)-F(a)\le \sum_{k=1}^{n-1}[F(b_k)-F(a_k)]\,. \tag{14}$$

Користејќи го неравенството (14) и $b\le b_n$, како и монотоноста на функцијата F, добиваме

$$F(b)-F(a)\le F(b_n)-F(a)=F(a_n)-F(a)+F(b_n)-F(a_n)\le \sum_{k=1}^{n}[F(b_k)-F(a_k)]\,.$$

Конечно, од принципот на математичка индукција следува дека неравенството (13) важи за секој природен број n.

Сега да го разгледаме случајот кога низата интервали има бесконечно многу елементи. Нека претпоставиме дека $(a,b]\subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty}(a_k,b_k]$. Нека $\varepsilon>0$. Функцијата F е непрекината од десно, па затоа постојат броеви $\delta\in(0,b-a)$ и $\delta_k>0$ такви да се исполнети неравенствата

$$F(a+\delta)\le F(a)+\varepsilon,\qquad F(b_k+\delta_k)\le F(b_k)+\tfrac{\varepsilon}{2^k}\,. \tag{15}$$

Тогаш се исполнети инклузиите

$$(a+\delta,b]\subset[a+\delta,b]\subset \bigcup_{k=1}^{\infty}(a_k,b_k+\delta_k)\subset \bigcup_{k=1}^{\infty}(a_k,b_k+\delta_k]\,.$$

Множеството $[a+\delta,b]$ е компактно и $(a_k,b_k+\delta_k)$, $k=1,2,...$ е негова отворена покривка, па од теоремата на Хајне-Борел следува дека постои конечен број m таков што

$$(a+\delta,b]\subset[a+\delta,b]\subset \bigcup_{k=1}^{m}(a_k,b_k+\delta_k)\subset \bigcup_{k=1}^{m}(a_k,b_k+\delta_k]\,.$$

Сега, користејќи го неравенството (13) за конечен број интервали добиваме

$$\begin{aligned}F(b)-[F(a)+\varepsilon]&\le F(b)-F(a+\delta)\le \sum_{k=1}^{m}[F(b_k+\delta_k)-F(a_k)]\\&\le \sum_{k=1}^{m}[F(b_k)+\tfrac{\varepsilon}{2^k}-F(a_k)]\le \varepsilon+\sum_{k=1}^{\infty}[F(b_k)-F(a_k)].\end{aligned}$$

Конечно, од произволноста на $\varepsilon>0$ следува

$$F(b)-F(a)\le \sum_{k=1}^{\infty}[F(b_k)-F(a_k)].$$

б) Нека $I=(-\infty,b]$ (аналогно се разгледуваат останатите случаи на бесконечни интервали). Нека m е цел број таков да $b\in(m,m+1]$. Тогаш

$$\begin{aligned}P(I)&=F(b)=[F(b)-F(m)]+[F(m)-F(m-1)]+[F(m-1)-F(m-2)]+...\\&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}P(I\cap(n,n+1]).\end{aligned}\tag{16}$$

Ако $I\subseteq\bigcup_{k=1}^{\infty}I_k$, тогаш за секој цел број n важи

$$I\cap(n,n+1]\subseteq\bigcup_{k=1}^{\infty}(I_k\cap(n,n+1]),$$

и ако го искористиме тврдењето под а) добиваме дека за секој цел број n важи

$$P(I\cap(n,n+1])\le\sum_{k=1}^{\infty}P(I_k\cap(n,n+1]).\tag{17}$$

Конечно, од (16) и (17), акоземеме предвид дека за секој $I_k, k=1,2,3,4,...$ важи аналогно равенство на равенството (16), добиваме

$$\begin{aligned}P(I)&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}P(I\cap(n,n+1])\le\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}P(I_k\cap(n,n+1])\\&=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}P(I_k\cap(n,n+1])=\sum_{k=1}^{\infty}P(I_k).\end{aligned}$$

Чекор 3. Ако $I_n, n\in\mathbf{N}$ е низа заемно дисјунктни множества од $\boldsymbol{S}$ такви да $\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n=I$, тогаш

$$P(I)=\sum_{n=1}^{\infty}P(I_n).\tag{18}$$

Равенството (18) непосредно следува од чекорите 1 и 2, што значи дека функцијата P е $\sigma-$адитивна на фамилијата $\boldsymbol{S}$.

Чекор 4. Нека $\boldsymbol{B}_0$ е минималната алгебра која ги содржи сите интервали од фамилијата $\boldsymbol{S}$. Фамилијата $\boldsymbol{B}_0$ се состои од сите конечни унии на интервали од $\boldsymbol{S}$. Ако $A=\bigcup_{k=1}^{n}I_k\in\boldsymbol{B}_0$, каде $I_1,I_2,...,I_k$ се заемно дисјунктни интервали, тогаш дефинираме

$$P(A)=\sum_{k=1}^{n}P(I_k).\tag{19}$$

Ќе докажеме дека функцијата P е добро дефинирана на алгебрата $\boldsymbol{B}_0$. Нека $E_i\in\boldsymbol{S}, i=1,2,...,m$ се заемно дисјунктни множества такви што $A=\bigcup_{i=1}^{m}E_i$. Тогаш очигледно важи

$$I_k = \bigcup_{i=1}^{n} (I_k \cap E_i),\ k = 1,2,...,n \text{ и}$$

$$E_i = \bigcup_{k=1}^{m} (E_i \cap I_k),\ i = 1,2,...,m\ .$$

Освен тоа, $E_i \cap I_k \in \boldsymbol{S}$, за $i = 1,2,...,m,\ k = 1,2,...,n$ и овие множества се заемно дисјунктни. Оттука следува

$$\sum_{k=1}^{n} P(I_k) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} P(I_k \cap E_i) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} P(I_k \cap E_i) = \sum_{i=1}^{m} P(E_i)\ ,$$

што значи дека функцијата P е добро дефинирана на алгебрата $\boldsymbol{B}_0$.

Чекор 5. Функцијата P е веројатностна мера на $\boldsymbol{B}_0$.

Доказ. Доволно е да докажеме дека функцијата P е $\sigma-$адитивна на алгебрата $\boldsymbol{B}_0$, бидејќи очигледно P е ненегативна и нормирана. Нека $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, каде $A, A_k \in \boldsymbol{B}_0$, за $k = 1,2,3,...$. Тогаш множествата A и $A_k,\ k = 1,2,3,...$ се конечни унии на дисјунктни интервали од $\boldsymbol{S}$, т.е. $A = \bigcup_{\nu=1}^{n} I_\nu$, $A_k = \bigcup_{\mu=1}^{m_k} I_{k\mu}$. Сега, ако се искористи дека

$$I_\nu = \bigcup_{k=1}^{\infty} (I_\nu \cap A_k) = \bigcup_{k=1}^{\infty} (I_\nu \cap (\bigcup_{\mu=1}^{m_k} I_{k\mu})) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{\mu=1}^{m_k} (I_\nu \cap I_{k\mu}))\ ,\ \nu = 1,2,...,n\ ,$$

$$I_{k\mu} = \bigcup_{\nu=1}^{n} (I_{k\mu} \cap I_\nu)\ ,\ \mu = 1,2,...,m_k\ ,\ k = 1,2,3,...$$

тогаш од чекор 3 следува

$$P(A) = \sum_{\nu=1}^{n} P(I_\nu) = \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{m_k} P(I_\nu \cap I_{k\mu}) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{m_k} \sum_{\nu=1}^{n} P(I_\nu \cap I_{k\mu})$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{m_k} P(I_{k\mu}) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k).$$

Чекор 6. Од теоремата на Каратеодори за продолжување на мерата следува дека постои единствено продолжување на веројатностната мера P на Бореловата $\sigma-$алгебра $\boldsymbol{B}$. Притоа, првиот чекор при дефинирањето на мерата P ни гарантира дека за секој $x \in \mathbf{R}$ е исполнето равенството (9). ♦

Последица 7. Множеството функции на распределба и множеството веројатностни мери определени на $\sigma-$алгебрата Борелови множества $\boldsymbol{B}$ во множеството реални броеви се еквивалентни.

Доказ. Непосредно следува од теоремите 13 и 14. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ♦

Последица 8. Секоја реална функција $F(x), x \in \mathbf{R}$, која ги исполнува својствата *i- iv* од теорема 13 е функција на распределба на некоја случајна променлива дефинирана во соодветен простор на веројатности.

Доказ. Нека реалната функција реална функција $F(x), x \in \mathbf{R}$, која ги исполнува својствата *i- iv* од теорема 13 и нека $(\mathbf{R}, \boldsymbol{B}, P)$ е просторот на веројатности од теорема 14. Во просторот на веројатности $(\mathbf{R}, \boldsymbol{B}, P)$ ја разгледуваме случајната променлива $X(\omega) = \omega, \omega \in \mathbf{R}$. Тогаш

$$P\{\omega \mid X(\omega) \le x\} = P\{\omega \le x\} = P((-\infty, x]) = F(x) \text{ , за секој } x \in \mathbf{R} \text{ ,}$$

што според дефиниција 8 значи дека функцијата F е функција на распределба на случајната променлива $X(\omega) = \omega, \omega \in \mathbf{R}$ определена на просторот на веројатности $(\mathbf{R}, \boldsymbol{B}, P)$. ♦

ЗАДАЧИ

1. Која од следниве функции е функција на распределба на веројатности на $\mathbf{R}$:
   a) $F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} x, \ x \in \mathbf{R}$,
   b) $F(x) = e^{-e^{-x}}, \ x \in \mathbf{R}$,
   c) $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \frac{x}{1+x}, & x > 0, \end{cases}$
   d) $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 1 - \frac{1-e^{-x}}{x}, & x > 0. \end{cases}$
2. Нека F е функција на распределба на веројатности на $\mathbf{R}$ и $a > 0$. Докажете дека $G = \frac{aF}{a+1-F}$ исто така функција на распределба.
3. Нека $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ е функција на распределба на веројатности на $\mathbf{R}$ за која важи $F(0) = 0$. Докажете дека функцијата $G : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ определена со
$$G(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ F(x) - F(\frac{1}{x}), & x > 0, \end{cases}$$
   исто така е функција на распределба на веројатности на $\mathbf{R}$.
4. Нека $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ е функција на распределба на веројатности на $\mathbf{R}$ и h е произволен позитивен број. Докажете дека функцијата $G : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ определена со
$$G(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} F(t) dt$$
   исто така е функција на распределба.
5. За точка $x \in \mathbf{R}$ ќе велиме дека е *точка на раст* на функцијата на распределба F ако за секој $\varepsilon > 0$ е исполнето равенството $F(x+\varepsilon) - F(x-\varepsilon) > 0$.
   a) Докажете дека секоја точка на скок на функција на распределба е нејзина точка на раст.
   b) Докажете дека секоја изолирана точка на раст на функцијата на распределба е нејзина точка на скок.

6. Нека $(\Omega.\boldsymbol{A},P)$ е простор на веројатности и X и Y се случајни променливи на Ω такви што $P\{\omega \mid X(\omega)\leq Y(\omega)\}=1$. Докажете дека

$$F_Y(x)\leq F_X(x)\text{, за секој } x\in X\text{ .}$$

6. КЛАСИФИКАЦИЈА НА СЛУЧАЈНИТЕ ПРОМЕНЛИВИ. ДЕКОМПОЗИЦИЈА НА ФУНКЦИЈА НА РАСПРЕДЕЛБА

Нека $(\Omega,\boldsymbol{A},P)$ е простор на веројатности и X е случајна променлива на Ω. Во теоријата на веројатност е важно да ги знаеме веројатностите на настаните поврзани со случајната променлива X, т.е. веројатностите $P\{\omega\in\Omega \mid X(\omega)\in B\}$, каде B е произволно Борелово подмножество од $\mathbf{R}$. Начинот на кој овие веројатности ги пресметуваме зависи од карактерот, т.е. од видот на случајната променлива X. Во теоријата на веројатност постојат три главни типови случајни променливи: *дискретни, апсолутно непрекинати* и *сингуларни*. Дискретните и апсолутно непрекинатите случајни променливи имаат огромна примена, па затоа на истите подетално ќе се задржиме.

6.1. ДИСКРЕТНИ СЛУЧАЈНИ ПРОМЕНЛИВИ

Дефиниција 10. Нека $(\Omega,\boldsymbol{A},P)$ е простор на веројатности, $A_k, k=1,2,3,...$ е разбивање на Ω, т.е.

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k=\Omega\text{ , } A_k\in\boldsymbol{A} \text{ и } x_k, k=1,2,3,...$$

е низа реални броеви. Случајната променлива $X:\Omega\to\mathbf{R}$ од видот

$$X(\omega)=\sum_{k=1}^{\infty} x_k I_{A_k}(\omega),\ \ \omega\in\Omega\text{ ,} \tag{1}$$

ја нарекуваме *дискретна случајна променлива*.

Забелешка 9. Јасно, ако разбивањето $A_i, i=1,2,...,n$ на Ω е конечно, тогаш дискретната случајна променлива (1) е проста случајна променлива (пример 3).

Лема 7. Случајната променлива $X:\Omega\to\mathbf{R}$ е дискретна ако и само ако постои најмногу пребројливо множество D такво што $P\{X\in D\}=1$.

Доказ. Нека за случајната променлива X постои најмногу пребројливо множество $D=\{x_k, k=1,2,3,...\}$ такво што $P\{X\in D\}=1$. Да ги разгледаме настаните $A_k=\{\omega \mid X(\omega)=x_k\}$, $k=1,2,3,...$Јасно, $A_k\cap A_i=\emptyset$, за $i\neq k$ и притоа важи

$$P(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k)=P(\bigcup_{k=1}^{\infty}\{\omega \mid X(\omega)=x_k\})=P\{\omega \mid X(\omega)=x_k, k=1,2,3,...\}=P\{X\in D\}=1\text{ ,}$$

што значи дека $A_k, k=1,2,3,...$ е разбивање на Ω и притоа важи (1), т.е. X е дискретна случајнапроменлива.

Обратно, нека X е дискретна случајна променлива и нека за x_k, $k=1,2,3,...$ важи $x_1 < x_2 < x_3 < ...$. Тогаш, ако означиме

$$p_k = P(A_k) = P\{\omega \mid X(\omega) = x_k\}, k=1,2,3,...$$

и земеме предвид дека

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) = P(\sum_{k=1}^{\infty} A_k) = P(\Omega) = 1,$$

и

$$\{\omega \mid X(\omega) = x_k\} \cap \{\omega \mid X(\omega) = x_i\} = \emptyset, \text{ за } i \neq k \text{ ,}$$

добиваме дека за дискретната случајна променлива X постои најмногу пребројливо множество $D = \{x_k, k=1,2,3,...\}$ такво што

$$P\{X \in D\} = P\{\omega \mid X(\omega) = x_k, k=1,2,3,...\} = \sum_{k=1}^{\infty} P\{\omega \mid X(\omega) = x_k\} = \sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1 \text{ . } \blacklozenge$$

Од претходните разгледувања следува дека случајната променлива X е дискретна ако множеството вредности на X е најмногу пребројливо. Оттука имаме дека ако $(\Omega, \boldsymbol{A}, P)$ е дискретен простор на веројатности, тогаш секоја реална функција на Ω е дискретна случајна променлива, што е наполно во согласност со разгледувањата во глава II.

Дефиниција 11. Нека $(\Omega, \boldsymbol{A}, P)$ е простор на веројатности и $A \in \boldsymbol{A}$. За веројатностната мера P ќе велиме дека е *концентрирана на множеството* A ако $P(\overline{A}) = 0$.

Лема 8. Нека $(\Omega, \boldsymbol{A}, P)$ е простор на веројатности. Случајната променлива $X : \Omega \to \mathbf{R}$ е дискретна ако и само ако индуцираната веројатноста мера P_X е концентрирана на најмногу пребројливо подмножество од $\mathbf{R}$.

Доказ. Непосредно следува од претходните разгледувања и од формулата (1) во точка 5. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ♦

Нека $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ е веројатностна функција на распределба. Како што знаеме функцијата F монотоно расте на $\mathbf{R}$ и таа има најмногу пребројливо многу прекини од прв вид. Понатаму, F е непрекината од десно и ако $x \in [C(F)]^c$, т.е. x е точка на прекин на F, тогаш важи $p_x = F(x) - F(x-0) > 0$, и бројот p_x го нарекуваме *скок на функцијата* F во точката x.

Дефиниција 12. Нека $D = [C(F)]^c = \{x_1, x_2, x_3, ...\}$ е множеството точки на прекин на функцијата F. Ќе велиме дека веројатностната функција на распределба $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ е *дискретна* ако

$$F(x)=\sum_{x_n\in D,\, x_n\le x} p_{x_n}\,,\ \text{за секој}\ x\in\mathbf{R}\,. \qquad (2)$$

Забелешка 10. Ако функцијата на распределба F е дискретна, тогаш од (2) следува дека за секои $x,y\in\mathbf{R},\, x<y$ важи

$$F(y)-F(x)=\sum_{x_n\in D,\, x<x_n\le y} p_{x_n}\,, \qquad (3)$$

што значи дека функцијата F е константна на секој интервал кој не содржи точки на прекин.

Лема 9. Случајната променлива X е дискретна ако и само ако нејзината функција на распределба F_X е дискретна.

Доказ. Нека функцијата на распределба F_X е дискретна и нека множеството точки на прекин на F_X е

$$D=[C(F)]^c=\{x_1,x_2,x_3,...\}\ \text{и}\ p_{x_n}=F_X(x_n)-F_X(x_n-0)\,.$$

Тогаш од (2) следува

$$F_X(x)=\sum_{x_n\in D,\, x_n\le x} p_{x_n}\,,\ \text{за секој}\ x\in\mathbf{R}\,.$$

Сега од доказот на лема 5 имаме

$$P_X(D)=\sum_{x_n\in D} P_X(\{x_n\})=\sum_{x_n\in D}[F_X(x_n)-F_X(x_n-0)]=\sum_{x_n\in D} p_{x_n}=F_X(+\infty)=1\,,$$

па затоа $P_X(\overline{D})=0$, т.е. индуцираната веројатноста мера P_X е концентрирана на најмногу пребројливо подмножество од $\mathbf{R}$, па од лема 8 следува дека X е дискретна случајна променлива.

Обратно, нека X е дискретна случајна променлива. Според лема 8 индуцираната веројатноста мера P_X е концентрирана на најмногу пребројливо подмножество $D=\{x_1,x_2,x_3,...\}$ од $\mathbf{R}$. Нека $P_X(\{x_n\})>0$, за секој n. Тогаш од доказот на лема 5 имаме

$$0<P_X(\{x_n\})=P\{X=x_n\}=F_X(x_n)-F_X(x_n-)=p_{x_n}\,,$$

за секој $x_n\in D$, т.е. точките од множеството D се точки на прекин на функцијата F_X, т.е. $D\subseteq[C(F)]^c$. Индуцираната веројатностна мера P_X е концентрирана на множеството D, па затоа од $x\notin D$ следува $0=P_X(\{x\})=P\{X=x\}$, што според лема 5 значи $x\in C(F_X)$, т.е. $[C(F)]^c\subseteq D$, па затоа $[C(F)]^c=D$. Освен тоа, за секој $x\in\mathbf{R}$ важи

$$\begin{aligned}F_X(x)&=P_X((-\infty,x])=P_X((-\infty,x]\cap D)\\ &=\sum_{x_n\in D,\, x_n\le x} P_X(\{x_n\})=\sum_{x_n\in D,\, x_n\le x} p_{x_n}\,,\end{aligned}$$

што значи дека F_X е дискретна функција на распределба. ♦

Нека X е дискретна случајна променлива на просторот на веројатности $(\Omega, \boldsymbol{A}, P)$ и нека D е најмногу преброjливото подмножество од $\mathbf{R}$ за кое важи $P\{X \in D\} = 1$. Ако $D = \{x_k, k = 1, 2, 3, ...\}$, тогаш како што видовме

$$P\{X \in D\} = \sum_k P\{X = x_k\} = 1.$$

Освен тоа, за секое множество $B \in \boldsymbol{B}$ важи

$$P\{X \in B\} = P_X(B) = P_X(B \cap D) = \sum_{x_k \in B} P\{X = x_k\}. \tag{4}$$

Од досегашните разгледувања произлегува дека дискретните случајни променливи можеме да ги зададеме на потполно ист начин како во точка II 1, т.е. со помош на табела од видот

X	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_{k-1}	x_k	$\cdots$
p	p_1	p_2	p_3	$\cdots$	p_{k-1}	p_k	$\cdots$

Табела 1

Како и претходно, табелата 1 ја нарекуваме *закон на распределба на случајната променлива* X. Јасно, за вредностите во табела 1 важи $x_i \in \mathbf{R}$, $x_i \neq x_k, i \neq k$, $p_i > 0$ и $\sum_i p_i = 1$. Понатаму, според (4) функцијата на распределба F_X на X можеме да ја запишеме во видот

$$F_X(x) = P_X((-\infty, x]) = \sum_{x_i \le x} p_i, \ x \in \mathbf{R}. \tag{5}$$

Притоа, со помош на функции од видот

$$\delta_a(x) = \begin{cases} 0, & \text{ако } x < a \\ 1, & \text{ако } x \ge a. \end{cases}$$

функцијата на разпределба на случајната променлива X можеме да ја запишеме во следниов вид

$$F_X(x) = \sum_{x_k \le x} p_k = \sum_{k=1}^{\infty} p_k \delta_{x_k}(x). \tag{6}$$

Од лема 5 следува дека функцијата F_X е непрекината на множеството D^c, а во секоја точка $x_i \in D$ има скок со големина $p_i = F_X(x_i) - F_X(x_i - 0)$. Понатаму, од равенството (4) и табела 1 следува дека

$$P\{X \in B\} = \sum_{x_k \in B} p_k, \ B \in \boldsymbol{B}. \tag{7}$$

Лема 10. Нека X е дискретна случајна променлива со закон на распределба даден во табела 1 и $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ е Борелова функција. Тогаш

$$P\{g(X) \in B\} = \sum_{g(x_k) \in B} p_k, \ B \in \boldsymbol{B}.$$

Доказ. Навистина, од (7) следува

$$P\{g(X)\in B\}=P\{X\in g^{-1}(B)\}=\sum_{x_k\in^{-1}(B)} p_k=\sum_{g(x_k)\in B} p_k. \ ♦$$

Примери на дискретни функции на распределба разгледавме во точка II 7, па затоа овде дополнително ќе разгледаме само уште еден сам за себе интересен пример.

Пример 4. Нека $\mathbf{Q}=\{r_1,r_2,r_3,...\}$ е множеството рационални броеви и нека p_k, $k=1,2,...$ се позитивни реални броеви такви, што $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k=1$. Од претходно изнесеното имаме дека функцијата $F(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k\delta_{r_k}(x)$ е дискретна функција на распределба. Таа ги има следниве својства:

а) За секој рационален број r_k важи $F(r_k)-F(r_k-0)=p_k>0$, т.е. функцијата F има скок со големина p_k во секоја рационална точка r_k. Но, множеството $\mathbf{Q}$ е секаде густо во $\mathbf{R}$, па затоа F е пример на функција која има скок на секаде густо множество во $\mathbf{R}$.

б) Имаме $\mathbf{I}=\mathbf{Q}^c$ и како $P\{x\in\mathbf{Q}\}=1$, добиваме дека $\mathbf{I}=C(F)$, т.е. функцијата F е непрекината во секоја ирационална точка. Последното тврдење ќе го докажеме и непосредно. Навистина, нека x е ирационален број и $\varepsilon>0$. Тогаш постои природен број n_0 таков, што $\sum\limits_{k=n_0+1}^{\infty} p_k<\varepsilon$ и број $\delta>0$ таков, што интервалот $(x-\delta,x+\delta)$ не содржи ниту еден од броевите $r_1,...,r_{n_0}$. Според тоа, за $\varepsilon>0$ најдовме $\delta>0$ таков, што кога $|y-x|<\delta$ важи

$$|F(x)-F(y)|\le\sum_{k=n_0+1}^{\infty} p_k<\varepsilon,$$

т.е. функцијата F е непрекината во точката x. ♦

6.2. АПСОЛУТНО-НЕПРЕКИНАТИ СЛУЧАЈНИ ПРОМЕНЛИВИ

Дефиниција 13. Нека X е случајна променлива на просторот на веројатности $(\Omega,\boldsymbol{A},P)$ и нека F_X е нејзината функција на распределба. Ќе велиме дека случајната променлива X е *апсолутно-непрекината* или *непрекината случајна променлива* ако постои ненегативна реална Борелова функција p таква што

$$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x} p(t)dl(t),\ \ x\in\mathbf{R}. \tag{1}$$

За функцијата на распределба F_X на апсолутно-непрекинатата случајна променлива X ќе велиме дека е *апсолутно-непрекината функција на распределба*. Ако X е апсолутно-непрекината случајна променлива, тогаш за функцијата p од (1) ќе велиме дека е *густина на веројатностите на* X .

Интегралот во (1) всушност е Лебеговиот интеграл на функција p во однос на Лебеговата мера l (види [17], [67]). Доказот на следнава лема излегува надвор од рамките на нашите разгледувања, па затоа истиот нема да го презентираме.

Лема 11. Ако X е апсолутно-непрекината случајна променлива со густина p и ако P_X е веројатностната мера индуцирана од X , тогаш

$$P_X(B) = P\{X = B\} = \int_B p(x)dl(x)\,,\ B \in \boldsymbol{B}\,.\ \blacklozenge \tag{2}$$

Забелешка 11. а) Според лема 11, ако ја знаеме густината на апсолутно-непрекинатата случајна променлива X , тогаш можеме да ги определиме веројатностите на сите настани поврзани со оваа случајна променлива.

б) Од (1) следува дека функцијата на распределба на апсолутно-непрекинатата случајна променлива X е наполно определена со нејзината густина.

в) Од својствата на Лебеговиот интеграл во однос на Лебегова мера следува дека функцијата p од (1), односно од (2) е единствена до множество со Лебегова мера нула. Навистина, нека $q:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ е ненегативна Борелова функција. Ако q ја задоволува (1), тогаш таа ја задоволува и (2), па $p(x) = q(x),$ за секој $x \in A$, $A \in \boldsymbol{B}$ и $l(A^c) = 0$. Важи и обратното, ако за функцијата q важи $p(x) = q(x),$ за секој $x \in A$, $A \in \boldsymbol{B}$ и $l(A^c) = 0$, тогаш функција q ја задоволува (1), односно (2), што значи дека е густина на случајната променлива X . Конечно, ако функцијата p е непрекината, тогаш може да се докаже дека таа е единствена.

Лема 12. Нека $p:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ е Борелова функција. Функцијата p е густина на веројатност на некоја случајна променлива X ако и само ако се исполнети условите

a) $p(x) \geq 0, \quad x \in \mathbf{R}$,

b) $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dl(x) = 1$.

Доказ. Ако p е густина на X , тогаш од (2) следува

$$1 = P_X(\mathbf{R}) = \int_{\mathbf{R}} p(x)dl(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dl(x)\,,$$

т.е. исполнет е условот *b*). Понатаму, $p(x) \geq 0$ до множество со Лебегова мера нула (зошто?), па затоа можеме да земеме дека $p(x) \geq 0, x \in \mathbf{R}$, што значи дека е исполнет и условот *a*).

Обратно, нека претпоставиме дека p ги задоволува условите *a*) и *b*) и да ставиме

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)dl(t), \ \ x \in \mathbf{R}.$$

Тогаш, од својствата на Лебеговиот интеграл (види [70]) следува дека $F : \mathbf{R} \to [0,1]$, F монотоно расте, $F(-\infty) = 0$ и $F(+\infty) = 1$. Понатаму, функцијата F е непрекината, па затоа таа е функција на распределба. Конечно, од последица 8 следува дека F е функција на распределба на некоја апсолутно-непрекината случајна променлива X и p е густина на X. ♦

Забелешка 12. а) Нека X е апсолутно-непрекината случајна променлива со функција на распределба F_X и густина p, т.е.

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)dl(t), x \in \mathbf{R}.$$

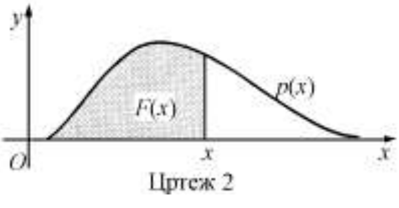
Може да се докаже дека функцијата F_X е диференцијабилна и дека важи $F_X^{'}(x) = p(x)$ на $\mathbf{R}$ освен на множество со Лебегова мера нула. Според тоа, густината p на апсолутно-непрекинататата случајна променлива X со функцијата на распределба F_X е наполно определена до множество со Лебегова мера нула. Понатаму, со (1) функцијата на распределба F_X е наполно определена со густината p на случајната променлива X.

б) Во примените од особена важност се оние густини p за кои интегралите во (1) и (2) (ако B е интервал или конечна унија на интервали) се несвојствени Риманови интеграли. Притоа, ако $p \geq 0$ и p има несвојствен Риманов интеграл, тогаш p е Лебег интеграбилна на $\mathbf{R}$ во однос на Лебеговата мера и притоа овие два интеграла се еднакви.

в) Може да се докаже дека за апсолутно-непрекината случајна променлива X со густина на веројатност p, непрекината на $\mathbf{R}$ важи $F_X^{'}(x) = p(x)$, $x \in \mathbf{R}$. Според тоа, ако X е апсолутно-непрекината случајна променлива со функција на распределба F_X и густина на веројатност p и ако $p \geq 0$ е непрекината функција на $\mathbf{R}$, $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1$, тогаш важи

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} p(u)du, \ F_X^{'}(x) = p(x), \ x \in \mathbf{R}, \tag{3}$$

при што интегралот во (3) е Риманов интеграл (цртеж 2). Во натамошните разгледувања воглавном ќе разгледуваме апсолутно непрекинати случајни променливи чија густина е непрекината функција на $\mathbf{R}$, освен евентуално во конечно многу точки.

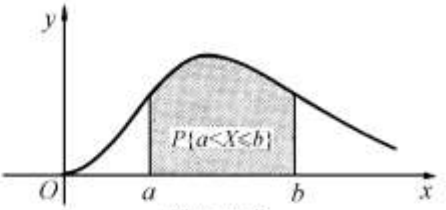


Цртеж 2

г) Ненегативноста на густината p ни е неопходна бидејќи индуцираната веројатностна мера определена со (2) е ненегативна фунција. Понатаму, според (3), на секој интервал $(a,b]$ му придружуваме веројатност

$$P\{a < X \le b\} = P\{X \le b\} - P\{X \le a\}$$

$$= \int_{-\infty}^{b} p(u)du - \int_{-\infty}^{a} p(u)du = \int_{a}^{b} p(u)du,$$



Цртеж 3

цртеж 3. Јасно, функцијата $p(x)$ не е веројатност, но со оваа функција е определена веројатност за секој интервал $(a,b]$, па оттука и нејзиното име густина на веројатност на случајната променлива X .

Понатаму, во случајов важи

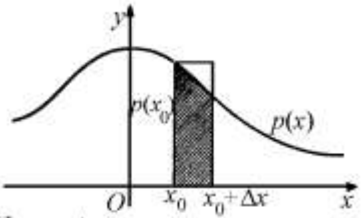
$$P\{X = c\} = \int_{c}^{c} p(x)dx = 0 \text{ , за секој } c \in \mathbf{R}$$

па затоа:

$$P\{a < X < b\} = P\{a < X < b\} + P\{X = b\} = P\{a < X \le b\} = \int_{a}^{b} p(x)dx .$$

Аналогно може да се докаже дека за секоја апсолутно-непрекината случајна променлива X важи:

$$P\{a \le X \le b\} = P\{a < X < b\} = P\{a < X \le b\} = \int_{a}^{b} p(x)dx .$$



Цртеж 4

д) Како што рековме, функцијата $p(x)$ не претставува никаква веројатност. Меѓутоа, со помош оваа функција приближно може да се пресмета веројатноста случајната променлива X да прими вредност во некој мал интервал $(x_0, x_0 + \Delta x]$, цртеж 4. Навистина, ако функцијата $p(x)$ е непрекината во точката x_0 , тогаш од својствата на определениот интеграл имаме

$$P\{x_0 \le X \le x_0 + \Delta x\} = \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} p(x)dx \approx p(x_0)\Delta x .$$

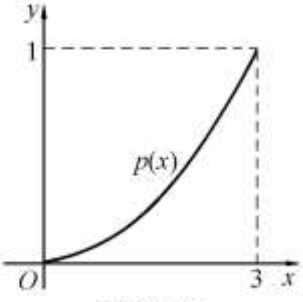
Пример 5. Густината на распределба на случајната променлива X е дадена со

$$p(x) = \begin{cases} cx^2, & x \in [0,3] \\ 0, & x \notin [0,3]. \end{cases}$$

а) Определете ја константата c .

б) Најдете ја функцијата на распределба на случајната променлива X .

в) Пресметајте ја веројатноста на настанот $\{1 \le X \le 2\}$.



Цртеж 5

Решение. а) Според забелешка 12 в) имаме

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx=\int_{-\infty}^{0} p(x)dx+\int_{0}^{3} p(x)dx+\int_{3}^{+\infty} p(x)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{0} 0\bullet dx+\int_{0}^{3} cx^2dx+\int_{3}^{+\infty} 0\bullet dx=0+c\frac{x^3}{3}\Big|_0^3+0=c(\frac{3^3}{3}-\frac{0^3}{3})=9c,$$

што значи дека $c=\frac{1}{9}$, цртеж 5.

б) Функцијата на распределба на случајната променлива X е:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ F(x)=\int_0^x \frac{1}{9}tdt=\frac{1}{9}\bullet\frac{x^2}{2}=\frac{x^2}{19}, & x\in(0,3),\\ F(x)=1, & x\ge 3.\end{cases}$$

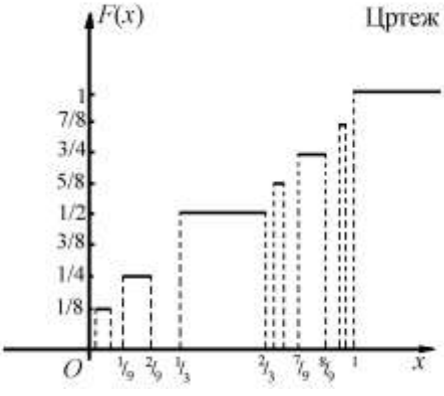
в) Според забелешка 12 г) имаме

$$P\{1\le X\le 2\}=\int_1^2 p(x)dx=\frac{1}{9}\int_1^2 x^2dx=\frac{1}{9}\frac{x^3}{3}\Big|_1^2=\frac{1}{9}(\frac{2^3}{3}-\frac{1^3}{3})=\frac{7}{27}.$$ ♦

6.3. СИНГУЛАРНИ ФУНКЦИИ НА РАСПРЕДЕЛБА

Дефиниција 14. Нека F е функција на распределба. Ако F е непрекината, не е константа и изводот F' постои и е еднаков на нула скоро секаде (освен на множество со мера нула), тогаш функцијата F ја нарекуваме *сингуларна функција на распределба*.

Пример 6 (Канторова сингуларна функција на распределба). Во првиот чекор од интервалот [0,1] го отстрануваме интервалот $I_{11}=(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$. Во вториот чекор од интервалите $[0,\frac{1}{3}]$ и $[\frac{2}{3},1]$ ги отстрануваме интервалите $(\frac{1}{9},\frac{2}{9})$ и $(\frac{7}{9},\frac{8}{9})$, соодветно и сите три отстранети интервали, заклучно со вториот чекор ги нумерираме од лево на десно: $I_{21}=(\frac{1}{9},\frac{2}{9})$, $I_{22}=(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$ и $I_{23}=(\frac{7}{9},\frac{9}{9})$. Постапката ја продолжуваме така што во секој чекор секој од преостанатите интервали го делиме на три еднакви делови и го отстануваме отворениот среден интервал. После n чекори се отстранети вкупно



Цртеж 6

$$1+2+2^2+...+2^{n-1}=2^n-1$$

интервали. Овие интервали да ги означиме од лево на десно со $I_{nk}, k=1,2,...,2^n-1$. Збирот на нивните должини е

$$\tfrac{1}{3}+\tfrac{2}{3^2}+\tfrac{2^2}{3^3}+...+\tfrac{2^{n-1}}{3^n}=1-(\tfrac{2}{3})^n .$$

Да забележиме дека за секој n и за секој $k=1,2,...,2^n-1$ важи $I_{n+1,2k}=I_{nk}$ и дека после n-от чекор остануваат 2^n интервали, при што должината на секој од нив е еднаква на $\frac{1}{3^n}$. Ги воведуваме ознаките

$$A_n=\bigcup_{k=1}^{2^n-1} I_{nk}, \quad A=\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \text{ и } C=[0,1]\setminus A .$$

Множеството C е познато под името *Канторово множество* и неговата мера е еднаква на нула. Дефинираме функција

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{k}{2^n}, & x\in I_{nk}\\ 1, & x\geq 1.\end{cases} \qquad (1)$$

Оваа функција е добро дефинирана, бидејќи за $x\in I_{n+1,2k}=I_{nk}$ важи

$$F(x)=\frac{2k}{2^{n+1}}=\frac{k}{2^n} .$$

Понатаму, од дефиницијата на F следува дека таа е монотоно растечка на множеството $\mathbf{R}\setminus C=(-\infty,0)\cup A\cup(1,+\infty)$. Освен тоа, за секои $x,y\in\mathbf{R}\setminus C$ такви, што $|x-y|\leq\frac{1}{3^n}$ важи $|F(x)-F(y)|\leq\frac{1}{2^n}$, што значи дека функцијата F е рамномерно непрекината на множеството $\mathbf{R}\setminus C$. Но, множеството $\mathbf{R}\setminus C$ е секаде густо во множеството $\mathbf{R}$, па затоа функцијата F може да се додефинира и на множеството C така што таа да биде непрекината на $\mathbf{R}$.

Од досега изнесеното следува дека функцијата $F:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ е непрекината функција на распределба. Меѓутоа, оваа функција не е апсолутно непрекината функција на распределба. Навистина, за секој $t\in\mathbf{R}\setminus C$ важи $F'(t)=0$, па затоа за секој $x\in\mathbf{R}$ важи $\int_{-\infty}^{x} F'(t)dt=0$.

Може да се докаже дека функцијата (1) експлицитно се изразува со следнава формула

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \frac{F(3x)}{2}, & 0\leq x<\frac{1}{3},\\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{3}\leq x<\frac{2}{3},\\ \frac{1}{2}+\frac{F(3x-2)}{2}, & \frac{2}{3}\leq x<1,\\ 1, & x\geq 1.\end{cases} \quad \blacklozenge \qquad (2)$$

6.4. ДЕКОМПОЗИЦИЈА НА ФУНКЦИЈА НА РАСПРЕДЕЛБА

Нека $F_i, i=1,2,3,...$ се произволни функции на распределба и $p_i, i=1,2,3,...$ се ненегативни реални броеви такви што $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$. Да ја разгледаме функцијата $F:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ определена со

$$F(x)=\sum_{i=1}^{\infty} p_i F_i(x),\ x\in\mathbf{R}\,. \tag{1}$$

Од $0\le F_i(x)\le 1$, $x\in\mathbf{R}$, $p_i\ge 0, i=1,2,3,...$ и $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$ следува дека за секој $n\in\mathbf{N}$ важи

$$\sum_{i=1}^{n} p_i F_i(x)\le \sum_{i=1}^{n+1} p_i F_i(x),\ x\in\mathbf{R} \text{ и } \sum_{i=1}^{n} p_i F_i(x)\le \sum_{i=1}^{n} p_i \le 1,\ x\in\mathbf{R}$$

т.е. за секој $x\in\mathbf{R}$ низата парцијални суми на редот на десната страна во (1) монотоно расте и е ограничена од горе, што значи редот конвергира по точки, па затоа функцијата F е добро дефинирана.

Нека $x<y$. Тогаш за секој $i=1,2,3,...$ важи $p_i F_i(x)\le p_i F_i(y)$, па затоа

$$F(x)=\sum_{i=1}^{\infty} p_i F_i(x)\le \sum_{i=1}^{\infty} p_i F_i(y)=F(y)\,,$$

т.е. функцијата F монотоно расте на $\mathbf{R}$.

Нека $\varepsilon>0$ е дадено. Од $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$ следува дека постои $n\in\mathbf{N}$ таков што $\sum_{i=n+1}^{\infty} p_i < \frac{\varepsilon}{2}$, т.е. $\sum_{i=1}^{n} p_i > 1-\frac{\varepsilon}{2}$. Ставаме

$$F(x)=\sum_{i=1}^{n} p_i F_i(x)+R_n(x)\,,$$

каде $R_n(x)=\sum_{i=n+1}^{\infty} p_i F_i(x)$. Но, $0\le F_i(x)\le 1$, за $i=1,2,3,...$, па затоа за секој $x\in\mathbf{R}$ важи

$$0\le R_n(x)=\sum_{i=n+1}^{\infty} p_i F_i(x)\le \sum_{i=n+1}^{\infty} p_i < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Понатаму, за секој $i=1,2,3,...,n$ постои $a_i>0$ таков што $F_i(-a_i)<\frac{\varepsilon}{2}$ и $F_i(a_i)>1-\frac{\varepsilon}{2}$ (зошто?). Нека $a=\max\{a_i \mid i=1,2,3,...,n\}$. Тогаш $F_i(-a)<\frac{\varepsilon}{2}$ и $F_i(a)>1-\frac{\varepsilon}{2}$, па затоа

$$F(-a)=\sum_{i=1}^{n} p_i F_i(-a)+R_n(-a)\le \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\le \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon \text{ и}$$

$$F(a)=\sum_{i=1}^{n} p_iF_i(a)+R_n(a)\geq \sum_{i=1}^{n} p_iF_i(a)\geq(1-\tfrac{\varepsilon}{2})\sum_{i=1}^{n} p_i\geq(1-\tfrac{\varepsilon}{2})^2>1-\varepsilon\,.$$

Конечно, од последните две неравенства и од произволноста на ε следува $F(-\infty)=0$ и $F(+\infty)=1$.

Нека $x\in\mathbf{R}$, $\{x_k\}$ е монотоно опаѓачка низа таква што $\lim\limits_{k\to\infty} x_k=x$, $\varepsilon>0$ и n е таков да $\sum\limits_{i=n+1}^{\infty} p_i<\frac{\varepsilon}{2}$. Бидејќи функциите F_i монотоно не опаѓаат и се непрекинати од десно, добиваме дека за секој $i=1,2,3,...,n$ постои n_i таков што при $k>n_i$ важи $0\leq F_i(x_k)-F_i(x)\leq\frac{\varepsilon}{2}$. Земаме $n_0=\max\{n_i\,|\,i=1,2,3,...,n\}$ и добиваме дека за секој $i=1,2,3,...,n$ и за секој важи

$$0\leq F_i(x_k)-F_i(x)\leq\tfrac{\varepsilon}{2}\,.$$

Според тоа,

$$\begin{aligned}0\leq F(x_k)-F(x)&=\sum_{i=1}^{\infty} p_i[F_i(x_k)-F_i(x)]=\sum_{i=1}^{n} p_i[F_i(x_k)-F_i(x)]+\sum_{i=n+1}^{\infty} p_i[F_i(x_k)-F_i(x)]\\&=\sum_{i=1}^{n} p_i[F_i(x_k)-F_i(x)]+\sum_{i=n+1}^{\infty} p_i\leq\tfrac{\varepsilon}{2}\sum_{i=1}^{n} p_i+\sum_{i=n+1}^{\infty} p_i\leq\tfrac{\varepsilon}{2}+\tfrac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,\end{aligned}$$

што значи дека функцијата F е непрекината од десно.

Со тоа ја докажевме следнава теорема.

Теорема 16. Ако $F_i, i=1,2,3,...$ се произволни функции на распределба и $p_i, i=1,2,3,...$ се ненегативни реални броеви такви што $\sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i=1$, тогаш функцијата $F:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ определена со (1) е функција на распределба, која ја нарекуваме *конвексна линеарна комбинација на распределбите* $F_i, i=1,2,...$ со коефициенти $p_i, i=1,2,...$. ♦

Пример 7. Функциите $G,H:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ определени со

$$G(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 2x, & 0\leq x<\frac{1}{2}\\ 1, & x\geq\frac{1}{2}.\end{cases}\quad\text{и}\quad H(x)=\begin{cases}0, & x<\frac{1}{2}\\ 1, & x\geq\frac{1}{2},\end{cases}$$

се функции на распределби и притоа G е апсолутно-непрекината, а H е дискретна функција на распределба. Земаме $p_1=p_2=\frac{1}{2}$. Од теорема 16 следува дека функцијата $F:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ определена со

$$F(x)=\tfrac{1}{2}G(x)+\tfrac{1}{2}H(x),\ x\in\mathbf{R}$$

е функција на распределба и истата експлицитно може да се запише во видот

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ x, & 0<x<\frac{1}{2},\\ 1, & x\ge \frac{1}{2}.\end{cases} \quad \blacklozenge$$

Теорема 17. Секоја функција на распределба $F(x)$ може да се запише како конвексна линеарна комбинација

$$F(x)=aF_1(x)+bF_2(x)+cF_3(x), \tag{2}$$

каде $a,b,c\ge 0$, $a+b+c=1$, $F_1(x)$ е дискретна функција на распределба, $F_2(x)$ е апсолутно-непрекината функција на распределба и $F_3(x)$ е сингуларна функција на распределба.

Доказ. Функцијата F е монотоно растечка и ограничена, па затоа:

а) F има најмногу пребројливо многу прекини од прв вид, што значи дека во секоја точка на прекин постојат левата и десната граница и

б) функцијата F има извод скоро секаде, т.е. множеството точки x за кои не постои $F'(x)$ е множество со мера нула и притоа за секои $x,y\in\mathbf{R}$ важи

$$\int_x^y F'(t)dt\le F(y)-F(x)\,.$$

Сега да разгледаме произволна функција на распределба F. Нека $a_i, i=1,2,...$ се точките на прекин на функцијата F и нека

$$p_i=F(a_i+0)-F(a_i-0)\,,\ i=1,2,\ldots.$$

Дефинираме функции

$$F_d(x)=\sum_{k=1}^{\infty}p_k\delta_{a_k}=\sum_{k,\ p_k\le x}p_k\ ,\ F_{an}(x)=\int_{-\infty}^{x}F'(t)dt \text{ и } F_s(x)=F(x)-F_d(x)-F_{an}(x)\,. \tag{3}$$

Ако

$$\sum_{k=1}^{\infty}p_k=a\ne 0\,,\ \int_{-\infty}^{+\infty}F'(t)dt=b\ne 0 \text{ и } c=1-a-b\ne 0\,,$$

тогаш функциите

$$F_1(x)=\tfrac{1}{a}F_d(x)\,,\ F_2(x)=\tfrac{1}{b}F_{an}(x) \text{ и } F_3(x)=\tfrac{1}{c}F_s(x)\,,$$

се дискретна, апсолутно-непрекината и сингуларна функција на распределба (зошто?), соодветно и притоа важи равенството (2). Јасно, ако некој од броевите a,b или c е еднаков на нула, тогаш во равенството (2) недостасува соодветниот собирок. ♦

ЗАДАЧИ

1. Густината на непрекинатата случајна променлива X е

$$p(x)=\begin{cases}2x, & x\in[0,1]\\ 0, & x\notin[0,1]\end{cases}$$

Пресметајте ги веројатностите на настаните $\{X \le \frac{1}{2}\}, \{\frac{1}{3} \le X \le \frac{1}{2}\}$.

2. Определете го параметарот C така да функцијата p е густина на веројатност:

a) $p(x) = \begin{cases} \frac{c}{x\ln 2}, & x \in [0,5;1], \\ 0, & x \notin [0,5;1], \end{cases}$

b) $p(x) = \begin{cases} \frac{C}{x^3}, & x \in [1500, 2500], \\ 0, & x \notin [1500, 2500], \end{cases}$

c) $p(x) = \begin{cases} Cx^2, & x \in [-1,1], \\ 0, & x \notin [-1,1], \end{cases}$

d) $p(x) = \begin{cases} \frac{C}{x^2}, & x \in [20, 40], \\ 0, & x \notin [20, 40], \end{cases}$

e) $p(x) = \begin{cases} C(6+x), & x \in [0,3], \\ C(6-x), & x \in [3,6], \\ 0, & x \notin [0,6], \end{cases}$

f) $p(x) = \begin{cases} 4x - Cx^2, & x \in [0,1], \\ 0, & x \notin [0,1], \end{cases}$

g) $p(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ Cx^a e^{-bx}, & x \ge 0, \end{cases}$

h) $p(x) = \begin{cases} C \mid x - a), & x \in [b,d], \\ 0, & x \notin [b,d]. \end{cases}$

3. Функцијата на распределба на апсолутно-непрекинатата случајна променлива X е

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-2x}(2x^2 + 2x + 1), & x \ge 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

a) Најдете ја функцијата на густината на случајната променлива.

b) Колкава е веројатноста да случајната променлива X да прими вредност од интервалот $[0,5]$?

4. Функцијата на распределба на апсолутно-непрекинатата случајна променлива X е

$$F(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}.$$

a) Најдете ја функцијата на густината на случајната променлива.

b) Колкава е веројатноста да случајната променлива X да прими вредност од интервалот $[0,1]$?

5. Докажете дека функциите F_d, F_{an} и F_s дефинирани со равенствата (3) во доказот на теорема 17 се дискретна, апсолутно-непрекината и сингуларна функција на распределба, соодветно.

6. Ако множеството точки на раст на функцијата на распределба F има мера нула, докажете дека F е сингуларна функција на распределба. Докажете, дека обратното тврдење на важи.

7. Нека F е Канторовата сингуларна функција на распределба.

a) Докажете ја формулата (2) од пример 6.

b) Докажете дека $F(x) = 2F(\frac{x}{3}) = 2F(\frac{x}{3} + \frac{2}{3}) - 1$, за секој $x \in \mathbf{R}$.

8. Нека F_X е функција на распределба на случајната променлива X и $c \in \mathbf{R}$. Докажете дека $F_X(x+c)$ е функција на распределба на случајната променлива $X-c$.
9. Нека F_X е функција на распределба на случајната променлива X и нека F_X е непрекината на $\mathbf{R}$. Најдете ја функцијата на распределба на случајната променлива $aX+b$, $a,b \in \mathbf{R}$.
10. Нека F_X е функција на распределба на случајната променлива X. Најдете ги функциите на распределба на случајните променливи X^+, X^- и $|X|$.

7. ПОВЕЌЕДИМЕНЗИОНАЛНИ ФУНКЦИИ НА РАСПРЕДЕЛБИ

Нека $(\Omega, \boldsymbol{A}, P)$ е простор на веројатности и $X:\Omega \to \mathbf{R}^n$ е $n-$димензионална случајна променлива, т.е. $X^{-1}(B) \in \boldsymbol{A}$ за секој $B \in \boldsymbol{B}^n$ ($\boldsymbol{B}^n$ е $\sigma-$алгебрата Борелови множества во $\mathbf{R}^n$). Тогаш, според теорема 5 е $X=(X_1, X_2, ..., X_n)$, каде $X_i:\Omega \to \mathbf{R}$, $i=1,2,...,n$ се еднодимензионални случајни променливи.

Лема 13. Функцијата $P_X:\boldsymbol{B}^n \to [0,1]$ определена со

$$P_X(B)=P(X^{-1}(B))=P\{X \in B\},\ B \in \boldsymbol{B}^n \tag{1}$$

е веројатностна мера на $\boldsymbol{B}^n$, која ја нарекуваме *веројатностна мера индуцирана од $n-$димензионална случајна променлива X*.

Доказ. Јасно, $P_X(\mathbf{R}^n)=P(\Omega)=1$. За секој $B \in \boldsymbol{B}^n$ важи $X^{-1}(B) \in \boldsymbol{A}$, па затоа $P_X(B)=P(X^{-1}(B)) \geq 0$. Нека $B_i, i \in \mathbf{N}$ е произволна фамилија заемно дисјунктни подмножества од $\boldsymbol{B}^n$. Тогаш $X^{-1}(B_i), i \in \mathbf{N}$ е низа заемно дисјунктни подмножества од $\boldsymbol{A}$, па затоа важи

$$P_X(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i)=P(X^{-1}(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i))=P(\bigcup_{i=1}^{\infty} X^{-1}(B_i))=\bigcup_{i=1}^{\infty} P(X^{-1}(B_i))=\bigcup_{i=1}^{\infty} P_X(B_i),$$

што конечно значи дека P_X е веројатностна мера на $\boldsymbol{B}^n$. ♦

Забелешка 13. Според лема 13, на секоја $n-$димензионална случајна променлива X на природен начин, со помош на релацијата (1) и придружуваме простор на веројатности $(\mathbf{R}^n, \boldsymbol{B}^n, P_X)$ кој го нарекуваме *простор на веројатности индуциран од случајниот вектор X*. Притоа, сите прашања поврзани со случајниот вектор X ги решаваме во рамките на просторот $(\mathbf{R}^n, \boldsymbol{B}^n, P_X)$.

Дефиниција 15. Нека $X:\Omega \to \mathbf{R}^n$ е $n-$димензионална случајна променлива, $X=(X_1, X_2, ..., X_n)$. Функцијата $F_X:\mathbf{R}^n \to [0,1]$ определена со

$$\begin{aligned} F_X(x) &= F_{(X_1,\dots,X_n)}(x_1,x_2,\dots,x_n) = P_X((-\infty,x]) = P(X \le x) \\ &= P\{X_1 \le x_1,\, X_2 \le x_2,\dots, X_n \le x_n\}, \end{aligned} \tag{2}$$

за секој $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbf{R}^n$, ја нарекуваме *функција на распределба на случајниот вектор* X.

Функцијата $P_X(B)$, $B\in\boldsymbol{B}^n$ ја нарекуваме *закон на распределба на случајниот вектор* X.

Секој $n-$димензионален паралелопипед

$$I_n=(a_1,b_1]\times(a_2,b_2]\times\dots\times(a_n,b_n]$$

има 2^n темиња и тоа се точките од видот

$$x=(x_1,x_2,\dots,x_n),\text{ каде или } x_k=a_k \text{ или } x_k=b_k,\text{ за } k=1,2,\dots,n.$$

За секое теме x дефинираме негов знак $z_I(x)$ на следниов начин:

$$z_I(x)=\begin{cases}+1, & \text{ако бројот на индексите } k \text{ за кои } x_k=a_k \text{ е парен,}\\ -1, & \text{ако бројот на индексите } k \text{ за кои } x_k=a_k \text{ е непарен.}\end{cases}$$

За произволна функција $F:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ да означиме

$$\Delta_F(I_n)=\sum_x z_I(x)F(x) \tag{3}$$

каде сумирањето се врши по сите темиња на паралелопипедот I. На пример, за дводимензионалниот паралелопипед $I_2=(a_1,b_1]\times(a_2,b_2]$ и функцијата $F:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ имаме

$$\Delta_F(I_2)=F(b_1,b_2)-F(b_1,a_2)-F(a_1,b_2)+F(a_1,a_2),$$

а за $n=3$, тридимензионалниот паралелопипед $I_3=(a_1,b_1]\times(a_2,b_2]\times(a_3,b_3]$ и функцијата $F:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}$ добиваме

$$\begin{aligned}\Delta_F(I_3)=F(b_1,b_2,b_3)-F(a_1,b_2,b_3)-F(b_1,a_2,b_3)-F(b_1,b_2,a_3)\\ +F(a_1,a_2,b_3)+F(b_1,a_2,a_3)+F(a_1,b_2,a_3)-F(a_1,a_2,a_3).\end{aligned}$$

Лема 14. Нека $F_X:\mathbf{R}^n\to[0,1]$ е функција на распределба на случајниот вектор X. Тогаш за секој $n-$димензионален паралелопипед

$$I_n=(a_1,b_1]\times(a_2,b_2]\times\dots\times(a_n,b_n]$$

важи

$$P_X(I_n)=P\{a_i<X_i\le b_i,\ i=1,2,\dots,n\}=\Delta_{F_X}(I_n). \tag{4}$$

Доказ. Според (2) за $n=2$ имаме

$$\begin{aligned}P_X(I_2)&=P\{a_1<X_1\le b_1,a_2<X_2\le b_2\}=P\{X_1\le b_1,a_2<X_2\le b_2\}-P\{X_1\le a_1,a_2<X_2\le b_2\}\\ &=P\{X_1\le b_1,X_2\le b_2\}-P\{X_1\le b_1,X_2\le a_2\}-P\{X_1\le a_1,X_2\le b_2\}+P\{X_1\le a_1,X_2\le a_2\}\\ &=F_X(b_1,b_2)-F_X(b_1,a_2)-F_X(a_1,b_2)+F_X(a_1,a_2)=\Delta_{F_X}(I_2),\end{aligned}$$

што значи дека важи (4).

Нека претпоставиме дека тврдењето важи за $n = k$, т.е. дека за $k-$димензионалниот паралелопипед $I_k = (a_1,b_1]\times(a_2,b_2]\times\ldots\times(a_k,b_k]$ важи

$$P_X(I_k) = P\{a_i < X_i \le b_i, i = 1,2,\ldots,k\} = \Delta_{F_X}(I_k) = \sum_x z_{I_k}(x)F_X(x). \qquad (5)$$

За $(k+1)-$димензионалниот паралелопипед $I_{k+1} = (a_1,b_1]\times\ldots\times(a_k,b_k]\times(a_{k+1},b_{k+1}]$ имаме $z_{I_{k+1}}(x,b_{k+1}) = z_{I_k}(x)$ и $z_{I_{k+1}}(x,a_{k+1}) = -z_{I_k}(x)$, па од (5) следува

$$\begin{aligned} P_X(I_{k+1}) &= P\{a_i < X_i \le b_i, i = 1,\ldots,k+1\} \\ &= P\{a_i < X_i \le b_i, i = 1,\ldots,k; X_{k+1} \le b_{k+1}\} - P\{a_i < X_i \le b_i, i = 1,\ldots,k; X_{k+1} \le a_{k+1}\} \\ &= \sum_x z_{I_k}(x)F_X(x,b_{k+1}) - \sum_x z_{I_k}(x)F_X(x,a_{k+1}) = \sum_{x^*} z_{I_{k+1}}(x^*)F_X(x^*) = \Delta_{F_X}(I_{k+1}). \end{aligned}$$

Конечно, од принципот на математичка индукција следува дека формулата (4) важи за секој природен број n . ♦

Теорема 18. За функцијата на распределба $F_X(x) = F_X(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ на $n-$димензионалната случајната променлива $X = (X_1,X_2,\ldots,X_n)$ се исполнети следните својства:

1) по секој аргумент функцијата $F_X(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ монотоно расте и е непрекината од десно.

2) $F_X(-\infty,x_2,\ldots,x_n) = F_X(x_1,-\infty,x_3,\ldots,x_n) = \ldots = F_X(x_1,\ldots,x_{n-1},-\infty) = 0$, каде

$$F_X(-\infty,x_2,\ldots,x_n) = \lim_{x_1\to-\infty} F_X(x_1,x_2,\ldots,x_n),$$

$$F_X(x_1,-\infty,x_3,\ldots,x_n) = \lim_{x_2\to-\infty} F_X(x_1,x_2,\ldots,x_n) \text{ итн.}$$

3) $F_X(+\infty,+\infty,\ldots,+\infty) = 1$ каде $F_X(+\infty,+\infty,\ldots,+\infty) = \lim\limits_{\substack{x_1\to+\infty \\ \ldots\ldots\ldots \\ x_n\to+\infty}} F_X(x_1,\ldots,x_n)$.

4) $\Delta_{F_X}(I_n) \ge 0$, за секој $n-$димензионален паралелопипед I_n .

Доказ. 1) Нека $i \in \{1,2,\ldots,n\}$, $x_i^{'} < x_i^{''}$ и $x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},x_n \in \mathbf{R}$. Да означиме $x' = (x_1,\ldots,x_{i-1},x_i^{'},x_{i+1},x_n),\ x'' = (x_1,\ldots,x_{i-1},x_i^{''},x_{i+1},x_n) \in \mathbf{R}^n$. Тогаш

$$\begin{aligned} F_X(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i^{''},x_{i+1},\ldots,x_n) &- F_X(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i^{'},x_{i+1},\ldots,x_n) = F_X(x'') - F_X(x') \\ &= P_X((-\infty,x'']) - P_X((-\infty,x']) = P(X \le x'') - P(X \le x') \\ &= P\{X_1 \le x_1,\ldots,X_{i-1} \le x_{i-1}, X_i \le x_i^{''}, X_{i+1} \le x_{i+1}\ldots,X_n \le x_n\} \\ &\quad - P\{X_1 \le x_1,\ldots,X_{i-1} \le x_{i-1}, X_i \le x_i^{'}, X_{i+1} \le x_{i+1}\ldots,X_n \le x_n\} \\ &= P\{X_1 \le x_1,\ldots,X_{i-1} \le x_{i-1}, x_i^{'} < X_i \le x_i^{''}, X_{i+1} \le x_{i+1}\ldots,X_n \le x_n\} \ge 0, \end{aligned}$$

т.е. F_X монотно расте по $i-$от аргумент. Понатаму, за множествата

$$B_{ik} = \{X_1 \le x_1,\ldots,X_{i-1} \le x_{i-1}, x_i < X_i \le x_i + \tfrac{1}{k}, X_{i+1} \le x_{i+1},\ldots,X_n \le x_n\},\ k = 1,2,3,\ldots,$$

важи $B_{ik} \to \varnothing, k \to \infty$, па од аксиомата за непрекинатост на веројатностната мера следува

$$F_X(x_1,...,x_{i-1},x_i+\tfrac{1}{k},x_{i+1},...,x_n)-F_X(x_1,...,x_{i-1},x_i,x_{i+1},...,x_n)=P(B_{ik})\to 0,\ k\to\infty,$$

т.е. F_X е непрекината од десно по $i-$ от аргумент.

2) Нека $i \in \{1,2,...,n\}$. За настаните

$$B_{ik}=\{X_1\le x_1,...,X_{i-1}\le x_{i-1},X_i\le -k,X_{i+1}\le x_{i+1},...,X_n\le x_n\},\ k=1,2,3,...$$

важи $B_{ik} \to \varnothing, k \to \infty$, па од аксиомата за непрекинатост на веројатностната мера следува

$$\begin{aligned}F_X(x_1,...,x_{i-1},-\infty,x_{i+1},...,x_n) &= \lim_{x_i\to-\infty} F_X(x_1,...,x_{i-1},x_i,x_{i+1},...,x_n)\\ &= \lim_{k\to\infty} P(B_{ik}) = P(\varnothing)=0.\end{aligned}$$

3) Да ги разгледаме множествата $B_k=\{X_1\le k, X_2\le k,...,X_n\le k\}$, $k\in\mathbf{Z}$, за кои важи $B_{k-1}\subset B_k, k\in\mathbf{Z}$. Множествата $A_k=B_k\setminus B_{k-1}, k\in\mathbf{Z}$ се заемно дисјунктни и притоа важи $\Omega=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} A_k$, па затоа

$$\begin{aligned}1=P(\Omega)&=\sum_{k=-\infty}^{\infty}P(A_k)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}P(B_k\setminus B_{k-1})=\sum_{k=-\infty}^{\infty}[P(B_k)-P(B_{k-1})]\\ &=\lim_{N\to\infty}\sum_{k=-N+1}^{N}[P(B_k)-P(B_{k-1})]=\lim_{N\to\infty}[P(B_N)-P(B_{-N})]\\ &=\lim_{N\to\infty}[F_X(N,N,...,N)-F_X(-N,-N,...,-N)]\\ &=F_X(+\infty,+\infty,...,+\infty)-F_X(-\infty,-\infty,...,-\infty)\\ &=F_X(+\infty,+\infty,...,+\infty).\end{aligned}$$

4) Секој $n-$ димензионален паралелопипед I_n е Борелово множество во $\mathbf{R}^n$. Според лема 13 P_X е веројатностна мера на $\boldsymbol{B}^n$, па од лема 14 следува дека

$$\Delta_{F_X}(I_n)=P_X(I_n)\ge 0\ .\ \blacklozenge$$

Дефиниција 16. Функцијата $F:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ која ги има својствата 1) -4) од теорема 18 ја нарекуваме $n-$ *димензионална функција на распределба* (*функција на распределба на веројатности на* $\mathbf{R}^n$).

Пример 8. Нека $F_1,F_2,...,F_n$ се еднодимензионални функции на распределба и да ја разгледаме функцијата $F:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ определена со равенството

$$F(x_1,x_2,...,x_n)=F_1(x_1)F_2(x_2)...F_n(x_n),\ \text{за секој}\ (x_1,x_2,...,x_n)\in\mathbf{R}^n.$$

Лесно се проверува дека функцијата F ги задоволува условите 1) – 3) од теорема 18. Понатаму, за произволен $n-$ димензионален паралелопипед

$$I_n = (a_1, b_1] \times (a_2, b_2] \times ... \times (a_n, b_n]$$

важи

$$\Delta_F(I_n) = [F_1(b_1) - F_1(a_1)][F_2(b_2) - F_2(a_2)]...[F_n(b_n) - F_n(a_n)] \geq 0.$$

Според тоа, функцијата F е функција на распределба на веројатности на $\mathbf{R}^n$. ♦

Аналогно како во еднодимензионалниот случај, може да се докаже следнава теорема.

Теорема 19. Нека $F : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ е функција на распределба на веројатности на $\mathbf{R}^n$. Тогаш постои веројатностна мера $P = P_F$ на $\boldsymbol{B}^n$, која е еднозначно определена со F со помош на релацијата

$$P_F(I_n) = \Delta_F(I_n), \tag{6}$$

за секој $n-$димензионален паралелопипед I_n. ♦

Последица 9. Множеството функции на распределба и множеството веројатностни мери определени на $\sigma-$алгебрата Борелови множества $\boldsymbol{B}^n$ во множеството $\mathbf{R}^n$ се еквивалентни.

Доказ. Непосредно следува од теоремите 18 и 19. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ♦

Последица 10. Секоја реална функција $F(x), x \in \mathbf{R}^n$, која ги исполнува својствата 1) – 4) од теорема 18 е функција на распределба на некоја случајна променлива дефинирана во соодветен простор на веројатности.

Доказ. Нека реалната функција реална функција $F(x), x \in \mathbf{R}^n$, која ги исполнува својствата 1) – 4) од теорема 18 и нека $(\mathbf{R}^n, \boldsymbol{B}^n, P_F)$ е просторот на веројатности од теорема 19. Во просторот на веројатности $(\mathbf{R}^n, \boldsymbol{B}^n, P_F)$ ја разгледуваме случајната променлива $X(\omega) = \omega, \omega \in \mathbf{R}^n$. Тогаш

$$P\{\omega \mid X(\omega) \leq x\} = P\{\omega \leq x\} = P_F((-\infty, x]) = F(x) \text{, за секој } x \in \mathbf{R}^n,$$

што според дефиниција 15 значи дека функцијата F е функција на распределба на случајната променлива $X(\omega) = \omega, \omega \in \mathbf{R}^n$ определена на просторот на веројатности $(\mathbf{R}^n, \boldsymbol{B}^n, P_F)$. ♦

ЗАДАЧИ

1. Нека F е функција на распределба на случајниот вектор $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$. Докажете дека F е непрекината на $\mathbf{R}^n$, освен евентуално на унија на пребројливо многу хиперрамнини од видот $x_j = \text{const}, \quad j = 1, 2, ..., n$.
2. Случајниот вектор (X, Y) има функција на распределба

$$F(x,y)=\begin{cases}0, & \min\{x,y\}\le 0,\\ \min\{x,y\}, & 0\le \min\{x,y\}\le 1,\\ 1, & \min\{x,y\}\ge 1.\end{cases}$$

Пресметајте ја веројатноста $P\{\frac{1}{4}<X\le\frac{3}{4},\frac{1}{4}<Y\le\frac{3}{4}\}$.

3. Нека F е функција на распределба на веројатности на $\mathbf{R}^n$ и $a>0$. Докажете дека $G=\frac{aF}{a+1-F}$ исто така функција на распределба на $\mathbf{R}^n$.

4. Ако $F(x,y)=(\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+\frac{1}{2})(\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{y}{2}+\frac{1}{2})$ е функција на распределба на дводимензионалната случајна променлива (X,Y), докажете дека $P\{X<2\sqrt{3},Y<\sqrt{3}\}=\frac{5}{9}$.

8. КЛАСИФИКАЦИЈА НА *n*-ДИМЕНЗИОНАЛНИТЕ СЛУЧАЈНИТЕ ПРОМЕНЛИВИ

Слично како во еднодимензионалниот случај $n-$димензионалните функции на распределба можат да бидат дискретни, апсолутно-непрекинати, сингуларни или од мешан тип. Притоа, од посебна важност се дискретните и апсолутно-непрекинатите $n-$димензионални функции на распределба на кои во овој дел посебно ќе се задржиме.

Дефиниција 17. Нека $X=(X_1,X_2,...,X_n)$ е $n-$димензионална случајна променлива на просторот на веројатности $(\Omega,\boldsymbol{A},P)$ и нека F е негова функција на распределба. Ќе велиме дека X е *дискретен случаен вектор* ако постои најмногу пребројливо множество D такво што $P\{X\in D\}=1$.

Забелешка 14. а) Ако множеството $X(\Omega)=\{X(\omega)\,|\,\omega\in\Omega\}$ е најмногу пребројливо подмножество од $\mathbf{R}^n$, тогаш очигледно X е дискретен случаен вектор.

б) Лесно се докажува дека случајниот вектор $X=(X_1,X_2,...,X_n)$ е дискретен ако и само случајните променливи $X_1,X_2,...,X_n$ се дикретни.

в) Својствата на дискретниот случаен вектор $X=(X_1,X_2,...,X_n)$ наполно се определени со функцијата $p:\mathbf{R}^n\to[0,1]$, која е зададена со

$$p(x)=P\{X=x\},\ x\in\mathbf{R}^n, \tag{1}$$

и која ја нарекуваме *закон на распределба на случајниот вектор* X. Јасно, функцијата p е различна од нула за најмногу пребројливо многу точки од $\mathbf{R}^n$. Притоа, очигледно важи

$$P\{X\in B\}=\sum_{x\in B}p(x),\ B\in\boldsymbol{B}^n, \tag{2}$$

и сумата во (2) има најмногу пребројливо многу ненулти собирци.

Дефиниција 18. Нека $X=(X_1,X_2,...,X_n)$ е $n-$димензионална случајна променлива на просторот на веројатности $(\Omega,\boldsymbol{A},P)$ и нека F е негова функција на распределба. Ќе велиме дека X е *апсолутно-непрекинат случаен вектор* ако постои ненегативна Борелова функција $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ таква што

$$F(x)=\int\limits_{(-\infty,x]} f(t)dl(t),\quad x\in\mathbf{R}^n. \tag{3}$$

За функцијата на распределба F на апсолутно-непрекинатиот случаен вектор X ќе велиме дека е *апсолутно-непрекината функција на распределба*. Ако X е апсолутно-непрекинат случаен вектор, тогаш за функцијата f од (3) ќе велиме дека е *густина на веројатностите на* X .

Интегралот во (3) всушност е Лебеговиот интеграл на функција f во однос на Лебеговата мера l (види [21], [70]). Доказот на следнава лема излегува надвор од рамките на нашите разгледувања, па затоа истиот нема да го презентираме.

Лема 15. Ако X е апсолутно-непрекинат случаен вектор со густина f и ако P_X е веројатностната мера индуцирана од X , тогаш

$$P_X(B)=P\{X=B\}=\int\limits_B f(x)dl(x),\ B\in\boldsymbol{B}^n.\ ♦ \tag{4}$$

Забелешка 15. а) Според лема 15, ако ја знаеме густината на апсолутно-непрекинатиот случаен вектор X , тогаш можеме да ги определиме веројатностите на сите настани поврзани со овој случаен вектор.

б) Од (3) следува дека функцијата на распределба на апсолутно-непрекинатиот случаен вектор X е наполно определена со нејзината густина.

в) Од својствата на Лебеговиот интеграл во однос на Лебегова мера следува дека функцијата f од (3), односно од (4) е единствена до множество со Лебегова мера нула. Навистина, нека $q:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ е ненегативна Борелова функција. Ако q ја задоволува (3), тогаш таа ја задоволува и (4), па затоа $p(x)=q(x),$ за секој $x\in A$, $A\in\boldsymbol{B}^n$ и $l(A^c)=0$. Важи и обратното, ако за функцијата q важи $p(x)=q(x),$ за секој $x\in A$, $A\in\boldsymbol{B}^n$ и $l(A^c)=0$, тогаш функција q ја задоволува (3), односно (4), што значи дека е густина на случајниот вектор X . Конечно, ако функцијата f е непрекината, тогаш може да се докаже дека таа е единствена.

Слично како во лема 12 може да се докаже следнава лема.

Лема 16. Нека $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ е Борелова функција. Функцијата f е густина на веројатност на некој случаен вектор X ако и само ако се исполнети условите

a) $f(x)\geq 0,\quad x\in\mathbf{R}^n$,

b) $\int\limits_{\mathbf{R}^n} f(x)dl(x)=1$. ♦

Забелешка 16. а) Нека X е апсолутно-непрекинат случаен вектор со функција на распределба F_X и густина f, т.е.

$$F_X(x) = \int\limits_{(-\infty,x]} f(t)dl(t), \quad x \in \mathbf{R}^n .$$

Може да се докаже дека за функцијата F_X, освен на множество со Лебегова мера нула, важи

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{\partial^n F_X(x_1,x_2,...,x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 ... \partial x_n} \text{ на } \mathbf{R}^n .$$

Според тоа, густината f на апсолутно-непрекинатиот случаен вектор X со функцијата на распределба F_X е наполно определена до множество со Лебегова мера нула. Понатаму, со (3) функцијата на распределба F_X е наполно определена со густината f на случајната променлива X.

б) Во примените од особена важност се оние густини p за кои интегралите во (3) и (4) (ако B е интервал или конечна унија на интервали во $\mathbf{R}^n$) се несвојствени Риманови интеграли. Притоа, ако $f \geq 0$ и f има несвојствен Риманов интеграл, тогаш f е Лебег интеграбилна на $\mathbf{R}^n$ во однос на Лебеговата мера и притоа овие два интеграла се еднакви.

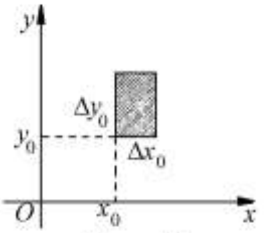
в) Може да се докаже дека за апсолутно-непрекината случајна променлива со X густина на веројатност f, непрекината на $\mathbf{R}^n$, важи

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{\partial^n F_X(x_1,x_2,...,x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 ... \partial x_n}, \ (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n \text{ и} \tag{5}$$

$$F_X(x_1, x_2, ..., x_n) = \int\limits_{-\infty}^{x_1} \int\limits_{-\infty}^{x_2} ... \int\limits_{-\infty}^{x_n} f(t_1, t_2, ..., t_n) dt_1 dt_2 ... dt_n, \quad (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n, \tag{6}$$

при што интегралот во (6) е Риманов интеграл. Релациите (5) и (6) покажуваат дека за вакви случајни вектори функцијата на распределба и густината наполно се определени една со друга. Во натамошните разгледувања воглавном ќе разгледуваме апсолутно-непрекинати случајни вектори чија густина е непрекината функција на $\mathbf{R}^n$, освен евентуално во конечно многу точки.

г) Името густина на распределбата на веројатностите на функцијата f се оправдува на сличен начин како и во еднодимензионалниот случај. На пример, за $n = 2$, ако функцијата $f(x, y)$ е непрекината во точката (x_0, y_0), тогаш веројатноста (X,Y) да "припадне" на мал правоаголник S со страни Δx_0 и Δy_0, цртеж 7, е:



Цртеж 7

$$P\{(X,Y) \in S\} = \iint\limits_S f(x, y)dxdy = \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x_0} \int\limits_{y_0}^{y_0+\Delta y_0} f(x, y)dxdy$$
$$\approx f(x_0, y_0)\Delta x_0 \Delta y_0 .$$

Пример 9. Да ја разгледаме функцијата

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-x-y}, & x,y\geq 0 \\ 0, & \text{во останатите случаи.} \end{cases}$$

Ќе докажеме дека оваа функција е густина на распределба на веројатности на непрекината дводимензионална случајна променлива (X,Y). Функцијата f е непрекината, па според тоа таа е Борелова. Понатаму, имаме, $f(x,y)\geq 0$, за секои x и y и притоа важи:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=\int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty} e^{-x-y}dxdy=\int_{0}^{+\infty} e^{-x}dx\int_{0}^{+\infty} e^{-y}dy=1,$$

па од лема 16 следува дека f е густина на распределба на веројатности на непрекината дводимензионална случајна променлива (X,Y). Да ја пресметаме веројатноста на настанот $\{1<x<2,\, 0<y<2\}$. Имаме:

$$P\{1<x<2,\, 0<y<2\}=\int_{1}^{2}\int_{0}^{2} e^{-x-y}dxdy=\int_{1}^{2} e^{-x}dx\int_{0}^{2} e^{-y}dy=(e^{-1}-e^{-2})(e^{0}-e^{-2})\approx 0,2\,.\ \blacklozenge$$

Пример 10. Нека $X_i,\ i=1,2,...,n$ се непрекинати случајни променливи над ист простор на веројатности $(\Omega,\boldsymbol{A},P)$, со густини на веројатности $p_i, i=1,2,...,n$, соодветно. Да ја разгледаме функцијата

$$f(x_1,x_2,...,x_n)=p_1(x_1)p_2(x_2)...p_n(x_n),\ \ (x_1,x_2,...,x_n)\in\mathbf{R}^n\,.$$

Јасно, f е Борелова функција и притоа важи $f(x_1,x_2,...,x_n)\geq 0,\ \ (x_1,x_2,...,x_n)\in\mathbf{R}^n$ и како

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(x)dl(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} p_1(x_1)dx_1\int_{-\infty}^{+\infty} p_2(x_2)dx_2...\int_{-\infty}^{+\infty} p_n(x_n)dx_n=1$$

од лема 16 следува дека f е густина на веројатност на некој случаен вектор X . ♦

ЗАДАЧИ

1. Проверете дали функцијата $f(x,y)$ е густина на веројатност на дводимензионална случајна променлива (X,Y):

a) $f(x,y)=\begin{cases} \frac{1}{8}(6-x-y), & 0\leq x\leq 2,\, 2\leq y\leq 4, \\ 0, & \text{во останатите случаи,} \end{cases}$

b) $f(x,y)=\begin{cases} xe^{-x(y+1)}, & x\geq 0,\, y\geq 0, \\ 0, & \text{во останатите случаи,} \end{cases}$

c) $f(x,y)=\begin{cases} \frac{1}{2}(x+y)e^{-x-y}, & x\geq 0,\, y\geq 0, \\ 0, & \text{во останатите случаи,} \end{cases}$

2. Определете ја константата k така да функцијата $f(x,y)$ е густина на веројатност на дводимензионалната случајна променлива (X,Y) :

   a) $$f(x,y)=\begin{cases} kx(x-y), & 0<y<2,\ -x<y<x, \\ 0, & \text{во останатите случаи,} \end{cases}$$

   b) $$f(x,y)=ke^{-2\frac{x^2+4y^2-2xy+4x-10y+7}{3}},\ x,y\in\mathbf{R},$$

   c) $$f(x,y)=\begin{cases} kxye^{-(x^2+y^2)}, & x\geq 0,\ y\geq 0, \\ 0, & \text{во останатите случаи,} \end{cases}$$

   d) $$f(x,y)=\begin{cases} \frac{k}{(1+x^2+y^2)^2}, & x\geq 0,\ y\geq 0, \\ 0, & \text{во останатите случаи,} \end{cases}$$

   e) $$f(x,y)=\begin{cases} kx^m(y-x)^n e^{-y}, & 0<x<y \\ 0, & \text{во останатите случаи.} \end{cases}$$

3. Функцијата f е густина на веројатност на ненегативна случајна променлива X. Докажете дека
$$g(x,y)=\begin{cases} \frac{f(x+y)}{x+y}, & x>0,\ y>0, \\ 0, & \text{во останатите случаи} \end{cases}$$
е густина на веројатност на некоја случајна променлива (U,V).

4. Густината на веројатност на дводимензионалната случајна променлива (X,Y) е
$$f(x,y)=\begin{cases} C(R-\sqrt{x^2+y^2}), & x^2+y^2\leq R^2, \\ 0, & x^2+y^2>R^2. \end{cases}$$
Најдете ја константата C, а потоа пресметајте ја веројатноста точката (X,Y) да падне во кругот $x^2+y^2\leq a^2,\ a>0$.

5. Ако
$$f(x,y)=\begin{cases} k\sin(x+y), & x\in[0,\frac{\pi}{2}],\ y\in[0,\frac{\pi}{2}] \\ 0, & \text{во останатите случаи,} \end{cases}$$
е густина на веројатност на дводимензионалната случајна променлива (X,Y), најдете ја константата k и функцијата на распределба $F(x,y)$.

6. Најдете ја густината на веројатност на дводимензионалната случајна променлива (X,Y) ако функцијата на распределба е
$$F(x,y)=\begin{cases} \sin x\cos y, & x\in[0,\frac{\pi}{2}],\ y\in[-\frac{\pi}{2},0], \\ 0, & \text{во останатите случаи.} \end{cases}$$

7. Најдете ја густината на веројатност на тридимензионалната случајна променлива (X,Y,Z) ако функцијата на распределба е
$$F(x,y)=\begin{cases} (1-e^{-ax})(1-e^{-by})(1-e^{-cz}), & x>0,\ y>0,\ z>0, \\ 0, & \text{во останатите случаи.} \end{cases}$$

8. Нека p_1 и p_2 се густините на веројатност, а F_1 и F_2 соодветните функции на распределба на случајните променливи X и Y, $a\in(-1,1)$ и
$$f(x,y)=p_1(x)p_2(y)(1+a(2F_1(x)-1)(2F_2(y)-1)).$$
Докажете дека $f(x,y)$ е густина на дводимензионална распределба.

9. МАТЕМАТИЧКО ОЧЕКУВАЊЕ

9.1. ДЕФИНИЦИЈА НА МАТЕМАТИЧКО ОЧЕКУВАЊЕ. ОСНОВНИ СВОЈСТВА

Математичкото очекување $E(X)$ на случајната променлива $X = X(\omega)$, зададена на просторот на веројатности $(\Omega, \boldsymbol{A}, P)$, се определува последователно почнувајќи од прости случајни променливи, потоа за ненегативни случајни променливи и, на крајот, во општ случај.

Дефиниција 19. Нека X е проста случајна променлива, т.е. нека

$$X = X(\omega) = \sum_{j=1}^{m} x_j I_{A_j}(\omega), \tag{1}$$

за некое конечно разбивање $A_i, i = 1,2,...,m$ на Ω. Тогаш бројот $E(X) = \sum_{j=1}^{m} x_j P(A_j)$ го нарекуваме *математичко очекување на* X.

Лема 17. Математичкото очекување на проста случајна променливи X не зависи од изборот на разбивањето на Ω.

Доказ. Нека $A_i, i = 1,...,m$ и $B_k, k = 1,...,n$ се две разбивања на Ω. Тогаш, од $A_j = \sum_{k=1}^{n} A_j B_k$, за секој j, $B_k = \sum_{j=1}^{m} A_j B_k$, за секој k и од тоа што $X(\omega) = x_j = y_k$, за секој $\omega \in A_j B_k$ добиваме

$$E(X) = \sum_{j=1}^{m} x_j P(A_j) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} x_j P(A_j B_k) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} y_k P(A_j B_k) = \sum_{k=1}^{n} y_k P(B_k),$$

што значи дека $E(X)$ не зависи од изборот на разбивањето на Ω. ♦

Лема18. Нека X е проста случајна променлива и A и B се дисјунктни настани. Тогаш важи равенството $E(XI_{A\cup B}) = E(XI_A) + E(XI_B)$.

Доказ. Нека $X = \sum_{j=1}^{m} x_j I_{A_j}$, каде $\Omega = \bigcup_{j=1}^{m} A_j$ е разбивање на сигурниот настан. Тогаш

$$XI_{A\cup B} = \sum_{j=1}^{m} x_j I_{A_j} I_{A\cup B} = \sum_{j=1}^{m} x_j I_{A_j(A\cup B)},$$

па затоа

$$E(XI_{A\cup B}) = \sum_{j=1}^{m} x_j P(A_j(A\cup B)) = \sum_{j=1}^{m} x_j P(A_j A \cup A_j B) = \sum_{j=1}^{m} x_j P(A_j A) + \sum_{j=1}^{m} x_j P(A_j B)$$
$$= E(XI_A) + E(XI_B). \ ♦$$

Лема 19. Нека X и Y се прости случајни променливи.

а) $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$ и $E(cX)=cE(X)$, за секоја константа c.

б) Ако $X\geq 0$, тогаш $E(X)\geq 0$, а ако $X\geq Y$, тогаш $E(X)\geq E(Y)$.

Доказ. а) Нека $X=\sum\limits_{j=1}^{m}x_jI_{A_j}$ и $Y=\sum\limits_{k=1}^{n}y_kI_{B_k}$. Бидејќи A_jB_k, $j=1,2,...,m$; $k=1,2,...,n$ е разбивање на Ω и за секој $\omega\in A_jB_k$ важи $X(\omega)+Y(\omega)=x_j+y_k$ добиваме

$$E(X+Y)=\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}(x_j+y_k)P(A_jB_k)=\sum_{j=1}^{m}x_j\sum_{k=1}^{n}P(A_jB_k)+\sum_{k=1}^{n}y_k\sum_{j=1}^{m}P(A_jB_k)$$

$$=\sum_{j=1}^{m}x_jP(A_j)+\sum_{k=1}^{n}y_kP(B_k)=E(X)+E(Y).$$

Ако $X=\sum\limits_{j=1}^{m}x_jI_{A_j}$, тогаш $cX=\sum\limits_{j=1}^{m}cx_jI_{A_j}$, па затоа $E(cX)=cE(X)$.

б) Ако $X\geq 0$, тогаш во (1) сите $x_j\geq 0$, па затоа $E(X)\geq 0$. Ако $X\geq Y$, тогаш $X=Y+(X-Y)$ и како $X-Y\geq 0$ од а) и од претходно изнесеното имаме

$$E(X)=E(Y)+E(X-Y)\geq E(Y)\text{ . }\blacklozenge$$

Нека X е ненегативна случајна променлива дефинирана на Ω. Според теорема 11 постои монотоно растечка низа $\{X_n\}$ ненегативни прости случајни променливи таква да $\lim\limits_{n\to\infty}X_n=X$ на Ω, за што ја користиме и ознаката $X_n\uparrow X$. Понатаму, од лема 19 б) следува дека низата $\{E(X_n)\}$ е монотоно растечка во $\mathbf{R}^+$, па затоа постои $\lim\limits_{n\to\infty}E(X_n)$, кој може да биде еднаков и на $+\infty$.

Лема 20. Ако Y и X_n, $n=1,2,...$ се прости ненегативни случајни променливи и $X_n\uparrow X\geq Y$, за $n=1,2,...$, тогаш $\lim\limits_{n\to\infty}E(X_n)\geq E(Y)$.

Доказ. Нека $\varepsilon>0$. Да означиме $A_n=\{\omega\,|\,X_n(\omega)\geq Y-\varepsilon\}$. Тогаш, $\overline{A}_n\to\varnothing$ кога $n\to\infty$, па затоа $P(\overline{A}_n)\to 0$. Понатаму, од очигледните неравенства

$$X_n\geq X_nI_{A_n}\geq(Y-\varepsilon)I_{A_n}=Y-\varepsilon I_{A_n}-YI_{\overline{A}_n}$$

и лема 19 б) следува

$$E(X_n)\geq E(Y)-\varepsilon P(A_n)-cP(\overline{A}_n),$$

каде бројот c е избран така, што $Y(\omega)\leq c$ за секој $\omega\in\Omega$. Значи

$$E(X_n)\geq E(Y)-\varepsilon-cP(\overline{A}_n)$$

и како $P(\overline{A}_n) \to 0$, добиваме дека

$$\lim_{n\to\infty} E(X_n) \geq E(Y) - \varepsilon,$$

за секој $\varepsilon > 0$. Конечно, тврдењето на лемата следува од произволноста на ε. ♦

Дефиниција 20. Ако X е ненегативна случајна променлива и $\{X_n\}$ е низа прости случајни променливи таква, што $X_n(\omega) \uparrow X(\omega)$ за секој $\omega \in \Omega$, тогаш границата

$$E(X) = \lim_{n\to\infty} E(X_n), \tag{2}$$

конечна или бесконечна, ја нарекуваме *математичко очекување на* X.

Лема 21. Ако X е ненегативна случајна променлива, тогаш границата (2) не зависи од изборот на низата прости случајни променливи $\{X_n\}$ таква што

$$\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega) \text{ за секој } \omega \in \Omega.$$

Доказ. Нека $\{X_n\}$ и $\{Y_n\}$ се две низи прости случајни променливи такви да $0 \leq X_n \uparrow X$ и $0 \leq Y_n \uparrow X$. Ако го фиксираме m и на неравенството $X_n \uparrow X \geq Y_m$ ја примениме лема 20 добиваме дека $\lim\limits_{n\to\infty} E(X_n) \geq E(Y_m)$, од што следува дека $\lim\limits_{n\to\infty} E(X_n) \geq \lim\limits_{n\to\infty} E(Y_n)$. Аналогно се добива дека $\lim\limits_{n\to\infty} E(Y_n) \geq \lim\limits_{n\to\infty} E(X_n)$, од што следува дека

$$\lim_{n\to\infty} E(X_n) = \lim_{n\to\infty} E(Y_n). \; ♦ \tag{3}$$

Лема 22. Ако X е ненегативна случајна променлива и A и B се дисјунктни настани, тогаш

$$E(XI_{A\cup B}) = E(XI_A) + E(XI_B).$$

Доказ. Нека X е ненегативна случајна променлива и $\{X_n\}$ е низа прости случајни променливи таква што $0 \leq X_n \uparrow X$. Тогаш важи

$$X_n I_{A\cup B} \uparrow XI_{A\cup B},\; X_n I_A \uparrow XI_A \text{ и } X_n I_B \uparrow XI_B.$$

Ако ги искористиме лемите 18 и 19 а) добиваме

$$E(XI_{A\cup B}) = \lim_{n\to\infty} E(X_n I_{A\cup B}) = \lim_{n\to\infty} [E(X_n I_A) + E(X_n I_B)] = E(XI_A) + E(XI_B). \; ♦$$

Лема 23. Нека X и Y се ненегативни случајни променливи. Тогаш

а) $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$ и $E(cX) = cE(X)$, за секој $c > 0$.

б) $E(X) \geq 0$ и ако $X \geq Y$, тогаш $E(X) \geq E(Y)$.

в) Ако $X \leq Y$ и $E(Y) < \infty$, тогаш $E(X) < \infty$.

Доказ. а) Нека $\{X_n\}$ и $\{Y_n\}$ се две низи прости случајни променливи такви, што $0 \leq X_n \uparrow X$ и $0 \leq Y_n \uparrow Y$. Тогаш, $X_n + Y_n \uparrow X + Y$ и од дефиниција 20 и лема 8.5 добиваме

$$\begin{aligned} E(X+Y) &= \lim_{n\to\infty} E(X_n + Y_n) = \lim_{n\to\infty} [E(X_n) + E(Y_n)] \\ &= \lim_{n\to\infty} E(X_n) + \lim_{n\to\infty} E(Y_n) = E(X) + E(Y). \end{aligned}$$

Ако $c > 0$, тогаш од $X_n \to X$ следува $cX_n \to cX$ па затоа

$$E(cX) = \lim_{n\to\infty} E(cX_n) = c \lim_{n\to\infty} E(X_n) = cE(X).$$

б) Од $0 \leq X_n \uparrow X$ следува $0 \leq E(X_n) \uparrow E(X)$. Ако $X \geq Y$, тогаш

$$X = Y + (X - Y)$$

и како $X - Y \geq 0$ од а) и од претходно изнесеното имаме

$$E(X) = E(Y) + E(X - Y) \geq E(Y).$$

в) Ако $0 \leq X \leq Y$ и $E(Y) < +\infty$, тогаш од б) имаме дека $E(X) \leq E(Y)$, па затоа $E(X) < +\infty$. ♦

Како што знаеме, секоја случајна променлива X можеме да ја запишеме во видот $X = X^+ - X^-$, при што во терминот индикатор на настан имаме

$$X^+ = XI_{\{X \geq 0\}} \text{ и } X^- = XI_{\{X<0\}}.$$

Дефиниција 21. Ако X е случајна променлива, тогаш

$$E(X) = E(X^+) - E(X^-), \tag{4}$$

ако десната страна на равенството (4) има смисол, т.е. ако $E(X^+)$ и $E(X^-)$ не се еднакви на $+\infty$ истовремено, е *математичкото очекување на* X. Ако $E(X^+) = E(X^-) = +\infty$, тогаш ќе велиме дека математичкото очекување $E(X)$ не постои. Ако $E(X^+) = +\infty$ и $E(X^-) < +\infty$, тогаш $E(X) = +\infty$, а ако $E(X^-) = +\infty$, $E(X^+) < +\infty$, тогаш $E(X) = -\infty$.

Теорема 20. Ако за случајната променлива X математичкото очекување $E(X)$ постои, тогаш тоа е еднозначно определено.

Доказ. Непосредно следува од лема 21 и еднозначноста на претставувањето $X = X^+ - X^-$. ♦

Теорема 21. Ако X е случајна променлива и A и B се дисјунктни настани, тогаш

$$E(XI_{A \cup B}) = E(XI_A) + E(XI_B).$$

Доказ. Имаме $X = X^+ - X^-$, па затоа $XI_{A\cup B} = X^+ I_{A\cup B} - X^- I_{A\cup B}$. Сега од лемите 23 а) и 22 имаме

$$E(XI_{A\cup B}) = E(X^+ I_{A\cup B}) - E(X^- I_{A\cup B}) = E(X^+ I_A) + E(X\xi^+ I_B) - E(X^- I_A) - E(X^- I_B)$$
$$= E(X^+ I_A) - E(X^- I_A) + E(X^+ I_B) - E(X^- I_B) = E(XI_A) + E(XI_B),$$

што и требаше да се докаже. ♦

Теорема 22. а) Нека $E(X)$, $E(Y)$ и $E(X+Y)$ постојат и c е константа. Тогаш, $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$ и $E(cX) = cE(X)$.

б) Ако $E(X)$ и $E(Y)$ постојат и $X \geq Y$, тогаш $E(X) \geq E(Y)$.

в) Ако $E(X)$ е конечно, тогаш $E(|X|)$ е конечно. Ако $|X| \leq Y$ и $E(Y)$ е конечно, тогаш $E(X)$ е конечно. Ако $E(X)$ и $E(Y)$ се конечни, тогаш $E(X+Y)$ е конечно.

Доказ. а) Имаме $X = X^+ - X^-$, што значи $cX = cX^+ - cX^-$ ако $c \geq 0$ и $cX = |c|X^- - |c|X^+$, ако $c < 0$. Сега од дефиницијата 21 и лемата 23 а) следува $E(cX) = cE(X)$.

За да ја докажеме адитивноста, прво да забележиме дека ако $X = X_1 - X_2$, $X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$, тогаш $X_1 = X^+ + \delta$, $X_2 = X^- + \delta$, за некој $\delta \geq 0$. Навистина, од равенствата $X = X_1 - X_2 = X^+ - X^-$ следува дека $X_1 - X^+ = X_2 - X^- \geq 0$ и ако ставиме $X_1 - X^+ = \delta$ добиваме $X_2 = X^- + \delta$. Понатаму, ако $E(X_1)$ и $E(X_2)$ се конечни, тогаш од лема 23 в) следува дека $E(\delta)$, $E(X^+)$ и $E(X^-)$ се конечни, па затоа

$$E(X) = E(X^+) - E(X^-) = E(X^+) + E(\delta) - [E(X^-) + E(\delta)]$$
$$= E(X^+ + \delta) - E(X^- + \delta) = E(X_1) - E(X_2).$$

Сега, ако $E(X)$ и $E(Y)$ се конечни, тогаш од претходното равенство и од равенството

$$X + Y = X^+ + Y^+ - (X^- + Y^-)$$

следува

$$E(X+Y) = E(X^+ + Y^+) - E(X^- + Y^-)$$
$$= E(X^+) + E(Y^+) - E(X^-) - E(Y^-) = E(X) + E(Y).$$

Случаите кога или $E(X)$ или $E(Y)$ е бесконечно се анализираат одделно. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

б) Ако $E(Y) = -\infty$, тогаш јасно $E(X) \geq E(Y)$. Нека претпоставиме дека $E(Y) > -\infty$. Тогаш, од равенството $X = Y + (X - Y)$, $X - Y \geq 0$ и лема 23 б) имаме

$$E(X) = E(Y) + E(X - Y) \geq E(Y).$$

в) Од конечноста на $E(X)$ следува конечноста на $E(X^+)$ и $E(X^-)$. Сега од $|X| = X^+ + X^-$ добиваме дека и $E(|X|)$ е конечно. Останатите делови од тврдењето се проверуваат непосредно. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ♦

Лема 24. За секоја случајна променлива X важи $|E(X)| \le E(|X|)$.

