Ристо Малчески
Алекса Малчески
Слаѓана Брсаковска
Зоран Мисајлески
Томи Димовски

МАТЕМАТИЧКИ ТАЛЕНТ С2
(збирка задачи за I година, втор дел)

Скопје, 2019

Рецензенти
Даниел Велинов
Самоил Малчески
Сања Костадинова

CIP - Каталогизација во публикација
Национална и универзитетска библиотека "Св. Климент Охридски", Скопје

51(075.3)(076)

МАТЕМАТИЧКИ талент С2 : (збирка задачи за I година, втор дел)
Ристо Малчески ... [и др.]. - Скопје : Армаганка, 2019. - 298 стр. ; 25 см

Други автори: Алекса Малчески, Слаѓана Брсаковска, Зоран Мисајлески, Томи Димовски. - Библиографија: стр. 294-298

ISBN 978-608-4904-01-4
1. Малчески, Ристо [автор] 2. Малчески, Алекса [автор] 3. Брсаковска, Слаѓана [автор] 4. Мисајлески, Зоран [автор] 5. Димовски, Томи [автор]
а) Математика - Задачи за средно образование
COBISS.MK-ID 111543050

СОДРЖИНА

ПРЕДГОВОР

> Ниедно истражување на човекот не може да се нарече вистинска наука ако не е поткрепено со математички доказ.
>
> Проблематична е веродостојноста на тврдењата во науките каде што нема примена на ниту една математичка дисциплина, т.е. кои не се поврзани со математиката.
>
> Леонардо да Винчи

Книгава *Математички талент* С2 е продолжение на книгата Математички талент С1 и е наменета за талентираните ученици по математика од прва година од средното образование. Книгата, всушност, е вториот дел од збирката и во овој дел се содржани 578 решени задачи кои се распределени во два одделни дела и тоа геометриски задачи и задачи од областа на комбинаториката.

Како и во книгата Математички талент С1 и во оваа книга природата на задачите содржани во неа е таква што тие се посебно интересни за комисиите кои ги спроведуваат математичките натпревари. Притоа, задачите повторно не се систематизирани според степенот на натпреварувањето, туку тие се распределени по области. Така, на пример, задачите од областа на множествата, логиката и комбинаториката се распределени во седум дела и тоа: Множества, Логика, Игри и стратегии, Принцип на Дирихле, Боење, покривање и расекување, Распоредувања и Пребројувања.

Рецензентите, д-р Даниел Велинов, д-р Самоил Малчески и д-р Сања Костадинова, придонесоа со своите сугестии и забелешки да се подобри содржината на книгава, за што посебно им благодариме.

И покрај вложениот напор, не можеме да се ослободиме од впечатокот дека се можни значителни подобрувања на оваа збирка решени задачи, како и отстранување на евентуалните пропусти и грешки. Затоа, однапред сме благодарни на секоја добронамерна забелешка, критика и сугестија.

На крајот, ќе ни биде особена чест и задоволство ако оваа збирка придонесе учениците да навлезат во тајните на математиката, а посебно ако математиката им стане животна определба на некои од нив.

Скопје
октомври, 2019 г.

Авторите

V ГЕОМЕТРИЈА

1. ЕЛЕМЕНТИ НА ТРИАГОЛНИК

1. Ако сите триаголници имаат еднаков збир на внатрешните агли, тогаш тој збир е еднаков на 180°. Докажи!

Решение. Нека ABC е кој било триаголник, и нека низ темето A повлечеме права p, која страната BC ја сече во точката D (види цртеж). Ако сите триаголници имаат еднаков збир на внатрешните агли, тогаш со ознаките на цртежот, $\alpha+\beta+\gamma=x+z+\gamma=y+\beta+v$, од каде што

$$\alpha+\beta=x+z\,,\ \alpha+\gamma=y+v\,.$$

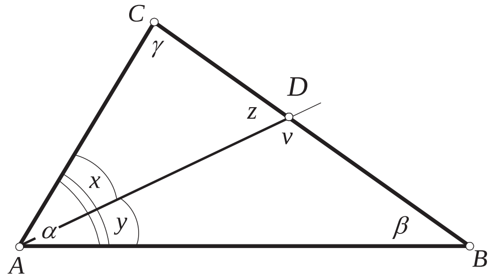
Ако ги собереме последните две равенства, добиваме

$$\alpha+\beta+\alpha+\gamma=x+z+y+v\,.$$

Да ставиме $w=\alpha+\beta+\gamma$, тогаш

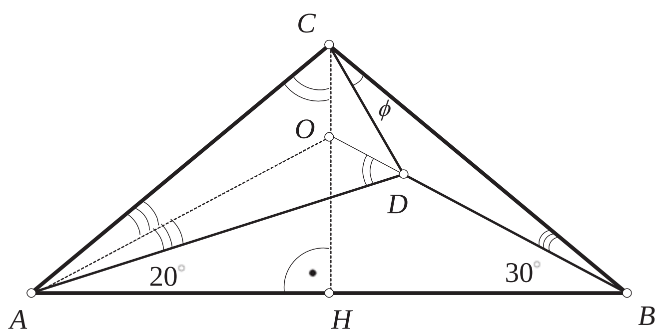
$$w+\alpha=(x+y)+(z+v)\,,\ w+\alpha=\alpha+180^\circ\,,$$

од каде добиваме $w=180^\circ$.



2. Во рамнокрак триаголник ABC, со $\measuredangle ACB=100^\circ$, дадена е точка D, така што $\measuredangle BAD=20^\circ$ и $\measuredangle ABD=30^\circ$. Најди го $\measuredangle BCD$.

Решение. Нека со O го означиме пресекот на правата BD со висината CH (види цртеж). На таков начин го добиваме рамнокракиот триаголник ABO, со агли при основата од 30°. Од тоа заклучуваме дека $\measuredangle AOD=10^\circ$, а како $\alpha=\beta=40^\circ$, следува и $\measuredangle OAC=10^\circ$. Понатаму важи $\measuredangle ODA=50^\circ$, како надворешен агол за триаголникот ABD, исто така и $\measuredangle ACO=50^\circ=\frac{1}{2}$. Од ова следува дека $\triangle AOC\cong\triangle AOD$ (признак АСА), од каде што $\overline{AC}=\overline{AD}$, односно триаголникот ACD е рамнокрак, со основа CD и агли при истата од 80° (бидејќи аголот при врвот е 20°).

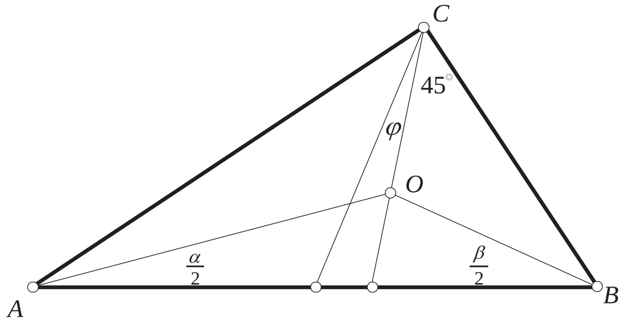


цртеж 1

Тогаш за бараниот агол добиваме $\phi=\measuredangle ACB-\measuredangle ACD=100^\circ-80^\circ=20^\circ$.

3. Одреди ги острите агли во правоаголниот триаголник ABC ($\measuredangle C=90^\circ$), ако аголот меѓу симетралата и тежишната линија на правиот агол е $\frac{1}{5}$ од тапиот агол што го образуваат симетралите на острите агли во тој триаголник.

Решение. Да го најдеме тапиот агол AOB меѓу симетралите на острите агли во правоаголниот ΔABC (види цртеж). Имаме:



$$\measuredangle AOB = 180^\circ - \frac{\alpha+\beta}{2}$$

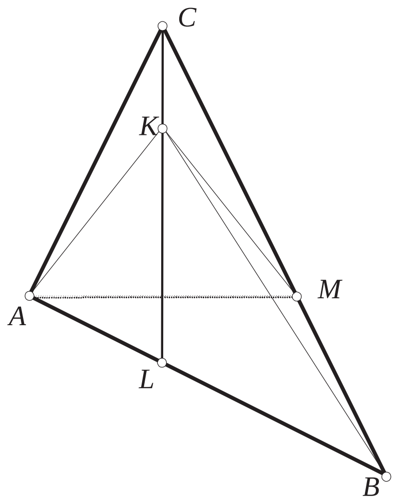
$$= 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ.$$

Тогаш $\varphi = \frac{1}{5}135^\circ = 27^\circ$. Понатаму, од рамнокракиот $\triangle BCS$ ($\overline{BS} = \overline{CS} = R$) имаме $\beta = \varphi + 45^\circ = 27^\circ + 45^\circ = 72^\circ$ и конечно $\alpha = 90^\circ - \beta = 18^\circ$.

Значи, острите агли во правоаголниот триаголник се 18° и 72°.

4. На симетралата CL во триаголникот ABC е избрана точка K таква што $\overline{AC} + \overline{AK} = \overline{BC}$. Докажи дека $\measuredangle CAK = 2\measuredangle CBK$.

Решение. Од равенството $\overline{AC} + \overline{AK} = \overline{BC}$, добиваме дека $\overline{AC} < \overline{BC}$. На страната BC ќе избереме точка M така што $\overline{AC} = \overline{CM}$. Според изборот, точката M е симетрична на точката A во однос на правата CL. Според тоа, отсечката KM е симетрична на отсечката AK во однос на правата CL. Значи, $\overline{AK} = \overline{KM}$. Од равенството $\overline{AC} + \overline{AK} = \overline{BC}$, имаме



$$\overline{AC} + \overline{MK} = \overline{CM} + \overline{MB},$$

па според тоа $\overline{MK} = \overline{MB}$. Значи, триаголникот BMK е рамнокрак и

$$\measuredangle BKM = \measuredangle MBK.$$

Од складноста на триаголниците AKC и MKC (имаат еднакви страни), имаме

$$\measuredangle CAK = \measuredangle KMC. \qquad (1)$$

Бидејќи $\measuredangle KMC$ е надворешен агол за триаголникот BMK,

$$\measuredangle KMC = \measuredangle KBM + \measuredangle MKB = 2\measuredangle CBK. \qquad (2)$$

Конечно, од равенствата (1) и (2) го добиваме равенството $\measuredangle CAK = 2\measuredangle CBK$, кое требаше да го докажеме.

5. Надворешните агли на триаголникот се однесуваат како $5:6:7$. Најди го аголот меѓу симетралата на најголемиот агол и најдолгата страна.

Решение. Нека $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ се надворешните агли на $\triangle ABC$. Тогаш од

$$\alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1 = 5:6:7 \text{ и } \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 360^\circ$$

следува

$$\alpha_1 = 5\varphi,\ \beta_1 = 6\varphi,\ \gamma_1 = 7\varphi$$

и

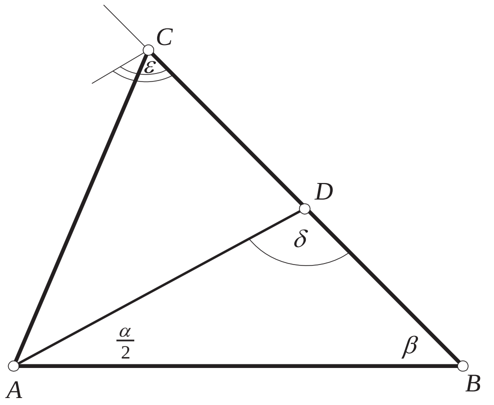
$$5\varphi+6\varphi+7\varphi=360^\circ \text{, т.е. } \varphi=20^\circ.$$

Тогаш:

$$\alpha_1=100^\circ,\ \beta_1=120^\circ,\ \gamma_1=140^\circ \text{ и}$$

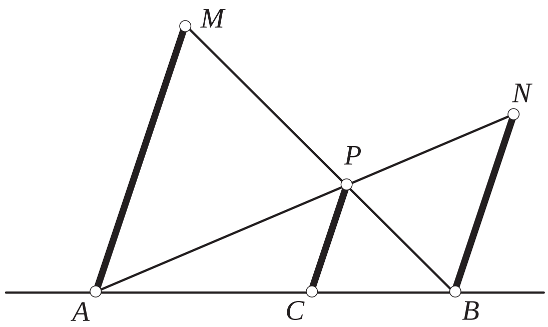
$$\alpha=80^\circ,\ \beta=60^\circ,\ \gamma=40^\circ.$$

Аголот δ меѓу симетралата на најголемиот агол α и најдолгата страна a го наоѓаме од условот $\beta+\delta+\frac{\alpha}{2}=180^\circ$. Имаме: $40^\circ+60^\circ+\delta=180^\circ$, т.е. $\delta=80^\circ$.



6. На фигурата на цртежот десно, отсечките AM, BN и CP се паралелни. Докажи дека

$$\frac{1}{\overline{AM}}+\frac{1}{\overline{BN}}=\frac{1}{\overline{CP}}.$$



Решение. *Прв начин*. Според Талесовата теорема важи

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{CP}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{CB}} \text{ и } \frac{\overline{BN}}{\overline{CP}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}.$$

Сега

$$\frac{\overline{CP}}{\overline{AM}}+\frac{\overline{CP}}{\overline{BN}}=\frac{\overline{CB}}{\overline{AB}}+\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{AC}+\overline{CB}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{AB}}=1$$

па затоа важи $\frac{1}{\overline{AM}}+\frac{1}{\overline{BN}}=\frac{1}{\overline{CP}}$.

Втор начин. Од сличноста на триаголниците ABN и ACP следува $\frac{\overline{AB}}{\overline{BN}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{CP}}$, а од сличноста на триаголниците ABM и CBP следува $\frac{\overline{AB}}{\overline{AM}}=\frac{\overline{CB}}{\overline{CP}}$. Со собирање на двете равенства добиваме

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BN}}+\frac{\overline{AB}}{\overline{AM}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{CP}}+\frac{\overline{CB}}{\overline{CP}} \text{, т.е. } \frac{\overline{AB}}{\overline{BN}}+\frac{\overline{AB}}{\overline{AM}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{CP}}.$$

Оттука, следува $\frac{1}{\overline{AM}}+\frac{1}{\overline{BN}}=\frac{1}{\overline{CP}}$, што и требаше да се докаже.

7. Периметарот на еден триаголник е $143\ cm$, а должините на неговите страни се изразуваат со броевите $\overline{aa}$, $\overline{ab}$ и $\overline{ba}$, каде што a и b се последователни цифри. Најди ги страните на триаголникот.

Решение. Од $L=\overline{aa}+\overline{ab}+\overline{ba}$ и условот $L=143$, последователно добиваме

$$143=11a+10a+b+10b+a$$
$$13\cdot 11=11(2a+b)$$
$$13=2a+b$$

1) Ако $b=a+1$, тогаш $13=2a+a+1$, т.е. $12=3a$, од каде добиваме $a=4$ и $b=5$.

2) Ако $b=a-1$, тогаш $13=2a+a-1$, т.е. $14=3a$. Последната равенка нема целобројни решенија

Значи, страните на триаголникот се: $44\ cm$, $45\ cm$ и $54\ cm$.

8. Дали може произволен правоаголен триаголник да се расече на два рамнокраки триаголници?

Решение. Може, по тежишната линија на хипотенузата (Направи цртеж и обиди се самомостојно да го докажеш ова тврдење).

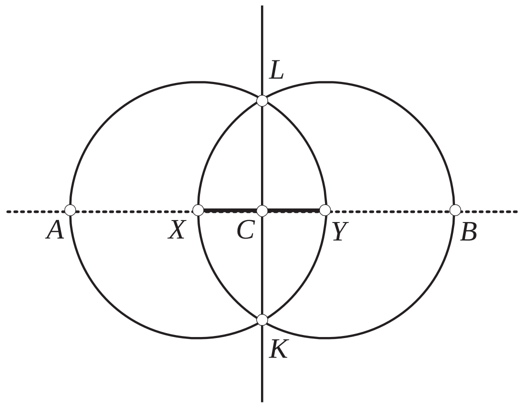
9. Дадени се две точки X и Y од една рамнина. Определи ги сите точки Z од таа рамнина, така што XYZ е рамнокрак триаголник.

Решение. Нека Z е точка за која што XYZ е рамнокрак триаголник. Тогаш $\overline{XY}=\overline{XZ}$ или $\overline{XY}=\overline{YZ}$ или $\overline{XZ}=\overline{YZ}$. Трите случаи ќе ги разгледуваме одвоено.

Случај 1. $\overline{XY}=\overline{XZ}$. Тогаш Y и Z лежат на една кружница со центар во X (бидејќи Z се менува) и радиус $r=\overline{XY}$. Трите точки не се темиња на триаголник, само во случајот кога X,Y и Z се колинеарни, т.е. YZ е дијаметар на таа кружница.

Случај 2. $\overline{XY}=\overline{YZ}$. Тогаш X и Z припаѓаат на една кружница со центар во Y и радиус $r=\overline{XY}$. Трите точки не се темиња на еден триаголник, ако и само ако X,Y и Z се колинеарни, т.е. XZ е дијаметар на таа кружница.

Случај 3. $\overline{XZ}=\overline{YZ}$. Тогаш Z припаѓа на симетралата на отсечката XY (бидејќи Z е променлива точка). Трите точки не се темиња на триаголник ако и само ако X,Y и Z се колинеарни. Тој случај е кога Z е средина на отсечката XY.



Геометриски множеството решенија е $\Gamma\setminus\{A,B,C\}$, каде A,B и C се означени на цртежот, а Γ е геометриската фигура дадена на цртежот.

10. Должината на една катета на правоаголниот триаголник е 21, а должините на останатите две страни се природни броеви. Колку има такви триаголници? Најди ги нивните страни.

Решение. Нека $a=21$, b е другата катета а c е должината на хипотенузата. Тогаш $c^2-b^2=21^2$, т.е. $(c-b)(c+b)=3^2 7^2$. Бидејќи $c+b>c-b$, ги имаме следните можности

$$\begin{cases} c-b=1 \\ c+b=21^2 \end{cases}, \quad \begin{cases} c-b=3 \\ c+b=3\cdot 7^2 \end{cases}, \quad \begin{cases} c-b=7 \\ c+b=9\cdot 7 \end{cases}, \quad \begin{cases} c-b=9 \\ c+b=49 \end{cases}.$$

Може да се провери дека секој од овие системи има целобројни решенија:

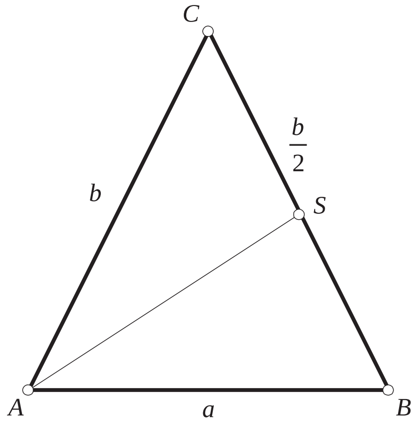
$a=21, b=220$, $c=221$; $\qquad a=21, b=72, c=75$;

$a=21, b=28$, $c=35$; $\qquad a=21$, $b=20$, $c=29$.

11. Тежишната линија која што е повлечена на едниот крак на рамнокракиот триаголник го дели неговиот периметар на два дела од $15\ cm$ и $12\ cm$.

Одреди ги страните на триаголникот.

Решение. Нека основата и кракот на триаголникот ги означиме со a и b и нека AS е тежишната линија на кракот BC (види цртеж). Од условите на задачата ги имаме следните две можности:



$$(i)\ \begin{cases} b+\frac{b}{2}=15 \\ a+\frac{b}{2}=12 \end{cases}, \text{ од каде што } \begin{cases} b=10\ cm, \\ a=7\ cm. \end{cases}$$

$$(ii)\ \begin{cases} b+\frac{b}{2}=12 \\ a+\frac{b}{2}=15 \end{cases}, \text{ од каде што } \begin{cases} b=8\ cm \\ a=11\ cm. \end{cases}$$

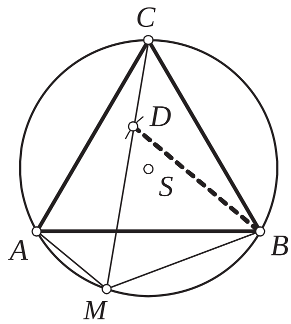
Следствено, постојат два триаголника што го задоволуваат условот на задачата. Нивните страни се:

$7\ cm,\ 10\ cm,\ 10\ cm$ и $11\ cm,\ 8\ cm,\ 8\ cm$.

12. Околу рамностраниот триаголник ABC опишана е кружница. Докажи дека за секоја точка M од лакот AB, на кој не припаѓа точката C, важи

$$\overline{MA}+\overline{MB}=\overline{MC}.$$

Решение. Нека D е точка од отсечката CM таква што $\overline{MB}=\overline{BD}$. Натаму $\measuredangle MAB=\measuredangle BCD$ (периферни агли над ист лак). Исто така $\measuredangle DMB=\measuredangle BAC=60^\circ$, па триаголникот MBD е рамностран. Според тоа $\measuredangle CDB=120^\circ$ и $\measuredangle AMB=120^\circ$ (бидејќи $\measuredangle AMC=\measuredangle ABC=60^\circ$). Уште важи и $\overline{AB}=\overline{BC}$. Според тоа триаголниците AMB и CDB се складни, па $\overline{AM}=\overline{CD}$. Сега имаме



$$\overline{MC}=\overline{MD}+\overline{DC}=\overline{MB}+\overline{MA},$$

што и требаше да се докаже.

13. Низ центарот O на впишаната кружница на триаголникот ABC се повлечени бисектрисата CD и отсечката $MN \parallel AB$, при што $M \in AC$, $N \in BC$. Најди ја должината на отсечката AD, ако: $\overline{AB}=15\ cm$, $\overline{AM}=4\ cm$, $\overline{BN}=6\ cm$.

Решение. Од $MN \parallel AB$ следува:

$$\overline{AC}:\overline{BC}=\overline{AM}:\overline{BN}=4:6,$$

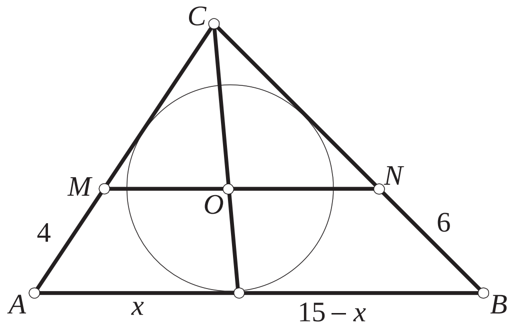
а од својството на бисектрисата:

$$\overline{AD}:\overline{DB}=\overline{AC}:\overline{BC}=2:3$$

од каде што наоѓаме:

$$\overline{AD}:(\overline{AD}+\overline{DB})=2:(2+3)$$

$\overline{AD}:15=2:5$, т.е. $\overline{AD}=6cm$.