Доказ. Неравенството следува од неравенствата $-|X| \le X \le |X|$ и од претходната теорема. ♦

Теорема 23 ($\sigma-$адитивност). Нека X е произволна случајна променлива дефинирана на просторот на веројатности $(\Omega, \boldsymbol{A}, P)$ и $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, каде $A_i A_j = \varnothing$ за $i \neq j$. Тогаш точно е равенството

$$E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} E(XI_{A_n}), \tag{5}$$

Доказ. а) Тврдењето прво ќе го докажеме за проста случајна променлива која прима вредности $x_k, k = 1, 2, ..., m$. За $k = 1, 2, ..., m$ и $n = 1, 2, ...$ да означиме

$$B_k = \{\omega \mid \omega \in \Omega,\ X(\omega) = x_k\} \text{ и } B_{nk} = \{\omega \mid \omega \in A_n,\ X(\omega) = x_k\}.$$

Тогаш важи

$$E(X) = \sum_{k=1}^{m} x_k P(B_k) = \sum_{k=1}^{m} x_k \sum_{n=1}^{\infty} P(B_{nk}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{m} x_k P(B_{nk}) = \sum_{n=1}^{\infty} E(XI_{A_n}).$$

б) Нека X е ненегативна случајна променлива и $\{X_n\}$ низа прости случајни променливи такви што $0 \le X_n \uparrow X$. Од тврдењето под а) следува дека за секој индекс k важи

$$E(X_k) = \sum_{n=1}^{\infty} E(X_k I_{A_n}).$$

Нека $\varepsilon > 0$ е дадено. Тогаш, постои $k_0 \in \mathbf{N}$ таков, што за секој $k \ge k_0$ важи $|X_k - X| < \frac{\varepsilon}{2}$. Понатаму, за секој $k \ge k_0$ важи

$$|E(X_k) - E(X)| \le E(|X_k - X|) < \frac{\varepsilon}{2}$$

и

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} E(X_k I_{A_n}) - \sum_{n=1}^{\infty} E(XI_{A_n})\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} E(|X - X_k| I_{A_n}) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2} I_{A_n} = \frac{\varepsilon}{2} \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Од последните две неравенства и претходното равенство добиваме

$$\left|E(X) - \sum_{n=1}^{\infty} E(XI_{A_n})\right| \le |E(X) - E(X_k)| + \left|E(X_k) - \sum_{n=1}^{\infty} E(XI_{A_n})\right|$$

$$= |E(X) - E(X_k)| + \left|\sum_{n=1}^{\infty} E(X_k I_{A_n}) - \sum_{n=1}^{\infty} E(XI_{A_n})\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Сега, од произволноста на ε следува точноста на равенството (5) во случај на ненегативна случајна променлива X.

в) Конечно, ако X е произволна случајна променлива за која постои математичкото очекување, тогаш $X = X^{+} - X^{-}$, па затоа

$$E(X) = E(X^{+}) - E(X^{-}) = \sum_{n=1}^{\infty} E(X^{+} I_{A_n}) - \sum_{n=1}^{\infty} E(X^{-} I_{A_n})$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} E(X^{+} - X^{-}) I_{A_n} = \sum_{n=1}^{\infty} E(X I_{A_n}) . \ ♦$$

Теорема 24 (апсолутна непрекинатост). Ако математичкото очекување на случајната променлива X е конечно, тогаш за секој $\varepsilon > 0$ постои $\delta > 0$ таков што за секој настан A за кој $P(A) < \delta$ важи $| E(X I_A) | < \varepsilon$.

Доказ. Ако случајната променлива X е ограничена, т.е. ако постои $M > 0$ таков, што $| X | < M$, тогаш доволно е да земеме $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$. Нека X е произволна случајна променлива со конечно математичко очекување. За $m, n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ ги воведуваме следниве ознаки:

$$A_n = \{\omega \,|\, n \le X < n+1\} , \ B_m = \bigcup_{n=0}^{m} A_n .$$

Од теоремите 22 в) и 23 следува

$$E(| X |) = \sum_{n=1}^{\infty} E(| X | I_{A_n}) < \infty .$$

Нека $\varepsilon > 0$ и $m \in \mathbf{N}$ е таков што

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} E(| X | I_{A_n}) = E(| X | I_{\overline{B_m}}) < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Нека $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{2(m+1)}$. Тогаш за секој настан A таков, што $P(A) < \delta$ добиваме

$$| E(X I_A) | \le E(| X | I_A) = E(| X | I_{AB_m}) + E(| X | I_{A\overline{B_m}})$$

$$\le (m+1) P(AB_m) + E(| X | I_{\overline{B_m}}) < (m+1)\delta + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

што и требаше да се докаже. ♦

Дефиниција 22. Нека $(\Omega, \boldsymbol{A}, P)$ е простор на веројатности и нека T е тврдење кое зависи од $\omega \in \Omega$. Ќе велиме дека тврдењето T важи *скоро сигурно* (с.с.) ако

$$P\{\omega \,|\, \text{важи тврдењето } T(\omega)\} = 1 .$$

Забелешка 17. Често пати сме во ситуација да разгледуваме настани кои припаѓаат на $\sigma -$ алгебрата генерирана од некоја случајна променлива. Сите тврдења кои претходно ги разгледавме за математичкото очекување се точни ако сите услови од видот “*за секој* $\omega \in \Omega$ ...” ги замениме со условите “*скоро сигурно на* Ω ...”. Во следната лема ќе разгледаме три тврдења кои се формулирани во терминот “*скоро сигурно на* Ω *...*”.

Лема 25. Нека X и Y се случајни променливи определени на ист простор на веројатности $(\Omega, \boldsymbol{A}, P)$.

а) Ако $X = 0$ (с.с.) скоро сигурно, тогаш $E(X) = 0$.

б) Ако $X = Y$ (с. с.) и X има конечно математичко очекување, тогаш Y има конечно математичко очекување и $E(X) = E(Y)$.

Доказ. а) Нека X е проста случајна променлива, т.е. $X = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k I_{A_k}$ и $x_k \neq 0$. Тогаш $P(A_k) = 0$, за $k = 1, 2, ..., n$, па затоа $E(X) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k P(A_k) = 0$.

Нека X е ненегативна случајна променлива и $\{X_n\}$ низа ненегативни прости случајни променливи такви што $0 \leq X_n \uparrow X$. Тогаш од $0 \leq X_n \leq X$, за $n = 1, 2, 3, ...$ следува $X_n = 0$ (с.с.), за $n = 1, 2, 3, ...$, па затоа $E(X_n) = 0, n = 1, 2, 3, ...$. Конечно од дефиниција 20 добиваме $E(X) = \lim\limits_{n \to \infty} E(X_n) = 0$.

Нека X е произволна случајна променлива. Тогаш $X = X^+ - X^-$, каде X^+ и X^- се ненегативни случајни променливи. Од $X = 0$ (с.с.) следува $|X| = 0$ (с.с) и како $X^+ \leq |X|, X^- \leq |X|$ добиваме $X^+ = 0$ (с.с) и $X^- = 0$ (с.с.). Сега од претходно изнесеното следува $E(X^+) = 0$ и $E(X^-) = 0$, па затоа $E(X) = E(X^+) - E(X^-) = 0$.

б) Нека $A = \{\omega \mid X(\omega) = Y(\omega)\}$. Тогаш $A \in \boldsymbol{A}$, $P(A) = 1$, и важи

$$X = XI_A + XI_{\overline{A}}, \quad Y = YI_A + YI_{\overline{A}}, \quad XI_A = YI_A. \tag{6}$$

Понатаму,

$$\{\omega \mid \omega \in A\} \subseteq \{\omega \mid XI_{\overline{A}}(\omega) = 0\} \text{ и } \{\omega \mid \omega \in A\} \subseteq \{\omega \mid YI_{\overline{A}}(\omega) = 0\}$$

па затоа $P\{\omega \mid XI_{\overline{A}}(\omega) = 0\} = 1$ и $P\{\omega \mid YI_{\overline{A}}(\omega) = 0\} = 1$, што значи $XI_{\overline{A}} = 0$ (с.с.) и $YI_{\overline{A}} = 0$ (с.с.). Сега од тврдењето под а) следува $E(XI_{\overline{A}}) = E(YI_{\overline{A}}) = 0$. Конечно, од (6) добиваме $E(XI_A) = E(YI_A)$ и

$$E(X) = E(XI_A + XI_{\overline{A}}) = E(XI_A) + E(XI_{\overline{A}}) = E(YI_A) + E(YI_{\overline{A}}) = E(YI_A + YI_{\overline{A}}) = E(Y).$$

Јасно, од последното равенство и од претпоставката следува дека Y има конечно математичко очекување. ♦

Забелешка 18. Важи и поопшто тврдење од тврдењето во лема 25 б). Имено, *Ако* $X = Y$ *(с.с.), тогаш* $E(X) = E(Y)$ *во смисла да ако едното математичко очекување постои, тогаш постои и другото и вредностите им се еднакви.*

Случајот кога едната случајна променлива има конечно математичко очекување е докажан во лема 25 б). Оттука, ако X и Y се ненегативни и X нема конечно математичко очекување, тогаш од лема 25 б) следува дека Y нема конечно математичко очекување, т.е. важи $E(X) = E(Y) = +\infty$. Општиот случај следува од дефиницијата на математичкото очекување и од равенствата $X^+ = Y^+$ и $X^- = Y^-$.

Лема 26. Ако $X \le Y$ (с.с.), тогаш $E(X) \le E(Y)$.

Доказ. Нека $A = \{\omega \mid X(\omega) \le Y(\omega)\}$. Тогаш $A \in \boldsymbol{A}$ и $P(A) = 1$. Дефинираме случајни променливи $X_1 = XI_A$ и $Y_1 = YI_A$. Имаме $X_1 \le Y_1$, па затоа $E(X_1) \le E(Y_1)$. Понатаму, $X_1 = X$ (с.с.) и $Y_1 = Y$ (с.с.), па од забелешка 18 следува

$$E(X) = E(X_1) \le E(Y_1) = E(Y)\ . \ \blacklozenge$$

Лема 27. а) Нека $X \ge 0$ и $E(X) = 0$. Тогаш $X = 0$ (с.с.).

б) Ако X и Y имаат конечни математички очекувања и за секој $A \in \boldsymbol{A}$ важи $E(XI_A) \le E(YI_A)$, тогаш $X \le Y$ (с.с.).

в) Ако X и Y имаат конечни математички очекувања и за секој $A \in \boldsymbol{A}$ важи $E(XI_A) = E(YI_A)$, тогаш $X = Y$ (с.с.).

г) Ако X е проширена случајна променлива, т.е. $X : \Omega \to \mathbf{R}$ и $E(|X|) < \infty$, тогаш $|X| < \infty$ (с.с.).

Доказ. а) Нека $A = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) > 0\}$ и $A_n = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) > \frac{1}{n}\}$, $n \in \mathbf{N}$. Тогаш $A, A_n \in \boldsymbol{A}$ и очигледно важи $A_n \uparrow A$. Понатаму, $0 \le XI_{A_n} \le XI_A \le X$, за секој $n \in \mathbf{N}$, па од теорема 22 б) следува дека $0 \le E(XI_{A_n}) \le E(XI_A) \le E(X) = 0$, а секој $n \in \mathbf{N}$. Сега, од $\frac{1}{n} I_n \le XI_n$, за секој $n \in \mathbf{N}$ добиваме

$$\tfrac{1}{n} P(A_n) = \tfrac{1}{n} E(I_n) \le E(XI_n) = 0 \text{ , секој } n \in \mathbf{N},$$

па затоа $P(A_n) = 0$, за секој $n \in \mathbf{N}$. Конечно, од непрекинатоста на веројатностната мера следува

$$P\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = 0\} = 1 - P\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) > 0\} = 1 - P(A) = 1 - \lim_{n \to \infty} P(A_n) = 1,$$

што според дефиниција 22 значи $X = 0$ (с.с.).

б) Нека $A = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) > Y(\omega)\}$. Тогаш $A \in \boldsymbol{A}$. Понатаму, $YI_A \le XI_A$, па затоа $E(YI_A) \le E(XI_A)$. Но, од условот имаме $E(XI_A) \le E(YI_A)$, што заедно со претходното неравенство повлекува $E(YI_A) = E(XI_A)$. Сега, од теорема 22 а) следува $E[(X - Y)I_A] = 0$ и како $(X - Y)I_A \ge 0$ од тврдењето под а) следува $(X - Y)I_A = 0$ (с.с.), што значи $P(A) = 0$. Според тоа,

$$P\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \le Y(\omega)\} = 1 - P\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) > Y(\omega)\} = 1 - P(A) = 1,$$

што според дефиниција 22 значи $X \le Y$ (с.с.).

в) Непосредно следува од тврдењето под б).

г) Нека $A = \{\omega \in \Omega \mid | X(\omega)| = \infty\}$ и да претпоставиме дека $P(A) > 0$. Тогаш $E(| X |) \geq E(| X | I_A) = \infty \cdot E(I_A) = \infty \cdot P(A) = \infty$, што противречи на $E(| X |) < \infty$. Според тоа, $P(A) = 0$, па затоа

$$P\{\omega \in \Omega \mid | X(\omega)| < \infty\} = 1 - P\{\omega \in \Omega \mid | X(\omega)| = \infty\} = 1 - P(A) = 1,$$

што според дефиниција 22 значи $| X | < \infty$ (с.с.). ♦

Забелешка 19. а) Дадената дефиниција за математичкото очекување и разгледаните својства не се ништо друго, туку Лебег-Стилтејсовиот интеграл од измерливата функцијата $X = X(\omega)$ во однос на веројатносната мера P на множеството Ω и неговите својства. Затоа, во теоријата на веројатност за математичкото очекување се користат и ознаките

$$E(X) = \int_\Omega X(\omega) dP(\omega) = \int_\Omega X(\omega) P d(\omega) = \int_\Omega X(\omega) dP = \int_\Omega X dP,$$

при што за интегрирањето по целиот простор Ω понекогаш наместо $\int_\Omega$ едноставно пишуваме $\int$. Понатаму, како што знаеме математичкото очекување на случајната променлива X е конечно ако и само ако $E(X^+) < \infty$ и $E(X^-) < \infty$. Притоа кога велиме дека случајната променлива има математичко очекување обично сметаме дека тоа е конечно и често ќе го користиме и терминот дека X е интеграбилна на Ω. Од теорема 22 в) и лема 24 следува дека случајната променлива X има конечно математичко очекување ако и само ако случајната променлива $| X |$ има конечно математичко очекување.

б) Во теоријата на веројатност често пати има потреба да се разгледува интеграл по произволен настан $A \in \boldsymbol{A}$, кој се дефинира како математичко очекување од случајната променлива XI_A, т.е.

$$\int_A X dP = \int_\Omega XI_A dP = E(XI_A),$$

и кој го нарекуваме *Лебег-Стилтејсов интеграл од* X *во однос на веројатносната мера* P *на множеството* A. Понатаму, акоземеме предвид дека $XI_A = X^+ I_A - X^- I_A$ добиваме дека $(XI_A)^+ = X^+ I_A$ и $(XI_A)^- = X^- I_A$, па затоа

$$\int_A X dP = E(XI_A) = E[(XI_A)^+] - E[(XI_A)^-] = E(X^+ I_A) - E(X^- I_A) = \int_A X^+ dP - \int_A X^- dP.$$

Нека $A \in \boldsymbol{A}$. Множеството од сите случајни променливи X определени на $(\Omega, \boldsymbol{A}, P)$ за кои $| \int_A X dP | < \infty$ ќе го означуваме со $L_A(P)$.

в) Во просторот на веројатности $(\mathbf{R}, \boldsymbol{B}, P_X)$, ако $F_X(x)$ е функцијата на распределба на X, која ја генерира веројатностната мера P_X, тогаш интегралот на Лебег-Стилтејс $\int g(x) dP_X(x)$ од Бореловата функција $g(x)$, ако истиот постои, понекогаш го запишуваме во видот $\int g(x) dF_X(x)$.

Лема 28. Нека $X \geq 0$ е случајна променлива на $(\Omega, \boldsymbol{A}, P)$ и $A \in \boldsymbol{A}$. Тогаш

$$\int_A XdP = \sup\{\int_A YdP \mid 0 \leq Y \leq X, Y \in \Re_0\}. \tag{7}$$

Доказ. Ако $0 \leq Y \leq X, Y \in \Re_0$, тогаш $0 \leq YI_A \leq XI_A$, па затоа

$$\int_A YdP = E(YI_A) \leq E(XI_A) = \int_A XdP,$$

и ако земеме супремум по Y, $0 \leq Y \leq X, Y \in \Re_0$ добиваме

$$\sup\{\int_A YdP \mid 0 \leq Y \leq X, Y \in \Re_0\} \leq \int_A XdP. \tag{8}$$

Од друга страна, ако $Z, 0 \leq Z \leq XI_A, Z \in \Re_0$, тогаш $Z = ZI_A \leq XI_A \leq X$, па затоа

$$E(Z) \leq \sup\{\int_A YdP \mid 0 \leq Y \leq X, Y \in \Re_0\}.$$

Сега, ако во последното неравенство земеме супремум по сите $Z, 0 \leq Z \leq XI_A, Z \in \Re_0$ од дефиниција 20 следува дека

$$\int_A XdP = E(XI_A) \leq \sup\{\int_A YdP \mid 0 \leq Y \leq X, Y \in \Re_0\}. \tag{9}$$

Конечно, равенството (7) следува од неравенствата (8) и (9). ♦

Во врска со Лебег-Стилтејсовиот интеграл од случајна променлива X во однос на веројатностна мера P на множество, во следната лема, без доказ ќе наведеме неколку својства.

Лема 29. а) Нека $A_1 \subseteq A_2$, $A_1, A_2 \in \boldsymbol{A}$ и $X \geq 0$. Тогаш $\int_{A_1} XdP \leq \int_{A_2} XdP.$

б) Ако $X \in L_{A_2}(P)$ и $A_1 \subseteq A_2$, тогаш $X \in L_{A_1}(P)$.

в) Ако $A_1, A_2, ..., A_k \in \boldsymbol{A}$ се заемно дисјунктни, $A = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$ и $X \in L_A(P)$, тогаш

$$\int_A XdP = \sum_{i=1}^{k} \int_{A_i} XdP. \; ♦ \tag{10}$$

9.2. ГРАНИЧНИ ТЕОРЕМИ ЗА МАТЕМАТИЧКОТО ОЧЕКУВАЊЕ

Теорема 25 (на Лебег за монотона конвергенција). Ако $0 \leq X_n \uparrow X$, тогаш

$$\lim_{n\to\infty} E(X_n) = E(X).$$

Доказ. Од $0 \leq X_n \leq X$, $n \in \mathbf{N}$ следува $0 \leq E(X_n) \leq E(X)$, $n \in \mathbf{N}$ па затоа

$$\lim_{n\to\infty} E(X_n) \le E(X) . \qquad (1)$$

Воведуваме прости случајни променливи X_{nk} такви, што $0 \le X_{nk} \uparrow X_n$ кога $k \to \infty$. Случајните променливи $Y_k = \max_{1\le n\le k} X_{nk}$ исто така ќе бидат прости. Од

$$0 \le Y_k = \max_{1\le n\le k} X_{nk} \le \max_{1\le n\le k+1} X_{n,k+1} = Y_{k+1}$$

следува дека низата $\{Y_k\}$ монотно расте. Нека $Y = \lim_{k\to\infty} Y_k$. За секој k важи $Y_k \le X_k$, па затоа

$$\lim_{k\to\infty} E(Y_k) = E(Y) \le \lim_{k\to\infty} E(X_k) . \qquad (2)$$

Понатаму, за $n \le k$ имаме $X_{nk} \le Y_k \le Y$ и ако земеме $k \to \infty$ добиваме дека $X_n \le Y$, за секој n, па затоа $X \le Y$ и $E(X) \le E(Y)$, од што заедно со (1) и (2) следува тврдењето на теоремата. ♦

Последица 11. Ако членовите на редот $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ се ненегативни случајни променливи, тогаш

$$E(\sum_{n=1}^{\infty} X_n) = \sum_{n=1}^{\infty} E(X_n) . \qquad (3)$$

Доказ. Низата од парцијални суми $Y_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ ги задоволува условите на теорема 25, па затоа е исполнето равенството

$$\lim_{n\to\infty} E(Y_n) = E(\lim_{n\to\infty} Y_n) ,$$

кое е еквивалентно на равенството (3). ♦

Последица 12. Ако X е ненегативна случајна променлива, тогаш

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{X \ge n\} \le E(X) \le 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P\{X \ge n\} .$$

Доказ. Да ги разгледаме настаните $A_k = \{\omega \,|\, k \le X(\omega) < k+1\}, k = 1,2,\ldots$. Забележуваме дека

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{X \ge n\} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} kP(A_k) . \qquad (4)$$

Понатаму, за случајните променливи X, I_{A_k}, $k = 1,2,3,\ldots$ важи

$$\sum_{k=1}^{\infty} kI_{A_k}(\omega) \le X(\omega) < \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)I_{A_k}(\omega) . \qquad (5)$$

Од (4), (5), својствата на математичкото очекување и последица 12 следува

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{X \geq n\} = \sum_{k=1}^{\infty} kP(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} E(kI_{A_k}) = E(\sum_{k=1}^{\infty} kI_{A_k}) \leq E(X) < E[\sum_{k=1}^{\infty} (k+1)I_{A_k}]$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} E[(k+1)I_{A_k}] = \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)P(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) + \sum_{k=1}^{\infty} kP(A_k)$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P\{X \geq n\}. \ \blacklozenge$$

Последица 13. Ако $|E(Y)| < \infty$ и за настаните $A_n, n = 1,2,...$ важи $A_n \to \varnothing$, тогаш

$$\lim_{n\to\infty} E(YI_{A_n}) = 0. \tag{6}$$

Доказ. Ако $|E(Y)| < \infty$, тогаш $E(|Y|) < \infty$. Да ја разложиме $|Y|$ во збир $Y_n + Y_n^{'}$, каде $Y_n = |Y| I_{A_n}$ и $Y_n^{'} = |Y| I_{\overline{A}_n}$. Тогаш, $E(Y) = E(Y_n) + E(Y_n^{'})$ и $0 \leq Y_n^{'} \uparrow |Y|$. Од теорема 25 следува дека $\lim\limits_{n\to\infty} E(Y_n^{'}) = E(|Y|)$, па затоа $\lim\limits_{n\to\infty} E(Y_n) = 0$. Конечно, равенството (6) следува од $|E(YI_{A_n})| \leq E(|Y| I_{A_n}) \to 0$. ♦

Теорема 26 (на Лебег за доминантна конвергенција). Ако

$$\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega),$$

за секој $\omega \in \Omega$ и $|X_n| \leq Y$, каде $E(Y) < \infty$, тогаш

$$\lim_{n\to\infty} E(X_n) = E(X). \tag{7}$$

Доказ. За секој $\varepsilon > 0$ низата настани $A_n = \{\omega \mid \sup\limits_{m\geq n} |X_m(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon\}$ е таква, што $\overline{A}_n \to \varnothing$. За собирците на збирот

$$X_n = X_n I_{A_n} + X_n I_{\overline{A}_n}$$

имаме

$$XI_{A_n} - \varepsilon \leq X_n I_{A_n} \leq XI_{A_n} + \varepsilon, \quad -YI_{\overline{A}_n} \leq X_n I_{\overline{A}_n} \leq YI_{\overline{A}_n},$$

па затоа

$$X - \varepsilon - XI_{\overline{A}_n} - YI_{\overline{A}_n} \leq X_n \leq X + \varepsilon + YI_{\overline{A}_n} - XI_{\overline{A}_n}$$

$$E(X) - \varepsilon - 2E(YI_{\overline{A}_n}) \leq E(X_n) \leq E(X) + \varepsilon + 2E(YI_{\overline{A}_n}). \tag{8}$$

Ако во (8) преминеме кон граница кога $n \to \infty$ и ја примениме последица 12, добиваме

$$E(X) - \varepsilon \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} E(X_n) \leq \overline{\lim}_{n\to\infty} E(X_n) \leq E(X) + \varepsilon.$$

Конечно, од произволноста на $\varepsilon > 0$ следува равенството (7). ♦

9.3. ПРЕСМЕТУВАЊЕ НА МАТЕМАТИЧКОТО ОЧЕКУВАЊЕ

Во претходните разгледувања докажавме дека случајната променлива $X = X(\omega)$ зададена на просторот на веројатности $(\Omega, \boldsymbol{A}, P)$ од гледна точка на нејзините веројатностни својства наполно е карактеризирана со својствата на распределбата на веројатностите P_X , па затоа можеме да сметаме дека таа е определена како функција $X = X(x) = x,\ x \in \mathbf{R}$ на просторот на веројатности $(\mathbf{R}, \boldsymbol{B}, P_X)$. Затоа, математичкото очекување $E(X) = \int\limits_{\Omega} X(\omega) Pd(\omega)$ не зависи од видот на функцијата $X(\omega)$, $\omega \in \Omega$, туку зависи од распределбата на веројатностите P_X .

За ненегативна случајна променлива X имаме $E(X) = \lim\limits_{n\to\infty} E(X_n)$, каде

$$E(X_n) = \sum_{k=1}^{n2^n} \tfrac{k-1}{2^n} P\{\omega \,|\, \tfrac{k-1}{2^n} < X(\omega) \le \tfrac{k}{2^n}\}. \tag{1}$$

Овој збир може да се изрази со помош на законот на распределба P_X :

$$E(X_n) = \sum_{k=1}^{n2^n} \tfrac{k-1}{2^n} P_X\{(\tfrac{k-1}{2^n}, \tfrac{k}{2^n}]\}. \tag{2}$$

Понатаму, границата $\lim\limits_{n\to\infty} E(X_n)$ во (1) ја означивме како Лебег-Стилтејсов интеграл $\int\limits_{\Omega} X(\omega) Pd(\omega)$ и таа во (2) ќе биде Лебег-Стилтејсовиот интеграл $\int\limits_{0}^{+\infty} x dP_X(x)$, кој го означуваме со $\int\limits_{0}^{+\infty} x dF_X(x)$. Ако претходните размислувања ги примениме за случајните променливи X^+ и X^-, тогаш за случајната променлива $X = X^+ - X^-$ ја добиваме формулата

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF_X(x), \tag{3}$$

која зависи само од распределбата на случајната променлива X . Јасно, ако $E(X)$ е конечно, тогаш десната страна во (3) ја подразбираме како несвојствен Риман-Стилтејсов интеграл и во овој случај истиот апсолутно конвергира.

Во следните две теореми ќе ги изведеме формулите за пресметување на $E(X)$ и $E[g(X)]$ за апсолутно-непрекинати случајни променливи.

Теорема 27. Ако случајната променлива X има густина $p_X(x)$ и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| \, p_X(x) dx < \infty ,$$

тогаш

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xp_X(x)dx. \tag{4}$$

Доказ. Ќе претпоставиме, дека густината $p_X(x)=p(x)$ е интеграбилна по Риман и на десната страна во (4) имаме несвојствен Риманов интеграл (доказот важи и за Лебегов интеграл).

На почетокот да разгледаме ненегативна случајна променлива X со функција на распределба

$$P\{X\le x\}=F_X(x)=\begin{cases}0, & \text{за } x<0\\ F(0), & \text{за } x=0\\ F(0)+\int_0^x p(u)du, & \text{за } x>0.\end{cases} \tag{5}$$

Да означиме $A_k=\{\frac{k-1}{2^n}<X\le\frac{k}{2^n}\}$ и да ја разгледаме низата прости случајни променливи

$$X_n=\sum_{k=1}^{n2^n}\frac{k-1}{2^n}I_{A_k}\ .$$

Тогаш, $E(X)=\lim_{n\to\infty}E(X_n)$. Имаме

$$E(X_n)=\sum_{k=1}^{n2^n}\frac{k-1}{2^n}\int_{(k-1)/2^n}^{k/2^n} p(u)du$$

и

$$\int_0^n xp(x)dx-\frac{1}{2^n}\le\sum_{k=1}^{n2^n}\frac{k-1}{2^n}\int_{(k-1)/2^n}^{k/2^n} p(x)dx\le\int_0^{+\infty} xp(x)dx.$$

Ако во неравенствата

$$\int_0^n xp(x)dx-\frac{1}{2^n}\le E(X_n)\le\int_0^{+\infty} xp(x)dx.$$

преминеме кон граница кога $n\to\infty$ добиваме дека равенството (4) важи за ненегативни случајни променливи. Во општ случај $X=X^+-X^-$ и X^+ и X^- имаат распределби од облик (5) со густини (за $x>0$)

$$p_{X^+}(x)=p(x) \text{ и } p_{X^-}(x)=p(-x).$$

Затоа,

$$E(X)=E(X^+)-E(X^-)=\int_0^{+\infty} xp(x)dx-\int_0^{+\infty} xp(-x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx\ .\ \blacklozenge$$

Теорема 28. Ако X има густина $p_X(x)$, функцијата $g(x)$ е непрекината и интегралот $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|\, p_X(x)dx$ конвергира, тогаш

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) p_X(x)dx. \tag{4}$$

Доказ. Нека непрекинатата функција $g(x)$ е еднаква на нула надвор од интервалот $[a,b]$. За секој $n = 1,2,...$ ставаме $x_{nk} = a + \frac{b-a}{n}k$ и

$$g_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{за } x \le a \text{ или } x > b \\ g(x_{nk}) & \text{за } x \in (x_{n,k-1}, x_{nk}]. \end{cases}$$

Нека $\varepsilon > 0$. Постои $n_0 \in \mathbf{N}$ таков, што за секој $n \ge n_0$ и секој $x \in [a,b]$ важи $|g_n(x) - g(x)| < \varepsilon$, т.е. $g_n(x) \to g(x)$ рамномерно по x кога $n \to \infty$. Освен тоа, за $n \ge n_0$ имаме

$$|g_n(x)| \le |g(x)| + \varepsilon$$

и $g(x)$ е ограничена. Од теоремата на Лебег за доминантна конвергенција добиваме

$$E[g(X)] = \lim_{n\to\infty} E[g_n(X)]. \tag{5}$$

Од друга страна,

$$E[g_n(X)] = \sum_{k=1}^{n} g(x_{nk}) \int_{x_{n,k-1}}^{x_{nk}} p(x)dx = \int_a^b g_n(x)p(x)dx.$$

Оттука и од неравенството $|g_n(x) - g(x)| < \varepsilon$ при $n \ge n_0$ добиваме

$$\left| \int_a^b g(x)p(x)dx - E[g_n(X)] \right| < \varepsilon.$$

Конечно, од последното неравенство и од равенството (5) го добиваме равенството (4).

Нека $g(x)$ е ненегативна функција. Ставаме

$$g_n(x) = \begin{cases} g(x), & |x| \le n \\ 0, & |x| > n. \end{cases}$$

Низата случајни променлива $Y_n = g_n(X)$ монотоно конвергира кон $Y = g(X)$, па од теоремата на Лебег за монотона конвергенција следува дека $E[g_n(X)] \uparrow E[g(X)]$. Оттука и од

$$E[g_n(X)] = \int_{-n}^{n} g(x)p(x)dx \to \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)p(x)dx$$

добиваме дека равенството (4) важи за ненегативни функции. Во општ случај имаме $g(x) = g^+(x) - g^-(x)$, каде $g^+(x) = \max\{g(x),0\}$ и $g^-(x) = -\min\{g(x),0\}$, па затоа

$$E[g(X)] = E[g^+(X)] - E[g^-(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g^+(x)p(x)dx - \int_{-\infty}^{+\infty} g^-(x)p(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)p(x)dx. \ \blacklozenge$$

Забелешка 20. Теоремите 27 и 28 може да се докажат и во случај на произволна распределба $F_X(x)$ со тоа што во (2) и (4) ќе фигурираат интеграли на Риман-Стилтејс

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF_X(x), \tag{6}$$

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dF_X(x). \tag{7}$$

Јасно, равенствата (6) и (7) важат кога интегралите на десната страна се апсолутно конвергентни. Да забележиме дека за дискретни случајни променливи равенствата (6) и (7) преминуваат во редови:

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k P\{X = x_k\}, \tag{8}$$

$$E[g(X)] = \sum_{k=1}^{\infty} g(x_k) P\{X = x_k\}, \tag{9}$$

при што равенствата (8) и (9) важат кога редовите на десната страна се апсолутно конвергентни.

Забелешка 21. Формулите (4), (7) и (9) се точни и во поопшт случај, т.е. кога Борелова функција $g(x_1,...,x_m)$ го пресликува $\mathbf{R}^m$ во $\mathbf{R}$. Имено, ако случајниот вектор $X = (X_1,...,X_m)$ има функција на распределба $F_{X_1,...,X_m}(x_1,...,x_m)$ и густина $p_{X_1,...,X_m}(x_1,...,x_m)$ (ако таа постои), тогаш, математичкото очекување на случајната променлива $g(X_1,...,X_m)$ може да се пресмета според формулите

$$E[g(X_1,...,X_m)] = \int_{-\infty}^{+\infty} ... \int_{-\infty}^{+\infty} g(x_1,...,x_m) dF_{X_1,...,X_m}(x_1,...,x_m) \tag{11}$$

и

$$E[g(X_1,...,X_m)] = \int_{-\infty}^{+\infty} ... \int_{-\infty}^{+\infty} g(x_1,...,x_m) p_{X_1,...,X_m}(x_1,...,x_m) dx_1 ... dx_m. \tag{12}$$

Доказот на последните две формули е аналоген како и доказот на формулите (4), (7) и (9).

Забелешка 22. Согласно со формулите (4), (7), (9), (11) и (12) математичкото очекување на случајната променлива $Y = g(X)$, односно на случајната променлива $Y = g(X_1,...,X_m)$ можеме да го најдеме без да ја наоѓаме нејзината густината.

Пример 11. а) За случајната променлива X од пример 5 математичкото очекување е

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)xdx=\frac{1}{9}\int_{0}^{3} x^3dx=\frac{x^4}{36}\Big|_0^3=\frac{9}{4}\,.$$

Сега од последица 22 а) следува дека математичкото очекување на случајната променлива $Y=4X-8$ е $E(Y)=4E(X)-8=4\frac{9}{4}-8=1$.

б) Нека е дадена случајна променлива X со густина

$$p(x)=\begin{cases}\frac{x^2}{18}, & |x|\le 3,\\ 0, & |x|>3.\end{cases}$$

Тогаш, согласно со забелешка 20 за случајната променлива $Y=X^2-X$ имаме

$$E(Y)=\int_{-3}^{3}(x^2-x)\frac{x^2}{18}dx=(\frac{x^5}{90}-\frac{x^4}{72})\Big|_{-3}^{3}=\frac{27}{5}\,.$$

в) Дискретната случајна променлива X прима вредности во множеството природни броеви $\mathbf{N}$. Ако ја искористиме формулата (8) добиваме

$$\sum_{n=1}^{\infty}P\{X\ge n\}=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty}P\{X=k\}=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{k}P\{X=k\}=\sum_{k=1}^{\infty}kP\{X=k\}=E(X)\,.$$

Аналогно, ако ја искористиме формулата (9) за функцијата $g(x)=x^2$, тогаш

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)P\{X\ge n\}&=\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)\sum_{k=n}^{\infty}P\{X=k\}=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{k}(2n-1)P\{X=k\}\\&=\sum_{k=1}^{\infty}P\{X=k\}\sum_{n=1}^{k}(2n-1)=\sum_{k=1}^{\infty}k^2P\{X=k\}\\&=\sum_{k=1}^{\infty}g(k)P\{X=k\}=E[g(X)]=E(X^2).\ \blacklozenge\end{aligned}$$

Пример 12. Дводимензионалната случајна променлива (X,Y) има густина на веројатност

$$f(x,y)=\begin{cases}4xy, & x,y\in[0,1],\\ 0, & \text{во останатите случаи.}\end{cases}$$

Ќе го пресметаме математичкото очекување на случајната променлива $Z=XY$. Ако во формулата (12) ставиме $g(x,y)=xy$, тогаш

$$E(Z)=\int_0^1\int_0^1 g(x,y)f(x,y)dxdy=4\int_0^1\int_0^1 x^2y^2dxdy=4\int_0^1 x^2dx\int_0^1 y^2dy=\frac{4}{9}\,.\ \blacklozenge$$

Пример 13. Нека X, Y и Z се случајни променливи чии функции на распределби се функциите $F(x)$, $G(x)$ и $H(x)$ од пример 7, соодветно. Од равенството $F(x)=\frac{1}{2}G(x)+\frac{1}{2}H(x)$, $x\in\mathbf{R}$ следува $X=\frac{1}{2}Y+\frac{1}{2}Z$, па затоа

$$E(X)=\tfrac{1}{2}E(Y)+\tfrac{1}{2}E(Z)=\tfrac{1}{2}\int_0^{1/2}xd(2x)+\tfrac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{2}=\tfrac{5}{8}\,. \blacklozenge$$

9.4. МОМЕНТИ ОД ПОВИСОК РЕД

Дефиниција 23. Нека X е случајна променлива на просторот на веројатности $(\Omega,\boldsymbol{A},P)$ и $r>0$. Математичкото очекување $E(X^r)$, доколку истото постои, го нарекуваме *обичен момент од* $r-$*ти ред на* X, а математичкото очекување $E(|X|^r)$ го нарекуваме *обичен апсолутен момент од* $r-$*ти ред на* X.

По договор земаме $E(X^0)=E(|X|^0)=1$.

Нека $|E(X)|<+\infty$. Тогаш $E[(X-E(X))^r]$ го нарекуваме *централен момент од* $r-$*ти ред на* X, а математичкото очекување $E[|X-E(X)|^r]$ го нарекуваме *централен апсолутен момент од* $r-$*ти ред на* X.

Централниот момент од втор ред на X го нарекуваме *дисперзија* на X, во ознака $D(X)=E[(X-E(X))^2]$.

Забелешка 23. а) Од дефиницијата следува дека $D(X)\geq 0$, па затоа постои $\sqrt{D(X)}=\sigma_X$ кој го нарекуваме *стандардна девијација на* X.

б) За пресметување на моменти дадени во дефиниција 23 ги користиме формулите од претходната точка. Примената на овие формули е коректна бидејќи за $r>0$ функциите $x^r, |x|^r, (x-E(X))^r$ и $|x-E(X)|^r$ се непрекинати.

в) Нека $n\in\mathbf{N}$ и да претпоставиме дека $E(X^n)$ постои. Тогаш од формулата (7) во забелешка 20 следува

$$E(|X|^n)=\int_\Omega |X|^n\, dP\,.$$

Ставаме

$$A_1=\{\omega\,|\,|X(\omega)|\leq 1\} \text{ и } A_2=\{\omega\,|\,|X(\omega)|>1\}\,.$$

Нека $1\leq m<n$. Тогаш, бидејќи на A_1 важи $|X|^m\leq 1$, а на A_2 важи $|X|^m\leq |X|^n$ од лема 29 и својствата на математичкото очекување следува

$$\begin{aligned}E(|X|^m)&=\int_\Omega |X|^m\, dP=\int_{A_1}|X|^m\, dP+\int_{A_2}|X|^m\, dP\leq \int_{A_1} dP+\int_{A_2}|X|^n\, dP\\ &\leq \int_\Omega dP+\int_\Omega |X|^n\, dP=1+E(|X|^n).\end{aligned}$$

Според тоа, ако за дадена случајна променлива постои $n-$тиот момент $E(X^n)$, тогаш постојат и сите моменти од понизок ред.

г) Нека моментот $E(X-b)^n$ постои за некој $b \in \mathbf{R}$. Тогаш од Њутновата биномна формула и својствата на математичкото очекување следува дека за секој $a \in \mathbf{R}$ важи

$$E((X-a)^n) = E((X-b+b-a)^n) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (b-a)^{n-k} E((X-b)^k). \qquad (1)$$

Но, според в) моментите $E(X-b)^k,\ k = 0,1,2,...,n$ постојат, па од (1) следува дека за секој $a \in \mathbf{R}$ моментот $E(X-a)^n$ постои.

Лема 30. а) $D(X) \geq 0$ и $D(X) = 0$ ако и само ако постои константа C таква што $P\{X = C\} = 1$.

б) Ако X е непрекината случајна променлива со конечна дисперзија $D(X)$ и $a, b \in \mathbf{R}$, тогаш за случајната променлива $Y = aX + b$ важи $D(Y) = a^2 D(X)$.

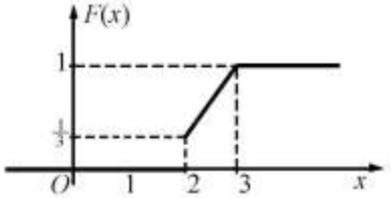
в) Ако X е непрекината случајна променлива со конечна дисперзија $D(X)$, тогаш $D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$.

г) Ако X е непрекината случајна променлива со конечни математичко очекување $E(X)$ и дисперзија $D(X)$, тогаш за случајната променлива $Y = \frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}}$ важи $D(Y) = 1$.

Доказ. Доказите на тврдењата се аналогни како и во случајот на дискретни случајни променливи. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ♦

Пример 14. Нека X е случајна променлива со функција на распределба

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 2, \\ \frac{2}{3}x - 1, & 2 \leq x < 3, \\ 1, & x \geq 3, \end{cases}$$



Цртеж 8

(цртеж 8). Фукцијата $F(x)$ ја запишуваме како линеарна комбинација на дискретна и апсолутно-непрекината функција на распределба, т.е. како

$$F(x) = \tfrac{1}{3} H(x) + \tfrac{2}{3} G(x),$$

каде

$$G(x) = \begin{cases} 0, & x < 2, \\ x, & 2 \leq x < 3, \\ 1, & x \geq 3, \end{cases} \text{ и } H(x) = \begin{cases} 0, & x < 2, \\ 1, & x \geq 2. \end{cases}$$

Сега, аналогно како во пример 13 наоѓаме $E(X^2) = \frac{50}{9}$. ♦

Пример 15. а) Ќе ја пресметаме дисперзијата на случајната променлива од пример 11 а). Согласно со лема 30 в) и равенството (4) од теорема 28 имаме:

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x)dx - (\tfrac{9}{4})^2 = \int_0^3 x^2 \tfrac{1}{9} x^2 dx - \tfrac{81}{16}$$

$$= \tfrac{1}{9}\int_0^3 x^4 dx - \tfrac{81}{16} = \tfrac{1}{9} \bullet \tfrac{3^5}{5} - \tfrac{81}{16} = \tfrac{3^3(16-15)}{80} = \tfrac{27}{80}.$$

б) Ако во равенството (12) од забелешка 21 земеме $g(x,y) = (xy)^2$, тогаш за случајната променлива $Z = XY$ од пример 12 а) добиваме

$$E(Z^2) = E((XY)^2) = \int_0^1\int_0^1 g(x,y) f(x,y) dxdy = 4\int_0^1\int_0^1 x^3 y^3 dxdy = 4\int_0^1 x^3 dx \int_0^1 y^3 dy = \tfrac{1}{4}.$$

Сега, од пример 12 а) и лема 30 в) следува

$$D(Z) = E(Z^2) - [E(Z)]^2 = \tfrac{1}{4} - (\tfrac{4}{9})^2 = \tfrac{17}{324}. \ ♦$$

Забелешка 24. Да ги разгледаме моментот од $r-$ти ред и централниот момент од $r-$ти ред, кои како и во случајот на дискретни случајни променливи ќе ги означуваме со m_r и M_r, соодветно. Може да се докаже дека

$$M_r = \sum_{k=0}^{r} (-1)^k C_r^k m_1^k m_{r-k}, \qquad (2)$$

т.е. дека за централните моменти со обичните моменти можат да се изразат со истата формула како и во случај на дискретните случајни променливи. Притоа, $M_1 = 0$ и ако во (2) ставиме $r = 2,3,4$, ги добиваме равенствата:

$$M_2 = m_2 - m_1^2,$$
$$M_3 = m_3 - 3m_1 m_2 + 2m_1^3,$$
$$M_4 = m_4 - 4m_1 m_3 + 6m_1^2 m_2 - 3m_1^4.$$

Исто така, со помош на централните моменти M_3 и M_4 и овде ги дефинираме *коефициентот на асиметрија* α_3 и *коефициентот на сплоштеност* α_4:

$$\alpha_3 = \frac{M_3}{\sigma^3}, \qquad \alpha_4 = \frac{M_4}{\sigma^4},$$

кои ги имаат истите значења како и во случајот на дискретни случајни променливи.

Пример 16. Ќе го пресметаме коефициентот на асиметрија на случајната променлива X со густина:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}x, & x \in [0,4], \\ 0, & x \notin [0,4]. \end{cases}$$

Решение. Прво ќе ги пресметаме обичните моменти m_1, m_2 и m_3. Имаме:

$$m_1 = E(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx = \tfrac{1}{8}\int\limits_0^4 x^2dx = \tfrac{1}{8}\tfrac{x^3}{3}\Big|_0^4 = \tfrac{1}{8}\bullet\tfrac{4^3}{3} = \tfrac{8}{3},$$

$$m_2 = E(X^2) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2p(x)dx = \tfrac{1}{8}\int\limits_0^4 x^3dx = \tfrac{1}{8}\tfrac{x^4}{4}\Big|_0^4 = \tfrac{1}{8}\bullet\tfrac{4^4}{4} = 8 \text{ и}$$

$$m_3 = E(X^3) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^3p(x)dx = \tfrac{1}{8}\int\limits_0^4 x^4dx = \tfrac{1}{8}\tfrac{x^5}{5}\Big|_0^4 = \tfrac{1}{8}\bullet\tfrac{4^5}{5} = \tfrac{128}{5}.$$

Понатаму, од лема 30 в) следува

$$\sigma^2 = D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 8 - (\tfrac{8}{3})^2 = \tfrac{8}{9},$$

па затоа $\sigma = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. За централниот момент од трети ред наоѓаме

$$M_3 = m_3 - 3m_1m_2 + 2m_1^3 = \tfrac{128}{5} - 3\bullet\tfrac{8}{3}\bullet 8 + 2(\tfrac{8}{3})^3 = \tfrac{128}{5} - 64 + \tfrac{2\bullet 8^3}{27} = -\tfrac{64}{135}.$$

Конечно, коефициентот на асиметрија на случајната променлива X е:

$$\alpha_3 = \frac{M_3}{\sigma^3} = -\frac{64}{135} : (\frac{2\sqrt{2}}{3})^3 = -\frac{64}{135} : \frac{16\sqrt{2}}{27} = -\frac{2\sqrt{2}}{5}. \ \blacklozenge$$

Забелешка 25. Во II 14, при проучувањето на дискретните случајни променливи ги разгледавме таканаречените класични неравенства за математичкото очекување. Овде ќе забележиме дека овие неравенства важат и за произволни случајни променливи, при што доказите се наполно идентични за доказите во случајот на дискретните случајни променливи. Според тоа, точни се следниве тврдења.

а) Неравенство на Јенсен. Нека X е случајна променлива таква што $E(|X|) < \infty$. Ако g е конвексна Борелова функција на $\mathbf{R}$ тогаш е исполнето неравенството

$$E(g(X)) \geq g(E(X)). \tag{3}$$

Ако функцијата g е конкавна Борелова функција, тогаш

$$E(g(X)) \leq g(E(X)). \ \blacklozenge \tag{4}$$

б) неравенство на Љапунов. За секои $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ такви, што $\alpha \leq \beta$ важи

$$(E(|X|^{\alpha}))^{\frac{1}{\alpha}} \leq (E(|X|^{\beta}))^{\frac{1}{\beta}}. \ \blacklozenge \tag{5}$$

в) неравенство на Коши-Буњаковски-Шварц. За секои случајни променливи X и Y, такви што $E(X^2) < +\infty$ и $E(Y^2) < +\infty$ важи

$$|E(XY)| \leq \sqrt{E(X^2)\cdot E(Y^2)}. \ \blacklozenge \tag{6}$$

г) неравенство на Холдер. Нека p и q се реални броеви такви што $p, q > 1$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, а X и Y се случајни променливи такви што $E(|X|^p) < \infty, E(|X|^q) < \infty$, тогаш

$$E(|XY|) \le (E(|X|^p))^{1/p}(E(|Y|^q))^{1/q} \text{ . } \blacklozenge \qquad (7)$$

д) Неравенство на Минковски. Ако $1 \le p < \infty$ и X и Y се случајни променливи такви што $E(|X|^p) < +\infty$ и $E(|Y|^p) < +\infty$, тогаш

$$[E(|X+Y|^p)]^{\frac{1}{p}} \le [E(|X|^p)]^{\frac{1}{p}} + [E(|Y|^p)]^{\frac{1}{p}} \text{ . } \blacklozenge \qquad (8)$$

Пример 17. Нека $p > 1$, X е случајна променлива на просторот на веројатности $(\Omega, \boldsymbol{A}, P)$ таква што $E(|X|^p) < \infty$ и $E_1, E_2, ..., E_n$ се меѓусебно дисјунктни настани од $\boldsymbol{A}$. Докажете дека

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{[P(E_i)]^{p-1}} \left| \int_{E_i} X dP \right|^p \le E(|X|^p) \text{ .}$$

Решение. Нека $q = \frac{p}{p-1}$. Од неравенството на Холдер следува

$$\left|\int_{E_i} XdP\right| \le \int_{E_i} |X|\, dP \le \left(\int_{E_i} |X|^p\, dP\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{E_i} dP\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_{E_i} |X|^p\, dP\right)^{\frac{1}{p}} [P(E_i)]^{\frac{1}{q}} \text{, за } i = 1, 2, ..., n,$$

што значи

$$\frac{1}{[P(E_i)]^{\frac{p}{q}}} \left|\int_{E_i} XdP\right|^p \le \int_{E_i} |X|^p\, dP, \text{ за } i = 1, 2, ..., n,$$

т.е.

$$\frac{1}{[P(E_i)]^{p-1}} \left|\int_{E_i} XdP\right|^p \le \int_{E_i} |X|^p\, dP, \text{ за } i = 1, 2, ..., n. \qquad (10)$$

Ако ги собереме неравенствата (10) и земеме предвид дека $\bigcup_{i=1}^{n} E_i \subseteq \Omega$, тогаш од 29 добиваме

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{[P(E_i)]^{p-1}} \left|\int_{E_i} XdP\right|^p \le \sum_{i=1}^{n} \int_{E_i} |X|^p\, dP = \int_{\bigcup_{i=1}^{n} E_i} |X|^p\, dP \le \int_{\Omega} |X|^p\, dP = E(|X|^p) \text{ . } \blacklozenge$$

ЗАДАЧИ

1. Нека F е функцијата на распределба на случајната променлива X, за која важи $F(0) = 0$. Докажете, дека

$$E(X) = \int_0^{+\infty} (1 - F(x)) dx \text{.}$$

2. Нека F е функцијата на распределба на апсолутно-непрекинатата случајна променлива X, за која важи

$$\lim_{x \to -\infty} xF(x) = 0 \text{ и } \lim_{x \to +\infty} x[1 - F(x)] = 0$$

Докажете, дека

$$E(X)=\int_0^{+\infty}(1-F(x))dx-\int_{-\infty}^{0}F(x)dx.$$

3. Нека X и Y се случајни променливи на просторот на веројатности $(\Omega,\boldsymbol{A},P)$ такви што $|E(X)|<\infty$ и $|E(Y)|<\infty$. Докажете дека $\sqrt{[E(X)]^2+[E(Y)]^2}\le E(\sqrt{X^2+Y^2})$.

4. Нека $X, X_n, n=1,2,3,...$ се ненегативни случајни променливи со конечни математички очекувања. Понатаму, нека $\lim\limits_{n\to\infty}E(X_n)=E(X)$ и $\lim P\{X-X_n>\varepsilon\}=0$, за секој $\varepsilon>0$. Докажете дека $\lim\limits_{n\to\infty}E(|X_n-X|)=0$.

5. (*Лема 29*). Докажете:

   a) Ако $A_1\subseteq A_2$, $A_1,A_2\in\boldsymbol{A}$ и $X\ge 0$, тогаш $\int\limits_{A_1}XdP\le\int\limits_{A_2}XdP.$

   b) Ако $X\in L_{A_2}(P)$ и $A_1\subseteq A_2$, тогаш $X\in L_{A_1}(P)$.

   c) Ако $A_1,A_2,...,A_k\in\boldsymbol{A}$ се заемно дисјунктни, $A=\bigcup\limits_{i=1}^{k}A_i$ и $X\in L_A(P)$, тогаш

$$\int\limits_A XdP=\sum_{i=1}^{k}\int\limits_{A_i}XdP.$$

6. Нека X е случајна променлива за која важи $P\{X\in[a,b]\}=1$. Докажете ги неравенствата

$$a\le E(X)\le b \text{ и } D(X)\le(\tfrac{b-a}{2})^2.$$

7. Нека X е случајна променлива на просторот на веројатности $(\Omega,\boldsymbol{A},P)$ таква да $|E(X^2)|<\infty$. Докажете дека $\min\limits_{a\in\mathbf{R}}E((X-a)^2)$ постои и определете ја неговата вредност.

8. Пресметајте го математичкото очекување на апсолутно-непрекинатата случајна променлива X со густина на веројатност:

   a) $p(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ (1+x)^{-2}, & x\ge 0,\end{cases}$

   b) $p(x)=\begin{cases}1-|x-1|, & x\in[0,2],\\ 0, & x\notin[0,2],\end{cases}$

   c) $p(x)=\begin{cases}\frac{1}{\pi\sqrt{a^2-x^2}}, & x\in(-a,a)\\ 0, & x\notin(-a,a),\end{cases}$

9. Густината на веројатност на апсолутно-непрекинатата случајна променлива X е дадена со:

$$p(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ ax^2e^{-kx}, & x\ge 0, \qquad k>0.\end{cases}$$

   a) Најдете ја константата a.
   b) Опеределета ја функцијата на распределба.
   c) Пресметајте ја веројатноста на настанот $\{0\le X\le\frac{1}{k}\}$.
   d) Пресметајте $E(X)$ и $D(X)$.

10. Густината на веројатност на апсолутно-непрекинатата случајна променлива X е дадена со:

$$p(x)=a(1+x^2)^{-\frac{n+1}{2}},\ n\in\mathbf{N}\setminus\{1\}.$$

a) Најдете ја константата a .
b) Определета ја функцијата на распределба.
c) Пресметајте $E(X)$ и $D(X)$.

11. Докажете дека функцијата

$$p(x) = \begin{cases} \frac{2}{b-a} - \frac{2}{(b-a)^2} | a+b-2x |, & x \in [a,b] \\ 0, & x \notin [a,b] \end{cases}$$

е густина на веројатност на некоја случајна променлива X . Пресметајте ги математичкото очекување и дисперзијата на случајната променлива X .
Забелешка. Претходната распределба во литературата е позната како *триаголна распределба.* Случајната променлива, со која е опишана случајната грешка, која се прави при заокружување на броевите на поблискиот цел број има триаголна распределба на интервалот $[0,1]$. Густината на веројатност во овој случај е

$$p(x) = \begin{cases} 4x, & x \in [0;0,5] \\ 4-4x, & x \in [0,5;1] \\ 0, & x \notin [0;1]. \end{cases}$$

12. Докажете дека функцијата

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ abx^{b-1}e^{-ax^b}, & x \geq 0 \end{cases},$$

каде $a,b > 0$, е густина на веројатност на некоја случајна променлива X и најдете ги математичкото очекување и дисперзијата на оваа случајна променлива.
Забелешка. Во случајов велиме дека случајната променлива X има *Вејбулова распределба.*

13. Густината на случајната променлива (X,Y) е:

$$f(x,y) = Ce^{-2\frac{x^2+4y^2-2xy+4x-10y+7}{3}}, \; x,y \in \mathbf{R}.$$

Пресметајте $E(2X+Y)$.

14. Случајната променлива (X,Y) има густина

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x+y)e^{-x-y}, & x \geq 0, \, y \geq 0, \\ 0, & \text{во останатите случаи.} \end{cases}$$

За случајната променлива $Z = X + Y$ најдете ги математичкото очекување и дисперзијата.

15. Нека X е случајна променлива на просторот на веројатности $(\Omega, \boldsymbol{A}, P)$ и $n \in \mathbf{N}$ се такви што $E(|X|^{2n}) < +\infty$. Докажете дека матрицата A со елементи $a_{ij} = E(X^{i+j}), i.j = 1,2,...,n$ е позитивно определена.

16. Нека $p_k \geq 1, k = 1,2,...,n$ и $X_k, k = 1,2,...,n$ се случајни променливи на просторот на веројатности $(\Omega, \boldsymbol{A}, P)$ такви што

$$E(|X_k|^{p_k}) < +\infty, \; k = 1,2,...,n.$$

Ако бројот p е определен со равенката

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + ... + \frac{1}{p_k},$$

докажете дека за случајната променлива $Y = X_1 X_2 ... X_n$ важи $E(|Y|^p) < +\infty$.

10. СТАНДАРДНИ ЕДНОДИМЕНЗИОНАЛНИ АПСОЛУТНО-НЕПРЕКИНАТИ СЛУЧАЈНИ ПРОМЕНЛИВИ

10.1. РАМНОМЕРНА РАСПРЕДЕЛБА

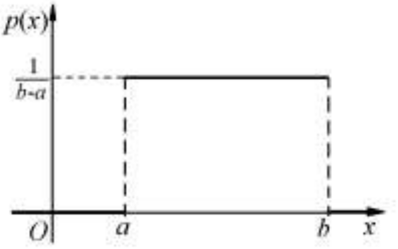
За случајната променлива X ќе велиме дека има *рамномерна распределба* на интервалот $[a,b]$, во ознака $\boldsymbol{U}[a,b]$, ако нејзината густина има вид

$$p(x)=\begin{cases} c, & a\le x\le b \\ 0, & x<a \text{ или } x>b \end{cases}$$

Имаме

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx=c\int_a^b dx=c(b-a),$$

па затоа $c=\frac{1}{b-a}$, цртеж 9. Според тоа, густината на случајната променлива X е дадена со равенството



Цртеж 9

$$p(x)=\begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a\le x\le b \\ 0, & x<a \text{ или } x>b. \end{cases} \tag{1}$$

За функцијата на распределба на случајната променлива X имаме

$$F(x)=P\{X\le x\}=\int_{-\infty}^{x} p(t)dt=\begin{cases} 0, & x\le a, \\ \frac{1}{b-a}\int_a^x dt, & a<x<b, \\ 1, & x\ge b. \end{cases}=\begin{cases} 0, & x\le a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a<x<b, \\ 1, & x\ge b. \end{cases}$$

Понатаму, за математичкото очекување на рамномерно распределена случајна променлива X добиваме:

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx=\frac{1}{b-a}\int_a^b xdx=\frac{b^2-a^2}{2(b-a)}=\frac{a+b}{2},$$

а обичниот момент од втор ред е:

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2p(x)dx=\frac{1}{b-a}\int_a^b x^2dx=\frac{b^3-a^3}{3(b-a)}=\frac{b^2+ba+a^2}{3}.$$

Конечно, од претходните две равенства следува

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{b^2+ba+a^2}{3}-\frac{(a+b)^2}{4}=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

Со тоа ја докажавме следнава лема.

Лема 31. Ако случајната променлива X има рамномерна распределба на интервалот $[a,b]$, тогаш нејзиното математичко очекување е

$$E(X)=\tfrac{a+b}{2}, \tag{2}$$

а дисперзијата е

$$D(X)=\tfrac{(b-a)^2}{12}\,. \ \blacklozenge \tag{3}$$

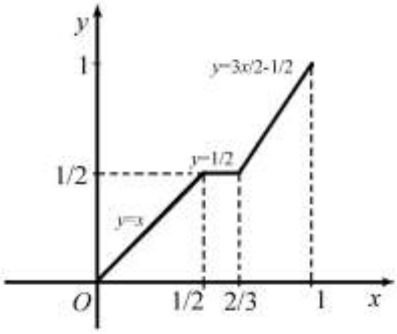
Забелешка 26. Нека $[x_1,x_2]\subseteq[a,b]$. Веројатноста на настанот $\{x_1\le X\le x_2\}$ е

$$P\{x_1\le X\le x_2\}=\int_{x_1}^{x_2} p(x)dx=\tfrac{1}{b-a}\int_{x_1}^{x_2} dx=\tfrac{x_2-x_1}{b-a}\,.$$

Од последното равенство следува: ако $[x_1,x_2]\subseteq[a,b]$, тогаш веројатноста $P\{x_1\le X\le x_2\}$ зависи од должината на интервалот $[x_1,x_2]$, но не и од неговата положба внатре во интервалот $[a,b]$. Да забележиме, дека токму ова својство е една од причините што распределбата со густина (1) ја нарекуваме рамномерна распределба.

Пример 18. Случајната променлива X има $\boldsymbol{U}[0,1]$ распределба. Најдете ја функцијата на распределба на случајната променлива

$$Y=\begin{cases} X, & \text{ако } 0\le X<\tfrac{1}{2},\\ \tfrac{1}{2}, & \text{ако } \tfrac{1}{2}\le X<\tfrac{2}{3},\\ \tfrac{3}{2}X-\tfrac{1}{2}, & \text{ако } \tfrac{2}{3}\le X\le 1.\end{cases}$$



Цртеж 10

Решение. Случајната променлива X има $\boldsymbol{U}[0,1]$ распределба, што значи нејзината густина е

$$p(x)=\begin{cases}1, & x\in[0,1],\\ 0, & x\notin[0,1].\end{cases}$$

Да ја определиме функцијата на распределба на случајната променлива Y (цртеж 10). За $y<0$ важи

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=0;$$

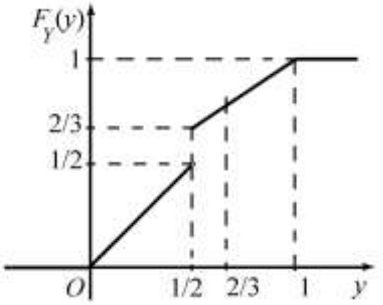
за $0\le y<\tfrac{1}{2}$ важи

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{X\le y\}=\int_{-\infty}^{y} p(x)dx=\int_{0}^{y} dx=y;$$

за $y=\tfrac{1}{2}$ важи

$$P\{Y=\tfrac{1}{2}\}=P\{\tfrac{1}{2}\le X<\tfrac{2}{3}\}=\int_{1/2}^{2/3} dx=\tfrac{1}{6};$$

за $\tfrac{1}{2}<y\le 1$ важи



Цртеж 11

$$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{\tfrac{3}{2}X - \tfrac{1}{2} \le y\}$$
$$= P\{X \le \tfrac{2}{3}(y+\tfrac{1}{2})\} = \tfrac{2}{3}(y+\tfrac{1}{2})$$

и за $y > 1$ важи $F_Y(y) = 1$. Според тоа

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & \text{за } y < 0, \\ y, & \text{за } 0 \le y < \frac{1}{2}, \\ \frac{2}{3}(y+\frac{1}{2}), & \text{за } \frac{1}{2} \le y < 1, \\ 1, & \text{за } y \ge 1. \end{cases}$$

Графикот на функцијата $F_Y(y)$ е даден на цртеж 11. ♦

10.2. НОРМАЛНА РАСПРЕДЕЛБА

Нека $a \in \mathbf{R}$ и $\sigma > 0$. Да ја разгледаме функцијата

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-a}{\sigma})^2}, \ x \in \mathbf{R}. \tag{1}$$

Ќе докажеме дека функцијата (1) е густина на распределба. Бидејќи $p(x) \ge 0$, за секој $x \in \mathbf{R}$, доволно е да докажеме дека

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-a}{\sigma})^2} dx = 1. \tag{2}$$

Ја воведуваме смената $\frac{x-a}{\sigma} = t$, $dx = \sigma dt$ и добиваме:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \tag{3}$$

Со J да го означиме интегралот на десната страна на равенството (3). Тогаш:

$$J^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2+y^2}{2}} dtdy.$$

За да го решиме последниот интеграл ќе преминеме во поларни координати. Имаме:

$$t = \rho\cos\varphi, \ y = \rho\sin\varphi, \ dtdy = \rho d\rho d\varphi, \ t^2 + y^2 = \rho^2$$

и притоа $\varphi : 0 \to 2\pi, \rho : 0 \to +\infty$. Според тоа,

$$J^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{+\infty} \rho e^{-\frac{\rho^2}{2}} d\rho = \int_0^{+\infty} e^{-z} dz = 1,$$

од каде добиваме $J = 1$, т.е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-a}{\sigma})^2} dx = 1,$$

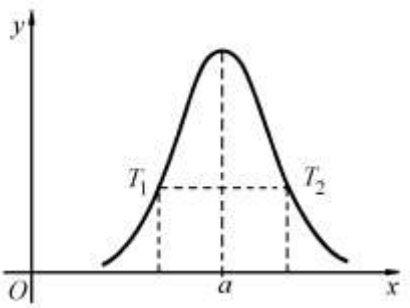
т.е. точно е равенството (2).

Од претходно изнесеното следува дека функцијата (1) е густина на распределба на апсолутно непрекината случајна променлива. За случајната променлива X ќе велиме дека има *нормална* (*Гаусова*) *распределба* со параметри a и $\sigma^2 > 0$, $-\infty < a < \infty$, ако таа има густина на распределба (1).

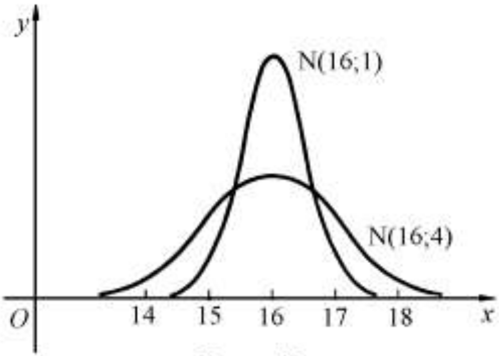
Забелешка 27. Нормалната распределба е еднозначно определена со параметрите $a \in \mathbf{R}$ и $\sigma^2 > 0$, па затоа во натамошните разгледувања истата ќе ја означуваме со $\mathrm{N}(a;\sigma^2)$. Нормалната распределба со параметри $a = 0$ и $\sigma^2 = 1$ ја нарекуваме *стандардна* и нејзината густина на распределба е

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}. \qquad (4)$$

Од (1) следува дека кривата на густината на нормалната распределба е симетрична во однос на правата $x = a$ и таа има облик на ѕвоно, цртеж 12. Понатаму, односот на две нормални распределби $\mathrm{N}(a;\sigma_1^2)$ и $\mathrm{N}(a;\sigma_2^2)$, за чии параметри $\sigma_1^2 = 4 > 1 = \sigma_2^2$ е даден на цртеж 13.



Цртеж 12



Цртеж 12

Забелешка 28. Нормалната распределба има огромно значење во теоријата на веројатноста и статистиката, па затоа овде ќе наведеме уште неколку нејзини својства. За стандардната нормална распределба функцијата на распределба е дадена со

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du,$$

и истата ја нарекуваме *нормална функција на распределба*. Таа е непрекината, строго монотоно растечка и за неа важи

$$\lim_{x\to-\infty} \Phi_0(x) = 0, \ \lim_{x\to+\infty} \Phi_0(x) = 1.$$

Освен тоа, од парноста на функцијата $p(x)$ следува дека за секој $x \in \mathbf{R}$ важи $\Phi_0(-x) = 1 - \Phi_0(x)$. Според тоа, вредностите на оваа функција може да се пресметаат со помош на интегралот на Лаплас, за кој како што веќе рековме постои таблица.

За математичкото очекување на нормално распределената случајна променлива X имаме:

$$E(X)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-\frac{1}{2}(\frac{x-a}{\sigma})^2}dx\,.$$

Воведуваме смена $\frac{x-a}{\sigma}=t$, $dx=\sigma dt$ и ако искористиме дека функцијата $te^{-\frac{t^2}{2}}$ е непарна и интеграл од непарна функција на симетрично множество е еднаков на нула, тогаш од претходно изнесеното следува

$$\begin{aligned}E(X)&=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\sigma(\sigma t+a)e^{-\frac{t^2}{2}}dt\\&=\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}te^{-\frac{t^2}{2}}dt+\frac{a}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt\\&=\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\bullet 0+a\bullet 1=a.\end{aligned}$$

Со тоа ја докажавме следнава лема.

Лема 32. Ако случајната променлива X има нормална распределба $\mathrm{N}(a;\sigma^2)$, тогаш нејзиното математичко очекување е

$$E(X)=a\,.\ \blacklozenge \tag{5}$$

Пред да преминеме на расгледување на натамошните својства на нормалната распределба $\mathrm{N}(a;\sigma^2)$ ќе ја разгледаме таканаречената гама функција. Така ја имаме следнава дефиниција.

Дефиниција 24. Нека $\alpha>0$. Функцијата $\Gamma:(0,1)\to\mathbf{R}$ определена со

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty}e^{-x}x^{\alpha-1}dx\,, \tag{6}$$

ја нарекуваме *гама функција*.

Лема 33. а) За секој $\alpha>0$ важи

$$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)\,. \tag{7}$$

б) Точни се равенствата

$$\Gamma(\tfrac{1}{2})=\sqrt{\pi},\ \Gamma(1)=1,\ \Gamma(2)=1,\ \Gamma(n)=(n-1)!\,.$$

Доказ. а) Од дефиниција 24 имаме

$$\Gamma(\alpha+1)=\int_0^{+\infty}e^{-x}x^{\alpha}dx\,.$$

Последниот интеграл парцијално го интегрираме

$$x^{\alpha}=u,\; e^{-x}dx=dv \text{, т.е. } du=\alpha x^{\alpha-1}dx,\; v=-e^{-x}$$

и ако искористиме дека $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{\alpha}}{e^{x}}=0$, добиваме

$$\Gamma(\alpha+1)=\int_0^{+\infty}e^{-x}x^{\alpha}dx=\lim_{x\to+\infty}(-x^{\alpha}e^{-x})-0+\alpha\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}dx$$

$$=-\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\alpha}}{e^{x}}+\alpha\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}dx=0+\alpha\Gamma(\alpha)=\alpha\Gamma(\alpha).$$

б) Имаме

$$\Gamma(\tfrac{1}{2})=\int_0^{+\infty}e^{-x}x^{\frac{1}{2}-1}dx=\int_0^{+\infty}e^{-x}x^{-\frac{1}{2}}dx.$$

Воведуваме смена $x=\frac{t^2}{2}$, $dx=tdt$, и од доказот на равенството (3) добиваме

$$\Gamma(\tfrac{1}{2})=\int_0^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}(\tfrac{t}{\sqrt{2}})^{-1}tdt=\sqrt{2}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{\sqrt{2}}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2\pi}=\sqrt{\pi}.$$

Понатаму,

$$\Gamma(1)=\int_0^{+\infty}e^{-x}x^{1-1}dx=\int_0^{+\infty}e^{-x}dx=1.$$

Од $\Gamma(1)=1$ и од формулата (7) добиваме $\Gamma(2)=\Gamma(1+1)=1\bullet\Gamma(1)=1$. Конечно, од $\Gamma(1)=1,\ \Gamma(2)=1$, формулата (7) и од принципот на математичка индукција следува точноста на формулата $\Gamma(n)=(n-1)!$. ♦

Ќе го определиме централниот момент од $n-$ти ред на случајната променлива $\mathrm{N}(a;\sigma^2)$. Од $E(X)=a$ добиваме

$$M_n=E(X-a)^n=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-a)^n e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-a}{\sigma})^2}dx.$$

Ја воведуваме смената $\frac{x-a}{\sigma}=t$ и добиваме

$$M_n=\frac{\sigma^n}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}t^n e^{-\frac{1}{2}t^2}dt. \qquad (8)$$

1) Нека $n=2k+1,\ k\in\mathbf{N}$. Тогаш во (8) подинтегралната функција е непарна и како интегрираме на симетрично множество добиваме $M_{2k+1}=0$.

2) Нека $n=2k,\ k\in\mathbf{N}$. Во интегралот (8) воведуваме смена на $\frac{t^2}{2}=u$, $dt=u^{-\frac{1}{2}}du$ и добиваме

$$M_{2k}=\frac{2\sigma^{2k}}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty}t^{2k}e^{-\frac{1}{2}t^2}dt=\frac{2^k\sigma^{2k}}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{+\infty}u^{k-\frac{1}{2}}e^{-u}du$$

$$=\frac{2^k\sigma^{2k}}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{+\infty}u^{k+\frac{1}{2}-1}e^{-u}du=\frac{2^k\sigma^{2k}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(k+\tfrac{1}{2}).$$

Понатаму, од лема 33 последователно добиваме

$$\begin{aligned}M_{2k}&=\frac{2^k\sigma^{2k}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(k+\tfrac{1}{2})=\frac{2^k\sigma^{2k}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(k-\tfrac{1}{2}+1)\\&=\frac{2^k\sigma^{2k}}{\sqrt{\pi}}(k-\tfrac{1}{2})\Gamma(k-\tfrac{1}{2})=\frac{2^k\sigma^{2k}}{\sqrt{\pi}}(k-\tfrac{1}{2})\Gamma(k-\tfrac{3}{2}+1)\\&=\frac{2^k\sigma^{2k}}{\sqrt{\pi}}(k-\tfrac{1}{2})(k-\tfrac{3}{2})\Gamma(k-\tfrac{3}{2})=...\\&=\frac{2^k\sigma^{2k}}{\sqrt{\pi}}\frac{2k-1}{2}\cdot\frac{2k-3}{2}\cdot...\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma(\tfrac{1}{2})\\&=\frac{2^k\sigma^{2k}}{2^k\sqrt{\pi}}\sqrt{\pi}\cdot1\cdot3\cdot5\cdot...\cdot(2k-1)=(2k-1)!!\sigma^{2k}.\end{aligned}$$

Лема 34. Ако случајната променлива X има нормална распределба $\mathrm{N}(a;\sigma^2)$, тогаш нејзината дисперзија е

$$D(X)=\sigma^2, \tag{9}$$

а коефициентот на асиметрија и коефициентот и коефициентот на сплоштеност се $\alpha_3=0$ и $\alpha_4=3$.

Доказ. Имаме, $D(X)=M_2=(2•1-1)!!\sigma^{2•1}=\sigma^2$. Понатаму, од

$$M_3=0 \text{ и } M_4=(2•2-1)!!\sigma^{2•2}=3\sigma^4,$$

добиваме

$$\alpha_3=\frac{M_3}{\sigma^3}=0 \text{ и } \alpha_4=\frac{M_4}{\sigma^4}=\frac{3\sigma^4}{\sigma^4}=3. \ ♦$$

Забелешка 29. а) За $a=0$ и $\sigma=1$ ја добивме таканаречената стандардна нормална распределба $\mathrm{N}(0;1)$, за која согласно претходно изнесеното имаме $E(X)=0$ и $D(X)=1$.

б) Нека X е случајна променлива со нормална распределба $\mathrm{N}(a;\sigma^2)$. Веројатноста $P\{x_1\le X\le x_2\}$ случајната променлива X да прими вредности од интервалот $[x_1,x_2]$ ја изразуваме со формулата

$$P\{x_1\le X\le x_2\}=\int_{x_1}^{x_2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-a}{\sigma})^2}dx.$$

Ако во последниот интеграл на десната страна ја воведеме смената

$$\tfrac{x-a}{\sigma}=u,\ dx=\sigma du, \text{ за } x=x_1,\ u_1=\tfrac{x_1-a}{\sigma} \text{ и } x=x_2,\ u_2=\tfrac{x_2-a}{\sigma}$$

добиваме

$$P\{x_1 \le X \le x_2\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\frac{x_1-a}{\sigma}}^{\frac{x_2-a}{\sigma}} e^{-\frac{x^2}{2}} du \,. \tag{10}$$

Понатаму, од равенството (10) и од својствата на интегралот на Лаплас следува:

- ако $x_1, x_2 > a$, тогаш $P\{x_1 \le X \le x_2\} = \Phi_0(\frac{x_2-a}{\sigma}) - \Phi_0(\frac{x_1-a}{\sigma})$,
- ако $x_1 < a < x_2$, тогаш

$$\begin{aligned} P\{x_1 \le X \le x_2\} &= \Phi_0(\tfrac{x_2-a}{\sigma}) - \Phi_0(\tfrac{x_1-a}{\sigma}) = \Phi_0(\tfrac{x_2-a}{\sigma}) - \Phi_0(-\tfrac{a-x_1}{\sigma}) \\ &= \Phi_0(\tfrac{x_2-a}{\sigma}) + \Phi_0(\tfrac{a-x_1}{\sigma}), \end{aligned}$$

- ако $x_1, x_2 < a$, тогаш

$$\begin{aligned} P\{x_1 \le X \le x_2\} &= \Phi_0(\tfrac{x_2-a}{\sigma}) - \Phi_0(\tfrac{x_1-a}{\sigma}) = \Phi_0(-\tfrac{a-x_2}{\sigma}) - \Phi_0(-\tfrac{a-x_1}{\sigma}) \\ &= \Phi_0(\tfrac{a-x_1}{\sigma}) - \Phi_0(\tfrac{a-x_2}{\sigma}), \end{aligned}$$

- ако $x > a$, тогаш $P\{X \le x\} = P\{X \le a\} + P\{a \le X \le x\} = \frac{1}{2} + \Phi_0(\frac{x-a}{\sigma})$,
- ако $x > a$, тогаш $P\{X \ge x\} = 1 - P\{X \le x\} = \frac{1}{2} - \Phi_0(\frac{x-a}{\sigma})$,
- ако $x < a$, тогаш $P\{X \le x\} = P\{X \le a\} - P\{x \le X \le a\} = \frac{1}{2} - \Phi_0(\frac{a-x}{\sigma})$,
- ако $x < a$, тогаш $P\{x \le X\} = 1 - P\{X \le x\} = \frac{1}{2} + \Phi_0(\frac{a-x}{\sigma})$.

Пример 19. Случајната променлива X има нормална распределба $\mathrm{N}(a;\sigma^2)$. Докажете дека за секој $\varepsilon > 0$ важи

$$P\{| X - E(X) | > \varepsilon\sigma\} \le \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon\sqrt{\pi}} e^{-\varepsilon^2/2}.$$

Решение. Ако земеме предвид дека за $y \in [\varepsilon, +\infty)$ важи $\frac{y}{\varepsilon} \le 1$, тогаш од својствата на Римановиот интеграл и од забелешка 29 следува

$$\begin{aligned} P\{| X - E(X) | > \varepsilon\sigma\} &= \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{a+\varepsilon\sigma}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-a}{\sigma})^2} dx = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\varepsilon}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy \\ &\le \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{y}{\varepsilon} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy = \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon\sqrt{\pi}} e^{-\varepsilon^2/2}, \end{aligned}$$

што и требаше да се докаже. ♦

10.3. ЛОГАРИТАМСКО-НОРМАЛНА РАСПРЕДЕЛБА

Нека $a \in \mathbf{R}$ и $\sigma > 0$. Да ја разгледаме функцијата

$$p(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{\ln x - a}{\sigma})^2} \,,\ x > 0\,. \tag{1}$$

Ќе докажеме дека функцијата (1) е густина на распределба. Бидејќи $p(x) \geq 0$, за секој $x > 0$, доволно е да докажеме дека

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(\frac{\ln x - a}{\sigma})^2} \frac{dx}{x} = 1 . \tag{2}$$

Ја воведуваме смената

$$\frac{\ln x - a}{\sigma} = t \, , \; \frac{dx}{x} = \sigma dt$$

и добиваме:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(\frac{\ln x - a}{\sigma})^2} \frac{dx}{x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1 ,$$

т.е. точно е равенството (2).

Од претходно изнесеното следува дека функцијата (1) е густина на распределба на некоја апсолутно непрекината случајна променлива X. За случајната променлива X ќе велиме дека има *логаритамско-нормална распределба* со параметри a и $\sigma^2 > 0$, $-\infty < a < \infty$, ако таа има густина на распределба (1).

Логаритамско-нормалната распределба е еднозначно определена со параметрите $a \in \mathbf{R}$ и $\sigma^2 > 0$, па затоа во натамошните разгледувања истата ќе ја означуваме со $\mathrm{N_L}(a;\sigma^2)$. Логаритамско-нормалната распределба со параметри $a = 0$ и $\sigma^2 = 1$ ја нарекуваме *стандардна* и нејзината густина на распределба е

$$p(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\ln^2 x}{2}} . \tag{3}$$

За математичкото очекување на логаритамско-нормално распределената случајна променлива X имаме:

$$E(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(\frac{\ln x - a}{\sigma})^2} dx .$$

Воведуваме смена $\frac{\ln x - a}{\sigma} = t$, $\frac{dx}{x} = \sigma dt$, односно $dx = \sigma e^{\sigma t + a} dt$ и добиваме:

$$E(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma e^{\sigma t + a} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{a} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2} + \sigma t - \frac{\sigma^2}{2} + \frac{\sigma^2}{2}} dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{a + \frac{\sigma^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(t-\sigma)^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{a + \frac{\sigma^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = e^{a + \frac{\sigma^2}{2}} .$$

Ќе ја определиме дисперзијата на логаритамско-нормалната распределба $\mathrm{N_L}(a;\sigma^2)$. За вториот обичен момент имаме:

$$E(X^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{1}{2}(\frac{\ln x - a}{\sigma})^2} \frac{dx}{x} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} x e^{-\frac{1}{2}(\frac{\ln x - a}{\sigma})^2} dx .$$

Воведуваме смена $\frac{\ln x-a}{\sigma}=t$, $\frac{dx}{x}=\sigma dt$, односно $x=e^{\sigma t+a}$, $dx=\sigma e^{\sigma t+a}dt$ и добиваме:

$$E(X^2)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\sigma e^{2\sigma t+2a}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{2a}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}+2\sigma t}dt$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{2a+2\sigma^2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(t-2\sigma)^2}{2}}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{2a+2\sigma^2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{u^2}{2}}du=e^{2a+2\sigma^2}.$$

Според тоа

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=e^{2a+2\sigma^2}-e^{2(a+\frac{\sigma^2}{2})}=e^{2a+\sigma^2}(e^{\sigma^2}-1).$$

Со тоа ја докажавме следнава лема.

Лема 35. Ако случајната променлива X има логаритамско-нормална распределба $\mathrm{N_L}(a;\sigma^2)$, тогаш нејзиното математичко очекување е

$$E(X)=e^{a+\frac{\sigma^2}{2}}, \tag{4}$$

а дисперзијата е

$$D(X)=e^{2a+\sigma^2}(e^{\sigma^2}-1).\ \blacklozenge \tag{5}$$

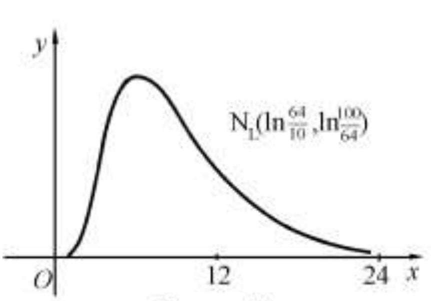
Забелешка 30. Нека за случајната променлива X со логаритамско-нормална распределба ни се познати математичкото очекување $E(X)$ и дисперзијата $D(X)$. Ако го квадрираме равенството (4), а потоа добиеното равенство го поделиме со равенството (5), за параметарот σ^2 наоѓаме:

$$\sigma^2=\ln(1+\frac{D(X)}{[E(X)]^2}). \tag{6}$$

Понатаму, ако од равенството (6) замениме во равенството (4) за параметарот a добиваме

$$a=\ln\frac{[E(X)]^2}{\sqrt{D(X)+[E(X)]^2}}. \tag{7}$$

На цртеж 14 е прикажана густината на распределба на случајната променлива X, која има логаритамско-нормална распределба со математичко очекување $E(X)=8$ и дисперзија $D(X)=36$. Ако ги искористиме равенствата (6) и (7) за параметрите на густината на распределба на оваа случајна променлива наоѓаме $\sigma^2=\ln\frac{100}{64}$ и $a=\ln\frac{64}{10}$.



Цртеж 14

Ако во равенството (1) ставаме $u=\frac{\ln x-a}{\sigma}$, тогаш добиваме

$$p(x)=\frac{1}{x\sigma}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}u^2}$$

односно:

$$p(x)=\frac{1}{x\sigma}\varphi(u) \tag{8}$$

каде $\varphi(u)$ е густината на веројатност на стандардната нормална распределба. Јасно, последната формула овозможува, користејќи ја таблицата за густината на распределба на веројатностите на стандардната нормална распределба, едноставно да се пресметуваат вредностите на густината на распределба на веројатностите на логаритамско-нормалната распределба.

10.4. ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНА РАСПРЕДЕЛБА

Нека $\lambda > 0$. Да ја разгледаме функцијата

$$p(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \lambda e^{-\lambda x}, & x\geq 0.\end{cases} \tag{1}$$

Ќе докажеме дека функцијата (1) е густина на распределба. Бидејќи $p(x)\geq 0$, за секој $x\in\mathbf{R}$, доволно е да докажеме дека

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx=\int_{0}^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x}dx=1. \tag{2}$$

Ја воведуваме смената $\lambda x=t$, $dx=\frac{dt}{\lambda}$ и добиваме:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx=\int_{0}^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x}dx=\int_{0}^{+\infty}e^{-t}dt=-e^{-t}\Big|_{0}^{+\infty}=1,$$

т.е. точно е равенството (2).

Од претходно изнесеното следува дека функцијата (1) е густина на распределба на некоја случајна променлива X. За случајната променлива X ќе велиме дека има *експоненцијална распределба* со параметар $\lambda > 0$, ако таа има густина на распределба (1).

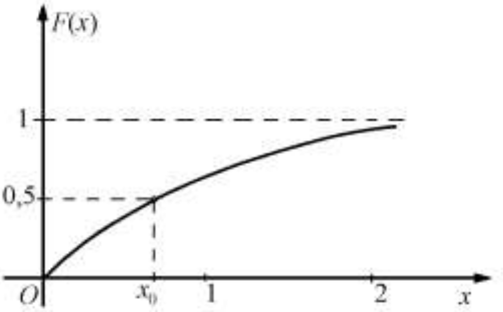
Експоненцијалната распределба е еднозначно определена со параметарот $\lambda > 0$, па затоа во натамошните разгледувања истата ќе ја означуваме со $\boldsymbol{E}(\lambda)$. Понатаму, за функција на распределба на случајната променлива X добиваме

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}p(t)dt=\begin{cases}\int_{-\infty}^{x}0\bullet dt=0, & \text{за } x<0,\\ \int_{0}^{x}\lambda e^{-\lambda t}dt=1-e^{-\lambda x}, & \text{за } x<0,\end{cases}=\begin{cases}0, & \text{za } x<0,\\ 1-e^{-\lambda x}, & \text{za } x\geq 0.\end{cases}$$

На цртеж 15 е претставен графикот на функцијата на распределба $F(x)$ на експоненцијалната распределба $\mathbf{E}(1)$.

За математичкото очекување на случајната променлива X со експоненцијална распределба $\mathbf{E}(\lambda)$ наоѓаме:

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx=\int_{0}^{+\infty} \lambda xe^{-\lambda x}dx=-xe^{-\lambda x}\Big|_{0}^{+\infty}+\int_{0}^{+\infty} e^{-\lambda x}dx=-\tfrac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_{0}^{+\infty}=\tfrac{1}{\lambda}.$$



Цртеж 15

Понатаму, за вториот обичен момент наоѓаме:

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2p(x)dx=\lambda\int_{0}^{+\infty} x^2e^{-\lambda x}dx$$

$$=-x^2e^{-\lambda x}\Big|_{0}^{+\infty}+\int_{0}^{+\infty} 2xe^{-\lambda x}dx$$

$$=\tfrac{2}{\lambda}\int_{0}^{+\infty} \lambda xe^{-\lambda x}dx=\tfrac{2}{\lambda}\bullet\tfrac{1}{\lambda}=\tfrac{2}{\lambda^2},$$

па затоа

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\tfrac{2}{\lambda^2}-\tfrac{1}{\lambda^2}=\tfrac{1}{\lambda^2}.$$

Со тоа ја докажавме следнава лема.

Лема 36. Ако случајната променлива X има експоненцијална распределба $\mathbf{E}(\lambda)$, тогаш нејзиното математичко очекување е

$$E(X)=\tfrac{1}{\lambda}, \tag{3}$$

а дисперзијата е

$$D(X)=\tfrac{1}{\lambda^2}.\ \blacklozenge \tag{4}$$

Пример 20. Случајната променлива X има експоненцијална распределба $\mathbf{E}(1)$. Најдете ја распределбата и математичкото очекување на случајната променлива $Y=[X]$.

Решение. Од својствата на функцијата $[x]$ (цел дел од x) и од дефиницијата на случајната променлива Y заклучуваме дека настаните $\{Y=k\}$ и $\{k\le X<k+1\}$ се еквивалентни, па затоа

$$P\{Y=k\}=P\{k\le X<k+1\}=\int_{k}^{k+1} e^{-x}dx=\tfrac{e-1}{e^{k+1}}.$$

Според тоа,

$$E(Y)=\sum_{k=0}^{+\infty} kP\{Y=k\}=\tfrac{e-1}{e^2}\sum_{k=0}^{\infty} k(\tfrac{1}{e})^{k-1}=\tfrac{1}{e-1}.\ \blacklozenge$$

Нека $\lambda > 0$. Да ја разгледаме функцијата

$$p(x) = \tfrac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|},\ x \in \mathbf{R}\,. \tag{5}$$

Ќе докажеме дека функцијата (5) е густина на распределба. Бидејќи $p(x) \geq 0$, за секој $x \in \mathbf{R}$, доволно е да докажеме дека

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \tfrac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|} dx = 1\,. \tag{6}$$

Но, функцијата (5) е парна, па затоа:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 2\int_{0}^{+\infty} \tfrac{\lambda}{2} e^{-\lambda x} dx = \int_{0}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = 1\,,$$

т.е. точно е равенството (6).

Од претходно изнесеното следува дека функцијата (1) е густина на распределба на некоја случајна променлива X. За случајната променлива X ќе велиме дека има *двострана експоненцијална распределба* со параметар $\lambda > 0$, ако таа има густина на распределба (6).

Забелешка 31. За $\lambda = 1$ двостраната експоненцијална распределба во литературата е позната како *Лапласова распределба.*

Ќе ги определиме математичкото очекување и дисперзијата на двостраната експоненцијална распределба. Имаме:

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \tfrac{\lambda}{2} xe^{-\lambda|x|} dx = \tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} \lambda xe^{\lambda x} dx + \tfrac{1}{2}\int_{0}^{+\infty} \lambda xe^{-\lambda x} dx \\ &= \tfrac{1}{2}\int_{+\infty}^{0} \lambda te^{-\lambda t} dt + \tfrac{1}{2}\int_{0}^{+\infty} \lambda xe^{-\lambda x} dx = -\tfrac{1}{2}\int_{0}^{+\infty} \lambda te^{-\lambda t} dt + \tfrac{1}{2}\int_{0}^{+\infty} \lambda xe^{-\lambda x} dx = 0 \end{aligned}$$

и како

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x)dx = \tfrac{\lambda}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\lambda|x|} dx = 2\tfrac{\lambda}{2}\int_{0}^{+\infty} x^2 e^{-\lambda x} dx = \lambda\int_{0}^{+\infty} x^2 e^{-\lambda x} dx = \tfrac{2}{\lambda^2}\,,$$

за дисперзијата наоѓаме

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \tfrac{2}{\lambda^2} - 0 = \tfrac{2}{\lambda^2}\,.$$

Со тоа ја докажавме следнава лема.

Лема 37. Ако случајната променлива X има двострана експоненцијална распределба, тогаш нејзиното математичко очекување е

$$E(X) = 0\,, \tag{7}$$

а дисперзијата е

$$D(X) = \tfrac{2}{\lambda^2}\,.\ \blacklozenge \tag{8}$$

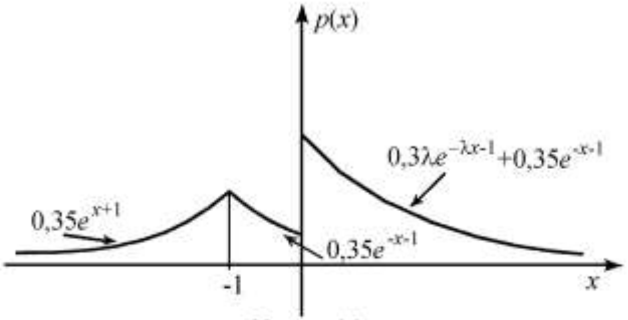
Пример 21. Случајната променлива X има со веројатност 0,3 експоненцијална распределба $\boldsymbol{E}(\lambda)$, а со веројатност 0,7 распределба дадена со следнава густина

$$p_2(x) = \tfrac{1}{2} e^{-|x+1|},\ x \in \mathbf{R}. \tag{9}$$

Најдете ја густината на распределба на случајната променлива X, нејзиното математичко очекување и дисперзија.

Решение. Густината на експоненцијалната распределба $\boldsymbol{E}(\lambda)$ е

$$p_1(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0. \end{cases}$$



Цртеж 16

Да ги разгледаме настаните: H_1-случајната променлива X има распределба со густина p_1 и H_2-случајната променлива X има распределба со густина p_2. Тогаш за функцијата на распределба на случајната променлива X добиваме:

$$F_X(x) = P\{X \leq x\} = P(H_1)P\{X \leq x \mid H_1\} + P(H_2)P\{X \leq x \mid H_2\}$$

од каде следува дека

$$p(x) = 0,3p_1(x) + 0,7p_2(x),$$

односно (види цртеж 16):

$$p(x) = \begin{cases} 0,35e^{x+1}, & x < -1, \\ 0,35e^{-x-1}, & -1 \leq x < 0, \\ 0,3\lambda e^{-\lambda x} + 0,35e^{-x-1} & x \geq 0 \end{cases}$$

Лесно се гледа дека математичкото очекување

$$E(X) = 0,3 \int_{-\infty}^{+\infty} x p_1(x)dx + 0,7 \int_{-\infty}^{+\infty} x p_2(x)dx = \tfrac{0,3}{\lambda} + 0,7,$$

и како

$$E(X^2) = 0,3 \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p_1(x)dx + 0,7 \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p_2(x)dx = \tfrac{0,6}{\lambda^2} + 0,7$$

за дисперзијата добиваме

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \tfrac{0,6}{\lambda^2} + 0,7 - (\tfrac{0,3}{\lambda} + 0,7)^2$$

$$= -\tfrac{0,3}{\lambda^2} + \tfrac{0,42}{\lambda} + 0,21. \ \blacklozenge$$

10.5. КОШИЕВА РАСПРЕДЕЛБА

Да ја разгледаме функцијата

$$p(x) = \frac{1}{\pi}\frac{a}{a^2+x^2},\ x \in \mathbf{R},\ a > 0. \tag{1}$$

Ќе докажеме дека функцијата (1) е густина на распределба. Бидејќи $p(x) \geq 0$, за секој $x \in \mathbf{R}$, доволно е да докажеме дека

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1.$$

Имаме:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi}\frac{a}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{\pi}(\frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2})) = 1.$$

Од претходно изнесеното следува дека функцијата (1) е густина на распределба на некоја случајна променлива X. За случајната променлива X ќе велиме дека има *Кошиева распределба со параметар* a, ако таа има густина на распределба (1). За функција на распределба на случајната променлива X добиваме

$$\begin{aligned} F(x) &= \int\limits_{-\infty}^{x} p(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{1}{\pi}\frac{a}{a^2+t^2}dt = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{t}{a}\Big|_{-\infty}^{x} \\ &= \frac{1}{\pi}(\operatorname{arctg}\frac{x}{a} - (-\frac{\pi}{2})) = \frac{1}{\pi}(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\frac{x}{a}) \end{aligned}.$$

Нека X има Кошиева распределба. За математичкото очекување на случајната променлива $|X|$ наоѓаме:

$$\begin{aligned} E(|X|) &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x|\,p(x)dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{|ax|}{a^2+x^2}dx \\ &= \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{2x}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{\pi}\ln(a^2+x^2)\,\Big|_{0}^{+\infty} = +\infty. \end{aligned}$$

Оттука следува дека функцијата $|X|$ не е интеграбилна, па затоа и X не е интеграбилна, т.е. за случајната променлива X со Кошиева распределба математичкото очекување не постои. Јасно, за оваа случајна променлива не постои и дисперзијата (зошто?).

10.6. ПАРЕТОВА РАСПРЕДЕЛБА

Нека $\alpha > 0, x_0 > 0$. Да ја разгледаме функцијата

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x < x_0 \\ \frac{\alpha x_0^\alpha}{x^{\alpha+1}}, & x \geq x_0. \end{cases} \tag{1}$$

Функцијата (1) е густина на распределба, бидејќи $p(x) \geq 0$, за секој $x \geq x_0$ и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = \int_{x_0}^{+\infty} \frac{\alpha x_0^\alpha}{x^{\alpha+1}} dx = \lim_{A\to+\infty} \int_{x_0}^{A} \frac{\alpha x_0^\alpha}{x^{\alpha+1}} dx = -\lim_{A\to+\infty} \frac{x_0^\alpha}{x^\alpha} |_{x_0}^{A} = \lim_{A\to+\infty} (1-\frac{x_0^\alpha}{A^\alpha}) = 1 .$$

За случајната променлива X ќе велиме дека има *Паретова распределба* со параметри $\alpha > 0, x_0 > 0$, ако таа има густина на распределба (1). Понатаму, за функција на распределба на случајната променлива X добиваме

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq x_0, \\ 1-(\frac{x_0}{x})^\alpha, & x \geq x_0. \end{cases} \tag{2}$$

Што се однесува до обичните моменти, да забележиме дека $k-$от обичен момент на случајната променлива со Паретова распределба постои само ако $k < \alpha$ и во случајот

$$E(X^k) = \int_{x_0}^{+\infty} x^k \frac{\alpha x_0^\alpha}{x^{\alpha+1}} dx = \alpha x_0^\alpha \int_{x_0}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha-k+1}} = \frac{\alpha x_0^k}{\alpha-k} . \tag{3}$$

Според тоа, за $\alpha > 2$ постојат обичните моменти до втор ред. Притоа, ако во (3) ставиме $k=1$, за математичкото очекување на случајната променлива X добиваме $E(X) = \frac{\alpha x_0}{\alpha-1}$. Понатаму, за $k=2$ наоѓаме $E(X^2) = \frac{\alpha x_0^2}{\alpha-2}$, па од претходните две равенства добиваме

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{\alpha x_0^2}{\alpha-2} - (\frac{\alpha x_0}{\alpha-1})^2 = \frac{\alpha x_0^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)} .$$

Со тоа ја докажавме следнава лема.

Лема 38. Ако случајната променлива X има Паретова распределба со параметри $\alpha > 2, x_0 > 0$, тогаш нејзиното математичко очекување е

$$E(X) = \frac{\alpha x_0}{\alpha-1} , \tag{4}$$

а дисперзијата е

$$D(X) = \frac{\alpha x_0^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)} . \blacklozenge \tag{5}$$

10.7. ГАМА РАСПРЕДЕЛБА

Нека $\alpha > 0, \lambda > 0$. Да ја разгледаме функцијата

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases} \tag{1}$$

каде $\Gamma(\alpha)$ е гама функцијата. Ќе докажеме дека функцијата (1) е густина на распределба. Бидејќи $p(x) \geq 0$, за секој $x > 0$, доволно е да докажеме дека

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = \frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_{0}^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}dx = 1\,. \tag{2}$$

Навистина, ја воведуваме смената $\lambda x = y$, $dx = \lambda^{-1}dy$ и добиваме

$$\int_{0}^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}dx = \lim_{N\to+\infty} \int_{0}^{N} x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}dx$$

$$= \lambda^{-\alpha} \lim_{N\to+\infty} [\int_{0}^{N} y^{\alpha-1}e^{-y}dy + \int_{N}^{N\lambda} y^{\alpha-1}e^{-y}dy] = \lambda^{-\alpha}\Gamma(\alpha),$$

од што следува равенството (2), што значи дека (1) навистина е густина на распределба. За случајната променлива X ќе велиме дека има *гама распределба* со параметри $\alpha > 0, \lambda > 0$, во ознака $\Gamma(\alpha,\lambda)$, ако таа има густина на распределба (1).

За математичкото очекување на гама распределената случајна променлива X имаме:

$$E(X) = \int_{0}^{+\infty} \frac{\lambda^{\alpha}x^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda x}dx\,.$$

Воведуваме смена $\lambda x = y$, $dx = \lambda^{-1}dy$ и ако ја искористиме лема 1 а) добиваме:

$$E(X) = \int_{0}^{+\infty} \frac{\lambda^{\alpha}x^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda x}dx = \frac{1}{\lambda\Gamma(\alpha)} \int_{0}^{+\infty} y^{\alpha}e^{-y}dy = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\lambda\Gamma(\alpha)} = \frac{\alpha}{\lambda}\,.$$

Ќе ја определиме дисперзијата на гама распределбата со параметри $\alpha > 0,\ \ \lambda > 0$. За вториот обичен момент имаме:

$$E(X^2) = \int_{0}^{+\infty} \frac{\lambda^{\alpha}x^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda x}dx\,.$$

Повторно воведуваме смена $\lambda x = y$, $dx = \lambda^{-1}dy$ и ако два пати ја примениме лема 1 а) добиваме

$$E(X^2) = \int_{0}^{+\infty} \frac{\lambda^{\alpha}x^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda x}dx = \frac{1}{\lambda^2\Gamma(\alpha)} \int_{0}^{+\infty} y^{\alpha+1}e^{-y}dy = \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\lambda^2\Gamma(\alpha)} = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2}\,.$$

Од претходните две равенства следува:

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2} - \frac{\alpha^2}{\lambda^2} = \frac{\alpha}{\lambda^2}\,.$$

Со тоа ја докажавме следнава лема.

Лема 39. Ако случајната променлива X има гама распределба $\Gamma(\alpha,\lambda)$, тогаш нејзиното математичко очекување е

$$E(X) = \frac{\alpha}{\lambda}\,, \tag{3}$$

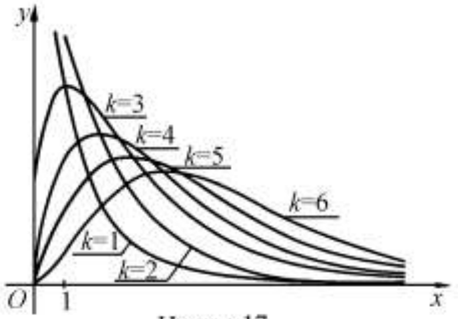
а дисперзијата е

$$D(X)=\frac{\alpha}{\lambda^2}\,.\ \blacklozenge \tag{4}$$

Забелешка 32. Ако во (1) ставиме $\alpha=1$ од гама распределбата ја добиваме експоненцијалната распределба со параметар $\lambda>0$. Сега од лема 39 добиваме дека за случајна променлива со експоненцијална распределба важи

$$E(X)=\frac{1}{\lambda} \text{ и } D(X)=\frac{1}{\lambda^2}\,.$$

Забелешка 33. Ако во густината (1) на гама-распределбата ставиме $\lambda=\frac{1}{2}$ и $\alpha=\frac{k}{2}$, $k\in\mathbf{N}$, тогаш ја добиваме густината $\Gamma(\frac{k}{2},\frac{1}{2})$ на таканаречената χ^2-*распределба со* k *степени на слобода* која ја означуваме со χ_k^2 и која има важна улога во статистиката. Од лема 39 следува дека математичкото очекување и дисперзијата на χ_k^2-распределбата се:



Цртеж 17

$$E(\chi_k^2)=\frac{\frac{k}{2}}{\frac{1}{2}}=k \text{ и } D(\chi_k^2)=\frac{\frac{k}{2}}{(\frac{1}{2})^2}=2k\,.$$

На цртеж 17 се дадени графиците на густините на χ_k^2-распределба за различни вредности на k.

10.8. БЕТА РАСПРЕДЕЛБА

Дефиниција 25. Функцијата $\mathrm{B}:(0,+\infty)\times(0,+\infty)\to\mathbf{R}$ определена со

$$\mathrm{B}(\alpha,\beta)=\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx, \tag{1}$$

ја нарекуваме *бета-функција.*

Забелешка 34. Ако во интегралот на десната страна на (1) воведеме смена $x=\cos^2\varphi$, го добиваме тригонометрискиот вид на бета-функцијата

$$\mathrm{B}(\alpha,\beta)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2\alpha-1}\varphi\sin^{2\beta-1}\varphi\,d\varphi, \tag{2}$$

кој често пати е попрактичен од видот (1). Од формулата (2) непосредно следува равенството

$$\mathrm{B}(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi=\pi\,. \tag{3}$$

Во следнава теорема ќе докажеме уште неколку својства на бета-функцијата.

Лема 40. а) $\mathrm{B}(\alpha,\beta)=\mathrm{B}(\beta,\alpha)$, за секои $\alpha>0$, $\beta>0$.

б) $\mathrm{B}(\alpha,1)=\frac{1}{\alpha}$, за секој $\alpha>0$ и $\mathrm{B}(1,\beta)=\frac{1}{\beta}$, за секој $\beta>0$.

в) $\mathrm{B}(\alpha,\beta+1)=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\mathrm{B}(\alpha,\beta)$, за секои $\alpha>0$, $\beta>0$.

г) $\mathrm{B}(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$, за секои $\alpha>0$, $\beta>0$.

Доказ. а) Непосредно следува ако во интегралот (1) ја извршиме смената $1-x=t$.

б) За секој $\alpha>0$ важи:

$$\mathrm{B}(\alpha,1)=\int_0^1 x^{\alpha-1}dx=\frac{x^\alpha}{\alpha}\Big|_0^1=\frac{1}{\alpha}.$$

Понатаму, од претходното равенство и од тврдењето под а) следува дека за секој $\beta>0$ важи

$$\mathrm{B}(1,\beta)=\mathrm{B}(\beta,1)=\frac{1}{\beta}.$$

в) Имаме

$$\mathrm{B}(\alpha,\beta+1)=\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta+1-1}dx=\int_0^1 x^{\alpha+\beta-1}(\tfrac{1-x}{x})^{\beta}dx.$$

Со парцијална интеграција

$$x^{\alpha+\beta-1}dx=dv,\ (\tfrac{1-x}{x})^{\beta}=u\text{, т.е. } v=\frac{x^{\alpha+\beta}}{\alpha+\beta},\ du=-\frac{\beta}{x^2}(\tfrac{1-x}{x})^{\beta-1}dx,$$

од последниот интеграл добиваме

$$\mathrm{B}(\alpha,\beta+1)=\int_0^1 x^{\alpha+\beta-1}(\tfrac{1-x}{x})^{\beta}dx=\frac{x^{\alpha+\beta}}{\alpha+\beta}(\tfrac{1-x}{x})^{\beta}\Big|_{x\to 0}^{x=1}-\int_0^1\frac{x^{\alpha+\beta}}{\alpha+\beta}(-\frac{\beta}{x^2}(\tfrac{1-x}{x})^{\beta-1})dx$$

$$=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\mathrm{B}(\alpha,\beta).$$

г) Прво да забележиме дека со смената $x=t^2, dx=2tdt$ гама-функцијата $\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty}e^{-x}x^{\alpha-1}dx$ можеме да ја запишеме во видот

$$\Gamma(\alpha)=2\int_0^{+\infty}e^{-t^2}t^{2\alpha-1}dt \tag{4}$$

Според тоа,

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)=2\int_0^{+\infty}e^{-t^2}t^{2\alpha-1}dt\bullet 2\int_0^{+\infty}e^{-y^2}y^{2\beta-1}dy=4\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}e^{-(t^2+y^2)}t^{2\alpha-1}y^{2\beta-1}dtdy.$$

Во последниот интеграл интеграцијата е по првиот квадрант, па затоа ако преминеме во поларни координати, т.е. ја воведеме смената

$$t=\rho\cos\varphi,\ \ y=\rho\sin\varphi,\ dtdy=\rho d\rho d\varphi,$$

и ако ги земеме предвид равенствата (2) и (4) го добиваме равенството

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)&=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2\alpha-1}\varphi\sin^{2\beta-1}\varphi d\varphi\bullet 2\int_0^{+\infty}\rho^{2(\alpha+\beta)-1}e^{-\rho^2}d\rho\\&=\mathrm{B}(\alpha,\beta)\Gamma(\alpha+\beta),\end{aligned}$$

кое е еквивалентно на бараното равенство. ♦

Забелешка 35. Ако земеме $\alpha=\beta=\frac{1}{2}$, тогаш од $\Gamma(1)=1$, равенството (3) и од претходното равенство добиваме

$$\Gamma(\tfrac{1}{2})\Gamma(\tfrac{1}{2})=\mathrm{B}(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})\Gamma(1)=\pi,$$

т.е. точно е равенството $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$, кое претходно го докажавме.

Нека $\alpha>0$, $\beta>0$. Да ја разгледаме функцијата

$$p(x)=\begin{cases}\frac{1}{\mathrm{B}(\alpha,\beta)}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, & x\in[0,1]\\ 0, & x\notin[0,1].\end{cases}\qquad(5)$$

Јасно, $p(x)\geq 0$ и

$$\int_{-\infty}^{+\infty}p(x)dx=\frac{1}{\mathrm{B}(\alpha,\beta)}\int_{-\infty}^{+\infty}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx=\frac{1}{\mathrm{B}(\alpha,\beta)}\mathrm{B}(\alpha,\beta)=1.$$

Според тоа, функцијата (5) е густина на распределба на апсолутно-непрекината случајна променлива X. За случајната променлива X ќе велиме дека има *бета распределба* со параметри $\alpha>0$, $\beta>0$, ако таа има густина на распределба (5).

Понатаму, за математичкото очекување на бета распределената случајна променлива X имаме:

$$\begin{aligned}E(X)&=\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x)dx=\frac{1}{\mathrm{B}(\alpha,\beta)}\int_0^1 x^{\alpha+1-1}(1-x)^{\beta-1}dx\\&=\frac{1}{\mathrm{B}(\alpha,\beta)}\mathrm{B}(\alpha+1,\beta)=\frac{1}{\mathrm{B}(\alpha,\beta)}\mathrm{B}(\beta,\alpha+1)\\&=\frac{1}{\mathrm{B}(\alpha,\beta)}\bullet\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\mathrm{B}(\beta,\alpha)=\frac{1}{\mathrm{B}(\alpha,\beta)}\bullet\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\mathrm{B}(\alpha,\beta)=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}.\end{aligned}$$

Ќе ја определиме дисперзијата на бета распределбата со параметри $\alpha>0$, $\beta>0$. За вториот обичен момент имаме:

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2p(x)dx=\frac{1}{\mathrm{B}(\alpha,\beta)}\int_0^1 x^{\alpha+2-1}(1-x)^{\beta-1}dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \tfrac{1}{\mathrm{B}(\alpha,\beta)}\mathrm{B}(\alpha+2,\beta) = \tfrac{1}{\mathrm{B}(\alpha,\beta)}\mathrm{B}(\beta,\alpha+2)\\
&= \tfrac{1}{\mathrm{B}(\alpha,\beta)} \bullet \tfrac{\alpha+1}{\alpha+1+\beta}\mathrm{B}(\beta,\alpha+1)\\
&= \tfrac{1}{\mathrm{B}(\alpha,\beta)} \bullet \tfrac{\alpha+1}{\alpha+1+\beta} \bullet \tfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\mathrm{B}(\beta,\alpha)\\
&= \tfrac{\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+1+\beta)}.
\end{aligned}
$$

Од претходните две равенства следува:

$$
\begin{aligned}
D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 &= \tfrac{\alpha}{\alpha+\beta} \bullet \tfrac{\alpha+1}{\alpha+1+\beta} - [\tfrac{\alpha}{\alpha+\beta}]^2 \\
&= \tfrac{\alpha}{\alpha+\beta}(\tfrac{\alpha+1}{\alpha+1+\beta} - \tfrac{\alpha}{\alpha+\beta}) = \tfrac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)^2}.
\end{aligned}
$$

Со тоа ја докажавме следнава лема.

Лема 41. Ако случајната променлива X има бета распределба со параметри $\alpha > 0$, $\beta > 0$, тогаш нејзиното математичко очекување е

$$
E(X) = \tfrac{\alpha}{\alpha+\beta}, \tag{6}
$$

а дисперзијата е

$$
D(X) = \tfrac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)^2}\ . \ \blacklozenge \tag{7}
$$

10.9. СТУДЕНТОВА t -РАСПРЕДЕЛБА

Нека $n \in \mathbf{N}$. Да ја разгледаме функцијата

$$
p(x) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma(\frac{n}{2})}(1+\frac{x^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}}, \quad -\infty < x < +\infty\,. \tag{1}
$$

каде Γ е гама функцијата. Ќе докажеме дека функцијата (1) е густина на распределба. Бидејќи $p(x) \geq 0$, за секој $x > 0$, доволно е да докажеме дека

$$
\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma(\frac{n}{2})} \int_{-\infty}^{+\infty} (1+\frac{x^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}} dx = 1\,. \tag{2}
$$

Ако во интегралот

$$
\int_{-\infty}^{+\infty} (1+\frac{x^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}} dx = 2\int_{0}^{+\infty} (1+\frac{x^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}} dx
$$

ја воведеме смената

$$
1+\frac{x^2}{n} = t\,,\ dx = \frac{\sqrt{n}}{2}(t-1)^{-\frac{1}{2}}dt
$$

добиваме

$$
\int_{-\infty}^{+\infty} (1+\frac{x^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}} dx = \sqrt{n}\int_{1}^{+\infty} t^{-\frac{n+1}{2}}(t-1)^{-\frac{1}{2}}dt\,.
$$

Понатаму, воведуваме смена $t=\frac{1}{s},\ dt=-\frac{ds}{s^2}$, па од дефиницијата на бета-функцијата и лемите 40 г) и 33 б) го добиваме равенството

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(1+\tfrac{x^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}}dx=\sqrt{n}\int_0^1 s^{\frac{n}{2}-1}(1-s)^{\frac{1}{2}-1}ds=\sqrt{n}\mathrm{B}(\tfrac{n}{2},\tfrac{1}{2})$$

$$=\sqrt{n}\,\frac{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}=\sqrt{n\pi}\,\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n+1}{2})},$$

кое е еквивалентно на равенството (2). Според тоа, функцијата (1) е густина на распределба на некоја случајна променлива X, за која ќе велиме дека има *Студентова* $t-$*распределба* со параметар $n\in\mathbf{N}$, ако таа има густина на распределба (1).

Забелешка 36. а) Од (1) следува дека Студентовата $t-$распределба е еднозначно определена само со параметарот $n\in\mathbf{N}$, кој го нарекуваме степени на слобода.

б) За $n=1$ Студентовата $t-$распределба всушност се совпаѓа со Кошиевата распределба, за која како што знаеме математичкото очекување и дисперзијата не постојат.

Нека случајната променлива X има Студентова $t-$распределба со n степени на слобода, $n>1$. Ако ја искористиме формулата (1), тогаш за математичкото очекување на случајната променлива $|X|$ наоѓаме:

$$E(|X|)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\,p(x)dx=\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\Gamma(\frac{n}{2})}\int_{-\infty}^{+\infty}|x|(1+\tfrac{x^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}}dx$$

$$=\frac{2\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\Gamma(\frac{n}{2})}\int_0^{+\infty}x(1+\tfrac{x^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}}dx$$

$$=\frac{n\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\Gamma(\frac{n}{2})}\int_0^{+\infty}(1+\tfrac{x^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}}d(1+\tfrac{x^2}{n})$$

$$=\frac{n\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\Gamma(\frac{n}{2})}\frac{(1+\frac{x^2}{n})^{-\frac{n-1}{2}}}{-\frac{n-1}{2}}\Big|_0^{+\infty}=\frac{2n\Gamma(\frac{n+1}{2})}{(n-1)\sqrt{n\pi}\Gamma(\frac{n}{2})},$$

од што следува дека $E(X)$ постои. Имаме

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x)dx=\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\Gamma(\frac{n}{2})}\int_{-\infty}^{+\infty}x(1+\tfrac{x^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}}dx=0,$$

бидејќи подинтегралната функција е непарна.

Ќе ја определиме дисперзијата на Студентова $t-$распределба со n степени на слобода, $n>2$. Имаме:

$$D(X)=E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2p(x)dx=\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\Gamma(\frac{n}{2})}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2(1+\tfrac{x^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}}dx$$

$$=\frac{2\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\Gamma(\frac{n}{2})}\int_0^{+\infty}x^2(1+\tfrac{x^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}}dx.$$

Во последниот интеграл прво ја воведуваме смената

$$1+\frac{x^2}{n}=t\,,\ x=\sqrt{n}\sqrt{t-1}\,,\ dx=\frac{\sqrt{n}}{2}(t-1)^{-\frac{1}{2}}dt\,,$$

а потоа смената

$$y=\frac{1}{t},\ dt=-\frac{dy}{y^2}\,,$$

и ако ги искористиме својствата на гама-функцијата и бета-функцијата, за $n>2$ последователно добиваме

$$D(X)=\frac{2\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\Gamma(\frac{n}{2})}\int\limits_0^{+\infty}x^2(1+\frac{x^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}}dx=\frac{n\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{n}{2})}\int\limits_1^{+\infty}t^{-\frac{n+1}{2}}(t-1)^{\frac{1}{2}}dt$$

$$=\frac{n\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{n}{2})}\int\limits_0^1 y^{(\frac{n}{2}-1)-1}(1-y)^{\frac{3}{2}-1}dy=\frac{n\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{n}{2})}\mathrm{B}(\frac{n}{2}-1,\frac{3}{2})$$

$$=\frac{n\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{n}{2})}\bullet\frac{\Gamma(\frac{n}{2}-1)\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2}-1+\frac{3}{2})}=\frac{n\Gamma(\frac{n}{2}-1)\Gamma(\frac{1}{2}+1)}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{n}{2}-1+1)}=\frac{\frac{n}{2}\Gamma(\frac{n}{2}-1)\Gamma(\frac{1}{2})}{(\frac{n}{2}-1)\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{n}{2}-1)}=\frac{n}{n-2}.$$

Јасно, за $n=1$ или $n=2$ интегралот $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x^2(1+\frac{x^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}}dx$ дивергира, па затоа во овие случаи за Студентовата $t-$распределба дисперзијата не постои. Со тоа ја докажавме следнава лема.

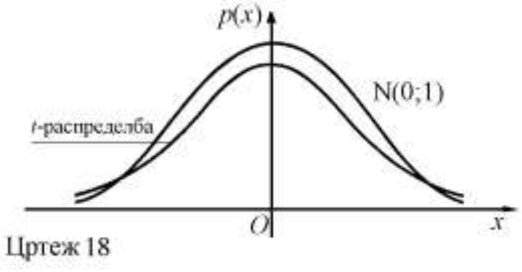
Лема 42. Ако случајната променлива X има Студентова $t-$распределба со n степени на слобода, тогаш при $n>1$ важи

$$E(X)=0\,, \tag{3}$$

а при $n>2$ важи

$$D(X)=\frac{n}{n-2}\,.\ \blacklozenge \tag{4}$$

Забелешка 37. а) Лесно се докажува дека за дека коефициентите на асиметрија и сплоштеност на Студентовата $t-$распределба важи $\alpha_3=0$ и $\alpha_4<3$. Понатаму, од неравенството $\alpha_4<3$ заклучуваме дека Студентовата $t-$распределба е посплосната од стандардната нормална распределба $\mathrm{N}(0;1)$, цртеж 18.



Цртеж 18

б) Може да се докаже

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\Gamma(\frac{n}{2})}(1+\frac{x^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}\,,$$

што значи дека Студентовата $t-$распределба тежи кон стандардната нормална распределба $\mathrm{N}(0;1)$ кога $n\to\infty$. Понатаму, ако $x_1<0$ и $x_2>0$ се докажува дека

$$|\,P_t\{x_1<x<x_2\}-P_N\{x_1<x<x_2\}\,|\le\frac{1}{n}P_N\{x_1<x<x_2\}\le\frac{1}{n}\,,$$

од што следува дека за $n > 30$ грешката на апроксимацијата е помала од $0,033$, независно од вредностите на x_1 и x_2. Затоа за доволно големи вредности на n, во практиката за $n > 30$, веројатностите P_t при Студентовата $t-$распределба може доволно добро да се апроксимираат со веројатностите P_N на стандардната нормална распределба $\mathrm{N}(0;1)$.

10.10. ФИШЕРОВА F-РАСПРЕДЕЛБА

Нека $p, q \in \mathbf{N}$. Да ја разгледаме функцијата

$$p(x) = \begin{cases} p^{\frac{p}{2}} q^{\frac{q}{2}} \dfrac{\Gamma(\frac{p+q}{2})}{\Gamma(\frac{p}{2})\Gamma(\frac{q}{2})} \cdot \dfrac{x^{\frac{p}{2}-1}}{(q+px)^{\frac{p+q}{2}}}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases} \tag{1}$$

каде Γ е гама функцијата. Ќе докажеме дека функцијата (1) е густина на распределба на некоја случајна променлива X. Бидејќи $p(x) \geq 0$, за секој $x > 0$, доволно е да докажеме дека

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = p^{\frac{p}{2}} q^{\frac{q}{2}} \frac{\Gamma(\frac{p+q}{2})}{\Gamma(\frac{p}{2})\Gamma(\frac{q}{2})} \int_{0}^{+\infty} x^{\frac{p}{2}-1}(q+px)^{-\frac{p+q}{2}} dx = 1. \tag{2}$$

Имаме

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx &= p^{\frac{p}{2}} q^{\frac{q}{2}} \frac{\Gamma(\frac{p+q}{2})}{\Gamma(\frac{p}{2})\Gamma(\frac{q}{2})} \int_{0}^{+\infty} x^{\frac{p}{2}-1}(q+px)^{-\frac{p+q}{2}} dx \\ &= p^{\frac{p}{2}} q^{-\frac{p}{2}} \frac{\Gamma(\frac{p+q}{2})}{\Gamma(\frac{p}{2})\Gamma(\frac{q}{2})} \int_{0}^{+\infty} x^{\frac{p}{2}-1}(1+\frac{p}{q}x)^{-\frac{p+q}{2}} dx. \end{aligned}$$

Во последниот интеграл прво ја воведуваме смената

$$1+\frac{p}{q}x = t,\ x = \frac{q}{p}(t-1),\ dx = \frac{q}{p}dt,$$

а потоа смената

$$y = \frac{1}{t},\ dt = -\frac{dy}{y^2},$$

и ако ги искористиме својствата на гама-функцијата и бета-функцијата добиваме

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx &= \frac{\Gamma(\frac{p+q}{2})}{\Gamma(\frac{p}{2})\Gamma(\frac{q}{2})} \int_{1}^{+\infty} (t-1)^{\frac{p}{2}-1} t^{-\frac{p+q}{2}} dt \\ &= \frac{\Gamma(\frac{p+q}{2})}{\Gamma(\frac{p}{2})\Gamma(\frac{q}{2})} \int_{0}^{1} y^{\frac{q}{2}-1}(1-y)^{\frac{p}{2}-1} dy \\ &= \frac{\Gamma(\frac{p+q}{2})}{\Gamma(\frac{p}{2})\Gamma(\frac{q}{2})} \mathrm{B}(\frac{q}{2}, \frac{p}{2}) = \frac{\Gamma(\frac{p+q}{2})}{\Gamma(\frac{p}{2})\Gamma(\frac{q}{2})} \bullet \frac{\Gamma(\frac{q}{2})\Gamma(\frac{p}{2})}{\Gamma(\frac{q+p}{2})} = 1. \end{aligned}$$

што и требаше да се докаже. За случајната променлива X која има густина на распределба (1) ќе велиме дека има *Фишерова* F_{pq} *−распределба* со параметри $p, q \in \mathbf{N}$, цртеж 19.

Нека случајната променлива X има Фишерова F_{pq} − распределба, $q > 2$. Ако ја искористиме формулата (1), тогаш за математичкото очекување на случајната променлива X наоѓаме:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx = p^{\frac{p}{2}} q^{\frac{q}{2}} \frac{\Gamma(\frac{p+q}{2})}{\Gamma(\frac{p}{2})\Gamma(\frac{q}{2})} \int_{0}^{+\infty} \frac{x^{\frac{p}{2}}}{(q+px)^{\frac{p+q}{2}}} dx$$

$$= p^{\frac{p}{2}} q^{-\frac{p}{2}} \frac{\Gamma(\frac{p+q}{2})}{\Gamma(\frac{p}{2})\Gamma(\frac{q}{2})} \int_{0}^{+\infty} x^{\frac{p}{2}} (1+\frac{p}{q}x)^{-\frac{p+q}{2}} dx$$

Во последниот интеграл последователно ги воведуваме смените

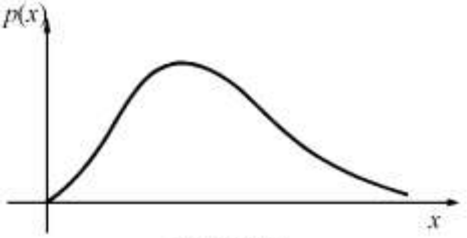
$$px = t^2,\ dx = \frac{2tdt}{p},$$

потоа

$$1+\frac{t^2}{q} = z,\ 2tdt = qdz$$

и на крајот

$$y = \frac{1}{z},\ dz = -\frac{dy}{y^2}$$



Цртеж 19

и ако ги искористиме својствата на бета и гама функцијата добиваме

$$E(X) = p^{\frac{p}{2}} q^{-\frac{p}{2}} \frac{\Gamma(\frac{p+q}{2})}{p\Gamma(\frac{p}{2})\Gamma(\frac{q}{2})} \int_{0}^{+\infty} (\frac{t^2}{p})^{\frac{p}{2}} (1+\frac{t^2}{q})^{-\frac{p+q}{2}} 2tdt$$

$$= q^{-\frac{p}{2}} \frac{\Gamma(\frac{p+q}{2})}{p\Gamma(\frac{p}{2})\Gamma(\frac{q}{2})} \int_{0}^{+\infty} t^{p} (1+\frac{t^2}{q})^{-\frac{p+q}{2}} 2tdt$$

$$= q^{-\frac{p}{2}} \frac{\Gamma(\frac{p+q}{2})}{p\Gamma(\frac{p}{2})\Gamma(\frac{q}{2})} \int_{1}^{+\infty} \sqrt{q}^{p} \sqrt{z-1}^{p} z^{-\frac{p+q}{2}} qdz$$

$$= \frac{q\Gamma(\frac{p+q}{2})}{p\Gamma(\frac{p}{2})\Gamma(\frac{q}{2})} \int_{1}^{+\infty} (z-1)^{\frac{p}{2}} z^{-\frac{p+q}{2}} dz$$

$$= \frac{q\Gamma(\frac{p+q}{2})}{p\Gamma(\frac{p}{2})\Gamma(\frac{q}{2})} \int_{1}^{0} (\frac{1}{y}-1)^{\frac{p}{2}} (\frac{1}{y})^{-\frac{p+q}{2}} \frac{-dy}{y^2}$$

$$= \frac{q\Gamma(\frac{p+q}{2})}{p\Gamma(\frac{p}{2})\Gamma(\frac{q}{2})} \int_{0}^{1} (1-y)^{\frac{p}{2}} y^{\frac{q}{2}-2} dy$$

$$= \frac{q\Gamma(\frac{p+q}{2})}{p\Gamma(\frac{p}{2})\Gamma(\frac{q}{2})} \int_{0}^{1} y^{(\frac{q}{2}-1)-1} (1-y)^{(\frac{p}{2}+1)-1} dy$$

$$=\frac{q\Gamma(\frac{p+q}{2})}{p\Gamma(\frac{p}{2})\Gamma(\frac{q}{2})}\mathrm{B}(\frac{q}{2}-1,\frac{p}{2}+1)=\frac{q\Gamma(\frac{p+q}{2})}{p\Gamma(\frac{p}{2})\Gamma(\frac{q}{2})}\bullet\frac{\Gamma(\frac{q}{2}-1)\Gamma(\frac{p}{2}+1)}{\Gamma(\frac{q}{2}-1+\frac{p}{2}+1)}$$

$$=\frac{q\Gamma(\frac{q}{2}-1)\Gamma(\frac{p}{2}+1)}{p\Gamma(\frac{p}{2})\Gamma(\frac{q}{2})}=\frac{q\Gamma(\frac{q}{2}-1)\frac{p}{2}\Gamma(\frac{p}{2})}{p\Gamma(\frac{p}{2})(\frac{q}{2}-1)\Gamma(\frac{q}{2}-1)}=\frac{q}{q-2}.$$

Јасно, за $q=1$ или $q=2$ интегралот

$$\int_0^{+\infty} x^{\frac{p}{2}}(1+\frac{p}{q}x)^{-\frac{p+q}{2}}dx$$

дивергира, па затоа во овие случаи за Фишеровата $F_{pq}-$распределба математичкото очекување не постои. На потполно аналоген начин се докажува дека за $q\geq 5$, дисперзијата на случајната променлива X со Фишерова $F_{pq}-$распределба е дадена со $D(F_{pq})=\frac{2q(p+q-2)}{p(q-2)^2(q-4)}$. Според тоа, точна е следнава лема.

Лема 43. Ако случајната променлива X има Фишерова $F_{pq}-$распределба, тогаш при $q>2$ важи

$$E(X)=\frac{q}{q-2}, \tag{3}$$

а при $q\geq 5$ важи

$$D(X)=\frac{2q(p+q-2)}{p(q-2)^2(q-4)}.\blacklozenge \tag{4}$$

ЗАДАЧИ

1. Нека F е произволна функција на распределба, Y е случајна променлива со $\boldsymbol{U}[0,1]$ распределба и нека функцијата $g:[0,1]\rightarrow\mathbf{R}$ е определена со $g(y)=\sup\{x\mid x\in\mathbf{R}\text{ и }F(x)\leq y\}$. Докажете дека F е функција на распределба на случајната променлива $X=g(Y)$.
2. Пресметајте ги коефициентот на асиметрија и коефициентот на сплоштеност на случајната променлива X со $\boldsymbol{U}[a,b]$ распределба
3. Нека случајната променлива X има $\boldsymbol{U}[0,1]$ распределба. Пресметајте го математичкото очекување на случајната променлива
   a) $\sin^2\pi X$, b) e^X, c) $-\ln\frac{1}{X}$
4. Машината е подесена за изработка на производи со должина 100 *mm*. При контрола на производството е констатирано дека должината на произведените единици рамномерно варира во интервал од 97 до 103 *mm*.
   a) Ако се претпостави дека должината на производот е случајна променлива со непрекината рамномерна распределба на наведениот интервал, да се најде густината на веројатноста.
   b) Колкави се математичкото очекување, дисперзијата и средноквадратното отстапување?
5. Случајните променливи X и Y имаат $\boldsymbol{U}[0,1]$ распределба. Докажете дека

$$E(|X-Y|) \le \tfrac{1}{2}.$$

6. Нека случајната променлива X има $\mathrm{N}(a,\sigma^2)$ распределба. Најдете ја веројатноста на настанот $P\{|X-a| \ge 3\sigma\}$. Што значи добиениот резултат?

7. Случајната променлива X има $\mathrm{N}(0,\sigma^2)$ распределба. Докажете, дека
$$E(e^X) = e^{\frac{\sigma^2}{2}}.$$

8. Во кутија се наоѓаат измешани две групи производи. Во првата група се производите чие отстапување од пропишаната димензија има $\mathrm{N}(0,1)$ распределба, а во втората група производите чие отстапување има $\mathrm{N}(2,4)$ распределба. Односот на бројот на производите на првата група спрема бројот на производите од втората група е 2:3. Најдете ја очекуваната вредност и стандардното отстапување на димензијата на случајно избран производ од кутијата.

9. Пресметајте ги коефициентот на асиметрија и коефициентот на сплоштеност на случајната променлива X со логаритамско-нормална распределба $\mathrm{N_L}(a;\sigma^2)$.

10. Пресметајте ги коефициентот на асиметрија и коефициентот на сплоштеност на случајната променлива X со експоненцијална распределба $\boldsymbol{E}(\lambda)$.

11. Нека случајната променлива X има експоненцијална распределба $\boldsymbol{E}(\lambda)$. Докажете дека за секој природен број k важи
$$E(X^k) = k!\lambda^{-k}.$$

12. Случајната променлива X има експоненцијална распределба, со дисперзија 6,25. Определете ја густината на веројатност. Најдете го математичкото очекување на случајната променлива X. Пресметајте ги веројатностите: $P(X<2)$, $P(X>7)$, $P(2{,}5>X<7{,}5)$.

13. Времето на услужување на клиент на еден шалтер во банката во просек изнесува 8 минути. Потрошеното време на услужување по клиент е случајна променлива X со експоненцијална распределба.
    a) Најдете ја густината на веројатност на случајната променлива X.
    b) Пресметајте ја веројатноста дека времето на услужување на случајно пристигнат клиент ќе трае до 6 минути.
    c) Пресметајте го средноквадратното отстапување на случајната променлива X.

14. Пресметајте ги коефициентот на асиметрија и коефициентот на сплоштеност на случајната променлива X со гама-распределба.

15. Случајната променлива X има гама-распределба со параметри $\alpha>0, \lambda>0$, со густина
$$p(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^a x^{a-1}}{\Gamma(a)} e^{-\lambda x}, & x \ge 0 \\ 0, & x<0. \end{cases}$$
Најдете $E(X^b)$. За кои вредности на b ова математичко очекување е конечно?

16. Пресметајте ги коефициентот на асиметрија и коефициентот на сплоштеност на случајната променлива X со бета распределба.

17. Пресметајте ги коефициентот на асиметрија и коефициентот на сплоштеност на случајната променлива X со Студентова $t-$распределба.

11. ПРОИЗВОД НА ВЕРОЈАТНОСТНИ МЕРИ. ТЕОРЕМА НА ФУБИНИ

Дефиниција 24. Нека $(\Omega_i, \boldsymbol{A}_i, P_i), i=1,2,...,n$ се простори на веројатности и $\Omega=\Omega_1\times\Omega_2\times...\times\Omega_n$ е Декартовиот производ на $\Omega_i, i=1,2,...,n$. Минималната $\sigma-$ алгебра која ги содржи сите множества од видот $A_1\times A_2\times...\times A_n=\prod\limits_{i=1}^{n}A_i$, $A_i\in\boldsymbol{A}_i$, $i=1,2,...,n$ ја нарекуваме *производ на* $\sigma-$ *алгебрите* $A_i\in\boldsymbol{A}_i$, $i=1,2,...,n$ и ја означуваме со $\boldsymbol{A}_1\times\boldsymbol{A}_2\times...\times\boldsymbol{A}_n=\prod\limits_{i=1}^{n}\boldsymbol{A}_i$. Множествата $A_1\times A_2\times...\times A_n=\prod\limits_{i=1}^{n}A_i$, $A_i\in\boldsymbol{A}_i$, $i=1,$ $2,...,n$ ги нарекуваме *измерливи правоаголници* на Ω.

Според тоа,

$$\prod_{i=1}^{n}\boldsymbol{A}_i=\sigma(A_1\times A_2\times...\times A_n,\ A_i\in\boldsymbol{A}_i,\ i=1,2,...,n\}.$$

Забелешка 38. Од дефиниција 24 следува дека $(\prod\limits_{i=1}^{n}\Omega_i, \prod\limits_{i=1}^{n}\boldsymbol{A}_i)$ е измерлив простор кој го нарекуваме *производ на измерливите простори* $(\Omega_i, \boldsymbol{A}_i), i=1,2,...,n$.

Дефиниција 25. Нека $A\subseteq\Omega_1\times\Omega_2$ и $\omega_2\in\Omega_2$. Множеството

$$A_{\omega_2}=\{\omega_1\in\Omega_1\,|\,(\omega_1,\omega_2)\in A\}$$

го нарекуваме *пресек* на множеството A во ω_2. Слично,

$$A_{\omega_1}=\{\omega_2\in\Omega_2\,|\,(\omega_1,\omega_2)\in A\}$$

го нарекуваме *пресек* на множеството A во $\omega_1\in\Omega_1$.

Пример 22. Ако $A=A_1\times A_2$, тогаш

$$A_{\omega_2}=\begin{cases}A_1, & \omega_2\in A_2,\\ \varnothing, & \omega_2\notin A_2,\end{cases}\qquad A_{\omega_1}=\begin{cases}A_2, & \omega_1\in A_1,\\ \varnothing, & \omega_1\notin A_1.\end{cases}\ \blacklozenge \tag{1}$$

Дефиниција 26. Нека $X:\Omega_1\times\Omega_2\to\mathbf{R}$ е произволна функција и $\omega_2\in\Omega_2$. Функцијата $X_{\omega_2}:\Omega_1\to\mathbf{R}$ определена со

$$X_{\omega_2}(\omega_1)=X(\omega_1,\omega_2),\ \omega_1\in\Omega_1$$

ја нарекуваме *пресек* на функцијата X во точката ω_2. Слично, ако $\omega_1\in\Omega_1$, тогаш функцијата

$$X_{\omega_1}(\omega_2)=X(\omega_1,\omega_2),\ \omega_2\in\Omega_2$$

ја нарекуваме *пресек* на функцијата X во точката ω_1.

Теорема 29. а) Ако $A \subseteq \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$, тогаш $A_{\omega_2} \in \mathcal{A}_1$, за секој $\omega_2 \in \Omega_2$ и $A_{\omega_1} \in \mathcal{A}_2$, за секој $\omega_1 \in \Omega_1$.

б) Нека $X : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbf{R}$ е случајна променлива. Тогаш X_{ω_2} е случајна променлива за секој $\omega_2 \in \Omega_2$ и X_{ω_1} е случајна променлива за секој $\omega_1 \in \Omega_1$.

Доказ. Заради симетрија доволно е тврдењата да ги докажеме за $\omega_1 \in \Omega_1$.

а) Нека $\omega_1 \in \Omega_1$ и

$$\mathcal{K}_{\omega_1} = \{A \in \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \mid A_{\omega_1} \in \mathcal{A}_2\}.$$

Јасно, $\mathcal{K}_{\omega_1} \subseteq \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$. Од друга страна, ако $A = A_1 \times A_2$, $A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2$, тогаш од (1) следува дека $A_{\omega_1} = A_2 \in \mathcal{A}_2$ или $A_{\omega_1} = \varnothing \in \mathcal{A}_2$, па затоа $A \in \mathcal{K}_{\omega_1}$, т.е сите измерливи правоаголници припаѓаат на $\mathcal{K}_{\omega_1}$. Понатаму, ако $A \in \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$, тогаш $\overline{A_{\omega_1}} = \overline{A}_{\omega_1}$, а ако $A_k \in \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$, за $k = 1, 2, \dots$, тогаш

$$\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right)_{\omega_1} = \bigcup_{k=1}^{\infty} (A_k)_{\omega_1},$$

од што следува дека $\mathcal{K}_{\omega_1}$ е $\sigma-$алгебра. Според тоа, $\mathcal{K}_{\omega_1}$ е $\sigma-$алгебра која ги содржи сите измерливи правоаголници, па затоа $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \subseteq \mathcal{K}_{\omega_1}$, што значи дека $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 = \mathcal{K}_{\omega_1}$.

б) Нека $x \in \mathbf{R}$. Тогаш

$$\begin{aligned} X_{\omega_1}^{-1}(B) &= \{\omega_2 \mid X_{\omega_1}(\omega_2) \in B\} = \{\omega_2 \mid X(\omega_1, \omega_2) \in B\} \\ &= \{\omega_2 \mid (\omega_1, \omega_2) \in X^{-1}(B)\} = (X^{-1}(B))_{\omega_1} \in \mathcal{A}_2, \end{aligned}$$

што според дефиниција 1 значи дека X_{ω_1} е случајна променлива. ♦

Теорема 30. Нека $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, P_1)$ и $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, P_2)$ се простори на веројатности. Точни се следниве тврдења:

а) За секој настан $A \in \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ функциите $X_1 : \Omega_1 \to \mathbf{R}$ и $X_2 : \Omega_2 \to \mathbf{R}$ определени со $X_1(\omega_1) = P_2(A_{\omega_1}),\ \omega_1 \in \Omega_1$ и $X_2(\omega_2) = P_1(A_{\omega_2}),\ \omega_2 \in \Omega_2$ се случајни променливи.

б) постои една и само една веројатностна мера $P : \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \to \mathbf{R}$ таква што за секои $A_1 \in \mathcal{A}_1$ и $A_2 \in \mathcal{A}_2$ важи

$$P(A_1 \times A_2) = P_1(A_1) P_2(A_2). \tag{2}$$

Притоа, за секој настан $A \in \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ важи

$$P(A) = E(X_1) = \int_{\Omega_1} P_2(A_{\omega_1}) dP_1 = \int_{\Omega_2} P_1(A_{\omega_2}) dP_2 = E(X_2). \tag{3}$$

Доказ. а) Нека $A = A_1 \times A_2 \in \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$. Тогаш од (1) следува дека

$$\begin{aligned} P_1(A_{\omega_2}) &= \begin{cases} P_1(A_1), & \omega_2 \in A_2 \\ P_1(\varnothing), & \omega_2 \notin A_2 \end{cases} = \begin{cases} P_1(A_1), & \omega_2 \in A_2 \\ 0, & \omega_2 \notin A_2 \end{cases} = P_1(A_1) I_{A_2}(\omega_2), \\ P_2(A_{\omega_1}) &= \begin{cases} P_2(A_2), & \omega_1 \in A_1 \\ P_2(\varnothing), & \omega_1 \notin A_2 \end{cases} = \begin{cases} P_2(A_2), & \omega_1 \in A_1 \\ 0, & \omega_1 \notin A_1 \end{cases} = P_2(A_2) I_{A_1}(\omega_1), \end{aligned} \tag{4}$$

што значи дека функциите $X_1 : \Omega_1 \to \mathbf{R}$ и $X_2 : \Omega_2 \to \mathbf{R}$ определени со

$$X_1(\omega_1) = P_2(A_{\omega_1}),\ \omega_1 \in \Omega_1 \text{ и } X_2(\omega_2) = P_1(A_{\omega_2}),\ \omega_2 \in \Omega_2$$

се случајни променливи.

б) Со $\boldsymbol{S}$ да ја означиме фамилијата од сите настани $A \in \boldsymbol{A}_1 \times \boldsymbol{A}_2$ за која важи

$$E(X_1) = E(X_2),$$

т.е. важи

$$\int_{\Omega_1} P_2(A_{\omega_1}) dP_1 = \int_{\Omega_2} P_1(A_{\omega_2}) dP_2 \,. \tag{5}$$

Ако $A = A_1 \times A_2$ е произволен правоаголник од $\boldsymbol{A}_1 \times \boldsymbol{A}_2$, тогаш од (4) следува

$$E(X_1) = P_2(A_2) E(I_{A_1}(\omega_1)) = P_1(A_1) P_2(A_2) = P_1(A_1) E(I_{A_2}(\omega_2)) = E(X_2),$$

што значи дека $\boldsymbol{S}$ ги содржи сите правоаголници $A_1 \times A_2$, каде $A_1 \in \boldsymbol{A}_1$ и $A_2 \in \boldsymbol{A}_2$. Нека $B_i, i = 1, ..., n$ се дисјунктни измерливи правоаголници на $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$. Тогаш

$$(\bigcup_{k=1}^{n} B_k)_{\omega_1} = \bigcup_{k=1}^{n} (B_k)_{\omega_1} \,,\ (\bigcup_{k=1}^{n} B_k)_{\omega_2} = \bigcup_{k=1}^{n} (B_k)_{\omega_2} \,,$$

каде $(B_i)_{\omega_1} \cap (B_j)_{\omega_1} = \varnothing$, $(B_i)_{\omega_2} \cap (B_j)_{\omega_2} = \varnothing$, за $i \neq j$, и притоа важи

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} P_2((\bigcup_{k=1}^{n} B_k)_{\omega_1}) dP_1 &= \int_{\Omega_1} P_2(\bigcup_{k=1}^{n} (B_k)_{\omega_1}) dP_1 = \int_{\Omega_1} \sum_{k=1}^{n} P_2((B_k)_{\omega_1}) dP_1 = \sum_{k=1}^{n} \int_{\Omega_1} P_2((B_k)_{\omega_1}) dP_1 \\ &= \sum_{k=1}^{n} \int_{\Omega_2} P_1((B_k)_{\omega_2}) dP_2 = \int_{\Omega_2} \sum_{k=1}^{n} P_1((B_k)_{\omega_2}) dP_2 = \int_{\Omega_2} P_1(\bigcup_{k=1}^{n} (B_k)_{\omega_2}) dP_2 \\ &= \int_{\Omega_2} P_1((\bigcup_{k=1}^{n} B_k)_{\omega_2}) dP_2, \end{aligned}$$

т.е. за множеството $\bigcup\limits_{k=1}^{n} B_k$ важи (5), што значи дека фамилијата $\boldsymbol{S}$ ја содржи минималната алгебра $\boldsymbol{A}_0$ генерирана од измерливите правоаголници на Ω. Нека $B_n \in \boldsymbol{S}$, $n = 1, 2, 3, ...$ и $B_n \uparrow B$. Тогаш $(B_n)_{\omega_1} \uparrow B_{\omega_1}$ и $(B_n)_{\omega_2} \uparrow B_{\omega_2}$, па од лема I 6 е) следува

$$0 \leq P_2[(B_n)_{\omega_1}] \uparrow P_2(B_{\omega_1}) \text{ и } 0 \leq P_1[(B_n)_{\omega_2}] \uparrow P_1(B_{\omega_2}) \,.$$

Сега, $B_n \in \boldsymbol{S}$, $n = 1, 2, ...$, равеството (5) и теоремата на Лебег за монотона конвергенција следува

$$\int_{\Omega_1} P_2(B_{\omega_1})dP_1 = \lim_{n\to\infty}\int_{\Omega_1} P_2((B_n)_{\omega_1})dP_1 = \lim_{n\to\infty}\int_{\Omega_2} P_2((B_n)_{\omega_2})dP_2 = \int_{\Omega_2} P_1(B_{\omega_2})dP_2 \,,$$

што значи $B \in \mathcal{S}$, т.е. $\mathcal{S}$ ги содржи границите на монотоно растечките низи настани. Аналогно, од теоремата на Лебег за доминантна конвергенција следува дека $\mathcal{S}$ ги содржи и границите на монотоно опаѓачките низи настани. Според тоа, $m(\mathcal{A}_0) \subseteq \mathcal{S}$, па од последица I 1 следува $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 = \sigma(\mathcal{A}_0) = m(\mathcal{A}_0) \subseteq \mathcal{S}$.

Од досега изнесеното следува дека на $\sigma-$алгебрата $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ е исполнето равенството (5). Нека функцијата $P : \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \to \mathbf{R}$ е зададена со равенството (3). Тогаш P е веројатност на $\mathcal{A}$ за која важи (2). Навистина, ако $B_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbf{N}$ се заемно дисјунктни настани, тогаш

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) = \int_{\Omega_1} P_2((\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n)_{\omega_1})dP_1 = \int_{\Omega_1} P_2(\bigcup_{n=1}^{\infty} (B_n)_{\omega_1})dP_1 = \int_{\Omega_1} [\sum_{n=1}^{\infty} P_2((B_n)_{\omega_1})]dP_1$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\int_{\Omega_1} P_2((B_n)_{\omega_1})dP_1 = \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n),$$

и како

$$P(\Omega) = \int_{\Omega_1} P_2(\Omega_{\omega_1})dP_1 = \int_{\Omega_1} P_2(\Omega_2)dP_1 = \int_{\Omega_1} dP_1 = 1,$$

добиваме дека P е веројатност на $\mathcal{A}$. За да ја докажеме единственоста, нека претпоставиме дека P е веројатност на $\mathcal{A}$ за која важи (2). Тогаш $P = P$ на $\mathcal{A}_0$, па од теоремата Каратеодори за продолжување на мерата следува еднозначноста на мерата $\mathcal{A}_0$ на $\sigma-$алгебрата $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$. ♦

Дефиниција 24. Нека $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, P_1)$ и $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, P_2)$ се два простори на веројатности. Веројатностната мера P определена во теорема 30 ја нарекуваме *производ на веројатностните мери* P_1 и P_2 и ја означуваме со $P = P_1 \times P_2$. Просторот на веројатности $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2, P_1 \times P_2)$ го нарекуваме производот на просторите $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, P_1)$ и $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, P_2)$.

На крајот од оваа точка ќе ја формулираме и ќе ја докажеме познатата теорема на Фубини за повторени интеграли.

Теорема 31 (Фубини). Нека $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2, P_1 \times P_2)$ е простор на веројатности и $X : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbf{R}$ е случајна променлива определена на овој простор. Ако случајната променлива X има конечно математичко очекување, тогаш секој нејзин пресек исто така има конечно математичко очекување и притоа важат равенствата

$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} X d(P_1 \times P_2) = \int_{\Omega_1} (\int_{\Omega_2} X_{\omega_1} dP_2) dP_1 = \int_{\Omega_2} (\int_{\Omega_1} X_{\omega_2} dP_1) dP_2 \,. \qquad (6)$$

Доказ. Најпрво да забележиме дека заради симетрија доволно е да го докажеме само првото равенство во (6). Нека $\omega_1 \in \Omega_1$. Според теорема 29 б) функцијата

$X_{\omega_1}(\omega_2)=X(\omega_1,\omega_2),\ \ \omega_2\in\Omega_2$ е случајна променлив, па затоа интегралот $\int\limits_{\Omega_2} X_{\omega_1}dP_2$ постои.

а) Нека $X=I_A$, каде $A\in\mathcal{A}_1\times\mathcal{A}_2$. Тогаш $\int\limits_{\Omega_2} I_{A_{\omega_1}}dP_2=P_2(A_{\omega_1})$ и од доказот на теорема 30 а) следува дека тоа е случајна променлива на Ω_1. Сега од претходното равенство и од равенството (3) следува

$$\int\limits_{\Omega} I_A dP=P(A)=\int\limits_{\Omega_1} P_2(A_{\omega_1})dP_1=\int\limits_{\Omega_1}(\int\limits_{\Omega_2} I_{A_{\omega_1}}dP_2)dP_1\ ,$$

што значи дека равенството (6) важи за функциите од видот $X=I_A,\ A\in\mathcal{A}_1\times\mathcal{A}_2$.

б) Нека сега $X=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i I_{A_i}$ е ненегативна проста случајна променлива на Ω. Тогаш

$$\int\limits_{\Omega_2} X_{\omega_1}dP_2=\int\limits_{\Omega_2}(\sum_{i=1}^{n}x_iI_{A_{i\omega_1}})dP_2=\sum_{i=1}^{n}x_i\int\limits_{\Omega_2} I_{A_{i\omega_1}}dP_2=\sum_{i=1}^{n}x_iP_2(A_{i\omega_1})$$

и согласно со теорема 30 а) тоа е случајна променлива на Ω_1. Сега, од доказот под а) следува

$$\int\limits_{\Omega} XdP=\int\limits_{\Omega}(\sum_{i=1}^{n}x_iI_{A_i})dP=\sum_{i=1}^{n}x_i\int\limits_{\Omega} I_{A_i}dP=\sum_{i=1}^{n}x_i\int\limits_{\Omega_1}(\int\limits_{\Omega_2} I_{A_{i\omega_1}}dP_2)dP_1$$

$$=\int\limits_{\Omega_1}\int\limits_{\Omega_2}(\sum_{i=1}^{n}x_iI_{A_{i\omega_1}}dP_2)dP_1=\int\limits_{\Omega_1}(\int\limits_{\Omega_2} X_{\omega_1}dP_2)dP_1,$$

што значи дека равенството (6) важи за ненегативни прости случајни променливи.

в) Нека X е ненегативна случајна променлива на Ω и нека $X_n, n\in\mathbf{N}$ е монотоно растечка низа ненегативни случајни променливи таква што $X=\lim\limits_{n\to\infty}X_n$. Тогаш $X_{n\omega_1}, n\in\mathbf{N}$ е монотно растечка низа ненегативни случајни променливи таква што $X_{\omega_1}=\lim\limits_{n\to\infty}X_{n\omega_1}$ (зошто?), па од теоремата на Лебег за монотона конвергенција и монотоноста на интегралот следува

$$\int\limits_{\Omega_2} X_{\omega_1}dP_2=\lim_{n\to\infty}\int\limits_{\Omega_2} X_{n\omega_1}dP_2\ ,$$

и тоа е случајна променлива на Ω_1. Сега, од доказот под б) и од теоремата на Лебег за монотона конвергенција следува

$$\int\limits_{\Omega} XdP=\lim_{n\to\infty}\int\limits_{\Omega} X_ndP=\lim_{n\to\infty}\int\limits_{\Omega_1}(\int\limits_{\Omega_2} X_{n\omega_1}dP_2)dP_1=\int\limits_{\Omega_1}[\lim_{n\to\infty}(\int\limits_{\Omega_2} X_{n\omega_1}dP_2)]dP_1$$

$$=\int\limits_{\Omega_1}[\int\limits_{\Omega_2}(\lim_{n\to\infty}X_{n\omega_1})dP_2]dP_1=\int\limits_{\Omega_1}(\int\limits_{\Omega_2} X_{\omega_1}dP_2)dP_1,$$

што значи дека равенството (6) важи за произволна ненегативна случајна променлива.

г) Нека X е произволна случајна променлива. Тогаш $X = X^+ - X^-$ и притоа важи $\int\limits_{\Omega} X^- dP < +\infty$, (зошто?). Тогаш од в) следува дека

$$\int\limits_{\Omega} X^- dP = \int\limits_{\Omega_1} (\int\limits_{\Omega_2} X_{\omega_1}^- dP_2) dP_1,$$

што значи дека случајната променлива $\int\limits_{\Omega_2} X_{\omega_1}^- dP_2$ е интеграбилна во однос на веројатностната мера P_1 и од лема 27 г) следува дека таа е с.с. конечна. Затоа за с.с. за секој $\omega_1 \in \Omega_1$ важи

$$\int\limits_{\Omega_2} X_{\omega_1} dP_2 = \int\limits_{\Omega_2} X_{\omega_1}^+ dP_2 - \int\limits_{\Omega_2} X_{\omega_1}^- dP_2 \,. \tag{7}$$

Но, X има конечно математичко очекување, што значи дека $| \int\limits_{\Omega} XdP | < +\infty$, па затоа двата интеграли на десната страна на (7) се конечни с.с. Сега, ако ставиме дека двата интеграли на десната страна на (7) се еднакви на 0 надвор од множеството на кое тие се конечни (веројатноста на тој настан е 1) и ако ја искористиме линеарноста на интегралот, тогаш од в) следува

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega} XdP &= \int\limits_{\Omega} X^+ dP - \int\limits_{\Omega} X^- dP = \int\limits_{\Omega_1} (\int\limits_{\Omega_2} X_{\omega_1}^+ dP_2) dP_1 - \int\limits_{\Omega_1} (\int\limits_{\Omega_2} X_{\omega_1}^- dP_2) dP_1 \\ &= \int\limits_{\Omega_1} [\int\limits_{\Omega_2} (X_{\omega_1}^+ - X_{\omega_1}^-) dP_2] dP_1 = \int\limits_{\Omega_1} (\int\limits_{\Omega_2} X_{\omega_1} dP_2) dP_1,\end{aligned}$$

што значи дека равенството (6) важи за произволна случајна променлива. ♦

Последица 14. Ако X е случајна променлива на Ω и ако

$$\int\limits_{\Omega_1} (\int\limits_{\Omega_2} | X_{\omega_1} | dP_2) dP_1 < +\infty \quad \text{или} \quad \int\limits_{\Omega_2} (\int\limits_{\Omega_1} | X_{\omega_2} | dP_1) dP_2 < +\infty ,$$

тогаш $| \int\limits_{\Omega} XdP | < +\infty$ и важи формулата (6).

Доказ. Од теорема 31 следува дека $\int\limits_{\Omega} | X | dP < +\infty$, што значи дека важи $| \int\limits_{\Omega} XdP | < +\infty$. Сега, повторно од теорема 31 следува дека важи формулата (6). ♦

ЗАДАЧИ

1. Нека $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2, P_1 \times P_2)$ е простор на веројатности и нека $A \in \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$. Докажете дека $(P_1 \times P_2)(A) = 0$ ако и само ако

$$P_1\{\omega_1 \mid P_2(A_{\omega_1}) = 0\} = 1,$$

т.е. настанот A има веројатност нула ако и само ако скоро секој негов пресек има веројатност 0.

2. Искажете ги и докажете ги генерализациите на теоремите 29, 30 и 31 на Декартов производ од конечно многу веројатностни простори.
3. Нека $\{a_{ij} \mid i, j = 1, 2, 3, \ldots\}$ е низа реални броеви такви што $\sum_{i,j} |a_{ij}| < +\infty$. Користејќи ја теоремата на Фубини докажете дека
$$\sum_{i,j} a_{ij} = \sum_j (\sum_i a_{ij}) = \sum_i (\sum_j a_{ij}) . \tag{8}$$
4. Најдете низа $\{a_{ij} \mid i, j = 1, 2, 3, \ldots\}$ за која $\sum_{i,j} |a_{ij}| = +\infty$ и равенствата (8) не се исполнети.

12. НЕЗАВИСНОСТ НА СЛУЧАЈНИ ПРОМЕНЛИВИ

Независноста е еден од најважните поими во теоријата на веројатност. Независните настани, разбивања, алгебри и $\sigma -$алгебри ги разгледавме во точка I 9. Понатаму, независноста на случајните променливи дефинирани на дискретен простор на веројатности ја разгледавме во точка II 8. Во оваа точка ќе зборуваме за независност на случајни променливи дефинирани на произволен простор на веројатности.

Дефиниција 27. Нека $X_1, X_2, \ldots, X_n$ се случајни променливи определени на просторот на веројатности $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Ќе велиме дека $X_1, X_2, \ldots, X_n$ се *независни*, ако се независни $\sigma -$алгебрите $\mathcal{A}_{X_1}, \mathcal{A}_{X_2}, \ldots, \mathcal{A}_{X_n}$ генерирани од сслучајните променливи $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Ако случајните променливи не се независни, тогаш ќе велиме дека тие се *зависни*.

Нека $\{X_i, i \in I\}$ е произволна фамилија случајни променливи определени на просторот на веројатности $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Ќе велиме дека $\{X_i, i \in I\}$ е *фамилија независни случајни променливи* ако случајните променливи $X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_n}$ се независни за секое конечно подмножество $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$ различни индекси од I.

Лема 44. Случајните променливи $X_i, i = 1, 2, \ldots, n$ се независни ако и само ако за секои Борелови функции $g_i : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ случајните променливи $g_i(X_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ се независни.

Доказ. Нека $X_i, i = 1, \ldots, n$ се независни случајни променливи и $g_i : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ се произволни Борелови функции. Тогаш $\mathcal{A}_{g_i(X_i)} \subseteq \mathcal{A}_{X_i}$, $i = 1, \ldots, n$ и како $\sigma -$алгебрите $\mathcal{A}_{X_1}, \mathcal{A}_{X_2}, \ldots, \mathcal{A}_{X_n}$ се независни, добиваме дека и $\sigma -$алгебрите $\mathcal{A}_{g_1(X_1)}$, $\mathcal{A}_{g_2(X_2)}, \ldots, \mathcal{A}_{g_2(X_n)}$, што значи дека случајните променливи $g_i(X_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Обратно, ако за секои Борелови функциии $g_i : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $i = 1, \ldots, n$ случајните променливи $g_i(X_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ се независни, тогаш бидејќи $g_i(x_i) = x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ се Борелови функции, добиваме дека случајните променливи $X_1, i = 1, 2, \ldots, n$ се независни. ♦

Теорема 32. Случајните променливи $X_i, i=1,2,...,n$ се независни, ако и само ако за секои Борелови множества $B_i, i=1,2,...,n$ важи

$$P\{X_1 \in B_1, X_2 \in B_2,..., X_n \in B_n\} = \prod_{i=1}^{n} P\{X_i \in B_i\} \tag{1}$$

Доказ. Тврдењето непосредно следува дефинициите I 28 и 27 и од фактот дека секоја од $\sigma-$алгебрите $\boldsymbol{A}_{X_i}$, $i=1,2,...,n$ се состои од настани $\{X_i \in B_i\}$, каде $B_i \in \boldsymbol{B}$. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ♦

Следната теорема дава потребен и доволен услов за независност на случајните променлви $X_1, X_2,..., X_n$, кој услов е доста погоден за примена.

Теорема 33. Нека $F_1, F_2,..., F_n$ се функциите на распределба на случајните променливи $X_1, X_2,..., X_n$ и нека $F:\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ е функцијата на распределба на случајниот вектор $(X_1, X_2,..., X_n)$. Случајните променливи $X_1, X_2,..., X_n$ се независни ако и само ако за секоја $n-$торка $(x_1, x_2,..., x_n) \in \mathbf{R}^n$

$$F(x_1, x_2,..., x_n) = F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2)...F_{X_n}(x_n), \tag{2}$$

Доказ. Ако $X_1, X_2,..., X_n$ се независни случајни променливи, тогаш според теорема 32 за секои Борелови множества $B_i \in \boldsymbol{B}, i=1,2,...,n$ е исполнето равенство (1). Понатаму, множествата $B_i = (-\infty, x_i], i=1,2,...,n$ се Борелови и ако замениме во (1) го добиваме равенството (2).

Обратно, нека за произволна $n-$торка $(x_1, x_2,..., x_n) \in \mathbf{R}^n$ е важи равенството (2). Ако $(a_1, a_2,..., a_n), (b_1, b_2,..., b_n) \in \mathbf{R}^n$ се такви што $a_i < b_i, i=1,2,...,n$, тогаш од лема 14 и од равенството (2) следува

$$\begin{aligned} P\{X_1 \in (a_1,b_1], X_2 \in (a_2,b_2],..., X_n \in (a_n,b_n]\} &= \Delta_F((a_1,b_1]\times(a_2,b_2]\times...\times(a_n,b_n]) \\ &= [F_1(b_1)-F_1(a_1)]\cdot[F_1(b_1)-F_1(a_1)]\cdot...\cdot[F_n(b_n)-F_n(a_n)] \\ &= P\{X_1 \in (a_1,b_1]\}\cdot P\{X_2 \in (a_2,b_2]\}\cdot...\cdot P\{X_n \in (a_n,b_n]\}. \end{aligned}$$

Ќе ги фиксираме интервалите $(a_2,b_2],...,(a_n,b_n]$ и ќе докажеме дека за секое Борелово множество $B_1 \in \boldsymbol{B}$ важи равенството

$$P(\{X_1 \in B_1\} \cap (\bigcap_{i=2}^{n} \{X_i \in (a_i,b_i]\})) = P\{X_1 \in B_1\} \prod_{i=2}^{n} P\{X_i \in (a_i,b_i]\}. \tag{3}$$

Нека $\boldsymbol{K}$ е фамилијата Борелови множества $B_1 \in \boldsymbol{B}$ за која важи равенството (3). Тогаш $\boldsymbol{K}$ ја содржи минималната алгебра $\boldsymbol{B}_0$ која ги содржи сите интервали од видот $(a,b]$, каде $a,b \in \mathbf{R}$ и $a<b$. Според тоа, $\boldsymbol{B}_0 \subseteq \boldsymbol{K} \subseteq \boldsymbol{B}$. Ќе докажеме дека $\boldsymbol{K}$ е монотона класа. Нека $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq ...$ е монотоно растечка низа настани од $\boldsymbol{K}$. Тогаш за секој $k \geq 1$ важи

$$P(A_k \cap (\bigcap_{i=2}^{n} \{X_i \in (a_i,b_i]\})) = P(A_k) \prod_{i=2}^{n} P\{X_i \in (a_i,b_i]\}. \tag{4}$$

Нека $D = \bigcap_{i=2}^{n} \{X_i \in (a_i, b_i]\}$. Тогаш $A_1 D \subseteq A_2 D \subseteq A_3 D \subseteq ...$ и ако ги искористиме равенството (4) и непрекинатоста на веројатноста добиваме

$$\begin{aligned} P[(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) \cap (\bigcap_{i=2}^{n} \{X_i \in (a_i, b_i]\}) = P[(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) \cap D] = P(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k D) = \lim_{k\to\infty} P(A_k D) \\ = \lim_{k\to\infty} P(A_k \cap (\bigcap_{i=2}^{n} \{X_i \in (a_i, b_i]\})) \\ = \lim_{k\to\infty} P(A_k) P(\bigcap_{i=2}^{n} \{X_i \in (a_i, b_i]\}) \\ = P(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) P(\bigcap_{i=2}^{n} \{X_i \in (a_i, b_i]\}), \end{aligned}$$

што значи дека $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \boldsymbol{K}$. Аналогно се докажува дека $\boldsymbol{K}$ ги содржи и граничните вредности на монотоно опаѓачките низи формирани од настани кои и припаѓаат. Според тоа, $\boldsymbol{K}$ е монотона класа, па од последица I 1 следува дека $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{B}$. Понатаму, ако претпоставиме дека равенството (1) е исполнето за произволни Борелови множества $B_1, B_2, ..., B_i$, $i \geq 1$ и произволни интервали $B_{i+1} = (a_{i+1}, b_{i+1}], ..., B_n = (a_n, b_n]$, тогаш со идентични размислувања како погоре се докажува дека тоа е исполнето за произволни Борелови множества $B_1, B_2, ..., B_i, B_{i+1}$, $i \geq 1$ и произволни интервали $B_{i+2} = (a_{i+2}, b_{i+2}], ..., B_n = (a_n, b_n]$, па од принципот на математичка индукција следува равенството (1) важи за секои Борелови множества $B_i, i = 1, 2, ..., n$. Конечно, од теорема 32 следува дека случајните променливи $X_1, X_2, ..., X_n$ се независни. ♦

Теорема 34. Ако случајниот вектор $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$ има густина f, тогаш секоја случајна променлива X_i, $i = 1, 2, ..., n$ има густина p_i, $i = 1, 2, ..., n$. Освен тоа, случајните променливи X_i, $i = 1, 2, ..., n$ се независни ако и само ако

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = p_1(x_1) p_2(x_2) ... p_n(x_n), \tag{5}$$

за секој $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n$, освен евентуално на Борелово подмножество од $\mathbf{R}^n$ со Лебегова мера нула.

Доказ. Лебеговата мера на $\mathbf{R}^n$ е производ од n еднодимензионални Лебегови (види [70]), па од теоремата на Фубини следува дека функцијата на распределба на случајната променлива X_1 е дадена со

$$\begin{aligned} F_1(x_1) = P\{X_1 \leq x_1\} = P\{X_1 \leq x_1, X_2 \in \mathbf{R}, ..., X_n \in \mathbf{R}\} \\ = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{+\infty} ... \int_{-\infty}^{+\infty} f(t_1, t_2, ..., t_n) dt_1 dt_2 ... dt_n. \end{aligned}$$

Оттука, согласно со дефиниција 13 следува дека случајната променлива X_1 е апсолутно-непрекината и има густина

$$p_1(x_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, t_2, \dots, t_n) dt_1 dt_2 \dots dt_n, \quad x_1 \in \mathbf{R}, \tag{6}$$

и од теоремата на Фубини следува дека p_1 е Борелова функцијата. Аналогно, секоја случајна променлива X_i има густина p_i која се добива со интегрирање на функцијата f по сите променливи, освен по променливата x_i. Нека сега во однос на Лебеговата мера на $\mathbf{R}^n$ с.с. е исполнето равенството (5). Тогаш од теоремата на Фубини следува дека

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f(t_1, t_2, \dots, t_n) dt_1 dt_2 \dots dt_n \\ &= \int_{-\infty}^{x_1} p_1(t_1) dt_1 \int_{-\infty}^{x_2} p_2(t_2) dt_2 \dots \int_{-\infty}^{x_n} p_n(t_n) dt_n \\ &= F_1(x_1) F_2(x_2) \dots F_n(x_n), \end{aligned}$$

па од теорема 33 следува дека случајните променливи X_i, $i = 1, 2, \dots, n$ се независни.

Обратно, нека случајните променливи X_i, $i = 1, 2, \dots, n$ се независни. Тогаш, според теорема 33 важи

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_1(x_1) F_2(x_2) \dots F_n(x_n) &= \int_{-\infty}^{x_1} p_1(t_1) dt_1 \int_{-\infty}^{x_2} p_2(t_2) dt_2 \dots \int_{-\infty}^{x_n} p_n(t_n) dt_n \\ &= \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \int_{-\infty}^{x_n} p_1(t_1) p_2(t_2) \dots p_n(t_n) dt_1 dt_2 \dots dt_n, \end{aligned}$$

за секој $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$. Нека $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = p_1(x_1) p_2(x_2) \dots p_n(x_n)$. Тогаш од дефиниција 15 и лема 18 следува дека

$$P_X(B) = \int_B g(x) dl(x), \quad B \in \boldsymbol{B}^n,$$

каде l е Лебеговата мера на $\boldsymbol{B}^n$. Од друга страна

$$P_X(B) = \int_B f(x) dl(x), \quad B \in \boldsymbol{B}^n$$

па затоа од лема 27 в) следува дека $f = g$ освен евентуално на Борелово подмножество од $\mathbf{R}^n$ со Лебегова мера нула. ♦

Дефиниција 28. Нека случајниот вектор $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ има густина f. Густините p_i, $i = 1, 2, \dots, n$ од теорема 34 ги нарекуваме *маргинални густини* на случајните променливи X_i, $i = 1, 2, \dots, n$, а нивните распределби F_i, $i = 1, 2, \dots, n$ ги нарекуваме *маргинални распределби*.

Пример 23. Густината на апсолутно-непрекинатата дводимензионална случајна променлива (X, Y) е дадена со

$$f(x,y)=\begin{cases} kx(x-y), & 0<x<2, -x<y<x \\ 0, & \text{во останатите случаи.} \end{cases} \tag{7}$$

a) Определете ја константата k.

b) Најдете ги маргиналните распределби на X и Y.

Решение. а) Имаме

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=\int_{0}^{2}\int_{-x}^{x} kx(x-y)dxdy=k\int_{0}^{2}xdx\int_{-x}^{x}(x-y)dy$$

$$=k\int_{0}^{2}xdx(xy-\tfrac{y^2}{2})\Big|_{-x}^{x}=2k\int_{0}^{2}x^3dx=k\tfrac{x^4}{2}\Big|_{0}^{2}=8k,$$

па затоа $k=\frac{1}{8}$.

b) Ќе ја определиме маргиналната густина $p(x)$ на случајната променлива X. Од равенствата (6) и (7) следува дека

$$p(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty} 0\cdot dy=0, \quad \text{за } x\in(-\infty,0]\cup[2,+\infty) \text{ и}$$

$$p(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\tfrac{1}{8}\int_{-x}^{x} x(x-y)dy=\tfrac{1}{8}x(xy-\tfrac{y^2}{2})\Big|_{-x}^{x}=\tfrac{x^3}{4}, \quad \text{за } x\in(0,2).$$

Понатаму, за маргиналната густина $g(y)$ на случајната променлива Y наоѓаме

$$g(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\int_{-\infty}^{+\infty} 0\cdot dx=0, \quad \text{за } y\in(-\infty,-2]\cup[2,+\infty),$$

$$g(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\tfrac{1}{8}\int_{-y}^{2} x(x-y)dx=\tfrac{1}{8}(\tfrac{8}{3}-2y+\tfrac{5y^3}{6}), \quad \text{за } y\in(-2,0] \text{ и}$$

$$g(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\tfrac{1}{8}\int_{y}^{2} x(x-y)dx=\tfrac{1}{8}(\tfrac{8}{3}-2y+\tfrac{y^3}{6}), \quad \text{за } y\in(0,2).$$

Очигледно $f(x,y)\neq p(x)q(y)$, што според теорема 34 значи дека случајните променливи X и Y не се независни. ♦

Пример 24. За апсолутно-непрекинатата дводимензионална случајна променлива (X,Y) од пример 9 маргиналните распределби на случајните променливи X и Y се:

$$p(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x\geq 0, \\ 0, & x<0, \end{cases} \qquad q(y)=\begin{cases} e^{-y}, & y\geq 0, \\ 0, & y<0, \end{cases}$$

соодветно. Притоа важи $f(x,y)=p(x)q(y)$, за секои $(x,y)\in\mathbf{R}^2$, па од теорема 34 следува дека случајните променливи X и Y се независни. ♦

Последица 15. Ако случајните променливи X_i, $i=1,2,...,n$ се независни и имаат густини p_i, $i=1,2,...,n$, соодветно, тогаш случајниот вектор $(X_1,X_2,...,X_n)$ има густина која е зададена со релацијата (5).

Доказ. Непосредно следува од теорема 34. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ♦

Забелешка 39. Може да се докаже дека во случај кога случајните променливи X_i, $i=1,2,...,n$ не се независни (велиме дека се *зависни*), тогаш од егзистенцијата на густините p_i, $i=1,2,...,n$ не следува егзистенцијата на густина за случајниот вектор $(X_1,X_2,...,X_n)$.

Теорема 35. Дискретните случајни променливи $X_1,X_2,...,X_n$ определени над ист простор на веројатности $(\Omega,\boldsymbol{A},P)$ се независни ако и само ако

$$P\{X_i=x_i, i=1,2,...,n\}=\prod_{i=1}^{n}P\{X_i=x_i\} \tag{8}$$

за секоја подредена $n-$торка $(x_1,x_2,...,x_n)\in\mathbf{R}^n$.

Доказ. Постапете аналогно како во доказот на теорема 34. ♦

Теорема 36. Ако случајните променливи X и Y се независни и имаат конечни математички очекувања $E(X)$ и $E(Y)$, тогаш

$$E(XY)=E(X)\cdot E(Y). \tag{9}$$

Доказ. Нека X и Y се независни случајни променливи. Ако X и Y се прости случајни променливи и

$$X=\sum_{k=1}^{m}x_kI_{A_k},\ Y=\sum_{t=1}^{n}y_tI_{B_t},$$

тогаш $P(A_kB_t)=P(A_k)P(B_t)$. Затоа

$$\begin{aligned}E(XY)&=E(\sum_{k=1}^{m}\sum_{t=1}^{n}x_ky_tI_{A_kB_t})=\sum_{k=1}^{m}\sum_{t=1}^{n}x_ky_tP(A_kB_t)=\sum_{k=1}^{m}\sum_{t=1}^{n}x_ky_tP(A_k)P(B_t)\\&=\sum_{k=1}^{m}x_kP(A_k)\sum_{t=1}^{n}y_tP(B_t)=E(X)\cdot E(Y).\end{aligned}$$

Ако ненегативните случајни променливи X и Y се независни, тогаш простите случајни променливи $X_n=g_n(X)$ и $Y_n=g_n(Y)$ конструирани во доказот на теорема 11 се независни (зошто?). Затоа $E(X_nY_n)=E(X_n)\cdot E(Y_n)$. Од $X_n\uparrow X$ и $Y_n\uparrow Y$ следува дека $X_nY_n\uparrow XY$ и $E(X_nY_n)\uparrow E(XY)$, што значи дека равенството (8) важи и за ненегативни случајни променливи.

Во општ случај $X=X^+-X^-$, $Y=Y^+-Y^-$. Бидејќи $X^\pm$ и $Y^\pm$ се Борелови функции од X и Y, тие се независни. Според тоа,

$$\begin{aligned} E(XY) &= E[(X^+ - X^-)(Y^+ - Y^-)] = E(X^+Y^+) - E(X^+Y^-) + E(X^-Y^-) - E(X^-Y^+) \\ &= E(X^+)\cdot E(Y^+) - E(X^+)\cdot E(Y^-) + E(X^-)\cdot E(Y^-) - E(X^-)\cdot E(Y^+) \\ &= E(X^+)\cdot[E(Y^+) - E(Y^-)] - E(X^-)\cdot[E(Y^+) - E(Y^-)] \\ &= [E(Y^+) - E(Y^-)][E(X^+) - E(X^-)] = E(X)\cdot E(Y), \end{aligned}$$

што и требаше да се докаже. ♦

Последица 16. Ако случајните променливи $X_i, i=1,2,...,n$ се независни и имаат конечни математички очекувања, тогаш

$$E(X_1X_2...X_n) = E(X_1)\cdot E(X_2)\cdot ...\cdot E(X_n).$$

Доказ. Непосредно следува од теорема 36 и принципот на математичка индукција. ♦

Последица 17. а) Ако случајните променливи $X_i, i=1,2,...,n$ се независни и имаат конечни дисперзии, тогаш постои и дисперзијата на $\sum_{i=1}^{n} X_i$ и важи

$$D(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} D(X_i).$$

б) Ако X и Y се независни случајни променливи, тогаш

$$D(XY) \geq D(X)\cdot D(Y).$$

Доказ. а) Доволно е тврдењето да го докажеме за $n=2$. Притоа доволно е да разгледуваме случајни променливи со математичко очекување еднакво на нула, бидејќи ако земеме $m_i = E(X_i), i=1,2$, тогаш

$$\begin{aligned} D(X_1+X_2) &= D[(X_1-m_1)+(X_2-m_2)] = D(X_1-m_1)+D(X_2-m_2) \\ &= D(X_1)+D(X_2). \end{aligned}$$

Нека претпоставиме дека $E(X_i)=0, i=1,2$ и дека X_1 и X_2 имаат конечни дисперзии. Тогаш од условот на теоремата и од теорема 36 следува дека $E(X_1^2), E(X_2^2)$ и $E(X_1X_2)$ се конечни. Но, случајните променливи X_1 и X_2 се независни, па затоа

$$\begin{aligned} D(X_1+X_2) &= E[(X_1+X_2)^2]-[E(X_1+X_2)]^2 = E(X_1^2+2X_1X_2+X_2^2) \\ &= E(X_1^2)+2E(X_1X_2)+E(X_2^2) = E(X_1^2)+2E(X_1)E(X_2)+E(X_2^2) \\ &= E(X_1^2)+E(X_2^2) = D(X_1)+D(X_2), \end{aligned}$$

што и требаше да се докаже.

б) Постапете аналогно како во доказот на теорема II 22. ♦

Пример 25. Случајните променливи X и Y од пример 9 имаат експоненцијални распределби со заеднички параметар $\lambda=1$, па затоа

$$E(X)=E(Y)=\frac{1}{\lambda}=1 \text{ и } D(X)=D(Y)=\frac{1}{\lambda^2}=1.$$

Но, според пример 23 тие се независни, па од теорема 36 следува

$$E(XY)=E(X)\bullet E(Y)=1.$$

Понатаму, од последица 17 а) следува

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y)=2. \blacklozenge$$

Пример 26. Независните случајни променливи $X_{ij}, i, j=1,2,...,n$ за кои важи $E(X_{ij})=0$ и $D(X_{ij})=2$, се елементи на $n\times n$ матрицата A. Пресметајте ја дисперзијата на случајната променлива $Y=\det A$.

Решение. Најпрво да забележиме дека за секои $i, j=1,2,...,n$ важи

$$E(X_{ij}^2)=D(X_{ij})-[E(X_{ij})]^2=2. \tag{10}$$

Со Ψ_n да го означиме множеството од сите пермутации на броевите $1,2,...,n$. Тогаш за случајната променлива Y добиваме

$$Y=\det A=\sum_{\psi\in\Psi_n}\text{sign}(\psi)\prod_{i=1}^{n}X_{i\psi(i)}.$$

Понатаму, за секоја пермутација $\psi\in\Psi_n$ случајните променливи $X_{i\psi(i)}$, $i=1,2,...,n$ се независни, па од лема 44 следува дека и случајните променливи $X_{i\psi(i)}^2, i=1,2,...,n$ се независни. Сега од равенството (10) и од последица 16 следува

$$E(\prod_{i=1}^{n}X_{i\psi(i)}^2)=\prod_{i=1}^{n}E(X_{i\psi(i)}^2)=2^n. \tag{11}$$

Од друга страна, ако $\psi,\varphi\in\Psi_n,\psi\neq\varphi$, тогаш од независноста на случајните променливи $X_{i\psi(i)}^2$, за $\psi(i)=\varphi(i)$ и $X_{i\psi(i)}$, $X_{i\varphi(i)}$, за $\psi(i)\neq\varphi(i)$ и од последица 16 следува

$$\begin{aligned}E(\prod_{i=1}^{n}X_{i\varphi(i)}\prod_{i=1}^{n}X_{i\psi(i)})&=E(\prod_{\varphi(i)=\psi(i)}X_{i\varphi(i)}^2\prod_{\varphi(i)\neq\psi(i)}X_{i\psi(i)}X_{i\varphi(i)})\\&=\prod_{\varphi(i)=\psi(i)}E(X_{i\varphi(i)}^2)\prod_{\varphi(i)\neq\psi(i)}E(X_{i\psi(i)})E(X_{i\varphi(i)})=0.\end{aligned} \tag{12}$$

Но, повторно од последица 16 имаме

$$\begin{aligned}E(Y)&=E(\sum_{\psi\in\Psi_n}\text{sign}(\psi)\prod_{i=1}^{n}X_{i\psi(i)})=\sum_{\psi\in\Psi_n}\text{sign}(\psi)E(\prod_{i=1}^{n}X_{i\psi(i)})\\&=\sum_{\psi\in\Psi_n}\text{sign}(\psi)\prod_{i=1}^{n}E(X_{i\psi(i)})=0.\end{aligned} \tag{13}$$

Конечно, ако земеме предвид дека $|\Psi_n| = n!$, тогаш од равенствата (11), (12) и (13) добиваме

$$D(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = E(Y^2) = E[(\sum_{\psi \in \Psi_n} \operatorname{sign}(\psi) \prod_{i=1}^{n} X_{i\psi(i)})^2]$$

$$= \sum_{\psi \in \Psi_n} E(\prod_{i=1}^{n} X_{i\psi(i)}^2) + 2 \sum_{\substack{\psi,\varphi \in \Psi_n; \\ \psi \neq \varphi}} \operatorname{sign}(\psi) \operatorname{sign}(\varphi) E(\prod_{i=1}^{n} X_{i\psi(i)} \prod_{i=1}^{n} X_{i\varphi(i)}) = n! 2^n.$$

ЗАДАЧИ

1. Густината на веројатност на случајниот вектор (X,Y) е дадена со
$$f(x,y) = \begin{cases} xe^{-x(1+y)}, & x > 0,\ y > 0, \\ 0, & \text{во останатите случаи.} \end{cases}$$
Пресметајте ги густините на веројатност на случајните променливи X и Y. Дали случајните променливи X и Y се независни?

2. Густината на веројатност на случајниот вектор (X,Y) е дадена со
$$f(x,y) = \begin{cases} [(1+ax)(1+ay) - a]xe^{-x-y-axy}, & x > 0,\ y > 0, \\ 0, & \text{во останатите случаи.} \end{cases}$$
каде $0 < a < 1$. Пресметајте ги густините на веројатност на случајните променливи X и Y. Дали случајните променливи X и Y се независни?

3. Густината на непрекинатата дводимензионална случајна променлива (X,Y) е дадена со
$$f(x,y) = \begin{cases} axye^{-(x^2+y^2)}, & x \geq 0,\ y \geq 0, \\ 0, & \text{во останатите случаи,} \end{cases}$$
Најдете ги маргиналните густини на веројатност на случајните променливи X и Y. Дали случајните променливи X и Y се независни?

4. Дадена е функцијата $f(x,y,z) = \frac{1}{\pi^2} \frac{1}{(1+x^2+y^2+z^2)^2}$.
   a) Докажете дека f е густина на веројатност на некој случаен вектор (X,Y,Z).
   b) Пресметајте ги густините на веројатност на случајните променливи X, Y и Z.
   c) Дали случајните променливи X, Y и Z се независни?

5. Густината на веројатност на непрекинатата дводимензионална случајна променлива (X,Y) е дадена со
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{8}(6-x-y), & 0 \leq x \leq 2,\ 2 \leq y \leq 4, \\ 0, & \text{во останатите случаи.} \end{cases}$$
   a) Најдете ги маргиналните распределби на X и Y.
   b) Пресметајте ги математичките очекувања, дисперзиите и средноквадратните отстапувања на случајните променливи X и Y.
   c) Дали случајните променливи X и Y се независни?

6. Нека p_1 и p_2 се густините на распределба, а F_1 и F_2 соодветните функции на распределба на случајните променливи X и Y, $a \in (-1,1)$ и
$$p(x,y) = p_1(x)p_2(y)(1 + a(2F_1(x) - 1)((2F_2(y) - 1)).$$

Докажете дека маргиналните распределби на оваа дводимензионална распределба се определени со густините p_1 и p_2.

7. Нека $X_{mn}; m=1,2,...,p; n=1,2,...,n_m$ се независни случајни променливи и $g_m:\mathbf{R}^{n_m}\to\mathbf{R}$, $m=1,2,...,p$ се Борелови функции. Ако $Y_m=g_m(X_{m1},...,X_{mn_m})$, $m=1,2,...,p$, тогаш случајните променливи $Y_1,Y_2,...,Y_p$ се независни. Докажете!

8. Случајниот вектор (X,Y,Z) има густина
$$f_{X,Y,Z}(x,y,z)=\begin{cases}\frac{1}{4}(xy+yz+zx+x+x+z+\frac{7}{4}), & 0<x,y,z<1,\\ 0, & \text{во останатите случаи.}\end{cases}$$
Докажете дека случајните променливи се по парови независни, но не се независни во целина.

9. Ненегативните случајни променливи $X_i, i=1,2,...,n$ се независни и еднакво распределени и $a>0$ е константа. Докажете, дека за секој $k=1,2,...,n$ важи $E(\frac{X_k+a}{na+\sum_{i=1}^{n}X_i})=\frac{1}{n}$.

10. Нека $X_i, i=1,2,...,n$ се независни случајни променливи такви да $E(X_i)=a_i$ и $D(X_i)=b_i^2$, $i=1,2,...,n$. Докажете, дека $D(\prod_{i=1}^{n}X_i)=\prod_{i=1}^{n}(a_i^2+b_i^2)-\prod_{i=1}^{n}a_i^2$.

11. Случајните променливи $X,X_i, i=1,2,...,n$ се независни и еднакво распределени со математичко очекување $E(X_i)=a$ и дисперзија $D(X_i)=\sigma^2\neq 0$. Дефинираме случајна променлива $S_n=\frac{X_1+X_2+...+X_n}{n}$. Пресметајте го количникот $\frac{E(\sum_{i=1}^{n}(X_i-S_n)^2)}{D(X)}$.

13. КОВАРИЈАНСА И КОЕФИЦИЕНТ НА КОРЕЛАЦИЈА

Во претходната точка ја разгледавме независноста на случајни променливи и докажавме низа свовства на истите. Притоа, за случајните променливи кои не се независни рековме дека се зависни. Во оваа точка ќе дефинираме два коефициенти кои често пати се земаат за мерка на зависноста на случајните променлви. Тоа се коваријацијата и коефициентот на корелација, кои се дефинираат идентично како и кај дискретните простори на веројатности.

Дефиниција 29. Нека X и Y се случајни променливи на просторот на веројатности $(\Omega,\boldsymbol{A},P)$ со конечни и позитивни дисперзии. *Коваријанса* на случајните променливи X и Y го нарекуваме бројот
$$\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)\bullet E(Y). \qquad (1)$$
Коефициент на корелација на случајните променливи X и Y го нарекуваме бројот
$$\rho(X,Y)=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}. \qquad (2)$$

За случајните променливи X и Y ќе велиме дека се *некорелирани* ако $\operatorname{cov}(X,Y)=0$, т.е. $\rho(X,Y)=0$.

Во следната теорема се дадени својствата на коваријансата и коефициентот на корелација на случајни променливи.

Теорема 37. а) Ако случајните променливи X и Y се независни, тогаш $\operatorname{cov}(X,Y)=0$ и $\rho(X,Y)=0$, т.е. тие се некорелирани.

б) Ако X и Y се случајни променливи и $a,b\in\mathbf{R}$, тогаш

$$\operatorname{cov}(X+a,Y+b)=\operatorname{cov}(X,Y) \text{ и } \rho(X+a,Y+b)=\rho(X,Y).$$

в) Нека X и Y се случајни променливи. За коефициентот на корелација на овие случајни променливи важи неравенството $|\rho(X,Y)|\le 1$. Притоа равенството $|\rho(X,Y)|=1$ важи ако и само ако зависноста на случајните променливи X и Y е линеарна.

г) За секои случајни променливи $X_1,X_2,...,X_n$ важи

$$D(X_1+X_2+...+X_n)=\sum_{i=1}^{n}D(X_i)+2\sum_{1\le i<j\le n}\operatorname{cov}(X_i,X_j).$$

д) Коваријансата на случајните променливи

$$Z=a_1X_1+a_2X_2+...+a_nX_n \text{ и } \quad (3)$$

$$V=b_1X_1+b_2X_2+...+b_nX_n, \quad (4)$$

каде $X_1,X_2,...,X_n$ се независни и еднакво распределени случајни променливи со ненулта дисперзија е еднаква на нула ако и само ако

$$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i=0. \quad (5)$$

Доказ. Доказите се идентичен на доказите на теоремите II 26, 27, 28, 29 и 30. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ♦

Пример 27. а) На делот од кружницата $x^2+y^2=1$, кој лежи во првиот квадрант, случајно избираме точка. Ќе го ресметаме го коефициентот на корелација за Декартовите координати на избраната точка.

Аголот Φ, кој го определува точката на лакот, има рамномерна распределба на интервалот $[0,\frac{\pi}{2}]$, (зошто?). Декартовите кординати на точката се $X=\cos\Phi$ и $Y=\sin\Phi$. Со елементарни пресметувања наоѓаме

$$E(X)=E(Y)=\tfrac{2}{\pi},\ D(X)=D(Y)=\tfrac{1}{2}-\tfrac{4}{\pi^2} \text{ и } E(XY)=\tfrac{1}{\pi},$$

па затоа

$$\rho(X,Y)=\frac{E(XY)-E(X)E(Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}=\frac{2\pi-8}{\pi^2-8}.$$

б) Да разгледаме Борелово множество $B \in \boldsymbol{B}^n$ такво, што

$$m(B) = \int\limits_B \dots \int dx_1 \dots dx_n > 0 .$$

$n-$димензионалната случајна променлива $X = (X_1, \dots, X_n)$ има *рамномерна распределба* над B ако

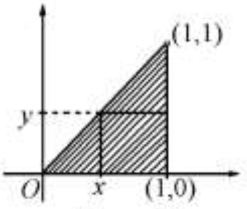
$$P\{X \in B_1\} = \frac{m(B \cap B_1)}{m(B)}, \text{ за секој } B_1 \in \boldsymbol{B}^n .$$

Јасно, оваа случајна променлива е апсолутно-непрекината и има густина

$$p(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} \frac{1}{m(B)}, & (x_1, \dots, x_n) \in B \\ 0, & (x_1, \dots, x_n) \notin B. \end{cases}$$

Нека дводимензионалната случајна променлива (X, Y) има рамномерна распределба на триаголникот S со темиња: $(0,0)$, $(1,0)$ и $(1,1)$, (цртеж 20), т.е. нека нејзината густина е:

$$f(x, y) = \begin{cases} 2, & (x, y) \in S, \\ 0, & (x, y) \notin S. \end{cases}$$



Цртеж 20

Тогаш маргиналната густина на случајната променлива X е:

$$p(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} 2x, & x \in [0,1], \\ 0, & x \notin [0,1], \end{cases}$$

и аналогно маргиналната густина на случајната променлива Y е:

$$q(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} 2(1-y), & y \in [0,1], \\ 0, & y \notin [0,1], \end{cases}$$

Понатаму,

$$E(X) = \int\limits_0^1 2x^2 dx = \tfrac{2}{3}, \qquad E(Y) = \int\limits_0^1 2y(1-y) dy = \tfrac{1}{3},$$

$$E(X^2) = \int\limits_0^1 2x^3 dx = \tfrac{1}{2}, \qquad E(Y^2) = \int\limits_0^1 2y^2(1-y) dy = \tfrac{1}{6},$$

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \tfrac{1}{18}, \qquad D(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = \tfrac{1}{18},$$

$$E(XY) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xyf(x, y) dxdy = 2\int\limits_0^1 xdx \int\limits_0^x ydy = \int\limits_0^1 x^3 dx = \tfrac{1}{4},$$

па затоа

$$\operatorname{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X) \bullet E(Y) = \tfrac{1}{4} - \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{36} \text{ и}$$

$$\rho(X, Y) = \frac{\operatorname{cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}} = \frac{\frac{1}{36}}{\sqrt{\frac{1}{18}}\sqrt{\frac{1}{18}}} = \tfrac{1}{2}. \ \blacklozenge$$

Забелешка 40. Според теорема 37 а) ако случајните променливи X и Y се независни, тогаш тие се некорелирани. Меѓутоа, обратното тврдење не важи, што може да се види од следниов пример.

Пример 28. Да ја разгледаме функцијата

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{e^{-\sqrt{x^2+y^2}}}{2\pi\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases} \tag{6}$$

За оваа функција важи $f(x,y)\geq 0,$ за секои $x,y\in\mathbf{R}$. Понатаму,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=\int\limits_{0}^{+\infty}d\rho\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{e^{-\rho}}{2\pi\rho}\rho d\varphi=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-\rho}d\rho\int\limits_{0}^{2\pi}d\varphi=1,$$

што значи дека функцијата (6) е густина на веројатност на некоја дводимензионална случајна променлива (X,Y).

За маргиналните густини на случајните променливи X и Y добиваме

$$p(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-\sqrt{x^2+y^2}}}{2\pi\sqrt{x^2+y^2}}dy \text{ и } q(y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-\sqrt{x^2+y^2}}}{2\pi\sqrt{x^2+y^2}}dx,$$

од што следува дека

$$p(x)=q(x), \text{ за секој } x\in\mathbf{R}. \tag{7}$$

Понатаму, математичко очекување на случајната променлива X е:

$$E(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}xp(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-\sqrt{x^2+y^2}}}{2\pi\sqrt{x^2+y^2}}dy)dx=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dy\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{xe^{-\sqrt{x^2+y^2}}}{2\pi\sqrt{x^2+y^2}}dx=0,$$

бидејќи во последниот интеграл подинтегралната функција е непарна по x, а интеграл на симетричниот интервал $(-\infty,+\infty)$ од непарна функција е еднаков на нула. Сега, од причини на симетрија, заради (7) имаме $E(Y)=0$. Понатаму, од потполно исти причини добиваме

$$E(XY)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)dxdy=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}xy\frac{e^{-\sqrt{x^2+y^2}}}{2\pi\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}xdx\int\limits_{-\infty}^{+\infty}y\frac{e^{-\sqrt{x^2+y^2}}}{2\pi\sqrt{x^2+y^2}}dy=0,$$

па затоа $\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)\cdot E(Y)=0$, што значи дека $\rho(X,Y)=0$, односно случајните променливи X и Y се некорелирани.