14. На страната AB на $\triangle ABC$ е избрана точка D, таква што: $\overline{AD}=7cm$, $\overline{BD}=\ 9cm$ и $\measuredangle BDC=\gamma$. Најди го односот $\overline{AC}:\overline{CD}$!

Решение. Триаголниците ABC и CBD се слични, бидејќи $\measuredangle ABC = \measuredangle CBD = \beta$ и $\measuredangle BCA = \measuredangle BDC = \gamma$ (види цртеж), па имаме

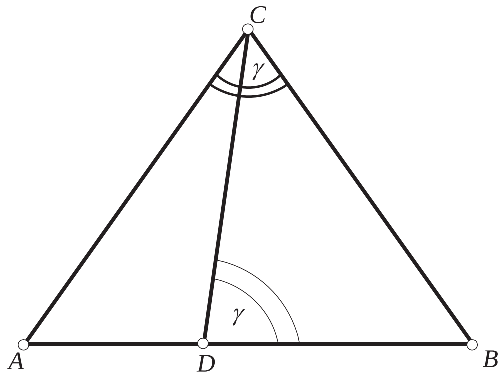
$$\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{CB} : \overline{BD}$$

$$16 : \overline{BC} = \overline{CB} : 9$$

$$\overline{BC}^2 = 144,$$

т.е. $\overline{BC} = 12\ cm$. Тогаш

$$\overline{AC} : \overline{CD} = \overline{AB} : \overline{CB} = 16 : 12 = 4 : 3$$



15. Во триаголникот ABC важи $\beta = \gamma = 40^\circ$. Ако BD е симетрала на аголот β, тогаш $\overline{BD} + \overline{DA} = \overline{BC}$. Докажи!

Решение. *Прв начин.* Очигледно $\overline{BC} > \overline{BD}$ (цртеж 1). Нека $\overline{BE} = \overline{BD}$, тогаш

$$\measuredangle BDE = \measuredangle BED = 80^\circ,$$

а оттука $\measuredangle EDC = 40^\circ = \measuredangle ECD$, т.е.

$$\overline{ED} = \overline{EC} \qquad (1)$$

Бидејќи

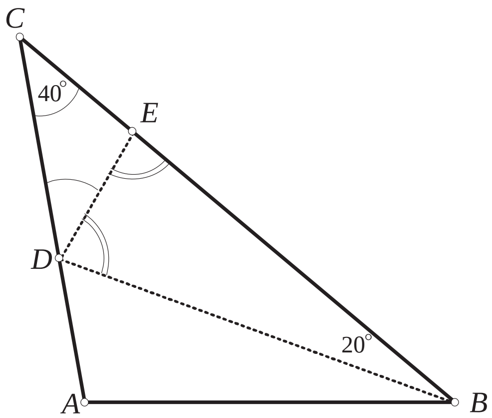
$$\measuredangle BAD + \measuredangle BED = 100^\circ + 80^\circ = 180^\circ,$$

следува дека четириаголникот $ABED$ е тетивен, а оттука

$$\overline{ED} = \overline{DA} \qquad (2)$$

како тетиви над еднакви агли од 20°. Од (1) и (2) следува дека $\overline{EC} = \overline{DA}$, па затоа

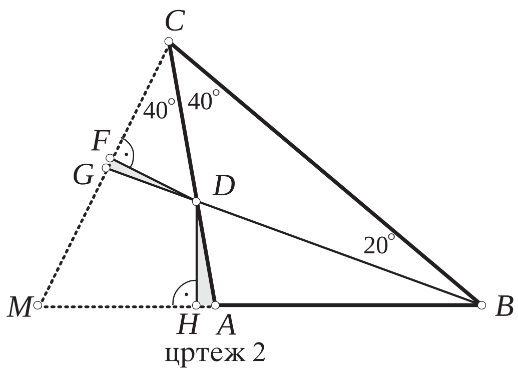
$$\overline{AD} + \overline{DA} = \overline{AE} + \overline{EC} = \overline{AC}.$$



цртеж 1

Втор начин. На продолжението на страната BA избираме точка M, таква што $\measuredangle MCA = 40^\circ = \measuredangle BCA$, тогаш CA е симетрала на $\measuredangle BCM$. Точката D е пресек на симетралите на аглите во ΔMBC (цртеж 2). Нека $DH \perp MB$ и $DF \perp MC$.

Правоаголните триаголници HAD и FGD се складни, бидејќи $\overline{DH} = \overline{DF}$ (D е точка од симетралата на $\measuredangle BMC$) и $\measuredangle DAH = \measuredangle DGF = 80^\circ$. Значи $\overline{DA} = \overline{DG}$, па имаме:



цртеж 2

$$\overline{BD} + \overline{DA} = \overline{BD} + \overline{DG} = \overline{BG} = \overline{BC},$$

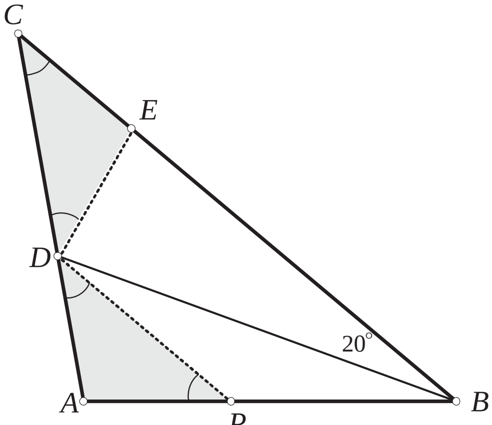
бидејќи $\measuredangle BGC = 80^\circ = \measuredangle BCG$.

Трет начин. Низ D повлекуваме права паралелна со страната BC и на страната BC нанесуваме отсечка BE еднаква на отсечката BD (цртеж 3).

Триаголниците CDE и PDA се складни бидејќи соодветните агли им се по 40°, 40° и 100° и уште $\overline{DC} = \overline{DP}$, бидејќи: $\overline{BP} = \overline{DP}$ (краци во рамнокрак триаголник) и $\overline{BP} = \overline{CD}$, (како краци во рамнокрак трапез).

Од складноста на овие триаголници следува $\overline{EC} = \overline{AD}$, т.е.

$$\overline{BD} + \overline{DA} = \overline{BE} + \overline{EC} = \overline{BC}.$$



цртеж 3

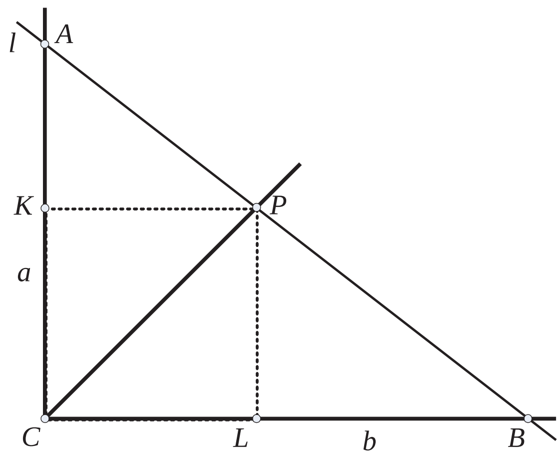
16. На симетралата на прав агол е избрана точка P. Низ неа повлекуваме права l која на краците на аголот отсекува отсечки со должини a и b. Докажи дека вредноста на изразот $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ не зависи од изборот на правата l.

Решение. Нека C е темето на правиот агол, а пресекот на правата l со краците на аголот се A и B. Нека $a = \overline{AC}$ и $b = \overline{BC}$. Од точката P повлекуваме нормали PK и PL на страните AC и BC соодветно. Тогаш триаголниците $\triangle AKP$ и $\triangle PBL$ се слични и затоа

$$\frac{\overline{AK}}{\overline{KP}} = \frac{\overline{PL}}{\overline{LB}}, \text{ т.е. } \frac{a-h}{h} = \frac{h}{b-h},$$

каде $h = \overline{PK} = \overline{PL}$. Од $\frac{a-h}{h} = \frac{h}{b-h}$, добиваме $(a-h)(b-h) = h^2$, т.е.

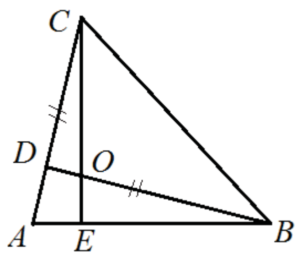
$$ab = ah + bh.$$



Ако последното равенство го поделиме со abh, добиваме $\frac{1}{h} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$. Бидејќи h е број кој не зависи од изборот на правата l, заклучуваме дека вредноста на изразот $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ не зависи од изборот на правата l.

17. Висините на остроаголниот триаголник ABC се сечат во точката O, при што $\overline{OC} = \overline{AB}$. Определи го $\measuredangle ACB$?

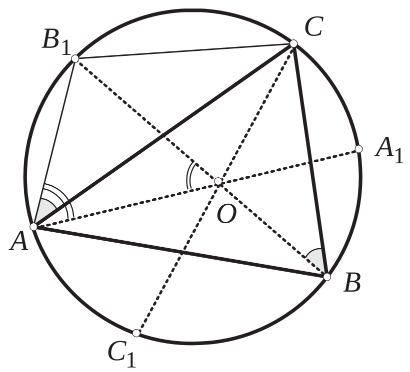
Решение. Нека подножјето на висината повлечена од B ја означиме со D, а на висината повлечена од C со E. Тогаш триаголникот ABD е складен со триаголникот OCD (правоаголни триаголници, $\overline{OC} = \overline{AB}$ и $\measuredangle ABD = \measuredangle ACE$ како агли со нормални краци). Од овде следува $\overline{BD} = \overline{CD}$, па триаголникот BCD е рамнокрак правоаголен. Конечно, $\measuredangle ACB = \measuredangle DCB = \measuredangle CBD = 45^\circ$.



18. Околу триаголникот ABC е опишана кружница k . Нека A_1, B_1, C_1 се средини на лаците BC, CA, AB соодветно, што не ги содржат темињата на триаголникот.

Докажи дека кружниците $k_1(A_1, \overline{A_1B})$, $k_2(B_1, \overline{B_1C})$, $k_3(C_1, \overline{C_1A})$ минуваат низ иста точка.

Решение. Ќе докажеме дека центарот O на впишаната кружница во $\triangle ABC$ е заедничата точка на кружниците k_1, k_2, k_3 (види цртеж).



Очигледно, точките A_1, B_1, C_1 лежат на бисектрисите AO, BO, CO, соодветно, тогаш

$$\measuredangle B_1AO = \measuredangle B_1AC + \frac{\alpha}{2} = \measuredangle B_1BC + \frac{\alpha}{2} = \frac{\beta}{2} + \frac{\alpha}{2}.$$

Понатаму, $\measuredangle AOB_1 = \frac{\beta}{2} + \frac{\alpha}{2}$, како надворешен агол за ΔABO .

Значи $\measuredangle B_1AO = \measuredangle AOB_1$, т.е. $\overline{B_1A} = \overline{B_1O}$. Но, $\overline{B_1A} = \overline{B_1C}$ (B_1 е средина на лакот $\overset{\frown}{AC}$) па имаме:

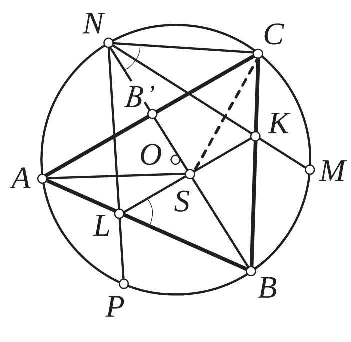
$$\overline{B_1A} = \overline{B_1O} = \overline{B_1C}, \text{ т.е. } O \in k_2(B_1, \overline{B_1C})$$

Аналогно докажуваме дека $O \in k_1$ и $O \in k_2$.