Нека сега претпоставиме дека X и Y се независни, т.е. дека важи

$$f(x,y)=p(x)q(y), \text{ за секои } x,y\in\mathbf{R}. \tag{8}$$

Ако во последното равенство ставиме $y=x$ и го земеме предвид равенството (7) добиваме дека за секој $x\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$ важи

$$\frac{1}{2\pi|x|\sqrt{2}}e^{-|x|\sqrt{2}}=f(x,x)=p(x)q(x)=[p(x)]^2,$$

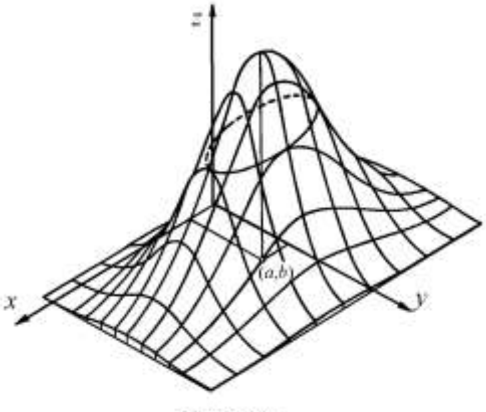
односно дека за секој $x\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$ важи

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{|x|}\sqrt[4]{2}}e^{-\frac{|x|}{\sqrt{2}}} .$$

Но, последното значи дека за секои $x, y \in \mathbf{R}$, $x \neq y$ имаме

$$f(x,y)=\frac{e^{-\sqrt{x^2+y^2}}}{2\pi\sqrt{x^2+y^2}} \neq \frac{1}{2\pi\sqrt{2}\sqrt{|x|}\sqrt{|y|}}e^{-\frac{|x|+|y|}{\sqrt{2}}} = p(x)q(y) .$$

Последното равенство противречи на равенството (8), што значи дека разгледуваните случајни променливи X и Y, за кои $\rho(X,Y)=0$, се зависни. ♦



Цртеж 21

Во претходниот пример покажавме дека во општ случај од $\rho(X,Y)=0$ не следува дека случајните променливи X и Y се независни. Меѓутоа, последното не важи за таканаречената дводимензионална нормална распределба (цртеж 21), која ќе ја разгледаме во следниов пример.

Пример 29. Нека $a,b \in \mathbf{R}$, $\sigma_1,\sigma_2 \in (0,+\infty)$ и $\rho \in (-1,1)$. Да ја разгледаме функцијата

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[(\frac{x-a}{\sigma_1})^2-2\rho\frac{x-a}{\sigma_1}\frac{y-b}{\sigma_2}+(\frac{y-b}{\sigma_2})^2]} , \ x,y \in \mathbf{R} . \qquad (9)$$

Ќе докажеме дека функцијата (9) е густина на веројатност. Бидејќи $f(x,y) \geq 0$, за секои $x, y \in \mathbf{R}$, доволно е да докажеме дека $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=1$. Имаме

$$I=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-a}{\sigma_1})^2}dx\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(\frac{y-b}{\sigma_2}-\rho\frac{x-a}{\sigma_1})^2}dy ,$$

и ако ја воведеме смената

$$\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}(\frac{y-b}{\sigma_2}-\rho\frac{x-a}{\sigma_1})=t , \ \frac{dy}{\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}=dt , \qquad (10)$$

добиваме

$$I=\frac{1}{2\pi\sigma_1}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-a}{\sigma_1})^2}dx\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2}dt=\frac{1}{2\pi}\sqrt{2\pi}^2=1 ,$$

што значи дека функцијата (9) е густина на дводимензионална апсолутно-непрекината случајна променлива (X,Y) за која велиме дека има *дводимензионална нормална* распределба $\mathrm{N}(a,b;\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$. На пример, ако

$$f(x,y)=\frac{4}{\pi\sqrt{69}}e^{-\frac{24}{23}[\frac{4}{9}x^2+y^2-\frac{5\sqrt{3}}{9}(xy-x)-2y+1]}, \quad x,y \in \mathbf{R} , \qquad (11)$$

тогаш

$$f(x,y)=\frac{4}{\pi\sqrt{69}}e^{-\frac{24}{23}[\frac{4}{9}x^2+y^2-\frac{5\sqrt{3}}{9}(xy-x)-2y+1]}=\frac{1}{2\pi\frac{3}{2}\cdot 1\sqrt{1-\frac{25}{48}}}e^{-\frac{1}{2(1-\frac{25}{48})}[(\frac{2x}{3})^2-2\sqrt{\frac{25}{48}}\frac{2}{3}x(y-1)+(y-1)^2]},$$

што значи дека функцијата (11) е густина на случаен вектор (X,Y) со $\mathrm{N}(0,1;\frac{9}{4},1,\sqrt{\frac{25}{48}})$ распределба.

Ќе ги определиме маргиналните густини на случајниот вектор (X,Y) со $\mathrm{N}(a,b;\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$ распределба. Ако ја искористиме смената (10), за маргиналната густина на X добиваме:

$$\begin{aligned}
p(x)&=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[(\frac{x-a}{\sigma_1})^2-2\rho\frac{x-a}{\sigma_1}\cdot\frac{y-b}{\sigma_2}+(\frac{y-b}{\sigma_2})^2]}dy\\
&=\frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-a}{\sigma_1})^2}\cdot\frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[\frac{y-b}{\sigma_2}-\rho\frac{x-a}{\sigma_1}]^2}dy\\
&=\frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-a}{\sigma_1})^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2}t^2}dt=\frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-a}{\sigma_1})^2},
\end{aligned}$$

за $x\in\mathbf{R}$, т.е. $p(x)=\frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-a}{\sigma_1})^2}$, $x\in\mathbf{R}$. Слично, за маргиналната густина на Y имаме $q(y)=\frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\frac{y-b}{\sigma_2})^2}$, $x\in\mathbf{R}$. Според тоа, маргиналните распределби на случаните променливи X и Y се $\mathrm{N}(a;\sigma_1^2)$ и $\mathrm{N}(b;\sigma_2^2)$, соодветно, па затоа $E(X)=a$, $E(Y)=b$, $D(X)=\sigma_1^2$ и $D(Y)=\sigma_2^2$. Од друга страна

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)dxdy=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}xe^{-\frac{1}{2}(\frac{x-a}{\sigma_1})^2}dx\int_{-\infty}^{+\infty}ye^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(\frac{y-b}{\sigma_2}-\rho\frac{x-a}{\sigma_1})^2}dy.$$

Во последниот интеграл ја воведуваме смената

$$\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}(\frac{y-b}{\sigma_2}-\rho\frac{x-a}{\sigma_1})=t\,,\ y=t\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}+\rho\sigma_2\frac{x-a}{\sigma_1}+b\,,\ \frac{dy}{\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}=dt\,,$$

и добиваме

$$\begin{aligned}
E(XY)&=\frac{1}{2\pi\sigma_1}\int_{-\infty}^{+\infty}xe^{-\frac{1}{2}(\frac{x-a}{\sigma_1})^2}dx\int_{-\infty}^{+\infty}(t\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}+\rho\sigma_2\frac{x-a}{\sigma_1}+b)e^{-\frac{1}{2}t^2}dt\\
&=\frac{1}{2\pi\sigma_1}\int_{-\infty}^{+\infty}xe^{-\frac{1}{2}(\frac{x-a}{\sigma_1})^2}dx[\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}\int_{-\infty}^{+\infty}te^{-\frac{1}{2}t^2}dt+(\rho\sigma_2\frac{x-a}{\sigma_1}+b)\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2}t^2}dt]\\
&=\frac{1}{2\pi\sigma_1}\int_{-\infty}^{+\infty}xe^{-\frac{1}{2}(\frac{x-a}{\sigma_1})^2}dx[\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}\cdot 0+(\rho\sigma_2\frac{x-a}{\sigma_1}+b)\sqrt{2\pi}]\\
&=\frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}x(\rho\sigma_2\frac{x-a}{\sigma_1}+b)e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-a}{\sigma_1})^2}dx.
\end{aligned}$$

Понатаму, ако прво ја воведеме смената $\frac{x-a}{\sigma_1}=z,\ x=z\sigma_1+a,\ \frac{dx}{\sigma_1}=dz,$ а потоа смената $\frac{z^2}{2}=u$, $dz=u^{-\frac{1}{2}}du$, добиваме

$$\begin{aligned}
E(XY) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(z\sigma_1+a)(\rho\sigma_2 z+b)e^{-\frac{1}{2}z^2}dz \\
&= \frac{\rho\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}z^2e^{-\frac{1}{2}z^2}dz+\frac{ab}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2}z^2}dz+\frac{b\sigma_1+a\rho\sigma_2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}ze^{-\frac{1}{2}z^2}dz \\
&= \frac{\rho\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}z^2e^{-\frac{1}{2}z^2}dz+ab\cdot 1+\frac{b\sigma_1+a\rho\sigma_2}{\sqrt{2\pi}}\cdot 0 \\
&= \frac{\rho\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}z^2e^{-\frac{1}{2}z^2}dz+ab=\frac{2\rho\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty}z^2e^{-\frac{1}{2}z^2}dz+ab \\
&= \frac{2\rho\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{+\infty}u^{\frac{1}{2}}e^{-u}du+ab=\frac{2\rho\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{+\infty}u^{\frac{3}{2}-1}e^{-u}du+ab \\
&= \frac{2\rho\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{\pi}}\Gamma(\tfrac{3}{2})+ab=\frac{2\rho\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{2}\Gamma(\tfrac{1}{2})+ab \\
&= \frac{\rho\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\pi}+ab=\rho\sigma_1\sigma_2+ab.
\end{aligned}$$

Конечно, за коваријансата и коефициентот на корелација на случајните променливи X и Y наоѓаме

$$\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)\bullet E(Y)=\rho\sigma_1\sigma_2+ab-ab=\rho\sigma_1\sigma_2 \text{ и } \rho(X,Y)=\frac{\rho\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2}\sqrt{\sigma_2^2}}=\rho .$$

Забележуваме дека за $\rho=0$ функцијата (9) го има видот $f(x,y)=p(x)q(y)$, за секои $(x,y)\in\mathbf{R}^2$. Од претходно изнесеното заклучуваме дека важи следново тврдење: *Нормално распоредените случајни променливи X и Y се независни ако и само ако се некорелирани.* ♦

ЗАДАЧИ

1. Нека случајната променлива X е рамномерно распределена на интервалот $[0,1]$ и нека $Y=\sin 2\pi X,\ Z=\cos 2\pi X$. Докажете, дека случајните променливи Y и Z се некорелирани.
2. Нека случајниот вектор (X,Y) има рамномерна распределба во областа
$$D=\{(x,y)\vdots |x|+|y|\le a\}.$$
   a) Најдете ги густините на распределба на случајните променливи X и Y.
   b) Дали случајните променливи X и Y се независни? А, дали се некорелирани?
3. Нека случајната променлива (X,Y) е рамномерно распределена на правоаголникот
$$0\le x\le a,\ 0\le y\le b.$$
   Докажете, дека дека случајните променливи X и Y се независни.
4. Нека случајната променлива (X,Y) е рамномерно распределена на кругот $x^2+y^2\le R^2$.
   a) Докажете дека случајните променливи X и Y се зависни.

b) Пресметајте го коефициентот на корелација на случајните променливи X и Y .

5. Нека $a,b \in \mathbf{R}$ и случајната променлива (X,Y) е рамномерно распределена на множеството $D=\{(x,y)\in \mathbf{R}^2,\ b^2x^2+a^2y^2 \le a^2b^2\}$.
   a) Докажете дека случајните променливи X и Y се зависни.
   b) Пресметајте го коефициентот на корелација на случајните променливи X и Y .
6. Пресметајте ги коефициентите на корелација на случајните променлви X и Y од задачите 1), 2), 3) и 5) во претходната точка.
7. Случајниот вектор (X,Y) е рамномерно распределен на множеството
   a) $D=\{(x,y)\in \mathbf{R}^2, 1\le \max\{|x|,|y|\}\le 2\}$,
   b) $D=\{(x,y)\in \mathbf{R}^2, 1\le \min\{|x|,|y|\},\ \max\{|x|,|y|\}\le 2\}$

   Дали случајните променливи X и Y се независни? А, дали се некорелирани?
8. Случајниот вектор (X,Y) има густина на веројатност
   $$f(x,y)=\begin{cases} c, & 10\le x+y\le 20, 0\le x, 0\le y, \\ 0, & \text{во останатите случаи.}\end{cases}$$
   a) Дали случајните променливи X и Y се независни?
   b) Дали случајните променливи X и Y се некорелирани?
   c) Пресметајте го математичкото очекување на случајната променлива $Z=5^{\frac{Y-X}{2}}+50$,
9. Случајниот вектор (X,Y,Z) има густина на веројатност
   $$f(x,y,z)=\frac{\sqrt{6\pi}}{4\pi^2}e^{-\frac{x^2+2y^2+3z^2-2xy-2x+2y+1}{2}},\ x,y,z\in \mathbf{R} .$$
   пресметајте $D(X+Y+Z)$.
10. Нека X и Y се независни еднакво распределени случајни променливи со конечна дисперзија. Докажете дека случајните променливи $X+Y$ и $X-Y$ се некорелирани.
11. Нека X е случајна променлива со симетрична распределба и конечна дисперзија. Најдете го коефициентот на корелација на случајните променливи X и $|X|$.
12. Ненегативните случајни променливи $X_i, i=1,2,...,n$ се еднакво распределени. Нека
   $$Y_i=\frac{X_i}{X_1+X_2+...+X_n}, i=1,2,...,n .$$
   Пресметајте
   a) $\rho(Y_i,Y_k), 1\le i<k\le n$,
   b) $\rho(X_1+X_2+...+X_i, X_1+X_2+...+X_k), 1\le i<k\le n$.

14. МАТРИЦА НА КОВАРИЈАНСИ НА СЛУЧАЕН ВЕКТОР

Во оваа точка ќе ја разгледаме таканаречените матрици на коваријанси на случајни вектори. За таа цел на почетокот ќе наведеме неколку дефиниции и без доказ ќе презентираме две тврдења од линеарната алгебра, кои ни се потребни за натамошните разгледувања.

Нека $A=[a_{ik}]_{m\times n}$ и $B=[b_{ik}]_{n\times n}$ се произволни матрици. За матрицата B ќе велиме дека е *симетрична* ако $b_{ik}=b_{ki}$, за секои $i,k\in\{1,2,...,n\}$. За матрицата B ќе велиме дека е *дијагонална* ако $b_{ik}=0$, за $i\neq k$, а елементите $b_{ii}, i=1,2,...,n$ ги нарекуваме *дијагонални елементи* на матрицата B. Дијагоналната матрица B за која $b_{ii}=1, i=1,2,...,n$ ја нарекуваме *единечна матрица*. Матрицата $A^T=[a_{ik}^*]_{n\times m}$, таква што $a_{ik}^*=a_{ki}$, за секои i и k ја нарекуваме *транспонирана* на матрицата A. За матрицата A ќе велиме дека е *ортогонална* ако $AA^T=E$, каде E е единичната матрица. За матрицата B ќе велиме дека е *ненегативно определена* ако за секој вектор $(x_1,x_2,...,x_n)\in \mathbf{R}^n$ е исполнето неравенството

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{ik}x_i x_k \geq 0 .$$

За матрицата B ќе велиме дека е *позитивно определена* ако за секој ненулти вектор $(x_1,x_2,...,x_n)\in \mathbf{R}^n$ е исполнето неравенството

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{ik}x_i x_k > 0 .$$

Лема А. Матрицата $B=[b_{kl}]_{n\times n}$ е симетрична и ненегативно определена ако и само ако постои матрица $A=[a_{ij}]_{n\times p}$, $1\leq p\leq n$ таква, што $B=AA^T$. ♦

Лема Б. За секоја симетрична и ненегативно определена матрица B постои ортогонална матрица M таква, што важи $M^T BM=D$, каде D е дијагонална матрица со ненегативни елементи на главната дијагонала. ♦

Нека $X=(X_1,X_2,...,X_n)$ е случаен вектор на $(\Omega,\boldsymbol{A},P)$. Тогаш *математичкото очекување* на X се дефинира како $E(X)=(E(X_1),E(X_2),...,E(X_n))$, при претпоставка дека $|E(X_i)|<+\infty$, за $i=1,2,...,n$. Така, на пример, математичкото очекување на дводимензионалната рамномерна распределба (X,Y) од пример 28 б) е $(\frac{2}{3},\frac{1}{3})$, а ако $Z=(X,Y)$ има дводимензионална нормална распределба $\mathrm{N}(a,b;\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$, тогаш од пример 29 следува дека $E(Z)=(a,b)$. Понатаму, ако $E(X_i^2)<+\infty$, $i=1,2,...,n$, тогаш од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува дека за секои $i,k=1,2,...,n$ постојат $\mathrm{cov}(X_i,X_k)$, па затоа е коректна следнава дефинција.

Дефиниција 30. Нека $X=(X_1,X_2,...,X_n)$ е случаен векторна просторот веројатности на $(\Omega,\boldsymbol{A},P)$ таков да за секој $k\in\{1,2,...,n\}$ важи $E(X_k^2)<+\infty$. Матрицата $B=[b_{ik}]_{n\times n}$, каде $b_{ik}=\mathrm{cov}(X_i,X_k)$, за $i,k\in\{1,2,...,n\}$ ја нарекуваме *матрица на коваријанси* на случајниот вектор X.

Теорема 38. Ако $B=[b_{ik}]_{n\times n}$ е матрица на коваријанси на некој случаен вектор $(X_1,X_2,...,X_n)$, тогаш B е симетрична и ненегативно определена.

Доказ. Нека $B=[b_{ik}]_{n\times n}$ е матрица на коваријанси на некој случаен вектор $(X_1, X_2,..., X_n)$. Јасно, B е симетрична матрица. Нека $(a_1, a_2,..., a_n) \in \mathbf{R}^n$. Тогаш

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_ia_k = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_ia_k \operatorname{cov}(X_k, X_i) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_ia_kE[(X_k - E(X_k)(X_i - E(X_i)]$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} E[a_k(X_k - E(X_k)a_i(X_i - E(X_i)] = E[\sum_{k=1}^{n} a_k(X_k - E(X_k)]^2$$

$$= E[\sum_{k=1}^{n} a_kX_k - E(\sum_{k=1}^{n} a_kX_k)]^2 = D(\sum_{k=1}^{n} a_kX_k) \geq 0,$$

што значи дека матрицата B е ненегативно определена. ♦

Ако матрицата на коваријанси $B=[b_{ik}]_{n\times n}$ на случајниот вектор $(X_1, X_2,..., X_n)$ не е позитивно определена, тогаш постои ненулти вектор $(a_1, a_2,..., a_n) \in \mathbf{R}^n$ таков што

$$0 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_ia_k = D(\sum_{k=1}^{n} a_kX_k).$$

Но, тоа значи дека постои константа C таква да

$$P\{\sum_{k=1}^{n} a_kX_k = C\} = 1,$$

т.е. случајниот вектор $(X_1, X_2,..., X_n)$ с.с. лежи во хиперрамнината

$$L = \{x = (x_1, x_2,..., x_n) \mid \sum_{k=1}^{n} a_kx_k = C\}$$

во $\mathbf{R}^n$. Очигледно, важи и обратното, т.е. ако $(X_1, X_2,..., X_n)$ с.с. лежи во хиперрамнина во $\mathbf{R}^n$, тогаш неговата матрица на коваријанси не е позитивно дефинитна.

Дефиниција 30. Нека $X = (X_1, X_2,..., X_n)$ е случаен вектор и $A=[a_{ik}]_{m\times n}$ е реална матрица. Тогаш случајниот векторот $Y=(Y_1, Y_2,..., Y_m)$, каде $Y_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}X_k$, $i=1,2,...,m$ го нарекуваме *линеарна трансформација на случајниот вектор* X. Притоа пишуваме $Y = XA^T$.

Во следната лема ќе докажеме две тврдења во врска со линеарната трансформација на случајниот вектор X.

Лема 45. Нека $X = (X_1, X_2,..., X_n)$ е случаен вектор, $A=[a_{ik}]_{m\times n}$ е реална матрица и $Y = XA^T$.

i) Ако $E(X) = b = (b_1, b_2,..., b_n)$, тогаш $E(Y) = bA^T$.

ii) Ако $B=[b_{ik}]_{n\times n}$ е матрицата на коваријанси на случајниот вектор X, тогаш матрицата на коваријанси на случајниот вектор Y е ABA^T.

Доказ. *i*)Имаме

$$E(Y_i)=E(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}X_k)=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}E(X_k)=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_k,\text{ за } i=1,2,...,m,$$

па затоа важи $E(Y)=bA^T$.

ii) Нека $B=[b_{ik}]_{n\times n}$ е матрицата на коваријанси на слуачјниот вектор X. Тогаш од *i*) следува

$$E[(Y_i-E(Y_i))(Y_k-E(Y_k))]=E[(\sum_{p=1}^{n}a_{ip}X_p-\sum_{p=1}^{n}a_{ip}b_p)(\sum_{j=1}^{n}a_{kj}X_j-\sum_{j=1}^{n}a_{kj}b_j)]$$

$$=E[\sum_{j=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}a_{ip}a_{kj}(X_p-b_p)(X_j-b_j)]=\sum_{j=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}a_{ip}b_{pj}a_{kj},$$

за $i,k=1,2,...,n$, па затоа матрицата на коваријанси на случајниот вектор Y е ABA^T. ♦

Во теорема 38 докажевме дека секоја матрица на коваријанси е симетрична и ненегативно определена. Во следната теорема ќе докажеме дека важи и обратното тврдење. За таа цел најпрво да забележиме дека, ако $A=[A_{ik}]_{m\times n}$ е *случајна матрица*, т.е. матрица чии елементи $A_{ik}, i=1,2,...,m, k=1,2,...,n$ се случајни променливи, тогаш матрицата $E(A)=[a_{ik}]_{m\times n}$, каде $a_{ik}=E(A_{ik}), i=1,2,...,m, k=1,2,...,n$ ја нарекуваме *математичко очекување на случајната матрица* A. Притоа, лесно се проверува дека за секој случаен вектор $Z=(Z_1,Z_2,...,Z_n)$ неговата матрицата на коваријанси е дадена со $E[(Z-E(Z))^T(Z-E(Z)]$.

Теорема 39. Ако $B=[b_{ik}]_{n\times n}$ е симетрична и ненегативно определена матрица, тогаш таа е матрица на коваријанси на некој случаен вектор $X=(X_1,X_2,...,X_n)$.

Доказ. Нека $B=[b_{ik}]_{n\times n}$ е симетрична и ненегативно определена матрица. Од лема Б следува дека постои ортогонална матрица M таква, што $M^TBM=D$, каде D е дијагонална матрица со ненегативни елементи $d_1,d_2,...,d_n$ на главната дијагонала. Тогаш,

$$B=MDM^T=(MD_1)(D_1^TM^T)=(MD_1)(MD_1)^T,$$

каде D_1 е дијагонална матрица со елементи $\sqrt{d_1},\sqrt{d_2},...,\sqrt{d_n}$ на главната дијагонала. Да означиме $A=MD_1$. Тогаш важи равенството $B=AA^T$.

Нека $Y_1,Y_2,...,Y_n$ се независни случајни променливи со N(0,1) распределба и

$$Y=(Y_1,Y_2,...,Y_n),\ X^T=(X_1,X_2,...,X_n)^T=AY^T.$$

Тогаш, бидејќи

$$E(Y_iY_k)=\begin{cases}E(Y_i^2), & i=k,\\ 0, & i\neq k,\end{cases}=\begin{cases}1, & i=k,\\ 0, & i\neq k,\end{cases}$$

добиваме

$$E(Y^TY)=E([Y_iY_k]_{n\times n})=[E(Y_iY_k)]_{n\times n}=E\ ,$$

и како $E(X_i)=0, i=1,2,...,n$, т.е. $E(X)=0$ наоѓаме

$$\begin{aligned}E[(X-E(X))^T(X-E(X)]&=E(X^TX)=E[(AY^T)(YA^T)]=A\cdot E(Y^TY)\cdot A^T\\ &=AEA^T=AA^T=B,\end{aligned}$$

што значи B е матрица на коваријанси на случајниот вектор $X=(X_1,X_2,...,X_n)$. ♦

ЗАДАЧИ

1. Случајниот вектор (X,Y) има густина на веројатност

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sqrt{3}}e^{-\frac{x^2-2xy+4y^2-2x+2y+1}{6}},\quad x,y\in\mathbf{R}\,.$$

Најдете ја матрицата на коваријанси на случајниот вектор (U,V): $U=X+Y, V=X-Y$.

2. Која од следниве матрици може да биде матрица на коваријанси на случаен вектор (X,Y,Z) :

$$\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix},\qquad\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix},\qquad\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}.$$

3. Случајната променлива (X,Y,Z) има матрица на коваријанси

$$\begin{bmatrix}1&2&1\\2&5&0\\1&0&9\end{bmatrix}.$$

Изберете го параметарот t така да случајните проемнливи

$$U=X+Y+Z \text{ и } V=2X-Y+tZ$$

се некорелирани.

15. БОРЕЛОВИ ФУНКЦИИ ОД СЛУЧАЈНИ ПРОМЕНЛИВИ II

Нека X е случајна променлива на просторот $(\Omega,\boldsymbol{A},P)$ и $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ е Борелова функција. Во теорема 7 а) докажавме дека $Y=g(X)$ е случајна променлива на просторот $(\Omega,\boldsymbol{A},P)$. Да ја определиме функцијата на распределба F_Y на Y со помош на функцијата на распределба F_X на X и функцијата g , (види пример 18). За секој $x\in\mathbf{R}$ имаме

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= P\{Y \le x\} = P\{g(X) \le x\} = P\{X \in g^{-1}((-\infty, x])\} \\ &= \int\limits_{g^{-1}((-\infty,x])} dF_X(y) = \int\limits_{\{y|\, g(y)\le x\}} dF_X(y). \end{aligned} \tag{1}$$

Ако X е дискретна случајна променлива со закон на распределба

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \cdots \end{pmatrix} \tag{2}$$

тогаш формулата (1) го добива видот

$$F_Y(x) = \sum_{\{n|\, x_n \in g^{-1}((-\infty,x])\}} p_n = \sum_{g(x_n)\le x} p_n, \quad x \in \mathbf{R}. \tag{3}$$

Јасно, во случајов $Y = g(X)$ е дискретна случајна променлива и ако ставиме

$$A = \{g(x_i) \,|\, i = 1,2,3,...\} = \{y_1, y_2, y_3, ...\},$$

тогаш, слично како и во случај на дискретен простор на веројатности, законот на распределба на случајната променлива Y е даден со

$$P\{Y = y_i\} = \sum_k p_{i_k}, \quad i-1,2,3,... \tag{4}$$

при што во (4) сумираме по сите k за кои $g(x_{i_k}) = y_i$.

Ако X е апсолутно-непрекината случајна променлива со густина p_X, тогаш формулата (1) го добива видот

$$F_Y(x) = \int\limits_{g^{-1}((-\infty,x])} p_X(y)dl(y) = \int\limits_{\{y|\, g(y)\le x\}} p_X(y)dl(y), \quad x \in \mathbf{R}. \tag{5}$$

Пример 30. а) Нека $Y = aX + b$, $a > 0$. Тогаш

$$F_Y(x) = P\{X \le \tfrac{x-b}{a}\} = F_X(\tfrac{x-b}{a}), \;\; x \in \mathbf{R}.$$

б) Нека $Y = X^2$. Тогаш $F_Y(x) = 0$, за секој $x < 0$. Ако $x \ge 0$, тогаш

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= P\{X^2 \le x\} = P\{-\sqrt{x} \le X \le \sqrt{x}\} = P\{X \le \sqrt{x}\} - P\{X < -\sqrt{x}\} \\ &= P\{X \le \sqrt{x}\} - P\{X \le -\sqrt{x}\} + P\{X = -\sqrt{x}\} = F_X(\sqrt{x}) - F_X(-\sqrt{x}) + P\{X = -\sqrt{x}\}. \;\blacklozenge \end{aligned}$$

Сега, да го разгледаме случајот кој најчесто се среќава во примените. Нека X е апсолутно-непрекината случајна променлива со густина p_X, $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ е Борелова функција и $Y = g(X)$. Логично е да се запрашаме, при кои услови за функцијата g случајната променлива Y е апсолутно непрекината и ако е, тогаш како да се најде густината p_Y? Во многу случаи може да се примени следнава постапка: со помош на формулата (5) ја наоѓаме функцијата на распределба F_Y и од видот на F_Y заклучуваме дали случајната променлива Y е апсолутно-непрекината. Да разгледаме еден пример.

Пример 31. Нека случајната променлива X има $\boldsymbol{E}(1)$ распределба и нека $Y=(X-1)^2$. Тогаш

- $F_Y(y)=P\{(X-1)^2\le y\}=0,$ ако $y\le 0$,
- ако $0<y<1$, тогаш од (5) следува дека

$$F_Y(y)=\int\limits_{t\ge 0,\ (t-1)^2\le y} p_X(t)dl(t)=\int\limits_{1-\sqrt{y}\le t\le 1+\sqrt{y}} p_X(t)dl(t)=\int\limits_{1-\sqrt{y}}^{1+\sqrt{y}} e^{-t}dt$$

$$=\int\limits_{1-\sqrt{y}}^{1} e^{-t}dt+\int\limits_{1}^{1+\sqrt{y}} e^{-t}dt=\begin{bmatrix}\text{за првиот интеграл смена } t=1-\sqrt{s}\\ \text{за вториот интеграл смена } t=1+\sqrt{s}\end{bmatrix}$$

$$=\tfrac{1}{2e}\int\limits_0^y \tfrac{1}{\sqrt{s}}e^{\sqrt{s}}ds+\tfrac{1}{2e}\int\limits_0^y \tfrac{1}{\sqrt{s}}e^{-\sqrt{s}}ds=\tfrac{1}{2e}\int\limits_0^y \tfrac{1}{\sqrt{s}}(e^{\sqrt{s}}+e^{-\sqrt{s}})ds.$$

- ако $y\ge 1$, тогаш $1+\sqrt{y}\ge 2$ и ако ја искористиме смената $t=1+\sqrt{s}$ добиваме

$$F_Y(y)=\int\limits_{t\ge 0,\ (t-1)^2\le y} p_X(t)dl(t)=\int\limits_{0\le t\le 1+\sqrt{y}} p_X(t)dl(t)=\int\limits_{0}^{1+\sqrt{y}} e^{-t}dt$$

$$=\int\limits_0^2 e^{-t}dt+\int\limits_2^{1+\sqrt{y}} e^{-t}dt=1-\tfrac{1}{e^2}+\int\limits_2^{1+\sqrt{y}} e^{-t}dt=1-\tfrac{1}{e^2}+\tfrac{1}{2e}\int\limits_1^y \tfrac{1}{\sqrt{s}}e^{-\sqrt{s}}ds.$$

Оттука заклучуваме дека $F_Y(y)=\int\limits_{-\infty}^{y} p_Y(t)dt$, за секој $y\in\mathbf{R}$, каде

$$p_Y(y)=\begin{cases}0, & y\le 0,\\ \tfrac{1}{2e\sqrt{y}}(e^{\sqrt{y}}+e^{-\sqrt{y}}), & 0<y<1,\\ \tfrac{1}{2e\sqrt{y}}e^{-\sqrt{y}}, & y\ge 1,\end{cases}$$

т.е. Y е апсолутно-непрекината случајна променлива со густина p_Y. ♦

Сега, нека претпоставиме дека за случајната променлива X определена на просторот $(\Omega,\boldsymbol{A},P)$ важи $X(\Omega)\subseteq I$, каде $I=(a,b)$ е отворен интервал (конечен или бесконечен). Оттука следува дека $p_X(x)=0$, за $x\notin I$. Нека $g:I\to\mathbf{R}$ е непрекинато диференцијабилна функција на I и нека g строго монотоно расте (строго монотоно опаѓа) на I. Тогаш $I_1=g(I)$ е отворен интервал во $\mathbf{R}$ и g е биекција од I во I_1. Ако ставиме $c=\inf I_1, d=\sup I_1$, тогаш $I_1=(c,d)$. Јасно, множеството вредности на случајната променлива $Y=g(X)$ е подмножество од I_1, па затоа $F_Y(y)=0$, за $y\le c$ и $F_Y(y)=1$ за $y\ge d$. Понатаму, нека претпоставиме дека $g'(x)\ne 0$, за секој $x\in I$ и нека $h=g^{-1}$. Тогаш $h'(y)=\frac{1}{g'(h(y))}\ne 0$, за секој $y\in I_1$. Ако сега претпоставиме дека

g строго монотоно расте, т.е. дека $g' > 0$, тогаш и $h' > 0$, па затоа за секој $y \in g(I)$ важи

$$F_Y(y) = P\{g(X) \le y\} = P\{X \le g^{-1}(y)\} = P\{X \le h(y)\}$$
$$= \int_a^{h(y)} p_X(x)dx = \int_c^y p_X(h(t))h'(t)dt,$$

од што следува дека Y е апсолутно-непрекината случајна променлива со густина

$$p_Y(y) = p_X(h(y))h'(y)I_{I_1}(y)\ .$$

Ако функцијата g строго монотоно опаѓа, т.е. ако $h' < 0$, тогаш

$$F_Y(y) = P\{g(X) \le y\} = P\{X \ge h(y)\} = P\{X > h(y)\} = 1 - P\{X \le h(y)\}$$
$$= 1 - \int_a^{h(y)} p_X(x)dx = 1 - \int_c^y p_X(h(t))h'(t)dt,$$

од што следува дека Y е апсолутно-непрекината случајна променлива со густина

$$p_Y(y) = p_X(h(y))(-h'(y))I_{I_1}(y)\ .$$

Според тоа, и во двата случаја важи

$$p_Y(y) = p_X(g^{-1}(y))\,|\tfrac{d}{dy}g^{-1}(y)|\,I_{g(I)}(y)\ . \tag{6}$$

Пример 32. а) Случајната променлива X има густина

$$p_X(x) = \begin{cases} 2x, & x \in (0,1) \\ 0, & x \notin (0,1). \end{cases}$$

Ќе ја определиме густината на случајната променлива $Y = 8X^3$.

Функцијата $g(x) = 8x^3$ строго монотоно расте во $(0,1)$, има непрекинат прв извод на (0,1) и $g^{-1}(y) = \frac{1}{2}\sqrt[3]{y}$. Јасно, $g((0,1)) = (0,8)$ и ако ја искористиме формулата (6) добиваме

$$p_Y(y) = p_X(g^{-1}(y)) \cdot (g^{-1}(y))' = 2\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{y}(\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{y})' = \sqrt[3]{y}\,\frac{1}{6\sqrt[3]{y^2}} = \frac{1}{6\sqrt[3]{y}}\ ,$$

што значи дека густината на случајната променлива $Y = 8X^3$ е

$$p_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{6\sqrt[3]{y}}, & y \in (0,8), \\ 0, & y \notin (0,8). \end{cases}$$

б) Нека $Y = cX + d, c \ne 0$. Тогаш $g^{-1}(y) = \frac{y-d}{c}$, па од (6) следува дека

$$p_Y(y) = \tfrac{1}{|c|}\,p_X(\tfrac{y-d}{c})\ .$$

Ако случајната променлива X има $\mathrm{N}(a;\sigma^2)$ и $Y = cX + d, c \neq 0$, тогаш $I = \mathbf{R}$, $g(I) = \mathbf{R}$ и Y е апсолутно-непрекината случајна променлива со густина

$$p_Y(y) = \frac{1}{|c|\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\frac{y-d}{c}-a)^2} = \frac{1}{|c|\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{[y-(ac+d)]^2}{2\sigma^2 c^2}}, \ y \in \mathbf{R},$$

т.е. случајната променлива Y има $\mathrm{N}(ac+d;c^2\sigma^2)$ распределба. Специјално, ако $Y = \frac{X-a}{\sigma}$, тогаш Y има $\mathrm{N}(0;1)$ распределба♦

Формулата (6) може да се генерализира и за поопшти функции g. За таа цел потребна ни е следното тврдење, во кое е дадена варијанта на формулата за замена на променливите кај Лебеговиот интеграл.

Нека $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *е биекција и* g *и* g^{-1} *се непрекинато-диференцијабилни функции. Ако* $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *е Борелова функција и ако* $B \in \boldsymbol{B}$, *тогаш*

$$\int_B f(x)dx = \int_{g^{-1}(B)} f(g(x)) \, | \, g'(x) \, | \, dx. \tag{7}$$

Теорема 40. Нека X е апсолутно-непрекината случајна променлива со густина p_X, $A = \{x \in \mathbf{R}, p_X(x) > 0\}$ и нека $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ е Борелова функција таква да

а) $g: A \to C = g(A)$ е биекција, и

б) g^{-1} е непрекинато-диференцијабилна на C и $\frac{d}{dy} g^{-1}(y) \neq 0,$ за секој $y \in C$,

Тогаш $Y = g(X)$ е апсолутно-непрекината случајна променлива со густина

$$p_Y(y) = p_X(g^{-1}(y)) \, | \, \tfrac{d}{dy} g^{-1}(y) \, | \, I_C(y). \tag{8}$$

Доказ. Користејќи ја формулата (7) добиваме дека за секое множество $B \in \boldsymbol{B}$ важи

$$\begin{aligned}\int_B p_X(g^{-1}(y)) \, | \, \tfrac{d}{dy} g^{-1}(y) \, | \, I_C(y)dy &= \int_{B \cap C} p_X(g^{-1}(y)) \, | \, (g^{-1})'(y) \, | \, dy \\ &= \int_{g^{-1}(B \cap C)} p_X(g^{-1}(g(x))) \, | \, (g^{-1})'(g(x)) \, || \, g'(x) \, | \, dx \\ &= \int_{g^{-1}(B) \cap g^{-1}(C)} p_X(x) \, | \, [g^{-1}(g(x))]' \, | \, dx \\ &= \int_{g^{-1}(B) \cap A} p_X(x)dx = \int_{g^{-1}(B)} p_X(x)dx \\ &= P\{X \in g^{-1}(B)\} = P\{g(X) \in B\} = P\{Y \in B\}.\end{aligned}$$

Специјално, за $B = (-\infty, x]$, $x \in \mathbf{R}$ добиваме

$$\int_{-\infty}^{x} p_X(g^{-1}(y)) \, | \, \tfrac{d}{dy} g^{-1}(y) \, | \, I_C(y)dy = P\{Y \leq x\} = F_Y(x),$$

од каде следува дека $Y = g(X)$ е апсолутно-непрекината случајна променлива со густина (8). ♦

Во практиката често пати ја користиме следнава генерализација на претходната теорема.

Теорема 41. Ако функцијата g од теорема 40 не е инјекција на множеството A и ако постојат најмногу пребројливо многу заемно дисјунктни Борелови множества A_i, $i = 1,2,3,...$ во $\mathbf{R}$ такви што $A = \bigcup_i A_i$, $g_i = g_{|A_i}$ е инјекција за секој i и функциите g_i ги задоволуваат останатите услови од теорема 40, тогаш

$$p_Y(y) = \sum_i p_X(g_i^{-1}(y)) \left| \tfrac{d}{dy} g_i^{-1}(y) \right| I_{C_i}(y), \tag{9}$$

каде $C_i = g_i(A_i)$, за секој i.

Доказ. Аналогно како во доказот на теорема 40, за секој $B \in \boldsymbol{B}$ имаме

$$\begin{aligned}
\int_B [\sum_i p_X(g_i^{-1}(y)) | \tfrac{d}{dy} g_i^{-1}(y) | I_{C_i}(y)] dy &= \sum_i \int_B p_X(g_i^{-1}(y)) | \tfrac{d}{dy} g_i^{-1}(y) | I_{C_i}(y) dy \\
&= \sum_i \int_{B \cap C_i} p_X(g_i^{-1}(y)) | \tfrac{d}{dy} g_i^{-1}(y) | dy \\
&= \sum_i \int_{g_i^{-1}(B \cap C_i)} p_X(y) dy = \sum_i \int_{g_i^{-1}(B) \cap g_i^{-1}(C_i)} p_X(y) dy \\
&= \sum_i \int_{g_i^{-1}(B) \cap A_i} p_X(y) dy = \sum_i \int_{\mathbf{R}} p_X(y) I_{g_i^{-1}(B) \cap A_i} dy \\
&= \int_{\mathbf{R}} \sum_i p_X(y) I_{g_i^{-1}(B) \cap A_i} dy = \int_{\mathbf{R}} p_X(y) I_{\bigcup_i g_i^{-1}(B) \cap A_i} dy \\
&= \int_{g^{-1}(B)} p_X(y) dy = P\{Y \in B\},
\end{aligned}$$

од каде следува равенството (9). ♦

Нека $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$ е $n-$димензионален случаен вектор и $g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ е Борелова функција, $g = (g_1, g_2, ..., g_m)$, каде $g_i, i = 1,2,...,m$ се компоненти на функцијата g. Во теорема 7 б) докажавме дека $Y = g(X) = (Y_1, Y_2, ..., Y_m)$ е $m-$димензионален случаен вектор, $Y_i = g_i(X), i = 1,2,...,m$. Да ја определиме функцијата на распределба F_Y на Y со помош на функцијата на распределба F_X на X и функцијата g. За секој $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbf{R}$ имаме

$$\begin{aligned}
F_Y(x) &= P\{Y \le x\} = P\{g(X) \le x\} = P\{X \in g^{-1}((-\infty, x])\} \\
&= \int_{g^{-1}((-\infty, x])} dF_X(y) = \int_{\{y | g(y) \le x\}} dF_X(y).
\end{aligned} \tag{10}$$

Јасно, за специјалните случаи на дискретен, односно апсолутно-непрекинат случаен вектор важат релации аналогни на релациите (3) и (4).

Пример 33. а) Нека (X,Y) е апсолутно-непрекинат случаен вектор со густина $f_{X,Y}$ и нека $U = X+Y, V = X-Y$. Тогаш U и V се апсолутно-непрекинати случајни променливи.

Навистина, од својствата на двојниот интеграл добиваме дека за секој $u \in \mathbf{R}$ важи

$$F_U(u) = P\{X+Y \le u\} = \iint\limits_{x+y\le u} f_{X,Y}(x,y)dxdy = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}[\int\limits_{-\infty}^{u-x} f_{X,Y}(x,y)dy]dx$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{u}[\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,z-x)dx]dz.$$

Оттука следува дека U е непрекината случајна променлива со густина

$$p_U(u) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,u-x)dx, \quad u \in U.$$

Аналогно се добива дека

$$p_U(u) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(u-y,y)dy, \quad u \in U.$$

Слично добиваме дека V е непрекината случајна променлива со густина

$$p_V(v) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(u+y,y)dy = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,x+x)dx, \quad u \in U.$$

Понатаму, ако случајните променливи X и Y се независни, тогаш

$$F_U(u) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p_X(x)dx \int\limits_{-\infty}^{u-x} p_Y(y)dy = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_Y(u-x)p_X(x)dx$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p_X(x)dx \int\limits_{-\infty}^{u} p_Y(y-x)dy = \int\limits_{-\infty}^{u} dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p_X(x)p_Y(y-x)dy.$$

Формулите

$$F_U(u) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_Y(u-x)p_X(x)dx, \quad u \in U \text{ и} \tag{11}$$

$$p_U(u) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p_X(x)p_Y(u-x)dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p_X(u-y)p_Y(y)dy, \quad u \in U. \tag{12}$$

(11) и (12) ги нарекуваме *формули за конволуциски производ*, со кои се изразена функцијата на распределба $F_U(u)$ и густината $p_U(u)$ на збирот на независните случајни променливи X и Y.

б) Нека X и Y се независни, $F_X(x)$ е функцијата на распределба на X, а Y има $\boldsymbol{U}([a,b])$ распределба. Ако ја примениме формулата (11) имаме

$$F_{X+Y}(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_X(z-x)\tfrac{1}{b-a}dx = \tfrac{1}{b-a}\int\limits_{a}^{b} F_X(z-x)dx = \tfrac{1}{b-a}\int\limits_{z-b}^{z-a} F_X(u)du,$$

од што следува егзистенцијата на густината на збирот

$$p_{X+Y}(z) = \frac{F_X(z-a) - F_X(z-b)}{b-a}\,. \tag{13}$$

Сега, нека случајниот вектор (X,Y) има $\boldsymbol{U}([0,1]\times[0,1])$. Тогаш случајните променливи X и Y се независни и имаат $\boldsymbol{U}([0,1])$ распределба, (проверете!). Затоа формулата (13) го добива видот $p_{X+Y}(u) = F_X(u) - F_X(u-1)$. Но, случајната променлива $X+Y$ е сконцентрирана на интервалот $[0,2]$, и ако земеме предвид дека

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ x, & 0 < x < 1, \\ 1, & x \ge 1, \end{cases}$$

за густина на $X+Y$ добиваме

$$p_{X+Y}(u) = F_X(u) - F_X(u-1) = \begin{cases} 0, & u \le 0, \\ u-0, & 0 < u \le 1, \\ 1-(u-1), & 1 < u \le 2, \\ 1-1, & u > 2, \end{cases} = \begin{cases} 0, & u \le 0, \\ u, & 0 < u \le 1, \\ 2-u, & 1 < u \le 2, \\ 0, & u > 2, \end{cases}$$

што значи дека збир на рамномерно распределени независни случајни променливи нема рамномерна распределба.

в) Нека X и Y се независни случајни променливи, при што распределбата на случајната променлива X е дадена со $P\{X=0\} = P\{X=1\} = \frac{1}{2}$, а случајната променлива Y има $\boldsymbol{U}([0,1])$ распределба. Тогаш, распределбата на случајниот вектор (X,Y) е концентрирана на множеството

$$A = \{(x,y) \mid x \in \{0,1\},\, 0 \le y \le 1\}.$$

Да ја определиме функцијата на распределба на збирот $X+Y$.

Очигледно, $F_{X+Y}(t) = 0$ за $t \le 0$ и $F_{X+Y}(t) = 1$ за $t > 2$. За $0 < t \le 1$ добиваме

$$F_{X+Y}(t) = P\{X+Y \le t\} = P\{X=0, Y \le t\} = P\{X=0\}P\{Y \le t\} = \frac{t}{2}\,.$$

За $1 < t \le 2$ добиваме

$$F_{X+Y}(t) = P\{X+Y \le t\} = P\{X=0\} + P\{X=1, Y \le t-1\} = \frac{1}{2} + \frac{t-1}{2} = \frac{t}{2}\,.$$

Според тоа, збирот $X+Y$ има $\boldsymbol{U}([0,2])$. ♦

Пример 34. Случајни променливи $X_1, X_2, \ldots, X_n$ се независни и еднакво распределени со $\boldsymbol{E}(a)$ распределба. Докажете дека случајните променливи

$$Y_n = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\} \text{ и } Z_n = X_1 + \frac{X_2}{2} + \ldots + \frac{X_n}{n}$$

се еднакво распределени.

Решение. Случајните променливи $X_1, X_2, \ldots, X_n$ се независни, па затоа за функцијата на распределба на случајната променлива Y_n имаме:

$$\begin{aligned} F_n(y) &= P\{Y_n \le y\} = P\{\max\{X_1, X_2, ..., X_n\} \le y\} \\ &= P\{X_1 \le y, X_2 \le y, ..., X_n \le y\} \\ &= P\{X_1 \le y\}P\{X_2 \le y\}...P\{X_n \le y\} \\ &= \begin{cases} (1-e^{-ay})^n, & y \ge 0, \\ 0, & y < 0. \end{cases} \end{aligned} \tag{14}$$

Со G_n да ја означиме функцијата на распределба на случајната променлива Z_n. Со индукција ќе докажеме дека $G_n = F_n$. За $n = 1$ имаме $Z_1 = Y_1$, па затоа $G_1 = F_1$. Нека претпоставиме дека важи $G_{n-1} = F_{n-1}$. Сега од формулата (14) применета за $n-1$ и од формулата (11) следува

$$G_n(z) = P\{Z_{n-1} + \tfrac{X_n}{n} \le z\} = \int_0^{nz} ae^{-ax}dx \int_0^{z-\frac{x}{n}} (n-1)(1-e^{-ay})^{n-2} ae^{-ay}dy.$$

Ако во горниот интеграл воведеме смена $1-e^{-ay} = u$, $du = ae^{-ay}dy$ и интегрираме по u добиваме

$$G_n(z) = a\int_0^{nz} e^{-ax}(1-e^{-a(z-\frac{x}{n})})^{n-1}dx.$$

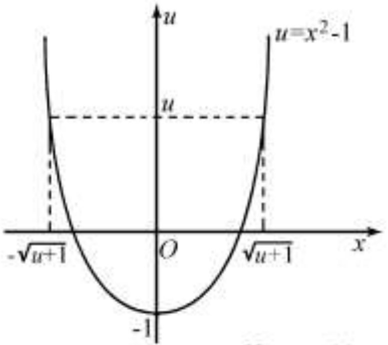
Конечно, ако во последниот интеграл воведеме смена

$$v = e^{-a(z-\frac{x}{n})},\ e^{-ax} = e^{-azn}v^{-n},\ \tfrac{n}{av}dv = dx$$

наоѓаме

$$\begin{aligned} G_n(z) &= a\int_{e^{-az}}^{1} e^{-azn}v^{-n}(1-v)^{n-1}\tfrac{n}{av}dv = ne^{-azn}\int_{e^{-az}}^{1} \tfrac{(1-v)^{n-1}}{v^{n+1}}dv \\ &= ne^{-azn}\int_1^{e^{-az}} (\tfrac{1}{v}-1)^{n-1}d(\tfrac{1}{v}-1) = e^{-azn}(\tfrac{1}{v}-1)^n \Big|_1^{e^{-az}} \\ &= e^{-azn}(\tfrac{1}{e^{-az}}-1)^n = (1-e^{-az})^n = F_n(z), \end{aligned}$$

т.е. тврдењето важи и за n, што конечно значи дека Y_n и Z_n се еднакво распределени. ◆



Цртеж 22

Пример 35. Нека X и Y се независни случајни променливи со Лапласова и $\boldsymbol{E}(\lambda)$ распределба, соодветно. Најдете ја распределбата на случајната променлива

$$Z = \min\{X^2 - 1, 2Y + 1\}.$$

Решение. Да ја разгледаме случајната променлива $U = X^2 - 1$. Јасно, за $u < -1$ имаме $F_U(u) = P\{U \le u\} = 0$, а за $u \ge -1$ имаме

$$F_U(u) = P\{U \le u\} = P\{X^2 - 1 \le u\} = P\{-\sqrt{u+1} \le X \le \sqrt{u+1}\}$$
$$= \int_{-\sqrt{u+1}}^{\sqrt{u+1}} p_X(x)dx = \tfrac{1}{2} \int_{-\sqrt{u+1}}^{\sqrt{u+1}} e^{-|x|}dx = 1 - e^{-\sqrt{u+1}},$$

види цртеж 22. Според тоа,

$$F_U(u) = \begin{cases} 0, & u < -1, \\ 1 - e^{-\sqrt{u+1}}, & u \ge -1. \end{cases} \tag{15}$$

Понатаму, да ја определиме функцијата на распределба на случајната променлива $V = 2Y + 1$. Јасно, за $v < 1$ важи $\frac{v-1}{2} < 0$, па затоа

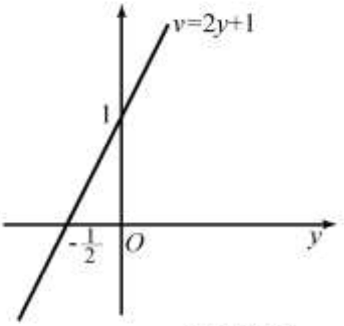
$$F_V(v) = P\{V \le v\} = P\{2Y + 1 \le v\} = P\{Y \le \tfrac{v-1}{2}\} = \int_{-\infty}^{(v-1)/2} q_Y(y)dy = \int_{-\infty}^{(v-1)/2} 0 \cdot dy = 0,$$

а за $v \ge 1$ имаме

$$F_V(v) = P\{V \le v\} = P\{2Y + 1 \le v\} = P\{Y \le \tfrac{v-1}{2}\}$$
$$= \int_{-\infty}^{(v-1)/2} q_Y(y)dy = \int_{0}^{(v-1)/2} e^{-y}dy = 1 - e^{\frac{1-v}{2}},$$

(цртеж 23), па затоа

$$F_V(v) = \begin{cases} 0, & v < 1, \\ 1 - e^{\frac{1-v}{2}}, & v \ge 1. \end{cases} \tag{16}$$



Цртеж 23

Сега случајната променлива е $Z = \min\{U, V\}$. Но, X и Y се независни случајни променливи, па затоа U и V се независни случајни променливи, што значи дека

$$F_Z(z) = P\{Z \le z\} = P\{\min\{U,V\} < z\} = 1 - P\{\min\{U,V\} > z\} = 1 - P\{U > z, V > z\}$$
$$= 1 - P\{U > z\}P\{V > z\} = 1 - (1 - P\{U \le z\})(1 - P\{V \le z\})$$
$$= 1 - (1 - F_U(z))(1 - F_V(z)).$$

Конечно, од претходното равенство и од равенствата (15) и (16) следува:

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < -1, \\ 1 - e^{-\sqrt{z+1}}, & -1 \le z < 1, , \\ 1 - e^{-\sqrt{z+1}} e^{\frac{1-z}{2}}, & z \ge 1, \end{cases}$$

што и требаше да се определи. ♦

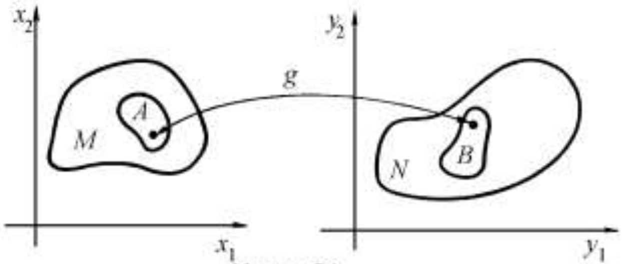
Нека имаме n функции $y_i = g_i(x_1, x_2, ..., x_n)$, $g_i : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, $i = 1, 2, ..., n$ чии први парцијални изводи се непрекинати. Овие функции дефинираат глатко пресликување $g = (g_1, g_2, ..., g_n) : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$. Јакобијанот на ова пресликување е функција од $\mathbf{R}^n$ во $\mathbf{R}$ определена со

$$Jg(x)=\frac{\partial(g_1,g_2,...,g_n)}{\partial(x_1,x_2,...,x_n)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(x) & ... & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(x)\\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(x) & ... & \frac{\partial g_2}{\partial x_n}(x)\\ .... & .... & ... & ....\\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial g_n}{\partial x_2}(x) & ... & \frac{\partial g_n}{\partial x_n}(x)\end{vmatrix},\ x\in\mathbf{R}^n$$

Ако $Jg(x)\neq 0$, тогаш во околина на точката $g(x)$ постои глатко инверзно пресликување $h=g^{-1}$, при што важи $Jh(g(x))Jg(x)=1$. Понатаму, ако $g:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ е биекција, тогаш за произволна Борелова функција $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ и произволно множество $B\in\boldsymbol{B}^n$ важи

$$\int_B f(x)dx=\int_{g^{-1}(B)} f(g(x))\,|\,Jg(x)\,|\,dx\,. \tag{17}$$

Теорема 42. Нека $X=(X_1,X_2,...,X_n)$ е апсолутно-непрекинат случаен вектор со густина $f_X(x_1,x_2,...,x_n)$, нека $M=\{x\in\mathbf{R}^n\mid f_X(x)>0\}$ и нека $g:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ е Борелова функција таква што



Цртеж 24

а) $g:M\to N=g(M)$ е биекција (за $n=2$ види цртеж 24),

б) $h=g^{-1}$ е глатка на N и $Jh(y)\neq 0$, за секој $y\in N$.

Тогаш $Y=g(X)$ е апсолутно-непрекинат случаен вектор со густина

$$f_Y(y)=f_X(h(y))\,|\,Jh(y)\,|\,I_N(y),\ \ y\in\mathbf{R}^n\,. \tag{18}$$

Доказ. Користејќи ја формулата (17) добиваме дека за секое множество $B\in\boldsymbol{B}^n$ и $A=h(B)=g^{-1}(B)$ важи

$$\begin{aligned}\int_B f_X(h(y))\,|\,Jh(y)\,|\,I_N(y)dy&=\int_{B\cap N} f_X(h(y))\,|\,Jh(y)\,|\,dy\\ &=\int_{g^{-1}(B\cap N)} f_X(h(g(x)))\,|\,Jh(g(x))\,||\,Jg(x)\,|\,dx\\ &=\int_{g^{-1}(B)\cap g^{-1}(N)} f_X(x)dx=\int_{g^{-1}(B)\cap M} p_X(x)dx\\ &=\int_{g^{-1}(B)} p_X(x)dx=P\{X\in g^{-1}(B)\}\\ &=P\{g(X)\in B\}=P\{Y\in B\}.\end{aligned}$$

Специјално, за $B=(-\infty,x]$, $x\in\mathbf{R}^n$ добиваме

$$\int\limits_{(-\infty,x]} f_X(h(y))\,|\,Jh(y)\,|\,I_N(y)dy = P\{Y\le x\} = F_Y(x)\,,$$

од каде следува дека $Y=g(X)$ е апсолутно-непрекинат случаен вектор со густина (18). ♦

Пример 36. Нека тридимензионалниот случаен вектор (X_1,X_2,X_3) има густина на распределба

$$f_X(x_1,x_2,x_3)=\begin{cases}6e^{-x_1-3x_2-2x_3}, & 0<x_i<+\infty,\ i=1,2,3\\ 0, & \text{во останатите случаи,}\end{cases}$$

и нека е дадена трансформацијата

$$y_1=\tfrac{x_1}{x_1+3x_2},\qquad y_2=\tfrac{x_1+3x_2}{x_1+3x_2+2x_3},\qquad y_3=x_1+3x_2+2x_3.$$

Лесно се покажува дека инверзната трансформација е дадена со

$$x_1=y_1y_2y_3,\quad x_2=\tfrac{1}{3}(1-y_1)y_2y_3,\quad x_3=\tfrac{1}{2}(1-y_2)y_3,$$

каде: $0<y_1<1,\ 0<y_2<1,\ 0<y_3<+\infty$. Според тоа, Јакобијанот на оваа трансформација е

$$J=\begin{vmatrix} y_2y_3 & y_1y_3 & y_2y_3\\ -\tfrac{1}{3}y_2y_3 & \tfrac{1}{3}(1-y_1)y_3 & \tfrac{1}{3}(1-y_1)y_2\\ 0 & -\tfrac{1}{2}y_3 & \tfrac{1}{2}(1-y_2)\end{vmatrix}=\tfrac{1}{6}y_2y_3^2.$$

Според теорема 42 случајниот вектор (Y_1,Y_2,Y_3) е апсолутно-непрекинат и ако замениме во (18) за неговата густина добиваме

$$f_Y(y_1,y_2,y_3)=\begin{cases}y_2y_3^2e^{-y_3}, & 0<y_1<1,\ 0<y_2<1,\ 0<y_3<+\infty\\ 0, & \text{во останатите случаи.}\end{cases}\quad ♦$$

Пример 37. Дводимензионалната случајна променлива (X,Y) има рамномерна распределба $\boldsymbol{U}([1,2]\times[1,3])$, (цртеж 25). Дали случајните променливи

$$U=X+Y \text{ и } V=X-Y$$

се независни?

Решение. Плоштината на правоаголникот T е $m(T)=1\cdot 2=2$, па затоа густината на случајната променлива (X,Y) е

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}\tfrac{1}{2}, & x\in T,\\ 0, & x\notin T.\end{cases}$$

Да ја разгледаме трансформацијата

$$u = x + y,\ \ v = x - y\,,$$

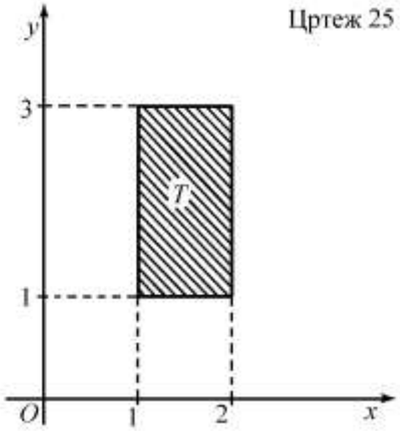
за која инверзната трансформација е

$$x = \tfrac{u+v}{2},\ \ y = \tfrac{u-v}{2}\,, \qquad (19)$$

и нејзиниот Јакобијан е $J = -\frac{1}{2}$. Според тоа,

$$f_{U,V}(u,v) = f_{X,Y}(\tfrac{u+v}{2}, \tfrac{u-v}{2})\,|\,J\,|$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{4}, & x \in T', \\ 0, & x \notin T', \end{cases} \qquad (20)$$

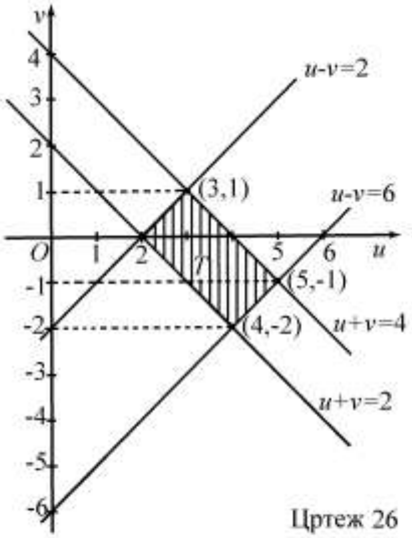


Цртеж 25

каде T' е сликата на правоаголникот T со пресликувањето (20). За да ја определиме сликата T' ќе ги најдеме сликите на правите со кои и ограничен правоаголникот T. Имаме

- правата $x = 1$ се пресликува со (19) во правата $u + v = 2$,
- правата $x = 2$ се пресликува со (19) во правата $u + v = 4$,
- правата $y = 1$ се пресликува со (19) во правата $u - v = 2$ и
- правата $y = 3$ се пресликува со (19) во правата $u - v = 6$,

а темињата на правоаголникот T' се: (2,0), (4,-2), (5,-1) и (3,1), (цртеж 26). Сега лесно се наоѓа дека маргиналните распределби на случајните променливи U и V се:



Цртеж 26

$$p_U(u) = \begin{cases} 0, & u < 2 \text{ или } u \geq 5, \\ \frac{u-2}{2}, & 2 \leq u < 3, \\ \frac{1}{2}, & 3 \leq u < 4, \\ \frac{5-u}{2}, & 4 \leq u < 5, \end{cases} \qquad (21)$$

$$q_V(v) = \begin{cases} 0, & v < -2 \text{ или } v \geq 1, \\ \frac{v+2}{2}, & -2 \leq u < -1, \\ \frac{1}{2}, & -1 \leq u < 0, \\ \frac{1-v}{2}, & 0 \leq u < 1. \end{cases} \qquad (22)$$

Конечно, од (21), (22) и (23) следува дека

$$f_{U,V}(u,v) \neq p_U(u) q_V(v)\,,$$

т.е. случајните променливи U и V не се независни, иако случајните променливи X и Y се независни. ♦

Забелешка 41. Ако функцијата g во теорема 42 не е инјекција на M и ако постојат најмногу пребројливо многу заемно дисјунктни множества $M_i, i = 1,2,3,...$

во $\boldsymbol{B}^n$ такви што $M = \bigcup_i M_i$, $g_i = g_{|M_i}$ се инјекции и функциите g_i ги задоволуваат останатите услови од теорема 42, тогаш аналогно на доказот на теорема 41 може да се докаже дека

$$f_Y(y) = \sum_i f_X(g_i^{-1}(y)) \,|\, Jg_i^{-1}(y) \,|\, I_{N_i}(y), \;\; y \in \mathbf{R}^n . \tag{23}$$

каде $N_i = g_i(M_i)$, за секој i .

Во примените често пати се појавува следниов проблем:

Нека $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$ *е* $n-$*димензионален апсолутно-непрекинат случаен вектор со густина* f_X , $\psi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ *е Борелова функција и* $Z = \psi(X_1, ..., X_n)$. *Треба да ја определиме (ако постои) густината на случајната променлива* Z .

Поставениот проблем ќе го решиме за $n = 2$. Нека е даден апсолутно-непрекинатиот случаен вектор (X, Y) со густина $f_{X,Y}$, $\psi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ е Борелова функција и нека $\psi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$. Дефинираме трансформација од $g = (g_1, g_2) : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ такво што

$$\begin{aligned} z &= g_1(x, y) = \psi(x, y) , \\ w &= g_2(x, y) = x , \end{aligned}$$

(доволно е да се разгледува само рестрикцијата на g на множество на кое функцијата $f_{X,Y}$ е позитивна). Нека претпоставиме дека трансформацијата g е инверзибилна, $h = g^{-1}$, глатка и $Jh(t) \neq 0,$ за секој t . Имаме

$$\begin{aligned} x &= h_1(z, w) = w , \\ y &= h_2(z, w) , \end{aligned}$$

па затоа

$$Jh(z,w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial z}(z,w) & \frac{\partial h_1}{\partial w}(z,w) \\ \frac{\partial h_2}{\partial z}(z,w) & \frac{\partial h_2}{\partial w}(z,w) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\partial h_2}{\partial z}(z,w) & \frac{\partial h_2}{\partial w}(z,w) \end{vmatrix} = -\frac{\partial h_2}{\partial z}(z,w) .$$

Сега, ако ја искористиме формулата (18) добиваме

$$f_{Z,X}(z,x) = f_{X,Y}(x, h_2(z,x)) \,|\, \frac{\partial h_2}{\partial z}(z,x) \,| . \tag{24}$$

Конечно, ако од последната густина ја определиме маргиналната густина по Z добиваме

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, h_2(z,x)) \,|\, \frac{\partial h_2}{\partial z}(z,x) \,|\, dx . \tag{25}$$

Пример 38. Нека $f_{X,Y}$ е густината на дводимензионалната случајна променлива (X, Y). Најдете ја густината на случајната променлива:

а) $Z = X + Y$, б) $Z = Y - X$,

в) $Z = XY$, и г) $Z = \frac{Y}{X}$.

Решение. а) Имаме $\psi(x,y) = x + y$ и трансформацијата определена со

$$z = g_1(x,y) = \psi(x,y) = x + y,\ w = x$$

е биективна. Инверзната трансформација е $x = w,\ y = h_2(z,x) = z - x$ и $\frac{\partial h_2}{\partial z} = 1$, па од (25) следува дека

$$f_Z(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, z - x)dx\ ,\ z \in \mathbf{R}\,.$$

б) Имаме $\psi(x,y) = y - x$, трансформација определена со $z = y - x,\ w = x$, која е биекција. Инверзната трансформација е $x = w,\ y = h_2(z,x) = z + x$, па затоа

$$f_Z(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, z + x)dx\ ,\ z \in \mathbf{R}\,.$$

в) Имаме $\psi(x,y) = xy$. Пресликувањето g определено со $z = xy,\ w = x$ не е инјекција, но на множествата $M_1 = (-\infty, 0) \times \mathbf{R}$ и $M_2 = (0, +\infty) \times \mathbf{R}$ е инјекција, Притоа важи $g_2(z,x) = \frac{z}{x}$, па затоа $f_Z(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, \frac{z}{x}) \frac{dx}{|x|}$, $z \in \mathbf{R}$, при што граничната вредност на подинтегралната функција во нулата ја пресметуваме одделно.

г) Имаме $\psi(x,y) = \frac{y}{x}$, $x \neq 0$. Понатаму, бидејќи (X,Y) е дводимензионална непрекината случајна променлива имаме $P\{X = 0\} = 0$, па затоа од формулата (25) следува

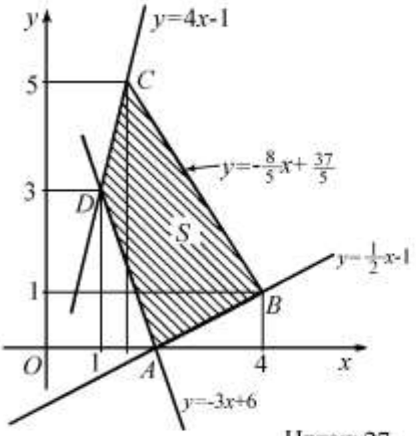
$$f_Z(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, zx)\,|\,x\,|\,dx\ ,\ z \in \mathbf{R}\,.\ \blacklozenge$$

Пример 39. Дводимензионалната случајна променлива (X,Y) има $\boldsymbol{U}(S)$ распределба, каде S е четириаголникот со темиња во точките

$A(2,0)$, $B(4,1)$, $C(\frac{3}{2},5)$ и $D(1,3)$.

Најдете ја густината на случајната променлива $Z = \frac{Y}{X}$.

Решение. Според условот случајната променлива (X,Y) има $\boldsymbol{U}(S)$ распределба каде S е четириагоникот $ABCD$ (цртеж 27). Понатаму, страните на четириагоникот лежат на правите:



Цртеж 27

- AB: $y=\frac{1}{2}x-1$,
- BC: $y=-\frac{8}{5}x+\frac{37}{5}$,
- CD: $y=4x-1$ и
- DA: $y=-3x+6$.

Плоштината на четириаголникот $ABCD$ е

$$m(S)=\iint\limits_{S} dxdy=\int\limits_{1}^{\frac{3}{2}} dx \int\limits_{-3x+6}^{4x-1} dy+\int\limits_{\frac{3}{2}}^{2} dx \int\limits_{-3x+6}^{-\frac{8}{5}x+\frac{37}{5}} dy+\int\limits_{2}^{4} dx \int\limits_{\frac{1}{2}x-1}^{-\frac{8}{5}x+\frac{37}{5}} dy=7.$$

Според тоа,

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{7}, & x\in S,\\ 0, & x\notin S.\end{cases}$$

Да го разгледаме пресликувањето

$$w=x,\ z=\frac{y}{x} \qquad (26)$$

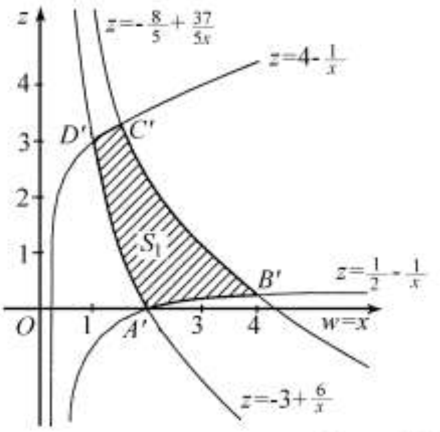
За кое инверзното пресликувањето е

$$x=w,\ y=zx.$$

со Јакобијан $J=x$. Понатаму, бидејќи $x>0$, ако ја искористиме релацијата (18) добиваме

$$f_{Z,X}(z,x)=f_{X,Y}(x,zx)\,|\,J\,|$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{7}x, & (x,z)\in S',\\ 0, & (x,z)\notin S',\end{cases}$$



Цртеж 28

каде S' е сликата на областа S добиена со пресликувањето (26), (цртеж 28). Притоа

- правата $y=4x-1$ се пресликува во хиперболата $z=4-\frac{1}{x}$,
- правата $y=-3x+6$ се пресликува во хиперболата $z=-3+\frac{6}{x}$,
- правата $y=-\frac{8}{5}x+\frac{37}{5}$ се пресликува во хиперболата $z=-\frac{8}{5}+\frac{37}{5x}$ и
- правата $y=\frac{1}{2}x-1$ се пресликува во хиперболата $z=\frac{1}{2}-\frac{1}{x}$,

а точките A,B,C,D се пресликуваат во точките $A'(2,0), B'(4,\frac{1}{4}), C'(\frac{3}{2},\frac{10}{3}), D'(1,3)$, соодветно. Конечно, густината на случајната променлива Z ја наоѓаме како маргинална густина на случајната променлива (Z,X) и добиваме

$$p_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0 \ \text{или}\ z\geq\frac{10}{3}\\ \frac{1}{7}[\frac{2}{(1-2z)^2}-\frac{18}{(z+3)^2}], & 0\leq z<\frac{1}{4},\\ \frac{1}{14}[\frac{1369}{(5z+8)^2}-\frac{36}{(z+3)^2}], & \frac{1}{4}\leq z<3,\\ \frac{1}{14}[\frac{1369}{(5z+8)^2}-\frac{1}{(4-z)^2}], & 3\leq z<\frac{10}{3}.\end{cases}$$

♦

ЗАДАЧИ

1. Нека случајната променлива X има $\boldsymbol{U}([0,1])$ распределба. Најдете ја функцијата на распределба на случајната променлива:
   a) $Y = aX + b$, и
   b) $Y = -\ln(1-X)$.

2. Нека случајната променлива X има $\boldsymbol{U}([0,1])$ распределба и нека $Y = \min\{X, 1-X\}$. Докажете, дека $E(Y) = \frac{1}{4}$ и $E(\frac{Y}{1-Y}) = \ln\frac{4}{e}$.

3. Случајната променлива X има распределба
   a) $\boldsymbol{U}([0,1] \cup [2,3] \cup [4,5])$,
   b) $\boldsymbol{U}([-3,-1] \cup [1,2])$.

   Најдете ја распределбата на случајната променлива $Y = X^2$.

4. Случајната променлива X има $\boldsymbol{U}([0,1])$ распределба. Најдете ја густината на веројатност на случајната променлива $Y = e^X$.

5. Случајната променлива X има $\boldsymbol{U}([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])$ распределба. Најдете ги густините на веројатност на случајните променливи: $Y = \sin X,\, Z = \cos X,\, U =| \sin X |$.

6. Случајната променлива X има $\boldsymbol{U}([0,1])$ распределба. Најдете ја густината на веројатност на случајната променлива Y ако
   a) $X = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^Y e^{-\frac{t^2}{2}} dt$,
   b) $X = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{\frac{Y-E(Y)}{\sigma_Y}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.

7. Случајната променлива X има $\boldsymbol{U}([0,1])$ распределба. Дадена е функција $p(t)$ која ги задоволува условите $p(t) \geq 0$ и $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(t)dt = 1$. Случајните променливи X и Y ја задоволуваат релацијата $X = \int\limits_{-\infty}^{Y} p(t)dt$. Докажете дека $p(t)$ е густина на веројатност на случајната променлива Y.

8. Случајната променлива X има распределба $F(x)$. Најдете ја функцијата на распределба на случајната променлива $F(X)$.

9. Случајниот вектор (X,Y) има густина на распределба

   $$p(x,y) = \begin{cases} Cx^m (y-x)^n e^{-y}, & 0 < x < y \\ 0, & \text{во останатите случаи.} \end{cases}$$

   Најдете ја густината на распределба на случајната променлива $Z = Y - X$. Дали случајните променливи X и Z се независни.

10. Случајниот вектор (X,Y) е рамномерно распределен на кругот $x^2 + y^2 \leq 1$. Најдете ги густините на распределба на случајните променливи $Z = \frac{X}{Y}$ и $U = \frac{Y}{X}$.

11. Нека X е апсолутно-непрекината случајна променлива со густина p_X. Докажете дека важи

$$p_{|X|}(y) = [p_X(y) + p_X(-y)]I_{(0,+\infty)}(y) \text{ и } p_{\sqrt{|X|}}(y) = 2y[p_X(y^2) + p_X(-y^2)]I_{(0,+\infty)}(y).$$

12. На кружницата $K(O,r)$ случајно се избира точка A. Аголот α меѓу отсечката OA и $x-$оската има $\mathbf{U}[-\pi,\pi]$ распределба. Најдете ја распределбата на плоштината на триаголникот чија страна е еднаква на $|x|$, каде x е апцисата на точката A, а висината е еднаква на $r-x$.

13. На интервалот $[0,1]$ случајно и независно избираме три броја. Со Y да ја означиме разликата меѓу најголемиот и најмалиот избран број. Најдете ги густината, математичкото очекување и дисперзијата на случајната променлива Y.

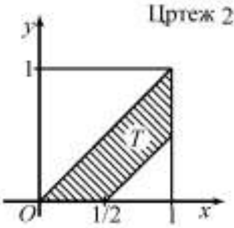
14. Независните случајни променливи X и Y имаат $\mathbf{U}([-1,1])$ распределба. Докажете дека $E(\max\{X,Y\}) = \frac{1}{3}$.

15. Случајната променлива X има $\mathbf{U}[0,1]$ распределба, а од неа независната случајна променлива Y има $\mathbf{U}[0,2]$ распределба. Пресметајте ги веројатностите на настаните $\{|X-Y|>1\}$, $\{X+Y\leq 2\}$, $\{X-Y\geq \frac{1}{2}\}$ и $\{XY\leq 1\}$

16. На интервал $[0,a]$ независно една од друга се избираат две случајни точки со рамномерна распределба. Најдете ја функцијата на распределба $F(x)$ и густината на распределба $p(x)$ на растојанието меѓу нив.

17. Случајната променлива (X,Y) има рамномерна распределба на областа T, цртеж 29. Најдете ја распределбата на случајната променлива $Z = \frac{X}{Y+1}$.

Цртеж 29



18. На кружницата $x^2+y^2=1$ случајно избираме точка (x,y). Случајната променлива X ја мери дожината на покусиот лак зафатен со позитивниот дел на $x-$оската, а случајната променлива Y го мери растојанието меѓу точките (x,y) и $(1,0)$. Најдете ги густините и функциите на распределба на случајните променливи X и Y. Дали случајните променливи X и Y се независни?

19. Нека X_1 е случајно избрана точка од интервалот $[0,1]$. Ако $X_1 = x_1$, тогаш X_2 е случајно избрана точка од интервалот $[x_1, 1+x_1]$. Ако $X_2 = x_2$, тогаш X_3 е случајно избрана точка од интервалот $[x_2, 1+x_2]$. Најдете ги распределбите на X_2 и X_3.

20. Независните случајни променливи X и Y имаат $\mathbf{U}((0,1))$ распределба. Како се распределени случајните променливи $U = \sqrt{-2\ln X}\cos\frac{\pi Y}{2}$ и $U = \sqrt{-2\ln X}\sin\frac{\pi Y}{2}$. Дали овие случајни променливи се независни?

21. Нека $X_i, i=1,2,...,n$ се независни случајни променливи и нека нивните функции на распределби се $F_i(x), i=1,2,...,n$. Најдете ја функцијата на распределба на случајната променлива
    a) $\max\{X_i, i=1,2,...,n\}$,
    b) $\min\{X_i, i=1,2,...,n\}$.

22. Случајните променливи X,Y и Z се независни и сите имаат густина $p(x) = e^{-|x|/2}$. Најдете ја густината на случајната променлива $U = \min\{X,Y,Z\}$.

23. Должината на еден предмет има $\mathbf{U}[a,b]$ распределба. Независно еден од друг се изработени n предмети. Најдете ја очекуваната вредност и дисперзијата на најкраткиот и најдолгиот предмет.

24. Дијаметарот на кругот е приближно измерен. Сметајќи дека неговата должина е рамномерно распределена на интервалот $[a,b]$ најдете ја распределбата на веројатноста на плоштината на кугот, нејзиното математичко очекување и дисперзијата.

25. Точката (X,Y) случајно се избира во квадратот $[0,1]\times[0,1]$. Најдете ја функцијата на распределба и математичкото очекување на случајната променлива $R=\sqrt{X^2+Y^2}$.

26. Нека X и Y се независни случајни променливи со густини

$$p(x)=\begin{cases}\frac{3x^2}{8}, & 0\le x\le 2\\ 0, & \text{во останатите случаи}\end{cases} \quad \text{и} \quad g(y)=\begin{cases}y^{-2}, & y\ge 1\\ 0, & y<1\end{cases}$$

соодветно. Пресметајте ја веројатноста на настанот $\{XY>1\}$.

27. Случајниот вектор (X,Y) има густина

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}x+y, & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1,\\ 0, & \text{во останатите случаи.}\end{cases}$$

Најдете ја густината на случајната променлива $Z=X+Y$.

28. Случајниот вектор (X,Y,Z) има густина

$$f_{X,Y,Z}(x,y,z)=\begin{cases}6(1+x+y+z)^{-4}, & x,y,z\ge 0,\\ 0, & \text{во останатите случаи.}\end{cases}$$

Најдете ја густината на случајната променлива $W=X-Y+Z$.

29. Случајниот вектор (X,Y,Z) има густина

$$f_{X,Y,Z}(x,y,z)=\begin{cases}(y-z)e^{-x}, & 0\le x, 0\le y\le x, 0\le z\le y,\\ 0, & \text{во останатите случаи.}\end{cases}$$

Најдете ја густината на случајната променлива $W=X-Y+Z$.

30. Случајниот вектор (X,Y) има густина

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}e^{-x-y}, & 0\le x, 0\le y,\\ 0, & \text{во останатите случаи.}\end{cases}$$

Пресметајте ги густините на случајните променливи $Z=\frac{X}{X+Y}$, $U=X+Y$ и $V=\frac{X}{Y}$. Дали U и V се независни? Дали постојат математичките очекувања $E(U)$ и $E(V)$?

31. Случајната променлива (X,Y) има густина $f_{X,Y}(x,y)=\frac{1}{\pi\sqrt{69}}e^{-\frac{8x^2-10\sqrt{3}xy+18y^2}{69}}$, $x,y\in\mathbf{R}$. Најдете ги константите a и b така да случајните променливи $U=aX+bY$ и $V=aX-bY$ се независни.

16. ФУНКЦИОНАЛНИ ЗАВИСНОСТИ МЕЃУ ЕДНОДИМЕНЗИОНАЛНИТЕ СТАНДАРДНИ АПСОЛУТНО-НЕПРЕКИНАТИ СЛУЧАЈНИ ПРОМЕНЛИВИ

Во оваа точка ќе разгледаме некои карактеристични функционални зависности меѓу еднодимензионалните стандардни апсолутно-непрекинати случајни променливи. Повеќето од овие зависности играат важна улога во примените на теоријата на веројатност, а особено во статистиката.

Нека X и Y се независни случајни променливи со распределби $\mathbf{E}(\lambda_1)$ и $\mathbf{E}(\lambda_2)$, соодветно. Ако ја искористиме формулата (12) од претходната точка, при $z>0$ за густината на збирот $X+Y$ добиваме

$$p_{X+Y}(z)=\int_0^z \lambda_1 e^{-\lambda_1 x}\lambda_2 e^{-\lambda_2(z-x)}dx=\frac{\lambda_1\lambda_2(e^{-\lambda_1 z}-e^{-\lambda_2 z})}{\lambda_2-\lambda_1}, \tag{1}$$

и $p_{X+Y}(z)=0$, за $z\le 0$. Ако $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$, тогаш од (1) имаме

$$p_{X+Y}(z)=\lim_{\lambda_2\to\lambda}\frac{\lambda\lambda_2(e^{-\lambda z}-e^{-\lambda_2 z})}{\lambda_2-\lambda}=\lambda^2 ze^{-\lambda z}=\frac{\lambda^2}{\Gamma(2)}z^{2-1}e^{-\lambda z}, \text{ за } z>0$$

и $p_{X+Y}(z)=0$, за $z\le 0$, што значи дека $X+Y$ има $\Gamma(2,\lambda)$ распределба. Со тоа ја докажавме следнава лема.

Лема 46. Нека X и Y се независни случајни променливи со распределби $\mathbf{E}(\lambda)$. Тогаш случајната променлива $X+Y$ има $\Gamma(2,\lambda)$ распределба. ♦

Последица 18. Ако $X_i, i=1,2,...,n$ се независни случајни променливи со $\mathbf{E}(\lambda)$ распределба, тогаш случајната променлива $\sum_{i=1}^{n} X_i$ има $\Gamma(n,\lambda)$ распределба.

Доказ. Непосредно следува од лема 46, задача 13.7 и принципот на математичка индукција. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ♦

Лема 47. Ако случајната променлива X има $\mathrm{N}(a;\sigma^2)$ распределба, тогаш случајната променлива $Y=(\frac{X-a}{\sigma})^2$ има χ_1^2 распределба.

Доказ. Од пример 32 б) следува дека случајната променлива $Z=\frac{X-a}{\sigma}$ има $\mathrm{N}(0;1)$ распределба. Затоа $Y=Z^2$ и Z има $\mathrm{N}(0;1)$ распределба. Да ја разгледаме функцијата $g(x)=x^2$, $A=\mathbf{R}$. Бидејќи g не е инјекција на A, ставаме

$$A_1=(-\infty,0),\ A_2=(0,\infty),\ g_i=g_{|A_i}, i=1,2.$$

Тогаш $g_i, i=1,2$ се инјекции и притоа $C_1=C_2=(0,+\infty)$ и важи

$$g_1^{-1}(y)=-\sqrt{y},\ g_2^{-1}(y)=\sqrt{y},\ y\in(0,+\infty).$$

Сега, со примена на формулата (9) од теорема 41 добиваме

$$\begin{aligned}p_Y(y)&=\frac{1}{2\sqrt{y}}[p_Z(-\sqrt{y})+p_Z(\sqrt{y})]I_{(0,+\infty)}(y)\\&=\frac{1}{2\sqrt{y}}[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(-\sqrt{y})^2}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\sqrt{y}^2}]I_{(0,+\infty)}(y)\\&=\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\pi}}y^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{y}{2}}I_{(0,+\infty)}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}(\tfrac{1}{2})^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}-1}e^{-\frac{y}{2}}I_{(0,+\infty)}(y),\end{aligned}$$

и како $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$ добиваме

$$p_Y(y)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{(\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}-1}}{\Gamma(\frac{1}{2})}e^{-\frac{1}{2}y}, & x\geq 0,\end{cases}$$

што значи дека Y има гама распределба со параметри $\lambda=\frac{1}{2}$ и $\alpha=\frac{1}{2}$. Конечно, од забелешка 33 следува дека Y има χ^2-распределбата со еден степен на слобода. ♦

Лема 48. Нека X и Y се независни случајни променливи со $\Gamma(\alpha_1,\lambda)$ и $\Gamma(\alpha_2,\lambda)$ распределби, соодветно. Тогаш случајната променлива $Z=X+Y$ има $\Gamma(\alpha_1+\alpha_2,\lambda)$.

Доказ. Од пример 38 а) следува дека $p_Z(z)=0$, ако $z\leq 0$, а за $z>0$ имаме

$$\begin{aligned}p_Z(z)&=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}p_X(x)p_Y(z-x)dx=\int\limits_0^z\frac{\lambda^{\alpha_1}x^{\alpha_1-1}}{\Gamma(\alpha_1)}e^{-\lambda x}\frac{\lambda^{\alpha_2}(z-x)^{\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_2)}e^{-\lambda(z-x)}dx\\ &=\frac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}e^{-\lambda z}\int\limits_0^z x^{\alpha_1-1}(z-x)^{\alpha_2-1}dx=\begin{bmatrix}\text{замена } x=tz,\ dx=zdt\\ (z-x)^{\alpha_2-1}=z^{\alpha_2-1}(1-t)^{\alpha_2-1}\end{bmatrix}\\ &=\frac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}z^{\alpha_1+\alpha_2-1}e^{-\lambda z}\int\limits_0^z t^{\alpha_1-1}(1-t)^{\alpha_2-1}dx\\ &=\frac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}z^{\alpha_1+\alpha_2-1}e^{-\lambda z}\mathrm{B}(\alpha_1,\alpha_2)=\frac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}z^{\alpha_1+\alpha_2-1}e^{-\lambda z},\end{aligned}$$

што значи дека случајната променлива Z има $\Gamma(\alpha_1+\alpha_2,\lambda)$. ♦

Последица 19. Нека $X_i, i=1,2,...,n$ се независни случајни променливи со распределби $\Gamma(\alpha_i,\lambda), i=1,2,...,n$, соодветно. Тогаш случајната променлива $\sum\limits_{i=1}^n X_i$ има $\Gamma(\sum\limits_{i=1}^n\alpha_i,\lambda)$ распределба.

Доказ. Непосредно следува од лема 48, задача 13.7 и принципот на математичка индукција. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ♦

Последица 20. Нека $X_i, i=1,2,...,k$ се независни случајни променливи со распределби $\chi^2_{n_i}, i=1,2,...,k$, соодветно. Тогаш случајната променлива $\sum\limits_{i=1}^k X_i$ има $\chi^2_{n_1+...+n_k}$ распределба.

Доказ. По услов, за секој $i=1,2,...,k$ случајната променлива X_i има $\chi^2_{n_i}$ распределба, што според забелешка 33 значи дека за секој $i=1,2,...,k$ случајната променлива X_i има $\Gamma(\frac{n_i}{2},\frac{1}{2})$ распределба. Сега од последица 19 следува дека случајната променлива $\sum\limits_{i=1}^{k} X_i$ има $\Gamma(\frac{n_1+...+n_k}{2},\frac{1}{2})$, па повторно од забелешка 33 добиваме дека таа има $\chi^2_{n_1+...+n_k}$ распределба. ♦

Последица 21. а) Ако $X_i, i=1,...,n$ се независни случајни променливи со распределби $\mathrm{N}(a_i;\sigma_i^2), i=1,...,n$, соодветно. Тогаш случајната променлива $\sum\limits_{i=1}^{n}(\frac{X_i-a_i}{\sigma_i})^2$ има χ^2_n распределба.

б) Ако $X_i, i=1,2,...,n$ се независни случајни променливи со распределби $\mathrm{N}(0;1), i=1,2,...,n$, соодветно. Тогаш случајната променлива $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2$ има χ^2_n распределба.

Доказ. Јасно, случајните променливи $(\frac{X_i-a_i}{\sigma_i})^2, i=1,2,...,n$ се независни и според лема 47 секоја од нив има χ^2_1 распределба. Сега тврдењето под а) следува од последица 20. Тврдењето под б) непосредно следува од тврдењето под а). ♦

Лема 49. Ако случајните променливи X и Y се независни, X има $\mathrm{N}(0;1)$ распределба, а Y има χ^2_k-распределба, тогаш случајната променлива $Z=\frac{X}{\sqrt{Y/k}}$ има Студентовата $t-$распределба со k степени на слобода.

Доказ. Случајната променлива X има густина $p_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ и случајната променлива Y има густина $q_Y(y)=\frac{1}{2^{k/2}\Gamma(\frac{k}{2})}y^{\frac{k}{2}-1}e^{-\frac{y}{2}}$ и како случајните променливи X и Y се независни добиваме дека случајната променлива (X,Y) е апсолутно-непрекината со густина

$$f_{X,Y}(x,y)=p_X(x)q_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\frac{1}{2^{k/2}\Gamma(\frac{k}{2})}y^{\frac{k}{2}-1}e^{-\frac{y}{2}}$$

$$=\frac{1}{2^{k/2}\Gamma(\frac{k}{2})\sqrt{2\pi}}y^{\frac{k}{2}-1}e^{-\frac{y}{2}-\frac{x^2}{2}}.$$

Воведуваме нови променливи z и w: $z=\frac{x}{\sqrt{y/k}}$, $w=y$. Според тоа, $x=z\sqrt{\frac{w}{k}}$, $y=w$ и притоа Јакобијанот е $J=\sqrt{\frac{w}{k}}$, па затоа густината на случајната променлива (Z,W) е:

$$f_{Z,W}(z,w)=f_{X,Y}(z\sqrt{\frac{w}{k}},w)\cdot|J|=\frac{1}{2^{k/2}\Gamma(\frac{k}{2})\sqrt{2\pi}\sqrt{k}}w^{\frac{k-1}{2}}e^{-\frac{1}{2}w(1+\frac{z^2}{k})}.$$

Ќе ја определиме маргиналната густина на случајната променлива $Z=\frac{X}{\sqrt{Y/k}}$. Бидејќи w се менува од 0 до $+\infty$, за маргиналната густина на случајната променлива Z добиваме:

$$f_Z(z)=\frac{1}{2^{k/2}\Gamma(\frac{k}{2})\sqrt{2\pi}\sqrt{k}}\int\limits_0^{+\infty} w^{\frac{k-1}{2}}e^{-\frac{1}{2}w(1+\frac{z^2}{k})}dw\,.$$

Во последниот интеграл ја воведуваме смената

$$t=\frac{w}{2}(1+\frac{z^2}{k}),\ w=\frac{2t}{1+z^2/k}\ ,\ dw=\frac{2dt}{1+z^2/k}$$

и добиваме

$$f_Z(z)=\frac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma(\frac{k}{2})\sqrt{2\pi}\sqrt{k}}2^{\frac{k+1}{2}}(1+\frac{z^2}{k})^{-\frac{k+1}{2}}\int\limits_0^{+\infty} t^{\frac{k+1}{2}-1}e^{-t}dt=\frac{\Gamma(\frac{k+1}{2})}{\sqrt{k\pi}\Gamma(\frac{k}{2})}(1+\frac{z^2}{k})^{-\frac{k+1}{2}},$$

што значи дека случајната променлива $Z=\frac{X}{\sqrt{Y/k}}$ има Студентова $t-$распределба со k степени на слобода. ♦

Лема 50. Ако случајните променливи X и Y се независни, X има χ_p^2-распределба, а Y има χ_q^2-распределба, тогаш случајната променлива $Z=\frac{Y/q}{X/p}$ има Фишерова $F_{qp}-$распределба со параметри $p,q\in\mathbf{N}$.

Доказ. Случајните променливи X и Y имаат густини

$$p_X(x)=\frac{1}{2^{p/2}\Gamma(\frac{p}{2})}x^{\frac{p}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}\ \text{ и }\ q_Y(y)=\frac{1}{2^{q/2}\Gamma(\frac{q}{2})}y^{\frac{q}{2}-1}e^{-\frac{y}{2}}$$

соодветно, и како случајните променливи X и Y се независни добиваме дека случајната променлива (X,Y) е апсолутно-непрекината со густина

$$f_{X,Y}(x,y)=p_X(x)q_Y(y)=\frac{1}{2^{p/2}\Gamma(\frac{p}{2})}x^{\frac{p}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}\frac{1}{2^{q/2}\Gamma(\frac{q}{2})}y^{\frac{q}{2}-1}e^{-\frac{y}{2}}$$

$$=\frac{1}{2^{(p+q)/2}\Gamma(\frac{p}{2})\Gamma(\frac{q}{2})}x^{\frac{p}{2}-1}y^{\frac{q}{2}-1}e^{-\frac{x+y}{2}}.$$

Воведуваме нови променливи z и w: $z=\frac{y/q}{x/p},\ w=x$. Според тоа, $y=\frac{q}{p}wz,\ x=w$ и притоа Јакобијанот е $J=\frac{q}{p}w$, па затоа густината на случајната променлива (Z,W) е:

$$f_{Z,W}(z,w)=f_{X,Y}(w,\frac{q}{p}wz)\cdot|\,J\,|=\frac{1}{2^{(p+q)/2}\Gamma(\frac{p}{2})\Gamma(\frac{q}{2})}(\frac{q}{p})^{\frac{q}{2}}z^{\frac{q}{2}-1}w^{\frac{p}{2}+\frac{q}{2}-1}e^{-\frac{w(p+qz)}{2p}}\ .$$

Ќе ја определиме маргиналната густина на случајната променлива $Z=\frac{Y/q}{X/p}$. Бидејќи w се менува од 0 до $+\infty$, за маргиналната густина на случајната променлива Z добиваме:

$$f_Z(z)=\frac{1}{2^{(p+q)/2}\Gamma(\frac{p}{2})\Gamma(\frac{q}{2})}(\frac{q}{p})^{\frac{q}{2}}z^{\frac{q}{2}-1}\int\limits_0^{+\infty}w^{\frac{p}{2}+\frac{q}{2}-1}e^{-\frac{w(p+qz)}{2p}}dw\,.$$

Во последниот интеграл ја воведуваме смената

$$t=\frac{w(p+qz)}{2p}\,,\ w=\frac{2pt}{p+qz}\,,\ dw=\frac{2pdt}{p+qz}$$

и добиваме

$$\begin{aligned}f_Z(z)&=\frac{1}{2^{(p+q)/2}\Gamma(\frac{p}{2})\Gamma(\frac{q}{2})}(\frac{q}{p})^{\frac{q}{2}}z^{\frac{q}{2}-1}\int\limits_0^{+\infty}(\frac{2pt}{p+qz})^{\frac{p}{2}+\frac{q}{2}-1}\frac{2p}{p+qz}e^{-t}dt\\&=q^{\frac{q}{2}}p^{\frac{p}{2}}\frac{1}{\Gamma(\frac{p}{2})\Gamma(\frac{q}{2})}\frac{z^{\frac{q}{2}-1}}{(p+qz)^{\frac{p+q}{2}}}\int\limits_0^{+\infty}t^{\frac{p+q}{2}-1}e^{-t}dt\\&=q^{\frac{q}{2}}p^{\frac{p}{2}}\frac{\Gamma(\frac{q+p}{2})}{\Gamma(\frac{p}{2})\Gamma(\frac{q}{2})}\frac{z^{\frac{q}{2}-1}}{(p+qz)^{\frac{p+q}{2}}}\end{aligned}$$

што значи дека случајната променлива $Z=\frac{Y/q}{X/p}$ има Фишерова F_{qp} – распределба со параметри $q,p\in\mathbf{N}$. ♦

Последица 22. Ако $X_i,\,i=1,...,p$ се независни случајни променливи со распределби $\mathrm{N}(a_i;\sigma_i^2),\,i=1,...,p$, соодветно и $Y_k,\,k=1,...,q$ се независни случајни променливи со распределби $\mathrm{N}(b_k;\sigma'^2_k),\,k=1,...,q$, соодветно, тогаш случајната променлива

$$Z=\frac{\frac{1}{q}[(\frac{Y_1-b_1}{\sigma'_1})^2+(\frac{Y_2-b_2}{\sigma'_2})^2+...+(\frac{Y_q-b_q}{\sigma'_q})^2]}{\frac{1}{p}[(\frac{X_1-a_1}{\sigma_1})^2+(\frac{X_2-a_2}{\sigma_2})^2+...+(\frac{X_p-a_p}{\sigma_p})^2]}$$

има Фишерова F_{qp} – распределба со параметри $q,p\in\mathbf{N}$.