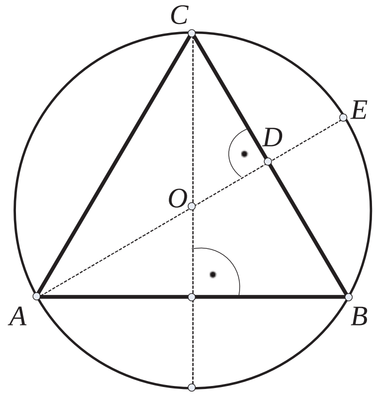
19. Околу триаголникот ABC е опишана кружница. Точките M , N и P се средини на лаците BC, CA и AB, соодветно (точката M е од онаа страна од која не се наоѓа A и така соодветно за сите). Тетивата MN ја сече страната BC во точката K , а тетивата NP ја сече страната AB во точката L . Докажи дека правата KL е паралелна со AC и дека центарот на впишаната кружница во триаголникот ABC припаѓа на KL .

Решение. NM е симетрала на аголот $\measuredangle BNC$, па $\overline{BK} : \overline{KC} = \overline{BN} : \overline{NC}$. Слично се добива дека $\overline{BL} : \overline{LA} = \overline{BN} : \overline{NA}$. Од тоа што $\overline{NC} = \overline{NA}$ се добива дека $\overline{BK} : \overline{KC} = \overline{BL} : \overline{LA}$, што значи дека $KL \parallel AC$.

Нека S е центар на впишаната кружница во триаголникот ABC , а $\{B'\} = BN \cap AC$. Правата CS е симетрала на аголот $\measuredangle BCB'$ од каде следува дека $\overline{BS} : \overline{SB'} = \overline{BC} : \overline{CB'}$. Триаголниците BCB' и BNA се слични ($\measuredangle ABN = \measuredangle NBC$, $\measuredangle ANB = \measuredangle ACB$), па $\overline{BC} : \overline{CB'} = \overline{BN} : \overline{NA}$. Сега имаме $\overline{BS} : \overline{SB'} = \overline{BL} : \overline{LA}$, што значи дека $LS \parallel AB'$. Според тоа точката S лежи на правата KL , притоа S мора да лежи меѓу точките K и L затоа што центарот на впишаната кружница секогаш лежи во внатрешноста на триаголникот.



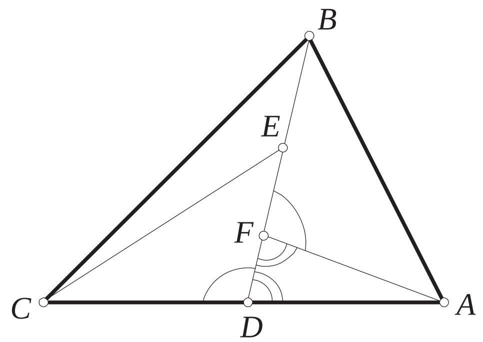
20. Докажи дека точките кои што се симетрични на ортоцентарот на триаголникот во однос на страните на триаголникот лежат на кружницата опишана околу триаголникот.



Решение. Доволно е да докажеме дека ова својство важи за една точка. Нека е даден $\triangle ABC$ околу кој е опишана кружницата. Имаме $\measuredangle ABC = \measuredangle DEC$ (како периферииски агли над ист кружен лак) и $\measuredangle COD = \measuredangle ABC$ (како агли со заемно нормални краци). Добиваме дека триаголниците $\triangle ODC$ и $\triangle EDC$ се складни, па $\overline{OD} = \overline{DE}$. Според тоа, E е симетрична точка на O во однос на страната BC.

21. Во триаголникот ABC е повлечена тежишната линија BD. Точките E и F ја делат тежишната линија BD на три еднакви дела $\overline{BE} = \overline{EF} = \overline{FD}$. Ако $\overline{AB} = 1$ и $\overline{AF} = \overline{AD}$, определи ја должината на отсечката CE.

Решение. Бидејќи $\overline{AF} = \overline{AD}$, триаголникот DAF е рамнокрак, па според тоа $\measuredangle ADF = \measuredangle AFD$. Заради тоа, јасно е дека $\measuredangle BFA = \measuredangle CDE$. Отсечката BD е тежишна линија, па затоа $\overline{CD} = \overline{AF}$, а од условот на задачата $\overline{BF} = \overline{DE}$. Сега од признакот CAC, следува дека триаголниците CDE и AFB се складни, па според тоа $\overline{CE} = \overline{AB} = 1$.

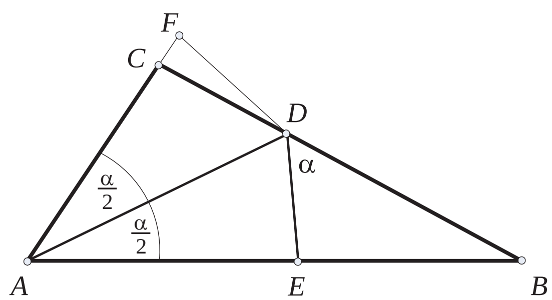


22. Во $\triangle ABC$ симетралата на аголот во темето A ја сече страната BC во точката D. Нека E е точка од правата AB така што $\measuredangle BDE = \measuredangle BAC$. Докажи дека $\overline{DC} = \overline{DE}$.

Решение. Нека F е точка на страната AC, така што $\overline{AF} = \overline{AE}$ (види цртеж). Тогаш $\overline{FD} = \overline{DE}$. Бидејќи $\measuredangle BDE = \alpha$, следува дека $\measuredangle BED = \alpha = \measuredangle BCA$. Од друга страна имаме $\measuredangle CFD = \measuredangle BED$, па затоа

$$\measuredangle FCD = \measuredangle BCA = \measuredangle BED = \measuredangle CFD,$$

т.е. $\triangle FCD$ е рамнокрак со основа FC. Конечно, $\overline{CD} = \overline{FD} = \overline{DE}$.



23. Нека ABC е остроаголен триаголник. Кружницата k над дијаметар AB, ги сече страните AC и BC во точките M и N. Тангентите на кружницата k во точките M и N се сечат во точка P. Ако $\overline{CP} = \overline{MN}$, одреди го $\measuredangle ACB$.

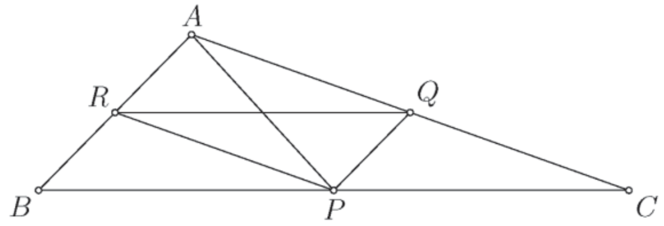
Решение. Нека

$$\measuredangle ACB = \gamma;\ \measuredangle MNP = \measuredangle NMP = \measuredangle NAC = 90^\circ - \gamma,\ \measuredangle MPN = 180^\circ - 2(90^\circ - \gamma) = 2\gamma.$$

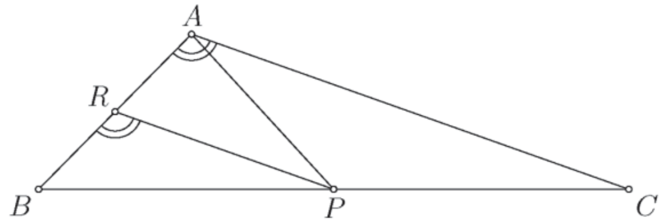
Следува дека P е центар на опишана кружница на триаголникот MNC, па затоа $\overline{MP}=\overline{NP}=\overline{CP}=\overline{MN}$, од каде следува $2\gamma=\measuredangle MPN=60^\circ$, т.е. $\gamma=30^\circ$.

24. Во $\triangle ABC$ една средна линија има поголема должина од една тежишна линија. Докажи, дека $\triangle ABC$ е тапоаголен.

Решение. Нека во $\triangle ABC$ точките P,Q,R се средините на страните BC,CA,AB соодветно. Можни се два случаја во зависност од тоа дали средната линија и тежишната линија се придружени на иста или различни страни на триаголникот.



Прв случај. Нека претпоставиме дека $\overline{RQ}>\overline{AP}$. Отсечките RP и PQ се средни линии на $\triangle ABC$, па затоа $ARPQ$ е паралелограм. RQ е подлга дијагонала на паралелограмот $ARPQ$ па затоа аголот наспроти неа е тап, т.е. $\measuredangle BAC$ е тап агол.

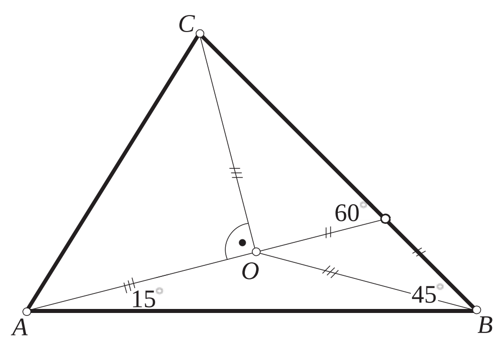


Втор случај. Нека претпоставиме дека $\overline{RP}>\overline{AP}$. Бидејќи AP не е најдолга страна на триаголникот ARP заклучуваме дека $\measuredangle ARP$ е остар агол. Затоа $\measuredangle BRP$ е тап агол. Но, $PR \parallel AC$, па затоа $\measuredangle BAC=\measuredangle BRP$, што значи дека $\measuredangle BAC$ е тап агол.

25. Нека D е точка на страната BC од $\triangle ABC$, така што $2\cdot\overline{BD}=\overline{DC}$. Определи ги аглите во $\triangle ABC$, ако $\measuredangle ABC=45^\circ$ и $\measuredangle ADC=60^\circ$.

Решение. Нека O е подножната точка на нормалата од темето C на отсечката AD (види цртеж). Бидејќи во правоаголниот $\triangle COD$, $\measuredangle OCD=30^\circ$, следува $\overline{OD}=\frac{1}{2}\overline{DC}$. Но, по услов на задачата $\overline{BD}=\frac{1}{2}\overline{DC}$. Значи, $\overline{OD}=\overline{BD}$, т.е. $\triangle OBD$ е рамнокрак со агли при основата $\measuredangle BOD=\measuredangle DBO=30^\circ$. Од $\measuredangle OCD=30^\circ=\measuredangle OBD$ заклучуваме дека триаголникот BCO е рамнокрак, т.е.

$$\overline{OB}=\overline{OC}. \qquad (1)$$



Бидејќи

$\measuredangle BAD=15^\circ$ и $\measuredangle ABD=45^\circ-30^\circ=15^\circ$

следува дека и триаголникот ABO е рамнокрак, т.е.

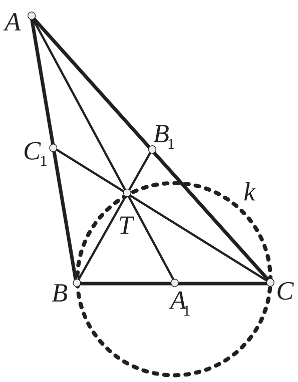
$$\overline{OA}=\overline{OB} \qquad (2)$$

Од (1) и (2) следува дека $\overline{OA}=\overline{OC}$, т.е. дека правоаголниот триаголник AOC е рамнокрак, т.е. $\measuredangle OAC=\measuredangle OCA=45^\circ$.