Доказ. Непосредно следува од последица 21 а) и лема 50. ♦

ЗАДАЧИ

1. Дадена е случајна променлива X која има Кошиева распределба со густина

$$p_X(x)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+x^2},\,x\in\mathbf{R}\,.$$

Најдете ја функцијата на распределба на случајната променлива:

a) $Y=\frac{X^2}{1+X^2}$,

b) $Y=\frac{1}{1+X^2}$, и

c) $Y=\min\{1,|X|\}$.

2. Случајните променливи X_1 и X_2 се независни и имаат $\boldsymbol{E}(1)$ распределба. Докажете дека случајната променлива $Y=\frac{X_1}{X_1+X_2}$ има $\boldsymbol{U}([0,1])$ распределба.

3. Корените U и V на квадратната равенка $t^2 + Xt + Y = 0$ се независни случајни променливи и истите имаат $\boldsymbol{U}((-1,1))$ распределба. Најдете ги густините на случајните променливи X и Y.

4. Нека X и Y се независни случајни променливи со $\boldsymbol{E}(\lambda)$ распределба. Докажете дека
   1) случајните променливи $X+Y$ и $\frac{X}{Y}$ се независни,
   2) случајните променливи $X-Y$ и $\min\{X,Y\}$ се независни.

5. Нека случајната променлива X има $\mathrm{N}(0;1)$ распределба. Најдете ја густината на веројатност на случајната променлива
$$Y = \begin{cases} \sqrt[n]{X}, & X \geq 0, \\ -\sqrt[n]{-X}, & X < 0. \end{cases}$$

6. Случајната променлива X има $\mathrm{N}(a;\sigma^2)$ распределба. Најдете ја густината на веројатност на случајната променлива $Y = \pi X^2$.

7. Нека случајната променлива X има F_{pq} распределба. Докажете дека случајната променлива $\frac{1}{X}$ има F_{qp} распределба.

8. Нека $X_i, i = 1,2,...,n$ се независни случајни променливи со иста Кошиева распределба. Докажете дека случајните променливи X_1 и $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ се еднакво распределени.

9. Случајните променливи X и Y се независни, при што X има Кошиева распределба со густина
$$p_X(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2}, x \in \mathbf{R},$$
а Y е дискретна со $P\{Y=0\} = \frac{1}{3}, P\{Y=1\} = \frac{2}{3}$. Најдете ја распределбата на случајната променлива XY.

10. Случајните променливи X и Y се независни и имаат Кошиева распределба со густина
$$p_X(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2}, x \in \mathbf{R}.$$
Најдете ја густината на веројатност на случајната променлива $Z = \min\{X,Y\}$.

11. Случајните променливи $X_i, i = 1,2,3$ се независни и имаат $\mathrm{N}(0,1)$ распределба. Докажете, дека случајната променлива $Y = \frac{X_1 + X_2 X_3}{\sqrt{1+X_3^2}}$ има $\mathrm{N}(0,1)$ распределба.

12. Нека X и Y се независни случајни променливи секоја со $\boldsymbol{E}(3)$ распределба.
    a) Најдете ја густината на распределба на случајна променлива (X,Y).
    b) Пресметајте ги веројатностите на настаните $\{X + 2Y \leq 2\}$, $\{X + Y \leq 2\}$, $\{X - Y \leq 2\}$ и $\{XY \leq 1\}$.

13. Нека X и Y се независни случајни променливи при што X има $\boldsymbol{E}(5)$ распределба, а Y има густина
$$q_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{y^2}, & y \geq 1 \\ 0, & y < 1. \end{cases}$$
    a) Најдете ја густината на распределба на дводимензионалната случајна променлива (X,Y).

b) Пресметајте ги веројатностите на настанот $\{XY \le 1\}$.

14. Независните случајни променливи X и Y имаат $\mathrm{N}(0;1)$ распределба. Докажете дека случајните променливи $U = \frac{2XY}{\sqrt{X^2+Y^2}}$ и $V = \frac{X^2-Y^2}{\sqrt{X^2+Y^2}}$ се независни и дека имаат $\mathrm{N}(0;1)$ распределба.

15. Независните случајни променливи X и Y имаат $\mathrm{N}(0;1)$ распределба. Дали случајните променливи $U = X - Y$ и $V = X + Y$ се независни?

16. Нека случајната променлива X има χ_n^2 -распределба и $Y = \sqrt{X}$. Докажете дека

$$p_Y(y) = \begin{cases} \frac{2y^{n-1}e^{-y^2/2}}{\sqrt{2^n}\Gamma(\frac{n}{2})}, & y > 0, \\ 0, & y \le 0. \end{cases}$$

17. Независните случајни променливи X и Y се еднакво распределени со густина

$$p(x) = \tfrac{1}{2}e^{-|x|}, x \in \mathbf{R} .$$

Најдете ги густините на веројатност на случајните променливи

$$U = |X - Y| \text{ и } V = \max\{X, Y\} .$$

ГЛАВА IV

КАРАКТЕРИСТИЧНИ ФУНКЦИИ. СЛАБА КОНВЕРГЕНЦИЈА

1. ПОИМ ЗА КАРАКТЕРИСТИЧНА ФУНКЦИЈА. ОСНОВНИ СВОЈСТВА

Дефиниција 1. Нека X и Y се реални случајни променливи такви, што $|E(X)|<+\infty$ и $|E(Y)|<+\infty$. Комплексниот број

$$E(Z)=E(X)+iE(Y) \tag{1}$$

го нарекуваме *математичко очекување на комплексната случајна променлива* $Z=X+iY$.

Забелешка 1. Основните својства на математичкото очекување, како на пример адитивноста, природно се пренесуваат на комплексните случајни променливи.

Лема 1. Нека $Z=X+iY$ е комплексна случајна променлива таква, што $|E(X)|<+\infty$ и $|E(Y)|<+\infty$. Тогаш,

$$|E(Z)|\leq E(|Z|). \tag{2}$$

Доказ. Ако X е проста случајна променлива, т.е. ако прима само конечно многу вредности $Z=z_k=x_k+iy_k$, при што $P\{Z=z_k\}=p_k$, тогаш

$$|E(X)|=|\sum_k z_k p_k|\leq \sum_k |z_k|\,p_k=E(|Z|), \tag{3}$$

т.е. важи (2). Нека $X=X^+-X^-$, $Y=Y^+-Y^-$, каде $X_n^{\pm}$ и $Y_n^{\pm}$ се низи од прости случајни променливи такви, што $X_n^{\pm}\uparrow X^{\pm}$ и $Y_n^{\pm}\uparrow Y^{\pm}$. Според тоа, $X_n=X_n^+-X_n^-\to X$ и $Y_n=Y_n^+-Y_n^-\to Y$. Тогаш, $X_n\to X$ и од дефиницијата на $E(X)$ и $E(Y)$ имаме

$$\lim_{n\to\infty} E(Z_n)=E(Z),$$

каде $Z_n=X_n+iY_n$. Понатаму, од (3) следува дека за секој n важи

$$|E(Z_n)|\leq E(|Z_n|).$$

Ќе докажеме дека $\lim\limits_{n\to\infty} E(|Z_n|)=E(|Z|)$. Навистина, од

$$|Z_n|\leq|X_n|+|Y_n|=X_n^++X_n^-+Y_n^++Y_n^-\leq X^++X^-+Y^++Y^-=|X|+|Y|$$

и $Z_n\to Z$, бидејќи $|E(X)|<+\infty$ и $|E(Y)|<+\infty$, од теоремата на Лебег за доминантна конвергенција следува

$$\lim_{n\to\infty} E(|Z_n|)=E(|Z|). \ ♦$$

Дефиниција 2. *Карактеристична функција на случајната променлива* X ја нарекуваме функцијата $f_X(t), t\in \mathbf{R}$ определена со

$$f_X(t)=E(e^{itX})\,. \tag{4}$$

Ако F_X е функцијата на распределба на случајната променлива X , тогаш карактеристичната функција на X ја нарекуваме *карактеристична функција на* F_X .

Забелешка 2. а) Ако се искористи Ојлеровата формула

$$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi\,,$$

и дефиниција 1, тогаш функцијата (4) можеме да ја запишеме во видот

$$f_X(t)=E(\cos tX)+iE(\sin tX)\,. \tag{5}$$

Да забележиме дека понекогаш наместо $f_X(t)$ ќе пишуваме само $f(t)$.

Согласно со забелешка III 19 в) од формулата (5) следува

$$\begin{aligned} f_X(t)&=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cos tXdF_X(x)+i\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sin tXdF_X(x)\\ &=\int\limits_{-\infty}^{\infty}(\cos tX+i\sin tX)dF_X(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{itX}dF_X(x). \end{aligned} \tag{6}$$

Од равенството (6) следува дека карактеристичната функција $f_X(t)$ е наполно определена од функцијата на распределба $F_X(x)$ на случајната променлива X .

б) Ако $F_X(x)$ е апсолутно непрекината функција на распределба на X со густина $p_X(x)$, тогаш од последната формула добиваме

$$f_X(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{itx}p_X(x)dx\,. \tag{7}$$

Ако распределбата на X е дискретна, тогаш

$$f_X(t)=\sum_k e^{itx_k}P\{X=x_k\}\,. \tag{8}$$

Пример 1. Случајната променлива X има $\boldsymbol{U}([0,a])$, $a>0$ распределба. Ќе ја определиме карактеристичната функција на случајната променлива $Y=\ln X$.

Имаме

$$f_Y(t)=E(e^{iYt})=E(e^{it\ln X})=E(e^{\ln X^{it}})=E(X^{it})\,,$$

па затоа

$$f_Y(t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x^{it}p_X(x)dx=\int\limits_{0}^{a}x^{it}a^{-1}dx=\frac{x^{1+it}a^{-1}}{1+it}\Big|_0^a=\frac{a^{it}}{1+it}\,.\ \blacklozenge$$

Лема 2. а) $|\,f(t)|\le 1$, за секој $t\in\mathbf{R}$ и $f(0)=1$.

б) За секоја случајна променлива X важи $f_X(-t) = \overline{f}_X(t)$.

в) Ако за случајните променливи Y и X важи $Y = aX + b$, $a, b \in \mathbf{R}$, тогаш

$$f_Y(t) = e^{itb} f_X(at).$$

Доказ. а) Јасно, $f(0) = E(e^{i \bullet 0 \bullet X}) = E(1) = 1$. Понатаму, од $|e^{itX}| = 1$ и од лема 1 следува

$$|f(t)| = |E(e^{itX})| \le E(|e^{itX}|) = E(1) = 1.$$

б) Имаме

$$\begin{aligned} f_X(-t) &= E(e^{i(-t)X}) = E(e^{-itX}) = E(\cos tX - i\sin tX) = E(\cos tX) - iE(\sin tX) \\ &= \overline{E(\cos tX) + iE(\sin tX)} = \overline{E(\cos tX + i\sin tX)} = \overline{E(e^{itX})} = \overline{f}_X(t). \end{aligned}$$

в) Непосредно од дефиницијата на карактеристична функција следува

$$f_Y(t) = E(e^{itY}) = E(e^{it(aX+b)}) = E(e^{itb}e^{itaX}) = e^{itb}E(e^{itaX}) = e^{itb} f_X(at).\blacklozenge$$

Пример 2. Докажете, дека функцијата $f(t) = (1 - i|t|)^{-1}$ не е карактеристична функција на ниту една случајна променлива.

Решение. За дадената функција имаме

$$f(-t) = (1 - i|-t|)^{-1} = (1 - i|t|)^{-1} \ne (1 + i|t|)^{-1} = \overline{f}(t),$$

од што, согласно со лема 2 б) следува дека таа не е карактеристична функција на ниту една случајна променлива. ♦

Лема 3. За секоја случајна променлива X нејзината карактеристична функција $f(t)$ е рамномерно непрекината по t.

Доказ. Нека F е функцијата на распределба на случајната променлива X. За секои $t, h \in \mathbf{R}$ важи

$$\begin{aligned} |f(t+h) - f(t)| &= |E(e^{i(t+h)X}) - E(e^{itX})| = |\int_{-\infty}^{+\infty} (e^{i(t+h)x} - e^{itx}) dF(x)| \\ &\le \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{itx}| \cdot |e^{ihx} - 1| \, dF(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{ihx} - 1| \, dF(x). \end{aligned}$$

Бидејќи

$$|e^{itX} - 1| \le 2 \text{ и } \lim_{h \to 0} |e^{ihx} - 1| = 0,$$

од теоремата на Лебег за доминантна конвергенција следува дека

$$\lim_{h \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{ihx} - 1| \, dF(x) = 0,$$

т.е. функцијата f е рамномерно непрекината по t. ♦

Лема 4. Ако $\varphi_X(s) = E(s^X)$ е генераторната функција на целобројната случајна променлива, тогаш

$$f_X(t) = \varphi_X(e^{it}). \tag{8}$$

Доказ. Имаме $\varphi_X(e^{it}) = E((e^{it})^X) = E(e^{itX}) = f_X(t)$. ♦

Пример 3. Нека X и Y се независни целобројни случајни променливи, при што генераторната функција на X е $\varphi_X(s) = \frac{2s}{3-s}$, а карактеристичната функција на Y е $f_Y(t) = \frac{1}{2e^{-it}-1}$. Најдете го законот на распределба на случајната променлива $Z = X + Y$.

Решение. Од лема 4 следува, дека ако во $f_Y(t) = \frac{1}{2e^{-it}-1}$ ставиме $e^{it} = s$ ја добиваме генераторната функција на случајната променлива Y, т.е. $\varphi_Y(s) = \frac{s}{2-s}$. Бидејќи X и Y се независни целобројни случајни променливи, од теорема II 40 следува, дека

$$\varphi_Y(s) = \varphi_{X+Y}(s) = \varphi_Y(s)\varphi_X(s) = \frac{2s}{3-s}\cdot\frac{s}{2-s} = 2 + \frac{8}{2-s} - \frac{18}{3-s} = \sum_{k=2}^{\infty}(4\cdot 2^{-k} - 6\cdot 3^{-k})s^k,$$

од што добиваме

$$P\{Z = k\} = 4\cdot 2^{-k} - 6\cdot 3^{-k}, \quad k = 2,3,4,\ldots. ♦$$

Лема 5. Ако случајните променливи $X_1, X_2, \ldots, X_n$ определени над ист простор на веројатности $(\Omega, \boldsymbol{A}, P)$ се независни, тогаш

$$f_{X_1+X_2+\ldots+X_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} f_{X_k}(t). \tag{9}$$

Доказ. Од независноста на случајните променливи $X_1, X_2, \ldots, X_n$ следува независноста на случајните променливи $e^{itX_1}, e^{itX_2}, \ldots, e^{itX_n}$. Ако на последните случајни променливи го примениме својството за мултипликативност на математичкото очекување, добиваме

$$f_{X_1+X_2+\ldots+X_n}(t) = E(e^{it\sum_{k=1}^{n}X_k}) = E(\prod_{k=1}^{n} e^{itX_k}) = \prod_{k=1}^{n} E(e^{itX_k}) = \prod_{k=1}^{n} f_{X_k}(t). ♦$$

Пример 4. Нека случајните променливи $X_1, X_2, \ldots, X_n$ се независни и сите имаат Кошиева распределба со параметар λ, $\lambda > 0$ и нека $a_i \in \mathbf{R}$, $i = 1,2,\ldots,n$. Најдете ја карактеристичната функција на случајната променлива $Y = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$.

Решение. За секој $i=1,2,...,n$ карактеристичната функција на случајната променлива X_i е $f_{X_i}(t)=e^{-\lambda|t|}$ (докажете!). Од лема 2 в) следува дека за секој $i=1,2,...,n$ карактеристичната функција на случајната променлива a_iX_i е еднаква на $f_{a_iX_i}(t)=e^{-\lambda|a_i|\cdot|t|}$. Конечно, бидејќи случајните променливи a_iX_i, $i=1,2,...,n$ од лема 5 добиваме дека карактеристичната функција на случајната променлива

$$Y=\sum_{i=1}^{n}a_iX_i \text{ е } f_Y(t)=e^{-\lambda b|t|}, \text{ каде } b=\sum_{i=1}^{n}|a_i|,$$

т.е. таа е еднаква на карактеристичната функција на случајна променлива која има Кошиева распределба со параметар λb. ♦

Забелешка 3. а) Од лема 2 б) следува дека за секоја случајна променлива X важи $f_{-X}(t)=f_X(-t)=\overline{f}_X(t)$, што значи дека $\overline{f}_X$ е карактеристична функција на случајната променлива $-X$.

Ако X и $Y=-X$ се независни, тогаш според лема 5 важи

$$f_{X+Y}(t)=f_X(t)f_Y(t)=f_X(t)\overline{f}_X(t)=|f_X|^2(t).$$

Според тоа, ако f е карактеристична функција на некоја случајна променлива, тогаш тоа својство го има и функцијата $|f|^2$.

б) За случајната променлива X ќе велиме дека е *симетрична* ако X и $-X$ имаат исти распределби, т.е. ако $P\{X\in B\}=P\{-X\in B\}=P\{X\in(-B)\}$, за секое Борелово множество $B\in\boldsymbol{B}$. Според а), ако случајната променлива X е симетрична, тогаш $\overline{f}_X(t)=f_{-X}(t)=f_X(t)$, што значи дека карактеристичната функција f_X е реална.

ЗАДАЧИ

1. Користејќи ги својствата на карактеристичните функции, докажете, дека функциите

   а) $\sin t$, б) $\sin t+1$, в) $|\cos t|$,

   г) $\frac{1}{1+t^4}$ д) $a\cos t+b\sin t,\ a,b\in\mathbf{R}, b\neq 0$

   не се карактеристични функции.

2. Густината на распределба на случајната променлива X е

$$p(x)=\begin{cases}\frac{x^{\alpha-1}}{2\Gamma(\alpha)}e^{-x}, & x\geq 0\\ \frac{|x|^{\beta-1}}{2\Gamma(\beta)}e^{x}, & x<0\end{cases}$$

   каде $\alpha,\beta>0$. Најдете ја карактеристичната функција $f_X(t)$.

3. Даден е просторот $([0,1],\boldsymbol{B},P)$, каде P е Лебеговата мера и случајната променлива $X:[0,1]\to\mathbf{R}$ определена со

$$X(\omega)=\begin{cases}2\omega, & \omega\in[0,\frac{1}{2}]\\ 2\omega-1, & \omega\in(\frac{1}{2},1].\end{cases}$$

Најдете ја карактеристичната функција на X .

4. Нека случајниот вектор (X,Y) има густина на распределба
$$p(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{4}[1+xy\,|\,x^2-y^2\,|], & |x|\leq 1, |y|\leq 1\\ 0, & \text{во останите случаи.}\end{cases}$$
Докажете дека за карактеристичните функции важи $f_{X+Y}=f_X f_Y$, меѓутоа случајните променливи X и Y не се независни.
5. Нека X има густина $p(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}$, $x\in\mathbf{R}$ (распределба на Лаплас). Докажете дека карактеристичната функција на X е $f(t)=\frac{1}{1+t^2}$.
6. Нека $f(t)$ е карактеристичната функција на случајната променлива X . Докажете, дека $|\,f(t+h)-f(t)|\leq\sqrt{2(1-\operatorname{Re} f(h))}$, за секој $t,h\in\mathbf{R}$.
7. Независните апсолутно-непрекинати случајни променливи X и Y имаат густини
$$p_X(x)=\frac{1}{\pi[1+(x+a)^2]} \text{ и } p_Y(x)=\frac{1}{\pi[1+(x+b)^2]},\ a,b\in\mathbf{R},$$
соодветно. Најдете ја карактеристичната функција на случајната променлива $Z=\frac{X+2Y}{3}$.
8. Нека $f(t)$ е карактеристичната функција на случајната променлива X . Докажете, дека за секој $c>0$ важи $\int\limits_0^c(1-\operatorname{Re} f(t))dt\geq c(1-\sin 1)P\{|\,X\,|\geq\frac{1}{c}\}$.
9. Нека f е карактеристична функција. Докажете, дека ако за некој $t_0\neq 0$ важи $f(t_0)=1$, тогаш t_0 е периода на f , т.е. $f(t_0+t)=f(t_0)$, за секој $t\in\mathbf{R}$.

2. ИНВЕРЗНА ФОРМУЛА ЗА КАРАКТЕРИСТИЧНА ФУНКЦИЈА

Во претходната точка видовме дека на секоја функција на распределба $F_X(x)$ и соодветствува карактеристична функција $f_X(x)$. Нека имаме непрекината густина на распределба $p_X(x)$. Тогаш, како што видовме карактеристичната функција се пресметува според формулата
$$f_X(t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}p_X(x)dx\,, \tag{1}$$
т.е. $f_X(x)$ е Фуриевата трансформација на функцијата $p_X(x)$. Логично е да се запрашаме дали важи обратното, т.е. дали секоја карактеристична функција еднозначно определува соодветна функција на распределба, и прашањето како за дадена карактеристична функција да се најде соодветната функција на распределба. Одговорот на првото прашање е потврден и притоа одговорот и на двете прашања е содржан во теоремата за инверзната формула на карактеристична функција.

Теорема 1 (теорема за инверзна формула). Нека $F(x)$ е функција на распределба и $f(t)$ е нејзината карактеристична функција и нека се a и b , каде $a<b$, точки на непрекинатост на функцијата $F(x)$. Тогаш, важи равенството

$$F(b)-F(a)=\lim_{A\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A}\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}f(t)dt\,. \tag{2}$$

Доказ. Ако ја искористиме теоремата на Фубини добиваме:

$$\begin{aligned}K_A&=\frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A}\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}f(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A}\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}[\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}dF(x)]dt\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}[\int_{-A}^{A}\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}e^{itx}dt]dF(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}G_A(x)dF(x),\end{aligned} \tag{3}$$

при што означивме

$$G_A(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A}\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}e^{itx}dt\,.$$

Примената на теоремата на Фубини е коректна, бидејќи

$$|\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}e^{itx}|=|\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}|=|\int_a^b e^{-itx}dx|\le\int_a^b|e^{-itx}|dx=\int_a^b dx=b-a$$

и

$$\int_{-A}^{A}\int_{-\infty}^{+\infty}(b-a)dF(x)dt\le 2A(b-a)<+\infty\,.$$

Понатаму, функциите $\frac{\cos t(x-a)}{t}$ и $\frac{\cos t(x-b)}{t}$ се непарни, па затоа

$$\begin{aligned}G_A(x)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A}\frac{e^{it(x-a)}-e^{it(x-b)}}{it}dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A}\frac{\sin t(x-a)-\sin t(x-b)}{t}dt\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-A(x-a)}^{A(x-a)}\frac{\sin u}{u}du-\frac{1}{2\pi}\int_{-A(x-b)}^{A(x-b)}\frac{\sin v}{v}dv.\end{aligned} \tag{4}$$

Функцијата $g(s,t)=\int_s^t\frac{\sin v}{v}dv$ е рамномерно непрекината по s и t (докажи!) и

$$g(s,t)\to\pi,\quad s\downarrow-\infty,t\uparrow+\infty\,. \tag{5}$$

Затоа постои константа C таква, што за секои A и x важи $|G_A(x)|<C<+\infty$. Освен тоа, од (4) и (5) следува дека $G_A(x)\to G(x)$, $A\to+\infty$ каде

$$G(x)=\begin{cases}0, & x\in(-\infty.a)\cup(b,+\infty)\\ \frac{1}{2}, & x=a\ \text{ или }\ x=b,\\ 1, & x\in(a,b).\end{cases}$$

Нека μ е мера на $(\mathbf{R},\boldsymbol{B})$ таква, што $\mu(a,b]=F(b)-F(a)$. Користејќи ја теоремата на Лебег за доминантна конвергенција и фактот дека a и b се точки на непрекинатост на функцијата F од (3) добиваме

$$K_A = \int_{-\infty}^{+\infty} G_A(x)dF(x) \overset{A\to+\infty}{\to} \int_{-\infty}^{+\infty} G(x)dF(x) = \mu(a,b) + \tfrac{1}{2}\mu\{a\} + \tfrac{1}{2}\mu\{b\}$$

$$= F(b-) - F(a) + \tfrac{1}{2}[F(a) - F(a-)] + \tfrac{1}{2}[F(b) - F(b-)]$$

$$= \tfrac{F(b)+F(b-)}{2} - \tfrac{F(a)+F(a-)}{2} = F(b) - F(a) \text{ . } \blacklozenge$$

Теорема 2. На секоја карактеристична функција $f_X(x)$ и соодветствува единствена функција на распределба $F_X(x)$.

Доказ. Нека е дадена карактеристичната функција $f_X(x)$. Според (2) разликата $F_X(b) - F_X(a)$ за точките на непрекинатост a и b е еднозначно определена со $f_X(x)$.

Во $F_X(b) - F_X(a)$, по точките на непрекинатост a земаме $a \to -\infty$ и еднозначно ја определуваме $F_X(b)$ во точките на непрекинатост b. Понатаму, бидејќи во секоја точка $F_X(x) = \lim\limits_{b \downarrow x} F_X(b)$, каде границата ја наоѓаме по точките на непрекинатост b, добиваме дека $F_X(x)$ е еднозначно определена со $f_X(x)$. ♦

Забелешка 4. Нека случајната променлива X има реална карактеристичната функција f_X. Тогаш

$$f_{-X}(t) = f_X(-t) = \overline{f_X(t)} = f_X(t),$$

па од теорема 2 следува дека $F_{-X} = F_X$, што значи дека случајната променлива X е симетрична. Сега од претходно изнесеното и од забелешка 3 б) следува дека *случајната променлива X е симетрична ако и само ако има реална карактеристична функција.*

Во следната теорема ќе докажеме како во случај на апсолутно-непрекината функција на распределба со помош на карактеристичната функција може да се изрази густината на случајната променлива.

Теорема 3. Нека F е функција на распределба и f е нејзината карактеристична функција. Ако $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|dt < +\infty$, тогаш функцијата на распределба е апсолутно-непрекината, т.е.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(y)dy, \tag{6}$$

и

$$p(x) = \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} f(t)dt. \tag{7}$$

Доказ. Нека $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|dt < +\infty$. Да означиме

$$p(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-itx}f(t)dt\ .$$

Функцијата f е интеграбилна, па затоа функцијата p е добро дефинирана и е ограничена. Понатаму, теоремата на Лебег за доминантна конвергенција следува, дека функцијата p е непрекината, што значи дека таа е интеграбилна на секој конечен интервал $[a,b]$. Функцијата f е интеграбилна, па ако ги искористиме теоремата на Фубини и теорема 1 добиваме

$$\int\limits_a^b p(x)dx=\int\limits_a^b\frac{1}{2\pi}(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-itx}f(t)dt)\,dx=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)(\int\limits_a^b e^{-itx}dx)dt$$

$$=\lim_{A\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-A}^{+A}f(t)(\int\limits_a^b e^{-itx}dx)dt=\lim_{A\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-A}^{+A}\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}f(t)dt=F(b)-F(a),$$

во сите точки a и b на непрекинатост на функцијата $F(x)$. Но, интегралот е непрекината функција на своите граници, па оттука заклучуваме дека последното равенство важи за секои $a,b\in\mathbf{R}$, $a<b$. Ако во последното равенство земеме $b=x$ и $a\to-\infty$ добиваме $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}p(y)dy$, $x\in\mathbf{R}$. Бидејќи $p(x)$ е непрекината, $F(x)$ е диференцијабилна секаде и важи $F'=p$. Но, функцијата F монотоно не опаѓа, па затоа p е ненегативна, од што конечно заклучуваме дека $p(x)$ е густина на $F(x)$. ♦

Пример 5`. Докажете дека функцијата

$$f(t)=\begin{cases}1-t^2, & |t|\le 1\\ 0, & |t|>1\end{cases}$$

не е карактеристична функција за ниту една распределба.

Решение. За дадената функција имаме

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|dt=\int\limits_{-1}^{1}(1-t^2)dt=\frac{4}{3}<+\infty\,.$$

Од теорема 3 следува, дека ако $f(t)$ е карактеристична функција за некоја распределба $F(x)$, тогаш функцијата на распределба е апсолутно непрекината и за густината на распределба добиваме

$$p(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-itx}f(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-1}^{1}e^{-itx}(1-t^2)dt=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^1(1-t^2)\cos txdt=\frac{2(\sin x-x\cos x)}{\pi x^3}\ ,$$

што не е можно, бидејќи функцијата $p(x)$ прима и негативни вредности, т.е. таа не може да биде густина на распределба на случајна променлива. ♦

ЗАДАЧИ

1. Ако $f(t)=\frac{1}{2}(1+e^{-a|t|})$ е карактеристична функција, најдете ја соодветната функција на распределба.

2. Нека
$$f(t)=\begin{cases}1-|t|, & |t|\leq 1,\\ 0, & |t|>1.\end{cases}$$
Докажете дека соодветната густина на веројатност е $p(x)=\frac{1-\cos x}{\pi x^2}$, $x\neq 0$.

3. Најдете ја распределбата на веројатностите на случајната променлива X ако нејзината карактеристична функција е:

   а) $\cos^2 t$, б) e^{-t^2} , в) $e^{-|t|}$, г) $(1+t^2)^{-1}$.

4. Нека φ е карактеристична функција. Докажете ги неравенствата:

   а) $1-\operatorname{Re}\varphi(2t)\leq 4[1-\operatorname{Re}\varphi(t)]$, б) $1-|\varphi(2t)|^2\leq 4[1-|\varphi(t)|^2]$.

5. Нека X е дискретна случајна променлива чие множество вредности е множеството цели броеви и φ е нејзината карактеристична функција. Докажете го равенството
$$P\{X=n\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-itn}\varphi(t)dt\ .$$

6. Нека $\{X_n\}$ е низа независни дискретни случајни променливи со иста распределба на веројатностите во множеството цели броеви. Ако φ е заедничката карактеристична функција на случајните променливи $X_1,...,X_n$ и $Y_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$ докажете го равенството
$$P\{Y_n=k\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-itk}[\varphi(t)]^n dt\ .$$

7. Нека X е случајна променлива со карактеристична функција f . Докажете дека
$$P\{X=x\}=\lim_{A\to\infty}\frac{1}{2A}\int_{-A}^{A}e^{-itx}f(t)dt\ \text{, за секој } x\in\mathbf{R}\ .$$

8. (*Парсевалово равенство*). Нека $p(x)$ е густина на распределбата на веројатности со карактеристична функција $f(t)$. Докажете, дека ако функцијата $p^2(x)$ е интеграбилна, тогаш
$$\int_{-\infty}^{+\infty}p^2(x)dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|^2\,dt\ .$$

9. Нека X е дискретна случајна променлива, која прима вредности $x_1,x_2,...$ со веројатности $p_1,p_2,...$ соодветно и f е нејзината карактеристична функција. Докажете дека
$$\sum_{k=1}^{\infty}p_k^2=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|\varphi(t)|^2\,dt\ .$$

10. Нека f е карактеристична функција на функцијата на распределба F . Докажете дека важи равенството
$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}f(t)dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin Tx}{Tx}dF(x)\ .$$

11. Нека се $F_1(x)$ и $F_2(x)$ функции на распределби и $f_1(t)$ и $f_2(t)$ се нивните карактеристични функции. Докажете дека
$$\sup_{x\in\mathbf{R}} | F_1(x)-F_2(x) | \le \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} | \frac{f_1(t)-f_2(t)}{t} | dt .$$

12. Нека се $p_1(x)$ и $p_2(x)$ густини на веројатности и $f_1(t)$ и $f_2(t)$ се нивните карактеристични функции. Докажете дека
$$\sup_{x\in\mathbf{R}} | p_1(x)-p_2(x) | \le \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} | f_1(t)-f_2(t) | dt .$$

3. МОМЕНТИ И КАРАКТЕРИСТИЧНИ ФУНКЦИИ

При проучувањето на генераторните функции (точка II 12) ја дадовме врската меѓу факториелните моменти и генераторните функции. Во оваа точка ќе се задржиме на врската меѓу карактеристичните функции и моментите на случајните променливи.

Теорема 4. Нека X е случајна променлива со карактеристична функција $f(t)$ и функција на распределба $F(x)$. Ако за некој природен број n важи $E(| X |^n) < +\infty$, тогаш за секој $k \le n$ постои изводот $f^{(k)}(t)$ и притоа важат равенствата:

$$f^{(k)}(t) = i^k \int_{-\infty}^{+\infty} x^k e^{itx} dF(x) ,\ k = 0,1,2,...,n . \tag{1}$$

$$f^{(k)}(0) = i^k E(X^k) ,\ k = 0,1,2,...,n , \tag{2}$$

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(it)^k}{k!} E(X^k) + \frac{(it)^n}{n!} r_n(t) , \tag{3}$$

каде $| r_n(t) | < 3E(| X |^n)$ и $\lim_{t\to 0} r_n(t) = 0$.

Доказ. Нека $E(| X |^n) < +\infty$. Од неравенството на Љапунов следува дека за секој $k \le n$ важи
$$E(| X |^k) \le [E(| X |^n)]^{\frac{k}{n}} < +\infty .$$
Јасно, равенството (1) важи за $k = 0$. Понатаму добиваме
$$\frac{f(t+h)-f(t)}{h} = E(\frac{e^{i(t+h)X}-e^{itX}}{h}) = E(e^{itX}\ \frac{e^{ihX}-1}{h}) .$$
Но, $| \frac{e^{ihX}-1}{h} | \le | X |$ и $E(| X |^n) < +\infty$, па од теоремата на Лебег за доминантна конвергенција следува
$$f\,'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{f(t+h)-f(t)}{h} = E(e^{itX} \lim_{h\to 0} \frac{e^{ihX}-1}{h}) = E(iXe^{itX}) = i\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{itx} dF(x) .$$

Нека претпоставиме дека равенството (1) важи за некој $k < n$. Имаме

$$\frac{f^{(k)}(t+h)-f^{(k)}(t)}{h} = i^k E(X^k e^{itX} \frac{e^{ihX}-1}{h}). \tag{4}$$

Но,

$$| X^k \frac{e^{ihX}-1}{h} |=| X^k | \cdot | \frac{e^{ihX}-1}{h} | \leq | X |^k | X |=| X |^{k+1} \text{ и } E(| X |^{k+1}) < +\infty ,$$

па од теоремата на Лебег за доминантна конвергенција и од равенството (4) следува

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(t) &= \lim_{h\to 0} \frac{f^{(k)}(t+h)-f^{(k)}(t)}{h} = i^k E(X^k e^{itX} \lim_{h\to 0} \frac{e^{ihX}-1}{h}) \\ &= E(i^{k+1} X^{k+1} e^{itX}) = i^{k+1} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{k+1} e^{itx} dF(x), \end{aligned}$$

од што според принципот на математичка индукција следува, дека (1) важи за секој $k \leq n$.

Равенствата (2) следуваат непосредно од равенствата (1). Останува да го докажеме равенството (3). За секој реален број x важи

$$e^{ix} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(ix)^k}{k!} + \frac{(ix)^n}{n!} (\cos a_1 x + i \sin a_2 x) ,$$

каде $a_1, a_2 \in [-1,1]$. Од последното равенство следува

$$e^{itX} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(itX)^k}{k!} + \frac{(itX)^n}{n!} (\cos \lambda_1 tX + i \sin \lambda_2 tX) , \tag{5}$$

каде λ_1 и λ_2 се случајни променливи кои примаат вредности во множеството $[-1,1]$. Ако во равенството (5) го најдеме математичкото очекување на левата и десната страна, добиваме

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(it)^k}{k!} E(X^k) + \frac{(it)^n}{n!} [E(X^n) + r_n(t)] ,$$

каде

$$r_n(t) = \mathbf{M}[X^n \cos \lambda_1 tX + iX^n \sin \lambda_2 tX - X^n] .$$

Според тоа, важи $| r_n(t) |< 3E(| X |^n)$, па од теоремата на Лебег за доминантна конвергенција следува $\lim_{t\to 0} r_n(t) = 0$. ♦

Пример 6. Во пример 1 докажавме дека ако случајната променлива X има $\boldsymbol{U}([0,a]), a > 0$ распределба, тогаш карактеристичната функција на случајната променлива $Y = \ln X$ е $f_Y(t) = \frac{a^{it}}{1+it}$. Понатаму, $f_Y^{'}(t) = \frac{ia^{it}[(1+it)\ln a - 1]}{(1+it)^2}$, па од теорема 4 наоѓаме $E(Y) = \frac{1}{i} f_Y^{'}(0) = \ln a - 1$. Аналогно имаме $E(Y^2) = \frac{1}{i^2} f_Y^{''}(0) = 1 + (\ln a - 1)^2$, што значи $D(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = 1$. ♦

Теорема 5. Нека X е случајна променливи со карактеристична функција $f(t)$ и функција на распределба $F(x)$. Ако $E(|X|^n) < +\infty$, за секој $n \geq 1$ и

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\sqrt[n]{E(|X|^n)}}{n} = \frac{1}{R} < +\infty , \tag{6}$$

тогаш за секој $t, |t| < R$ важи

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} E(X^k) . \tag{7}$$

Доказ. Нека $0 < r < R$. Тогаш од (6) следува $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{\sqrt[n]{E(|X|^n)}}{n} < \frac{1}{r}$, т.е.

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{E(|X|^n)r^n}{n^n}} < 1 . \tag{8}$$

Понатаму, од Стирлинговата формула $n! \sim \sqrt{2\pi n} \cdot n^n e^{-n}$ добиваме $\frac{n!e^n}{\sqrt{2\pi n}} \sim n^n$, т.е.

$$\frac{1}{n^n} \sim \frac{\sqrt{2\pi n}}{n!e^n} < \frac{1}{n!} . \tag{9}$$

Сега од неравенствата (8) и (9) следува $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{E(|X|^n)r^n}{n!}} < 1$, па од признакот на Коши следува дека редот $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{E(|X|^n)r^n}{n!}$ конвергира, што значи дека за секој $t, |t| < r$ редот $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} E(X^k)$ конвергира. Понатаму, $\frac{|t|^n |r_n(t)|}{n!} < \frac{3|t|^n E(|X|^n)}{n!} \to 0$ кога $n \to \infty$, па затоа од (3) следува (7). ♦

Нека X е случајна променлива и $f(x)$ е нејзина карактеристична функција. Во теорема 2 докажавме дека карактеристичната функција $f(x)$ еднозначно ја определува функцијата на распределба $F(x)$ на случајната променлива X, која согласно со теорема 1 е дадена со инверзната формула

$$F(b) - F(a) = \lim_{A\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^{A} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} f(t)dt , \tag{10}$$

каде a и b, $a < b$, се точки на непрекинатост на функцијата $F(x)$.

Како што знаеме, за секоја случајна променлива X нејзините моменти $m_n = E(X^n)$, $n \geq 1$, доколку постојат, се еднозначно определени. Логично е да се запрашаме, дали ако за случајната променлива X постојат сите моменти m_n, $n \geq 1$, тогаш тие еднозначно ја определуваат нејзината функција на распределба. Со други зборови прашањето гласи: *ако F и G се две функции на распределба, за кои моментите m_n, $n \geq 1$ се совпаѓаат, т.е. такви, што*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^n dF(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n dG(x)\text{, за секој } n \in \mathbf{N}, \tag{11}$$

тогаш дали функциите F и G се совпаѓаат?

Одговорот на поставеното прашање е негативен, што може да се види од следниов пример.

Пример 7. Нека F е функција на распределба со густина

$$f(x) = \begin{cases} ke^{-ax^b}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0, \end{cases}$$

каде $a > 0, 0 < b < \frac{1}{2}$ и константата k е определена со условот $\int_0^{+\infty} f(x)dx = 1$.

Земаме $c = a\,\mathrm{tg}\,b\pi$ и нека

$$g(x) = \begin{cases} ke^{-ax^b}[1 + \frac{1}{2}\sin cx^b], & x > 0 \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

Јасно, $g(x) \ge 0$, за секој $x \in \mathbf{R}$. Ќе докажеме дека за секој ненегативен цел број n важи:

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-ax^b} \sin cx^b dx = 0\,. \tag{12}$$

Од својствата на гама функција имаме, дека за секој $p > 0$ и за секој комплексен број q таков, што $\mathrm{Re}\,q > 0$ важи

$$\int_0^{+\infty} t^{p-1} e^{-qt} dt = \frac{\Gamma(p)}{q^p}\,.$$

Ако во последното равенство ставиме $p = \frac{n+1}{b}, q = a + ic, t = x^b$ добиваме

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(\frac{n+1}{b})}{a^{\frac{n+1}{b}}(1+i\,\mathrm{tg}\,b\pi)^{\frac{n+1}{b}}} &= \frac{\Gamma(\frac{n+1}{b})}{(a+ic)^{\frac{n+1}{b}}} = \int_0^{+\infty} x^{b(\frac{n+1}{b}-1)} e^{-(a+ic)x^b} bx^{b-1}dx = b\int_0^{+\infty} x^n e^{-(a+ic)x^b} dx \\ &= b\int_0^{+\infty} x^n e^{-ax^b} \cos cx^b dx - ib\int_0^{+\infty} x^n e^{-ax^b} \sin cx^b dx. \end{aligned} \tag{13}$$

Но,

$$\begin{aligned} (1+i\,\mathrm{tg}\,b\pi)^{\frac{n+1}{b}} &= (\cos b\pi + i\sin b\pi)^{\frac{n+1}{b}}(\cos b\pi)^{-\frac{n+1}{b}} = (e^{ib\pi})^{\frac{n+1}{b}}(\cos b\pi)^{-\frac{n+1}{b}} \\ &= e^{i\pi(n+1)}(\cos b\pi)^{-\frac{n+1}{b}} = [\cos\pi(n+1) + i\sin\pi(n+1)](\cos b\pi)^{-\frac{n+1}{b}} \\ &= \cos\pi(n+1)\cdot(\cos b\pi)^{-\frac{n+1}{b}} \end{aligned}$$

што значи дека левата страна на (13) е реален број, па затоа имагинарниот дел на десната страна во (13) е еднаков на нула, т.е. за секој ненегативен цел број n важи (12).

Нека G е функција на распределба со густина g. Од (12) следува дека сите моменти на функциите F и G се еднакви меѓу себе, т.е. за секој $n \geq 1$ точно е равенството (11) иако функциите F и G не се совпаѓаат. ♦

Сега логично е да се запрашаме кога низата моменти на случајната променлива еднозначно ја определува нејзината функција на распределба. Одговорот на поставеното прашање го дава следнава теорема.

Теорема 6. Нека F е функција на распределба и

$$c_n = \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^n \, dF(x) .$$

Ако

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\sqrt[n]{c_n}}{n} < +\infty , \tag{14}$$

тогаш моментите $m_n = E(X^n)$, $n \geq 1$, еднозначно ја определуваат функцијата на распределба F.

Доказ. Нека f е карактеристичната функција која и соодветствува на распределбата F. Од (14) и теорема 5 следува дека постои $r > 0$ таков, што за секој $t \in [-r, r]$ важи равенството

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} m_k , \tag{15}$$

што значи дека на интервалот $[-r, r]$ моментите m_n, $n \geq 1$ еднозначно ја определуваат карактеристичната функција f. Нека земеме точка $u \in [-\frac{r}{2}, \frac{r}{2}]$. Тогаш од (14), слично како и при доказот на (16) следува дека за секој t таков, што $t - u \in [-r, r]$

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k (t-u)^k}{k!} f^{(k)}(u) ,$$

каде

$$f^{(k)}(u) = i^k \int_{-\infty}^{+\infty} x^k e^{iux} dF(x)$$

еднозначно е определена со моментите m_n, $n \geq 1$. Според тоа, моментите m_n, $n \geq 1$ еднозначно ја определуваат карактеристичната функција f на интервалот $[-\frac{3r}{2}, \frac{3r}{2}]$. Постапката ја продолжуваме и добиваме дека моментите m_n, $n \geq 1$ еднозначно ја определуваат карактеристичната функција f на целата реална права. Конечно, од теорема 2 следува дека моментите m_n, $n \geq 1$ еднозначно ја определуваат функцијата на распределба F на целата реална права. ♦

Пример 8. Нека случајната променлива X има $\mathrm{N}(0;\sigma^2)$ распределба, т.е. има функција на распределба

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}dt .$$

Од $E(X)=0$ и од претходните разгледувања следува дека

$$m_{2n+1}=0 \text{ и } m_{2n}=E(X^{2n})=(2n-1)!!\sigma^{2n}=\frac{(2n)!}{2^n n!}\sigma^{2n} .$$

Со едноставна проверка наоѓаме дека условот (14) е исполнет, па теорема 6 следува дека нормалната распределба $\mathrm{N}(0;\sigma^2)$ е единствената распределба со наведените моменти. Конечно, ако земеме $\sigma=1$, тогаш за обичните моменти на $\mathrm{N}(0;1)$ распределбата добиваме

$$m_{2n+1}=0 \text{ и } m_{2n}=E(X^{2n})=\frac{(2n)!}{2^n n!} ,$$

и ако го искористиме равенството (7) за карактеристичната функција на $\mathrm{N}(0;1)$ имаме

$$f_X(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(it)^k}{k!}E(X^k)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(it)^{2n}}{(2n)!}\frac{(2n)!}{2^n n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(-\frac{t^2}{2})^n=e^{-\frac{t^2}{2}} . \blacklozenge$$

Последица 1. Нека F е функција на распределба за која постојат реални броеви a и b такви, што $F(a)=0$ и $F(b)=1$. Тогаш F е еднозначно определена со своите моменти. ♦

Последица 2. Нека F е функција на распределба. Ако

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\sqrt[2n]{m_{2n}}}{2n}<+\infty , \tag{16}$$

тогаш моментите $m_n=E(X^n)$, $n\geq 1$, еднозначно ја определуваат функцијата на распределба F .

Доказ. Од неравенството на Љапунов следува

$$\frac{\sqrt[2n-1]{c_{2n-1}}}{2n-1}=\frac{\sqrt[2n-1]{E(|X|^{2n-1})}}{2n-1}\leq\frac{\sqrt[2n]{E(|X|^{2n})}}{2n-1}=\frac{\sqrt[2n]{c_{2n}}}{2n}\cdot\frac{2n}{2n-1} ,$$

што значи

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\sqrt[2n-1]{c_{2n-1}}}{2n-1}\leq\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\sqrt[2n]{c_{2n}}}{2n}\cdot\frac{2n}{2n-1}<+\infty .$$

Конечно, од последното неравенство и од неравенството (16) следува неравенството (14). Сега од теорема 6 значи дека моментите $m_n=E(X^n)$, $n\geq 1$, еднозначно ја определуваат функцијата на распределба F . ♦

На крајот од оваа точка без доказ ќе наведеме уште една теорема која дава доволен услов при кој моментите еднозначно ја определуваат функцијата на распределба.

Теорема 7 (Карлеман). Нека X е случајна големина, F е нејзината функција на распределба и m_n, $n \geq 1$ се обичните моменти на X за кои важи

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[2n]{m_{2n}}} = +\infty .$$

Тогаш F е единствена функција на распределба со дадените моменти. ♦

ЗАДАЧИ

1. Најдете ја карактеристичната функција на дискретната случајна променлива X, за која $P\{X = k\} = 2^{-k-1}$, $k = 0,1,2,3,...$, а потоа пресметајте ги $E(X)$ и $D(X)$.
2. Со $\mathrm{Re}\, f(t)$ да го означиме реалниот дел на карактеристичната функција $f(t)$ на случајната променлива X. Користејќи го равенството $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 ta}{t^2} dt = \pi \mid a \mid, \quad a \in \mathbf{R}$, докажете дека
$$E(\mid X \mid) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \mathrm{Re}\, f(t)}{t^2} dt .$$
3. Случајните променливи X и Y се независни и двете имаат карактеристична функција $f(t) = \cos t$. За случајната променлива $Z = X + Y$ најдете $E(Z)$ и $D(Z)$.
4. Нека $f_X(t) = \cos^2 t$, $f_Y(t) = e^{-t^2}$ и $f_Z(t) = (1 + t^2)^{-1}$ се карактеристичните функции на независните случајни променливи X, Y и Z, соодветно. За случајната променлива $U = Z + 2Y + 3X$ најдете $E(Z)$ и $D(Z)$.

4. ПРИМЕРИ НА КАРАКТЕРИСТИЧНИ ФУНКЦИИ

Во оваа точка, користејќи ги резултатите од претходните разгледувања ќе ги определиме карактеристичните својства на најчесто применуваните случајни променливи.

Пример 9. а) Ако случајната променлива X има биномна распределба $B\{n, p\}$, тогаш според пример II 61 а) нејзината генераторна функција е $\varphi(s) = (ps + q)^n$. Сега од лема 4 следува дека карактеристична функција на случајната променлива X е

$$f_X(t) = (pe^{it} + 1 - p)^n .$$

б) Ако случајната променлива X има Поасоновата распределба $\boldsymbol{P}(a)$, тогаш според пример II 61 б) нејзината генераторна функција е $\varphi(s) = e^{a(s-1)}$. Сега, од лема 4 следува дека карактеристична функција на случајната променлива X

$$f_X(t) = e^{a(e^{it} - 1)} .$$

в) Ако случајната променлива X има геометриската распределба

$$P\{X=n\}=q^n p, \quad n=0,1,2,...;\ p+q=1,$$

Тогаш според пример II 61 б) нејзината генераторна функција е $\varphi(s)=\frac{p}{1-qs}$. Сега од лема 4 следува дека карактеристична функција на случајната променлива X е

$$f_X(t)=\frac{p}{1-qe^{it}}.$$

г) Нека X има дискретна рамномерна распределба, т.е.

$$P\{X=k\}=\frac{1}{n}, k=1,2,...,n.$$

Тогаш за секој $t\in\mathbf{R}$ важи

$$f_X(t)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}e^{itk}=\frac{e^{it}}{n}\frac{1-e^{itn}}{1-e^{it}}. \ \blacklozenge$$

Пример 10. За дегенерираната распределба $P\{X=c\}=1$ карактеристичната функција е $f_X(t)=E(e^{itc})=e^{itc}$. ♦

Пример 11. Во пример 8 ја определивме карактеристичната функција на случајната распределба X која има стандардна нормална распределба $\mathrm{N}(0,1)$. Овде ќе презентираме уште еден начин за наоѓање на истата. Имаме

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx-\frac{x^2}{2}}dx. \tag{1}$$

Равенството (1) го диференцираме по t и добиваме

$$f'(t)=\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}xe^{itx-\frac{x^2}{2}}dx.$$

Понатаму, со парцијална интеграција ја добиваме диференцијалната равенка

$$f'(t)=\frac{i}{\sqrt{2\pi}}[-e^{itx-\frac{x^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{+\infty}+it\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx-\frac{x^2}{2}}dx]=-tf(t).$$

Конечно, ако јаземеме предвид лема 2 а) и последната равенка ја решиме, со почетен услов $f(0)=1$ добиваме $f(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}$.

Понатаму, од пример II 32 б) следува дека случајната променлива $Y=\sigma X+a$ има $\mathrm{N}(a,\sigma^2)$ распределба, што според лема лема 2 в) значи дека карактеристичната функција случајната на распределбата $\mathrm{N}(a,\sigma^2)$ е

$$f_Y(t)=f_{\sigma X+a}(t)=e^{ita}f_X(\sigma t)=e^{ita-\frac{\sigma^2t^2}{2}}. \ \blacklozenge \tag{2}$$

Пример 12. а) Нека случајната променлива X има $\boldsymbol{U}([a,b]), a<b$ распределба. Тогаш

$$f(t)=\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b e^{itx}dx=\frac{e^{itx}}{it(b-a)}\Bigg|_a^b=\frac{e^{itb}-e^{ita}}{it(b-a)}\,. \tag{3}$$

Ако $a=-k, b=k$, тогаш од (3) добиваме $f(t)=\frac{e^{itk}-e^{-itk}}{2itk}=\frac{\sin kt}{kt}$. ♦

б) Нека случајната променлива X има $\boldsymbol{E}(\lambda)$, $\lambda>0$ распределба. Тогаш

$$f_X(t)=\lambda\int\limits_0^{+\infty}e^{itx}e^{-\lambda x}dx=\lambda\int\limits_0^{+\infty}e^{(it-\lambda)x}dx=\frac{\lambda}{\lambda-it}\,. \tag{4}$$

в) Нека X има *двострана експоненцијална распределба*, т.е. нека

$$p(x)=\frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda|x|},\ x\in\mathbf{R}$$

каде $\lambda>0$ е фиксиран параметар. Тогаш имаме

$$\begin{aligned} f_X(t)&=\frac{\lambda}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}e^{-\lambda|x|}dx=\lambda\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\lambda x}\cos tx dx\\ &=\lambda\frac{e^{-\lambda x}(t\sin tx-\lambda\cos tx)}{\lambda^2+t^2}\Big|_0^{+\infty}=\frac{\lambda^2}{\lambda^2+t^2},\ t\in\mathbf{R}.\end{aligned} \tag{5}$$

г) Во пример 4 случајната променлива со Кошиева распределба со параметар $\lambda=1$. Тогаш имаме

$$f_X(t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{itx}}{1+x^2}dx,\quad t\in\mathbf{R}\,.$$

Понатаму, за $\lambda=1$ функцијата (5) е апсолутно интеграбилна, па затоа од теоремата за инверзна формула применета на двостраната експоненцијална распределба, во случај кога $\lambda=1$, следува

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}e^{-|x|}=p(x)&=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-itx}}{1+t^2}dt=\begin{bmatrix} t=-s, & dt=-ds,\\ t:-\infty\to+\infty, & s:+\infty\to-\infty\end{bmatrix}\\ &=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{+\infty}^{-\infty}\frac{e^{isx}}{1+(-s)^2}ds=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{isx}}{1+s^2}ds,\end{aligned}$$

што значи дека $f_X(t)=e^{-|t|}, t\in\mathbf{R}$.

д) Нека случајната променлива X има $\Gamma(\alpha,\lambda)$, $\alpha>0,\lambda>0$ распределба. Покасно ќе покажеме дека

$$f_X(t)=(1-\frac{it}{\lambda})^{-\alpha},\ t\in\mathbf{R}$$

е карактеристична функција на гама распределбата. Специјално, бидејќи χ_n^2-распределбата е $\Gamma(\frac{n}{2},\frac{1}{2})$ распределба добиваме дека ако случајната променлива Y има χ_n^2-распределба, тогаш нејзината карактеристична функција е

$$f_X(t)=(1-2it)^{-\frac{n}{2}},\ t\in\mathbf{R}\,.\ ♦$$

Во следните разгледувања ќе покажеме како карактеристичните функции може да се искористат за докажување на некои важни тврдења, кои претходно ги разгледавме.

Пример 13. а) Нека $X_i, i=1,2,...,n$ се независни случајни променливи со распределби $\boldsymbol{P}(\lambda_i), i=1,2,...,n$, соодветно и нека $X=\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$. Тогаш од пример 9 б) следува

$$f_X(t)=\prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(t)=\prod_{i=1}^{n} e^{\lambda_i(e^{it}-1)}=e^{(e^{it}-1)\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i}, t\in\mathbf{R}.$$

Конечно, од теорема 2 следува дека X има $\boldsymbol{P}(\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i)$ распределба.

б) Нека $X_i, i=1,2,...,n$ се независни случајни променливи со распределби $B\{n_i, p\}, i=1,2,...,n$, соодветно и нека $X=\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$. Тогаш од пример 9 а) следува

$$f_X(t)=\prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(t)=\prod_{i=1}^{n}(pe^{it}+1-p)^{n_i}=(pe^{it}+1-p)^{\sum\limits_{i=1}^{n} n_i}, t\in\mathbf{R}.$$

Конечно, од теорема 2 следува дека X има $B\{\sum\limits_{i=1}^{n} n_i; p\}$ распределба. ♦

Пример 14. а) Нека $X_i, i=1,2,...,n$ се независни случајни променливи со Кошиева распределба со параметар λ, $\lambda>0$ и $a_i\in\mathbf{R}$, $i=1,2,...,n$. Според пример 12 г) случајните променливи $X_i, i=1,2, \ ...,n$ имаат карактеристична функција $f_X(t)=e^{-|t|}, t\in\mathbf{R}$. Сега од пример 4 и теорема 2 следува дека случајната променлива $Y=\sum\limits_{i=1}^{n} a_i X_i$ има Кошиева распределба со параметар $\lambda\sum\limits_{i=1}^{n}|a_i|$.

б) Нека $X_k, k=1,2,...,n$ се независни случајни променливи со распределби $\mathrm{N}(a_k,\sigma_k^2)$, $k=1,2,...,n$, соодветно и нека $\lambda_k\in\mathbf{R}$, $k=1,2,...,n$. Тогаш од пример 11 следува дека карактеристичната функција на случајната променлива $X=\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k X_k$ е

$$f_{\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k X_k}(t)=\prod_{k=1}^{n} f_{\lambda_k X_k}(t)=\prod_{k=1}^{n} f_{X_k}(\lambda_k t)=\prod_{k=1}^{n} e^{i(\lambda_k t)a_k-\frac{\sigma_k^2(\lambda_k t)^2}{2}}=e^{it\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k a_k-\frac{t^2}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}\sigma_k^2\lambda_k^2}.$$

Конечно, од теорема 2 следува дека X има $\mathrm{N}(\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k a_k, \sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k^2\sigma_k^2)$ распределба.

в) Нека $X_k, k=1,2,...,n$ се независни случајни променливи со $\boldsymbol{E}(\lambda)$, $\lambda>0$ распределба и нека $X=\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$. Тогаш од пример 12 б) следува дека карактеристичната функција на случајната променлива X е

$$f_{\sum\limits_{k=1}^{n} X_k}(t)=\prod_{k=1}^{n} f_{X_k}(t)=\prod_{k=1}^{n}(1-i\tfrac{t}{\lambda})^{-1}=(1-i\tfrac{t}{\lambda})^{-n}, t\in\mathbf{R}.$$

Сега, од теорема 2 и пример 12 д) следува дека случајната променлива X има $\Gamma(n,\lambda)$ распределба.

г) Нека $X_k, k=1,2,...,n$ се независни случајни променливи со распределби $\Gamma(\alpha_k,\lambda)$, $k=1,2,...,n$, соодветно и нека $X=\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$. Тогаш од пример 12 д) следува дека карактеристичната функција на случајната променлива X е

$$f_X(t)=f_{\sum\limits_{k=1}^{n} X_k}(t)=\prod_{k=1}^{n} f_{X_k}(t)=\prod_{k=1}^{n}(1-i\tfrac{t}{\lambda})^{-\alpha_k}=(1-i\tfrac{t}{\lambda})^{-\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k}, t\in\mathbf{R}.$$

Сега од теорема 2 и пример 12 д) следува дека случајната променлива X има $\Gamma(\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k,\lambda)$ распределба.

д) Нека $X_k, k=1,2,...,m$ се независни случајни променливи со распределби $\chi^2_{n_k}$, $k=1,2,...,m$, соодветно и нека $X=\sum\limits_{k=1}^{m} X_k$. Тогаш од пример 12 д) следува дека карактеристичната функција на случајната променлива X е

$$f_X(t)=f_{\sum\limits_{k=1}^{m} X_k}(t)=\prod_{k=1}^{m} f_{X_k}(t)=\prod_{k=1}^{m}(1-2it)^{-\frac{n_k}{2}}=(1-2it)^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{m}n_k}, t\in\mathbf{R}.$$

Сега од теорема 2 и пример 12 д) следува дека случајната променлива X има $\chi^2_{n_1+n_2+...+n_m}$ распределба.

ѓ) Нека $X_k, k=1,2,...,n$ се независни случајни променливи со распределба $\mathrm{N}(a_k;\sigma_k^2), k=1,2,...,n$, соодветно. Според лема III 47 случајните променливи $Y_k=(\frac{X_k-a_k}{\sigma_k})^2$, $k=1,2,...,n$ имаат χ_1^2 распределба и се независни (зошто?). Сега од примерот под д) следува дека случајната променлива $Y=\sum\limits_{k=1}^{n} Y_k=\sum\limits_{k=1}^{n}(\frac{X_k-a_k}{\sigma_k})^2$ има χ_n^2 распределба. ♦

Пример 15. Нека $X_k, k=1,2,...,n$ се независни случајни променливи со $\boldsymbol{E}(1)$ распределба. Во пример II 34 докажавме дека случајните променливи

$$Y=\max\{X_i, i=1,2,...,n\} \text{ и } Z=\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i}{i}$$

имаат иста распределба. Овде последното тврдење ќе го докажеме со помош на карактеристични функции, при што, согласно со теорема 2, доволно е да докажеме дека случајните променливи Z и Y имаат иста карактеристична функција.

За карактеристичната функција на случајната променлива Z имаме

$$f_Z(t)=\prod_{k=1}^{n} f_{X_k}(\tfrac{t}{k})=\prod_{k=1}^{n}\frac{k}{k-it}=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k kC_n^k}{k-it} .$$

Последното равенство се докажува со индукција по n, при што во разложувањето на прости дропки треба да се искористи методот на неопределени коефициенти. Со F да ја означиме заедничката функција на распределба, а со p заедничката густина на распределба на случајните променливи $X_i, i=1,2,...,n$. За функцијата на распределба на случајната променлива Y добиваме

$$F_Y(x)=\begin{cases}(1-e^{-ax})^n, & x\geq 0,\\ 0, & x<0,\end{cases} .$$

па затоа нејзината густина е $p_Y(x)=\frac{d}{dx}[F(x)]^n=nf(x)[F(x)]^{n-1}$, односно

$$p_Y(x)=\begin{cases}ne^{-x}(1-e^{-x})^{n-1}, & x\geq 0\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

Конечно, за карактеристичната функција на случајната променлива Y имаме:

$$\begin{aligned}f_Y(x)&=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}p_Y(x)dx=\int_{0}^{+\infty} e^{itx}ne^{-x}(1-e^{-x})^{n-1}dx\\ &=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{0}^{+\infty} e^{itx}n(-1)^k C_{n-1}^k e^{-(k+1)x}dx\\ &=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k+1}(k+1)C_n^{k+1}\int_{0}^{+\infty} e^{[it-(k+1)]x}dx\\ &=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}kC_n^k\int_{0}^{+\infty} e^{(it-k)x}dx=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k kC_n^k}{k-it}.\end{aligned}$$

Значи, $f_Y(t)=f_Z(t)$, за секој $t\in\mathbf{R}$. ♦

ЗАДАЧИ

1. Независните дискретни случајни променливи $X_1, X_2,..., X_n$ се рамномерно распределени на множеството $\{0,1\}$. Од нив независната случајна променлива Y е рамномерно распределена на интервалот $[0,1]$. Докажете дека случајната променлива $Z=\frac{Y}{2^n}+\sum_{k=1}^{n}\frac{X_k}{2^k}$ е рамномерно распределена на интервалот $[0,1]$.

2. Случајната променлива X има функција на распределба $F(x)$, карактеристична функција $f(t)$ и важи $E(X^2) < +\infty$.
   a) Докажете дека $f_1(t) = -\frac{1}{E(X^2)} f''(t)$ е карактеристичназ функција на некоја случајна променлива. Најдете ја нејзината функција на распределба.
   b) Докажете дека функција $f_2(t) = (1-t^2)e^{-\frac{t^2}{2}}$ е карактеристична функција.
3. Нека случајната променлива X има густина
$$p_X(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1, \\ 2-x, & 1 < x \le 2, \\ 0, & x < 0 \text{ или } x > 2. \end{cases}$$
   Најдете ја нејзината карактеристична функција, а потоа заклучете дека X е збир на две случајни променливи со $\boldsymbol{U}([0,1])$ распределба.
4. Нека $X_1, X_2, ..., X_n$ се независни случајни променливи со иста $\mathrm{N}(0;1)$ -распределба. Докажете дека случајната променлива $\frac{1}{\sqrt{n}}(X_1 + X_2 + ... + X_n)$ има $\mathrm{N}(0;1)$ -распределба.

5. СЛАБА КОНВЕРГЕНЦИЈА НА СЛУЧАЈНИ ПРОМЕНЛИВИ

Од дефиницијата на карактеристична функција следува дека на секоја функција на распределба $F_X(x)$ и соодветствува единствена карактеристична функција $f_X(x)$, а според теорема 2 на секоја карактеристична функција и соодветствува единствена функција на распределба. Според тоа, меѓу множеството функции на распределба и множеството карактеристични функции постои биекција. Покасно, користејќи ја таканаречената слаба конвергенција ќе докажеме дека оваа биекција е непрекината.

Дефиниција 3. За низата функции на распределба $F_n(x)$, $n = 1, 2, ...$, ќе велиме дека *слабо конвергира кон функција* $F(x)$, и ќе пишуваме

$$F_n(x) \Rightarrow F(x),\ n \to \infty,$$

ако $F_n(x) \to F(x)$, $n \to \infty$, во точките x на непрекинатост на функцијата $F(x)$.

Лема 6. Ако низата функции на распределби $\{F_n(x)\}$ слабо конвергира кон некоја распределба, тогаш граничната функција на распределба е еднозначно определена.

Доказ. Нека F и G се функции на распределби такви, што $F_n \Rightarrow F$, $n \to \infty$ и $F_n \Rightarrow G$, $n \to \infty$. Ако a е заедничка точка на непрекинатост на функциите F и G, тогаш важи $F(a) = \lim_{n\to\infty} F_n(a) = G(a)$. Секоја од функциите F и G имаат најмногу пребројливо многу прекини, па затоа функциите F и G се совпаѓаат надвор од множество со Лебегова мера нула. Но, функциите F и G се непрекинати од десно, па затоа тие се совпаѓаат на множеството реални броеви $\mathbf{R}$. ♦

Теорема 7. Нека $F_n(x)$, $n=1,2,\dots$, $F(x)$ се функции на распределби. Тогаш $F_n \Rightarrow F$, $n\to\infty$ ако и само ако секоја подниза $\{F_{n'}\}$ содржи друга подниза $\{F_{n''}\}$ таква, што $F_{n''} \Rightarrow F$, $n\to\infty$.

Доказ. Нека $F_n \Rightarrow F$, $n\to\infty$ и $\{F_{n'}\}$ е произволна подниза од низата $\{F_n\}$. Ако a е точка на непрекинатост на F, тогаш $F(a)=\lim\limits_{n\to\infty} F_n(a)$ и како $\{F_{n'}(a)\}$ е подниза од $\{F_n(a)\}$ добиваме дека $F(a)=\lim\limits_{n\to\infty} F_{n'}(a)$, што значи $F_{n'} \Rightarrow F$, $n\to\infty$. Сега тврдењето следува од фактот дека низата $\{F_{n'}\}$ е подниза на самата себе.

Обратно, нека секоја подниза $\{F_{n'}\}$ на низата $\{F_n\}$ содржи друга подниза $\{F_{n''}\}$ таква, што $F_{n''} \Rightarrow F$, $n\to\infty$. Нека a е произволна точка на непрекинатост на функцијата F. За низата $\{F_n\}$ постои подниза $\{F_{n'}\}$ таква, што $F_{n'} \Rightarrow F$, $n\to\infty$, т.е. $F(a)=\lim\limits_{n\to\infty} F_{n'}(a)$. Ако множеството $\{F_n\}\backslash\{F_{n'}\}$ е бесконечно, тогаш постои подниза $\{F_{n''}\}$ таква, што

$$F_{n''} \Rightarrow F,\ n\to\infty, \text{ т.е. } F(a)=\lim_{n\to\infty} F_{n''}(a).$$

Постапката ја продолжуваме, со што низата $\{F_n(a)\}$ ја разбиваме на најмногу пребројливо многу поднизи секоја од која конвергира кон $F(a)$, па затоа

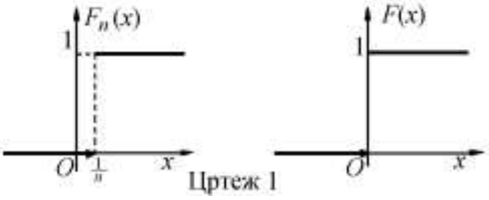
$$F(a)=\lim_{n\to\infty} F_n(a), \text{ т.е. } F_n \Rightarrow F,\ n\to\infty.\ ♦$$

Дефиниција 4. Ако $F_n(x)$ е функција на распределба за случајната променлива X_n, $n=1,2,\dots$, $F(x)$ е функција на распределба за X и $F_n(x) \Rightarrow F(x)$, $n\to\infty$, тогаш ќе велиме дека X_n *слабо конвергира кон* X и ќе пишуваме $X_n \Rightarrow X$, $n\to\infty$.

Пример 16. Нека е дадена низата случајни променливи $X_n=\frac{1}{n}$, $n\geq 1$. Тогаш

$$X_n \Rightarrow X,\ n\to\infty,$$

бидејќи, цртеж 1, од



Цртеж 1

$$F_{X_n}(x)=P\{X_n\leq x\}=\begin{cases}0, & x<\frac{1}{n},\\ 1, & x\geq\frac{1}{n},\end{cases} \quad \text{и} \quad F_X(x)=P\{X\leq x\}=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1, & x\geq 0,\end{cases}$$

добиваме

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x)=F_X(x), \text{ за } x\neq 0.$$

Од друга страна, за $x=0$ имаме $F_{X_n}(0)=0$ и $F_X(0)=1$, што значи дека условот за конвергентност во точката на прекин $x=0$ е нарушен. Последното покажува дека во дефиниција 3, условот за конвергентност на граничната функција во точките на непрекинатост, но не и во секоја точка, е суштествен. ♦

Пример 17. Независните случајни променливи X_n, $n=1,2,...$ имаат $\boldsymbol{U}((0,a))$ распределба. Нека $Y_n=\max\{X_1,X_2,...,X_n\}$, $n=1,2,...$. За функциите на распределба на низата случајни променливи $Z_n=n(a-Y_n)$, $n=1,2,...$ имаме

$$F_{Z_n}(z)=P\{Z_n\le z\}=P\{n(a-Y_n)\le z\}=P\{Y_n\ge a-\tfrac{z}{n}\}$$

$$=1-P\{Y_n<a-\tfrac{z}{n}\}=1-F_{Y_n}(a-\tfrac{z}{n})=1-[F_X(a-\tfrac{z}{n})]^n$$

$$=1-\begin{cases}0, & a-\tfrac{z}{n}<0,\\ (\tfrac{a-z/n}{a})^n, & 0\le a-\tfrac{z}{n}<a,\\ 1, & a-\tfrac{z}{n}\ge a\end{cases}=\begin{cases}0, & z<0,\\ 1-(\tfrac{a-z/n}{a})^n, & 0\le z<na,\\ 1, & z\ge na.\end{cases}$$

Оваа низа функции на распределби, кога $n\to\infty$, конвергира кон функцијата на распределба

$$F_Z=\begin{cases}0, & z<0,\\ 1-e^{-z/a}, & z\ge 0,\end{cases}$$

што значи дека $Z_n\Rightarrow Z$, $n\to\infty$ и Z има $\boldsymbol{E}(\frac{1}{a})$ распределба. ♦

Забелешка 5. а) Во литературата наместо терминот X_n слабо конвергира кон X, често пати се користи терминот X_n *по распределба слабо конвергира кон* X.

б) Во дефиниција 4 рековме дека $X_n\Rightarrow X$, $n\to\infty$ ако $F_n(x)\Rightarrow F(x)$, $n\to\infty$ и $F(x)$ е функција на распределба. Последното е неопходно, бидејќи не секогаш границата $F(x)$ на низа функции на распределба $F_n(x)$, $n=1,2,...$ е функција на распределба, што може да се види од следниот пример.

Пример 17. а) Нека за секој $n=1,2,...$ случајната променлива X_n има $\boldsymbol{U}([-n,n])$ -распределба. Според тоа, за секој $n=1,2,...$ функцијата на распределба на случајната променлива X_n е

$$F_n(x)=\begin{cases}0, & x<-n,\\ \frac{x+n}{2n}, & |x|\le n,\\ 1, & x>n.\end{cases}$$

Функцијата $F(x)=\frac{1}{2}$ е непрекината на целата реална права и притоа за секој $x\in\mathbf{R}$ важи $F_n(x)\to F(x)$, $n\to\infty$, што значи $F_n(x)\Rightarrow F(x)$, $n\to\infty$. Меѓутоа, $F(x)$ не е функција на распределба (зошто?), па затоа $X_n\not\Rightarrow X$, $n\to\infty$.

б) Нека

$$F_n(x)=\begin{cases}0, & x<n,\\ 1, & x\ge n.\end{cases}$$

Функцијата $F(x)=0$ е непрекината на целата реална права и притоа за секој $x\in\mathbf{R}$ важи $F_n(x)\to F(x)$, $n\to\infty$, што значи $F_n(x)\Rightarrow F(x)$, $n\to\infty$. Меѓутоа, $F(x)$ не е функција на распределба. ♦

Според дефиниција 4 конвергенцијата $X_n \Rightarrow X$, $n \to \infty$ е еквивалентна на конвергенцијата $F_n(x) \Rightarrow F(x)$, $n \to \infty$, каде $F, F_1, F_2, F_3, ...$ се функции на распределби на случајните променливи $X, X_1, X_2, X_3, ...$, соодветно. Според тоа, слабата конвергенција на низа случајни променливи зависи само од функциите на распределба, а не од просторите на веројатностите на кои се дефинирани случајните променливи, па затоа за слаба конвергенција на низа случајни променливи може да се зборува и кога членовите на низата и границата се дефинирани на различни простори на веројатности. Меѓутоа, разгледувањата се поедноставни кога членовите на низата и границата се дефинирани на ист простор на веројатности, па затоа ќе ја докажеме теоремата на Скороход.

Теорема 8 (Скороход). Ако низата функции на распределба $\{F_n\}$ слабо конвергира кон функцијата на распределба F, тогаш постојат случајни променливи X, X_n, $n = 1,2,3,...$ кои се дефинирани над ист простор на веројатности $(\Omega, \boldsymbol{A}, P)$ и чии функции на распределби се $F, F_n, n = 1,2,3,..$, соодветно и притоа важи

$$\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega), \text{ за секој } \omega \in \Omega. \tag{1}$$

Доказ. Нека $(\Omega, \boldsymbol{A}, P)$ е простор на веројатности, каде $\Omega = (0,1)$, $\boldsymbol{A}$ е Бореловата $\sigma-$алгебра подмножества од Ω и P е Лебегова мера. Дефинираме функции

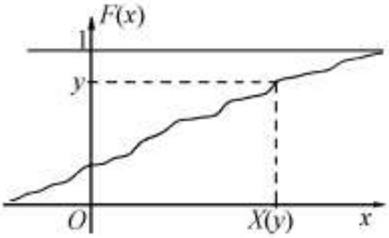
$$X, X_n : \Omega \to \mathbf{R}, \ n = 1,2,3,...$$

такви да за секој $y \in \Omega$ важи:

$$\begin{aligned} X_n(y) &= \inf\{x \mid F_n(x) \ge y\}, \\ X(y) &= \inf\{x \mid F(x) \ge y\}. \end{aligned} \tag{2}$$

Ако $y_1, y_2 \in (0,1)$ се такви, што $y_1 < y_2$, тогаш од $F(x) \ge y_2$ следува $F(x) \ge y_1$, па затоа

$$\{x \mid F(x) \ge y_2\} \subseteq \{x \mid F(x) \ge y_1\}.$$



Цртеж 2

Сега од својствата на инфимумот добиваме

$$X(y_1) = \inf\{x \mid F(x) \ge y_1\} \le \inf\{x \mid F(x) \ge y_2\} = X(y_2),$$

т.е. функцијата X монотоно расте на интервалот $(0,1)$. Аналогно се докажува дека за секој $n \in \mathbf{N}$ функцијата X_n монотоно расте на интервалот $(0,1)$. Понатаму, од (2) следува дека $X(y) \le x$ ако и само ако $y \le F(x)$, па затоа

$$\{y \mid X(y) \le x\} = \{y \mid y \le F(x)\} \tag{3}$$

и како $y \in (0,1)$ добиваме дека $\{y \mid X(y) \le x\} \in \boldsymbol{A}$, што значи дека X е случајна променлива. Аналогно се докажува дека за секој n функцијата X_n е случајна променлива. Ако го искористиме равенството (3) добиваме

$$P\{y \mid X(y) \le x\} = P\{y \mid y \le F(x)\} = F(x),$$

што значи дека F е функција на распределба на случајната променлива X. Аналогно се докажува дека $F_n, n = 1,2,3,...$ се функции на распределба на случајните променливи $X_i, i = 1,2,3,...$.

Останува да го докажеме равенството (1). Бидејќи функцијата X монотоно расте, таа може да има најмногу пребројливо многу прекини од прв вид. Нека $y \in (0,1)$ е точка на непрекинатост на функцијата X. За оваа точка ќе го докажеме равенството (1). Нека $\varepsilon > 0$ и $z \in (y,1)$ се произволни броеви. Избираме броеви x и t такви да функцијата на распределба F е непрекината во точките x и t и да важат неравенствата

$$X(y) - \varepsilon < x < X(y), \tag{4}$$

$$X(z) < t < X(z) + \varepsilon . \tag{5}$$

Од неравенството (4) следува $F(x) < y$. Но, x е точка на непрекинатост на функцијата F, па затоа $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$. Од последното равенство и претходното неравенство следува дека постои $n_0 \in \mathbf{N}$ таков што за секој $n > n_0$ важи $F_n(x) < y$, односно за секој $n > n_0$ важи $x < X_n(y)$. Од последното неравенство и од неравенството (4) следува дека $X(y) - \varepsilon < x < X_n(y)$ и како $\varepsilon > 0$ е произволен број добиваме

$$X(y) \le \underline{\lim}_{n\to\infty} X_n(y). \tag{6}$$

Од неравенството (5) следува $z < F(t)$. Но, t е точка на непрекинатост на функцијата F, па затоа $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(t) = F(t)$. Од последното равенство и претходното неравенство следува дека постои $n_1 \in \mathbf{N}$ таков што за секој $n > n_1$ важи $F_n(t) > z > y$, односно за секој $n > n_1$ важи $X_n(y) < t$. Од последното неравенство и од неравенството (5) следува

$$X_n(y) < t < X(z) + \varepsilon$$

и како $\varepsilon > 0$ е произволен број добиваме

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} X_n(y) \le X(z). \tag{7}$$

Од неравенствата (6) и (7) добиваме

$$X(y) \le \underline{\lim}_{n\to\infty} X_n(y) \le \overline{\lim}_{n\to\infty} X_n(y) \le X(z)$$

и како функцијата X е непрекината во точката y, а точката z можеме произволно да ја избереме добиваме

$$\lim_{n\to\infty} X_n(y) = X(y).$$

Нека A е множеството точки на прекин на функцијата X. Бидејќи множеството A е најмногу пребројливо, неговата Лебегова мера е еднаква на нула. Ако на ова множество ги предефинираме функциите X и $X_i,\ i = 1,2,3,\dots$ ставајќи

$$X_i(y) = X(y) = 0, \text{ за } y \in A,$$

тогаш нивната распределба не се менува, но притоа за секој $y \in (0,1)$ важи

$$\lim_{n\to\infty} X_n(y) = X(y). \ \blacklozenge$$

Лема 7. Нека $F_n(x)$, $n=1,2,...$ и $F(x)$ се функции на распределби. Ако $F_n(x) \to F(x)$, $n \to \infty$, на секаде густо множество D во $\mathbf{R}$, тогаш $F_n(x) \Rightarrow F(x)$, $n \to \infty$.

Доказ. Нека функцијата $F(x)$ е непрекината во точката x и $x', x'' \in D$ се такви да $x' < x < x''$. Тогаш, бидејќи $F_n(x)$, $n=1,2,...$ е функција на распределба добиваме

$$F_n(x') \le F_n(x) \le F_n(x''), \text{ за секој } n=1,2,...,$$

па затоа

$$F(x') = \lim_{n\to\infty} F_n(x') \le \underline{\lim}_{n\to\infty} F_n(x) \le \overline{\lim}_{n\to\infty} F_n(x) \le \lim_{n\to\infty} F_n(x'') = F(x''). \tag{8}$$

Но, $F(x)$ е функција на распределба, па затоа $F(x') \le F(x) \le F(x'')$ и разликата $F(x'') - F(x')$ може да биде направена произволно мала величина, па од (8) следува дека

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x),$$

што значи $F_n(x) \Rightarrow F(x)$, $n \to \infty$. ♦

Теорема 9 (Хели). Секоја низа функции на распределба $\{F_n(x)\}$ содржи слабо конвергентна подниза.

Доказ. Нека $D = \{x_k\}$ е пребројливо секаде густо множество во $\mathbf{R}$. За низата $\{F_n(x_1)\}$ важи $0 \le F_n(x_1) \le 1$, па затоа таа содржи конвергентна подниза $\{F_{1n}(x_1)\}$, чија граница ќе ја означиме со $F(x_1)$. За низата $\{F_{1n}(x_2)\}$ важи $0 \le F_{1n}(x_2) \le 1$, па затоа таа содржи конвергентна подниза $\{F_{2n}(x_2)\}$, чија граница ќе ја означиме со $F(x_2)$ итн. Понатаму, избираме дијагонална подниза $\{F_{nn}(x)\}$, за која важи $F_{nn}(x_k) \to F(x_k)$, $n \to \infty$ за секој $x_k \in D$. Сега тврдењето следува од лема 7. ♦

Теорема 10 (Хели). Низата функции на распределби $\{F_n(x)\}$ слабо конвергира кон некоја функција на распределба F ако и само ако за секоја ограничена и непрекината функција $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ важи

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dF_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dF(x). \tag{9}$$

Доказ. Нека низата функции на распределби $\{F_n(x)\}$ слабо конвергира кон некоја функција на распределба F, $a < b$ и во точките a и b функцијата $F(x)$ е непрекината. Ќе докажеме дека

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b g(x)dF_n(x) = \int_a^b g(x)dF(x). \tag{10}$$

Нека $\varepsilon > 0$ е дадено. Бидејќи функцијата $g(x)$ е рамномерно непрекината на интервалот $[a,b]$, а $F(x)$ е непрекината на секаде густо множество во $\mathbf{R}$, постои поделба

$\pi=\{x_i\}_{i=0}^N$ на интервалот $[a,b]$ таква што функцијата $F(x)$ е непрекината во секоја точка од поделбата и притоа $|g(x)-g(x_k)|<\varepsilon$, за секој $x\in[x_{k-1},x_k],\ \ k=0,1,2,...,N$.

Дефинираме функција $g_\varepsilon(x)=g(x_k)$, $x\in(x_{k-1},x_k]$, за која важи

$$|g_\varepsilon(x)-g(x)|\le\varepsilon\text{, за секој } x\in[a,b].$$

Тогаш,

$$|\int_a^b gdF_n-\int_a^b gdF|\le\int_a^b|g-g_\varepsilon|dF_n+|\int_a^b g_\varepsilon dF_n-\int_a^b g_\varepsilon dF|+\int_a^b|g-g_\varepsilon|dF$$

$$\le 2\varepsilon+M\sum_{k=1}^N[F_n(x_k)-F(x_k)-(F_n(x_{k-1})-F(x_{k-1})]$$

каде $M=\sup_x|g(x)|$. Сега равенството (10) следува од фактот дека последниот собирок во претходното неравенство може да се направи произволно мал, кога $n\to\infty$.

За да го докажеме равенството (9) земаме $X>0$ таков што функцијата $F(x)$ е непрекината во точките $\pm X$ и важи $F(-X)<\frac{\varepsilon}{4}$ и $1-F(X)<\frac{\varepsilon}{4}$. Сега, од $F_n(\pm X)\to F(\pm X)$, $n\to\infty$, следува дека постои n_0 таков што за $n>n_0$ важи

$$F_n(-X)<\tfrac{\varepsilon}{2}\text{ и }1-F_n(X)<\tfrac{\varepsilon}{2}.$$

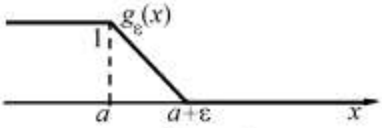
Имаме,

$$|\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)dF_n(x)-\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)dF(x)|\le|\int_{-X}^{X}gdF_n-\int_{-X}^{X}gdF|+|\int_{|x|>X}gdF_n|+|\int_{|x|>X}gdF|$$

$$\le|\int_{-X}^{X}gdF_n-\int_{-X}^{X}gdF|+M\varepsilon+\tfrac{M\varepsilon}{2}.$$

Конечно, равенството (9) следува од равенството (10) и од последното неравенство.

Обратно, нека $\{F_n(x)\}$ и F се функции на распределба такви што за секоја ограничена и непрекината функција $t\ne0$ важи равенството (9). Нека a е произволна точка на непрекинатост на функција F, $\varepsilon>0$ е произволен број и



Цртеж 3

$$g_\varepsilon(x)=\begin{cases}1, & x<a,\\ \frac{a+\varepsilon-x}{\varepsilon}, & a\le x\le a+\varepsilon,\\ 0, & x>a+\varepsilon,\end{cases}$$

(цртеж 3). За функцијата g_ε важи

$$F_n(a)=\int_{-\infty}^{a}g_\varepsilon(x)dF_n(x)\le\int_{-\infty}^{+\infty}g_\varepsilon(x)dF_n(x)$$

и како таа е непрекината и ограничена, ако се искористи равенството (9) добиваме

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, F_n(a) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \int_{-\infty}^{a} g_\varepsilon(x)dF_n(x) \le \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g_\varepsilon(x)dF_n(x)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} g_\varepsilon(x)dF(x) \le \int_{-\infty}^{a+\varepsilon} dF(x) = F(a+\varepsilon).$$

Аналогно докажуваме дека $\underline{\lim_{n\to\infty}}\, F_n(a) \ge F(a-\varepsilon)$. Според тоа,

$$F(a-\varepsilon) \le \underline{\lim_{n\to\infty}}\, F_n(a) \le \overline{\lim_{n\to\infty}}\, F_n(a) \le F(a+\varepsilon).$$

Но, F е непрекината во точката a, па затоа кога $\varepsilon \downarrow 0$ имаме $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(a) = F(a)$, што значи дека низата функции на распределби $\{F_n(x)\}$ слабо конвергира кон функцијата на распределба F. ♦

ЗАДАЧИ

1. Докажете дека за низата случајни променливи $X_n, n=1,2,3,...$ со функции на распределби

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & x < 1-\frac{1}{n}, \\ \frac{1}{2}(nx-n+1), & 1-\frac{1}{n} \le x-1 < 1+\frac{1}{n},\ n=1,2,3,..., \\ 1, & x \ge 1+\frac{1}{n}, \end{cases}$$

соодветно важи $X_n \Rightarrow 1, n \to \infty$.

2. Нека X_n, $n=1,2,3,...$ е низа независни случајни променливи со функции на распределби

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{n^x-1}{n-1}, & 0 \le x \le 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Испитајте ја слабата конвергенција на низата $\{X_n\}$

3. Дадена е низа независни случајни променливи $X_n, n=1,2,3,...$ со функции на распределби $\boldsymbol{E}(\frac{n}{\sqrt{2}}), n=1,2,3,...$, соодветно. Докажете дека $X_n \Rightarrow 0, n \to \infty$.

4. Нека $\{X_n\}$ и $\{Y_n\}$ со распределби $X_n : \boldsymbol{U}((-n,n))$ и $Y_n : \begin{pmatrix} -n^2 & n^2 \\ 1-\frac{1}{n} & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$, $n=1,2,3,...$, при што за секој $n \in \mathbf{N}$ случајните променливи X_n и Y_n се независни. За низата случајни променливи $Z_n = \frac{X_n}{Y_n}, n=1,2,3,...$ докажете дека $Z_n \Rightarrow 0, n \to \infty$.

5. Нека $X_n \in \boldsymbol{U}([-n,n])$, $n=1,2,3,...$ е низа независни случајни променливи и нека $Y_n = \frac{X_n}{1+X_n}$, $n=1,2,3,...$ и $Z_n = \frac{X_n}{1-X_n}$, $n=1,2,3,...$. Испитајте ја слабата конвергенција на низите $\{Y_n\}$ и $\{Z_n\}$.

6. Ако $\{X_n\}$ е низа случајни променливи за која важи $X_n \Rightarrow a$, a е константа и ако функцијата , тогаш $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ е непрекината во a, тогаш $g(X_n) \Rightarrow g(a)$. Докажете!

7. Нека $\{X_n\}$ и $\{Y_n\}$ се низи случајни променливи дефинирани над ист простор на веројатности $(\Omega, \boldsymbol{A}, P)$ и нека $X_n \Rightarrow X$ и $Y_n \Rightarrow Y$. Докажете дека за секоја непрекината функција $g: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ важи $g(X_n, Y_n) \Rightarrow g(X, Y)$.

8. Нека $\{X_n\}$ е низа случајни променливи таква да за секој n случајната променлива X_n има густина
$$p_n(x) = \begin{cases} n(1-x)^{n-1}, & x \in (0,1), \\ 0, & x \notin (0,1), \end{cases}$$
и нека $Y_n = nX_n, n = 1,2,3,\ldots$. Докажете дека $Y_n \Rightarrow Y$, каде Y е случајна променлива со $\boldsymbol{E}(1)$ распределба.

6. ТЕОРЕМИ ЗА НЕПРЕКИНАТОСТ

Првите две теореми од овој параграф се однесуваат на врската меѓу функциите на распределба и карактеристичните функции на случајните променливи, при што клучна улога има слабата конвергенција. Овие теореми во литературата најчесто се познати под заедничко име и тоа *теореми за непрекинатост.*

Теорема 11. Нека $F_n(x)$, $n = 1,2,\ldots$, $F(x)$ се функции на распределби и $f_n(t)$, $n = 1,2,\ldots$, $f(t)$ се соодветните карактеристични функции. Ако $F_n(x) \Rightarrow F(x)$, $n \to \infty$, тогаш $f_n(t) \to f(t)$, $n \to \infty$, за секој t.

Доказ. Нека $F_n(x) \Rightarrow F(x)$, $n \to \infty$. Бидејќи функциите $\cos tx$ и $\sin tx$ се непрекинати и ограничени од теорема 10 следува
$$\begin{aligned} f_n(t) &= \int e^{itx} dF_n = \int \cos txdF_n + i\int \sin txdF_n \to \\ &\to \int \cos txdF + i\int \sin txdF = \int e^{itx} dF = f(t), \quad n \to \infty, \end{aligned},$$
за секој t. ♦

Теорема 12. Нека $F_n(x)$, $n = 1,2,\ldots$ се функции на распределба и $f_n(t)$, $n = 1,2,\ldots$ се нивните карактеристични функции. Ако $f_n(t)$ конвергира во секоја точка t кон некоја функција $f(t)$ непрекината во нулата, тогаш $F_n(x) \Rightarrow F(x)$, $n \to \infty$ и $f(t)$ е карактеристичната функција на распределбата $F(x)$.

Доказ. Според теорема 9 низата $F_n(x)$, $n = 1,2,\ldots$ содржи слабо конвергентна подниза $F_{nn}(x) \Rightarrow F^*(x)$, $n \to \infty$. Ќе докажеме дека $F^*(x)$ е функција на распределба, т.е. дека $F^*(+\infty) = 1, F^*(-\infty) = 0$. За таа цел прво ќе го докажеме неравенството
$$P\{|X| \le \alpha\} \ge \frac{|\frac{1}{2z}\int_{-z}^{z} f(t)dt| - \frac{1}{z\alpha}}{1 - \frac{1}{z\alpha}}, \qquad (1)$$

каде $f(t)$ е карактеристичната функција на случајната променлива X, $\alpha > 0, z > 0$. Имаме,

$$|\tfrac{1}{2z}\int_{-z}^{z} f(t)dt| = |\tfrac{1}{2z}\int_{-z}^{z} E(e^{itX})dt| = |\tfrac{1}{2z}E(\int_{-z}^{z} e^{itX}dt)| = |E[\tfrac{\sin zX}{zX}(I_{\{|X|\le\alpha\}} + I_{\{|X|>\alpha\}}]|$$

$$\le E(I_{\{|X|\le\alpha\}}) + \tfrac{1}{zX}E(I_{\{|X|>\alpha\}}) = P\{|X|\le\alpha\} + \tfrac{1}{zX}(1 - P\{|X|\le\alpha\}),$$

од што следува неравенството (1).

Да забележиме дека за $z\alpha = 2$, неравенството (1) го прима видот

$$P\{|X|\le\alpha\} \ge 2|\tfrac{1}{2z}\int_{-z}^{z} f(t)dt| - 1. \tag{2}$$

Понатаму, по претпоставка $f(t)$ е непрекината во нулата, па затоа постои $z_0 > 0$ таков, што за секој $z \in (0, z_0]$ важи

$$|\tfrac{1}{2z}\int_{-z}^{z} f(t)dt| \ge 1 - \tfrac{\varepsilon}{4}.$$

Бидејќи $f_n(t) \to f(t)$, за секој t од теоремата на Лебег за доминантна конвергенција следува дека постои n_0 таков, што за секој $n \ge n_0$ важи

$$|\int_{-z}^{z} f_n(t)dt - \int_{-z}^{z} f(t)dt| < \tfrac{\varepsilon z}{2}.$$

Сега, за $n \ge n_0$ добиваме

$$|\tfrac{1}{2z}\int_{-z}^{z} f_n(t)dt| \ge 1 - \tfrac{\varepsilon}{2},$$

и ако го искористиме неравенството (2) наоѓаме

$$F_n(\tfrac{2}{z}) - F_n(-\tfrac{2}{z}) = P\{|X_n| \le \tfrac{2}{z}\} \ge 2(1 - \tfrac{\varepsilon}{2}) - 1 = 1 - \varepsilon,$$

од што следува дека $F^*(+\infty) = 1$ и $F^*(-\infty) = 0$.

Конечно, ќе докажеме дека $F_n(x) \Rightarrow F(x)$. Нека претпоставиме дека $F_n(x) \not\Rightarrow F(x)$. Тогаш, постојат две поднизи $F_{n'} \Rightarrow F^*$ и $F_{n''} \Rightarrow F^{**}$ и притоа $f^* \not\equiv f^{**}$. Од теорема 11 следува $f_{n'} \to f^*$, $f_{n''} \to f^{**}$ и како $f_n \to f$ добиваме $f^* = f^{**} = f$, што е противречност. ♦

Пример 18. Нека $\{X_n\}$ е низа случајни променливи, секоја од кои е рамномерно распределена на множеството $\{-1,1\}$ и нека $Y_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{X_k}{2^k}$, $n = 1,2,\ldots$. Ќе ја испитаме слабата конвергенција на низата случајни променливи $\{Y_n\}$. Карактеристичната функција на случајната променлива X_k е дадена со $f_{X_k}(t) = \cos t$. Понатаму, за $t \ne 0$ добиваме

$$f_{Y_n}(t)=\prod_{k=1}^{n} f_{X_k}(\tfrac{t}{2^k})=\prod_{k=1}^{n}\cos\tfrac{t}{2^k}=\frac{1}{2^n\sin\frac{t}{2^n}}\cdot 2^n\sin\tfrac{t}{2^n}\prod_{k=1}^{n}\cos\tfrac{t}{2^k}=\frac{\sin t}{2^n\sin\frac{t}{2^n}}\to\frac{\sin t}{t},\quad n\to\infty .$$

Освен тоа, $f_{Y_n}(0)=1$ и како $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$ добиваме дека граничната функција на низата карактеристични функции е непрекината во нулата. Конечно, функцијата $f(t)=\frac{\sin t}{t}$ е карактеристична функција на распределбата, па од теорема 12 следува дека $Y_n \Rightarrow Y$, каде случајната променлива Y има $\boldsymbol{U}([-1,1])$ распределба. ♦

Пример 19. Ќе ја определиме карактеристичната функција на $\Gamma(\alpha,\lambda)$ распределбата чија густина е дадена со

$$p_\alpha(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \frac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}e^{-\lambda x}, & x\ge 0.\end{cases}$$

Со $f_\alpha(t)$ да ја означиме карактеристичната функција на распределбата $\Gamma(\alpha,\lambda)$, а со $f_\beta(t)$ на распределбата $\Gamma(\beta,\lambda)$. Понатаму, ако X и Y се независни случајни променливи со распределби $\Gamma(\alpha,\lambda)$ и $\Gamma(\beta,\lambda)$, тогаш според лема III 48 случајната променлива $Z=X+Y$ има $\Gamma(\alpha+\beta,\lambda)$ распределба. Сега од лема 5, при воведените ознаки следува

$$f_{\alpha+\beta}(t)=f_\alpha(t)\,f_\beta(t)\,.$$

Понатаму, бидејќи за $\alpha=1$ распределбата $\Gamma(\alpha,\lambda)$ всушност е $\boldsymbol{E}(\lambda)$, од пример 12 а) следува дека при воведените ознаки важи

$$f_1(t)=(1-\tfrac{it}{\lambda})^{-1}\,. \tag{3}$$

Сега, од (3) следува дека за секој природен број n важи

$$(1-\tfrac{it}{\lambda})^{-1}=f_1(t)=f_{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}}(t)=[\,f_{\frac{1}{n}}(t)]^n\,,$$

па затоа

$$f_{\frac{1}{n}}(t)=(1-\tfrac{it}{\lambda})^{-\frac{1}{n}}\,.$$

Нека $\alpha=\frac{m}{n}$, $m,n\in\mathbf{N}$. Тогаш аналогно на претходните разгледувања добиваме

$$f_{\frac{m}{n}}(t)=[\,f_{\frac{1}{n}}(t)]^m=(1-\tfrac{it}{\lambda})^{-\frac{m}{n}}\,,$$

што значи дека .за секој рационален број $\alpha>0$ имаме

$$f_\alpha(t)=(1-\tfrac{it}{\lambda})^{-\alpha}\,. \tag{4}$$

Нека $\alpha\in\mathbf{R}$ и $\{\alpha_n\}$ е низа рационални броеви таква што $\alpha_n\to\alpha$, $n\to\infty$. Тогаш $p_{\alpha_n}(x)\to p_\alpha(x)$, $n\to\infty$, па затоа во секоја точка на непрекинатост $F_{\alpha_n}(x)\to F_\alpha(x)$, $n\to\infty$ (проверете!), т.е. $F_{\alpha_n}(x)\Rightarrow F_\alpha(x)$, $n\to\infty$. Конечно, од теорема 11 следува

$$f_\alpha(t) = \lim_{n\to\infty} f_{\alpha_n}(t) = \lim_{n\to\infty}(1-\tfrac{it}{\lambda})^{-\alpha_n} = \lim_{\alpha_n\to\alpha}(1-\tfrac{it}{\lambda})^{-\alpha_n} = (1-\tfrac{it}{\lambda})^{-\alpha} \text{, за секој } t,$$

што значи дека карактеристичната функција на $\Gamma(\alpha,\lambda)$ распределбата е дадена со формулата (4).