Сега е јасно дека $\measuredangle A=15^\circ+45^\circ=60^\circ$ и $\measuredangle C=30^\circ+45^\circ=75^\circ$.

26. Во триаголникот ABC должината на едната тежишна линија е подолга за половина должина од должината на страната кон која е повлечена. Определи го аголот меѓу другите две тежишни линии.

Решение. Нека ABC е триаголник во кој тежишните линии AA_1, BB_1 и CC_1 се сечат во точката T при што $\overline{AA_1} = \frac{3}{2}\overline{BC}$.

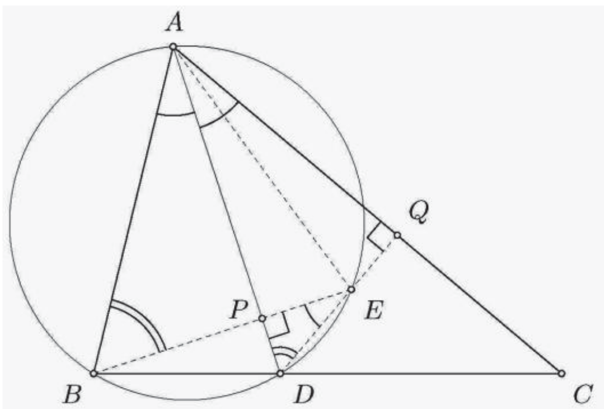


Од својството на тежишни линии во еден триаголник, и од условот на задачата имаме $\overline{TA_1} = \frac{1}{3}\overline{AA_1} = \frac{1}{2}\overline{BC}$.

Значи, во триаголникот CTB, должината на тежишната линија TA_1 е половина од должината на страната кон која е повлечена. Значи, точките B,T и C се еднакво оддалечени од точката A_1. Според тоа тие припаѓаат на кружница со центар во A_1 и радиус $\frac{1}{2}\overline{BC}$. Значи $\measuredangle BTC = 90^\circ$, односно тежишните линии BB_1 и CC_1 се сечат под прав агол.

27. Даден е остроаголен $\triangle ABC$ таков што $\overline{AB} < \overline{AC}$. Точката D припаѓа на страната BC. Нормалата во точката B повлечена кон правата AD ја сече опишаната кружница околу $\triangle ABD$ во точките B и E. Ако правите DE и AC се заемно нормални, докажи дека AD е симетрала на $\measuredangle BAC$.

Решение. Нека P е прескот на правите AD и BE, а Q е пресекот на правите AC и DE. Точката E припаѓа на опишаната кружница околу $\triangle ABD$, па затоа $\measuredangle BAD = \measuredangle BED$, како агли над иста тетива AD. Понатаму, $\measuredangle DPE = 90^\circ$ па затоа



$$\measuredangle BED = \measuredangle PED = 90^\circ - \measuredangle EDP$$
$$= 90^\circ - \measuredangle QDA.$$

Бидејќи $\measuredangle DQA = 90^\circ$, добиваме

$$\measuredangle DAC = \measuredangle DAQ = 90^\circ - \measuredangle QDA .$$

Значи,

$$\measuredangle BED = 90^\circ - \measuredangle QDA = \measuredangle DAC .$$

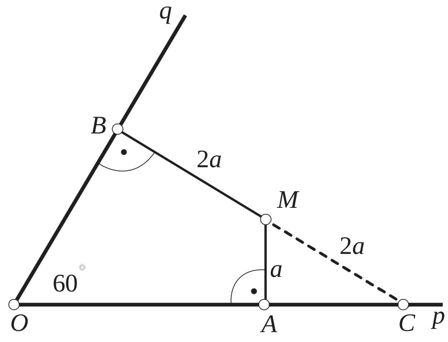
Конечно, $\measuredangle BAD = \measuredangle BED = \measuredangle DAC$, т.е. AD е симетрала на $\measuredangle BAC$.

28. Во внатрешноста на агол од 60° се наоѓа точка M, чии растојанија до краците на аголот се однесуваат како $1:2$. Да се најде односот на должините на отсечките од темето на аголот до подножните точки на нормалите, спуштени од точката M до краците на аголот.

Решение. Нека точката M е внатрешна за аголот $\measuredangle pOq = 60^\circ$, и нека A и B се подножните точки на нормалите спуштени од точката M на краците на аголот.

Од условот на задачата, $\overline{MA}=a$ и нека $\overline{MB}=2a$. Нека C е пресечната точка на кракот OA и правата BM (види цртеж). Очигледно е $\measuredangle C=30^\circ$, па $\overline{MC}=2a$. Понатаму, од $\triangle ACM$ имаме $\overline{AC}=\sqrt{4a^2-a^2}=\frac{3a}{\sqrt{3}}$.

Од сличноста на триаголниците OBC и MAC имаме: $\overline{OB}:\overline{BC}=\overline{MA}:\overline{AC}$, од каде $\overline{OB}=\frac{4a}{\sqrt{3}}$.



Од $\triangle OBC$ имаме $\overline{OC}=2\overline{OB}$ или $\overline{OC}=\frac{8a}{\sqrt{3}}$.

Понатаму,

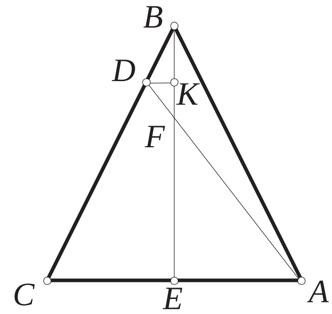
$$\overline{OA}=\overline{OC}-\overline{AC}=\frac{8a}{\sqrt{3}}-\frac{3a}{\sqrt{3}}=\frac{5a}{\sqrt{3}}.$$

Конечно, бараниот однос е $\overline{OA}:\overline{OB}=5:4$.

29. На страната BC од рамнокракиот триаголник ABC ($\overline{AB}=\overline{BC}$) е избрана точка D така што $\overline{BD}:\overline{DC}=1:4$. Во кој однос правата AD ја дели висината BE сметајќи од темето B.

Решение. Пресекот на BE и AD ќе го означиме со F. Нека $K\in BE$ е таква што $DK\,||\,CA$. Според тоа, $\Delta BCD\sim\Delta BDK$, и

$$\frac{\overline{BK}}{\overline{BE}}=\frac{\overline{KD}}{\overline{CE}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{BC}}=\frac{1}{5},$$



односно $\overline{BK}=\frac{1}{5}\overline{BE}$ и $\overline{KD}=\frac{1}{5}\overline{CE}$. Бидејќи триаголниците DKF и AEF имаат еднакви агли тие се слични, па според тоа $\frac{\overline{KD}}{\overline{AE}}=\frac{\overline{KF}}{\overline{FE}}=\frac{1}{5}$. Ако воведеме ознака $\overline{KF}=x$, тогаш $\overline{FE}=5x$, па од равенството

$$\overline{BK}+\overline{KF}+\overline{FE}=\overline{BE}$$

Добиваме $\overline{BK}=\frac{3}{2}x$. Бидејќи $\overline{BF}=\overline{BK}+\overline{KF}=\frac{3}{2}x+x=\frac{5}{2}x$, од равенството $\overline{FE}=5x$ добиваме $\overline{BF}:\overline{FC}=\frac{5}{2}x:5x=1:2$.

30. Даден е агол од 60° со теме O и точка во неговата рамнина. Нека A и B се ортогонални проекции на M врз краците на тој агол. Ако $\overline{MA}:\overline{MB}=1:3$, колку е $\overline{OA}:\overline{OB}$?

(Разгледај го и општиот случај $\overline{MA}:\overline{MB}=a:b$).

Решение. Да го разгледаме општиот случај. Нека е даден агол $pOq=60^\circ$, и нека p' и q' се нормални прави на p и q соодветно, низ темето O. Ќе разгледаме четири можности, кога точката M припаѓа на некоја од областите I, II, III, IV, прикажани како на цртеж 1, додека случаите кога M лежи на некоја од правите p, q, p', q' -се тривијални, па затоа не ги разгледуваме посебно.

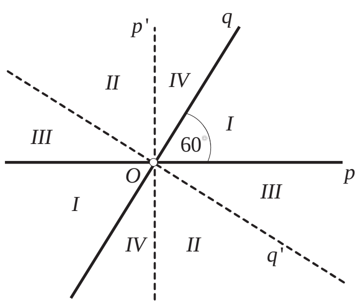
1) Нека $M \in \mathrm{I}$ и нека $C = OA \cap BM$. Очигледно, $\measuredangle C = 30^\circ$ (види цртеж 2), па имаме: $\overline{MC} = 2a$, $\overline{AC} = a\sqrt{3}$ (види го решението на претходната задача!). Понатаму, од правоаголниот триаголник OBC имаме дека $\overline{OB} = \overline{BC} \cdot \mathrm{ctg}30^\circ = \frac{2a+b}{\sqrt{3}}$, $\overline{OC} = 2\overline{OB} = \frac{2(2a+b)}{\sqrt{3}}$. Сега, $\overline{OA} = \overline{OC} - \overline{AC} = \frac{a+2b}{\sqrt{3}}$, па бараниот однос во тој случај е $\overline{OA} : \overline{OB} = (a+2b):(2a+b)$.

2) Случајот кога $M \in \mathrm{II}$ го препуштаме на читателот, а резултатот на овој случај е $\overline{OA} : \overline{OB} = (2b-a):(2a-b)$.

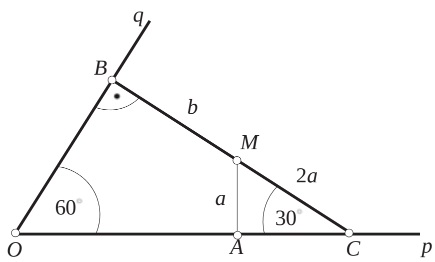
3) Нека, сега, $M \in \mathrm{III}$ и нека $C = OB \cap AM$ (види цртеж 3). Со аналогно разгледување имаме по ред:

$$\overline{BC} = b\sqrt{3},\ \overline{MC} = 2b,\ \overline{CA} = a - 2b;$$
$$\overline{OA} = \frac{a-2b}{\sqrt{3}},\ \overline{OC} = \frac{2a-b}{\sqrt{3}},\ \overline{OB} = \overline{OC} + \overline{CB} = \frac{2a-b}{\sqrt{3}},$$

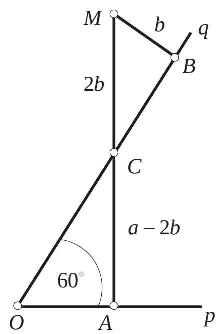
па бараниот однос во овој случај е: $\overline{OA} : \overline{OB} = (2b-a):(b-2a)$.



цртеж 1



цртеж 2



цртеж 3

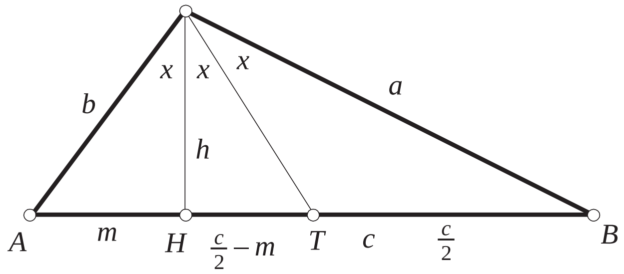
4) Четвртиот случај, кога $M \in \mathrm{IV}$, се разгледува аналогно на претходниот, па за бараниот однос добиваме $\overline{OA} : \overline{OB} = (2b-a):(b-2a)$.