Да забележиме дека за рационални вредности на α од повеќезначната функција (4) ја земаме гранката за која $f_\alpha(0)=1$. ♦

На крајот од овој дел ќе дадеме уште една теорема која се однесува на слабата конвергенција на случајните променливи.

Теорема 13. Ако $\{X_n\}$ е низа случајни променливи таква, што $X_n \Rightarrow X$, $n\to\infty$, а $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ се конвергентни низи реални броеви, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, тогаш $a_nX_n+b_n \Rightarrow aX+b$, $n\to\infty$.

Доказ. Теоремата ќе ја докажеме за $a>0$, (случаите $a=0$ и $a<0$ се разгледуваат аналогно). Од $a>0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ следува дека постои природен број n_0 таков, што за секој $n>n_0$ важи $a_n>0$. Тогаш, за секој реален број x и за $n>n_0$ имаме

$$F_{a_nX_n+b_n}(x) = P\{a_nX_n+b_n<x\} = P\{X_n<\tfrac{x-b_n}{a_n}\} = P\{X_n<\tfrac{x-b}{a}\}+\chi P\{X_n\in I_n\}, \quad (5)$$

каде $I_n=(\frac{x-b}{a},\frac{x-b_n}{a_n}]$ и $\chi=1$ ако $\frac{x-b}{a}\le\frac{x-b_n}{a_n}$, а $\chi=-1$ ако $\frac{x-b}{a}\ge\frac{x-b_n}{a_n}$. Јасно, $P\{X_n\in I_n\}\to 0, n\to\infty$ и ако x е точка на непрекинатост на функцијата на распределба F на случајната променлива X, тогаш $\frac{x-b}{a}$ е точка на непрекинатост, па од (5) добиваме

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} F_{a_nX_n+b_n}(x) &= \lim_{n\to\infty} F_{X_n}(\tfrac{x-b_n}{a_n}) = F_X(\tfrac{x-b}{a}) = P\{X\le\tfrac{x-b}{a}\}\\ &= P\{aX+b\le x\} = F_{aX+b}(x),\end{aligned}$$

што значи $a_nX_n+b_n \Rightarrow aX+b$, $n\to\infty$. ♦

ЗАДАЧИ

1. Нека $X_n, n=1,2,3,...$ е низа независни случајни променливи со распределби χ_n^2, $n=1,2,3,...$, соодветно. Докажете дека $X_n\Rightarrow 1$, $n\to\infty$.
2. Нека $X_n, n=1,2,3,...$ е низа еднакво распределени независни случајни променливи со распределба: $\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$. Нека $Y_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}X_k$, $n=1,2,3,...$. Докажете дека $Y_n\Rightarrow Y$, $n\to\infty$, каде Y има $\boldsymbol{U}([0,1])$ распределба.

3. Нека $X_n, n=1,2,3,...$ е низа случајни променливи со распределби

$$U((0,\frac{1}{n^2})\cup(1,\frac{1}{n})),\ n=1,2,3,...,$$

соодветно. Докажете дека $X_n \Rightarrow 1,\ n\to\infty$.

7. КРИТЕРИУМИ ЗА КАРАКТЕРИСТИЧНИ ФУНКЦИИ

Во пример 5.8 видовме како во некои случаи може да се докаже дека дадена функција не е карактеристична функција за ниту една функција на распределба. Природно е да се запрашаме дали постои општ критериум кој дава одговор на ова суптилно прашање. Одговорот е позитивен и овој резултат во литературата е познат како теорема на Бохнер-Хинчин. Пред да ја презентираме теоремата на Бохнер-Хинчин ќе го воведеме поимот позитивно семидефинитна функција.

Дефиниција 5. За функцијата $f:\mathbf{R}\to\mathbf{C}$ ќе велиме дека е *позитивно семидефинитна* ако за секој $n\in\mathbf{N}$, за секои $t_1,...,t_n\in\mathbf{R}$ и секои $z_1,...,z_n\in\mathbf{C}$ е исполнето неравенството

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} z_k\bar{z}_j f(t_k-t_j)\geq 0\,. \qquad (1)$$

Лема 7. Нека $f:\mathbf{R}\to\mathbf{C}$ е карактеристична функција за некоја функција на распределба $F(x)$. Тогаш f е позитивно семидефинитна функција.

Доказ. Навистина, за секој $n\in\mathbf{N}$ и секои $t_1,t_2,...,t_n\in\mathbf{R}$ и $z_1,z_2,...,z_n\in\mathbf{C}$ важи

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} z_k\bar{z}_j f(t_k-t_j) &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} z_k\bar{z}_j \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(t_k-t_j)x}dF(x)\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} z_k\bar{z}_j e^{it_kx}\overline{e^{it_jx}}dF(x)\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |\sum_{j=1}^{n} z_k e^{it_kx}|^2\ dF(x)\geq 0,\end{aligned}$$

т.е. f е позитивно семидефинитна функција. ♦

Забелешка 6. Ако f е позитивно семидефинитна, тогаш очигледно таква е и функцијата cf, за секој $c>0$. Исто така и функцијата $g(t)=f(ct)$, $c\in\mathbf{R}$ е позитивно семидефинитна.

Лема 7. Ако f е позитивно семидефинитна функција, тогаш $f(0)\geq 0$ и за секој t важи $f(-t)=\overline{f(t)}$ и $|f(t)|\leq f(0)$.

Доказ. Ако во (1) ставиме $n=1, t_1=0$ и $z_1=1$ добиваме $f(0)\geq 0$ и $f(0)$ е реален број.

Ако во (1) ставиме $n=2, t_1=0$ и $t_2=t$ добиваме

$$(|z_1|^2+|z_2|^2)f(0)+f(-t)z_1\overline{z}_2+f(t)z_2\overline{z}_1\geq 0 \qquad (2)$$

Бидејќи $|z_1|^2+|z_2|^2$ е реален број, од (2) следува дека $f(-t)z_1\overline{z}_2+f(t)z_2\overline{z}_1$ е реален број за секои z_1 и z_2. Акоземеме $z_1=z_2=1$, добиваме

$$f(-t)+f(t)=\overline{f(-t)}+\overline{f(t)},$$

а за $z_1=1, z_2=-i$ добиваме

$$f(-t)-f(t)=-\overline{f(-t)}+\overline{f(t)}.$$

Ги собираме последните две равенства и наоѓаме $f(-t)=\overline{f(t)}$.

Последното тврдење е тривијално ако $|f(t)|=0$. Во спротивно во (2) ставаме $z_1=f(t)$ и $z_2=-|f(t)|$ и добиваме

$$2|f(t)|^2\ f(0)-|f(t)|^3-|f(t)|^3\geq 0,$$

од што следува $f(0)\geq|f(t)|$. ♦

Последица 3. Ако f е позитивно семидефинитна функција и $f(0)=0$, тогаш $f(t)=0$, за секој $t\in\mathbf{R}$.

Доказ. Непосредно следува од претходната лема. ♦

Лема 8. Ако позитивно семидефинитната функција f е непрекината во нулата, тогаш таа е непрекината на $\mathbf{R}$.

Доказ. Тврдењето очигледно важи ако $f(0)=0$. Ако $f(0)>0$, тогаш без ограничување на општоста можеме да земеме $f(0)=1$, бидејќи во спротивно ја разгледуваме функцијата $\frac{f}{f(0)}$.

Ако во (1) ставиме $n=3, t_1=0, t_2=t, t_3=s$ и $z_3=1$ добиваме

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} z_k\bar{z}_j f(t_k-t_j)=|z_1+z_2f(t)+f(s)|^2+(1-|f(t)|^2)z_2\overline{z}_2+[\overline{f(s-t)}-f(t)\overline{f(s)}]z_2$$
$$+[f(s-t)-f(s)\overline{f(t)}]\overline{z}_2+(1-|f(s)|^2).$$

Ако овде ставиме $z_1=-z_2f(t)-f(s)$, тогаш заради (1) за секој z_2 важи

$$(1-|f(t)|^2)z_2\overline{z}_2+[\overline{f(s-t)}-f(t)\overline{f(s)}]z_2+[f(s-t)-f(s)\overline{f(t)}]\overline{z}_2+(1-|f(s)|^2)\geq 0. \qquad (3)$$

Ќе докажеме дека од (3) следува

$$|f(s-t)-\overline{f(t)}f(s)|^2\leq(1-|f(t)|^2)(1-|f(s)|^2). \qquad (4)$$

За да го докажеме последното неравенство, прво ќе го разгледаме случајот $|f(t)|^2 \neq 1$. Бидејќи $1-|f(t)|^2 > 0$, ако во (3) помножиме со $1-|f(t)|^2$, после средувањето добиваме

$$|(1-|f(t)|^2)z_2 + f(s-t) - f(s)\overline{f(t)}|^2 + [(1-|f(t)|^2)(1-|f(s)|^2) - |f(s-t) - f(s)\overline{f(t)}|^2] \geq 0 .$$

Бидејќи $|f(t)|^2 \neq 1$ во последното неравенство z_2 можеме да го избереме така да првиот собирок на левата страна се анулира, со што го добиваме неравенството (4). Нека претпоставиме дека $|f(t)|^2 = 1$ и да ставиме $\alpha = f(s-t) - \overline{f(t)}f(s)$. Тогаш од (3) следува

$$\bar{\alpha}z_2 + \alpha\bar{z}_2 + (1-|f(s)|^2) \geq 0$$

за секој z_2, од што следува дека $\mathrm{Re}\,\alpha = \mathrm{Im}\,\alpha = 0$. Според тоа,

$$\alpha = f(s-t) - \overline{f(t)}f(s) = 0,$$

т.е. повторно важи (4). Понатаму, од (4) следува

$$|f(t)|^2 + |f(s)|^2 \leq 1 - |f(s-t)|^2 + f(s-t)f(t)\overline{f(s)} + \overline{f(s-t)f(t)}f(s),$$

а оттука добиваме

$$|f(t) - f(s)|^2 \leq 1 - |f(s-t)|^2 + 2\,\mathrm{Re}[f(t)\overline{f(s)}(f(s-t)-1)] .$$

Бидејќи функцијата f е непрекината во нулата, заклучуваме, дека ако $s \to t$, тогаш десната страна во горното неравенство тежи кон нула, т.е. $\lim_{s \to t} f(s) = f(t)$. ♦

Теорема 14 (Бохнер-Хинчин). Функцијата $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ е карактеристична функција на функција на распределба ако и само ако таа е позитивно семидефинитна, непрекината во нулата и $f(0) = 1$.

Доказ. Нека f е карактеристична функција. Според лема 7 таа е позитивно семидефинитна, според лема 3 таа е непрекината во нулата и според лема 2 а) важи $f(0) = 1$.

Обратно, нека претпоставиме дека f е позитивно семидефинитна, непрекината во нулата и $f(0) = 1$. Од лема 8 следува дека f е непрекината на $\mathbf{R}$.

За произволни $x \in \mathbf{R}$ и $n \in \mathbf{N}$ постои интегралот

$$g_n(x) = \frac{1}{n}\int_0^n\int_0^n f(v-w)e^{-i(v-w)x}dwdv.$$

Ако интегралот го апроксимираме со Риманови суми и искористиме дека f е позитивно семидефинитна, добиваме $g_n(x) \geq 0$. Нека $u = v - w$. Тогаш од $0 \leq w + u \leq n$ и $0 \leq w \leq n$ следува

$$g_n(x) = \frac{1}{n}\int_{-n}^{0} f(u)e^{-iux}(\int_{-u}^{n} dw)du + \frac{1}{n}\int_{0}^{n} f(u)e^{-iux}(\int_{0}^{n-u} dw)du$$

$$= \frac{1}{n}\int_{-n}^{0} f(u)e^{-iux}(n+u)du + \frac{1}{n}\int_{0}^{n} f(u)e^{-iux}(n-u)du = \int_{-n}^{n} f(u)e^{-iux}(1-\frac{|u|}{n})du,$$

односно

$$g_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(u)e^{iux}du,$$

каде

$$f_n(u) = \begin{cases} f(u)(1-\frac{|u|}{n}), & |u| \leq n, \\ 0, & |u| > n. \end{cases}$$

За $m \in \mathbf{N}$ ставаме

$$h_m(x) = \begin{cases} 1-\frac{|x|}{m}, & |x| \leq m \\ 0, & |x| > m. \end{cases}$$

За произволни $m, n \in \mathbf{N}$ функцијата $f_{m,n}$ дефинирана со

$$f_{m,n}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)h_m(x)e^{itx}dx$$

е карактеристична функција бидејќи истата е интеграл од функцијата e^{itx} помножена со ненегативна функција, т.е. со функцијата $f_n(x)h_m(x) \geq 0$, за секој $x \in \mathbf{R}$. Сега доволно е да докажеме дека f е граница на вакви функции. Имаме

$$\begin{aligned} f_{m,n}(t) &= \int_{-m}^{m}\int_{-n}^{+n} f_n(u)h_m(x)e^{-i(u-t)x}dudx \\ &= \int_{-n}^{n}\int_{-m}^{+m} f_n(u)h_m(x)e^{-i(u-t)x}dxdu = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(u)J_m(u)du, \end{aligned}$$

каде

$$J_m(u) = \int_{-m}^{m}(1-\frac{|x|}{m})e^{-i(u-t)x}dx = 2\int_{0}^{m}(1-\frac{x}{m})\cos(u-t)xdx = \frac{2}{m}\frac{1-\cos m(u-t)}{(u-t)^2}.$$

Имаме:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} J_m(u)du = 2\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1-\cos v}{v^2}dv = 4\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2 y}{y^2}dy = 2\pi\ . \tag{5}$$

За даден $\varepsilon > 0$ нека $\delta > 0$ е таков да од $|t-u| < \delta$ следува $|f_n(t) - f_n(u)| < \varepsilon$. Тогаш

$$\left|\int_{-\infty}^{t-\delta} J_m(u)du\right| = \left|\int_{t+\delta}^{+\infty} J_m(u)du\right| \leq \frac{4}{m}\int_{t+\delta}^{+\infty}\frac{du}{(u-t)^2} = \frac{4}{m\delta},$$

па затоа

$$\lim_{m\to\infty}\int_{-\infty}^{t-\delta} J_m(u)du = \lim_{m\to\infty}\int_{t+\delta}^{+\infty} J_m(u)du = \lim_{m\to\infty}\frac{4}{m\delta} = 0\ .$$

Понатаму, имаме

$$[f_n(t)-\varepsilon]\int_{t-\delta}^{t+\delta} J_m(u)du \le \int_{t-\delta}^{t+\delta} f_n(u)J_m(u)du \le [f_n(t)+\varepsilon]\int_{t-\delta}^{t+\delta} J_m(u)du\,. \tag{6}$$

Од (5) и (6) и произволноста на ε следува

$$\lim_{m\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(u)J_m(u)du = \lim_{m\to\infty} f_{m,n}(u) = 2\pi f_n(t)\,,\ t \text{ е произволен.}$$

Од теоремата за непрекинатост (f_n е непрекината) заклучуваме дека $2\pi f_n$, а според тоа и f_n е карактеристична функција. Бидејќи $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$, повторно од теоремата за непрекинатост следува дека f е карактеристична функција и како $f(0)=1$ заклучуваме дека f е карактеристична функција на некоја функција на распределба. ♦

Пример 20. Нека f е карактеристична функција на некоја случајна променлива и $\varphi(t)=e^{f(t)-1}$, $t\in\mathbf{R}$.

Функцијата φ е непрекината и $\varphi(0)=e^{f(0)-1}=e^{1-1}=1$. Освен тоа, за секој t важи

$$e^{f(t)-1}=\tfrac{1}{e}\sum_{k=0}^{\infty}\tfrac{1}{k!}[f(t)]^k\,.$$

Функцијата f^k е карактеристична за секој $k\in\mathbf{N}$, па значи f^k е позитивно семидефинитна. Оттука следува дека $\frac{1}{e}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{f^k}{k!}$ е позитивно семидефинитна за секој $n\in\mathbf{N}$, па затоа и функцијата φ е позитивно семидефинитна. Конечно, од теорема 14 следува дека φ е карактеристична функција на некоја распределба. ♦

За доказот на следната теорема ни е потребна лемата на Прингшејм, која ќе ја прифатиме без доказ.

Лема 9 (Прингшејм). Ако функцијата f не расте на $(0,+\infty)$, е интеграбилна на секој конечен интервал $(0,a)$, каде $a>0$ и ако $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)=0$, тогаш за секој $t>0$ точна е формулата

$$\tfrac{1}{2}[f(t+0)+f(t-0)]=\tfrac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\cos tu[\int_0^{+\infty} f(y)\cos uy dy]du\,. \ ♦$$

Теорема 15 (Полиа). Нека непрекинатата функција $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ ги задоволува условите:

i) $f(0)=1$,

ii) $f(-t)=f(t)$,

iii) f е конвексна на интервалот $(0,+\infty)$, т.е. за секој $t_1,t_2\in(0,+\infty)$ важи

$$f(\tfrac{t_1+t_2}{2}) \leq \tfrac{1}{2}[f(t_1)+f(t_2)] \text{ и}$$

iv) $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)=0$.

Тогаш f е карактеристична функција на апсолутно непрекината функција на распределба, т.е. f е карактеристична функција на непрекината случајна променлива.

Доказ. Бидејќи f е конвексна на $(0,+\infty)$, таа секаде има десен извод кој не опаѓа на $(0,+\infty)$. Овој извод да го означиме со φ. Ќе докажеме дека важи

а) $\varphi(t) \leq 0$ за $t>0$ и

б) $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi(t)=0$.

Нека претпоставиме дека тврдењето под а) не е точно, т.е. дека постои $t_0>0$ таков да $\varphi(t_0)>0$. Тогаш $\varphi(t)>0$ за секој $t \geq t_0$, што значи дека f строго расте за $t \geq t_0$. Нека $t_1,t_2 \in \mathbf{R}$ се такви да $t_1,t_2 \geq t_0$. Ако во неравенството

$$f(\tfrac{t_1+t_2}{2}) \leq \tfrac{1}{2}[f(t_1)+f(t_2)]$$

земеме $t_2 \to \infty$, тогаш од *iv*) следува $f(t_1) \geq 0$ за секој $t_1 \geq t_0$. Бидејќи функцијата f строго расте за $t \geq t_0$ тоа противречи на *iv*). Понатаму, од а) следува дека функцијата f не расте на $(0,+\infty)$, па затоа таа има извод скоро секаде на $(0,+\infty)$. Овој извод да го означиме со $f\,'$. Јасно функцијата $f\,'$ е неопаѓачка и непозитивна скоро секаде на $(0,+\infty)$. Доволно е да докажеме дека важи $\lim\limits_{t\to\infty} f\,'(t)=0$. Нека претпоставиме дека последното не е точно, т.е. дека постои $\alpha<0$ таков да $\lim\limits_{t\to\infty} f\,'(t)=\alpha$, односно $f\,'(t) \leq \alpha$ за секој $t>0$. Според тоа, за $t>0$ важи

$$\int_0^t f\,'(s)ds \leq \alpha t,$$

од што добиваме $f(t) \leq \alpha t+1$. Ако земеме $t\to\infty$ добиваме противречност со *iv*), па затоа важи б).

Да го разгледаме интегралот

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} f(t)dt = 2\int_0^{+\infty} \cos tx f(t)dt .$$

Овој интеграл постои за секој $x \neq 0$. Навистина, со парцијална интеграција добиваме

$$\int_0^T \cos tx f(t)dt = f(t)\frac{\sin Tx}{x} - \frac{1}{x}\int_0^T \sin tx f\,'(t)dt . \qquad (7)$$

Ако го искористиме *iv*) и фактот дека $f\,' \leq 0$ скоро секаде и $\lim\limits_{t\to\infty} f\,'(t)=0$, заклучуваме дека границата на десната страна во (7) кога $T\to\infty$ постои и е конечна.

Да ставиме

$$g(x)=\tfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} f(t)dt=\tfrac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\cos txf(t)dt\,. \tag{8}$$

Од лема 9 следува

$$\begin{aligned} f(t)&=\tfrac{1}{2}[f(t+0)+f(t-0)]=\tfrac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\cos tx[\int\limits_{0}^{+\infty} f(y)\cos xydy]dx \\ &=2\int\limits_{0}^{+\infty}\cos txg(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}g(x)dx. \end{aligned} \tag{9}$$

Останува да докажеме дека g е густина на веројатност. Од i) и од (9) следува

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\bullet 0\bullet x}g(x)dx=f(0)=1\,,$$

па затоа доволно е да докажеме дека $g(x)\geq 0$ за секој $x\in\mathbf{R}$. Со парцијална интеграција од (8) добиваме

$$g(x)=\tfrac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\sin tx[-f\,'(t)]dt\,.$$

Функцијата $-f\,'$ не е растечка, е ненегативна скоро секаде на $(0,+\infty)$ и тежи кон нула кога $t\to\infty$. Според тоа, за $x>0$ важи

$$g(x)=\tfrac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\int\limits_{\frac{k\pi}{x}}^{\frac{(k+1)\pi}{x}}\sin tx[-f\,'(t)]dt=\tfrac{1}{\pi x}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{x}}\sin tx\{\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k[-f\,'(t+\tfrac{k\pi}{x})]\}dt\,. \tag{10}$$

За $x>0$ редот

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k[-f\,'(t+\tfrac{k\pi}{x})]$$

е алтернативен и неговите членови не растат по апсолутна вредност. Бидејќи првиот член на овој ред е ненегативен имаме

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k[-f\,'(t+\tfrac{k\pi}{x})]\geq 0\,,\text{ за } x>0\,,$$

па како $\sin tx\geq 0$ за $t\in[0,\frac{\pi}{2}]$ заклучуваме дека интегралот на десната страна на (10) е ненегативен. Според тоа, $g(x)\geq 0$ за $x>0$, а како функцијата g е парна добиваме $g(x)\geq 0$ за $x\neq 0$. Конечно, g е густина на веројатност, а f е карактеристична функција на g. ♦

Забелешка 7. Функциите кои ги задоволуваат условите на теоремата 15 ги нарекуваме функции од класата на Полиа. Следниве функции се од класата на Полиа:

$$f_1(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}\,,\ f_2(t)=e^{-|t|}\,,\ f_3(t)=\tfrac{1}{1+|t|}\,,\ f_4(t)=\begin{cases}1-|t|, & |t|\leq 1,\\ 0, & |t|>1,\end{cases}\ f_5(t)=\begin{cases}1-|t|, & 0\leq|t|\leq\frac{1}{2},\\ \frac{1}{4|t|}, & |t|>\frac{1}{2}.\end{cases}$$

На крајот од овој дел, без да презентираме доказ, ќе дадеме уште еден важен критериум за карактеристични функции

Теорема 16 (Марцинкиевич). Ако карактеристичната функција $f(t)$ е од вид $e^{P(x)}$, каде $P(x)$ е полином, тогаш степенот на полиномот не може да биде поголем од два, т.е. $\deg P \le 2$. ♦

На пример, од теоремата на Марцинкевич непосредно следува дека функциите $f(t) = e^{-t^3}$ и $f(t) = e^{-t^4+t^2}$ не можат да бидат карактеристични функции за ниту една функција на распределба.

ЗАДАЧИ

1. Докажете, дека ако $f(t)$ е карактеристична функција, тогаш и $\operatorname{Re} f(t)$ е карактеристична функција.
2. Нека $a > 0$ и $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ е периодична функција со период $2a$ определена со $f(t) = |1 - \frac{|t|}{a}|, |t| \le a$. Докажете дека f е карактеристична функција и најдете ја соодветната распределба на веројатностите.
3. Нека $f_1(t)$ и $f_2(t)$ се произволни карактеристични функции и $p \in [0,1]$. Докажете дека $f(t) = pf_1(t) + (1-p) f_2(t)$ е карактеристична функција.

8. ТЕОРЕМА НА ПРОХОРОВ. МЕТОД НА МОМЕНТИ

Во претходните разгледувања се осврнавме на слабата конвергенција на низа случајни променливи. Во овој дел, користејќи ја теоремата на Прохоров ќе го докажеме методот на моменти со кој може да се докажува слабата конвергенција на низа случајни променливи. За таа цел прво ќе ги воведеме поимите релативно компактна фамилија функции на распределба и густа фамилија функции на распределба.

Дефиниција 6. За фамилијата $\boldsymbol{F}$ функции на распределба ќе велиме дека е *релативно компактна*, ако секоја низа $\{F_n\}$ од $\boldsymbol{F}$ содржи подниза која слабо конвергира кон некоја функција на распределба F (F не мора да припаѓа на $\boldsymbol{F}$).

Дефиниција 7. За фамилијата $\boldsymbol{F}$ функции на распределба ќе велиме дека е *густа*, ако за секој $\varepsilon > 0$ постојат $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ такви, што $F(b) - F(a) \ge 1 - \varepsilon$, за секоја функција на распределба $F \in \boldsymbol{F}$.

Теорема 17 (Прохоров). Фамилијата $\boldsymbol{F}$ функции на распределба е релативно компактна ако и само ако е густа.

Доказ. Нека претпоставиме дека фамилијата $\boldsymbol{F}$ е густа и нека $\{F_n\}$ е произволна низа од $\boldsymbol{F}$. Сега од теоремата на Хели следува дека низата функции на распределба $\{F_n\}$ содржи подниза $\{F_{n_k}\}$ која слабо конвергира кон некоја функција $F(x)$, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} F_{n_k}(x) = F(x),$$

во секоја точка x во која функцијата $F(x)$ е непрекината. Понатаму, бидејќи фамилијата $\boldsymbol{F}$ е густа, постојат броеви $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ такви, што за секој n важи неравенството

$$F_n(b) - F_n(a) \ge 1 - \varepsilon, \tag{1}$$

и притоа броевите a и b можат да бидат избрани така што функцијата F е непрекината во точките a и b. Сега од неравенството (1) следува $F(+\infty) - F(-\infty) = 1$ и како $0 \le F(-\infty) \le F(+\infty) \le 1$ (зошто?), добиваме $F(+\infty) = 1$ и $F(-\infty) = 0$. Значи, граничната функција е функција на распределба, т.е. фамилијата $\boldsymbol{F}$ е релативно компактна.

Нека претпоставиме дека фамилијата не е густа. Тогаш постои $\varepsilon > 0$ таков, што за секој природен број n постои функција на распределба $F_n \in \boldsymbol{F}$ за која важи

$$F_n(n) - F_n(-n) \le 1 - \varepsilon.$$

Сега, ако некоја подниза $\{F_{n_k}\}$ на низата $\{F_n\}$ слабо конвергира кон некоја функција на распределба F, тогаш за секој $x > 0$ важи

$$F(x) - F(-x) \le \varliminf_{n_k\to\infty} [F_{n_k}(x) - F_{n_k}(-x)] \le \varliminf_{n_k\to\infty} [F_{n_k}(n_k) - F_{n_k}(-n_k)] \le 1 - \varepsilon,$$

од што следува $F(+\infty) - F(-\infty) \le 1 - \varepsilon$, што е противречност. ♦

На крајот од овој дел ќе дадеме уште една теорема, според која со помош на моментите може да се докажува слабата конвергенција.

Теорема 18 (метод на моменти). Нека $\{X_n\}$ е низа случајни променливи таква, што сите обични моменти на секоја $X_n, n \ge 1$ се конечни и X е случајна променлива чија распределба еднозначно е определена со моментите. Ако за секој $k \in \{1, 2, 3, ...\}$ важи $\lim\limits_{n\to\infty} E(X_n^k) = E(X^k)$, тогаш $X_n \Rightarrow X$, $n \to \infty$.

Доказ. Нека F_n, $n \ge 1$ и F се функциите на распределба на случајните променливи $X_n, n \ge 1$ и X, соодветно. Бидејќи низата $\{E(X_n^2)\}$ конвергира, таа е ограничена, т.е. постои $M > 0$, таков, што $0 \le E(X_n^2) \le M$. Понатаму, од неравенството на Чебишев, кое во општ случај покасно ќе го докажеме, добиваме дека за секој $x > 0$ и за секој $n \ge 1$ важи

$$P\{|X_n| \ge x\} = P\{|X_n^2| \ge x^2\} \le \frac{E(X_n^2)}{x^2} \le \frac{M}{x^2}. \tag{2}$$

Нека $\varepsilon > 0$ е дадено. Земаме $x = \sqrt{\frac{M}{\varepsilon}}$ и од неравенството (2) добиваме дека за секој $n \ge 1$ важи

$$F_n(x)-F_n(-x)=P\{|X_n|<x\}=1-P\{|X_n|\geq x\}\geq 1-\tfrac{M}{x^2}=1-\varepsilon\,,$$

што значи дека фамилијата F_n, $n\geq 1$ е густа, па од теоремата на Прохоров следува дека фамилијата F_n, $n\geq 1$ е релативно компактна. Понатаму, бидејќи фамилијата F_n, $n\geq 1$ е релативно компактна, добиваме дека секоја низа $\{F_{n'}\}$ од F_n, $n\geq 1$ содржи подниза $\{F_{n''}\}$ која слабо конвергира кон некоја функција на распределба G, т.е. важи $X_{n''}\Rightarrow Y$, $n''\to\infty$, каде Y е случајна променлива со распределба G. Тогаш важи $X_{n''}^k\Rightarrow Y^k$, $n''\to\infty$ за секој $k\in\{1,2,3,...\}$, па затоа $\lim\limits_{n''\to\infty}E(X_{n''}^k)=E(Y^k)$. Сега, од условот на теоремата следува дека случајните променливи X и Y имаат еднакви соодветни моменти. Меѓутоа, функцијата на распределба на случајната променлива X е еднозначно определена со своите моменти, па затоа случајните променливи X и Y имаат иста распределба, што значи $X=Y$. Од досега изнесеното имаме $X_{n''}\Rightarrow X$, $n''\to\infty$, од што следува $X_n\Rightarrow X$, $n\to\infty$ (зошто?). ♦

9. ПОВЕЌЕДИМЕНЗИОНАЛНИ КАРАКТЕРИСТИЧНИ ФУНКЦИИ

Дефиниција 8. Нека случајниот вектор $X=(X_1,X_2,...,X_n)$ има повеќедимензионална функција на распределба

$$F_{X_1,X_2,...,X_n}(x_1,...,x_n)=P\{X_1\leq x_1,X_2\leq x_2,...,X_n\leq x_n\}\,,$$

Која, како и во претходните разгледувања, ја означуваме со $F_X(x)$, $x=(x_1,x_2,...,x_n)$. Аналогно, густината $p_{X_1,X_2,...,X_n}(x_1,x_2,...,x_n)$, доколку истата постои, ќе ја означуваме со $p_X(x)$. *Повеќедимензионална карактеристична функција* на случајниот вектор X ќе ја нарекуваме функцијата

$$f_X(t)=f_{X_1,X_2,...,X_n}(t_1,...,t_n)=E(e^{i(t,X)})\,, \qquad (1)$$

каде $t=(t_1,t_2,...,t_n)$ и $(t,X)=\sum\limits_{k=1}^{n}t_kX_k$.

Забелешка 8. Јасно, карактеристичната функција (1) е дефинирана за секој $t=(t_1,t_2,...,t_n)$, $t_k\in\mathbf{R}, k=1,2,...,n$. Понатаму, функцијата (1) е определена со помош на функциите $F_X(x)$ и $p_X(x)$ на следниов начин

$$f_X(t)=\int\limits_{\mathbf{R}^n}e^{i(t,x)}dF_X(x) \text{ и } f_X(t)=\int\limits_{\mathbf{R}^n}e^{i(t,x)}p_X(x)dx\,.$$

Лема 10. а) За секој $t\in\mathbf{R}^n$ важи $|f(t)|\leq 1$ и $f(0)=1$.

б) Ако $X(1),X(2),...,X(m)$ се независни случајни вектори и $Z=\sum\limits_{i=1}^{m}X(i)$, тогаш

$$f_Z(t) = \prod_{k=1}^{m} f_{X(k)}(t) \,. \tag{2}$$

Доказ. а) Јасно, $f_X(0) = E(e^{i(0,X)}) = E(1) = 1$. Понатаму, од $|e^{i(t,X)}| = 1$ и од лема 1 непосредно следува

$$| f(t) | = | E(e^{i(t,X)}) | \le E(| e^{i(t,X)} |) = E(1) = 1 \,.$$

б) Од независноста на случајните вектори $X(1), X(2),..., X(m)$ следува независноста на случајните променливи $e^{i(t,X(1))}, e^{i(t,X(2))},..., e^{i(t,X(m))}$. Ако на последниte случајни променливи го примениме својството за мултипликативност на математичкото очекување, добиваме

$$f_{X(1)+...+X(m)}(t) = E(e^{i(t, \sum_{k=1}^{m} X(k))}) = E(e^{i \sum_{k=1}^{m} (t, X(k))}) = E(\prod_{k=1}^{m} e^{i(t,X(k))})$$

$$= \prod_{k=1}^{m} E(e^{i(t,X(k))}) = \prod_{k=1}^{m} f_{X(k)}(t). \ \blacklozenge$$

Лема 11. За секој случаен вектор X неговата карактеристична функција (2) е рамномерно непрекината по $t = (t_1, t_2,..., t_n)$.

Доказ. Да ги разгледаме настанот $A = \{| X_k | \le \alpha, k = 1, 2,..., n\}$ и неравенството

$$| f(t+h) - f(t) | = | E[e^{i(t,X)}(e^{i(h,X)} - 1)] | \le E(| e^{i(t,X)}(e^{i(h,X)} - 1) |)$$
$$= E(| e^{i(h,X)} - 1 |) = E(| e^{i(h,X)} - 1 | I_A) + E(| e^{i(h,X)} - 1 | I_{\overline{A}})$$
$$\le E(| (h, X) | I_A) + 2E(I_{\overline{A}}) \le \alpha | h | + 2P\{X \notin [-\alpha, \alpha]^n\}$$

каде $| h | = \sum_{k=1}^{n} | h_k |$ и $[-\alpha, \alpha]^n$ е паралелопипедот $\{x | \, | x_k | \le \alpha, k = 1, 2,..., n\}$. Нека $\varepsilon > 0$ е дадено. Наоѓаме α таков што $P\{X \notin [-\alpha, \alpha]^n\} < \frac{\varepsilon}{4}$. Тогаш, за секој h таков што $| h | < \frac{\varepsilon}{2\alpha}$ добиваме

$$| f(t+h) - f(t) | < \varepsilon \,,$$

т.е. карактеристична функција (2) е рамномерно непрекината по $t = (t_1, t_2,..., t_n)$. ♦

Лема 12. а) Нека $f_{X_1, X_2,..., X_n}(t_1, t_2,..., t_n)$ е карактеристичната функција на векторот $(X_1, X_2,..., X_n)$. Ако $m < n$, тогаш за карактеристичната функција на векторот $(X_1, X_2,..., X_m)$ имаме

$$f_{X_1, X_2,..., X_m}(t_1, t_2,..., t_m) = f_{X_1, X_2,..., X_m}(t_1, t_2,..., t_m, 0,..., 0) \,.$$

б) За произволни случајни променливи $X_1, X_2,..., X_n$ важи

$$f_{X_1+X_2+...+X_n}(t) = f_{X_1, X_2,..., X_n}(t, t,..., t) \,.$$

Доказ. а) Непосредно следува од дефиниција 8.

б) Имаме

$$f_{X_1+X_2+...+X_n}(t)=E(e^{i(X_1+X_2+...+X_n)t})=E(e^{i(X_1,X_2,...,X_n)\cdot(t,t,...,t)})$$
$$=f_{X_1,X_2,...,X_n}(t,t,...,t).\ ♦$$

Лема 13. Нека $C=[c_{ij}]_{m\times n}$, $Y=CX$ и $f_X(t)$ е карактеристичната функција на случајниот вектор X. Тогаш, $f_Y(t)=f_X(C^*t)$ е карактеристичната функција на случајниот вектор Y, каде C^* е транспонираната матрица на C.

Доказ. Имаме $Y_k=\sum\limits_{j=1}^{n}c_{kj}X_j$, $k=1,2,...,m$, па затоа

$$E(e^{i(t,Y)}=E(e^{i\sum\limits_{k=1}^{m}t_kY_k})=E(e^{i\sum\limits_{k=1}^{m}t_k\sum\limits_{j=1}^{n}c_{kj}X_j})=E(e^{i\sum\limits_{j=1}^{n}X_j\sum\limits_{k=1}^{m}c_{kj}t_k}=E(e^{i(C^*t,X)})=f_X(C^*t),$$

што и требаше да се докаже. ♦

Последица 4. Нека $C=[c_{ij}]_{m\times n}$, $Y=CX+b$ и $f_X(t)$ е карактеристичната функција на случајниот вектор X. Тогаш,

$$f_Y(t)=e^{i(t,b)}f_X(C^*t)$$

е карактеристичната функција на случајниот вектор Y, каде C^* е транспонираната матрица на C.

Доказ. Непосредно од лема 13 добиваме

$$f_Y(t)=E(e^{i(Y,t)})=E(e^{i(CX+b,t)})=E(e^{i(CX,t)}e^{i(b,t)})$$
$$=e^{i(b,t)}E(e^{i(CX,t)})=e^{i(t,b)}f_X(C^*t),$$

што и требаше да се докаже. ♦

Лема 14. Ако $m=n, \det C\neq 0$ и ако постои густината $p_X(x)$, тогаш случајниот вектор $Y=CX$ има густина $p_Y(x)$ и притоа важи

$$p_Y(y)=\tfrac{1}{\det C}p_X(C^{-1}y).\tag{3}$$

Доказ. За секој $A\in\boldsymbol{B}^n$ важи

$$P\{X\in A\}=\int\limits_A p_X(x)dx.$$

Ако во последниот интеграл ја воведеме смената $x=C^{-1}y$, го добиваме равенството

$$P\{X\in A\}=\int\limits_{CA}p_X(C^{-1}y)\cdot\det C^{-1}\cdot dy=P\{Y\in CA\}=\int\limits_{CA}p_X(y)dy$$

од кое следува равенството (3). ♦

Лема 15. Нека X е случаен вектор и f_X е неговата карактеристична функција. Тогаш

$$f_X(-t) = f_{-X}(t) = \overline{f}_X(t).$$

Доказ. Точноста на тврдењето непосредно следува од следната низа равенства

$$f_X(-t) = E(e^{i(-t,X)}) = E(e^{i(t,-X)}) = E(e^{-i(t,X)}) = \overline{E(e^{i(t,X)})} = \overline{f}_X(t). \ \blacklozenge$$

Пред да преминеме кон разгледување на останатите својства на карактеристичните фукции ќе ја докажеме следната лема, која ќе ја користиме во натамошните разгледувања.

Лема 16. За секои $\varphi \in \mathbf{R}$ и $n \in \mathbf{N}$ точно е неравенството

$$|\, e^{i\varphi} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(i\varphi)^k}{k!} \,| \le \frac{|\varphi|^n}{n!}. \tag{4}$$

Доказ. Од $|\, e^{i\varphi} \,| = 1$ имаме

$$|\, e^{i\varphi} - 1 \,| = |\int_0^{\varphi} e^{iu} du \,| \le \int_0^{|\varphi|} du = |\, \varphi \,|.$$

Нека претпоставиме дека неравенството (4) важи за некој n. Тогаш, од равенството

$$\int_0^{\varphi} (e^{iu} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(iu)^k}{k!}) du = \frac{1}{i}(e^{i\varphi} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(i\varphi)^k}{k!}),$$

следува

$$|\, e^{i\varphi} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(i\varphi)^k}{k!} \,| = |\int_0^{\varphi} (e^{iu} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(iu)^k}{k!}) du \,| \le \int_0^{|\varphi|} \frac{u^n}{n!} du = \frac{|\varphi|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Сега тврдењето следува од принципот на математичка индукција. ♦

Нека $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$ е $n-$димензионален случаен вектор. Да претпоставиме дека дека за некој $r \in \mathbf{N}$ важи $E(|\, X_i \,|^r) < +\infty$, $i = 1, 2, ..., n$. Тогаш од неравенството на Холдер следува дека за секои $i_1, i_2, ..., i_n \in \{0, 1, 2, ..., r\}$ такви што $\sum_{k=1}^{n} i_k \le r$ постојат *мешовитите моменти од ред* $(i_1, i_2, ..., i_n)$ определени со

$$m_X^{(i_1, i_2, ..., i_n)} = E(X_1^{i_1} X_2^{i_2} ... X_n^{i_n}).$$

Теорема 17. Нека $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$ е $n-$димензионален случаен вектор. Ако постојат мешовитите моменти

$$m_X^{(p_1, p_2, ..., p_n)} = E(X_1^{p_1} X_2^{p_2} ... X_n^{p_n}), \ \sum_{k=1}^{n} p_k = r,$$

тогаш

$$m_X^{(p_1,p_2,...,p_n)} = i^p \frac{\partial^p f_X(0,0,...,0)}{\partial t_1^{p_1}\partial t_2^{p_2}...\partial t_n^{p_n}}, \quad p = \sum_{k=1}^{n} p_k \le r, \tag{5}$$

и

$$f(t) = \sum_{p=0}^{r} i^p \sum_{p_1+p_2+...+p_n=p} \frac{t_1^{p_1}...t_n^{p_n}}{p_1!...p_n!} m_X^{(p_1,p_2,...,p_n)} + R_r(t), \tag{6}$$

каде $R_r(t) = o(\|t\|^r)$, кога $\|t\| = |t_1| + |t_2| + ... + |t_n| \to 0$.

Доказ. Равенството (5) се докажува како и во еднодимензионалниот случај.

За да го докажеме равенството (6) ќе го разгледаме настанот

$$A = \{|X_k| \le \alpha, k = 1,2,...,n\}.$$

Имаме

$$|R_r(t)| = |E(e^{i(t,X)} - \sum_{p=0}^{r} \frac{i^p (t,X)^p}{p!})| \le E[|e^{i(t,X)} - \sum_{p=0}^{r} \frac{i^p (t,X)^p}{p!}|(I_A + I_{\overline{A}})]$$

$$= E(|e^{i(t,X)} - \sum_{p=0}^{r} \frac{i^p (t,X)^p}{p!}| I_A) + E(|e^{i(t,X)} - \sum_{p=0}^{r-1} \frac{i^p (t,X)^p}{p!} - \frac{i^r (t,X)^r}{r!}| I_{\overline{A}})$$

$$\le E(|e^{i(t,X)} - \sum_{p=0}^{r} \frac{i^p (t,X)^p}{p!}| I_A) + E(|e^{i(t,X)} - \sum_{p=0}^{r-1} \frac{i^p (t,X)^p}{p!}| I_{\overline{A}}) + E(|\frac{i^r (t,X)^r}{r!}| I_{\overline{A}})$$

$$\le E(\frac{|(t,X)|^{r+1}}{(r+1)!} I_A) + 2\frac{E[|(t,X)|^r I_{\overline{A}}]}{r!} \le \frac{\alpha^{r+1}\|t\|^{r+1}}{(r+1)!} + 2\frac{\|t\|^r}{r!} E[(|X_1| + ... + |X_n|)^r I_{\overline{A}}],$$

при што кај првиот собирок во претпоследното неравенство го користиме неравенството (4) за $n = r+1$, а за вториот собирок за $n = r$. Понатаму, за секој $\varepsilon > 0$ прво избираме α таков што вториот член на десната страна во последното неравенство е помал или еднаков на $\frac{\varepsilon\|t\|^r}{2}$. Тогаш, за $\|t\| \le \frac{\varepsilon(r+1)!}{2\alpha^{r+1}}$ добиваме $|R_r(t)| < \varepsilon\|t\|^r$, што значи дека $R_r(t) = o(\|t\|^r)$, кога $\|t\| = |t_1| + ... + |t_n| \to 0$. ♦

Пример 21. а) Ако $P\{X = c\} = 1$, тогаш $f_X(t) = e^{i(t,c)}$.

б) Нека $\varphi_{X_1,X_2,...,X_n}(s_1,s_2,...,s_n) = E(s_1^{X_1}s_2^{X_2}...s_n^{X_n})$ е генераторната функција на случајниот вектор $X = (X_1,X_2,...,X_n)$. Тогаш $f_X(t_1,...,t_n) = \varphi_X(e^{it_1},...,e^{it_n})$. Во случајот, за полиномната распределба имаме

$$\varphi_{X_1,X_2,...,X_m}(s_1,s_2,...,s_m) = (p_1s_1 + p_2s_2 + ... + p_ms_m)^n$$

и

$$f_X(t_1,...,t_m) = (p_1e^{it_1} + ... + p_me^{it_m})^n. \ ♦$$

Следниве две теореми се едноставни обопштувања на своите еднодимензионални аналогни тврдења, па затоа доказите на истите нема да ги презентираме.

Теорема 18 (инверзна формула). Ако f е карактеристична функција на ограничена функција F дефинирана на $\mathbf{R}^n$ и ако $a=(a_1,a_2,...,a_n)$ и $b=(b_1,b_2,...,b_n)$ се точки на непрекинатост на функцијата F такви што $a<b$, тогаш важи

$$F(b_1,b_2,...,b_n)-F(a_1,a_2,...,a_n)=\lim_{A\to\infty}\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{-A}^{A}...\int_{-A}^{+A}\prod_{k=1}^{n}\frac{e^{-ita_k}-e^{-itb_k}}{it_k}\varphi_X(t_1,...,t_n)dt_1...dt_n\ . \ ♦$$

Теорема 19 (единственост). На секоја карактеристична функција $f_X(t)$ и соодветствува единствена функција на распределба $F_X(x)$. ♦

Во следната теорема ќе дадеме карактеризација на независноста со помош на карактеристичните функции.

Теорема 20. Случајните променливи $X_1,...,X_n$ се независни ако и само ако

$$f_{X_1,X_2,...,X_n}(t_1,t_2,...,t_n)=\prod_{i=1}^{n}f_{X_i}(t_i)\ ,\ (t_1,t_2,...,t_n)\in\mathbf{R}^n \qquad (7)$$

Доказ. Нека случајните променливи $X_1,...,X_n$ се независни. Тогаш, за секој $(t_1,t_2,...,t_n)\in\mathbf{R}^n$ важи

$$f_{X_1,X_2,...,X_n}(t_1,t_2,...,t_n)=E(e^{i\sum_{k=1}^{n}t_kX_k})=\prod_{k=1}^{n}E(e^{it_kX_k})=\prod_{k=1}^{n}f_{X_k}(t_k)\ ,$$

т.е. важи (7).

Обратно, нека важи (7) и нека $X=(X_1,X_2,...,X_n)$. Дефинираме функција $G(x_1,x_2,...,x_n)=\prod_{k=1}^{n}F_{X_k}(x_k)$. Сега од (7) и од теоремата на Фубини следува дека за секој $(t_1,t_2,...,t_n)\in\mathbf{R}^n$ важи

$$\int_{\mathbf{R}^n}e^{i(t_1x_1+...+t_nx_n)}dF_X(x_1,...,x_n)=\prod_{k=1}^{n}\int_{\mathbf{R}}e^{it_kx_k}dF_{X_k}(x_k)=\int_{\mathbf{R}^n}e^{i(t_1x_1+...+t_nx_n)}dG(x_1,...,x_n)\ .$$

Понатаму, од теорема 19 заклучуваме дека

$$F_X(x_1,...,x_n)=G(x_1,...,x_n)=\prod_{k=1}^{n}F_{X_k}(x_k)\ ,$$

што значи дека случајните променливи $X_1,...,X_n$ се независни. ♦

ЗАДАЧИ

1. Случајните променливи X_1 и X_2 се координатите на точките рамномерно распределени во триаголникот $X_1\geq 0$, $X_2\geq 0$ и $X_1+X_2\leq 1$. Најдете ја нивната дводимензионална карактеристична функција.

2. Нека $f(t)$ е карактеристична функција на случајната променлива X_1. Најдете ја карактеристичната функција на дводимензионалниот случаен вектор (X_1, X_2) ако $X_2 = 1 - X_1$.
3. Карактеристичната функција на случајниот вектор (X, Y) е
$$f(u,v) = e^{iu-2uv+5u^2/2-v^2/2}.$$
Најдете ги функција на распределба и густината на (X, Y).
4. Карактеристичната функција на случајниот вектор (X, Y) е
$$f(u,v) = \frac{1+\cos u + 2\cos v}{4}.$$
Пресметајте ја дисперзијата на случајната променлива $Z = X + 2Y$.
5. Карактеристичната функција на случајниот вектор (X, Y) е
$$f(u,v) = \frac{1+\cos(u-v)+i\sin(u-v)}{2}.$$
Пресметајте ја дисперзијата на случајната променлива $Z = X + XY$.

10. МЕШОВИТИ МОМЕНТИ И СЕМИИНВАРИЈАНТИ

Нека случајниот вектор $X = (X_1, ..., X_n)$ има повеќедимензионална функција на распределба $F_X(x)$, $x = (x_1, ..., x_n)$ и нека $f_X(t)$, $t = (t_1, ..., t_n)$ е неговата карактеристична функција. Според лемите 10 и 11 функцијата $f_X(t)$ е непрекината и $f_X(0) = 1$, па затоа во некоја околина на нулата ($\| t \| < \delta$) таа е различна од нула. Во оваа околина на нулата постојат и се непрекината парцијалните изводи

$$\frac{\partial^{p_1+p_2+...+p_n}}{\partial t_1^{p_1} \partial t_2^{p_2} ... \partial t_n^{p_n}} \ln f_X(t_1, t_2, ..., t_n),$$

каде под $\ln z$ ја подразбираме главната вредност на логаритмот, т.е. ако $z = re^{i\alpha}$, $-\pi < \alpha \le \pi$, тогаш $\ln z = \ln r + i\alpha$. Затоа $\ln f_X(t_1, t_2, ..., t_n)$ може да се развие по Тајлоровата формула

$$\ln f_X(t_1, t_2, ..., t_n) = \sum_{p=0}^{r} i^p \sum_{p_1+...+p_n=p} \frac{t_1^{p_1} ... t_n^{p_n}}{p_1! ... p_n!} s_{\xi}^{p_1, ..., p_n} + o(\| t \|^r), \tag{1}$$

каде коефициентите $s_X^{p_1, p_2, ..., p_n}$ ги нарекуваме *семиинваријанти од ред* $(p_1, p_2, ..., p_n)$ на случајниот вектор $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$.

Лема 17. Ако векторите $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$ и $Y = (Y_1, Y_2, ..., Y_n)$ се независни, тогаш

$$s_{X+Y}^{p_1, ..., p_n} = s_X^{p_1, ..., p_n} + s_Y^{p_1, ..., p_n}.$$

Доказ. Непосредно следува од тоа што за независните случајни вектори X и Y важи

$$\ln f_{X+Y}(t) = \ln f_X(t) f_Y(t) = \ln f_X(t) + \ln f_Y(t).\blacklozenge$$

Во следните разгледувања, заради поедноставно означување ќе ги воведеме следниве ознаки. Ако $p=(p_1,p_2,...,p_n)$ е вектор со ненегативни целобројни координати, тогаш ставаме

$$p!=p_1!p_2!...p_n!,\ |p|=p_1+p_2+...+p_n,$$
$$t^p=t_1^{p_1}t_2^{p_2}...t_n^{p_n},\ s_X^{(p)}=s_X^{p_1,...,p_n} \text{ и } m_X^{(p)}=m_X^{p_1,...,p_n}.$$

Тогаш, формулите (6) од теорема 17 и (1) можеме да ги запишеме во видот:

$$f_X(t)=\sum_{|p|\le r}\frac{i^{|p|}}{p!}m_X^{(p)}t^p+o(|t|^r), \tag{2}$$

$$\ln f_X(t)=\sum_{|p|\le r}\frac{i^{|p|}}{p!}s_X^{(p)}t^p+o(|t|^r). \tag{3}$$

Во следната теорема ќе ги докажеме формулите за врската меѓу мешовитите моменти и семиинваријантите.

Теорема 21. Нека $X=(X_1,X_2,...,X_n)$ е случаен вектор таков што за некој природен број r и за секој $i\in\{1,2,...,n\}$ важи $E(|X_i|^r)<+\infty$. Тогаш, за секој вектор $p=(p_1,p_2,...,p_n)$ таков, што $|p|\le r$ важи

$$m_X^{(p)}=\sum_{\lambda_1+...+\lambda_q=p}\frac{1}{q!}\cdot\frac{p!}{\lambda_1!...\lambda_q!}\prod_{p=1}^{q}s_X^{(\lambda_p)}, \tag{4}$$

$$s_X^{(p)}=\sum_{\lambda_1+...+\lambda_q=p}\frac{(-1)^{q-1}}{q}\cdot\frac{p!}{\lambda_1!...\lambda_q!}\prod_{p=1}^{q}m_X^{(\lambda_p)}, \tag{5}$$

при што сумирањето се врши по сите вектори $(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_q)$ со ненегативни целобројни координати за кои важи $\lambda_1+\lambda_2+...+\lambda_q=p$.

Доказ. Ако ја искористиме формулата $f_X(t)=e^{\ln f_X(t)}$, тогаш по Тајлорова формула го разложуваме експонентот и ако ја искористиме формулата (3), добиваме

$$f_X(t)=1+\sum_{q=1}^{r}\frac{1}{q!}(\sum_{1\le|\lambda|\le r}\frac{i^{|\lambda|}}{\lambda!}s_X^{(\lambda)}t^\lambda)^q+o(|t|^r),\quad |t|\to 0. \tag{6}$$

Ги изедначуваме членовите пред t^λ на десните страни на (2) и (6) и ако земеме предвид дека

$$|\lambda_1|+|\lambda_2|+...+|\lambda_q|=|\lambda_1+\lambda_2+...+\lambda_q|$$

ја добиваме формулата (4).

Понатаму, од формулата (2) имаме

$$\ln f_X(t)=\ln[1+\sum_{1\le|\lambda|\le r}\frac{i^{|\lambda|}}{\lambda!}m_X^{(\lambda)}t^\lambda+o(|t|^r)]. \tag{7}$$

За мали вредности на z точно е разложувањето

$$\ln(1+z)=\sum_{q=1}^{r}\frac{(-1)^{q-1}}{q}z^q+o(z^r).$$

Ако последното разложување го примениме на (7) и потоа ги изедначиме коефициентите пред t^λ со соодветните коефициенти на десната страна на (3) ја добиваме формулата (5). ♦

Пример 22. Нека случајната променлива X има $\mathrm{N}(a,\sigma^2)$ распределба. Тогаш, нејзината карактеристична функција е $f_X(t)=e^{ita-\frac{\sigma^2t^2}{2}}$. Го логаритмираме последното равенство и добиваме $\ln f_X(t)=ita-\frac{\sigma^2t^2}{2}$, од што согласно со равенството (3) добиваме $s_1=a$, $s_2=\sigma^2$ и $s_n=0$, за $n\geq 3$.

Да забележиме, дека согласно теоремата на Марцинкевич функција од видот $e^{P(x)}$, каде $P(x)$ е полином, може да биде карактеристична функција само ако $\deg P(x)\leq 2$. Оттука, во случајов, следува дека нормалната распределба е единствена распределба која има својство да почнувајќи од некој број $n\geq 3$ сите нејзини семиинваријанти се еднакви на нула. ♦

Пример 23. Нека случајната променлива X има $\boldsymbol{P}(a)$ распределба. Тогаш нејзината карактеристична функција е $f_X(t)=e^{a(e^{it}-1)}$. Го логаритмираме последново равенство и добиваме

$$\ln f_X(t)=a(e^{it}-1).$$

Ако во последното равенство замениме $e^{it}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(it)^k}{k!}$, добиваме

$$\ln f_X(t)=a(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(it)^k}{k!}-1)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(it)^k}{k!}a,$$

од што согласно со равенството (3) следува, дека за секој $n\geq 1$ важи $s_n=a$. ♦

ЗАДАЧИ

1. Нека X е еднодимензионална случајна променлива. Запишете ги формулите за првите пет моменти и семинваријанти кои се добиваат од релациите (4) и (5).
2. Нека $(X_1,X_2,...,X_n)$ е случаен вектор и нека p,q,r се заемно различни индекси од множеството $\{1,2,3,...,n\}$. Да означиме

$$m(p)=E(X_p),\ m(p,q)=E(X_pX_q),\ m(p,q,r)=E(X_pX_qX_r)$$

и нека $s(p), s(p,q), s(p,q,r)$ се соодветните семинваријанти. Користејќи ги релациите (4) и (5) најдете ги врските меѓу наведените моменти и семиинваријанти.

11. ГРАНИЧНИ ТЕОРЕМИ ЗА ПОВЕЌЕДИМЕНЗИОНАЛНИ КАРАКТЕРИСТИЧНИ ФУНКЦИИ

Нека случајниот вектор $X=(X_1,X_2,...,X_n)$ има функција на распределба $F_{X_1,X_2,...,X_n}(x_1,...,x_n)=F(x_1,...,x_n)$. Со помош на оваа функција да ги определиме еднодимензионалните функции на распределба $F_{X_i}(x), i=1,...,n$. Со D_i да го означиме множеството точки на прекин на функцијата $F_{X_i}(x)$. Јасно, ова множество е најмногу пребројливо, па затоа и множеството $D=\bigcup_{i=1}^{n} D_i$ е најмногу пребројливо. Понатаму, функцијата $F(x_1,...,x_n)$ е непрекината во точката $x=(x_1,...,x_n)$ ако $x_i \notin D$, за $i=1,...,n$, бидејќи за $h=(h_1,...,h_n)$ со $h_i \geq 0$ имаме

$$\begin{aligned}0 &\leq F(x+h)-F(x)=P\{X_i \leq x_i+h_i, i=1,...,n\}-P\{X_i \leq x_i, i=1,...,n\}\\ &\leq \sum_{i=1}^{n}[F_{X_i}(x_i+h_i)-F_{X_i}(x_i)]\end{aligned}$$

и аналогното неравенство важи за $h_i<0$. $n-$димензионалниот паралелопипед $I=(x_1,y_1]\times(x_2,y_2]\times...\times(x_n,y_n]$ го нарекуваме *паралелопипед на непрекинатост*, ако $x_i,y_i \notin D$, $i=1,...,n$. За секој паралелопипед на непрекинатост I веројатноста

$$P\{I\}=\Delta_F(I),$$

е непрекината по сите свои аргументи x_i,y_i, $i=1,...,n$.

Дефиниција 9. За низата функции на распределба $F_m(x)$ ќе велиме дека *слабо конвергира кон функција* $F(x)$ и ќе пишуваме

$$F_m(x)\Rightarrow F(x), \tag{1}$$

ако $F_m(x)\to F(x)$, во секоја точка x во која функцијата $F(x)$ е непрекината.

Ако $F_m(x)$ е функција на распределба за $n-$димензионалниот случаен вектор X_m, $m=1,2,...$, $F(x)$ е функција на распределба за X и $F_m(x)\Rightarrow F(x)$, тогаш ќе велиме дека X_m *слабо конвергира кон* X и ќе пишуваме $X_m \Rightarrow X$.

Забелешка 9. а) Во литературата наместо терминот X_m слабо конвергира кон X, често пати се користи терминот X_m *по распределба слабо конвергира кон* X.

б) Од слабата конвергенција $X_m \Rightarrow X$ следува, дека

$$P\{X_m \in I\}\to P\{X\in I\},\ m\to\infty,$$

за секој паралелопипед на непрекинатост I на граничната распределба. Ако X_m по распределба слабо конвергира кон X, тоа значи дека распределбите на X_m и X се блиски една до друга.

в) Барањето во (1) да имаме конвергенција во секоја точка не е во ред, бидејќи при $n=1$ во пример 16 видовме дека $X_m = \frac{1}{m}$, $X=0$ имаме $F_{X_m}(x) \Rightarrow F_X(x)$, но

$$0 = F_{X_m}(0) \not\to F_X(0) = 1,$$

а во исто време X_m и X се блиски една до друга. Не е тешко да се докаже дека од $F_{X_m}(x) \Rightarrow F_X(x)$ и непрекинатоста на $F_X(x)$ следува рамномерната конвергентност $F_{X_m}(x) \to F_X(x)$.

Во овој дел, како и во еднодимензионалниот случај, во врска со конвергенцијата на карактеристичните функции и функциите на распределба ќе докажеме две теореми. Доказите на овие теореми следуваат од следната лема и теоремата на Хели.

Лема 18. Ако $F_m(x)$ и $F(x)$ се функции на распределби и $F_m(x) \to F(x)$ на секаде густо множество D во $\mathbf{R}^n$, тогаш

$$F_m(x) \Rightarrow F(x).$$

Доказ. Како и претходно, ако за секој $i = 1,\dots,n$ важи $x_i \le y_i$ или $x_i < y_i$, тогаш ќе пишуваме $x \le y$ или $x < y$, соодветно. Нека функцијата $F(x)$ е непрекината во точката x и $x', x'' \in D$ се такви, што $x' < x < x''$. Тогаш,

$$F_m(x') \le F_m(x) \le F_m(x'')$$

и

$$F(x') = \lim_{m\to\infty} F_m(x') \le \underline{\lim}_{m\to\infty} F_m(x) \le \overline{\lim}_{m\to\infty} F_m(x) \le \lim_{m\to\infty} F_m(x'') = F(x'') \tag{2}$$

Бидејќи $F(x') \le F(x) \le F(x'')$ и разликата $F(x'') - F(x')$ може да биде направена произволно мала величина, од (2) следува дека

$$\lim_{m\to\infty} F_m(x) = F(x),$$

што и требаше да се докаже. ♦

Теорема 22 (Хели). Секоја низа функции на распределба $\{F_m(x)\}$ содржи слабо конвергентна подниза.

Доказ. Нека $D = \{x_k\}$ е пребројливо секаде густо множество во $\mathbf{R}^n$. За низата $\{F_m(x_1)\}$ важи $0 \le F_m(x_1) \le 1$, па затоа таа содржи конвергентна подниза $\{F_{1m}(x_1)\}$, чија граница ќе ја означиме со $F(x_1)$. За низата $\{F_{1m}(x_2)\}$ важи $0 \le F_{1m}(x_2) \le 1$, па затоа таа содржи конвергентна подниза $\{F_{2m}(x_2)\}$, чија граница ќе ја означиме со $F(x_2)$ итн. Понатаму, избираме дијагонална подниза $\{F_{mm}(x)\}$, за која важи $F_{mm}(x_k) \to F(x_k)$, за секој $x_k \in D$. Сега тврдењето следува од лема 18. ♦

Забелешка 10. Граничната функција во претходната теорема може да не е функција на распределба, факт кој всушност за $n=1$ го констатиравме во пример 17.

Теорема 23 (Хели). Нека $g(x)$ е ограничена и непрекината функција на $\mathbf{R}^n$ и $\{F_m(x)\}$ е низа функции на распределба таква, што $F_m(x) \Rightarrow F(x)$, каде $F(x)$ е функција на распределба. Тогаш,

$$\lim_{m\to\infty} \int\limits_{\mathbf{R}^n} g(x)dF_m(x) = \int\limits_{\mathbf{R}^n} g(x)dF(x)\,. \tag{3}$$

Доказ. Прво ќе докажеме дека за секој паралелопипед на непрекинатост I за функцијата $F(x)$ важи

$$\lim_{m\to\infty} \int\limits_{I} g(x)dF_m(x) = \int\limits_{I} g(x)dF(x)\,. \tag{4}$$

Нека $\varepsilon > 0$ е дадено. Го разбиваме I на паралелопипеди на непрекинатост I_j со центри во x_j и да ставиме $g_\varepsilon(x) = g(x_j)$ ако $x \in I_j$. Разбивањето на I го избираме така, што $|\,g(x) - g_\varepsilon(x)\,| < \varepsilon$, за секој $x \in I$ (последното е можно заради рамномерната непрекинатост на функцијата $g(x)$ на I). Тогаш

$$|\int\limits_I gdF_m - \int\limits_I gdF\,| \le |\int\limits_I g_\varepsilon dF_m - \int\limits_I g_\varepsilon dF\,| + \int\limits_I |\,g - g_\varepsilon\,|\,dF_m + \int\limits_I |\,g - g_\varepsilon\,|\,dF$$

$$\le 2\varepsilon + M \sum_{j=1}^{N} |\,P\{X_m \in I_j\} - P\{X \in I_j\}\,|,$$

каде

$$M = \sup_x |\,g(x)\,|$$

и N е бројот на паралелопипедите во разбивањето. Сега равенството (4) следува од фактот дека последниот собирок во претходното неравенство може да се направи произволно мал, кога $m \to \infty$.

Означуваме $F(A) = P\{X \in A\}$. За да го докажеме равенството (3) да избереме паралелопипед на непрекинатост I таков, што $1 - \varepsilon \le F(I)$, што значи $F(\bar{I}) \le \varepsilon$. Тогаш, постои m_0 таков што за секој $m \ge m_0$ важи $F_m(I) \ge 1 - 2\varepsilon$, па затоа $F_m(\bar{I}) \le 2\varepsilon$. Имаме

$$|\int\limits_{\mathbf{R}^n} gdF_m - \int\limits_{\mathbf{R}^n} gdF\,| \le |\int\limits_I gdF_m - \int\limits_I gdF\,| + |\int\limits_{\bar{I}} gdF_m\,| + |\int\limits_{\bar{I}} gdF\,| \;\; \le 3\varepsilon M + |\int\limits_I gdF_m - \int\limits_I gdF\,|\,.$$

Конечно, равенството (3) следува од равенството (4) и претходното неравенство ♦

Теорема 24. Ако $F_m(x), m = 1,2,3,...$ и $F(x)$ се функции на распределби и $f_m(t), m = 1,2,3,...$ и $f(t)$ се соодветните карактеристични функции и $F_m(x) \Rightarrow F(x)$, тогаш $f_m(t) \to f(t)$, за секој $t \in \mathbf{R}^n$.

Доказ. Од $F_m(x) \Rightarrow F(x)$, со примена на теорема 23 добиваме

$$f_m(t) = \int\limits_{\mathbf{R}^n} e^{i(t,x)}dF_m \to \int\limits_{\mathbf{R}^n} e^{i(t,x)}dF = f(t)\text{, за секој } t \in \mathbf{R}^n\,. \;♦$$

Теорема 25. Нека $F_m(x)$, $m=1,2,3,...$ се функции на распределба и $f_m(t)$, $m=1,2,3,...$ се нивните карактеристични функции. Ако $f_m(t)$ конвергира во секоја точка $t\in\mathbf{R}^n$ кон некоја функција $f(t)$ непрекината во $0=(0,0,...,0)$, тогаш $F_m(x)\Rightarrow F(x)$ и $f(t)$ е карактеристичната функција на распределбата $F(x)$.

Доказ. Според теорема 22 низата $F_m(x)$, $m=1,2,...$ содржи слабо конвергентна подниза $F_{mm}(x)\Rightarrow F^*(x)$. Ќе докажеме дека $F^*(x)$ е функција на распределба. За таа цел прво ќе го докажеме неравенството

$$P\{|X_i|\le\alpha, i=1,...,n\}\ge\frac{|\frac{1}{2^n z^n}\int\limits_{-z}^{z}...\int\limits_{-z}^{z}f(t)dt|-\frac{1}{z\alpha}}{1-\frac{1}{z\alpha}}, \qquad (5)$$

каде $f(t)$ е карактеристичната функција на случајната променлива X, $\alpha>0, z>0$. Нека $A=\{|X_i|\le\alpha, i=1,2,...,n\}$. Имаме,

$$|\frac{1}{2^n z^n}\int\limits_{-z}^{z}...\int\limits_{-z}^{z}f(t)dt|=|\frac{1}{2^n z^n}\int\limits_{-z}^{z}...\int\limits_{-z}^{z}E(e^{i(t,X)})dt|=|\frac{1}{2^n z^n}E(\int\limits_{-z}^{z}...\int\limits_{-z}^{z}e^{i(t,X)}dt\,|)$$

$$=|E(\prod_{i=1}^{n}\frac{\sin zX_i}{zX_i}(I_A+I_{\bar{A}}))|\le E(I_A)+\frac{1}{z\alpha}E(I_{\bar{A}})=P(A)+\frac{1}{z\alpha}(1-P(A))$$

од што следува неравенството (5).

Да забележиме дека за $z\alpha=2$, неравенството (5) го прима видот

$$P\{|X_i|\le\alpha, i=1,...,n\}\ge 2|\frac{1}{2^n z^n}\int\limits_{-z}^{z}...\int\limits_{-z}^{z}f(t)dt|-1. \qquad (6)$$

Понатаму, по претпоставка $f(t)$ е непрекината во $0=(0,0,...,0)$, па затоа за секој $\varepsilon>0$ постои $z_0>0$ таков, што за секој $z\in(0,z_0]$ важи

$$|\frac{1}{2^n z^n}\int\limits_{-z}^{z}...\int\limits_{-z}^{z}f(t)dt|\ge 1-\frac{\varepsilon}{4}.$$

Бидејќи $f_m(t)\to f(t)$, за секој t добиваме дека постои m_0 таков, што за секој $m\ge m_0$ важи

$$|\int\limits_{-z}^{z}...\int\limits_{-z}^{z}f_m(t)dt-\int\limits_{-z}^{z}...\int\limits_{-z}^{z}f(t)dt|<2^{n-2}z^n\varepsilon.$$

Сега, за $m\ge m_0$ добиваме

$$|\frac{1}{2^n z^n}\int\limits_{-z}^{z}...\int\limits_{-z}^{z}f_m(t)dt|\ge 1-\frac{\varepsilon}{2},$$

и ако го искористиме неравенството (6) наоѓаме

$$P\{|X_{mi}|\le\frac{2}{z}, i=1,...,n\}\ge 2(1-\frac{\varepsilon}{2})-1=1-\varepsilon,$$

од што следува дека $F^*(\mathbf{R}^n)=1$.

Ќе докажеме дека $F_m(x) \Rightarrow F(x)$. Нека претпоставиме дека $F_m(x) \not\Rightarrow F(x)$. Тогаш, постојат две поднизи $F_{m'} \Rightarrow F^*$ и $F_{m''} \Rightarrow F^{**}$ и притоа $f^* \not\equiv f^{**}$. Од теорема 24 следува $f_{m'} \to f^*$, $f_{m''} \to f^{**}$ и како $f_m \to f$ добиваме $f^* = f^{**} = f$, што е противречност. ♦

12. ПОВЕЌЕДИМЕНЗИОНАЛНА НОРМАЛНА РАСПРЕДЕЛБА

Нека $B = [b_{ij}]_{n\times n}$ е симетрична, ненегативно определена и несингуларна матрица, $B^{-1} = A = [a_{ij}]_{n\times n}$ е инверзната матрица на B и $(m_1, m_2, ..., m_n)$ е произволна $n-$торка реални броеви. Да ја разгледаме функцијата $p: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ определена со

$$p(x_1,...,x_n) = \frac{|A|^{1/2}}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}(x_i-m_i)(x_j-m_j)}, \ (x_1,...,x_n) \in \mathbf{R}^n. \qquad (1)$$

Ќе докажеме дека p е густина на веројатност на случаен вектор $(X_1, X_2, ..., X_n)$. Бидејќи $p(x_1,...,x_n) > 0$, за секој $(x_1,...,x_n) \in \mathbf{R}^n$ доволно е да докажеме дека

$$\int\limits_{\mathbf{R}^n} p(x_1,...,x_n)dx_1...dx_n = \frac{|A|^{1/2}}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbf{R}^n} e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}(x_i-m_i)(x_j-m_j)} dx_1...dx_n = 1. \qquad (2)$$

Ја воведуваме смената

$$y_k = x_k - m_k, k = 1,2,...,n,$$

со што равенството (2) преминува во еквивалентното равенство

$$\frac{|A|^{1/2}}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbf{R}^n} e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}y_iy_j} dy_1...dy_n = 1. \qquad (3)$$

Понатаму, ако го искористиме равенството

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_{kl}y_ky_l = a_{11}(y_1 - \frac{1}{a_{11}}\sum_{l=2}^{n} a_{1l}y_l)^2 + \sum_{k=2}^{n}\sum_{l=2}^{n}(a_{kl} - \frac{a_{1k}a_{1l}}{a_{11}})y_ky_l$$

и ја воведеме смената

$$z_1 = \sqrt{a_{11}}(y_1 + \frac{1}{a_{11}}\sum_{l=2}^{n} a_{1l}y_l), \quad a_{kl}^{(1)} = a_{kl} - \frac{a_{1k}a_{1l}}{a_{11}}, k,l = 1,2,...,n$$

го добиваме равенството

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_{kl}y_ky_l = z_1^2 + \sum_{k=2}^{n}\sum_{l=2}^{n} a_{kl}^{(1)}y_ky_l.$$

Аналогно, повеќекратно ја повторуваме претходната постапка, прво со збирот $\sum_{k=2}^{n}\sum_{l=2}^{n} a_{kl}^{(1)} y_k y_l$ и со секој следен збир, и користејќи ги ознаките

$$a_{kl}^{(j)} = a_{kl}^{(j-1)} - \frac{a_{jk}^{(j-1)} a_{jl}^{(j-1)}}{a_{jj}^{(j-1)}}, \quad a_{kl}^{(0)} = a_{kl}\,,\ k,l \in \{j+1,...,n\},\ j \in \{1,2,...,n-1\}$$

ги воведуваме променливите

$$z_k = \sqrt{a_{kk}^{(k-1)}}\,(y_k + \tfrac{1}{a_{kk}^{(k-1)}} \sum_{l=k+1}^{n} a_{kl}^{(k-1)} y_l), \quad k = 1,2,...,n \tag{4}$$

со што го добиваме равенството

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_{kl} y_k y_l = \sum_{k=1}^{n} z_k^2 \,.$$

Притоа, бидејќи матрицата A е несингуларна и ненегативно определена, добиваме

$$a_{11} > 0,\, a_{22}^{(1)} > 0,\, a_{33}^{(2)} > 0, ...,\, a_{nn}^{(n-1)} > 0\,.$$

Понатаму, Јакобијанот на трансформацијата зададена со (3) е:

$$\left| \frac{\partial(y_1,...,y_n)}{\partial(z_1,...,z_n)} \right| = \left| \frac{\partial(z_1,...,z_n)}{\partial(y_1,...,y_n)} \right|^{-1} = \frac{1}{\sqrt{a_{11}a_{22}^{(1)}...a_{nn}^{(n-1)}}}\,,$$

па затоа

$$\begin{aligned} \frac{|A|^{1/2}}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbf{R}^n} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_i y_j} dy_1...dy_n &= \frac{|A|^{1/2}}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{a_{11}a_{22}^{(1)}...a_{nn}^{(n-1)}}} \int_{\mathbf{R}^n} e^{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} z_k^2} dz_1...dz_n \\ &= \frac{|A|^{1/2}}{\sqrt{a_{11}a_{22}^{(1)}...a_{nn}^{(n-1)}}}. \end{aligned} \tag{5}$$

Да ја пресметаме детерминантата на матрицата A. Имаме

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ...... & .... & ... & .... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & ... & a_{1n} \\ \frac{a_{21}}{a_{11}} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ...... & .... & ... & .... \\ \frac{a_{n1}}{a_{11}} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Ако во последната матрица првата колона последователно ја помножиме со $a_{12}, a_{13}, ... a_{1n}$ и ја додадеме на втората, третата, ..., $n-$та колона соодветно, добиваме

$$|A| = a_{11} \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & ... & a_{1n} \\ \frac{a_{21}}{a_{11}} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ...... & .... & ... & .... \\ \frac{a_{n1}}{a_{11}} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ \frac{a_{21}}{a_{11}} & a_{22}^{(1)} & ... & a_{2n}^{(1)} \\ ...... & .... & ... & .... \\ \frac{a_{n1}}{a_{11}} & a_{n2}^{(1)} & ... & a_{nn}^{(1)} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22}^{(1)} & ... & a_{2n}^{(1)} \\ ...... & ... & .... \\ a_{n2}^{(1)} & ... & a_{nn}^{(1)} \end{vmatrix}.$$

Продолжувајќи ја претходната постапка добиваме $|A|=a_{11}a_{22}^{(1)}...a_{nn}^{(n-1)}$ и ако замениме во (2) го добиваме равенството (3) што значи дека функцијата определена со (1) е густина на веројатност на некој случаен вектор $X=(X_1,X_2,...,X_n)$. Притоа ќе велиме дека случајниот вектор $X=(X_1,X_2,...,X_n)$ има $n-$*димензионална нормална распределба* и истата ја означуваме со $\mathrm{N}(m,B)$.

Лема 19. Параметрите m_l, $l=1,2,...,n$ во густината на нормалната распределба (1) се еднакви на математичките очекувања на случајните променливи X_l, $l=1,2,...,n$, соодветно.

Доказ. Ако по параметарот m_k, $k=1,2,...,n$ ја диференцираме левата и десната страна на равенството

$$\frac{|A|^{1/2}}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbf{R}^n} e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{l=1}^{n}a_{kl}(x_k-m_k)(x_l-m_l)}dx_1...dx_n=1$$

го добиваме равенството

$$\frac{|A|^{1/2}}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbf{R}^n}\sum_{l=1}^{n}a_{kl}(x_l-m_l)e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{l=1}^{n}a_{kl}(x_k-m_k)(x_l-m_l)}dx_1...dx_n=1$$

кое е еквивалентно со равенството

$$E[\sum_{l=1}^{n}a_{kl}(X_l-m_l)]=0,\ k=1,2,...,n$$

од каде го добиваме хомогениот систем равенки (по променливи $E(X_l)-m_l$):

$$\sum_{l=1}^{n}a_{kl}(E(X_l)-m_l)=0,\ k=1,2,...,n. \tag{6}$$

Но, $|A|=\det[a_{kl}]\neq 0$, па затоа системот (6) има само тривијално решение, т.е.

$$E(X_l)=m_l\ , l=1,2,...,n.\ \blacklozenge$$

Лема 20. За нормалната распределба (1) матрицата $B=A^{-1}$ е матрицата на коваријанси за случајниот вектор $X=(X_1,X_2,...,X_n)$.

Доказ. Равенството (2) го запишуваме во видот

$$\int_{\mathbf{R}^n} e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{l=1}^{n}a_{kl}(x_k-m_k)(x_l-m_l)}dx_1...dx_n=\frac{(2\pi)^{n/2}}{|A|^{1/2}}. \tag{7}$$

Ако од лево и десно го диференцираме равенството (7) по параметарот $a_{kl},k,l\in\{1,2,...,n\}$ го добиваме равенството

$$-\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^n}(x_k-m_k)(x_l-m_l)e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{l=1}^{n}a_{kl}(x_k-m_k)(x_l-m_l)}dx_1...dx_n=-\frac{1}{2}\cdot\frac{(2\pi)^{n/2}}{|A|^{3/2}}(-1)^{k+l}A_{kl} \tag{8}$$

каде A_{kl} е минорот на $|A|$ кој соодветствува на елементот a_{kl}. Равенството (8) го множиме со $-\frac{2|A|^{1/2}}{(2\pi)^{n/2}}$ и ако земеме предвид дека $B^{-1}=A$ од својствата на детерминантите добиваме

$$\frac{|A|^{1/2}}{(2\pi)^{n/2}}\int\limits_{\mathbf{R}^n}(x_k-m_k)(x_l-m_l)e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{l=1}^{n}a_{kl}(x_k-m_k)(x_l-m_l)}dx_1...dx_n=\frac{(-1)^{k+l}}{|A|}A_{kl}=\frac{|B|}{(-1)^{k+l}B_{kl}}=b_{kl}$$

т.е.

$$\operatorname{cov}(X_k,X_l)=\frac{|A|^{1/2}}{(2\pi)^{n/2}}\int\limits_{\mathbf{R}^n}(x_k-m_k)(x_l-m_l)e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{l=1}^{n}a_{kl}(x_k-m_k)(x_l-m_l)}dx_1...dx_n=b_{kl}$$

за $k,l\in\{1,2,...,n\}$. ♦

Во натамошните разгледувања ќе ги користиме ознаките $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ и $m=(m_1,m_2,...,m_n)$, при кои квадратната форма која фигурира во степенот на десната страна на (1) можеме да ја запишеме во видот

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}a_{kl}(x_k-m_k)(x_l-m_l)=(A(x-m),x-m)\,, \tag{9}$$

и притоа густината на $n-$димензионалната нормална распределба можеме да ја запишеме во видот

$$p(x_1,...,x_n)=\frac{|A|^{1/2}}{(2\pi)^{n/2}}e^{-\frac{1}{2}(A(x-m),x-m)}\,,\ (x_1,...,x_n)\in\mathbf{R}^n\,.$$

Лема 21. Карактеристичната функција на нормалната распределба со густина на веројатност (1) има вид

$$f_X(t)=e^{i(t,m)-\frac{1}{2}(Bt,t)}\,, \tag{10}$$

каде $m=(m_1,m_2,...,m_n)$, $t=(t_1,t_2,...,t_n)$ и $B=[b_{ij}]_{n\times n}$ матрицата на коваријанси на случајниот вектор $(X_1,X_2,...,X_n)$.

Доказ. Користејќи ја дефиницијата на карактеристична функција и ознаката (9) добиваме

$$f_X(t)=\frac{|A|^{1/2}}{(2\pi)^{n/2}}\int\limits_{\mathbf{R}^n}e^{i(t,x)-\frac{1}{2}(A(x-m),x-m)}dx_1dx_2...dx_n=e^{i(t,m)}\varphi(t) \tag{11}$$

каде

$$\varphi(t)=\frac{|A|^{1/2}}{(2\pi)^{n/2}}\int\limits_{\mathbf{R}^n}e^{i(t,(x-m))-\frac{1}{2}(A(x-m),x-m)}dx_1dx_2...dx_n\,.$$

Ставаме

$$x-m=Cy,\, t=Cu \text{ каде } y=(y_1,...,y_n)\,,\ u=(u_1,...,u_n)$$

и C е ортогонална матрица таква, што важи $C^*BC=D$, каде D е дијагонална матрица со елементи на главната дијагонала $d_1,d_2,...,d_n$. Бидејќи $|B|\neq 0$ добиваме дека $d_1>0,...,d_n>0$ и

$$|A| = |B^{-1}| = \frac{1}{d_1 d_2 ... d_n}.$$

Понатаму,

$$i(t,(x-m)) - \tfrac{1}{2}(A(x-m), x-m)) = i(Cu, Cy) - \tfrac{1}{2}(ACy, Cy) = i(C*Cu, y) - \tfrac{1}{2}(C*ACy, y)$$
$$= i(u,y) - \tfrac{1}{2}(C*B^{-1}Cy, y) = i(u,y) - \tfrac{1}{2}(D^{-1}y, y),$$

па затоа

$$\varphi(t) = \frac{|A|^{1/2}}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbf{R}^n} e^{i(t,(x-m)) - \frac{1}{2}(A(x-m),x-m)} dx_1 ... dx_n = \frac{|A|^{1/2}}{(2\pi)^{n/2}|A|} \int\limits_{\mathbf{R}^n} e^{i(u,y) - \frac{1}{2}(D^{-1}y,y)} dy_1 ... dy_n$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{d_1 d_2 ... d_n}} \int\limits_{\mathbf{R}^n} e^{\sum\limits_{k=1}^{n}(iu_k y_k - \frac{1}{2d_k}y_k^2)} dy_1 ... dy_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi d_k}} \int\limits_{\mathbf{R}} e^{iu_k y_k - \frac{1}{2d_k}y_k^2} dy_k$$

$$= \prod_{k=1}^{n} e^{-\frac{1}{2}d_k u_k^2} = e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n} d_k u_k^2} = e^{-\frac{1}{2}(Du,u)} = e^{-\frac{1}{2}(C*BCu,u)} = e^{-\frac{1}{2}(BCu,Cu)} = e^{-\frac{1}{2}(Bt,t)}.$$

Конечно, од равенството (11) и од последното равенство следува равенството (10). ♦

Последица 5. Ако $n-$димензионалната случајна променлива X има $\mathrm{N}(m,B)$ распределба и C е матрица од $n-$ти ред, тогаш векторот $Y = CX$ има $\mathrm{N}(Cm, CBC^*)$ распределба.

Доказ. Според лема 13 карактеристичната функција на векторот $Y = CX$ е $f_Y(t) = f_X(C*t)$, па од лема 21 следува

$$f_Y(t) = f_X(C*t) = e^{i(C^*t,m) - \frac{1}{2}(BC^*t, C^*t)} = e^{i(t,Cm) - \frac{1}{2}(CBC^*t,t)}. \qquad (12)$$

Сега тврдењеo следува од фактот дека (12) е карактеристична функција на случајна променлива со распределба $\mathrm{N}(Cm, CBC^*)$ и од теорема 19. ♦

Нека X има $\mathrm{N}(0,B)$ распределба и C е ортогонална матрица таква што

$$CBC^* = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & ... & 0 \\ 0 & d_{22} & ... & 0 \\ ..... & ..... & ... & ..... \\ 0 & 0 & ... & d_{nn} \end{bmatrix} = D, \quad d_{ii} \geq 0, i = 1,2,...,n.$$

Тогаш од последица 5 следува дека карактеристичната функција на случајниот вектор $Y = CX$ е

$$f_Y(t) = e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n} d_{ii}t_i^2} = \prod_{i=1}^{n} e^{-\frac{1}{2}d_{ii}t_i^2} = \prod_{i=1}^{n} f_{Y_i}(t), \qquad (13)$$

каде $f_{Y_i}(t), i = 1,2,...,n$ се карактеристичните функции на случајните променливи Y_i, $i = 1,2,...,n$ (зошто?). Сега од теорема 20 следува дека случајните променливи $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ се независни, при што ако $d_{ii} > 0$, тогаш Y_i има $\mathrm{N}(0; \sqrt{d_{ii}})$ распределба, а ако $d_{ii}=0$, тогаш со веројатност 1 е $Y_i=0$. Ако матрицата B има ранг n, тогаш матрицата $C^*BC=D$ исто така има ранг n, т.е. сите $d_{ii}>0$. Во овој случај Y има n-димензионална густина на распределба

$$p_Y(y_1,...,y_n)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi d_{ii}}}e^{-\frac{y_i^2}{2d_{ii}}}=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sqrt{\det D}}e^{-\frac{1}{2}(D^{-1}y,y)}.$$

Бидејќи $X=C^{-1}Y$, $\det C=1$, $B^{-1}=C^*D^{-1}C$ и $\det D=\det B$, од лема 14 следува

$$\begin{aligned}p_X(x)=p_Y(Cx)&=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sqrt{\det D}}e^{-\frac{1}{2}(D^{-1}Cx,Cx)}\\&=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sqrt{\det B}}e^{-\frac{1}{2}(C^*D^{-1}Cx,x)}=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sqrt{\det B}}e^{-\frac{1}{2}(B^{-1}x,x)}.\end{aligned}\tag{14}$$

Нормалната распределба $(X_1,X_2,...,X_n)$ со густина (13) ја нарекуваме *недегенерирана*. Ако матрицата B е дијагонална со еднакви дијагонални елементи, тогаш нормалната распределба ја нарекуваме *сферна*. Во овој случај густината (14) зависи само од растојанието на точката x до координатниот почеток. Ако пак рангот r на матрицата B е помал од n, тогаш постои матрица C со чија помош при трансформацијата се добива $d_{ii}>0$ за $i=1,2,...,r$ и $d_{r+1,r+1}=...=d_{nn}=0$. Во овој случај $P\{Y_{r+1}=...=Y_n=0\}=1$, т.е. распределбата е концентрирана на подпростор со помала димензија, кој е определен со равенствата

$$\sum_{j=1}^{n}c_{ij}X_j=0,\quad i=r+1,...,n.$$

На овој потпростор избираме координати $Y_i=\sum_{j=1}^{n}c_{ij}X_j$, $i=1,...,r$ и согласно формулата (14) на овој потпростор добиваме густина

$$p_{Y_1,...,Y_r}(x_1,...,x_r)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{r}{2}}\sqrt{d_{11}...d_{rr}}}e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r}\frac{x_i^2}{d_{ii}}}.$$

Во овој случај нормалната распределба ја нарекуваме *дегенерирана.*

Ако на случајните променливи $Y_1,...,Y_r$ ја примениме линеарната трансформација $Z_i=\frac{Y_i}{\sqrt{d_{ii}}}$, тогаш $Z_i,...,Z_r$ се независни случајни променливи со N(0;1) распределба , т.е. точна е следнава теорема.

Теорема 26. За да случајниот вектор $X=(X_1,...,X_n)$ е нормално распределен, потребно и доволно е да

$$X_i=\sum_{j=1}^{r}s_{ij}Z_j+a_i,$$

каде $[s_{ij}]$ е некоја матрица, $E(X_i)=a_i$, а $Z_i,...,Z_r$ се независни случајни променливи со распределба $\mathrm{N}(0;1)$. ♦

Едно од важните својства на нормалната распределба е тоа што таа се јавува во улога на гранична распределба за доволно општа шема на збир на независни случајни вектори. Користејќи ги карактеристичните функции ќе ја докажеме следнава гранична теорема.

Теорема 27. Нека $X_1, X_2,..., X_m,...$ е низа независни еднакво распределени случајни вектори $X_m=(X_{m1},...,X_{mn})$ со $E(X_{mi})=a_i$ и конечни

$$\mathrm{cov}(X_{mi}, X_{mj})=b_{ij}.$$

Да означиме $Z_m=X_1+...+X_m$. Тогаш функцијата на распределба на случајниот вектор $Z_m^{'}=\frac{Z_m-ma}{\sqrt{m}}$, $a=(a_1,...,a_n)$ слабо конвергира кон нормалната функција на распределба со нулто математичко очекување и матрица на коваријанси $B=[b_{ij}]_{n\times n}$.

Доказ. Со $f(t)$ да ја означиме карактеристичната функција на $\overline{X}_m=X_m-a$. Од $E(\overline{X}_m)=0$ и $E(\overline{X}_{mi}\overline{X}_{mj})=b_{ij}$ следува

$$f(\tfrac{t}{\sqrt{m}})=1-\tfrac{1}{2m}\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}t_i t_j+o(\tfrac{1}{m}).$$

Затоа за секој t важи

$$f_{Z_m^{'}}(t)=[f(\tfrac{t}{\sqrt{m}})]^m \to e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{i,j=1}^{n} b_{ij}t_i t_j},$$

од што согласно теорема 19 следува точноста на тврдењето. ♦

Теорема 28. Нека $X=(X_1, X_2,..., X_n)$ има полиномна распределба со веројатности $p=(p_1,...,p_n)$ и m експерименти. Распределбата на векторот $\frac{X-mp}{\sqrt{m}}$ кога $m\to\infty$ слабо конвергира кон нормална распределба со нулто математичко очекување и матрица на коваријации $[\delta_{ij}p_i-p_i p_j]_{n\times n}$, каде δ_{ij} е симболот на Кронекер.

Доказ. Случајниот вектор X ќе го запишеме како збир $Y_1+...+Y_m$ на независни вектори $Y_i=(Y_{i1},Y_{i2},...,Y_{in})$, каде $Y_{ij}=1$ ако при $i-$то испитување е добиен резултат j и $Y_{ij}=0$ во спротивен случај. Сега тврдењето на теорема следува од теорема 27, бидејќи $E(Y_{ij})=p_j$ и $\mathrm{cov}(Y_{ij},Y_{it})=p_j\delta_{jt}-p_j p_t$. ♦

Забелешка 11. Од слабата конвергентност на Y_m кон граничниот вектор Y следува дека, за секој паралелопипед на непрекинатост I важи

$$P\{Y_m\in I\}\to P\{Y\in I\}. \qquad (15)$$

Јасно, од (15) следува точноста на аналогното тврдење за конечни суми на такви паралелопипеди и за множествата кои може да се апроксимираат со такви суми. Со други зборови, за секое множество A измерливо по Жордан со $P\{Y \in \partial A\} = 0$, каде ∂A е границата на A, кога $Y_m \Rightarrow Y$ важи

$$P\{Y_m \in A\} \to P\{Y \in A\}. \tag{16}$$

Може да се докаже дека (16) важи и за секое Борелово множество A такво што $P\{Y \in \partial A\} = 0$, каде ∂A е границата на A. Исто како и во еднодимензионалниот случај, обично граничната релација (16) ја користиме "до граничен облик", сметајќи дека за доволно големи m левата страна на (16) е приближно еднаква на десната.

Пример 24. Како што претходно рековме за случајниот вектор $(X_1,...,X_n)$ ќе велиме дека има *сферна нормална распределба* ако има густина

$$p_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sigma^n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x,x)}. \tag{17}$$

Ако C е ортогонална матрица и $Y = CX$, тогаш од (12) следува дека

$$p_Y(x) = p_X(C^*t) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sigma^n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(C^*t,C^*t)} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sigma^n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(CC^*t,t)} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sigma^n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(t,t)}$$

што значи дека $p_Y(x) = p_X(x)$, односно сферната нормална распределба е инваријантна во однос на ортогоналните трансформации на случајниот вектор $(X_1,...,X_n)$. ♦

ЗАДАЧИ

1. Дводимензионалната случајна променлива (X,Y) има сферна нормална распределба
$$p(x,y) = \tfrac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)},\ x,y \in \mathbf{R}.$$
Пресметајте ги веројатностите
а) $P\{|X| \le 1, |Y| \le 1\}$, и б) $P\{\xi^2 + \eta^2\} \le 1$.

2. Случајниот вектор (X,Y,U,V) има $\mathrm{N}(0;B)$ распределба, каде
$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$
Најдете ја густината на веројатност на случајниот вектор (Y,U).

3. Нека X и Y се независни случајни променливи со распределби $\mathrm{N}(0;1)$ и $\mathrm{N}(0;4)$ соодветно. Пресметајте $P\{|X - Y| \le 1\}$.

4. Нека X и Y се независни случајни променливи со распределби $\mathrm{N}(0,1)$ и $\mathrm{N}(0,4)$ соодветно. Пресметајте $P\{(X,Y) \in D\}$ каде
а) $D = \{(x,y) \vdots |x| \le 1, |y| \le 2\}$, и б) $D = \{(x,y) \vdots \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{4a^2} \le 1\}$.

5. Нека X и Y се независни случајни променливи со распределба $\mathrm{N}(0,1)$. Докажете дека X^2+Y^2 и $\frac{X}{Y}$ се независни случајни променливи.

6. Нека случајниот вектор (X,Y) има $\mathrm{N}(0,0,1,1,\rho)$ распределба. Докажете дека
$$P\{XY>0\}=\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{\pi}\arcsin\rho \text{ и } P\{XY<0\}=\tfrac{1}{\pi}\arccos\rho .$$

7. Нека $f_1(x,y)$ и $f_2(x,y)$ се густини на распределба на случајни вектори кои имаат $\mathrm{N}(0,0,1,1,\rho_1)$ и $\mathrm{N}(0,0,1,1,\rho_2)$ распределби, соодветно, каде $\rho_1\neq\rho_2$.
   a) Докажете дека функцијата $f(x,y)=\frac{1}{2}[f_1(x,y)+f_2(x,y)]$ е густина на распределба на некој случаен вектор (X,Y)
   b) Докажете дека X и Y имаат $\mathrm{N}(0,1)$ распределба.
   v) Докажете дека распределбата на случајниот вектор (X,Y) не е нормална.

8. Нека $X_i,\, i=1,2,3$ се независни случајни променливи со распределба $\mathrm{N}(0,1)$ и
$$Y_1=\tfrac{1}{\sqrt{2}}(X_1-X_2)\,,\ Y_2=\tfrac{1}{\sqrt{6}}(X_1+X_2-2X_3)\,,\ Y_3=\tfrac{1}{\sqrt{3}}(X_1+X_2+X_3)\,.$$
Најдете ја распределбата на случајниот вектор (Y_1,Y_2,Y_3).

9. Нека случајните променливи X_1,X_2,Y имаат $\mathrm{N}(0,1)$ распределба и нека
$$X_3=\begin{cases} Y, & X_1X_2=0 \\ Y\operatorname{sign}X_1X_2, & X_1X_2\neq 0. \end{cases}$$
   a) Најдете го векторот на математичкото очекување и матрицата на коваријанси на случајниот вектор (X_1,X_2,X_3).
   b) Најдете ја распределбата на случајната променлива X_3.
   v) Најдете ги распределбите на случајните вектори (X_1,X_3) и (X_2,X_3).
   g) Најдете ја распределбата на случајниот вектор (X_1,X_2,X_3). Дали оваа распределба е нормална?

10. Користејќи ја идејата од претходната задача наведета пример на случаен вектор $(X_1,X_2,...,X_n)$ кој нема нормална распределба, но произволни $n-1$ негови координати имаат $\mathrm{N}(0;1)$ распределба.

11. Нека $(X_1,X_2,...,X_n)$ е случаен вектор со нормална распределба $\mathrm{N}(m,B)$. Докажете дека за секој $r\in\{1,2,...,n\}$ случајниот вектор $(X_1,X_2,...,X_r)$ има нормална распределба со вектор на математичките очекувања $(m_1,m_2,...,m_r)$ и матрица на коваријанси $[b_{ij}]_{r\times r}$.

12. Нека $X_i,\, i=1,2,...,n$ се независни случајни променливи со распределба $\mathrm{N}(0,\sigma_i^2)$. Докажете дека случајниот вектор $(X_1,X_1+X_2,X_1+X_2+X_3,...,X_1+X_2+...+X_n)$ има нормална распределба со вектор на математичко очекување $(0,0,...,0)$ и матрицата на коваријанси $B=[b_{ij}]_{n\times n}$ каде $b_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{\min\{i,j\}}\sigma_k^2$.

13. Нека случајниот вектор $(X_1,X_2,...,X_n)$ има $n-$димензионална нормална распределба. Докажете дека постои единечен вектор $(c_1,c_2,...,c_n)$ таков, што за секој единечен вектор $(b_1,b_2,...,b_n)$ важи неравенството
$$D(c_1X_1+c_2X_2+...+c_nX_n)\geq D(b_1X_1+b_2X_2+...+b_nX_n)\,.$$

14. Случајниот вектор $(X_1,X_2,...,X_n)$ има густина

$$p(x_1,x_2,...,x_n)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2}[1+\prod_{i=1}^{n}x_i e^{-\frac{1}{2}x_i^2}],\ (x_1,x_2,...,x_n)\in\mathbf{R}^n .$$

Докажете дека постои вектор составен од $n-1$ негови негови компоненти кои се независни и кој е нормално распределен. Дали случајниот вектор $(X_1,X_2,...,X_n)$ е нормално распределен?

15. Докажете дека случајниот вектор $(X_1,X_2,...,X_n)$ има нормална распределба ако и само ако за секој вектор $(c_1,c_2,c_3,...,c_n)\in\mathbf{R}^n$ случајната променлива $c_1X_1+c_2X_2+...+c_nX_n$ има нормална распределба.
16. Случајните променливи $Z,Y,X_1,X_2,...,X_n$ се независни и имаат нормална распределба $\mathrm{N}(0,1)$. Со помош на Студентовата распределба изразете ја распределбата на случајната променлива $\frac{Y-Z}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2}}$

ГЛАВА V
ЗАКОНИ НА ГОЛЕМИ БРОЕВИ. ЦЕНТРАЛНА ГРАНИЧНА ТЕОРЕМА

1. НЕРАВЕНСТВО НА ЧЕБИШЕВ

Теорема 1 (неравенство на Марков). Нека X е ненегативна случајна променлива на просторот на веројатности $(\Omega, \boldsymbol{A}, P)$. Ако постои $E(X)$, тогаш за секој $x > 0$ важи

$$P\{X \geq x\} \leq \frac{E(X)}{x}. \tag{1}$$

Доказ. Случајната променлива X е ненегативна, па затоа за секој $x > 0$ важи

$$X = X(I_{\{X \geq x\}} + I_{\{\xi < x\}}) = XI_{\{X \geq x\}} + XI_{\{X < x\}} \geq XI_{\{X \geq x\}} \geq xI_{\{X \geq x\}}$$

Ако го пресметаме математичкото очекување од двете страни на последното неравенство го добиваме неравенството

$$E(X) \geq xE(I_{\{X \geq x\}}) = xP\{X \geq x\},$$

кое е еквивалентно на неравенството (1). ♦

Последица 1 (неравенство на Чебишев). Нека X е случајна променлива на просторот на веројатности $(\Omega, \boldsymbol{A}, P)$ со конечна дисперзија. Тогаш за секој $x > 0$ важи

$$P\{|X - E(X)| \geq x\} \leq \frac{D(X)}{x^2}. \tag{2}$$

Доказ. Доказот е идентичен на доказот последица II 11. ♦

Забелешка 1. Аналогно како и во случајот на дискретни случајни променливи, неравенството на Чебишев (2) покажува дека при мали дисперзии $D(X)$ со веројатност блиска до 1, случајната променлива X е концентрирана околу математичкото очекување $E(X)$, т.е. дека важи неравенството

$$P\{|X - E(X)| < x\} \geq 1 - \frac{D(X)}{x^2} \tag{3}$$

Понатаму, идентично како и во случајот на дискретни случајни променливи може да се докаже дека неравенствата на Марков и Чебишев се непосредна последица од следново поопшто тврдење:

Ако X *е случајна променлива на просторот на веројатности* $(\Omega, \boldsymbol{A}, P)$ *и* $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *е ненегативна функција таква што постои постои* $E(g(X))$, *тогаш за секој* $x > 0$ *важи*

$$P\{g(X) \geq x\} \leq \frac{E(g(X))}{x}. \tag{4}$$

Пример 1. Ќе докажеме дека за случајната променлива X со густина

$$p(x)=\begin{cases}\frac{x^m}{(m+1)!}e^{-x}, & x\geq 0,\\ 0, & x<0,\end{cases}$$

важи

$$P\{0\leq X\leq 2(m+1)\}\geq \frac{m}{m+1}.$$

Навистина, за случајната променлива X имаме

$$E(X)=m+1 \text{ и } D(X)=m+1,$$

(проверете!). Според тоа, ако го искористиме неравенството (3) добиваме

$$\begin{aligned}P\{0\leq X\leq 2(m+1)\}&=P\{-(m+1)\leq X-(m+1)\leq m+1\}\\ &=P\{-(m+1)\leq X-E(X)\leq m+1\}\\ &=P\{|X-E(X)|\leq m+1\}\\ &\geq 1-\frac{D(X)}{(m+1)^2}=1-\frac{m+1}{(m+1)^2}=\frac{m}{m+1},\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже. ♦

ЗАДАЧИ

1. Случајната променлива X има гама распределба со параметар $m\in\mathbf{N}$. Докажете го неравенството $P\{0\leq X\leq 2m\}\geq\frac{m-1}{m}$.
2. Нека X е случајна променлива и $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^+$ таква што $f(x)\geq b>0$ за $x\geq a$. Докажете дека ако постои $E[f(X)]$, тогаш
$$P\{X\geq a\}\leq\frac{E[f(X)]}{b}.$$
3. Нека X е случајна променлива и $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ е ненегативна парна функција која монотоно расте на $(0,+\infty)$ и таква да $f(x)\leq k, x\in\mathbf{R}$. Докажете дека за секој $a>0$ важи
$$P\{|X|\geq a\}\leq\frac{E[f(X)]-f(a)}{k}.$$

2. ЛЕМА НА БОРЕЛ-КАНТЕЛИ

Нека $A_n\in\boldsymbol{A}$ е низа настани на просторот на веројатности $(\Omega,\boldsymbol{A},P)$. Во дефиниција I 8 ги воведовме множествата $A^*=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m\geq n}A_m$ и $A_*=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m\geq n}A_m$, кои ги нарековме *горна* и *долна границза* на низата мноежства $\{A_n\}$. Притоа ги воведовме ознаките

$$A^*=\limsup_{n\to\infty}A_n \text{ и } A_*=\liminf_{n\to\infty}A_n.$$

Понатаму, во забелешка I 3 видовма дека за овие множества важи

$$A^* = \{\omega: \omega \in A_n \text{ за бесконечно многу } n\} \text{ и}$$
$$A_* = \{\omega: \omega \in A_n \text{ за сите, освен за конечен број } n\}.$$

Притоа важи $A^*, A_* \in \boldsymbol{A}$, т.е. тие се настани и ако $A^* = A_* = A$, тогаш рековме дека A е граница на $\{A_n\}$ и пишуваме $A = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$.

Забелешка 2. Нека $\{A_n\}$ е низа настани и да ги разгледаме нивните индикатори I_{A_n}. Лесно се докажува дека

$$I_{A^*} = \limsup_{n\to\infty} I_{A_n} \Leftrightarrow A^* = \limsup_{n\to\infty} A_n,$$
$$I_{A_*} = \liminf_{n\to\infty} I_{A_n} \Leftrightarrow A_* = \liminf_{n\to\infty} A_n,$$
$$I_A = \lim_{n\to\infty} I_{A_n} \Leftrightarrow A = \lim_{n\to\infty} A_n.$$

Секоја монотона низа $\{A_n\}$ секогаш има граница. Ако $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots$, тогаш $A_n \uparrow A_* = A^* = \bigcup\limits_n A_n$, а ако $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \ldots$, $A_n \downarrow A_* = A^* = \bigcap\limits_n A_n$. Во овие случаи од аксиомата за непрекинатост лесно се добива дека

$$P(A_n) \uparrow P(\bigcup_n A_n) \text{ и } P(A_n) \downarrow P(\bigcap_n A_n).$$

Бидејќи за секоја низа $\{A_n\}$ важи

$$B_n = \bigcup_{m\ge n} A_m \downarrow A^* = \limsup_{n\to\infty} A_n \text{ и } C_n = \bigcap_{m\ge n} A_m \uparrow A^* = \liminf_{n\to\infty} A_n$$

добиваме

$$\lim_{n\to\infty} P(B_n) = P(\limsup_{n\to\infty} A_n) \text{ и } \lim_{n\to\infty} P(C_n) = P(\liminf_{n\to\infty} A_n).$$

Условите, при кои веројатноста на настанот $A^* = \limsup\limits_{n\to\infty} A_n$ е еднаква на нула или единица, се дадени со следната лема.

Лема 1 (Борел-Кантели). а) Ако $A_n, n = 1, 2, \ldots$ е произволна низа настани и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n) < +\infty$, тогаш

$$P(A^*) = P(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m\ge n} A_m) = 0.$$

б) Ако $A_n, n = 1, 2, \ldots$ е низа независни настани и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n) = +\infty$, тогаш

$$P(A^*) = P(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m\ge n} A_m) = 1.$$

Доказ. а) Нека $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < +\infty$. Тогаш од својството за непрекинатост на веројатноста следува

$$0 \le P(A^*) = P(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m\ge n} A_m) = \lim_{n\to\infty} P(\bigcup_{m\ge n} A_m) \le \lim_{n\to\infty} \sum_{m=n}^{\infty} P(A_m) = 0,$$

т.е. $P(A^*) = P(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m\ge n} A_m) = 0$.

б) Од независноста на низата настани $A_n, n = 1, 2, \ldots$ следува независноста на низата настани $\overline{A}_n, n = 1, 2, \ldots$. Затоа за секој $k \ge n$ важи $P(\bigcap_{m=n}^{k} \overline{A}_m) = \prod_{m=n}^{k} P(\overline{A}_m)$. Понатаму, од претходно кажаното и $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = +\infty$ следува

$$P(A^*) = \lim_{n\to\infty} P(\bigcup_{m\ge n} A_m) = 1 - \lim_{n\to\infty} P(\bigcap_{m\ge n} \overline{A}_m) = 1 - \lim_{n\to\infty} \lim_{k\to\infty} P(\bigcap_{m=n}^{k} \overline{A}_m)$$

$$= 1 - \lim_{n\to\infty} \lim_{k\to\infty} \prod_{m=n}^{k} P(\overline{A}_m) = 1 - \lim_{n\to\infty} \lim_{k\to\infty} \prod_{m=n}^{k} (1 - P(A_m))$$

$$= 1 - \lim_{n\to\infty} \prod_{m=n}^{\infty} (1 - P(A_m)) = 1,$$

што и требаше да се докаже. ♦

Последица 2. Нека $A_n, n = 1, 2, \ldots$ е низа независни настани. Тогаш

$$P(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m\ge n} A_m) = 0 \iff \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < +\infty. \ \blacklozenge$$

3. ВИДОВИ КОНВЕРГЕНТНОСТ НА НИЗИ СЛУЧАЈНИ ПРОМЕНЛИВИ

Во натамошните разгледувања, ако не е поинаку кажано, ќе сметаме дека сите случајни променливи се дефинирани на ист простор на веројатности $(\Omega, \boldsymbol{A}, P)$.

Дефиниција 1. За низата случајни променливи $\{X_n\}$ ќе велиме дека *конвергира скоро сигурно* кон функцијата X ако

$$P\{\omega\colon \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\} = 1, \qquad (1)$$

т.е.

$$P\{\omega \mid \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) \ne X(\omega)\} = 0 \qquad (2).$$

Притоа ќе пишуваме $X_n \overset{с.с}{\to} X$, $n \to \infty$.

Лема 2. Ако низата случајни променливи конвергира $\{X_n\}$ конвергира скоро сигурно кон функцијата X, тогаш X е случајна променлива.

Доказ. Множеството точки D на кое низата $\{X_n\}$ не конвергира е настан и $P(D) = 0$. Понатаму, на множеството $\Omega \setminus D$ важи $X = \lim\limits_{n\to\infty} X_n$, па од последица III 5 следува дека X е случајна променлива на $\Omega \setminus D$. Сега ако земеме дека на множеството $\Omega \setminus D$ функцијата X има вредност нула, лесно се гледа дека X е случајна променлива. ♦

Теорема 2. За низата случајни променливи $\{X_n\}$ важи $X_n \overset{с.с}{\to} X$, $n \to \infty$ ако и само за секој $\varepsilon > 0$ важи

$$\lim_{n\to\infty} P\{\omega \mid \sup_{k\geq n} | X_k(\omega) - X(\omega) | > \varepsilon\} = 0 . \tag{3}$$

Доказ. За $r = 1, 2, 3, \ldots$ да ги разгледаме настаните

$$A_r = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} \{| X_m - X | > \tfrac{1}{r}\} = \inf_{n\geq 1}(\sup_{m\geq n}\{| X_m - X | > \tfrac{1}{r}\}) . \tag{4}$$

Очигледно, $A_r \subseteq A_{r+1}$ и $\{\lim\limits_{n\to\infty} X_n(\omega) \neq X(\omega)\} = \bigcup\limits_{r=1}^{\infty} A_r$. Според тоа,

$$P\{\omega \mid \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) \neq X(\omega)\} = \lim_{r\to\infty} P(A_r) = 0$$

ако и само ако за секој $r \geq 1$ имаме $P(A_r) = 0$, што според (4) значи ако и само ако

$$P\{\inf_{n\geq 1}(\sup_{m\geq n}\{| X_m - X | > \tfrac{1}{r}\})\} = 0 ,$$

односно ако и само ако

$$\lim_{n\to\infty} P\{\sup_{m\geq n}\{| X_m - X | > \tfrac{1}{r}\}\} = 0 ,$$

за секој $r \geq 1$. Конечно, тврдењето следува од фактот дека последниот услов е еквивалентен на равенството (3). ♦

Последица 2. Ако за секој $\varepsilon > 0$ важи

$$\sum_{k=1}^{\infty} P\{\omega \mid | X_k(\omega) - X(\omega) | > \varepsilon\} < +\infty \tag{5}$$

тогаш $X_n \overset{с.с}{\to} X$, $n \to \infty$.

Доказ. Имаме

$$\begin{aligned} P(\{\omega \mid \sup_{k\geq n} | X_k(\omega) - X(\omega) | > \varepsilon\}) &= P(\bigcup_{k\geq n} \{\omega \mid | X_k(\omega) - X(\omega) | > \varepsilon\}) \\ &\leq \sum_{k=n}^{\infty} P(\{\omega \mid | X_k(\omega) - X(\omega) | > \varepsilon\}). \end{aligned} \tag{6}$$

Но, редот (6) конвергира, па затоа неговиот остаток тежи кон нула, што значи дека од (6) следува (3), па од теорема 2 следува дека $X_n \xrightarrow{c.c} X$, $n \to \infty$ .. ♦

Пример 2. Случајните променливи $X_i, i = 1, 2, 3, ...$ се по парови некорелирани и еднакво распределени со математичко очекување a и дисперзија b . Докажете дека $\frac{1}{n^2} \sum\limits_{i=1}^{n^2} X_i \xrightarrow{c.c.} a$.

Решение. Да означиме $Y_n = \frac{1}{n^2} \sum\limits_{i=1}^{n^2} X_i$. Од неравенството на Чебишев имаме:

$$\sum_{k=1}^{\infty} P\{|Y_k - a| > \varepsilon\} \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D(Y_n)}{\varepsilon^2} = \frac{b}{\varepsilon^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty .$$

Сега тврдењето следува од последица 2. ♦

Дефиниција 2. За низата случајни променлива $\{X_n\}$ ќе велиме дека е *Кошиева* (*фундаментална*) *скоро сигурно* ако

$$P\{\omega \vdots | X_n(\omega) - X_m(\omega) | \to 0, m, n \to \infty\} = 1 .$$

Лема 3. Низата случајни променлива $\{X_n\}$ е Кошиева скоро сигурно ако и само ако е конвергетна скоро сигурно.

Доказ. Непосредно следува од тврдењето дека низа реални броеви е Кошиева ако и само ако е конвергетна. ♦

Дефиниција 3. За низата случајни променливи $\{X_n\}$ ќе велиме дека *конвергира по веројатност* кон случајната променливи X ако за секој $\varepsilon > 0$ важи

$$\lim_{n \to \infty} P\{\omega | \ | X_n(\omega) - X(\omega) | > \varepsilon\} = 0 .$$

Притоа ќе пишуваме $X_n \xrightarrow{P} X$, $n \to \infty$

Пример 3. Нека $\{X_n\}$ е низа случајни променливи таква, што за секој $i = 1, 2, ...$ важи $E(X_i) = 0, D(X_i) = \sigma^2 < \infty$. Тогаш, за низата случајни променливи

$$Y_n = \binom{n}{2}^{-1} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} X_i X_j \ , \ n = 1, 2, ...$$

важи

$$E(Y_n) = 0 \text{ и } D(Y_n) = E(Y_n^2) = \binom{n}{2}^{-2} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} E(X_i^2) E(X_j^2) = \binom{n}{2}^{-1} \sigma^4 ,$$

за $n = 1, 2, ...$. Од неравенството на Чебишев следува

$$P\{|Y_n - 0| > \varepsilon\} \le \frac{D(Y_n)}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^4}{\varepsilon^2 \binom{n}{2}} \to 0\,,\ n \to \infty\,,$$

што значи дека $Y_n \xrightarrow{P} 0$, $n \to \infty$. ♦

Теорема 3. Ако за низата случајни променливи $\{X_n\}$ важи $X_n \xrightarrow{c.c} X$, $n \to \infty$, тогаш $X_n \xrightarrow{P} X$, $n \to \infty$.

Доказ. За секој $\varepsilon > 0$ важи

$$\{\omega|\ |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\} \subseteq \{\omega|\ \sup_{m \ge n} |X_m(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\}\,,$$

па затоа за секој $\varepsilon > 0$ имаме

$$P(\{\omega|\ |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\}) \le P(\{\omega\colon \sup_{m \ge n} |X_m(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\})\,. \tag{7}$$

Конечно, ако $X_n \xrightarrow{c.c} X$, $n \to \infty$, тогаш од неравенство (7) и од теорема 2 следува

$$\lim_{n \to \infty} P\{\omega|\ |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\} = 0\,,$$

т.е. $X_n \xrightarrow{P} X$, $n \to \infty$. ♦

Обратното тврдење во теорема 3 не важи, што може да се види од следниов пример.

Пример 4. Нека просторот на веројатности е $(\Omega, \boldsymbol{A}, P)$, каде $\Omega = [0,1]$, $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \cap \Omega$ и P е Лебеговата мера (должината). За секој $n = 1,2,...$ да ги разгледаме настаните $A_n^i = [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$, $i = 1,2,...,n$ и нека $X_{n,i} = I_{A_n^i}$ се индикаторите на настаните A_n^i, $n = 1,2,...$, $i = 1,2,...,n$.

Имаме

$$P\{X_{n,i} = 1\} = P(A_n^i) = \frac{i}{n} - \frac{i-1}{n} = \frac{1}{n}\,,\ P\{X_{n,i} = 0\} = P(\overline{A}_n^i) = 1 - \frac{1}{n}\,, \tag{8}$$

за $n = 1,2,...$, $i = 1,2,...,n$. Да ја разгледаме низата

$$X_{1,1}, X_{2,1}, X_{2,2}, X_{3,1}, X_{3,2}, X_{3,3}, \dots\,. \tag{9}$$

Нека $\varepsilon > 0$ е дадено. Тогаш од (8) добиваме дека за секој $i = 1,2,...,n$ важи

$$P\{|X_{n,i} - 0| > \varepsilon\} = P\{X_{n,i} = 1\} = \frac{1}{n} \to 0\,, \text{ кога } n \to \infty\,,$$

па од дефиниција 3 следува дека низата (9) конвергира по веројатност кон нула.

Од друга страна, бидејќи

$$\lim_{n \to \infty} \inf X_n^i(\omega) = 0 \text{ и } \lim_{n \to \infty} \mathrm{i}\sup X_n^i(\omega) = 1$$

добиваме дека низата (9) има две точки на натрупување 0 и 1. Според тоа, низата (9) не конвергира за ниту едно $\omega \in [0,1]$, па затоа

$$P\{\lim_{n\to\infty} X_{n,i}(\omega) = X(\omega)\} = 0$$

што значи дека оваа низа не конвергира скоро сигурно. ♦

Дефиниција 4. За низата случајни променливи $\{X_n\}$ ќе велиме дека е *Коши-ева* (*фундаментална*) *по веројатност*, ако за секој $\varepsilon > 0$ важи

$$P\{| X_n - X_m | > \varepsilon\} \to 0 \text{, кога } m,n \to \infty .$$

Теорема 4. Ако низата $\{X_n\}$ е Кошиева по веројатност, тогаш таа содржи подниза која конвергира скоро сигурно.

Доказ. Да ставиме $n_1 = 1$ и индуктивно да определиме n_k како најмалиот $N > n_{k-1}$, за кој

$$P\{| X_r - X_s | > \tfrac{1}{2^k}\} < \tfrac{1}{2^k} ,$$

за секој $r,s \geq N$. Тогаш,

$$\sum_k P\{| X_{n_{k+1}} - X_{n_k} | > \tfrac{1}{2^k}\} < \sum_k \tfrac{1}{2^k} < +\infty .$$

Сега од лемата на Борел-Кантели следува дека со веројатност 1 се реализираат само конечен број настани $| X_{n_{k+1}} - X_{n_k} | > \frac{1}{2^k}$. Затоа редот

$$X_1 + \sum_{k=1}^{\infty} (X_{n_{k+1}} - X_{n_k})$$

конвергира со веројатност 1. Ставајќи $X = X_1 + \sum_{k=1}^{\infty} (X_{n_{k+1}} - X_{n_k})$ за оние ω, за кои редот конвергира, и нула во останатите точки, добиваме дека $X_{n_k} \xrightarrow{c.c} X$, $n_k \to \infty$. ♦

Лема 4. Низата $\{X_n\}$ е Кошиева по веројатност ако и само ако $X_n \xrightarrow{P} X$, $n \to \infty$.

Доказ. Ако $X_n \xrightarrow{P} X$, $n \to \infty$, тогаш од неравенството

$$P\{| X_n - X_m | > \varepsilon\} \leq P\{| X - X_m | > \tfrac{\varepsilon}{2}\} + P\{| X_n - X | > \tfrac{\varepsilon}{2}\}$$

следува дека низата $\{X_n\}$ е Кошиева по веројатност.

Нека низата $\{X_n\}$ е Кошиева по веројатност. Согласно со теорема 4 постојат случајна променлива X и подниза $X_{n_k}, k = 1,2,...$ такви, што $X_{n_k} \xrightarrow{c.c} X$, $n_k \to \infty$, па од теорема 3 следува $X_{n_k} \xrightarrow{P} X$, $n_k \to \infty$. Бидејќи $\{X_n\}$ е Кошиева по веројатност за вака избраната подниза важи

$$P\{| X_n - X |> \varepsilon\} \leq P\{| X_n - X_{n_k} |> \tfrac{\varepsilon}{2}\} + P\{| X_{n_k} - X |> \tfrac{\varepsilon}{2}\} \to 0 ,\ n \to \infty$$

што значи дека $X_n \xrightarrow{P} X$, $n \to \infty$. ♦

Пример 5. Нека $\{X_n\}$ е низа независни случајни променливи со рамномерна распределба на интервалот $[0,1]$ и $\varepsilon \in (0,1)$. Тогаш, за секои m и n , каде $m \neq n$:

$$P\{\omega |\ | X_n(\omega) - X(\omega) |\geq \varepsilon\} = (1-\varepsilon)^2 \not\to 0, \quad m,n \to \infty$$

што значи дека низата $\{X_n\}$ не е Кошиева по веројатност, па од лема 4 следува $X_n \overset{P}{\not\to} X$, $n \to \infty$. ♦

Теорема 5. Ако $X_n \xrightarrow{P} X$, $n \to \infty$, тогаш $F_{X_n}(x) \Rightarrow F_X(x)$, $n \to \infty$.

Доказ. Нека $A_n = \{| X_n - X |\leq \varepsilon\}$. Сега $X - \varepsilon \leq X_n \leq X + \varepsilon$, за секој $\omega \in A_n$, па затоа за секој x важи

$$\{X_n \leq x\} \subseteq \{X \leq x + \varepsilon\} \cup \overline{A}_n ,\ \{X \leq x - \varepsilon\} \subseteq \{X_n \leq x\} \cup \overline{A}_n$$

односно

$$\begin{aligned} &P\{X \leq x - \varepsilon\} - P(\overline{A}_n) \leq P\{X_n \leq x\} \leq P\{X \leq x + \varepsilon\} + P(\overline{A}_n) \\ &P\{X \leq x - \varepsilon\} \leq \underline{\lim}_{n\to\infty}\ P\{X_n \leq x\} \leq \overline{\lim}_{n\to\infty}\ P\{X_n \leq x\} \leq P\{X \leq x + \varepsilon\}. \end{aligned} \tag{10}$$

Ако x е точка на непрекинатост на $F_X(x)$, тогаш од произволноста на $\varepsilon > 0$ и до (10) добиваме дека $\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$, што значи дека

$$F_{X_n}(x) \Rightarrow F_X(x) ,\ n \to \infty . \ ♦$$

Пример 6. Нека $\{X_n\}$ е низа независни случајни променливи со иста распределба

$$P\{X_i = 0\} = P\{X_i = 1\} = \tfrac{1}{2} \text{, за } i = 1, 2, \ldots .$$

Очигледно

$$F_{X_n}(x) \Rightarrow F_X(x) ,\ n \to \infty ,$$

каде X ја има истата распределба како и секој член на $\{X_n\}$. Меѓутоа, за секој $\varepsilon > 0$ имаме

$$P\{| X_n - X_m |> \varepsilon\} = P\{X_n \neq X_m\} = P(\{X_n = 0\}\{X_m = 1\}) + P(\{X_n = 1\}\{X_m = 0\}) = \tfrac{1}{2} \not\to 0$$

кога $m,n \to \infty$. Според тоа, низата $\{X_n\}$ не е Кошиева по веројатност, па од лема 4 следува дека $X_n \overset{P}{\not\to} X$, $n \to \infty$.

Значи, од слабата конвергентност не следува конвергентност по веројатност, т.е. конвергентноста по веројатност е посилна од слабата конвергентност. ♦

Во следнава теорема ќе разгледаме случај кога од слабата конвергентност следува конвергентноста по веројатност.

Теорема 6. Ако $F_{X_n} \Rightarrow F_c$, $n \to \infty$, каде c е константа, тогаш $X_n \overset{P}{\to} c$, $n \to \infty$.

Доказ. Имаме

$$F_c(x) = \begin{cases} 0, & x < c \\ 1, & x \geq c. \end{cases}$$

Од $F_{X_n} \Rightarrow F_c$ следува дека за секој $\varepsilon > 0$ важи $F_{X_n}(c+\varepsilon) \to 1$ и $F_{X_n}(c-\varepsilon) \to 0$. Според тоа, $P\{c-\varepsilon < X_n \leq c+\varepsilon\} \to 1$, што значи дека $P\{|X_n - c| > \varepsilon\} \to 0$, односно $X_n \overset{P}{\to} c$, $n \to \infty$. ♦

Во врска со слабата конвергенција на низа случајни променливи ќе докажеме две теореми, кои во многу случаи ни овозможуваат едноставно да испитаме дали дадена низа случајни променливи слабо конвергира.

Теорема 7. Нека X и $X_n, n \geq 1$, се случајни променливи, $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ е Борелова функција и D е множеството точки на прекин на функцијата f . Ако $X_n \Rightarrow X$, $n \to \infty$ и $P\{X \in D\} = 0$, тогаш $f(X_n) \Rightarrow f(X)$, $n \to \infty$.

Доказ. Од теоремата на Скороход следува дека постои простор на веројатности $(\Omega, \boldsymbol{A}, P)$ и случајни променливи Y и $Y_n, n \geq 1$ дефинирани на него и такви, што Y има иста функција на распределба како X и за секој $n \geq 1$ случајната променливи Y_n има иста функција на распределба како X_n и притоа важи

$$\lim_{n\to\infty} Y_n(\omega) = Y(\omega).$$

Затоа $P\{Y \in D\} = P\{X \in D\} = 0$ и ако $Y(\omega) \notin D$, тогаш $\lim\limits_{n\to\infty} f(Y_n(\omega)) = f(Y(\omega))$, т.е.

$$P\{\omega \,|\, \lim_{n\to\infty} f(Y_n(\omega)) = f(X(\omega))\} = 1,$$

што значи $f(Y_n) \overset{c.c}{\to} f(Y)$, $n \to \infty$. Сега, од теорема 3 следува $f(Y_n) \overset{P}{\to} f(Y)$, $n \to \infty$ па од теорема 5 следува дека $f(Y_n) \Rightarrow f(Y)$, $n \to \infty$. Но, случајните променливи $f(Y_n)$, $n \geq 1$ и $f(Y)$ имаат исти функции на распределби како и случајните променливи $f(X_n), n \geq 1$ и $f(X)$, соодветно, па затоа $f(X_n) \Rightarrow f(X)$, $n \to \infty$. ♦

Последица 3. Нека X и $X_n, n \geq 1$, се случајни променливи и $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ е непрекината функција. Ако $X_n \Rightarrow X$, $n\to\infty$, тогаш

$$f(X_n)\Rightarrow f(X),\ n\to\infty .$$

Доказ. Непосредно следува од теорема 7 и фактот дека секоја непрекината функција е Борелова и нејзиното множество точки на прекин D е празно множество. ♦

Теорема 8. Ако $X_n \Rightarrow X$, $n\to\infty$, функцијата $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ е диференцијабилна во точката a и $\{r_n\}$ е низа реални броеви таква, што за секој $n\in\mathbf{N}$ важи $r_n \neq 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$, тогаш

$$\frac{f(a+r_nX_n)-f(a)}{r_n} \Rightarrow f\,'(a)X\ ,\ n\to\infty .$$

Доказ. Да ја разгледаме функцијата $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ определена со

$$g(x)=\begin{cases}\frac{f(a+x)-f(a)}{x}, & x\neq 0\\ f\,'(a), & x=0.\end{cases}$$

Од теорема IV 13 следува $r_nX_n \Rightarrow 0$, $n\to\infty$ и како функцијата g е непрекината во точката $x=0$ од последица 3 следува

$$\frac{f(a+r_nX_n)-f(a)}{r_n} = \frac{f(a+r_nX_n)-f(a)}{r_nX_n}X_n = g(r_nX_n)X_n \Rightarrow g(0)X = f\,'(a)X\ ,\ n\to\infty .\ ♦$$

Дефиниција 5. За низата случајни променливи $\{X_n\}$ ќе велиме дека *конвергира во средно со ред* $r>0$ кон случајната променливи X ако

$$E(|\,X_n - X\,|^r)\to 0,\quad n\to\infty . \tag{11}$$

Притоа ќе пишуваме $X_n \overset{r}{\to} X$, $n\to\infty$. Ако $r=2$, тогаш конвергентноста (11) ја нарекуваме *средноквадратна*.

Теорема 9. Ако $0<q<r$, тогаш од $X_n \overset{r}{\to} X$, $n\to\infty$ следува $X_n \overset{q}{\to} X$, $n\to\infty$.

Доказ. Ако $0<q<r$ и $X_n \overset{r}{\to} X$, $n\to\infty$, тогаш од неравенството на Љапунов следува

$$E(|\,X_n - X\,|^q) \leq [E(|\,X_n - X\,|^r)]^{\frac{q}{r}} \to 0\ ,\ n\to\infty ,$$

што според дефиниција 5 значи $X_n \overset{q}{\to} X$, $n\to\infty$. ♦

Теорема 10. Ако $X_n \overset{r}{\to} X$, $n\to\infty$, тогаш $X_n \overset{P}{\to} X$, $n\to\infty$.

Доказ. Од неравенството на Чебишев имаме

$$P\{\omega \mid |X_n(\omega)-X(\omega)|>\varepsilon\} = P\{\omega \mid |X_n(\omega)-X(\omega)|^r > \varepsilon^r\} \le \frac{E(|X_n-X|^r)}{\varepsilon^r}.$$

Сега тврдењето непосредно следува од дефинициите 5 и 3. ♦

Обратното тврдење во теорема 10 не важи, што може да се види од следниов пример.

Пример 7. Нека $\Omega=[0,1]$, $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}([0,1])$, веројатноста P е Лебеговата мера низата случајни променливи $\{X_n\}$ определена со

$$X_n(\omega)=\begin{cases} e^n, & 0\le\omega\le\frac{1}{n} \\ 0, & \omega>\frac{1}{n}. \end{cases}$$

Тогаш $X_n \overset{P}{\to} 0, n\to\infty$, меѓутоа за секој $r>0$ имаме $E(|X_n|^r)=\frac{e^{nr}}{n}\to\infty$, $n\to\infty$, што значи $X_n \overset{r}{\not\to} 0$, $n\to\infty$.

Според тоа, од конвергентноста по веројатност не следува конвергентноста во средно со ред $r>0$, т.е. конвергентноста во средно со ред $r>0$ е посилна од конвергентноста по веројатност. ♦

Дефиниција 6. За низата случајни променливи $\{X_n\}$ ќе велиме дека е *Кошиева во средно со ред* $r>0$ ако

$$E(|X_n-X_m|^r)\to 0, m,n\to\infty.$$

Лема 5. Низата случајни променливи $\{X_n\}$ е Кошиева во средно со ред $r>0$ ако и само ако е конвергентна во средно со ред r.

Доказ. Нека низата $\{X_n\}$ е конвергентна во средно со ред $r>0$ т.е. нека

$$E(|X_n-X|^r)\to 0, n\to\infty.$$

Од неравенството на Минковски следува

$$[E(|X_n-X_m|^r)]^{1/r} \le [E(|X_n-X|^r)]^{1/r}+[E(|X_m-X|^r)]^{1/r},$$

па затоа

$$E(|X_n-X_m|^r)\to 0, m,n\to\infty,$$

што значи дека $\{X_n\}$ е Кошиева во средно со ред r.

Обратно, нека претпоставиме дека $\{X_n\}$ е Кошиева во средно со ред r, т.е. нека

$$E(|X_n-X_m|^r)\to 0, m,n\to\infty.$$

Тогаш, за секој $\varepsilon>0$ важи

$$P\{|X_n - X_m|^r > \varepsilon\} \le \frac{E(|X_n-X_m|^r)}{\varepsilon} \to 0, \quad m,n \to \infty$$

од што следува

$$P\{|X_n - X_m| > \varepsilon^{1/r}\} \to 0, \quad m,n \to \infty,$$

т.е. низата $\{X_n\}$ е Кошиева по веројатност, па од лема 4 следува дека конвергира по веројатност кон некоја случајна променлива X. Понатаму, од теорема 4 следува дека $\{X_n\}$ содржи подниза $\{X_{n_k}\}$ таква што $X_{n_k} \xrightarrow{cc} X$, $n_k \to \infty$. Конечно, од неравенството на Минковски добиваме дека за секој n_k важи

$$[E(|X_n - X|^r)]^{1/r} \le [E(|X_n - X_{n_k}|^r)]^{1/r} + [E(|X_{n_k} - X|^r)]^{1/r},$$

и ако земеме $n \to \infty$, тогаш од произволноста на n_k добиваме е исполнет условот (11), што значи дека $X_n \xrightarrow{r} X$, $n \to \infty$. ♦

Забелешка 3. Од досегашните разгледувања следува точноста на следните импликации

$$X_n \xrightarrow{cc} X \;\Rightarrow\; X_n \xrightarrow{P} X \;\Rightarrow\; X_n \xrightarrow{d} X \tag{12}$$

и

$$X_n \xrightarrow{r} X \;\Rightarrow\; X_n \xrightarrow{P} X \;\Rightarrow\; X_n \xrightarrow{d} X \tag{13}$$

и дека во (12) и (13) не се исполнети обратните импликации.

Во следниве два примера ќе покажеме дека скоро сигурната конвергентност и конвергенцијата во средно од ред r не се споредливи.

Пример 8. Во пример 4 докажавме дека низата случајни променливи (9) не конвергира скоро сигурно. Меѓутоа, лесно се гледа дека

$$E(X_{nk}^r) = \tfrac{1}{n} \to 0, \; n \to \infty$$

од што следува дека низата случајни променливи (9) конвергира во средно со ред $r > 0$ кон случајната променлива $X = 0$.

Од претходно изнесеното заклучуваме дека во општ случај од конвергентноста во средно со ред $r > 0$ не следува скоро сигурната конвергентност. ♦

Пример 9. Нека $(\Omega, \boldsymbol{A}, P)$ е веројатностниот простор од пример 7. За секој $n \ge 1$ дефинираме случајна променлива

$$X_n(\omega) = \begin{cases} 2^n, & \omega \in [0, \tfrac{1}{n}] \\ 0, & \omega \notin [0, \tfrac{1}{n}]. \end{cases}$$

За секој $\omega > 0$ важи $\lim\limits_{n\to\infty} X_n(\omega) = 0$ што значи $X_n \xrightarrow{cc} 0, n \to \infty$. Меѓутоа, лесно се гледа дека

$$E(X_n^r)=\frac{2^{nr}}{n}\to\infty,\, n\to\infty$$

следува дека за секој $r>0$ низата $\{X_n\}$ не конвергира во средно со ред r.

Од претходно изнесеното заклучуваме дека: во општ случај од скоро сигурната конвергентност не следува конвергентноста во средно со ред $r>0$. ♦

Пример 10. Испитајте ја конвергенцијата на низата случајни променливи $X_n,\, n=1,2,3,\ldots$ со распределби $\boldsymbol{U}((0,\frac{1}{n^2})\cup(1,1+\frac{1}{n})),\, n=1,2,3,\ldots$, соодветно, кон нула или еден.

Решение. Бидејќи мерата на множеството $(0,\frac{1}{n^2})\cup(1,1+\frac{1}{n})$ е еднаква на $\frac{n+1}{n^2}$ за густината на случајната променлива $X_n,\, n=1,2,3,\ldots$ добиваме

$$p_n(x)=\begin{cases}\frac{n^2}{1+n}, & x\in(0,\frac{1}{n^2})\cup(1,1+\frac{1}{n}),\\ 0, & x\notin(0,\frac{1}{n^2})\cup(1,1+\frac{1}{n}),\end{cases}$$

и за функциите на распределба добиваме

$$F_n(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \frac{n^2}{n+1}x, & 0\le x<\frac{1}{n^2},\\ \frac{1}{n+1}, & \frac{1}{n^2}\le x<1,\\ \frac{1}{n+1}+\frac{n^2}{n+1}(x-1), & 1\le x<1+\frac{1}{n},\\ 1, & x\ge 1+\frac{1}{n}.\end{cases}$$

а) Прво да ја испитаме конвергенцијата на низата $X_n,\, n=1,2,3,\ldots$ кон нула. Нека $\varepsilon>0$. Тогаш

$$P\{|X_n|>\varepsilon\}=P\{X_n>\varepsilon\}=1-P\{X_n\le\varepsilon\}=1-F_n(\varepsilon)\,.$$

За секој $\varepsilon\in(0,1]$ постои $n_0\in\mathbf{N}$ таков да $\frac{1}{n^2}<\varepsilon$, за $n\ge n_0$, па затоа

$$F_n(\varepsilon)=\frac{1}{n+1},\, n\ge n_0\,.$$

Од друга страна, за секој $\varepsilon>1$ постои $m_0\in\mathbf{N}$ таков да $1+\frac{1}{n}<\varepsilon$, за $n\ge m_0$, односно $F_n(\varepsilon)=1,\, n\ge m_0$. Значи за $n\ge\max\{m_0,n_0\}$ важи

$$P\{|X_n|>\varepsilon\}=1-P\{|X_n|\le\varepsilon\}=\begin{cases}1-\frac{1}{n+1}, & 0<\varepsilon<1,\\ 0, & \varepsilon\ge1,\end{cases}\to\begin{cases}1, & 0<\varepsilon<1,\\ 0, & \varepsilon\ge1,\end{cases},\, n\to\infty\,.$$

Според тоа, низата $X_n,\, n=1,2,3,\ldots$ не конвергира по веројатност кон нула, па затоа не конвергира кон нула ниту скоро сигурно, ниту во средно. Понатаму, од теорема 6 следува дека низата ниту слабо не конвергира кон нула.

б) Сега да ја испитаме конвергенцијата кон единицата. За $\varepsilon > 1$ имаме $P\{| X_n - 1| > \varepsilon\} = 0$, бидејќи случајната променлива $X_n - 1$ прима вредности од множеството $(-1, -1+\frac{1}{n^2}) \cup (0, \frac{1}{n})$. За $0 < \varepsilon \le 1$ имаме

$$P\{| X_n - 1| > \varepsilon\} = P\{X_n > 1+\varepsilon\} + P\{X_n < 1-\varepsilon\}.$$

Постои $n_0 \in \mathbf{N}$ таков што $P\{X_n > 1+\varepsilon\} = 0$, кога $n \ge n_0$. Исто така, постои $m_0 \in \mathbf{N}$ таков што $1-\varepsilon \in (\frac{1}{n^2}, 1)$, за $n \ge m_0$, па затоа $P\{X_n < 1-\varepsilon\} = \frac{1}{n+1}$, за $n \ge m_0$. Според тоа,

$$P\{| X_n - 1| > \varepsilon\} = P\{X_n > 1+\varepsilon\} + P\{X_n < 1-\varepsilon\} \to 0, n \to \infty,$$

односно, низата $X_n, n = 1, 2, 3, \ldots$ конвергира по веројатност кон 1 кога $n \to \infty$, па од теорема 5 следува дека таа слабо конвергира кон 1 кога $n \to \infty$.

За $0 < \varepsilon \le 1$ и $\varepsilon > \frac{1}{n^2}$ важи $P\{X_n \le \varepsilon\} = P\{X_n \le \frac{1}{n^2}\} = \frac{1}{n+1}$, односно редот $\sum_{n=1}^{\infty} P\{X_n \le \varepsilon\}$ дивергира. Од лемата на Борел-Кантели следува дека настанот $\{X_n \le \varepsilon\}$ се реализира бесконечно многу пати, односно бесконечно многу пати се реализира настанот $\{| X_n | \le \varepsilon\}$, што значи дека низата $X_n, n = 1, 2, 3, \ldots$ не конвергира скоро сигурно.

Ќе ја испитаме средноквадратната конвергенција на низата $X_n, n = 1, 2, 3, \ldots$. Имаме

$$E(X_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} x p_n(x) dx = \int_0^{\frac{1}{n^2}} x \frac{n^2}{n+1} dx + \int_1^{1+\frac{1}{n}} x \frac{n^2}{n+1} dx = \frac{2n^3+n^2+1}{2n^2(n+1)},$$

$$E(X_n^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p_n(x) dx = \int_0^{\frac{1}{n^2}} x^2 \frac{n^2}{n+1} dx + \int_1^{1+\frac{1}{n}} x^2 \frac{n^2}{n+1} dx = \frac{n^2(3+n^3+3n^4+3n^5)}{3n^6(n+1)}$$

па затоа

$$E((X_n - 1)^2) = E(X_n^2) - 2E(X_n) + 1 = \frac{n^2(3+n^3+3n^4+3n^5)}{3n^6(n+1)} - 2\frac{2n^3+n^2+1}{2n^2(n+1)} + 1 \to 0, \ n \to \infty,$$

па затоа низата $X_n, n = 1, 2, 3, \ldots$ средноквадратно конвергира кон 1 кога $n \to \infty$. ♦

Во следните разгледувања ќе покажеме дека при определени услови важат некои од обратните импликации од забелешка 3.

Теорема 11. Ако $\{X_n\}$ е монотона низа случајни променливи, тогаш конвергентноста скоро сигурно и по веројатност се совпаѓаат.

Доказ. Нека низата $\{X_n\}$ монотоно расте и нека конвергира по веројатност кон случајната променлива X. Тогаш низата случајни променливи $Y_n = X - X_n$ монотоно опаѓа и за секој $\varepsilon > 0$ важи $\{Y_{n+1} \ge \varepsilon\} \subseteq \{Y_n \ge \varepsilon\}$, од каде следува дека

$$\{\lim_{n\to\infty} Y_n \geq \varepsilon\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{Y_n \geq \varepsilon\}.$$

Од последното равенство и фактот дека $\{X_n\}$ конвергира по веројатност следува

$$P\{\lim_{n\to\infty} Y_n \geq \varepsilon\} = \lim_{n\to\infty} P\{Y_n \geq \varepsilon\} = 0,$$

што значи дека низата $\{X_n\}$ конвергира скоро сигурно. ♦

Како што видовме од конвергентноста по веројатност во општ случај не следува конвергентноста скоро сигурно. Меѓутоа, во следнава теорема ќе докажеме дека последното не е случај ако $(\Omega, \boldsymbol{A}, P)$ е дискретен простор.

Теорема 12. Нека $\{X_n\}$ е низа случајни променлива дефинирани на дискретниот простор на веројатности $(\Omega, \boldsymbol{A}, P)$. Ако $X_n \xrightarrow{P} 0, n \to \infty$, тогаш $X_n \xrightarrow{cc} 0, n \to \infty$.

Доказ. Нека

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, ...\} \text{ и } P(\omega_k) = p_k > 0, k = 1, 2, ...$$

Нека k е фиксиран број и $\varepsilon > 0$. Од $X_n \xrightarrow{P} 0, n \to \infty$ следува дека постои природен број $n_0 = n_0(k, \varepsilon)$ таков, што за секој $n > n_0$ е исполнето неравенството

$$P\{\omega \mid |X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon\} < p_k.$$

Последното значи дека за $n > n_0$ важи $|X_n(\omega_k) - X(\omega_k)| < \varepsilon$ односно

$$\lim_{n\to\infty} X_n(\omega_k) = \lim_{n\to\infty} X(\omega_k).$$

Но бројот k можеме да го избираме произволно, па од последното равенство следува $X_n \xrightarrow{cc} 0, n \to \infty$. ♦

Теорема 13 (Слуцки). Нека $X_n^i \xrightarrow{P} C_i$, $n \to \infty$ за $i = 1, 2, ..., k$. Ако функцијата $g(x_1, x_2, ..., x_k)$ е непрекината во точката $C = (C_1, C_2, ..., C_k)$, тогаш

$$g(X_n^1, X_n^2, ..., X_n^k) \xrightarrow{P} g(C_1, C_2, ..., C_k), \ n \to \infty. \tag{14}$$

Доказ. Од условот на теоремата следува дека за секој $\delta > 0$ и за секој $\varepsilon > 0$ и при доволно голем n важи

$$P\{|X_n^i - C_i| > \delta\} < \tfrac{\varepsilon}{k}, \ i = 1, 2, ..., k. \tag{15}$$

Функцијата g е непрекината во точката $C = (C_1, C_2, ..., C_k)$, па затоа за секој $\varepsilon_1 > 0$ постои $\delta_1 > 0$ таков што од $|x_i - C_i| < \delta_1$, за $i = 1, 2, ..., k$ следува

$$|g(x_1, x_2, ..., x_k) - g(C_1, C_2, ..., C_k)| < \varepsilon_1.$$

Последното значи дека

$$\bigcap_{i=1}^{k}\{|X_n^i - C_i| < \delta_1\} \subseteq \{|g(X_n^1, X_n^2, ..., X_n^k) - g(C_1, C_2, ..., C_k)| < \varepsilon_1\}.$$

Ако во последната инклузија преминеме кон комплемент и ги искористиме Де Моргановите закони добиваме

$$\{|g(X_n^1, X_n^2, ..., X_n^k) - g(C_1, C_2, ..., C_k)| > \varepsilon_1\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{k}\{|X_n^i - C_i| > \delta_1\},$$

од каде, користејќи ги неравенствата (15), наоѓаме

$$\begin{aligned} P\{|g(X_n^1, X_n^2, ..., X_n^k) - g(C_1, C_2, ..., C_k)| > \varepsilon_1\} &\le P\{\bigcup_{i=1}^{k}\{|X_n^i - C_i| > \delta_1\}\} \\ &\le \sum_{i=1}^{k} P\{|X_n^i - C_i| > \delta_1\} < \varepsilon, \end{aligned}$$

за доволно големи вредности на n, што значи дека важи (14). ♦

Теорема 14. Нека $Z_n = X_n + Y_n$, $n = 1, 2, 3, ...$. Ако $X_n \Rightarrow X$ и $Y_n \xrightarrow{P} 0$, кога $n \to \infty$, тогаш $Z_n \Rightarrow X$.

Доказ. Нека x е точка на непрекинатост на функцијата $F(x) = P\{X \le x\}$ и да ставиме $A_n = \{X_n + Y_n \le x\}$, $B_n\{|Y_n| \le \varepsilon\}$. Од

$$A_n = A_n B_n + A_n \overline{B}_n \text{ и } A_n \overline{B}_n \subseteq \overline{B}_n,$$

следува

$$P(A_n B_n) \le P(A_n) \le P(A_n B_n) + P(\overline{B}_n). \tag{16}$$

Од друга страна, важи

$$\{X_n \le x - \varepsilon, |Y_n| \le \varepsilon\} \subseteq A_n B_n \subseteq \{X_n \le x - \varepsilon\}$$

и до (16) следува

$$P\{X_n \le x - \varepsilon, |Y_n| \le \varepsilon\} \le P\{X_n + Y_n \le x\} \le P\{X_n \le x + \varepsilon\} + P\{|Y_n| > \varepsilon\}.$$

Оттука, ако го земеме предвид неравенството

$$P\{X_n \le x - \varepsilon, |Y_n| \le \varepsilon\} \ge P\{X_n \le x - \varepsilon\} - P\{|Y_n| > \varepsilon\}$$

и ако означиме $F_n(x) = P\{X_n \le x\}$ добиваме

$$F_n(x - \varepsilon) - P\{|Y_n| > \varepsilon\} \le P\{X_n + Y_n \le x\} \le F_n(x + \varepsilon) + P\{|Y_n| > \varepsilon\} \tag{17}$$

Но, според условот на теоремата $\lim_{n\to\infty} P\{|Y_n| > \varepsilon\} = 0$, па затоа од (17) добиваме

$$F(x - \varepsilon) \le \underline{\lim} P\{X_n + Y_n \le x\} \le \overline{\lim} P\{X_n + Y_n \le x\} \le F(x + \varepsilon),$$

и како x е точка на непрекинатост на функцијата $F(x)$, ако земеме $\varepsilon \to 0$ добиваме дека

$$\lim_{n\to\infty} F_{Z_n}(x) = \lim_{n\to\infty} P\{Z_n \le x\} = \lim_{n\to\infty} P\{X_n + Y_n \le x\} = F(x) ,$$

во секоја точка на непрекинатост на $F(x)$, што значи дека $Z_n \Rightarrow X$, $n \to \infty$. ♦

ЗАДАЧИ

1. Нека $\{X_n\}$ е низа независни случајни променливи. Докажете дека низата $\{X_n\}$ или скоро сигурно конвергира или скоро сигурно дивергира.
2. Докажете, дека ако f е непрекината функција, тогаш
   a) од $X_n \xrightarrow{cc} X$ следува $f(X_n) \xrightarrow{cc} f(X)$, и
   b) од $X_n \xrightarrow{P} X$ следува $f(X_n) \xrightarrow{P} f(X)$.
3. Нека f е непрекината и ограничена функција и $X_n \xrightarrow{P} X$. Докажете дека $f(X_n) \xrightarrow{r} f(X)$, за секој $r > 0$.
4. На интервал со должина 1 случајно и независно избираме n точки, чие растојание од левиот крај на интервалот е еднакво на $X_i, i = 1, 2, ..., n$. Докажете дека низата случајни променливи $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{X_i}}$ конвергира по веројатност кон 2.
5. Нека $X_n, n = 1, 2, ...$ и $Y_n, n = 1, 2, ...$ се низи случајни променливи дефинирани на ист простор на веројатности $(\Omega, \boldsymbol{A}, P)$ и такви, што $X_n \xrightarrow{P} X$ и $Y_n \xrightarrow{P} Y$. Докажете, дека ако $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ е непрекината функција, тогаш $f(X_n, Y_n) \xrightarrow{P} f(X, Y)$.
6. Случајните променливи $X_n, n = 1, 2, ...$ се распределени по законите

   $$P\{X_n = k\} = \frac{1}{2k^3}, k = 1, 2, ..., n \text{ и } P\{X_n = 0\} = 1 - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2k^3} .$$

   Докажете дека низата случајни променливи $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ конвергира скоро сигурно и најдете ја нејзината граница.
7. Независните случајни променливи $X_n, n = 1, 2, 3, 4, ...$ имаат $\boldsymbol{U}((0, a))$ распределба. Нека $Y_n = \max\{X_1, X_2, ..., X_n\}$. Испитајте ја конвергенцијата по веројатност на низата слуачајни променливи $Z_n = \sqrt{Y_n}, n = 1, 2, 3, ...$.
8. Нека $X_n, n = 1, 2, ...$ е низа независни случајни променливи и нека функцијата на распределба на случајната променлива X_n е дадена со

   $$F_n(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{n^x - 1}{n - 1}, & 0 \le x \le 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

   за $n = 1, 2, ...$. Испитајте ги сите видови на конвергентност на низата $X_n, n = 1, 2, ...$.
9. Дадена е низата случајни променливи $X_n, n = 1, 2, 3, ...$, при што случајната променлива X_n има густина на распределба

$$p_n(x)=\begin{cases} n(1-x)^{n-1}, & x\in[0,1],\\ 0, & x\notin[0,1].\end{cases}$$

Испитајте ги сите видови на конвергенцијата на низата слуачајни променливи $Y_n=nX_n$, $n=1,2,3,...$.

10. Случајната променлива X_n е распределена по законот

$$P\{X_n=\tfrac{k}{n}\}=n(\tfrac{1}{n+k-1}-\tfrac{1}{n+k}),\quad k=1,2,3,4,...\,.$$

Испитајте ги сите видови на конвергенција на низата X_n, $n=1,2,...$. Во случај на потврден одговор најдете ја распределбата на граничната случајна променлива.

11. Нека $X_n, n=1,2,...$ е низа независни случајни променливи такви, што случајната променлива X_n има $\boldsymbol{U}([-n,n])$ распределеба, за $n=1,2,...$. Испитајте ги сите видови конвергентност на низите

а) $Y_n=\frac{X_n}{1+X_n}$, $n=1,2,...$ и б) $Y_n=\frac{X_n}{1-X_n}$, $n=1,2,...$.

12. Дадена е низа независни случајни променливи $X_n, n=1,2,3,...$ со функции на распределби $\boldsymbol{E}(\frac{n}{\sqrt{2}}), n=1,2,3,...$, соодветно. Испитајте дали низата конвергира по веројатност, скоро сигурно и средноквадратно кон нула.

13. Нека $\{X_n\}$ и $\{Y_n\}$ со распределби $X_n:\boldsymbol{U}((-n,n))$ и $Y_n:\begin{pmatrix}-n^2 & n^2\\ 1-\frac{1}{n} & \frac{1}{n}\end{pmatrix}$, $n=1,2,3,...$, при што за секој $n\in\mathbf{N}$ случајните променливи X_n и Y_n се независни. За низата случајни променливи $Z_n=\frac{X_n}{Y_n}, n=1,2,3,...$. Испитајте дали низата конвергира по веројатност, скоро сигурно и средноквадратно кон нула.

14. Нека $X_n, n=1,2,...$ е низа независни и еднакво распределени случајни променливи со $\boldsymbol{E}(1)$ распределба и $a>0$. Испитајте ги сите видови конвергентност на низата случајни променливи $Y_n=\frac{1}{n^a X_n}$, $n=1,2,...$.

15. Нека $X_n, n=1,2,3,...$ е низа независни и еднакво распределени случајни променливи со $\boldsymbol{E}(\frac{1}{\lambda})$ распределба и нека $Y_n=\max\limits_{1\le k\le n}X_k$ и $Z_n=\frac{Y_n}{\ln n}, n=1,2,3,...$. Докажете дека $Z_n\xrightarrow{P}\lambda$, $n\to\infty$.

16. Независните случајни променливи $X_n, n=1,2,3,...$ имаат $\chi_n^2, n=1,2,3,...$ распределби, соодветно. Нека $Y_n=\frac{X_n}{n}, n=1,2,3,...$. Докажете дека низата $Y_n, n=1,2,3,...$ конвергира по веројатност кон 1. Испитајте ги останатите видови конвергенција.

17. Нека $X_n, n=1,2,3,...$ е низа независни случајни променливи секоја од кои прима вредности 1 и -1 со веројатност $\frac{1}{2}$. Испитајте ги сите видови на конвергентнција на низата случајни променливи $Y_n=\sum\limits_{k=1}^{n}X_k$, $n=1,2,3,...$.

18. Нека $X_n, n=1,2,3,...$ е низа независни еднакво распределени случајни променливи со $\boldsymbol{U}((0,1))$ распределба. Докажете дека низата случајни променливи $Y_n=\frac{1}{n}\ln(X_1X_2...X_n)$, $n=1,2,3,...$ скоро сигурно конвергира кон некоја константа.

19. Низата ненегативни случајни променливи $X_n, n=1,2,3,...$ ги задоволува условите $P\{X_{n+1} \geq X_n\}=1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} E(X_n)=a<+\infty$. Докажете дека постои случајна променливи ξ таква, што $P\{\lim\limits_{n\to\infty} X_n = X\}=1$. Дали важи $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = a$?

20. Нека $X_n, n=1,2,3,...$ е низа независни случајни променливи секоја од кои прима вредности 0 и 1 со веројатности $\frac{1}{2}$. Нека $X=0,X_1X_2X_3...$ е бинарниот запис на бројот X. Докажете дека случајната променлива X има $\boldsymbol{U}([0,1])$ распределба.

21. Нека $X_n, n=1,2,3,...$ е низа независни еднакво распределени случајни променливи со $\boldsymbol{U}([0,1])$ распределба. Докажете дека низата случајни променливи $Y_n=\sqrt[n]{X_1X_2...X_n}$, $n=1,2,3,...$ конвергира скоро сигурно кон e^{-1} кога $n\to\infty$.

4. ЗАКОНИ НА ГОЛЕМИ БРОЕВИ

Во точка II 15 за дискретните случајни променливи ги разгледавме таканаречените слаби закони на големите броеви. Притоа забележуваме дека во сите теореми и нивните последици станува збор за конверегнција по веројатност. Така, на пример, во теоремата на Бернули за бројот на успесите Y_n при n испитувања во шемата на Бернули со веројатност p, $0<p<1$ во секое испитување добивме дека важи $\frac{Y_n}{n}\xrightarrow{P} p$, $n\to\infty$. Меѓутоа, интуитивно ние очекуваме повеќе, т.е. очекуваме релативната честота $\frac{Y_n}{n}$ да ја апроксимира веројатноста p во смисла на обичната конвергенција на реални броеви. Ова важно тврдење е познато како *Борелов закон на големите броеви* и истото може да се искаже во видот $\frac{Y_n}{n}\xrightarrow{c.c} p$, $n\to\infty$. Во оваа точка ќе разгледаме неколку важни генерализации на овие теореми. Притоа, да споменеме дека под закони на големите броеви ги подразбираме тврдењата во кои се разгледува низа случајни променливи $\{X_n\}$ и се констатираат условите при кои низата $\{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - a_n\}$, $a_n \in \mathbf{R}, n=1,2,3,...$ конвергира кон некоја константа и тоа по веројатност (*слаби закони*) и скоро сигурно (*јаки закони*).

4.1. СЛАБИ ЗАКОНИ НА ГОЛЕМИ БРОЕВИ

Слаби закони на големите броеви всушност ги разгледавме при проучувањето на дискретната теорија на веројатност. Меѓутоа истите се во сила и во општата теореја на веројатност, па затоа овде само ќе ги наведеме, со забелешка дека доказите се наполно идентични на веќе презентираните докази во точка II 15. Понатаму, како и во дискретниот случај и овде низата случајни променливи $\{X_n\}$ е определена над ист простор на веројатности $(\Omega, \boldsymbol{A}, P)$.

Теорема 15 (Марков). Ако $\{X_i\}$ е низа случајни променливи (независни или зависни) над ист простор на веројатности таква што

$$\lim_{n\to\infty}\tfrac{1}{n^2}D(\sum_{i=1}^{n}X_i)=0\,, \tag{1}$$

тогаш важи слабиот закон на големи броеви, т.е. за секој $\varepsilon>0$ важи

$$\lim_{n\to\infty}P\{|\tfrac{X_1+...+X_n}{n}-\tfrac{E(X_1)+...+E(X_n)}{n}|<\varepsilon\}=1\,. \tag{2}$$

Доказ. Доказот е идентичен на доказот на теорема II 50. ♦

Пример 11. Нека за низата независни случајни променливи $\{X_i\}$ важи

$$\lim_{n\to\infty}\tfrac{1}{n}D(X_n)=0\,.$$

Ќе докажеме дека за оваа низа важи слабиот закон на големи броеви, т.е. дека важи теорема на Марков.

Решение. Од условот имаме дека за секој $\varepsilon>0$ постои $n_0\in\mathbf{N}$ таков да $\frac{1}{n}D(X_n)\le\varepsilon$, кога $n\ge n_0$. Понатаму, $\{X_i\}$ е низа независни случајни променливи, па затоа

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{n^2}D(\sum_{i=1}^{n}X_i)&=\tfrac{1}{n^2}D(\sum_{i=1}^{n_0}X_i)+\tfrac{1}{n^2}D(\sum_{i=n_0+1}^{n}X_i)<\tfrac{1}{n^2}D(\sum_{i=1}^{n_0}X_i)+\tfrac{1}{n}\sum_{i=n_0+1}^{n}\tfrac{1}{i}D(X_i)\\&\le\tfrac{1}{n^2}D(\sum_{i=1}^{n_0}X_i)+\tfrac{1}{n}\sum_{i=n_0+1}^{n}\varepsilon=\tfrac{1}{n^2}D(\sum_{i=1}^{n_0}X_i)+\tfrac{n-n_0}{n}\varepsilon.\end{aligned}$$

Но, бројот n_0 е фиксиран, па затоа кога $n\to\infty$, од последното неравенство добиваме $\frac{1}{n^2}D(\sum_{i=1}^{n}X_i)<\varepsilon$ и од произволноста на $\varepsilon>0$ следува равенството (1), што и требаше да се докаже. ♦

Последица 4 (Чебишев). Ако $\{X_i\}$ се независни случајни променливи над ист простор на веројатности и постои константа $c>0$ таква што $D(X_i)\le c,$, $i=1,2,...$ тогаш за секој $\varepsilon>0$ важи (2).

Доказ. Доказот е идентичен на доказот на последица II 13. ♦

Користејќи го слабиот закон на големите броеви на Чебишев рускиот математичар Бернштајн дал феноменален доказ на познатата теорема на Ваерштрас за апроксимација на непрекината функција со полиноми. Во следниов пример ќе го презентираме овој доказ.

Пример 12 (Бернштај). Нека $f:[0,1]\to\mathbf{R}$ е непрекината функција. За секој $\varepsilon>0$ со $\omega(f;\varepsilon)$ да го означиме *модулот на непрекинатост* на функцијата f, т.е.

$$\omega(f;\varepsilon)=\sup_{|x-y|\le\varepsilon,\ x,y\in[0,1]}|f(x)-f(y)|\,.$$

Нека се реализираат n независни експерименти, при што веројатноста за успех во секој од нив е еднаква на x и со X_n да го означиме бројот на успешно реализираните експерименти. Тогаш важи $P\{X_n = k\} = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$. Функцијата f е непрекината, па значи е Борелова и како X_n е случајна променлива добиваме дека $f(\frac{X_n}{n})$ е случајна променлива. Со $B_n(f,x)$ да го означиме математичкото очекување на случајната променлива $f(\frac{X_n}{n})$. Тогаш,

$$B_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} f(\tfrac{k}{n}) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} .$$

Полиномот $B_n(f,x)$ во литературата е познат под името Бернштајнов полином од $n-$ти ред, кој е придружен на функцијата f .

Да означиме $M = \sup\limits_{x\in[0,1]} | f(x) |$. Тогаш

$$\begin{aligned} | B_n(f,x) - f(x) | &= | \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} [f(\tfrac{k}{n}) - f(x)] | \\ &\le \omega(f,\varepsilon) \sum_{|\frac{k}{n}-x|\le\varepsilon} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + 2M \sum_{|\frac{k}{n}-x|>\varepsilon} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &\le \omega(f,\varepsilon) + 2M \cdot P\{ | \tfrac{\xi_n}{n} - x | > \varepsilon \} \le \omega(f,\varepsilon) + 2M \cdot \tfrac{x(1-x)}{n\varepsilon^2} \\ &\le \omega(f,\varepsilon) + \tfrac{M}{2n\varepsilon^2}, \end{aligned}$$

од што следува дека полиномите на Бернштајн на интервалот $[0,1]$ ја апроксимираат непрекинатата функција f . ♦

Последица 5. Ако $\{X_i\}$ е низа независни и еднакво распределени случајните променливи, $E(X_i) = a,\ D(X_i) = \sigma^2 < \infty,\ i = 1,2,3,\ldots$, тогаш за секој $\varepsilon > 0$ важи:

$$\lim_{n\to\infty} P\{ | \tfrac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n} - a | < \varepsilon \} = 1 . \tag{3}$$

Доказ. Доказот е идентичен на доказот на последица II 14. ♦

Теорема 16 (Бернули). Ако за секој $n \in \mathbf{N}$ случајната променлива Y_n има $B\{n; p\}$ распределба, тогаш

$$\tfrac{Y_n}{n} \overset{P}{\to} p \ ,\ n \to \infty .$$

Доказ. Да ставиме $Z_n = \frac{Y_n}{n}, n \in \mathbf{N}$. Тогаш $E(Z_n) = p$ и

$$E[(Z_n - p)^2] = D(Z_n) = \tfrac{1}{n^2} D(Y_n) = \tfrac{p(1-p)}{n} \to 0,\ n \to \infty ,$$

што според дефиниција 5 значи дека $Z_n \xrightarrow{2} p$, $n \to \infty$ па од теорема 10 следува дека $Z_n \xrightarrow{P} p$, $n \to \infty$. ♦

Во II 15 теоремата на Хинчин ја презентиравме без доказ. Во овој дел, користејќи ги карактеристичните функции ќе дадеме доказ на истата.

Теорема 17 (Хинчин). Ако $\{X_i\}$ е низа независни и еднакво распределени случајни променливи такви што $E(X_i) = a < +\infty$ $i = 1, 2, 3, \ldots$, тогаш за секој $\varepsilon > 0$ важи (3).

Доказ. Карактеристичната функција $f(t)$ на X_k во околина на нулата може да се запише во видот $f(t) = 1 + ait + o(t)$. Случајните променливи $X_i, i = 1, 2, \ldots$ се независни, па затоа за случајната променлива $Y_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ и за секој t важи

$$f_{\frac{Y_n}{n}}(t) = [f(\tfrac{t}{n})]^n = [1 + \tfrac{ait}{n} + o(\tfrac{t}{n})]^n \to e^{iat}, \; n \to \infty .$$

Функцијата e^{iat} е непрекината во $t = 0$. Според теорема IV 12 функцијата на распределба на случајната променлива $\frac{Y_n}{n}$ слабо конвергира кон функција на распределба со карактеристична функција e^{iat}, а тоа е функцијата

$$F_a(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ 1, & x \ge a. \end{cases}$$

Конечно, од теорема 6 следува дека $\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \xrightarrow{P} a$, т.е. точно е равенството (3). ♦

Теорема 18. Нека $\varepsilon > 0$. За низата случајни променливи $\{Y_n\}$ важи

$$\lim_{n \to \infty} P\{| Y_n | \ge \varepsilon\} = 0 , \tag{4}$$

ако и само ако

$$\lim_{n \to \infty} E(\tfrac{Y_n^2}{1 + Y_n^2}) = 0 . \tag{5}$$

Доказ. Нека е исполнет условот (5). Да означиме $F_n(x) = P\{Y_n < x\}$. Тогаш за секој $\varepsilon > 0$ имаме

$$P\{| Y_n | \ge \varepsilon\} = \int_{\{|x| \ge \varepsilon\}} dG_n(x) \le \tfrac{1+\varepsilon^2}{\varepsilon^2} \int_{\{|x| \ge \varepsilon\}} \tfrac{x^2}{1+x^2} dG_n(x) \le \tfrac{1+\varepsilon^2}{\varepsilon^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \tfrac{x^2}{1+x^2} dG_n(x)$$

$$= \tfrac{1+\varepsilon^2}{\varepsilon^2} E(\tfrac{Y_n^2}{1+Y_n^2}) \to 0, \; n \to \infty,$$

т.е. исполнет е условот (4).

Обратно, нека е исполнет условот (4). Тогаш за секој $\varepsilon > 0$ добиваме

$$P\{|Y_n|\geq\varepsilon\}=\int\limits_{\{|x|\geq\varepsilon\}} dG_n(x)\geq\int\limits_{\{|x|\geq\varepsilon\}}\frac{x^2}{1+x^2}dG_n(x)$$
$$=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^2}dG_n(x)-\int\limits_{\{|x|<\varepsilon\}}\frac{x^2}{1+x^2}dG_n(x)$$
$$=E(\frac{Y_n^2}{1+Y_n^2})-\int\limits_{\{|x|<\varepsilon\}}\frac{x^2}{1+x^2}dG_n(x)\geq E(\frac{Y_n^2}{1+Y_n^2})-\varepsilon^2.$$

Според тоа, $0\leq E(\frac{Y_n^2}{1+Y_n^2})\leq P\{|Y_n|\geq\varepsilon\}+\varepsilon^2$ од што следува равенството (5). ♦

Последица 6. За низата случајни променливи $\{X_n\}$ условот (5) е потребен и доволен услов за равенството (2), каде случајните променливи $\{Y_n\}$ се определени со

$$Y_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k-E(X_k)),\ n=1,2,3,\dots . \tag{6}$$

Доказ. Доказот е идентичен на доказот на последица II 15. ♦

4.2. ЗАКОНИ НУЛА-ЕДЕН

Во теорема I 17* е формулиран Бореловиот закон нула-еден. Во оваа точка ќе докажеме некои поопшти резултати од наведениот вид.

Нека $\{X_n\}$ е низа независни случајни променливи дефинирани на просторот на веројатности $(\Omega,\boldsymbol{A},P)$. За секој $\omega\in\Omega$ редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}X_n(\omega)$ конвергира или дивергира. Да означиме

$$A=\{\omega\,|\,\text{редот }\sum_{n=1}^{\infty}X_n(\omega)\text{ конвергира}\}. \tag{1}$$

Природно е да се запрашаме колкава е веројатноста на настанот A, т.е. колкава е веројатноста редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}X_n(\omega)$ да конвергира или дивергира? Ќе докажеме дека оваа веројатност може да биде само нула или еден. За да го докажеме ова тврдење прво ќе го воведеме поимот остаточна $\sigma-$алгебра.

Нека на просторот на веројатности $(\Omega,\boldsymbol{A},P)$ е определена низа независни случајни променливи $\{X_n\}$. Тоа значи, дека секоја конечна фамилија случајни променливи $X_1,X_2,\dots,X_N$ е независна. Во претходните разгледувања ја определивме $\sigma-$алгебрата $\boldsymbol{A}_{X_1\dots X_n}$, генерирана од случајните променливи $X_1,\dots,X_n$ како $\sigma-$алгебра од сите настани A од видот

$$A=\{\omega\,|\,(X_1(\omega),\dots,X_n(\omega))\in B\}$$

каде $B \in \mathcal{B}^n$, т.е. B е Борелово множество во $\mathbf{R}^n$. Аналогно ги определуваме

$$\mathcal{A}_{X_n} \subseteq \mathcal{A}_{X_n X_{n+1}} \subseteq \cdots.$$

Унијата на сите $\mathcal{A}_{X_n}, \mathcal{A}_{X_n X_{n+1}}, \ldots$ е алгебра настани и минималната $\sigma-$алгебра, генерирана од оваа алгебра, да ја означиме со $\mathcal{A}_{X_n X_{n+1} \ldots}$. Низата

$$\mathcal{A}_{X_n X_{n+1} \ldots}, \mathcal{A}_{X_{n+1} X_{n+2} \ldots}, \mathcal{A}_{X_{n+2} X_{n+3} \ldots}, \ldots$$

е низа нерастечки $\sigma-$алгебри. Понатаму, пресек на $\sigma-$алгебри е $\sigma-$алгебра, па затоа

$$\mathcal{W} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_{X_n X_{n+1} \ldots}$$

е $\sigma-$алгебра.

Дефиниција 7. За $\sigma-$алгебрата $\mathcal{W} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_{X_n X_{n+1} \ldots}$ ќе велиме дека е *остаточна $\sigma-$алгебра за низата* $\{X_n\}$, а настанот $A \in \mathcal{W}$ исто така ќе ги нарекуваме *остаточен.*

Причината за ваквиот термин е во тоа што секој настан $A \in \mathcal{W}$ не зависи од секој конечен број на случајни променливи $X_1, \ldots, X_n$ (зошто?). Лесно се гледа дека настаните (1) и $B = \{\omega \mid \text{редот } \sum_{n=1}^{\infty} X_n(\omega) \text{ дивергира}\}$ се остаточни за низата $\{X_n\}$.

Теорема 19 (закон нула-еден на Колмогоров). Ако $X_1, X_2, \ldots$ се независни случајни променливи, тогаш секој остаточен настан $A \in \mathcal{W}$ има веројатност 0 или 1.

Доказ. Ако $A \in \mathcal{W}$, тогаш $A \in \mathcal{A}_{X_n X_{n+1} \ldots}$ за секој n. Бидејќи $\mathcal{A}_{X_1 \ldots X_{n-1}}$ и $\mathcal{A}_{X_n X_{n+1} \ldots}$ се независни, добиваме дека $P(AB) = P(A)P(B)$ за секој $B \in \mathcal{A}_{X_1 \ldots X_{n-1}}$ и за секој n. Значи, A не зависи од секој $B \in \mathcal{A}_{X_1 X_2 \ldots}$, а бидејќи $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{A}_{X_1 X_2 \ldots}$, добиваме дека A не зависи од самиот себе, т.е. $P(A) = P(AA) = P(A)P(A)$, од што следува тврдењето на теоремата. ♦

Пример 13. Нека $X_1, X_2, X_3, \ldots$ е низа независни случајни променливи и $\mathcal{W}$ е нејзината остаточна алгебра. Ако настанот A е определен со равенството (1), тогаш $A \in \mathcal{W}$, па од теорема 19 следува дека $P(A) = 0$ или $P(A) = 1$. ♦

Пример 14. Нека $A_n, n = 1, 2, \ldots$ е низа независни настани и $I_n, n = 1, 2, \ldots$ е низата индикатори на овие настани. Од независноста на настаните следува независноста на индикаторите. Со $\mathcal{W}$ да ја означиме остаточната алгебра определена со $I_n, n = 1, 2, \ldots$. Бидејќи

$$A^* = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m \geq n} A_m \in \mathcal{W}$$

(зошто?), од теорема 19 следува дека или $P(A^*)=0$ или $P(A^*)=1$. Јасно, Борел-Канталиевата лема определува при кои услови $P(A^*)=0$ или $P(A^*)=1$. ♦

Теорема 20. Нека $X_1, X_2, X_3, ...$ е низа независни случајни променливи и $\boldsymbol{W}$ е нејзината остаточна $\sigma-$алгебра. Ако X е случајна променливи таква што за $\sigma-$алгебрата σ_X генерирана од X важи $\sigma_X \subset \boldsymbol{W}$, тогаш постои константа C таква, што $P\{X=C\}=1$.

Доказ. Од условот на теоремата следува дека за секој реален број x важи $\{\omega \mid X(\omega) \le x\} \in \boldsymbol{W}$, што според теорема 19 значи дека за секој реален број x важи $P\{X \le x\}=0$ или $P\{X \le x\}=1$. Според тоа, реалната функција $P\{X \le x\}$ е монотоно растечка, непрекината од десно и нејзините вредности се или 0 или 1, па затоа постои константа C таква, што за секој $x<C$ важи $P\{X \le x\}=0$, а за секој $x \ge C$ важи $P\{X \le x\}=1$, од што следува $P\{X=C\}=1$. ♦

Пример 15. Нека $\{X_i\}$ е низа независни случајни променливи $\sum\limits_{n=1}^{\infty} X_n z^n$ е степенски ред со случајни коефициенти. Радиусот на конвергенција на овој степенски ред е случајната променлива $Y=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \mid X_n \mid^{-1/n}$. Бидејќи случајна променлива Y таква што за $\sigma-$алгебрата σ_Y генерирана од Y важи $\sigma_Y \subset \boldsymbol{W}$, каде $\boldsymbol{W}$ е остаточната $\sigma-$алгебра на низата $\{X_i\}$, од теорема 20 следува дека радиусот на конвергенција на степенскиот ред со независни случајни коефициенти е константен со веројатност 1. ♦

Следнава теорема е нетривијална последица на законот нула-еден на Колмогоров и се однесува на Бернулиевата шема. Нека $\{X_n\}$ е низа независни случајни променливи и нека е

$$X_n = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbf{N}, \tag{2}$$

$p, q \ge 0,\ p+q=1$, што значи дека случајните променливи $X_n, n \in \mathbf{N}$ имаат Бернулиеви распределби. Да означиме $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n, n \in \mathbf{N}$. Тогаш точна е следнава теорема.

Теорема 21. а) Ако $p=\frac{1}{2}$, тогаш $P(\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\{S_n=0\})=1$.

б) Ако $p \ne \frac{1}{2}$, тогаш $P(\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\{S_n=0\})=0$.

Доказ. б) Нека $B=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\{S_n=0\}$. Настанот B не е остаточен во однос на низата $X_n, n \in \mathbf{N}$, па затоа не е одма јасно дека веројатноста на B може да биде само 0 или 1. Понатаму, да означиме $B_{2n}=\{S_{2n}=0\}$. Тогаш

$$P(B_{2n}) = \binom{2n}{n} p^n q^n .$$

Ако ја искористиме Стирлинговата формула добиваме

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(B_{2n}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi n}} (4pq)^n e^{\frac{1}{24n}} .$$

Бидејќи $p \neq \frac{1}{2}$ имаме $4pq < 1$, па од Даламберовиот критериум за конвергенција на броен ред следува дека $\sum_{n=1}^{\infty} P(B_{2n}) < +\infty$, што значи дека $P(\overline{\lim_{n\to\infty}} \{S_n = 0\}) = 0$.

а) Нека $A = \{ \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{S_n}{\sqrt{n}} = +\infty, \ \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{S_n}{\sqrt{n}} = -\infty\}$. Бидејќи $A \subseteq B$ доволно е да докажеме дека $P(A) = 1$. Нека е

$$A_c = \{ \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{S_n}{\sqrt{n}} \geq c, \ \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq -c\}, \quad c > 0 .$$

Тогаш $A_c \downarrow A$, кога $c \to +\infty$. Освен тоа настанот A и сите настани A_c се остаточни. Ќе докажеме дека $P(A_c) = 1$, за секој $c > 0$. Притоа, бидејќи настанот A_c е остаточн доволно е да докажеме дека $P(A_c) > 0$.

Од $\frac{X_1+1}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $i \in \mathbf{N}$ следува дека

$$S_n^{'} = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i+1}{2} = \frac{S_n+n}{2}$$

и јасно дека $S_n^{'}$ има $B\{n;\frac{1}{2}\}$ распределба и притоа важи

$$\frac{S_n^{'} - \frac{n}{2}}{\frac{\sqrt{n}}{2}} = \frac{\frac{S_n+n}{2} - \frac{n}{2}}{\frac{\sqrt{n}}{2}} = \frac{S_n}{\sqrt{n}} .$$

Сега од својствата на веројатноста и од интегралната теорема на Моавр-Лаплас добиваме

$$P(A_c) = P\{ \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{S_n}{\sqrt{n}} \geq c, \ \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq -c\} \geq P(\overline{\lim_{n\to\infty}} \{\frac{S_n}{\sqrt{n}} \geq c, \ \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq -c\}) \geq \limsup_{n\to\infty} P\{| \frac{S_n}{\sqrt{n}} | \geq c\} > 0$$

па затоа $P(A_c) = 1$, за секој $c > 0$, што конечно значи дека $P(A) = \lim_{n\to\infty} P(A_c) = 1.$ ♦

4.3. КОНВЕРГЕНЦИЈА НА РЕДОВИ ОД СЛУЧАЈНИ ПРОМЕНЛИВИ

Теорема 22 (неравенства на Колмогоров). а) Нека $X_1,...,X_n$ се независни случајни променливи такви, што $E(X_i)$ и $D(X_i)$ се конечни, за секој $i = 1, 2, ..., n$. Тогаш

$$P\{\max_{1\leq i\leq n} | Y_i - E(Y_i) | \geq x\} \leq \frac{D(Y_n)}{x^2}, \tag{1}$$

каде $Y_i = X_1 + ... + X_i$, за $i = 1, 2, ..., n$.

б) Нека $X_1, ..., X_n$ се независни случајни променливи такви, што за секој $i \in \{1, 2, ..., n\}$ важи $0 < D(X_i) < +\infty$ и нека $Y_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$. Ако постои константа C, таква што за секој $i \in \{1, 2, ..., n\}$ е исполнето равенството $P\{|X_i| \le C\} = 1$, тогаш за секој $\varepsilon > 0$ важи неравенството

$$P\{\max_{1 \le k \le n} |Y_k - E(Y_k)| \ge \varepsilon\} \ge 1 - \tfrac{(\varepsilon + 2C)^2}{D(Y_n)}. \qquad (2)$$

Доказ. а) Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $E(X_i) = 0$, за $i = 1, 2, ..., n$, бидејќи во спротивно наместо X_i ќе ја разгледуваме случајната променлива $X_i - E(X_i)$. Ја воведуваме случајната променлива $Z = \min\{i \,||\, Y_i| \ge x\}$. Ако $\max\limits_{1 \le i \le n} |Y_i| < x$, тогаш ставаме $\nu = n + 1$. Од

$$Y_n^2 \ge Y_n^2 \sum_{i=1}^{n} I_{\{Z=i\}}$$

следува дека

$$\begin{aligned} E(Y_n^2) &\ge \sum_{i=1}^{n} E(Y_n^2 I_{\{Z=i\}}) = \sum_{i=1}^{n} E(X_1 + ... + X_i + X_{i+1} + ... + X_n)^2 I_{\{Z=i\}} \\ &\ge \sum_{i=1}^{n} E(X_1 + ... + X_i)^2 I_{\{Z=i\}} + 2\sum_{i=1}^{n-1} E[(X_1 + ... + X_i) I_{\{Z=i\}} (X_{i+1} + ... + X_n)]. \end{aligned}$$

Случајната променлива $I_{\{Z=i\}}$ зависи само од $X_1, ..., X_i$, па затоа $(X_1 + ... + X_i) I_{\{Z=i\}}$ не зависи од $X_{i+1}, ..., X_n$ и

$$E[(X_1 + ... + X_i) I_{\{Z=i\}} (X_{i+1} + ... + X_n) = E[(X_1 + ... + X_i) I_{\{Z=i\}}] \cdot E(X_{i+1} + ... + X_n) = 0.$$

Бидејќи за $\omega \in \{Z = i\}$ имаме $Y_i \ge x$ и

$$P\{Z \le n\} = P\{\max_{1 \le i \le n} |Y_i| \ge x\}$$

добиваме дека важи неравенството

$$E(Y_n^2) \ge \sum_{i=1}^{n} E(Y_i^2 I_{\{Z=i\}}) \ge x^2 P\{Z \le n\} = x^2 P\{\max_{1 \le i \le n} |Y_i| \ge x\}$$

кое е еквивалентно на неравенството (1).

б) Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $E(X_i) = 0$, за $i \in \{1, 2, ..., n\}$, а условот $P\{|X_i| \le C\} = 1$ да го замениме со условот $P\{|X_i| \le 2C\} = 1$. Имено, од $P\{|X_i| \le C\} = 1$ следува дека $|E(X_i)| \le C$ и $P\{|X_i - E(X_i)| \le 2C\} = 1$. За $k \in \{1, 2, ..., n\}$ ги воведуваме ознаките:

$$A_k = \{\max_{1 \le i \le k} |Y_i| < \varepsilon\},\ B_k = A_{k-1} \setminus A_k = \{|Y_1| < \varepsilon, |Y_2| < \varepsilon, ..., |Y_{k-1}| < \varepsilon, |Y_k| \ge \varepsilon\},\ A_0 = \Omega.$$

Од независноста на случајните променливи и својствата на индикаторите следува

$$Y_{k-1}I_{A_{k-1}} + X_kI_{A_{k-1}} = Y_kI_{A_{k-1}} = Y_kI_{A_k} + Y_kI_{B_k}\ ,\ I_{A_k}I_{B_k} = 0 \text{ и } E(Y_{k-1}I_{A_{k-1}}X_k) = 0\,,$$

од што последователно добиваме

$$D(Y_{k-1}I_{A_{k-1}} + X_kI_{A_{k-1}}) = D(Y_kI_{A_k} + Y_kI_{B_k})\,,$$

$$D(Y_{k-1}I_{A_{k-1}}) + D(X_kI_{A_{k-1}}) = D(Y_kI_{A_k}) + D(Y_kI_{B_k})\,.$$

$$E[(Y_{k-1}I_{A_{k-1}})^2] + D(X_k)\cdot P(A_{k-1}) = E[(Y_kI_{A_k})^2] + E[(Y_kI_{B_k})^2]\,. \qquad (3)$$

Понатаму, од неравенството $|X_k| \le 2C$, добиваме

$$|Y_kI_{B_k}| \le |Y_{k-1}I_{B_k}| + |X_kI_{B_k}| \le (\varepsilon + 2C)I_{B_k}\,,$$

па од неравенствата $P(A_{k-1}) \ge P(A_n)$, за $k \in \{1,2,...,n\}$ и (3) следува

$$E[(Y_{k-1}I_{A_{k-1}})^2] + D(X_k)\cdot P(A_n) \le E[(Y_kI_{A_k})^2] + (\varepsilon + 2C)^2 P(B_k)\,. \qquad (4)$$

Ако за $k = 1,2,...,n$ ги собереме неравенствата (4) и искористиме дека $\overline{A}_n = \bigcup_{k=1}^{n} B_k$ добиваме

$$\begin{aligned} D(Y_n)\cdot P(A_n) = P(A_n)\sum_{k=1}^{n} D(X_k) &\le E[(Y_nI_{A_n})^2] + (\varepsilon + 2C)^2 \sum_{k=1}^{n} P(B_k) \\ &\le \varepsilon^2 P(A_n) + (\varepsilon + 2C)^2 P(\overline{A}_n) \le (\varepsilon + 2C)^2. \end{aligned} \qquad (5)$$

Од неравенството (5) имаме $P(A_n) \le \frac{(\varepsilon+2C)^2}{D(Y_n)}$ од што следува

$$P\{\max_{1\le i\le n} |Y_i| \ge \varepsilon\} = P(\overline{A}_n) = 1 - P(A_n) \ge 1 - \frac{(\varepsilon+2C)^2}{D(Y_n)}\,. \ \blacklozenge$$

Нека $\{X_n\}$ е низа независни случајни променливи дефинирани над ист простор на веројатности $(\Omega, \boldsymbol{A}, P)$. Во пример 11 покажавме дека редот $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ конвергира со веројатност 0 или 1. Во следните две леми ќе дадеме потребен и доволен услов овој ред да конвергира со веројатност 1, т.е. да конвергира скоро сигурно.

Лема 6. Нека $\{X_n\}$ е низа независни случајни променливи такви што за секој n важи $E(X_n) = 0$ и $E(X_n^2) = \sigma_n^2 < +\infty$. Ако $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n^2 < +\infty$, тогаш редот $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ конвергира скоро сигурно.

Доказ. Нека $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ е низата парцијални суми на редот $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$. Од условот на лемата имаме

$$E(Y_{n+k}-Y_n)=E(\sum_{i=n+1}^{n+k}X_i)=\sum_{i=n+1}^{n+k}E(X_i)=0\,.$$

Од последното равенство и од неравенството на Колмогоров (теорема 22) следува

$$P\{\max_{1\le i\le m}|Y_{n+i}-Y_n|\ge\varepsilon\}\le\frac{D(Y_{n+m}-Y_n)}{\varepsilon^2}=\frac{1}{\varepsilon^2}D(\sum_{i=n+1}^{n+m}X_i)=\frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{i=n+1}^{n+m}\sigma_i^2\,. \tag{6}$$

Понатаму, бидејќи редот $\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_n^2$ конвергира од неравенството (6) следува

$$P\{\inf_{n\ge1}\sup_{i\ge1}|Y_{n+i}-Y_n|\ge\varepsilon\}\le P\{\sup_{i\ge1}|Y_{n+i}-Y_n|\ge\varepsilon\}\le\frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{i=n+1}^{\infty}\sigma_i^2\to0,\quad n\to\infty\,.$$

Според тоа, низата $\{Y_n\}$ е Кошиева скоро сигурно, па значи таа конвергира скоро сигурно. ♦

Лема 7. Нека $\{X_i\}$ е низа независни случајни променливи и C е позитивен реален број таков, што за секој n важи $E(X_n)=0$, $E(X_n^2)=\sigma_n^2$ и $P\{|X_n|\le C\}=1$. Ако редот $\sum_{n=1}^{\infty}X_n$ конвергира скоро сигурно, тогаш

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_n^2<+\infty\,.$$

Доказ. Од второто неравенство на Колмогоров (теорема 22) следува дека за секој n важи

$$P\{\sup_{k\ge1}|Y_{n+k}-Y_n|\ge\varepsilon\}\ge1-\frac{(\varepsilon+C)^2}{\sum_{k=n+1}^{\infty}\sigma_n^2}\,.$$

Ако $\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_n^2=+\infty$, тогаш за секој природен број n важи равенството

$$P\{\sup_{k\ge1}|Y_{n+k}-Y_n|\ge\varepsilon\}=1$$

па затоа

$$P\{\inf_{n\ge1}\sup_{k\ge1}|Y_{n+k}-Y_n|\ge\varepsilon\}=1\,,$$

што значи дека редот $\sum_{n=1}^{\infty}X_n$ дивергира скоро сигурно, а тоа е противречност. Конечно, од добиената противречност следува тврдењето на лемата. ♦

Лема 8. Нека $\{X_n\}$ и $\{Y_n\}$ се низи случајни променливи такви да

$$\sum_{n=1}^{\infty}P\{X_n\ne Y_n\}<\infty\,. \tag{7}$$

Тогаш

а) низата $\{X_n\}$ конвергира скоро сигурно ако и само ако низата $\{Y_n\}$ конвергира скоро сигурно и двете низи имаат заедничка граница.

б) редот $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ конвергира скоро сигурно ако и само ако редот $\sum_{n=1}^{\infty} Y_n$ конвергира скоро сигурно.

Доказ. Од условот (7) и од својствата на веројатноста следува

$$P(\overline{\lim_n}\{X_n \neq Y_n\}) = 0 \;\Rightarrow\; P(\underline{\lim}_n\{X_n = Y_n\}) = 1 .$$

Според тоа, скоро за сите $\omega \in \Omega$ постои $n_0 = n_0(\omega)$ таков што $X_n(\omega) = Y_n(\omega)$, за $n \geq n_0$. Оттука тврдењето на лемата следува непосредно. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ♦

Теорема 23 (два реда). Нека $\{X_i\}$ е низа независни случајни променливи и C е позитивен реален број таков, што за секој n важи $P\{|X_n| \leq C\} = 1$. Тогаш редот $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ конвергира скоро сигурно ако и само ако $|\sum_{n=1}^{\infty} E(X_n)| < +\infty$ и $\sum_{n=1}^{\infty} D(X_n) < +\infty$.

Доказ. Нека претпоставиме дека $|\sum_{n=1}^{\infty} E(X_n)| < +\infty$ и $\sum_{n=1}^{\infty} D(X_n) < +\infty$. Ставаме $Y_n = X_n - E(X_n)$. Тогаш $P\{|Y_n| \leq 2C\} = 1$ и од лема 6 следува дека

$$\sum_{n=1}^{\infty} Y_n = \sum_{n=1}^{\infty} (X_n - E(X_n))$$

конвергира скоро сигурно. Но, $|\sum_{n=1}^{\infty} E(X_n)| < +\infty$, па затоа редот $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ конвергира скоро сигурно.

Обратно, нека претпоставиме дека редот $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ конвергира скоро сигурно. Избираме низа случајни променливи $\{Y_n\}$ таква што се исполнети условите:

a) за секој n случајните променливи X_n и Y_n имаат иста функција на распределба и

b) низата $X_1, Y_1, X_2, Y_2, \ldots$ е низа независни случајни променливи.

Понатаму, за секој n да земеме $Z_n = X_n - Y_n$. Според условот редот $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ конвергира скоро сигурно, па затоа и редот $\sum_{n=1}^{\infty} Y_n$ конвергира скоро сигурно, од што следува дека и редот $\sum_{n=1}^{\infty} Z_n$ конвергира скоро сигурно. Понатаму, за низата независни случајни променливи $\{Z_n\}$ важи $|Z_n| \leq |X_n| + |Y_n| \leq 2C$, односно $P\{|Z_n| \leq 2C\} = 1$ и $E(Z_n) = E(X_n) - E(Y_n) = 0$, па од лема 7 следува дека $\sum\limits_{n=1}^{\infty} D(Z_n) < +\infty$. Според тоа, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} D(X_n) = \frac{1}{2} \sum\limits_{n=1}^{\infty} D(Z_n) < +\infty$. Конечно, од лема 6 следува дека $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (X_n - E(X_n))$ конвергира скоро сигурно, па затоа конвергира и редот

$$\sum_{n=1}^{\infty} E(X_n) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n - \sum_{n=1}^{\infty} (X_n - E(X_n)). \ ♦$$

Пример 16. Нека $\{a_n\}$ е ограничена низа реални броеви и $\{X_n\}$ е низа независни случајни променливи, распределени по законите

$$P\{X_n = -\tfrac{1}{n}\} = P\{X_n = \tfrac{1}{n}\} = \tfrac{1}{2}, \text{ за секој } n \geq 1.$$

Докажете, дека ако редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира, тогаш редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (X_n + a_n)$ конвергира скоро сигурно.

Решение. Ако во теоремата за два реда земеме $C = 1$, добиваме дека за секој n важи $P\{|X_n| \leq C\} = 1$. Понатаму, $E(X_n) = 0$, па затоа $E(X_n + a_n) = a_n$ што значи

$$|\sum_{n=1}^{\infty} E(X_n + a_n)| = |\sum_{n=1}^{\infty} a_n| < +\infty.$$

и како $D(X_n + a_n) = D(X_n) = \frac{1}{n^2}$, добиваме $\sum\limits_{n=1}^{\infty} D(X_n + a_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$. Конечно, од теоремата за два реда следува дека редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (X_n + a_n)$ конвергира скоро сигурно. ♦

На крајот од овој дел ќе ја докажеме таканаречената теорема за три реда. Пред да ја фомулираме теорема во врска со дадена случајна променлива ќе воведеме поим на засечена случајна променлива. Така ја имаме следнава дефиниција.

Дефиниција 8. Нека X е случајна променлива и $C > 0$. Случајната променлива X^c определена со

$$X^c(\omega) = \begin{cases} X(\omega), & |X(\omega)| < C, \\ 0, & |X(\omega)| \geq C, \end{cases}$$

за секој $\omega \in \Omega$ ја нарекуваме *засечена случајна променлива* за променливата ξ.

Забелешка 4. Значењето на засечените случајни променливи во граничните теореми е последица на следниве два факта:

1. Бидејќи X^c е ограничена, таа ги има сите моменти и за $r > 0$ важи

$$E[(X^c)^r] = \int_{\{x \in \mathbf{R} \mid |x| < C\}} x^r dF_X(x) .$$

2. Засекувањето може да се реализира така да X^c добро ја апроксимира X, односно за секој $\varepsilon > 0$ може да се избере константа $C > 0$ така да важи $P\{X \neq X^c\} < \varepsilon$. Затоа, за секоја низа случајни променливи $\{X_i\}$ секоја случајна променлива X_i можеме да ја засечиме со некоја константа c_n така да важи $P\{X_n \neq (X_n)^{c_n}\} < \frac{\varepsilon}{2^n}$, од што следува

   $$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{X_n \neq X_n^{c_n}\}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P\{X_n \neq X_n^{c_n}\} = \sum_{n=1}^{\infty} P\{| X_n | \geq c_n\} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon.$$

   Притоа, од лема 8 следува дека при ваквото засекување на низата $\{X_i\}$ не се менуваат нејзините гранични својства (проверете!).