Односот од условот на задачата $\overline{MA} : \overline{MB} = 1:3$ е можен само во првиот и четвртиот случај; тогаш за бараниот однос добиваме: $\overline{OA} : \overline{OB} = 7:5$, односно $\overline{OA} : \overline{OB} = 5:1$.

31. Да се определат аглите на триаголникот, кај кој висината и тежишната линија, повлечени од исто теме, го делат аголот при тоа теме на три еднакви делови.

Решение. Очигледно е дека триаголниците AHC и THC се складни (АСА) (види цртеж). Од тоа следува дека

$$\overline{AH} = \overline{HT} = \frac{1}{2}\overline{TB} = \frac{1}{4}\overline{AB}.$$



Понатаму, за ΔBCH, отсечката CT е симетрала на аголот кај темето C, па важи

$$\overline{CH} : \overline{CB} = \overline{HT} : \overline{TB},\ \text{т.е.}\ \overline{CH} = \frac{1}{2}\overline{CB}.$$

Бидејќи ΔBCH е правоаголен, следува дека $\measuredangle B = 30^\circ$, па затоа $\measuredangle C = 90^\circ$ и $\measuredangle A = 60^\circ$.

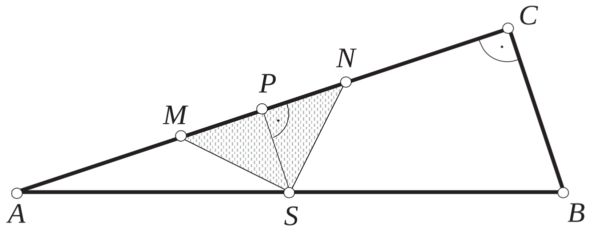
32. Во правоаголен триаголник едната катета е три пати поголема од другата и е разделена на три еднакви делови, а точките на делење M и N се сврзани со средината S на хипотенузата. Докажи дека $\measuredangle MSN = 90^\circ$.

Решение. Прв начин. Да ставиме $\overline{BC} = a$, тогаш $\overline{AC} = 3a$ и

$$\overline{AM} = \overline{MN} = \overline{NC} = a$$

(види цртеж). Нека $SP \| BC$, тогаш SP е средна линија во триаголникот ABC и притоа

$$\overline{SP} = \tfrac{1}{2}\overline{BC} = \tfrac{1}{2}a. \qquad (1)$$



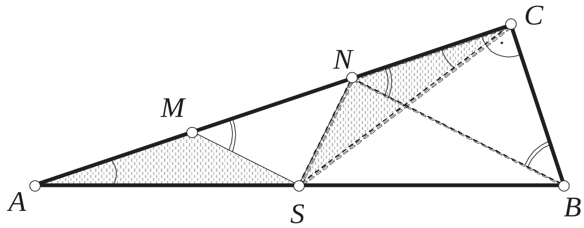
Бидејќи P е средина на AC, односно на MN, следува

$$\overline{SP} = \overline{PN} = \tfrac{1}{2}a. \qquad (2)$$

Од (1) и (2) заклучуваме дека триаголниците MSP и NSP се рамнокраки правоаголни, па $\measuredangle MSP = \measuredangle NSP = 45^\circ$. Тогаш $\measuredangle MSN = 90^\circ$.

Втор начин. Според условот на задачата

$$\overline{AM} = \overline{MN} = \overline{NC} = \overline{CB}.$$



Треба да докажеме дека $\measuredangle MSN = 90^\circ$. За таа цел доволно е да докажеме дека ΔMNS е рамнокрак, т.е. $\overline{MS} = \overline{NS}$ и дека $\measuredangle SMN = 45^\circ$.

Ги повлекуваме отсечките CS и BN (види цртеж). Триаголниците ASM и CSN се складни, според САС, бидејќи: $\overline{AS} = \overline{CS}$, $\overline{AM} = \overline{CN}$ и $\measuredangle SAM = \measuredangle SCN$ - како агли при основата на рамнокракиот $\triangle ACS$. Оттука следува $\overline{MS} = \overline{NS}$. Понатаму, во триаголникот ABN, отсечката SM е средна линија, т.е. $MS \| NB$, па следува дека $\measuredangle SMN = \measuredangle BNC = 45^\circ$, бидејќи $\triangle BNC$ е рамнокрак правоаголен триаголник.

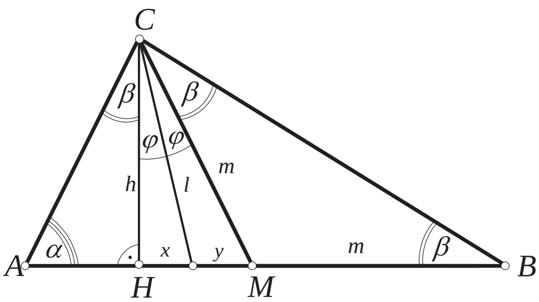
Значи, триаголникот MNS е рамнокрак, $\overline{MS} = \overline{NS}$, со агол при основата MN од 45°, па следува дека аголот кај темето S е прав, т.е. $\measuredangle MSN = 90^\circ$

33. Даден е правоаголен триаголник ABC таков што за катетите AC и BC важи $\overline{AC} < \overline{BC}$. Должините на тежишната линија и висината повлеченеи кон хипотенузата во овој триаголник се m и h, соодветно. Определи ја должината на симетралата на правиот агол.

Решение. Бидејќи $\triangle ABC$ е правоаголен, следува дека $\overline{CM} = m = \overline{BM}$, т.е. $\triangle BMC$ е рамнокрак (цртеж 1), па затоа $\measuredangle BCM = \beta = \measuredangle ABC$. Од правоаголниот

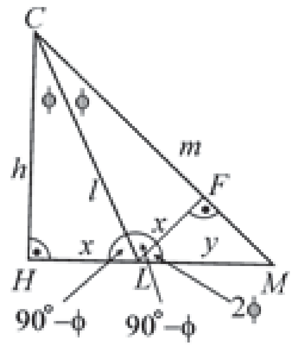
$\triangle AHC$ добиваме $\measuredangle ACH = \beta$. Од $\overline{AC} < \overline{BC}$ следува $\beta < 45^\circ$, што значи дека симетралата CL на $\measuredangle HCM$ е истовремено симетрала на $\measuredangle ACB$. Според тоа, важи

$$\measuredangle HCL = \measuredangle MCL = \varphi = 45^\circ - \beta.$$



цртеж 1

Нека $x = \overline{HL}$ и $y = \overline{LM}$ и нека F е подножјето на нормалата повлечена од L на CM (цртеж десно). Од $\triangle CHL \cong \triangle CFL$ следува $\overline{LF} = x$. Притоа, $\triangle HMC \sim \triangle FML$, па затоа $m : h = y : x$, т.е. $y = \frac{mx}{h}$. Понатаму, од правоаголниот $\triangle HCM$ наоѓаме:



$$h^2 + (x+y)^2 = m^2; \; h^2 + (x + \tfrac{mx}{h})^2 = m^2$$

т.е.

$$x^2 = h^2 \cdot \frac{m-h}{m+h}.$$

Конечно, од правоаголниот $\triangle HLC$ добиваме:

$$l^2 = h^2 + x^2 = h^2 + h^2 \frac{m-h}{m+h} = h^2 \frac{2m}{m+h} \text{ т.е. } l = h\sqrt{\frac{2m}{m+h}}.$$

Втор начин. Имаме $P_{ABC} = \frac{ab}{2} = \frac{ch}{2} = \frac{2mh}{2} = mh$.

Значи,

$$ab = 2mh. \tag{1}$$

Нека $LN \perp AC$ (цртеж 2), тогаш $\triangle CLN$ е рамнокрак правоаголен, бидејќи $\measuredangle NCL = 45^\circ$, па следува

$$\overline{LN} = \overline{NC} = \frac{l}{\sqrt{2}}. \tag{2}$$

Очигледно $\triangle ABC \sim \triangle ALN$ ($LN \parallel BC$), па следува:

$$\overline{BC} : \overline{LN} = \overline{AB} : \overline{AL} = (\overline{AL} + \overline{LB}) : \overline{AL} = 1 + \overline{LB} : \overline{AL}$$

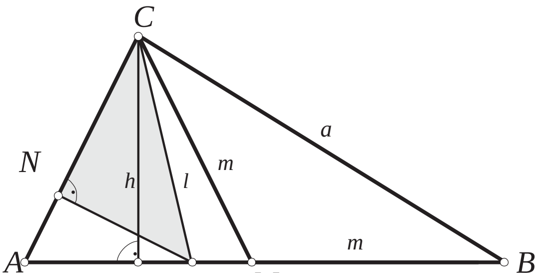
Од својството на бисектрисата следува $\overline{LB} : \overline{AL} = a : b$, па добиваме:

$$\overline{BC} : \overline{LN} = 1 + a : b$$

$$a : \frac{l}{\sqrt{2}} = 1 + \frac{a}{b} \quad \Rightarrow \quad l = \frac{ab}{a+b}\sqrt{2}$$

Да го изразиме $a+b$ преку m и h. Имаме:

$$a + b = \sqrt{(a+b)^2} = \sqrt{a^2 + 2ab + b^2}$$
$$= \sqrt{c^2 + 2ab} == \sqrt{4m^2 + 4mh}$$
$$= 2\sqrt{m(m+h)}.$$



цртеж 2

Конечно добиваме:

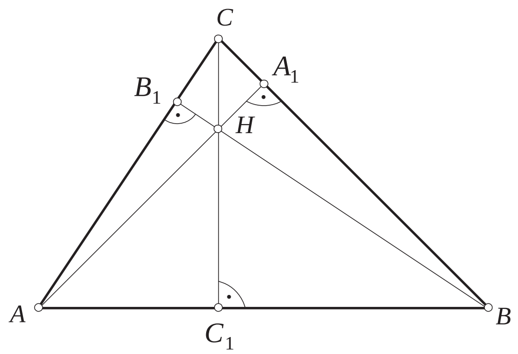
$$l = \frac{ab}{a+b}\sqrt{2} = \frac{2mh\sqrt{2}}{2\sqrt{m(m+h)}} = h\sqrt{\frac{2m}{m+h}}.$$

34. Даден е остроаголен $\triangle ABC$ со ортоцентар H . Докажи дека

$$\overline{AH}\cdot h_a+\overline{BH}\cdot h_b+\overline{CH}\cdot h_c=\tfrac{1}{2}(a^2+b^2+c^2).$$

Решение. Од сличноста на триаголниците AB_1H и AA_1C добиваме $\overline{AB_1}\cdot\overline{AC}=\overline{AH}\cdot\overline{AA_1}$ или

$$\overline{AB_1}\cdot b=\overline{AH}\cdot h_a. \qquad (1)$$



Од сличноста на триаголниците CB_1H и CC_1A следува

$$\overline{CB_1}\cdot b=\overline{CH}\cdot h_a \qquad (2)$$

Ако ги собереме (1) и (2) добиваме $b(\overline{AB_1}+\overline{CB_1})=\overline{AH}\cdot h_a+\overline{CH}\cdot h_c$ односно,

$$b^2=\overline{AH}\cdot h_a+\overline{CH}\cdot h_c \qquad (3)$$

На потополно ист начин добиваме

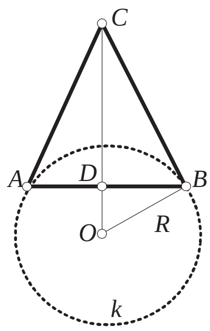
$$a^2=\overline{BH}\cdot h_b+\overline{CH}\cdot h_c \qquad (4)$$

$$c^2=\overline{AH}\cdot h_a+\overline{BH}\cdot h_b \qquad (5)$$

Ако ги собереме равенствата (3). (4) и (5) го добиваме бараното равенство.

35. Основата на рамнокрак триаголник е тетива на кружница k која ги допира краците на триаголникот. Определи го радиусот на кружницата, ако основата на триаголникот има должина a , а висната на триаголникот повлечена кон основата има должина h .

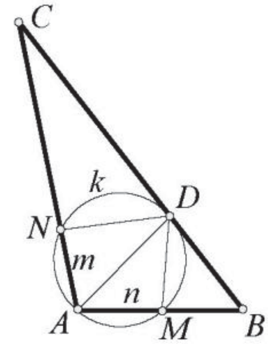
Решение. Нека ABC е рамнокрак триаголник со основа $\overline{AB}=a$ и висина повлечена кон основата $\overline{CD}=h$ (види цртеж). Нека кружницата k има центар O . Триаголниците ODB и CDB се слични, бидејќи имаат по еден прав агол и $\measuredangle BOD=\measuredangle CBD$ како агли со нормални краци . Според тоа $\overline{OD}:\overline{DB}=\overline{DB}:\overline{CD}$, од каде што добиваме $\overline{OD}:\frac{a}{2}=\frac{a}{2}:h$, од каде добиваме $\overline{OD}=\frac{1}{h}(\frac{a}{2})^2$. Од првоаголниот триаголник ODB имаме $R^2=\overline{OD}^2+\overline{DB}^2$, т.е. $R^2=\frac{1}{h^2}(\frac{a^2}{4})^2+\frac{a^2}{4}$.



Според тоа, $R=\frac{a}{4h}\sqrt{a^2+4h^2}$.

36. Од темето на тапиот агол $\measuredangle A$ во $\triangle ABC$ е повлечена висината AD . Кружницата k со дијаметар AD ги сече страните AB и AC во точките M и N , соодветно. Да се пресмета должината на страната AC ако $\overline{AB}=c$, $\overline{AM}=n$ и $\overline{AN}=m$.

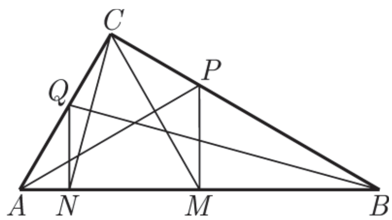
Решение. Отсечката AD е дијаметар на кружницата k , па според тоа триаголниците AMD и AND се правоаголни.



Од друга страна, од сличностите $\triangle AMD \sim \triangle ADB$ и $\triangle AND \sim \triangle ADC$, добиваме: $\frac{\overline{AD}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}}$, т.е. $\frac{\overline{AD}}{n} = \frac{c}{\overline{AD}}$ и $\frac{\overline{AD}}{\overline{AN}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}}$, т.е. $\frac{\overline{AD}}{m} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}}$.

Од равенствата $\overline{AD}^2 = nc$ и $\overline{AD}^2 = m\overline{AC}$, следува $nc = m\overline{AC}$, па затоа $\overline{AC} = \frac{nc}{m}$.

37. Даден е правоаголниот $\triangle ABC$ со прав агол во темето C. Симетралата на аголот во темето A ја сече страната BC во точката P, а симетралата на аголот во темето B ја сече AC во Q. Подножјата на кормалите повлечени од P и Q кон страната AB се M и N, соодветно. Определи го $\measuredangle MAC$.



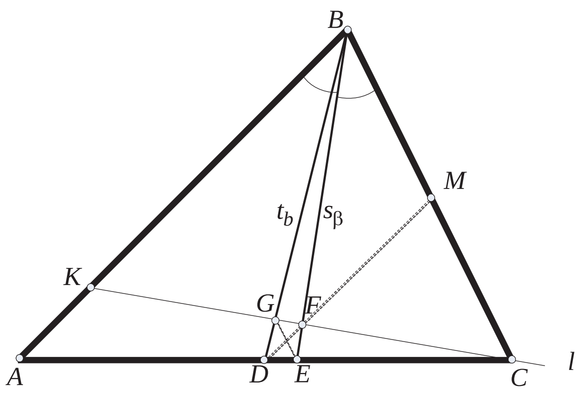
Решение. Од $\measuredangle AMP = \measuredangle ACP$, $\measuredangle MAP = \measuredangle CAP$ и AP е заедничка страна за $\triangle AMP$ и $\triangle ACP$ следува $\triangle AMP \cong \triangle ACP$, а оттука $\overline{MP} = \overline{CP}$. Значи $\triangle MCP$ е рамнокрак, од каде добиваме $\measuredangle MCP = \measuredangle CMP$. Слично, $\triangle BNQ \cong \triangle BCQ$, па следува $\overline{CQ} = \overline{NQ}$, т.е. $\triangle NCQ$ е рамнокрак и $\measuredangle QNC = \measuredangle QCN$. Од друга страна важи $\measuredangle CMP + \measuredangle MCP = \measuredangle MPB$ и $\measuredangle QNC + \measuredangle QCN = \measuredangle AQN$. Понатаму, $\measuredangle MPB = \measuredangle BAC$, (агли со нормални краци) и $\measuredangle AQN = \measuredangle ABC$ (агли со нормални краци). Од претходно изнесеното следува

$$\begin{aligned} 90^\circ &= \measuredangle BAC + \measuredangle ABC = \measuredangle MPB + \measuredangle AQN \\ &= \measuredangle CMP + \measuredangle MCP + \measuredangle QNC + \measuredangle QCN \\ &= 2\measuredangle MCP + 2\measuredangle QCN = 2(\measuredangle MCP + \measuredangle QCN) \\ &= 2(\measuredangle ACB - \measuredangle MCN) = 2(90^\circ - \measuredangle MCN) \\ &= 180^\circ - 2\measuredangle MCN. \end{aligned}$$

Конечно, $\measuredangle MAC = \measuredangle MCN = 45^\circ$.

38. Даден е триаголникот ABC, $(\overline{BC} < \overline{AB})$. Низ точката C е повлечена права l, нормална на симетралата BE на $\measuredangle B$. Правата l ја сече BE во точка F, а тежишната линија BD во точка G. Докажи дека отсечката DF ја преполовува отсечката EG.

Решение. Нека $CF \cap AB = K$ и $DF \cap BC = M$. Бидејќи $BF \perp KC$ и BF е симетрала на $\measuredangle KBC$ следува дека $\triangle KBC$ е рамнокрак, т.е. $\overline{BK} = \overline{BC}$ и F е средина на KC. Според тоа, DF е средна линија за $\triangle AKC$, односно $DF \parallel AK$, па затоа M е средина на BC.



Ќе докажеме дека $GE \parallel BC$. Доволно е да докажеме дека $\frac{\overline{BG}}{\overline{GD}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{ED}}$. Од $DF \parallel AK$ и $\overline{DF} = \frac{\overline{AK}}{2}$, и од сличноста на $\triangle BKG$ и $\triangle GDF$ имаме

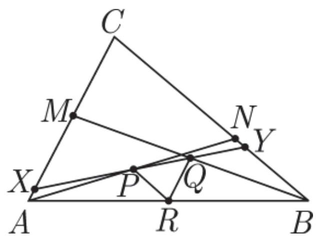
$$\frac{\overline{BG}}{\overline{GD}} = \frac{\overline{BK}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{BK}}{\frac{1}{2}\overline{AK}} = \frac{2\overline{BK}}{\overline{AK}}. \tag{1}$$

Понатаму, од сличноста на $\triangle ABE$ и $\triangle DEF$ имаме

$$\begin{aligned}\frac{\overline{CE}}{\overline{DE}} &= \frac{\overline{CD}-\overline{DE}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{DE}} - 1 = \frac{\overline{AD}}{\overline{DE}} - 1 = \frac{\overline{AE}-\overline{DE}}{\overline{DE}} - 1 = \frac{\overline{AE}}{\overline{DE}} - 2 = \frac{\overline{AB}}{\overline{DF}} - 2 \\ &= \frac{\overline{AK}+\overline{BK}}{\frac{\overline{AK}}{2}} - 2 = 2 + 2\frac{\overline{BK}}{\overline{AK}} - 2 = \frac{2\overline{BK}}{\overline{AK}}\end{aligned} \tag{2}$$

Од (1) и (2) добиваме $\frac{\overline{BG}}{\overline{GD}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{ED}}$, па следува $GE \parallel BC$, и бидејќи M е средина на BC, следува DF ја преполовува GE.

39. Точките M и N на страните AC и BC на триаголникот ABC се такви што $\overline{AM} = \overline{BN}$. Докажи дека правата која што минува низ средините на отсечките AN и BM е нормална на симетралата на $\measuredangle ACB$.

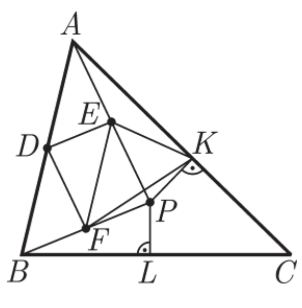


Решение. Нека средината на отсечката AN е P, средината на отсечката BM е Q и средината на страната AB е R. Со X ќе ја означиме пресечната точка на правата PQ со страната AC, а со Y ќе ја означиме пресечната точка на правата PQ со страната BC. Тогаш отсечката PR е средна линија во $\triangle ABN$, а RQ е средна линија во $\triangle ABM$. Затоа $\overline{RP} = \frac{1}{2}\overline{BN} = \frac{1}{2}\overline{AM} = \overline{RQ}$, односно $\triangle PRQ$ е рамнокрак и $\measuredangle QPR = \measuredangle PQR$. Исто така, CX и QR се паралелни прави па затоа $\measuredangle CXY = \measuredangle PQR$, односно CY и PR се паралелни прави па затоа $\measuredangle CYX = \measuredangle QPR$. Значи, $\measuredangle CXY = \measuredangle CYX$ односно $\triangle XCY$ е рамнокрак па симетралата на аголот $\measuredangle ACB$ е нормална на правата PQ.

40. Нека P е точка во внатрешноста на $\triangle ABC$ и нека се земени точки L и K на страните BC и AC, соодветно такви што

$$\measuredangle LBP = \measuredangle KAP \text{ и } \measuredangle PLB = \measuredangle PKA = 90^\circ.$$

Ако D е средина на страната AB докажи дека $\overline{DK} = \overline{DL}$.



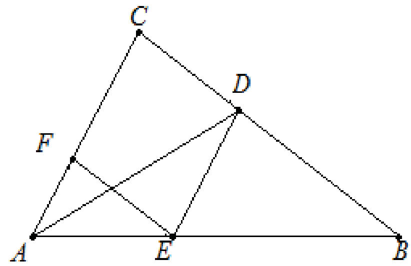
Решение. Нека E е средината на отсечката AP, а F е средината на отсечката BP. Тогаш DE и DF се средни линии во $\triangle BPA$ па $\overline{DE} = \frac{1}{2}\overline{BP}$, $\overline{DF} = \frac{1}{2}\overline{AP}$, $DE \parallel BP$ и $DF \parallel AP$. Триаголникот PBL е правоаголен, па затоа F е центар на опишаната кружница околу него, односно $\overline{FL} = \frac{1}{2}\overline{BP} = \overline{DE}$. Слично, $\overline{EK} = \frac{1}{2}\overline{AP} = \overline{DF}$.