Теорема 24 (три реда). Нека $\{X_i\}$ е низа независни случајни променливи. Тогаш редот $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ конвергира скоро сигурно ако и само ако постои реален број C таков, што

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{| X_n | \geq C\} < +\infty , \ | \sum_{n=1}^{\infty} E(X_n^c) | < +\infty \ \text{и} \ \sum_{n=1}^{\infty} D(X_n^c) < +\infty .$$

Доказ. Нека претпоставиме дека постои реален број C таков, што

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{| X_n | \geq C\} < +\infty , \ | \sum_{n=1}^{\infty} E(X_n^c) | < +\infty \ \text{и} \ \sum_{n=1}^{\infty} D(X_n^c) < +\infty .$$

Тогаш, од теоремата за два реда следува дека редот $\sum_{n=1}^{\infty} X_n^c$ конвергира скоро сигурно. Понатаму, од

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{| X_n | \geq C\} < +\infty$$

и од лемата на Борел-Кантели следува дека редот

$$\sum_{n=1}^{\infty} I_{\{|X_n| \geq C\}} = \sum_{n=1}^{\infty} I_{\{|X_n| \neq |X_n^c\}}$$

конвергира скоро сигурно. Според тоа, постои природен број n_0 таков, што за секој $n > n_0$ важи $X_n = X_n^c$. Затоа и редот $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ конвергира скоро сигурно.

Обратно, нека претпоставиме дека редот $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ конвергира скоро сигурно. Тогаш $X_n \xrightarrow{c.c.} 0$, $n \to \infty$, па затоа за секој $\varepsilon > 0$ со веројатност 1 се реализираат најмногу конечно многу настани $\{|X_n| \geq C\}$, $n = 1, 2, \ldots$, т.е.важи $\sum\limits_{n=1}^{\infty} I_{\{|X_n| \geq C\}} < +\infty$. Сега од лемата на Борел-Кантели следува дека $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P\{|X_n| \geq C\} < +\infty$. Бидејќи со веројатност 1 се реализираат најмногу конечно многу од настаните $\{X_n \neq X_n^c\}$, $n = 1, 2, \ldots$ добиваме дека од скоро сигурната конвергенција на редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} X_n$ следува скоро сигурната конвергенција на редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} X_n^c$. Конечно, од теоремата за два реда следува дека важи $|\sum\limits_{n=1}^{\infty} E(X_n^c)| < +\infty$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} D(X_n^c) < +\infty$. ♦

Пример 17. Нека $\{X_i\}$ е низа независни случајни променливи таква што $E(X_n) = 0$ и $E(X_n^2) \leq A^2 < +\infty$, за секој $n \in \mathbf{N}$. Докажете дека редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{-n} X_n$ конвергира скоро сигурно.

Решение. Да означиме $Y_n = 2^{-n} X_n$ и во теоремата за три реда да земеме $C = 1$. Од неравенствата на Чебишев и Љапунов и од условот следува

$$P\{|Y_n| \geq C\} \leq E(Y_n) \leq \sqrt{E(Y_n^2)} \leq \frac{A}{2^n},$$

па затоа

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{|Y_n| \geq C\} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A}{2^n} < +\infty .$$

Аналогно добиваме

$$|\sum_{n=1}^{\infty} E(Y_n^c)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} E(|Y_n|) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A}{2^n} < +\infty$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} D(Y_n^c) \leq \sum_{n=1}^{\infty} D(Y_n^2) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C^2}{2^{2n}} < +\infty .$$

Конечно, од теоремата за три реда следува дека редот

$$\sum_{n=1}^{\infty} Y_n = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} X_n$$

конвергира скоро сигурно. ♦

Последица 7. Нека $\{X_i\}$ е низа независни случајни променливи таква, што $E(X_n) = 0$, за секој $n \in \mathbf{N}$. Ако

$$\sum_{i=1}^{\infty} E[\tfrac{X_i^2}{1+|X_i|}] < +\infty \,, \qquad (8)$$

тогаш редот $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ конвергира скоро сигурно.

Доказ. Условот (8) е еквивалентен со условот

$$\sum_{i=1}^{\infty} E[X_i^2 I_{\{|X_i|<1\}} + |\, X_i \,|\, I_{\{|X_i|\geq 1\}}] < +\infty \,.$$

Според тоа, ако ставиме $X_n^* = X_n I_{\{|X_n|<1\}}, n \in \mathbf{N}$, добиваме $\sum_{n=1}^{\infty} E[(X_n^*)^2] < +\infty$, што значи

$$\sum_{n=1}^{\infty} D(X_n^*) < +\infty \,.$$

Понатаму, од $E(X_n) = 0$ следува

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\, E(X_n^*) \,| = \sum_{n=1}^{\infty} |\, E(X_n I_{\{|X_n|\geq 1\}}) \,| \leq \sum_{n=1}^{\infty} E(|\, X_n \,|\, I_{\{|X_n|\geq 1\}}) < +\infty,$$

што значи дека редот $\sum_{n=1}^{\infty} E(X_n^*)$ конвергира. Сега, од неравенството (4) во точка 1, при $g(x) = |\, x \,|$, следува

$$P\{|\, X_n \,| \geq 1\} = P\{|\, X_n \,|\, I_{\{|X_n|\geq 1\}} \geq 1\} \leq E(|\, X_n \,|\, I_{\{|X_n|\geq 1\}}) \,.$$

Според тоа, важи $\sum_{n=1}^{\infty} P\{|\, X_n \,| \geq 1\} < +\infty$, па затоа тврдењето следува од теоремата на три реда. ♦

4.4. ЈАКИ ЗАКОНИ НА ГОЛЕМИ БРОЕВИ

Нека $\{X_i\}$ е низа случајни променливи. Како што рековме, во случај кога имаме скоро сигурна конвергенција на низата $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, n \in \mathbf{N}$, тогаш велиме дека важи јак закон на големите броеви. Во оваа точка ќе разгледаме некои јаки закони на големи броеви.

Теорема 25. Нека $\{X_n\}$ е низа независни случајни променливи таква што $E(X_n) = 0$, $D(X_n) = \sigma_n^2$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n^2}{n^2} < \infty$. Тогаш,

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} \xrightarrow{c.c.} 0, \; n \to \infty \,. \qquad (1)$$

Доказ. Да означиме $Y_n = X_1 + ... + X_n$. Според теорема 2 конвергентноста (1) е еквивалентна на условот

$$P\{\sup_{k\geq n} |\tfrac{Y_k}{k}| > \varepsilon\} \to 0 \,,\ n \to \infty \,, \tag{2}$$

за секој $\varepsilon > 0$. Да го разгледаме настанот

$$A_n = \{ \max_{2^{n-1} \leq k < 2^n} |\tfrac{Y_k}{k}| > \varepsilon \} \,.$$

Тогаш условот (2) е еквивалентен на условот

$$P\{ \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \} \to 0 \,,\ n \to \infty \,. \tag{3}$$

Од неравенството на Колмогоров имаме

$$P(A_n) \leq P\{ \max_{2^{n-1} \leq k < 2^n} |Y_k| > \varepsilon \cdot 2^{n-1} \} \leq P\{ \max_{1 \leq k < 2^n} |Y_k| > \varepsilon \cdot 2^{n-1} \} \leq 4 \frac{D(Y_{2^n})}{\varepsilon^2 2^{2n}} \,.$$

Понатаму, бидејќи $\sum\limits_{k=k_0}^{\infty} 2^{-2k} \leq 2 \cdot 2^{-2k_0}$ имаме:

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) \leq 4\varepsilon^{-2} \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-2k} \sum_{n=1}^{2^k} \sigma_n^2 \leq 4\varepsilon^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n^2 \sum_{\{k:\, 2^k \geq n\}} 2^{-2k} \leq 8\varepsilon^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n^2}{n^2} < \infty \,.$$

Конечно, од конвергентноста на редот $\sum\limits_{k} P(A_k)$ следува

$$P\{ \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \} \leq \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) \to 0 \,,\ n \to \infty \,,$$

т.е. исполнет е условот (3). ♦

Последица 8. Ако $\{X_n\}$ е низа независни случајни променливи таква што $E(X_n) = 0$ и $D(X_n) \leq C$, за секој $n \in \mathbf{N}$, тогаш е исполнет условo (1), т.е. важи јакиот закон за големи броеви.

Доказ. Од $D(X_n) \leq C$, за секој $n \in \mathbf{N}$ следува

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{D(X_n)}{n^2} \leq C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty \,.$$

Сега тврдењето следува од теорема 25. ♦

Пред да преминеме на доказот на законот на Колмогоров за големите броеви ќе ја докажеме следната помошна лема.

Лема 9. Нека X е случајна променлива. Тогаш $|E(X)| < +\infty$ ако и само ако

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{|X| > n\} < +\infty \,.$$

Доказ. Ако $|E(X)| < +\infty$, тогаш $E(|X|) < +\infty$ и обратно. Од очигледните неравенства

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n-1)P\{n-1 < |X| \leq n\} \leq E(|X|) \leq \sum_{n=1}^{\infty} nP\{n-1 < |X| \leq n\}$$

и релациите

$$\sum_{n=1}^{\infty} nP\{n-1 < |X| \leq n\} = \sum_{n=0}^{\infty} P\{|X| > n\} \leq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P\{|X| > n\}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n-1)P\{n-1 < |X| \leq n\} = \sum_{n=1}^{\infty} nP\{n-1 < |X| \leq n\} - P\{|X| > 0\} = \sum_{n=1}^{\infty} P\{|X| > n\}$$

следуваат неравенствата

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{|X| > n\} \leq E(|X|) \leq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P\{|X| > n\}$$

од што следува тврдењето на теоремата. ♦

Теорема 26 (закон на големи броеви на Колмогоров). Нека случајните променливи $X_1, X_2, X_3, \ldots$ се независни и еднакво распределени. Тогаш

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} \xrightarrow{c.c.} a \text{ , } n \to \infty$$

ако и само ако постои конечно $E(X_1) = a$.

Доказ. Нека постои конечно $E(X_1) = a$. Да ги разгледаме случајните променливи $Y_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$,

$$X\ _n = \begin{cases} X_n, & |X_n| \leq n, \\ 0, & |X_n| > n, \end{cases}$$

и $Y_n = X\ _1 + X\ _2 + \ldots + X\ _n$. Бидејќи $X\ _i$ е функција од X_i добиваме дека случајните променливи $X\ _1, X\ _2, \ldots$ се независни. Од равенството

$$\frac{Y_n - na}{n} = \frac{Y_n - Y_n}{n} + \frac{Y_n - E(Y_n)}{n} + \left(\frac{E(Y_n)}{n} - a\right) \tag{4}$$

следува дека за да го докажеме тврдењето, треба да докажеме, дека на десната страна сите три собирци со веројатност 1 конвергираат кон 0. Третиот собирок не е случајна променлива и тој е бесконечно мал, бидејќи е еднаков на аритметичката средина

$$-\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} E(X_k I_{\{|X_k| > k\}})$$

на броеви за кои важи

$$E(X_k I_{\{|X_k| > k\}}) \to 0, k \to \infty .$$

Да означиме $A_n = \{X_n \neq X\ _n\}$. Имаме

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P\{|X_n| > n\} = \sum_{n=1}^{\infty} P\{|X_1| > n\},$$

при што, според лема 9 последниот ред конвергира. Сега од лемата на Борел-Кантели следува дека само за конечно многу n важи $\{X_n \neq X_{n}\}$. Според тоа, во равенството (4) важи $\frac{Y_n - Y_n}{n} \xrightarrow{c.c} 0$. Останува да докажеме дека $\frac{Y_n - E(Y_n)}{n} \xrightarrow{c.c.} 0$, што ќе следува од теорема 25, ако докажеме дека $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{D(X_n)}{n^2} < \infty$. Бидејќи

$$D(X_n) \leq E(X_n^2) \leq \sum_{k=1}^{\infty} k^2 P\{k-1 < |X_1| \leq k\}$$

добиваме

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{D(X_n)}{n^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{n^2} P\{k-1 < |X_1| \leq k\} = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 P\{k-1 < |X_1| \leq k\} \sum_{n \geq k} \frac{1}{n^2}.$$

Сега, ако искористиме дека

$$\sum_{n>k} \frac{1}{n^2} \leq \int_k^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{k}$$

добиваме

$$\sum_{n \geq k} \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} = \frac{k+1}{k^2}.$$

Користејќи го последното неравенство наоѓаме

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{D(X_n)}{n^2} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2(k+1)}{k^2} P\{k-1 < |X_1| \leq k\} = \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) P\{k-1 < |X_1| \leq k\}$$

$$\leq 2 + \sum_{k=1}^{\infty} (k-1) P\{k-1 < |X_1| \leq k\} \leq 2 + E(|X_1|) < \infty.$$

Обратно, нека $\frac{Y_n}{n} \xrightarrow{c.c} a$. Тогаш, $\frac{X_n}{n} = \frac{Y_n}{n} - \frac{n-1}{n} \frac{Y_{n-1}}{n-1} \xrightarrow{c.c} a$, т.е. со веројатност 1 постојат само конечно многу настани $|\frac{X_n}{n}| > 1$. Од лемата на Борел-Кантели следува дека

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{|X_n| > n\} = \sum_{n=1}^{\infty} P\{|X_1| > n\} < \infty,$$

што според лема 9 значи дека $E(X_1)$ е конечно. ♦

Последица 9 (Борелов закон на големи броеви). Ако случајните променливи Z_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$ имаат $B\{n; p\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ распределби, соодветно, тогаш

$$\frac{Z_n}{n} \xrightarrow{c.c.} p, \ n \to \infty.$$

Доказ. Следува од претходната теорема за $Z_n = X_1 + ... + X_n$, каде $X_1, ..., X_n$ се независни и $P\{X_i = 1\} = p, P\{X_i = 0\} = 1 - p$. ♦

ЗАДАЧИ

1. Нека $\{X_i\}$ е низа независни случајни променливи и $\{F_i\}$ е низата соодветни функции на распределби. Докажете дека настанот $\{\sup\limits_i X_i < +\infty\}$ има вертојатност 0 или 1 и дека таа веројатност е еднаква на 1 ако и само ако за некој $x \in \mathbf{R}$ важи $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(1 - F_i(x)) < +\infty$.
2. Нека $\{X_i\}$ е низа независни еднакво распределени случајни променливи и $Y_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$. Докажете дека за произволни низи реални броеви $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ случајните променливи $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{Y_n - a_n}{b_n}$ и $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{Y_n - a_n}{b_n}$ се константи со веројатност 1.
3. Случајните променливи $X_n, n = 1, 2, ...$ се независни и еднакво распределени. Докажете, дека со веројатност 1 се реализираат само конечен број од настаните $A_n = \{\omega \mid | X_n | \geq \sqrt{n}\}$ ако и само ако $D(X_n) < +\infty$.
4. Случајните променливи $X_n, n = 1, 2, 3, ...$ се независни и распределени по законите
$$P\{X_1 = 1\} = P\{X_1 = -1\} = \tfrac{1}{2} \text{ и } P\{X_n = 1\} = P\{X_n = -1\} = \tfrac{1 - n^{-2}}{2} ,$$
$$P\{X_n = n^2\} = P\{X_n = -n^2\} = \tfrac{n^{-2}}{2} ,\ n > 1 .$$
Дали за овие случајни променливи важи законот на големи броеви на Чебишев? А дали важи законот на големи броеви на Колмогоров?
5. Независните случајни променливи $X_n, n = 1, 2, ...$ имаат густина
$$p(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$
Дали при $r \in (-\infty, \tfrac{1}{2})$ за низата случајни променливи $Y_n = n^r X_n, n = 1, 2, ...$ важи законот на големи броеви на Колмогоров?
6. За низата независни и еднакво распределени случајни променливи $\{X_n\}$ важи $E(X_n) = 0$ и $D(X_n) = 1$. Докажете дека за низата случајни променливи
$$Y_n = X_n + X_{n+1} + ... + X_{n+[\sqrt[3]{n}]}$$
важи слабиот закон на големи броеви.
7. Нека независните случајни променливи $X_n, n = 2, 3, 4, ...$ се распределени според законите
$$X_n : \ \left(\begin{matrix} -n & 0 & n \\ \frac{1}{2n\ln n} & 1 - \frac{1}{n\ln n} & \frac{1}{2n\ln n} \end{matrix}\right) .$$
Докажете дека за оваа низа случајни променливи важи законот на големи броеви на Чебишев, но не важи законот на големи броеви на Колмогоров.
8. Дадена е низата $X_n, n = 1, 2, ...$ независни случајни променливи со распределби:
$$P\{X_n = -2^n\} = P\{X_n = 2^n\} = \tfrac{1}{2}, n \geq 1 .$$
Дали за оваа низа важи законот на големи броеви.

9. Дадена е низата $X_n, n=1,2,...$ независни случајни променливи со распределби:

$$P\{X_n=-n^a\}=P\{X_n=n^a\}=\tfrac{1}{2}, n\geq 1 .$$

За кои вредности на a важи слабиот закон на големи броеви?

10. Дадена е низата $X_n, n=1,2,...$ независни случајни променливи со распределби:

$$P\{X_n=-n^a\}=P\{X_n=n^a\}=\tfrac{1}{2}, n\geq 1 .$$

За кои вредности на a важи јакиот закон на големи броеви?

11. Дадена е низата $X_n, n=1,2,...$ независни и еднакво распределени случајни променливи со распределба

$$P\{X_n=k\}=P\{X_n=-k\}=\frac{C}{k^2\ln k},\ k=2,3,4,...,$$

каде $C=(\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k^2\ln k})^{-1}$.

a) Докажете дека за дадената низа важи слабиот закон на големи броеви.

b) Ако $Y_n=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$ докажете дека $P\{\underline{\lim}_{n\to\infty}\frac{Y_n}{n}=-\infty\}=P\{\overline{\lim}_{n\to\infty}\frac{Y_n}{n}=\infty\}=1$.

12. За независните случајни променливи $X_n, n=1,2,...$ важи

$$P\{X_n=-n^a\}=P\{X_n=n^a\}=\frac{\min\{1,n^{-2a}\}}{2}\ \text{ и }\ P\{X_n=0\}=1-\min\{1,n^{-2a}\}.$$

За кои реални броеви a важи јакиот закон на големи броеви?

13. Нека случајните променливи $X_n, Y_n, n=1,2,3,...$ се независни во целина. Случајната променлива X_n е рамномерно распределена на интервалот $[0,\frac{1}{n}]$ а за случајната променлива Y_n важи $P\{Y_n=0\}=P\{Y_n=\frac{1}{n}\}=\frac{1}{2}$. Дали за низата случајни променливи $Z_n=X_n+Y_n$, $n=1,2,3,...$ важи јакиот закон на големи броеви?

14. За низата реални броеви $\{p_n\}$ важи $0<p_n\leq\frac{1}{2}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}p_n<+\infty$. Независните случајни променливи $\{X_n\}$ се распределени според законите

$$X_n:\ \begin{pmatrix}-1/p_n & -1 & 1 & 1/p_n\\ p_n & 1/2-p_n & 1/2-p_n & p_n\end{pmatrix}.$$

Докажете дека за низата $X_k, k=2,3,4,...$ важи јакиот закон на големи броеви.

15. Независните случајни променливи $\{X_n\}$ се распределени по законот

$$X_n:\ \begin{pmatrix}-k^2 & -\sqrt{k} & 0 & \sqrt{k} & k^2\\ (2k^2)^{-1} & (2k)^{-1} & 1-(k+1)/k^2 & (2k)^{-1} & (2k^2)^{-1}\end{pmatrix}.$$

Докажете дека за оваа низа важи јакиот закон на големи броеви.

16. Нека $\{X_n\}$ е низа независни случајни променливи кои имаат нормална распределба. Ако $\underline{\lim}_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}D(X_n)>0$, докажете дека за низата $\{X_n\}$ не важи јакиот закон на големи броеви.

17. Нека $\{X_n\}$ е низа независни случајни променливи и $\{f_n\}$ е низата соодветни карактеристични функции. Докажете дека редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}X_n$ конвергира скоро сигурно ако и само ако $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{n=1}^{\infty}f_n(t)=f(t)$, при што граничната функција $f(t)$ е непрекината во нулата.

18. Нека $\{X_n\}$ е низа независни случајни променливи. Докажете дека редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} X_n$ конвергира скоро сигурно ако и само ако $\sum\limits_{n=1}^{\infty} E(\frac{X_n^2}{1+X_n^2}) < +\infty$.

19. Нека $\{X_n\}$ е низа независни случајни променливи такви, што

$$E(X_n) = 0 \text{ , за } n \geq 1 \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} E(X_n^2 I_{\{|X_n|\leq 1\}} + |X_n| I_{\{|X_n|>1\}}) < +\infty .$$

Докажете дека редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} X_n$ конвергира скоро сигурно.

20. Нека $\{X_n\}$ е низа независни случајни променливи со закон на распределба $P\{X_n = 1\} = P\{X_n = -1\} = \frac{1}{2}$, за секој $n = 1,2,...$, и $\{a_n\}$ е низа реални броеви. Докажете дека редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n X_n$ конвергира скоро сигурно ако и само ако конвергира редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$.

21. Нека $\{X_n\}$ е низа независни случајни променливи со закон на распределба $P\{X_n = 1\} = P\{X_n = -1\} = \frac{1}{2}$, за секој $n = 1,2,...$. Докажете дека редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{n}$ конвергира скоро сигурно.

22. Нека $\{X_n\}$ е низа независни случајни променливи такви, што за секој n променливата X_n има $\mathrm{N}(0,\sigma_n^2)$ распределба. Докажете дека редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} X_n$ конвергира скоро сигурно ако и само ако конвергира редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sigma_n^2$.

23. Нека $\{X_n\}$ е низа независни случајни променливи кои имаат иста густина на распределба $p(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, x \in \mathbf{R}$ и $\{a_n\}$ е низа реални броеви. Докажете дека редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n X_n$ конвергира скоро сигурно ако и само ако редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира апсолутно.

5. ЦЕНТРАЛНА ГРАНИЧНА ТЕОРЕМА

Во II глава докажавме, дека распределбата на бројот на успесите Z во Бернулиевата шема при константно p, $0 < p < 1$ го има следното гранично својство

$$\lim_{n\to\infty} P\{\frac{Z-E(Z)}{\sqrt{D(Z)}} \leq x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du . \qquad (1)$$

Овој резултат е парцијален случај на таканаречената централна гранична теорема. Всушност централна гранична теорема е заедничко име за една цела фамилија теореми во кои се докажува дека низата парцијални суми $Y_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$, при што $\{X_i\}$ е дадена низа случајни променливи, погодно нормиран со избрана константа, кога

$n \to \infty$ има асимптотска нормална распределба. Слободно речено, централната гранична теорема тврди дека збир на голем број случајни собирци, при што учеството на секој поединечен собирок во целиот збир е мало, има приближно нормална распределба. Оттука следува и огромното значење кое централната гранична теорема го има во примените. Имено, во многу конкретни реални ситуации случајните променливи се резултат на дејствување на голем број случајни фактори, при што влијанието одделно на секој од нив е мало.

Теорема 27. Нека случајните променливи $X_i, i = 1, 2, 3, \dots$ се независни, еднакво распределени и имаат конечни $E(X_i) = a$ и $D(X_i) = \sigma^2 > 0$. Ако $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, тогаш за секој $x \in \mathbf{R}$ важи

$$\lim_{n \to \infty} P\{\frac{Y_n - na}{\sigma\sqrt{n}} \le x\} = \Phi(x) . \qquad (2)$$

Доказ. Да означиме

$$X_k = X_k - a, Y_n = \frac{Y_n - na}{\sigma\sqrt{n}} ,$$

тогаш $Y_n = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} X_i$. Нека $f(t) = f_{X_i}(t)$ е карактеристичната функција на X_i. Бидејќи $E(X_i) = 0$, $E(X_i^2) = D(X_i) = \sigma^2$, добиваме

$$f(t) = 1 - \frac{t^2\sigma^2}{2} + o(t^2), \quad t \to 0$$

и затоа за секој фиксиран t имаме

$$f_{Y_n}(t) = [f(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}})]^n = (1 - \frac{t^2}{2n} + o(\frac{t^2}{n}))^n \to e^{-\frac{t^2}{2}}, \quad n \to \infty . \qquad (3)$$

Бидејќи $e^{-\frac{t^2}{2}}$ е карактеристична функција на распределбата $\mathrm{N}(0,1)$, од (3) и од теоремата за инверзна формула следува тврдењето на теоремата. ♦

Забелешка 5. Да забележиме дека тврдењето (2) од претходната теорема може да се запише на следниов начин:

$$\frac{Y_n - E(Y_n)}{\sqrt{D(Y_n)}} \Rightarrow \mathrm{N}(0,1) .$$

При дополнителни услови централната гранична теорема важи и за нееднакво распределени независни собирци. Во нашите разгледувања истата прво ќе ја докажеме при услови на Љапунов.

Нека случајните променливи $X_i, i = 1, 2, \dots$ се независни и истите имаат произволни распределби. Да означиме

$$E(X_i) = a_i , \; D(X_i) = b_i^2 , \; E(|X_i - a_i|^3) = c_i^3 \text{ и } A_n = \sum_{i=1}^{n} a_i , \; B_n^2 = \sum_{i=1}^{n} b_i^2 , \; C_n^3 = \sum_{i=1}^{n} c_i^3 .$$

Теорема 28 (теорема на Љапунов). Ако $X_i, i=1,2,...$ се независни, a_i, b_i, c_i се конечни и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{C_n}{B_n}=0$, тогаш

$$\lim_{n\to\infty} P\{\frac{X_1+...+X_n-A_n}{B_n}\le x\}=\Phi(x). \tag{4}$$

Доказ. Ставаме $X_{\,k}= X_k - a_k$, $f_k(t)=f_{X_{\,k}}(t)$. Бидејќи

$$E(X_{\,k})=0,\ E(X_{\,k}^2)=b_k^2,\ E(|X_{\,k}|^3)=c_i^3<\infty,$$

добиваме

$$f(t)=1-\frac{t^2}{2}b_k^2+r_k(t), \tag{5}$$

каде

$$|r_k(t)|\le\frac{c_k^3|t|^3}{6},\quad |-\frac{t^2b_k^2}{2}+r_k(t)|\le\frac{|t|^2b_k^2}{2}. \tag{6}$$

Од независноста на случајните променливи $X_{\,i}$, $i=1,2,...,n$ следува дека карактеристичната функција на $Z_n=\frac{1}{B_n}\sum\limits_{k=1}^{n}X_{\,k}$ е $f_{Z_n}(t)=\prod\limits_{k=1}^{n}f_k(\frac{t}{B_n})$. Последното равенство го логаритмираме и добиваме

$$\ln f_{Z_n}(t)=\sum_{k=1}^{n}\ln f_k(\frac{t}{B_n}). \tag{7}$$

Од разложувањето $\ln(1+x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}$ следува дека

$$\ln(1+x)=x+\alpha(x), \tag{8}$$

каде при $|x|\le\frac{1}{2}$ важи

$$|\alpha(x)|=|\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}|\le\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty}|x|^k\le|x|^2. \tag{9}$$

При $\alpha=r$ и $\beta=r+1$ од неравенството на Љапунов добиваме

$$(E(|X|^r))^{\frac{1}{r}}\le(E(|X|^{r+1}))^{\frac{1}{r+1}},$$

па затоа од условот на теоремата следува

$$\frac{b_k^2}{B_n^2}\le\frac{(E(|X_{\,k}|^3)^{\frac{2}{3}}}{B_n^2}=\frac{c_k^2}{B_n^2}\le(\frac{C_n}{B_n})^2\to 0,\quad n\to\infty. \tag{10}$$

Според тоа, $\frac{b_k^2}{B_n^2}\to 0,\quad n\to\infty$ рамномерно по $1\le k\le n$. Нека $T>0$ и $|t|\le T$. Од (5) и (6) следува дека $f(\frac{t}{B_n})=1+\varepsilon_k(\frac{t}{B_n})$, при што, согласно со (10) имаме

$$|\varepsilon_k(\tfrac{t}{B_n})| = |-\tfrac{t^2}{2}\cdot\tfrac{b_k^2}{B_n^2} + r_k(\tfrac{t}{B_n})| \le \tfrac{T^2}{2}\cdot\tfrac{b_k^2}{B_n^2}\,. \tag{11}$$

Избираме n_0 таков што $|\varepsilon_k(\frac{t}{B_n})| \le \frac{1}{2}$ при $n \ge n_0$ и на десната страна на (7) го применуваме претставувањето (8) со оценката (9). Добиваме

$$\log f_{Z_n}(t) = -\tfrac{t^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} r_k(\tfrac{t}{B_n}) + \sum_{k=1}^{n} \theta_k \varepsilon_k^2(\tfrac{t}{B_n})\,, \tag{12}$$

каде $|\theta_k| \le 1$. Ако во (12) ги искористиме оценките (6) и (11), за $|t| \le T$ добиваме

$$\begin{aligned} |\log f_{Z_n}(t) + \tfrac{t^2}{2}| &\le \sum_{k=1}^{n} |r_k(\tfrac{t}{B_n})| + \sum_{k=1}^{n} |\varepsilon_k(\tfrac{t}{B_n})| \cdot \max_{1\le k\le n} |\varepsilon_k(\tfrac{t}{B_n})| \\ &\le \tfrac{T^3}{6}(\tfrac{C_n}{B_n})^3 + \tfrac{T^4}{4}\cdot\frac{\max\limits_{1\le k\le n} b_k^2}{B_n^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k^2}{B_n^2} \to 0, \quad n \to \infty \end{aligned}$$

што значи точно е равенството $\lim\limits_{n\to\infty} f_{Z_n}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$, кое е еквивалентно на равенството (4). ♦

Пример 18. За независните случајни променливи X_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$ важи

$$P\{X_n = -n^a\} = P\{X_n = n^a\} = \frac{\min\{1, n^{-2a}\}}{2} \text{ и } P\{X_n = 0\} = 1 - \min\{1, n^{-2a}\}\,.$$

Лесно се пресметува дека за секој $n = 1, 2, 3, \ldots$ важи

$$a_n = E(X_n) = 0\,,\ b_n^2 = D(X_n) = E(X_n^2) = n^{2a}\min\{1, n^{2a}\}\,,$$

$$c_n^3 = E(|X_n|^3) = n^{3a}\min\{1, n^{-2a}\}\,.$$

Понатаму, ако $a \in [0, \frac{1}{2})$, тогаш $B_n = \sqrt{n}$ и $C_n = \sqrt[3]{n^{a+1} - n^a + 1}$, па затоа

$$\lim_{n\to\infty} \frac{C_n}{B_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^{a+1} - n^a + 1}}{\sqrt{n}} = 0\,,$$

од што следува дека во овој случај важи теоремата на Љапунов. Ако $a < 0$, тогаш $B_n = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} k^{2a}}$ и $C_n = \sqrt[3]{\sum\limits_{k=1}^{n} k^{3a}}$ и како $\frac{C_n}{B_n} \sim \frac{1}{\sqrt[6]{n}}$ добиваме

$$\lim_{n\to\infty} \frac{C_n}{B_n} = D \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[6]{n}} = 0\,,$$

од што следува дека во овој случај важи теоремата на Љапунов. ♦

Забелешка 6. Ќе разгледаме една примена на централната гранична теорема. Притоа ќе се придржуваме на следната терминологија. Ако низата случајни променливи Z_n е таква, што при некои A_n и B_n важи

$$\lim_{n\to\infty} P\{\tfrac{Z_n-A_n}{B_n}\le x\}=\Phi(x)\,, \qquad (13)$$

тогаш ќе велиме, дека случајната променлива Z_n е асимптотски *нормална со параметри* (A_n , B_n) или (A_n , B_n)-*асимптотски нормална*, а равенството (13) ќе го користиме во граничен облик за приближна оценка на веројатностите, ставајќи

$$P\{\tfrac{X_n-A_n}{B_n}\le x\}\approx\Phi(x)\,.$$

Пример 19 (грешки во мерењата). При мерењето на некоја величина a најчесто добиваме приближна вредност X . Направената грешка $Y=X-a$ може да биде претставена како збир на две грешки $Y=X-E(X)+[E(X)-a]$, првата од кои $X-E(X)$ ја нарекуваме *случајна грешка*, а втората $E(X)-a$ *систематска грешка.* Јасно, добрите методи на мерење немаат систематски грешки, па затоа во натамошните разгледувања ќе земеме $E(X)=a$. Случајната грешка Y има нулто математичко очекување $E(Y)=0$. Нека $D(X)=\sigma^2$. За намалување на оваа грешка реализираме n независни мерења $X_1,X_2,...,X_n$ и за оценка на величината a ја земаме аритметичката средина

$$\hat{a}=\frac{X_1+X_2+...+X_n}{n}\,.$$

Се поставува прашање, колкава е во овој случај допустливата грешка? Според централната гранична теорема збирот $X_1+X_2+...+X_n$ на еднакво распределени случајни променливи со $E(X_i)=a$, $D(X_i)=\sigma^2>0$ е $(an,\sigma\sqrt{n})$-асимптотски нормален. Затоа $\hat{a}$ при големи вредности на n е $(a,\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$-асимптотски нормална и

$$P\{|\,\hat{a}-a\,|\le\varepsilon\}\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}}^{\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}} e^{-\frac{u^2}{2}}du\,. \qquad (13)$$

Формалното толкување на приближното равенство (13) доведува до заклучок дека со произволно “груби” методи на мерења при големи вредности на n може да се добие задоволително точен резултат. Секако, последното не е точно, бидејќи во овој случај не може да се гарантира отсуството на систематски грешки, а тоа е предуслов за можноста на примена на приближната формула (13). ♦

На крајот од оваа точка, без доказ ќе ја наведеме теоремата на Линдеберг и ќе покажеме дека од условот на Љапунов следува условот на Линдеберг.

Теорема 29 (теорема на Линдеберг). Нека X_n, $n=1,2,3,...$ се независни случајни променливи со конечни дисперзии и нека

$$Y_n=\sum_{i=1}^{n}X_i,\ m_n=E(X_n),\ s_n^2=D(Y_n),\quad n\in\mathbf{N}\,.$$

Нека претпоставиме дека $s \quad >0$. Ако за секој $\varepsilon>0$ важи

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{s_n^2}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\{x\,|\,|x-m_i|\geq\varepsilon s_n\}}(x-m_i)^2\,dF_{X_i}(x)=0,$$

тогаш $\frac{Y_n-E(Y_n)}{s_n}\Rightarrow \mathrm{N}(0;1),\ n\to\infty$. ♦

Ќе докажеме дека условот на Љапунов го повлекува условот на Линдеберг. Нека низата $X_n,\ n=1,2,3,...$ ги задоволува условите на теоремата на Љапунов. Важи

$$\begin{aligned}E(|\,X_i-E(X_i)\,|^3)&=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\,x-m_i\,|^3\,dF_{X_i}(x)\\&\geq\int\limits_{\{x\,|\,|x-m_i|\geq\varepsilon s_n\}}|\,x-m_i\,|^2|\,x-m_i\,|\,dF_{X_i}(x)\\&\geq\varepsilon s_n\int\limits_{\{x\,|\,|x-m_i|\geq\varepsilon s_n\}}|\,x-m_i\,|^2\,dF_{X_i}(x).\end{aligned}$$

Според тоа,

$$\frac{1}{s_n^2}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\{x\,|\,|x-m_i|\geq\varepsilon s_n\}}(x-m_i)^2\,dF_{X_i}(x)\leq\frac{1}{\varepsilon s_n^3}\sum_{i=1}^{n}E(|\,X_i-E(X_i)\,|^3\to 0,\ n\to\infty.$$

ЗАДАЧИ

1. Нека случајните променливи $X_n, Y_n,\ n=1,2,3,...$ се независни во целина. Случајната променлива X_n е рамномерно распределена на интервалот $[0,\frac{1}{n}]$ а за случајната променлива Y_n важи $P\{Y_n=0\}=P\{Y_n=\frac{1}{n}\}=\frac{1}{2}$. Дали за низата случајни променливи $Z_n=X_n+Y_n$, $n=1,2,3,...$ важи централната гранична теорема?
2. Независните случајни променливи $\{X_n\}$ се распределени по законот
$$X_n:\ \begin{pmatrix}-k^2 & -\sqrt{k} & 0 & \sqrt{k} & k^2\\ (2k^2)^{-1} & (2k)^{-1} & 1-(k+1)/k^2 & (2k)^{-1} & (2k^2)^{-1}\end{pmatrix}.$$
Докажете дека за оваа низа не важи централната гранична теорема.
3. Независните случајни променливи $X_n,\ n=1,2,...$ имаат густина
$$p(x)=\begin{cases}1-|\,x\,|, & |\,x\,|\leq 1,\\ 0, & |\,x\,|>1.\end{cases}$$
Дали при $r\in[0,\infty,)$ за низата случајни променливи $Y_n=n^rX_n,\ n=1,2,...$ важи централната гранична теорема?
4. Користејќи ја централната гранична теорема докажете дека
$$\lim_{n\to\infty}e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}=\frac{1}{2}\ .$$
5. Нека случајните променливи $X_i,\ i=1,2,3,4,...$ се независни и еднакво распределени, $E(X_i)=0,\ \ E(X_i^2)=1$. Докажете, дека за низата случајни променливи $\lambda_i X_i,\ i=1,2,...$, каде $\lambda_i,\ i=1,2,...$ е реална низа, која ги задоволува условите

$$\frac{\max\limits_{1\le k\le n} \lambda_k^2}{\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k^2} \to 0, \quad n \to \infty \tag{1}$$

важи централната гранична теорема. Најдете пример, кој покажува, дека при нарушување на условот (1) централната гранична теорема не важи.

6. Случајните променливи $X_i, i=1,2,...$ се независни и имаат распределби

$$P\{X_n = n^a\} = P\{X_n = -n^a\} = \tfrac{1}{2n^b}, \quad P\{X_n = 0\} = 1 - \tfrac{1}{n^b}.$$

За кои a и b се исполнети условите на Љапунов?

7. Случајните променливи X_n и X_n се независни и имаат Пуасонова распределба со $E(X_n) = E(Y_n) = \lambda n$. Пресметајте

$$\lim_{n\to\infty} P\{\tfrac{\xi_n - \eta_n}{\sqrt{n}} \le x\}.$$

8. Случајните променливи $X_i, i=1,2,...$ се независни и рамномерно распределени на интервалот $[0,1]$. Пресметајте ја веројатноста, дека

$$\prod_{i=1}^{100} X_i \le \tfrac{10}{2^{100}}.$$

9. Докажете, дека ако случајните променливи $X_n, n=1,2,...$ се независни,

$$E(X_n)=0, \; D(X_n)=\sigma_n^2 \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{\sigma_n^2}{n} < \infty,$$

тогаш,

$$\frac{\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + ... + \lambda_n X_n}{n} \xrightarrow{cc} 0$$

каде $\{\lambda_n\}$ е некоја низа која тежи кон бесконечност.

10. Случајните променливи $X_n, n=1,2,3,4,...$ се независни, еднакво распределени и $|E(X_1)| < +\infty$. Независните од нив случајни променливи $Y_n, n=1,2,...$ се независни меѓу себе и ги задоволуваат условите $|Y_n| \le 1$ и $E(Y_n)=0$, $n=1,2,...$. Дали е точно тврдењето

$$\frac{Y_1 X_1 + Y_2 X_2 + ... + Y_n X_n}{n} \xrightarrow{cc} 0.$$

11. Бројот на пешаците кои го поминуваат пешачкиот премин во текот на една минута има $\boldsymbol{P}(8)$ распределба. Ако за еден час пешачкиот премин го поминуваат најмалку 450 луѓе, тогаш на преминот ќе се постави семафор.
   a) Најдете ја веројатноста дека семафорот ќе биде поставен.
   b) Колку време треба да помине за да со веројатност 0,95 пешачкиот премин го поминат најмалку 500 луѓе?

12. Базен се празни секој час, а времето на празнење во минути има $\boldsymbol{E}(\tfrac{1}{20})$ распределба. Низ цевките за празнење истекува $1m^3$ вода во минута.
   a) Ако во базенот имало $1000m^3$ вода, колкава е веројатноста дека после 12 саати во базенот останало помалку од $610m^3$ вода?
   b) Колку најмалку вода треба да содржи базенот за да со веројатност 0,95 после 12 саати во него има вода?

13. Броевите $X_i, i=1,2,...$ се избираат случајно, независно еден од друг, од интервалот $(0,1)$.
   a) Колкава е веројатноста производот на 30 броеви да е меѓу e^{-10} и e^{-20}?

b) Колку броеви треба да се помножат за да со веројатност 0,99 производот е помал од e^{-50}.

14. Кутија содржи десет жетони: пет со бројот 2, три со бројот 4 и два со бројот 8. Случајно се извлекуваат 100 жетони со враќање. Најди ја приближно веројатноста дека производот на броевите на жетоните ќе биде меѓу 2^{160} и 2^{200}.

15. Апарат за игра може да даде број $k, k \in \mathbf{N}$ со веројатност $p_k = \frac{1}{2^k}$. Ако даде парен број, тогаш играчот губи еден денар, а ако даде непарен број тогаш добива еден денар. Најдете ја веројатноста дека после 1000 игри добивката на играчот ќе биде меѓу 100 и 200 денари.

16. Отстапувањето на предметот од пропишаните димензии е случајна променлива X со $\mathrm{N}(0;1)$ распределба. Доработката на предметот трае $Y = X$ саати. Пресметајте ја веројатноста дека доработката на 30 предмети ќе трае помалку од 40 саати.

17. Нека случајната променлива $X_n, n = 1,2,3,...$ има $\chi_n^2, n = 1,2,3,...$ распределба. Користејќи ја централната гранична теорема докажете дека низата случајни променливи
$$Y_n = \frac{X-n}{\sqrt{2n}}, n = 1,2,3,...$$
конвергира кон случајната променлива Z со $\mathrm{N}(0;1)$ распределба. Пресметајте ја веројатноста $P\{\chi_{50}^2 \geq 45{,}9\}$.

18. Хоризонталното отстапување X на погодокот од центарот на метата има густина на веројатност $p(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, x \in \mathbf{R}$. Ако отстапувањето по апсолутна вредност е помало од 1, тогаш стрелецот добива 1 поен, а во спротивно не добива поени.
a) Најдете ја веројатноста дека во 100 гаѓања стрелецот ќе освои 60 поени.
b) Колку гаѓања треба да се извршат за да со веројатност 0,95 стрелецот освои најмалку 75 поени?

ТАБЛИЦИ

Веројатности кај Пуасоновата распределба $p(x)=\frac{a^x}{x!}e^{-a}$

Забелешка. На секоја вредност во оваа таблица и претходи децимална запирка.

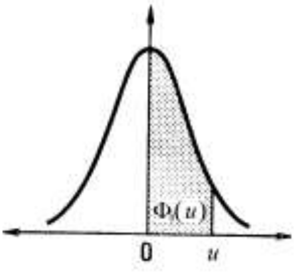
	Вредност на параметарот *a*									
x	**0,1**	**0,2**	**0,3**	**0,4**	**0,5**	**0,6**	**0,7**	**0,8**	**0,9**	**1,0**
0	90484	81873	74082	67032	60653	54881	49659	44933	40657	36788
1	09048	16374	22225	26813	30327	32929	34761	35946	36591	36788
2	00452	01638	03334	05363	07582	09879	12166	14379	16466	18394
3	00015	00109	00333	00715	01264	01976	02839	03834	04940	06131
4	00000	00006	00025	00072	00158	00296	00497	00767	01112	01533
5		00000	00002	00006	00016	00036	00070	00123	00200	00307
6			00000	00000	00001	00004	00008	00015	00030	00051
7					00000	00000	00001	00002	00004	00007
8							00000	00000	00000	00001
9										00000

	Вредност на параметарот *a*									
x	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
0	13534	04979	01832	00674	00248	00091	00034	00012	00005	00002
1	27067	14936	07326	03369	01487	00638	00268	00111	00045	00018
2	27067	22404	14653	08422	04462	02234	01074	00500	00227	00101
3	18045	22404	19537	14037	08924	05213	02863	01499	00757	00371
4	09022	16803	19537	17547	13385	09123	05725	03374	01892	01019
5	03609	10082	15629	17547	16062	12772	09160	06073	03783	02242
6	01203	05041	10420	14622	16062	14900	12214	09109	06306	04110
7	00344	02160	05954	10445	13768	14900	13959	11712	09008	06458
8	00086	00810	02977	06528	10326	13038	13959	13176	11260	08879
9	00019	00270	01323	03627	06884	10141	12408	13176	12511	10853
10	00004	00081	00529	01813	04130	07098	09926	11858	12511	11938
11	00001	00022	00193	00824	02253	04517	07219	09702	11374	11938
12	00000	00006	00064	00343	01126	02635	04813	07277	09478	10943
13		00001	00020	00132	00520	01419	02962	05038	07291	09260
14		00000	00006	00047	00223	00709	01692	03238	05208	07275
15			00002	00016	00089	00331	00903	01943	03472	05335
16			00000	00005	00033	00145	00451	01093	02170	03668
17				00001	00012	00060	00212	00579	01276	02373
18				00000	00004	00023	00094	00289	00709	01450
19					00001	00009	00040	00137	00373	00840
20					00000	00003	00016	00062	00187	00462
21						00001	00006	00026	00089	00243
22						00000	00002	00011	00040	00121
23							00001	00004	00017	00058
24							00000	00002	00007	00027
25								00001	00003	00012
26								00000	00001	00005
27									00000	00002
28										00001
29										00000

ВРЕДНОСТИ НА ФУНКЦИЈАТА $p(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}u^2}$.

u	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0,0	39894	39892	39886	39876	39862	39844	39822	39797	39767	39733
0,1	39695	39654	39608	39559	39505	39448	39387	39322	39253	39181
0,2	39104	39024	38940	38853	38762	38667	38568	38466	38361	38251
0,3	38139	38023	37903	37780	37654	37524	37391	37255	37115	36973
0,4	36827	36678	36526	36371	36213	36053	35889	35723	35553	35381
0,5	35207	35029	34849	34667	34482	34294	34105	33912	33718	33521
0,6	33322	33121	32918	32713	32506	32297	32086	31874	31659	31443
0,7	31225	31006	30785	30563	30339	30114	29887	29659	29431	29200
0,8	28969	28737	28504	28269	28034	27798	27562	27324	27086	26848
0,9	26609	26369	26129	25888	25647	25406	25164	24923	24681	24439
1,0	24197	23955	23713	23471	23230	22988	22747	22506	22265	22025
1,1	21785	21546	21307	21069	20831	20594	20357	20121	19886	19652
1,2	19419	19186	18954	18726	18494	18265	18037	17810	17585	17360
1,3	17137	16915	16694	16474	16256	16038	15822	15608	15395	15183
1,4	14973	14764	14556	14350	14146	13943	13742	13542	13344	13147
1,5	12952	12758	12566	12376	12188	12001	11816	11632	11450	11270
1,6	11092	10915	10741	10567	10396	10226	10059	09893	09728	09566
1,7	09405	09246	09089	08933	08780	08628	08478	08329	08183	08038
1,8	07895	07754	07614	07477	07341	07206	07074	06943	06814	06687
1,9	06562	06439	06316	06195	06077	05959	05844	05730	05618	05508
2,0	05399	05292	05186	05082	04980	04879	04780	04682	04586	04491
2,1	04398	04307	04217	04128	04041	03955	03871	03788	03706	03626
2,2	03547	03470	03394	03319	03246	03174	03103	03034	02965	02898
2,3	02833	02768	02705	02643	02582	02522	02463	02406	02349	02294
2,4	02239	02186	02134	02083	02033	01984	01936	01889	01842	01797
2,5	01753	01709	01667	01625	01585	01545	01506	01468	01431	01394
2,6	01358	01323	01289	01256	01223	01191	01160	01130	01100	01071
2,7	01042	01014	00987	00961	00935	00909	00885	00861	00837	00814
2,8	00792	00770	00748	00727	00707	00687	00668	00649	00631	00613
2,9	00595	00578	00562	00545	00530	00514	00499	00485	00471	00457
3,0	00443	00430	00417	00405	00393	00381	00370	00358	00348	00337
3,1	00327	00317	00307	00298	00288	00279	00271	00262	00254	00246
3,2	00238	00231	00224	00216	00210	00203	00196	00190	00184	00178
3,3	00172	00167	00161	00156	00151	00146	00141	00136	00132	00127
3,4	00123	00119	00115	00111	00107	00104	00100	00097	00094	00090
3,5	00087	00084	00081	00079	00076	00073	00071	00068	00066	00063
3,6	00061	00059	00057	00055	00053	00051	00049	00047	00046	00044
3,7	00042	00041	00039	00038	00037	00035	00034	00033	00031	00030
3,8	00029	00028	00027	00026	00025	00024	00023	00022	00021	00021
3,9	00020	00019	00018	00018	00017	00016	00016	00015	00014	00014

Забелешка. Дадената функција е парна. На секоја вредност во оваа таблица е претходи децимална запирка. На пример: $p(3,51)=0,00084$.



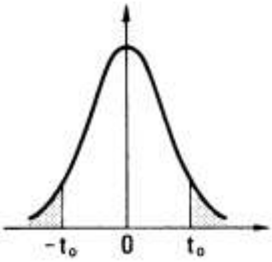
ВРЕДНОСТИ НА ФУНКЦИЈАТА

$$\Phi_0(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^u e^{-\frac{1}{2}x^2}dx$$

Забелешка. На секоја вредност во оваа таблица и претходи децимална запирка. На пример:

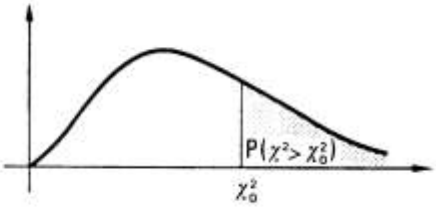
$$\Phi_0(1{,}06)=0{,}35543\,.$$

u	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0,0	00000	00399	00798	01197	01595	01994	02392	02790	03188	03586
0,1	03983	04380	04776	05172	05567	05962	06356	06749	07142	07535
0,2	07926	08317	08706	09095	09483	09871	10257	10642	11026	11409
0,3	11791	12172	12552	12930	13307	13683	14058	14431	14803	15173
0,4	15542	15910	16276	16640	17003	17364	17724	18082	18439	18793
0,5	19146	19497	19847	20194	20540	20884	21226	21566	21904	22240
0,6	22575	22907	23237	23565	23891	24215	24537	24857	25175	25490
0,7	25804	26115	26424	26730	27035	27337	27627	27935	28230	28524
0,8	28814	29103	29389	29673	29955	30234	30511	30785	31057	31327
0,9	31594	31859	32121	32381	32639	32894	33147	33398	33646	33891
1,0	34134	34375	34614	34850	35083	35314	35543	35769	35993	36214
1,1	36433	36650	36864	37076	37286	37493	37698	37900	38100	38298
1,2	38493	38686	38877	39065	39251	39435	39617	39796	39973	40147
1,3	40320	40490	40658	40824	40988	41149	41309	41466	41621	41774
1,4	41924	42073	42220	42364	42507	42647	42786	42922	43056	43189
1,5	43319	43448	43574	43699	43822	43943	44062	44179	44295	44408
1,6	44520	44630	44738	44845	44950	45053	45154	45254	45352	45449
1,7	45543	45637	45728	45818	45907	45994	46080	46164	46246	46327
1,8	46407	46485	46562	46638	46712	46784	46856	46926	46995	47062
1,9	47128	47139	47257	47320	47381	47441	47500	47558	47615	47670
2,0	47725	47778	47831	47882	47932	47982	48030	48077	48124	48169
2,1	48214	48257	48300	48341	48382	48422	48461	48500	48537	48574
2,2	48610	48645	48679	48713	48745	48778	48809	48840	48870	48899
2,3	48928	48956	48983	49010	49030	49061	49086	49111	49134	49158
2,4	49180	49202	49224	49245	49266	49286	49305	49324	49343	49361
2,5	49379	49396	49413	49430	49446	49461	49477	49492	49509	49520
2,6	49534	49547	49560	49573	49585	49598	49609	49621	49632	49643
2,7	49653	49664	49674	49683	49693	49702	49711	49720	49728	49736
2,8	49744	49752	49760	49767	49774	49781	49788	49795	49801	49807
2,9	49813	49819	49825	49831	49836	49841	49846	49851	49856	49861
3,0	49865	49869	49874	49878	49882	49886	49889	49893	49897	49900
3,1	49903	49906	49910	49913	49916	49918	49921	49924	49926	49929
3,2	49931	49934	49936	49938	49940	49942	49944	49946	49948	49950
3,3	49952	49953	49955	49957	49958	49960	49961	49962	49964	49965
3,4	49966	49968	49969	49970	49971	49972	49973	49974	49975	49976
3,5	4997674									
4,0	4999683									
4,5	4999966									
5,0	499999713									



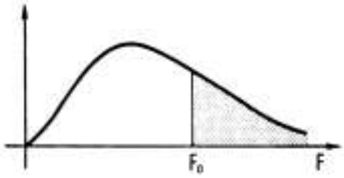
Вредностите t_0 *и соодветните вредности* $P\{|t|>t_0\}$ *кај Студентовата распределба за степени на слобода* $k=1,2,\ldots$.

Степ. на сл. k	α												
	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01	0,001
1	0,158	0,325	0,510	0,727	1,000	1,376	1,963	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	636,619
2	0,142	0,289	0,445	0,617	0,816	1,061	1,386	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	31,598
3	0,137	0,277	0,424	0,584	0,765	0,978	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	12,941
4	0,134	0,271	0,414	0,569	0,741	0,941	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610
5	0,132	0,267	0,408	0,559	0,727	0,920	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	6,859
6	0,131	0,265	0,404	0,553	0,718	0,906	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959
7	0,130	0,263	0,402	0,549	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	5,405
8	0,130	0,262	0,399	0,546	0,706	0,889	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	5,041
9	0,129	0,261	0,398	0,543	0,703	0,883	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,205	4,781
10	0,129	0,260	0,397	0,542	0,700	0,879	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,587
11	0,129	0,260	0,396	0,540	0,697	0,876	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,437
12	0,128	0,259	0,395	0,539	0,695	0,873	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	4,318
13	0,128	0,259	0,394	0,538	0,694	0,870	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	4,221
14	0,128	0,258	0,393	0,537	0,692	0,868	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	4,140
15	0,128	0,258	0,393	0,536	0,691	0,866	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	4,073
16	0,128	0,258	0,392	0,535	0,690	0,865	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	4,015
17	0,128	0,257	0,392	0,534	0,689	0,863	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,965
18	0,127	0,257	0,392	0,534	0,688	0,862	1,067	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,922
19	0,127	0,257	0,391	0,533	0,688	0,861	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,883
20	0,127	0,257	0,391	0,533	0,687	0,860	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,850
21	0,127	0,257	0,391	0,532	0,686	0,859	1,063	1,323	1,721	2,080	2,581	2,831	3,819
22	0,127	0,256	0,390	0,532	0,686	0,858	1,061	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,792
23	0,127	0,256	0,390	0,532	0,685	0,858	1,060	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,767
24	0,127	0,256	0,390	0,531	0,685	0,857	1,059	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,745
25	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,725
26	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,707
27	0,127	0,256	0,389	0,531	0,684	0,855	1,057	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,690
28	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,855	1,056	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,674
29	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,659
30	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,646
∞	0,126	0,253	0,385	0,524	0,674	0,842	1,036	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,291



Вредности на χ_0^2 *и соодветните вредности* $p\{\chi^2 > \chi_0^2\}$ *за степените на слобода* $k = 1, 2, ..., 30$

k	α													
	0,99	**0,98**	**0,95**	**0,90**	**0,80**	**0,70**	**0,50**	**0,30**	**0,20**	**0,10**	**0,05**	**0,02**	**0,01**	**0,001**
1	0,000	0,001	0,004	0,016	0,064	0,148	0,455	1,074	1,642	2,706	3,841	5,412	6,635	10,827
2	0,020	0,040	0,103	0,211	0,446	0,713	1,386	2,408	3,219	4,605	5,991	7,824	9,210	13,815
3	0,115	0,185	0,352	0,584	1,005	1,424	2,366	3,665	4,642	6,251	7,815	9,837	11,341	16,268
4	0,297	0,429	0,711	1,064	1,649	2,195	3,357	4,878	5,989	7,779	9,488	11,668	13,277	18,465
5	0,554	0,752	1,145	1,610	2,343	3,000	4,351	6,064	7,289	9,236	11,070	13,388	15,086	20,517
6	0,872	1,134	1,635	2,204	3,070	3,828	5,348	7,231	8,558	10,645	12,592	15,033	16,812	22,457
7	1,239	1,564	2,167	2,833	3,822	4,671	6,346	8,383	9,803	12,017	14,067	16,622	18,475	24,322
8	1,646	2,032	2,733	3,490	4,594	5,527	7,344	9,524	11,030	13,362	15,507	18,168	20,090	26,125
9	2,088	2,532	3,325	4,168	5,380	6,393	8,343	10,656	12,242	14,684	16,919	19,679	21,666	27,877
10	2,558	3,059	3,940	4,865	6,179	7,267	9,342	11,781	13,442	15,987	18,307	21,161	23,209	29,588
11	3,053	3,609	4,575	5,578	6,989	8,148	10,341	12,899	14,631	17,275	19,675	22,618	24,725	31,264
12	3,571	4,178	5,226	6,304	7,807	9,034	11,340	14,011	15,812	18,549	21,026	24,054	26,217	32,909
13	4,107	4,765	5,892	7,042	8,634	9,926	12,340	15,119	16,985	19,812	22,362	25,472	27,688	34,528
14	4,660	5,368	6,571	7,790	9,467	10,821	13,339	16,222	18,151	21,064	23,685	26,873	29,141	36,123
15	5,229	5,985	7,261	8,547	10,307	11,721	14,339	17,322	19,311	22,307	24,996	28,259	30,578	37,697
16	5,812	6,614	7,962	9,312	11,152	12,624	15,338	18,418	20,465	23,542	26,296	29,633	32,000	39,252
17	6,408	7,255	8,672	10,085	12,002	13,531	16,338	19,511	21,615	24,769	27,587	30,995	33,409	40,790
18	7,015	7,906	9,390	10,865	12,857	14,440	17,338	20,610	22,760	25,989	28,869	32,346	34,805	42,312
19	7,633	8,567	10,117	11,651	13,716	15,352	18,338	21,689	23,900	27,204	30,144	33,687	36,191	43,820
20	8,260	9,237	10,851	12,443	14,578	16,266	19,337	22,775	25,038	28,412	31,410	35,020	27,566	45,315
21	8,897	9,915	11,591	13,240	15,445	17,182	20,337	23,858	26,171	26,615	32,671	36,343	38,932	46,797
22	9,542	10,600	12,338	14,041	16,314	18,101	21,337	24,939	27,301	30,813	33,924	37,659	40,289	48,268
23	10,196	11,293	13,091	14,848	17,187	19,021	22,337	26,018	28,429	32,007	35,172	38,968	41,638	49,728
24	10,856	11,992	13,848	15,659	18,062	19,943	23,337	27,096	29,553	33,196	36,415	40,270	42,980	51,179
25	11,524	12,697	14,611	16,473	18,940	20,867	24,337	28,172	30,675	34,382	37,652	41,566	44,314	52,620
26	12,198	13,409	15,379	17,292	19,820	21,792	25,336	29,246	31,795	35,563	38,885	42,856	45,642	54,052
27	12,879	14,125	16,151	18,114	20,703	22,719	26,336	30,319	32,912	36,741	40,113	44,140	46,963	55,476
28	13,565	14,847	16,928	18,939	21,588	23,647	27,336	31,391	34,027	37,916	41,337	45,419	48,278	56,893
29	14,256	15,574	17,708	19,768	22,475	24,577	28,336	32,461	35,139	39,087	42,557	46,693	49,588	58,302
30	14,953	16,306	18,493	20,599	23,364	25,508	29,336	33,530	36,250	40,256	43,773	47,962	50,892	59,703



Вредности на квантилите F_0 *кај Фишеровата распределба за веројатности* $P\{F > F_0\} = 0,05$ *и* $0,01$. *Притоа* k_b *е степенот на слобода на броителот, а* k_i *е степенот на слобода на именителот*

$k_i \setminus k_b$	$\alpha = 0,05$											
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
1	161	200	215	225	230	234	237	239	241	242	243	244
2	18,5	19,0	19,2	19,3	19,3	19,3	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4
3	10,1	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,88	8,84	8,81	8,78	8,76	8,74
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,93	5,91
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,78	4,74	4,70	4,68
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,03	4,00
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,63	3,60	3,57
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,34	3,31	3,28
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,13	3,10	3,07
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,97	2,94	2,91
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,86	2,82	2,79
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,92	2,85	2,80	2,76	2,72	2,69
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,84	2,77	2,72	2,67	2,63	2,60
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,77	2,70	2,65	2,60	2,56	2,53
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,70	2,64	2,59	2,55	2,51	2,48
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,45	2,42
17	4,45	3,59	3,20	2,95	2,81	2,70	2,62	2,55	2,50	2,45	2,41	2,38
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,37	2,34
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,55	2,48	2,43	2,38	2,34	2,31
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,52	2,45	2,40	2,35	2,31	2,28
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32	2,28	2,25
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,47	2,40	2,35	2,30	2,26	2,23
23	4,27	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,45	2,38	2,32	2,28	2,24	2,20
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,43	2,36	2,30	2,26	2,20	2,18
25	4,24	3,38	2,99	2,76	2,60	2,49	2,41	2,34	2,28	2,24	2,20	2,16
26	4,22	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22	2,18	2,15
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,30	2,25	2,20	2,16	2,13
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,44	2,36	2,29	2,24	2,19	2,15	2,12
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,54	2,43	2,35	2,28	2,22	2,18	2,14	2,10
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,34	2,27	2,21	2,16	2,12	2,09
32	4,15	3,30	2,90	2,67	2,51	2,40	2,32	2,25	2,19	2,14	2,10	2,07
34	4,13	3,28	2,88	2,65	2,49	2,38	2,30	2,23	2,17	2,12	2,08	2,05
36	4,11	3,26	2,86	2,63	2,48	2,36	2,28	2,21	2,15	2,10	2,06	2,03
38	4,10	3,25	2,85	2,62	2,46	2,35	2,26	2,19	2,14	2,09	2,05	2,02
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,07	2,04	2,00
42	4,07	3,22	2,83	2,59	2,44	2,32	2,24	2,17	2,11	2,06	2,02	1,99
44	4,06	3,21	2,82	2,58	2,43	2,31	2,23	2,16	2,10	2,05	2,01	1,98
46	4,05	3,20	2,81	2,57	2,42	2,30	2,22	2,14	2,09	2,04	2,00	1,97
48	4,04	3,19	2,80	2,56	2,41	2,30	2,21	2,14	2,08	2,03	1,99	1,96
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,20	2,13	2,07	2,02	1,98	1,95
55	4,02	3,17	2,78	2,54	2,38	2,27	2,18	2,11	2,05	2,00	1,97	1,93
60	4,00	3,15	2,76	2,52	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99	1,95	1,92
65	3,99	3,14	2,75	2,51	2,36	2,24	2,15	2,08	2,02	1,98	1,94	1,90
70	3,98	3,13	2,74	2,50	2,35	2,23	2,14	2,07	2,01	1,97	1,93	1,89
80	3,96	3,11	2,72	2,48	2,33	2,21	2,12	2,05	1,99	1,95	1,91	1,88
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,30	2,19	2,10	2,03	1,97	1,92	1,88	1,85
125	3,92	3,07	2,68	2,44	2,29	2,17	2,80	2,01	1,95	1,90	1,86	1,83
150	3,91	3,06	2,67	2,43	2,27	2,16	2,07	2,00	1,94	1,89	1,85	1,82
200	3,89	3,04	2,65	2,41	2,26	2,14	2,05	1,98	1,92	1,87	1,83	1,80
400	3,86	3,02	2,62	2,39	2,23	2,12	2,03	1,96	1,90	1,85	1,81	1,78
1000	3,85	3,00	2,61	2,38	2,22	2,10	2,03	1,95	1,89	1,84	1,80	1,76
∞	3,84	2,99	2,60	2,37	2,21	2,09	2,01	1,94	1,88	1,83	1,79	1,75

$k_i \setminus k_b$	α = 0,05											
	14	**16**	**20**	**24**	**30**	**40**	**50**	**75**	**100**	**200**	**500**	∞
1	245	246	248	249	250	251	252	253	253	254	254	254
2	19,4	19,4	19,4	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5
3	8,71	8,69	8,66	8,64	8,62	8,60	8,58	8,57	8,56	8,54	8,54	8,53
4	5,87	5,84	5,80	5,77	5,74	5,71	5,70	5,68	5,66	5,65	5,64	5,63
5	4,64	4,60	4,56	4,53	4,50	4,46	4,44	4,42	4,40	4,38	4,37	4,36
6	3,96	3,92	3,87	3,84	3,81	3,77	3,75	3,72	3,71	3,69	3,68	3,67
7	3,52	3,49	3,44	3,41	3,38	3,34	3,32	3,29	3,28	3,25	3,24	3,23
8	3,23	3,20	3,14	3,12	3,08	3,05	3,03	3,00	2,98	2,96	2,94	2,93
9	3,02	2,98	2,93	2,90	2,86	2,82	2,80	2,77	2,76	2,73	2,72	2,71
10	2,86	2,82	2,77	2,74	2,70	2,67	2,64	2,61	2,59	2,56	2,54	2,53
11	2,74	2,70	2,65	2,61	2,57	2,53	2,50	2,47	2,45	2,42	2,41	2,40
12	2,64	2,60	2,54	2,50	2,46	2,42	2,40	2,36	2,35	2,32	2,31	2,30
13	2,55	2,51	2,46	2,42	2,38	2,34	2,32	2,28	2,26	2,24	2,22	2,21
14	2,48	2,44	2,39	2,35	2,31	2,27	2,24	2,21	2,19	2,16	2,14	2,13
15	2,43	2,39	2,33	2,29	2,25	2,21	2,18	2,15	2,12	2,10	2,08	2,07
16	2,37	2,33	2,28	2,24	2,20	2,16	2,13	2,09	2,07	2,04	2,02	2,01
17	2,33	2,29	2,23	2,19	2,15	2,11	2,08	2,04	2,02	1,99	1,97	1,96
18	2,29	2,25	2,19	2,15	2,11	2,07	2,04	2,00	1,98	1,95	1,93	1,92
19	2,26	2,21	2,15	2,11	2,07	2,02	2,00	1,96	1,94	1,91	1,90	1,88
20	2,23	2,18	2,12	2,08	2,04	1,99	1,96	1,92	1,90	1,87	1,85	1,84
21	2,20	2,15	2,09	2,05	2,00	1,96	1,93	1,89	1,87	1,84	1,82	1,81
22	2,18	2,13	2,07	2,03	1,98	1,93	1,91	1,87	1,84	1,81	1,80	1,78
23	2,14	2,10	2,04	2,00	1,96	1,91	1,88	1,84	1,82	1,79	1,77	1,76
24	2,13	2,09	2,02	1,98	1,94	1,89	1,86	1,82	1,80	1,76	1,74	1,73
25	2,11	2,06	2,00	1,96	1,92	1,87	1,84	1,80	1,77	1,74	1,72	1,71
26	2,10	2,05	1,99	1,95	1,90	1,86	1,82	1,78	1,76	1,72	1,70	1,69
27	2,08	2,03	1,97	1,93	1,88	1,85	1,80	1,76	1,74	1,71	1,68	1,67
28	2,06	2,02	1,96	1,91	1,87	1,81	1,78	1,75	1,72	1,69	1,67	1,65
29	2,05	2,00	1,94	1,90	1,85	1,80	1,77	1,73	1,71	1,68	1,65	1,64
30	2,04	1,99	1,93	1,89	1,84	1,79	1,76	1,72	1,69	1,66	1,64	1,62
32	2,02	1,97	1,91	1,86	1,82	1,76	1,74	1,69	1,67	1,64	1,61	1,59
34	2,00	1,95	1,89	1,84	1,80	1,74	1,71	1,67	1,64	1,61	1,59	1,57
36	1,98	1,93	1,87	1,82	1,78	1,72	1,69	1,65	1,62	1,59	1,56	1,55
38	1,96	1,92	1,85	1,80	1,76	1,71	1,67	1,63	1,60	1,57	1,54	1,53
40	1,95	1,90	1,84	1,79	1,74	1,69	1,66	1,61	1,59	1,55	1,53	1,51
42	1,94	1,89	1,82	1,78	1,73	1,68	1,64	1,60	1,57	1,54	1,51	1,49
44	1,92	1,88	1,81	1,76	1,72	1,66	1,63	1,58	1,56	1,52	1,50	1,48
46	1,91	1,87	1,80	1,75	1,71	1,65	1,62	1,57	1,54	1,51	1,48	1,46
48	1,90	1,86	1,79	1,74	1,70	1,64	1,61	1,56	1,53	1,50	1,47	1,45
50	1,90	1,85	1,78	1,74	1,69	1,63	1,60	1,55	1,52	1,48	1,46	1,44
55	1,88	1,83	1,76	1,72	1,67	1,61	1,58	1,52	1,50	1,46	1,43	1,41
60	1,86	1,81	1,75	1,70	1,65	1,59	1,56	1,50	1,48	1,44	1,41	1,39
65	1,85	1,80	1,73	1,68	1,63	1,57	1,54	1,49	1,46	1,42	1,39	1,37
70	1,84	1,79	1,72	1,67	1,62	1,56	1,53	1,47	1,45	1,40	1,37	1,35
80	1,82	1,77	1,70	1,65	1,60	1,54	1,51	1,45	1,42	1,38	1,35	1,32
100	1,79	1,75	1,68	1,63	1,57	1,51	1,48	1,42	1,39	1,34	1,30	1,28
125	1,77	1,72	1,65	1,60	1,55	1,49	1,45	1,39	1,36	1,31	1,27	1,25
150	1,76	1,71	1,64	1,59	1,54	1,47	1,44	1,37	1,34	1,29	1,25	1,22
200	1,74	1,69	1,62	1,57	1,52	1,45	1,42	1,35	1,32	1,26	1,22	1,19
400	1,72	1,67	160	1,54	1,49	1,42	1,38	1,32	1,28	1,22	1,16	1,13
1000	1,70	1,65	1,58	1,,53	1,47	1,41	1,36	1,30	1,26	1,19	1,13	1,08
∞	1,69	1,64	1,57	1,52	1,46	1,40	1,35	1,28	1,24	1,17	1,11	1,00

$k_i \setminus k_b$	α = **0,01**											
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
1	4052	4999	5403	5625	5764	5859	5928	5981	6022	6056	6082	6106
2	98,5	99,0	99,2	99,3	99,3	99,3	99,3	99,4	99,4	99,4	99,4	99,4
3	34,1	30,8	29,5	28,7	28,2	27,9	27,7	27,5	27,3	27,2	27,1	27,1
4	21,2	18,0	16,7	16,0	15,5	15,2	15,0	14,8	14,7	14,5	14,5	14,4
5	16,3	13,3	12,1	11,4	11,0	10,7	10,5	10,3	10,2	10,1	10,0	9,89
6	13,7	10,9	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,79	7,72
7	12,3	9,55	8,45	7,85	7,45	7,19	7,00	6,84	6,71	6,62	6,54	6,17
8	11,3	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,19	6,03	5,91	5,82	5,74	5,67
9	10,6	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,62	5,47	5,35	5,26	5,18	5,11
10	10,0	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,21	5,06	4,95	4,85	4,78	4,71
11	9,65	7,20	6,22	5,67	5,32	5,07	4,88	4,74	4,63	4,54	4,46	4,40
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,65	4,50	4,39	4,30	4,22	4,16
13	9,07	6,70	5,74	5,20	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	4,02	3,96
14	8,86	6,51	5,56	5,03	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,86	3,80
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80	3,73	3,67
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69	3,61	3,55
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59	3,52	3,45
18	8,28	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01	3,85	3,71	3,60	3,51	3,44	3,37
19	8,18	5,93	5,01	4,50	4,17	3,94	3,77	3,63	3,52	3,43	3,36	3,30
20	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,71	3,56	3,45	3,37	3,30	3,23
21	8,02	5,78	4,87	4,37	4,04	3,81	3,65	3,51	3,40	3,31	3,24	3,17
22	7,94	5,72	4,82	4,31	3,99	3,76	3,59	3,45	3,35	3,26	3,18	3,12
23	7,88	5,66	4,76	4,26	3,94	3,71	3,54	3,41	3,30	3,21	3,14	3,07
24	7,82	5,61	4,72	4,22	3,90	3,67	3,50	3,36	3,25	3,17	3,09	3,03
25	7,77	5,57	4,68	4,18	3,86	3,63	346	3,32	3,21	3,13	3,05	2,99
26	7,72	5,53	4,64	4,14	3,82	3,59	3,42	3,29	3,17	3,09	3,02	2,96
27	7,68	5,49	4,60	4,11	3,79	3,56	3,39	3,26	3,14	3,06	2,98	2,93
28	7,64	5,45	4,57	4,07	3,76	3,53	3,36	3,23	3,11	3,03	2,95	2,90
29	7,60	5,42	4,54	4,04	3,73	3,50	3,33	3,20	3,08	3,00	2,92	2,87
30	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,30	3,17	3,06	2,98	2,90	2,84
32	7,50	5,34	4,46	3,97	3,66	3,42	3,25	3,12	3,01	2,94	2,86	2,80
34	7,44	5,29	4,42	3,93	3,61	3,38	3,21	3,08	2,97	2,89	2,82	2,76
36	7,39	5,25	4,38	3,89	3,58	3,35	3,18	3,04	2,94	2,86	2,78	2,72
38	7,35	5,21	4,34	3,86	3,54	3,32	3,15	3,02	2,91	2,82	2,75	2,69
40	7,31	5,18	4,31	3,83	3,51	3,29	3,12	2,99	2,88	2,80	2,73	2,66
42	7,27	5,15	4,29	3,80	3,49	3,26	3,10	2,96	2,86	2,77	2,70	2,64
44	7,24	5,12	4,26	3,78	3,46	3,24	3,07	2,94	2,84	2,75	2,68	2,62
46	7,21	5,10	4,24	3,76	3,44	3,22	3,05	2,92	2,82	2,73	2,66	2,60
48	7,19	5,08	4,22	3,74	3,42	3,20	3,04	2,90	2,80	2,71	2,64	2,58
50	7,17	5,06	4,20	3,72	3,41	3,18	3,02	2,88	2,78	2,70	2,62	2,56
55	7,12	5,01	4,16	3,68	3,37	3,15	2,98	2,85	2,75	2,66	2,59	2,53
60	7,08	4,98	4,13	3,65	3,34	3,12	2,95	2,82	2,72	2,63	2,56	2,50
65	7,04	4,95	4,10	3,62	3,31	3,09	2,93	2,79	2,70	2,61	2,54	2,47
70	7,01	4,92	4,08	3,60	3,29	3,07	2,91	2,77	2,67	2,59	2,51	2,45
80	6,96	4,88	4,04	3,56	3,25	3,04	2,87	2,74	2,64	2,55	2,48	2,41
100	6,90	4,82	3,98	3,51	3,20	2,99	2,82	2,69	2,59	2,51	2,43	2,36
125	6,84	4,78	3,94	3,47	3,17	2,95	2,79	2,65	2,56	2,47	2,40	2,33
150	6,81	4,75	3,91	3,44	3,14	2,92	2,76	2,62	2,53	2,44	2,37	2,30
200	6,76	4,71	3,88	3,41	3,11	2,90	2,73	2,60	2,50	2,44	2,34	2,28
400	6,70	4,66	3,83	3,36	3,06	2,85	2,69	2,55	2,46	2,37	2,29	2,23
1000	6,66	4,62	3,80	3,34	3,04	2,82	2,66	2,53	2,43	2,34	2,26	2,20
∞	6,64	4,60	3,78	3,32	3,02	2,80	2,64	2,51	2,41	2,32	2,24	2,18

$k_i \setminus k_b$	α = 0,01											
	14	**16**	**20**	**24**	**30**	**40**	**50**	**75**	**100**	**200**	**500**	∞
1	6142	6169	6208	6234	6258	6286	6302	6323	6334	6352	6361	6366
2	99,4	99,4	99,5	99,5	99,5	99,5	99,5	99,5	99,5	99,5	99,5	99,5
3	26,9	26,8	26,7	26,6	26,5	26,4	26,4	26,3	26,2	26,2	26,1	26,1
4	14,2	14,2	14,0	13,9	13,8	13,7	13,7	13,6	13,6	13,5	13,5	13,5
5	9,77	9,68	9,55	9,47	9,38	9,29	9,24	9,17	9,13	9,07	9,04	9,02
6	7,60	7,52	7,39	7,31	7,23	7,14	7,09	7,02	6,99	6,94	6,90	6,88
7	6,35	6,27	6,15	6,07	5,98	5,90	5,85	5,78	5,75	5,70	5,67	5,65
8	5,56	5,48	5,36	5,28	5,20	5,11	5,06	5,00	4,96	4,91	4,88	4,86
9	5,00	4,92	4,80	4,73	4,64	4,56	4,51	4,45	4,41	4,36	4,33	4,31
10	4,60	4,52	4,41	4,33	4,25	4,17	4,12	4,05	4,01	3,96	3,93	3,91
11	4,29	4,21	4,10	4,02	3,94	3,86	3,80	3,74	3,70	3,66	3,62	3,60
12	4,05	3,98	3,86	3,78	3,70	3,61	3,56	3,49	3,46	3,41	3,38	3,63
13	3,85	3,78	3,67	3,59	3,51	3,42	3,37	3,30	3,27	3,21	3,18	3,16
14	3,70	3,62	3,51	3,43	3,34	3,26	3,21	3,14	3,11	3,06	3,02	3,00
15	3,56	3,48	3,36	3,29	3,20	3,12	3,07	3,00	2,97	2,92	2,89	2,87
16	3,45	3,37	3,25	3,18	3,10	3,01	2,96	2,89	2,86	2,80	2,77	2,75
17	3,35	3,27	3,16	3,08	3,00	2,92	2,86	2,79	2,76	2,70	2,67	2,65
18	3,27	3,19	3,07	3,00	2,91	2,83	2,78	2,71	2,68	2,62	2,59	2,57
19	3,19	3,12	3,00	2,92	2,84	2,76	2,70	2,63	2,60	2,54	2,51	2,49
20	3,13	3,05	2,94	2,86	2,77	2,69	2,63	2,56	2,53	2,47	2,44	2,42
21	3,07	2,99	2,88	2,80	2,72	2,63	2,58	2,51	2,47	2,42	2,38	2,36
22	3,02	2,94	2,83	2,75	2,67	2,58	2,53	2,46	2,42	2,37	2,33	2,31
23	2,97	2,89	2,78	2,70	2,62	2,52	2,48	2,41	2,37	2,32	2,28	2,26
24	2,93	2,85	2,74	2,66	2,58	2,49	2,44	2,36	2,33	2,27	2,23	2,21
25	2,89	2,81	2,70	2,62	2,54	2,45	2,40	2,32	2,29	2,23	2,19	2,17
26	2,86	2,77	2,66	2,58	2,50	2,41	2,36	2,28	2,25	2,19	2,15	2,13
27	2,83	2,74	2,63	2,55	2,47	2,38	2,33	2,25	2,21	2,16	2,12	2,10
28	2,80	2,71	2,60	2,55	2,44	2,35	2,30	2,22	2,18	2,13	2,09	2,06
29	2,77	2,68	2,57	2,49	2,41	2,32	2,27	2,19	2,15	2,10	2,06	2,03
30	2,74	2,66	2,55	2,47	2,38	2,29	2,24	2,16	2,13	2,07	2,03	2,01
32	2,70	2,62	2,51	2,42	2,34	2,25	2,20	2,12	2,08	2,02	1,98	1,96
34	2,66	2,58	2,47	2,38	2,30	2,21	2,15	2,08	2,04	1,98	1,94	1,91
36	2,62	2,54	2,43	2,35	2,26	2,17	2,12	2,04	2,00	1,94	1,90	1,88
38	2,59	2,51	2,40	2,32	2,22	2,14	2,08	2,00	1,97	1,90	1,86	1,84
40	2,56	2,49	2,37	2,29	2,20	2,11	2,05	1,97	1,94	1,88	1,84	1,81
42	2,54	2,46	2,35	2,26	2,17	2,08	2,02	1,94	1,91	1,85	1,80	1,78
44	2,52	2,44	2,32	2,24	2,15	2,06	2,00	1,92	1,88	1,82	1,78	1,75
46	2,50	2,42	2,30	2,22	2,13	2,04	1,98	1,90	1,86	1,80	1,76	1,74
48	2,48	2,40	2,28	2,20	2,11	2,02	1,96	1,88	1,84	1,78	1,73	1,70
50	2,46	2,39	2,26	2,18	2,10	2,00	1,94	1,86	1,82	1,76	1,71	1,68
55	2,43	2,35	2,23	2,15	2,06	1,96	1,90	1,82	1,78	1,71	1,66	1,64
60	2,40	2,32	2,20	2,12	2,03	1,93	1,87	1,79	1,74	1,68	1,63	1,60
65	2,37	2,30	2,18	2,09	2,00	1,90	1,84	1,76	1,71	1,64	1,60	1,56
70	2,35	2,28	2,15	2,07	1,98	1,88	1,82	1,74	1,69	1,62	1,56	1,53
80	2,32	2,24	2,11	2,03	1,94	1,84	1,78	1,70	1,65	1,57	1,52	1,49
100	2,26	2,19	2,06	1,98	1,89	1,79	1,73	1,64	1,59	1,51	1,46	1,43
125	2,23	2,15	2,03	1,94	1,85	1,75	1,68	1,59	1,54	1,46	1,40	1,37
150	2,20	2,12	2,00	1,91	1,83	1,72	1,66	1,56	1,51	1,43	1,37	1,33
200	2,17	2,09	1,97	1,88	1,79	1,69	1,62	1,53	1,48	1,39	1,33	1,28
400	2,12	2,04	1,92	1,84	1,74	1,64	1,57	1,47	1,42	1,32	1,24	1,19
1000	2,09	2,01	1,89	1,81	1,71	1,61	1,54	1,44	1,38	1,28	1,19	1,11
∞	2,07	1,99	1,87	1,79	1,69	1,59	1,52	1,41	1,36	1,25	1,15	1,00

ЛИТЕРАТУРА

1. **Adams, M.; Guillemin, V.:** *Measure Theory and Probability,* Birkhäuser, Boston-Basel-Berlin, 1996
2. **Anderson, J. A.; Lewis, J.; Saylor, O. D.:** *Discrete Mathematics with Combinatorics,* Pearson Education, Inc., 2004
3. **Berge, C.:** *Principles of Combinatorics,* Academic Press, New York, 1971
4. **Bertsecas, D. P.; Tsitsiklis, J. N.:** *Introduction to Probability,* MIT, Cambridge, Massachusetts, 2000
5. **Brenerr, D.; Bilodeau, M.:** *Theory of Multivariate Statistics,* Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg, 1999
6. **Conway, J. B.:** *Function of One Complex Variable,* Springer - Verlag, New York - Berlin - Heidelberg - Tokyo, 1991
7. **Cvetković, D.; Simić, S.:** *Diskretna matematika,* Prosveta, Niš, 1995
8. **Daley, D. J.; Vere-Jones, D.:** *An Introduction to the Theory of Point Processes,* Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg, 2003
9. **Drnovšek, R.; Tomaž, K.; Kramar, E.; Lešnjak, G.:** *Zbirka rešenih nalog iz verjetnostnega računa,* DMFA Slovenije, Ljubljana, 1998
10. **Everit, B. S.:** *The Cambridge Dictionary of Statistics,* Cambridge University Press, Cambridge – New York – Melbourne, 2006
11. **Fukanaga, K.:** *Introduction to Statistical Pattern Recognition,* Academic Press, 1990
12. **Garnier, R.; Taylor, J.:** *Discrete mathematics for New Technology,* Institute of Physics Publishing, Bristol, 2002
13. **Ghahramani, S.:** *Fundamentals of Probability With Stochastic Processes,* Pearson Prentice Hall, 2001
14. **Gilbert, J.; Gilbert, L.:** *Elements of Modern Algebra,* PWS, Boston, 1995
15. **Grinstead, C. M.; Snell, J. L.:** *Introduction to Probability,* American Mathematical Society, 1991
16. **Guikhman, I.; Skorokhod, A.:** *Introduction à la théorie des processus aléatories*, Mir, Moscou, 1980
17. **Halmos, P. R.:** *Measure Theory,* D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, New Jersey, Toronto, London, New York, 1956
18. **Hoel, P.G.:** *Introduction to Mathematical Statistics, ,* John Wiley & Sons, New Jersey, 1966
19. **Hoel, P.G.; Port, S.C.; Stone, C.J.:** *Introduction to Statistical Theory*, Houghton Mifflin Company, Boston, 1971
20. **Hsu, H. P.:** *Theory and Problems of Probability, Random Variables and Random Proces,* McGraw-Hill, New York, 1997
21. **Isaac, R.:** *The Pleasures of Probability,* Springer - Verlag, New York - Berlin – Heidelberg, 1995
22. **Ivković, Z.:** *Matematička statistika,* Naučna knjiga, Beograd, 1975
23. **Ivković, Z.:** *Teorija verovatnoča sa matematičkom statistikom,* Naučna knjiga, Beograd, 1989
24. **Kallenberg, O.:** *Foundations of Modern Probability,* Springer, New York, 1997
25. **Kardaun, O. J. W.:** *Classical Methods of Statistics,* Springer – Verlag, Berlin – Heidelberg – New York, 2005
26. **Kedem, B.; Fokianos, K.:** *Regression Models for Time Series Analysis,* John Wiley & Sons, New Jersey, 2003
27. **Kleiber, C.; Kotz, S.:** *Statistical Size Distributions in Economics and Actuarial Sciences,* John Wiley & Sons, New Jersey, 2003
28. **Knight, K.:** *Mathematical Statistics,* Chapman & Hall/CRC, Boca Raton -London - New York - Washington, D.C., 2000
29. **Kolmogorov, A. N.:** *Foundations of the Theory of Probability,* Chelsea Pub. Com., New York, 1956
30. **Lange, K.:** *Applied Probability,* Springer, New York, 2003
31. **Lipschutz, S.:** *Theory and problem of Probability,* McGraw-Hill, New York, 1965

32. **Lozanov-Crvenković, Z.; Rajter, D.:** *Zbirka rešenih zadataka iz verovatnoće i statistike,* Univerzitet u Novom Sadu, Novi Sad, 1999
33. **Mališić J. D.:** *Zbirka zadataka iz teorije verovatnoće sa primenama*, Građevinska knjiga, Beograd, 1989
34. **Maronna, A. R.; Martin, R. D.; Yohai, V. J.:** *Robust Statistics (Theory and Methods),* John Wiley & Sons, Ltd, Ontario, Canada, 2006
35. **McCaan, C. R.:** *Probability Foundations of Economic Theory,* Routledge, London and New York, 1994
36. **Mongomery, D.; Runger, C. G.:** *Applied Statistics and Probability for Engineers,* John Wiley & Sons, Inc, 2003
37. **Mukhotadhyay, N.:** *Probability and Statistical Inference,* Marcel Dekker, Inc., New York – Basel, 2000
38. **Nelson, E.:** *Radically Elementary Probability Theory,* Princeton University Press., New Jersey, 1987
39. **Neyman, J.:** *First Course in Probability and Statistics,* Henry Holt and Company, Inc. New York, 1953
40. **Pauše, Ž.:** *Vjerojatnost*, Školska knjiga, Zagreb, 1978
41. **Pavlić, Z.:** *Statistička teorija i primjena,* Tehnička knjiga, Zagreb, 1970
42. **Rockafellar, R. T.:** *Convex Analysis,* Princeton University Press, Princeton, 1970
43. **Rosen, K.; Michaels, J.; Gross, J.; Grossman, J.; Shier, D.:** *Discrete and Combinatorial Mathematics,* CRC Pres, New York, 2000
44. **Ross, S. M.:** *Introduction to Probability Models,* Academic Press, San Diego, 1997
45. **Royden, H. L.:** *Real Analysis,* Macmillan, New York, 1963
46. **Rudin, W.:** *Real and Complex Analysis,* McGraw-Hill Book Company, New York, 1970
47. **Sarapa, N.:** *Teorija vjerojatnosti*, Školska knjiga, Zagreb, 2002
48. **Shorack, G. L.:** *Probability for Statisticians,* Springer-Verlag, New York-Berlin- Heidelberg, 2000
49. **Soong, T. T.:** *Fundamentals of Probability and Statistics for Engineers,* John Wiley & Sons, Inc, 2004
50. **Spiegel, M. R.; Stephens, L. J.:** *Theory and Problems of Statistics,* McGraw-Hill, New York, 1999
51. **Stroock, D. W.:** *An Introduction to Markov Processes,* Springer, Berlin – Heidelberg, 2005
52. **Tavare, S.; Zeitouni, O.:** *Lectures on Probability Theory and Statistics,* Springer, Berlin-Haidelberg-New York, 2004
53. **Terrell, G. R.:** *Mathematical Statistics,* Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg, 1999
54. **Ullah, A.; Giles, D. E. A.:** *Handbook of Applied Statistics*, Marcel Dekker, Inc., New York – Basel – Hong Kong, 1998
55. **Vere-Jones, D.; Daley, D. J.:** *An Introduction to the Theory of Point Process, Volume* 1, Springer - Verlag, New York – Berlin – Heidelberg, 2003
56. **Wonnacott, T. H.; Wonnacott, R. J.:** *Introductory Statistics*, John Wiley & Sons, New Jersey, 1990
57. **Zolić, A.:** *Zbirka zadataka iz matematičke statistike*, Naučna knjiga, Beograd, 1975
58. **Агапов, Г.И.:** *Задачник по теории вероятностей,* Высшая школа, Москва, 1986
59. **Андрухаев, Х.М.:** *Сборник задач по теории вероятностей,* Просвещение, Москва, 1985
60. **Бернштейн, С. Н.:** *Теории вероятностей,* Огиз, Москва-Ленинград, 1946
61. **Боровков, А. А.:** *Курс теории вероятностей,* Наука, Москва, 1972
62. **Боровков, А. А.:** *Математическая статистика (дополнителые главы),* Наука, Москва, 1984
63. **Вентцелъ, Е. С.; Овчаров, Л.А.:** *Прикладные задачи теории вероятностей,* Радио и связь, Москва, 1983
64. **Вулих, Б. З.:** *Краткий курс теории функций вещественной переменной,* Наука, Москва, 1973
65. **Гирко, В.Л.:** *Предельные теоремы для функций случайны величин,* Вища школа, Киев, 1983
66. **Гмурман, В. Е.:** *Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике,* Высшая школа, Москва, 1970

67. **Димитров, Б.; Янев, Н.:** *Вероятност и статистика*, Университетско издателство “Св. Климент Охридски”, София, 1998
68. **Дойчинов, Д.:** *Математически анализ,* Наука и изкуство, София, 1983
69. **Дороговцев, А. Я.:** *Математическиӣ анализ,* Вища школа, Киев, 1985
70. **Ивановски, Н:** *Реална анализа,* Просветно дело, Скопје, 1997
71. **Кендалл, М.; Моран, П.:** *Геометрические вероятности, Наука, Москва,* 1972
72. **Коваленко, И. Н.; Филипова, А. А.:** *Теория вероятностей и математическая статистика,* Высшая школа, Москва, 1973
73. **Королюк, В. С.; Портенко, Н. И.; Скороход, А. В.; Турбин, А. Ф.:** *Справочник по теории вероятностей и математической статистики,* Наукова думка, Киев, 1978
74. **Кудрявцев, Л. Д.:** *Курс математического анализа,* I, II, III, Высшая школа, Москва, 1988
75. **Малчески, Р.:** *Вовед во теоријата на веројатност*, Алфа '94, Скопје, 2008
76. **Малчески, Р.:** *Калкулус* 1, 2, Алфа '94, Скопје, 2008, 2009
77. **Малчески, Р.:** *Математичка анализа* I, Природно-математички факултет, Скопје, 2002
78. **Малчески, Р.:** *Математичка анализа* II, АЛФА '94, Скопје, 2010
79. **Малчески, Р.:** *Основи на математичка анализа,* Ун. "Св. Кирил и Методиј”, Скопје, 2001
80. **Младеновиќ, П.:** *Вероватноћа и статистика*, Веста - Математички Факултет, Београд, 1995
81. **Севастьянов, Б. А.:** *Курс теории вероятностей и математической статистики,* Наука, Москва, 1982
82. **Соболев, В. И.:** *Лекции по дополнительным главам математического анализа*, Наука, Москва, 1968
83. **Уитлл, П.:** *Вероятность,* Наука, Москва, 1982
84. **Феллер, В.:** *Введение в теорию вероятностей и ее приложения,* Т 1, 2, Мир, Москва, 1984
85. **Хеннекен, П. Л.; Тортра, А.:** *Теория вероятностей и некоторые ее приложения*, Наука, Москва, 1974
86. **Шилов, Г. Е.; Гуревич, Б. Л.:** *Интеграл, мера и производная,* Наука, Москва, 1964
87. **Ширяев, А. Н.:** *Вероятностӣ,* Наука, Москва, 1989

ИНДЕКС НА ПОИМИ

ЗА АВТОРИТЕ

Ристо Малчески е роден на 9.8.1957 година во Р. Србија. Основно образование заврши во Прилеп, средно во Скопје и во 1980 година како најдобар студент во генерацијата, дипломираше на Математичкиот факултет во Скопје и за постигнатиот успех во текот на студирањето беше награден од Ректорот на Универзитетот “Св. Кирил и Методиј”. Магистрираше и докторираше на теми од областа на функционалната анализа, која му претставува основна научна преокупација. По докторирањето беше избран за доцент по математичка анализа на Институтот за математика при Природно-математичкиот факултет во Скопје, на кој реализираше настава по наставни дисциплини од областите: математичка анализа, методика на наставата по математика, веројатност и статистика, а беше ангажиран и во реализирањето на последипломските студии. Во учебната 2003/04 година, со формирањето на Факултетот за општествени науки во Скопје, премина на истиот во звање вонреден професор и ги предаваше наставните дисциплини: Математика за бизнис и Статистика за бизнис. Од учебната 2006/07 година е редовен професор, во кое звање е и сега како професор од областа на математичките науки на ФОН универзитетот, каде во моментот е проректор за настава.

Проф. Малчески е автор и коавтор на осумдесеттина математички книги, меѓу кои:

- Математика 1,
- Математика 2,
- Математика 3,
- Математика 4,
- Основи на математичка анализа,
- Математичка анализа I,
- Математичка анализа II,
- Методика на наставата по математика (општ дел),
- Методика на наставата по аритметика и алгебра во основното образование
- Математика за бизнис,
- Основи на финансиската математика,
- Операциони истражувања,
- Статистика за бизнис и
- Теорија на веројатност.

Автор е и на 44 научни трудови од функционална анализа, 9 научни трудови од применета математика, 41 труд од методика на наставата по математика и на над 73 стручни статии. Во изминатите години учествуваше на десетина научни собири, како од национален, така и од меѓународен карактер.

Во периодот од 1987 до 2004 година активно работеше во Сојузот на математичарите на Македонија, чиј претседател беше од 1999 до 2004 година. Во овој период, покрај работата со надарените ученици за математика, учествуваше во организацијата и како главен координатор на тимот за оценување на Балканските математички олимпијади кои во нашата држава се одржаа во 1999, 2000 и 2008 година, на Вториот когрес конгрес на СММ и на третиот конгрес на МАСС ЕЕ кои се одржаа во 2000 и 2009 година. Почнувајќи од 2012 година прод. Малчески повторно активно работеше во СММ се до 2019 година и во овој перидо покрај во организацијата на двата конгреси на СММ учествуваше како главен координатор и претседател на комисија за селекција на задачи на ЈБМО и БМО, како и на двете студентски олипијади во организација на МАССЕЕ. Дел од активностите на СММ е издавањето на списанијата “Нумерус” и “Сигма”, наменети за учениците од основното и средното образование, соодветно, со кои проф. Малчески активно соработува, а неколку години беше и главен и одговорен уредник на споменатите списанија, период во кој ја формираше библиотеката на списанието “Сигма”. Проф. Малчески триесетина години учествува во организацијата на натпреварите по математика во нашата држава, подготовките на нашите ученици за учество на меѓународните натпревари и во повеќе наврати, како водач и заменик водач на Македонската екипа, има учествувано на Меѓународните и на Балканските математички олимпијади, кои се одржуваа надвор од нашата држава. Исто така Ристо Малчески од 2014 до 2019 година бил уредник на Математичкиот билтен, период кога списанието кое до огаш нередовно излегуваше е стабилизирано и е поставено на неколку значајни научни бази, при што во воие пет години Математичкиот билтен излегуваше два пати годишно.

Вера Малческа е родена на 26.11.1986 година во Прилеп. Основно и средно образование заврши во Скопје со континуиран одличен успех, а со високо образование се стекнала на Техничкиот универзитет во Кајзерслаутерн, Германија на кој во април 2011 година магистрирала применета математика и економија. Моментално работи во Германија како ревизор и актуарВо текот на студирањето објавила пет стручни статии од областа на математиката и е коавтор на следниве книги:

- Алгебарски структури,
- Калкулус I,
- Калкулус II
- Дискретни структури и
- Теорија на веројатност.