Од паралелограмот $DFPE$ имаме дека $\measuredangle DFP = \measuredangle DEP$, а од триаголникот BLP следува $\measuredangle LFP = 2\measuredangle LBP = 2\measuredangle KAP = \measuredangle KEP$.

Значи $\measuredangle DEP + \measuredangle KEP = \measuredangle DFP + \measuredangle LFP$, односно $\measuredangle DEK = \measuredangle DFL$.

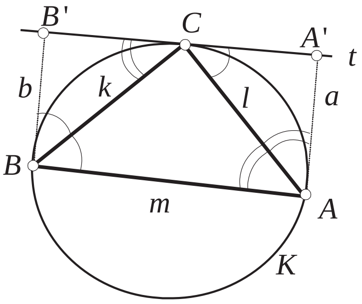
Од $\measuredangle DEK = \measuredangle DFL$, $\overline{DE} = \overline{LF}$ и $\overline{EK} = \overline{FD}$ следува дека триаголниците DEK и LFD се складни, од каде што добиваме $\overline{DK} = \overline{DL}$.

41. Во триаголникот ABC, симетралата на $\measuredangle BAC$ ја сече страната BC во точка D, правата низ D која што е паралелна со AC ја сече AB во точка E и правата низ E која што е паралелна со BC ја сече AC во точка F. Докажи дека $\overline{AE} = \overline{FC}$.



Решение. Од паралелноста на DE и AC следува дека $\measuredangle DAC = \measuredangle EDA$. Од тоа што AD е симетрала на аголот BAC, следува дека $\measuredangle DAC = \measuredangle DAE$ па затоа $\measuredangle EDA = \measuredangle DAE$. Оттука, триаголникот AED е рамнокрак и затоа $\overline{AE} = \overline{DE}$, а од паралелограмот $EDCF$ следува дека $\overline{DE} = \overline{FC}$. Затоа, $\overline{AE} = \overline{FC}$.

42. Околу правоаголен триаголник опишана е кружница, а во темето на правиот агол е повлечена тангента кон неа. Растојанијата на крајните точки од хипотенузата до тангентата се a и b. Пресметај ја должината на хипотенузата.



Решение. Нека ABC е дадениот триаголник и нека K е опишаната круница околу него (види цртеж). Нека t е тангента во темето на правиот агол, а A' и B' се проекциите на точките A и B врз тангентата t. Од условот на задачата имаме $\overline{AA'} = a$ и $\overline{BB'} = b$. Триаголниците $AA'C$, $CB'B$ и ACB се слични. Ако со k, l и m ги означиме должините на страните на триаголникот ABC, тогаш од претходно изнесеното следува $\frac{b}{k} = \frac{k}{m}$ и $\frac{a}{l} = \frac{l}{m}$, односно $k^2 = bm$ и $l^2 = am$. Бидејќи $k^2 + l^2 = m^2$, добиваме

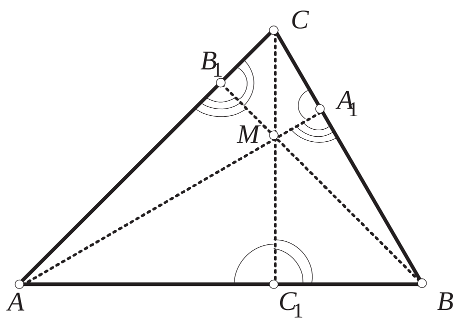
$$m^2 = am + bm = (a+b)m.$$

Значи, $m = a + b$, и не е тешко дополнително да се види дека должините на катетите на триаголникот се $k = \sqrt{b(a+b)}$ и $k = \sqrt{a(a+b)}$.

43. На страните BC, CA, AB од триаголникот ABC се избрани точки A_1, B_1, C_1, такви што AA_1, BB_1 и CC_1 се сечат во точката M. Ако

$$\overline{AM} \cdot \overline{MA_1} = \overline{BM} \cdot \overline{MB_1} = \overline{CM} \cdot \overline{MC_1},$$

докажи дека AA_1, BB_1 и CC_1 се висини во триаголникот ABC.



Решение. Од претпоставката

$$\overline{AM} \cdot \overline{MA_1} = \overline{BM} \cdot \overline{MB_1} = \overline{CM} \cdot \overline{MC_1},$$

ги добиваме сличностите $\triangle AMB_1 \sim \triangle BMA_1$, $\triangle BMC_1 \sim \triangle CMB_1$, $\triangle AMC_1 \sim \triangle CMA_1$. Освен тоа,

$$\measuredangle AC_1M + \measuredangle BC_1M = \measuredangle BA_1M + \measuredangle CA_1M = \measuredangle CB_1M + \measuredangle AB_1M = 180^\circ .$$

Од погорните парови на слични триаголници,добиваме

$$\measuredangle AB_1M = \measuredangle BA_1M , \qquad (1)$$

$$\measuredangle CB_1M = \measuredangle BC_1M , \qquad (2)$$

$$\measuredangle AC_1M = \measuredangle CA_1M \qquad (3)$$

Од равенството

$$\measuredangle BA_1M + \measuredangle CA_1M = \measuredangle CB_1M + \measuredangle AB_1M$$

и од равенството (1) добиваме $\measuredangle CA_1M = \measuredangle CB_1M$, од каде имаме $\measuredangle AC_1M = \measuredangle BC_1M$. Заради равенството $\measuredangle AC_1M + \measuredangle BC_1M = 180^\circ$, добиваме

$$\measuredangle AC_1M = \measuredangle BC_1M = 90^\circ .$$

На ист начин се добива точноста на равенствата

$$\measuredangle BA_1M = \measuredangle CA_1M = 90^\circ \text{ и } \measuredangle CB_1M = \measuredangle AB_1M = 90^\circ .$$

Според тоа AA_1, BB_1 и CC_1 се висини во триаголникот ABC.

44. Точките A_2, B_2 и C_2 се средини на висините AA_1, BB_1 и CC_1, соодветно, на остроаголниот триаголник ABC. Пресметај го збирот

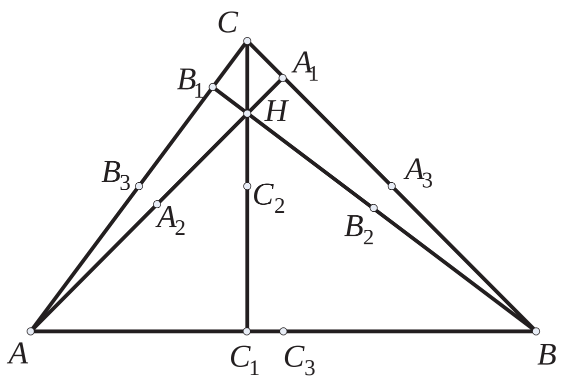
$$\measuredangle B_2A_1C_2 + \measuredangle C_2B_1A_2 + \measuredangle A_2C_1B_2 .$$

Решение. Нека C_3, A_3 и B_3 се средините на страните AB, BC и CA, соодветно, а H е ортоцентарот на триаголникот ABC. Тогаш,

$$\measuredangle HB_2A_3 = 90^\circ = \measuredangle HA_1A_3 ,$$

па затоа четириаголникот $A_1HB_2A_3$ е тетивен. Според тоа,

$$\measuredangle B_2A_1H = \measuredangle B_2A_3H .$$



Слично, од

$$\measuredangle HC_2A_3 = 90^\circ = \measuredangle HA_1A_3 ,$$

следува дека и четириаголникот $A_1C_2HA_3$ е тетивен и оттука $\measuredangle C_2A_1H = \measuredangle C_2A_3H$. Имаме:

$$\measuredangle B_2A_1C_2 = \measuredangle B_2A_1H + \measuredangle HA_1C_2 = \measuredangle B_2A_3H + \measuredangle HA_3C_2 = \measuredangle B_2A_3C_2 = \measuredangle BAC .$$

Слично,

$$\measuredangle C_2B_1A_2 = \measuredangle CBA \text{ и } \measuredangle A_2C_1B_2 = \measuredangle ACB .$$

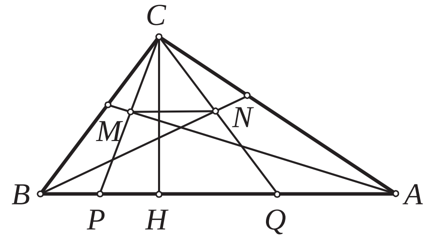
Конечно,

$$\measuredangle B_2A_1C_2 + \measuredangle C_2B_1A_2 + \measuredangle A_2C_1B_2 = \measuredangle BAC + \measuredangle CBA + \measuredangle ACB = 180^\circ .$$

45. Во правоаголниот триаголник ABC, CH е висина повлечена кон хипотенузата AB. Симетралите на аглите $\measuredangle CAB$ и $\measuredangle BCH$ се сечат во точката M, а симетралите на аглите $\measuredangle CBA$ и $\measuredangle ACH$ се сечат во точката N. Докажи дека $MN \parallel AB$.

Решение. Нека CP и CQ се симетрали на аглите $\measuredangle BCH$ и $\measuredangle ACH$ соодветно. Ќе воведеме ознака $\measuredangle CAM = \alpha$. Тогаш

$$\measuredangle CAH = \measuredangle BCH = 2\alpha$$
$$\measuredangle ACH = 90^\circ - 2\alpha$$



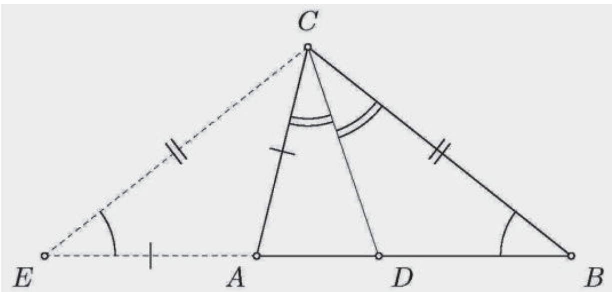
Сега

$$\measuredangle ACM = \measuredangle ACB - \measuredangle PCB = 90^\circ - \alpha$$
$$\measuredangle AMC = 180^\circ - (\measuredangle CAM + \measuredangle ACM)$$
$$= 180^\circ - (\alpha + 90^\circ - \alpha) = 90^\circ.$$

Според тоа, AM е висина и симетрала во триаголникот ACP. Значи, триаголникот ACP е рамнокрак со основа CP, и M е нејзина средина. Потполно аналогно се покажува дека триаголникот CBQ е рамнокрак, основа CQ, при што BN е негова висина и симетрала на аголот $\measuredangle CBQ$. Со други зборови, точката N е средина на CQ. Бидејќи M е средина на CP и N е средина на CQ, отсечката MN е средна линија на триаголникот QCP. Според тоа $MN \parallel PQ \parallel AB$.

46. Во $\triangle ABC$ аголот при темето A е двапати поголем од аголот при темето B. Нека симетралата на аголот при темето C ја сече страната AB во точката D. Докажи, дека важи $\overline{BC} = \overline{AD} + \overline{AC}$.

Решение. *Прв начин.* Нека $\beta = \measuredangle ABC$. Тогаш $\measuredangle BAC = 2\beta$. Нека E е точка на продолжението на страната AB преку темето A таква што $\overline{AE} = \overline{AC}$. Бидејќи $\measuredangle CAE = 180^\circ - 2\beta$ и $\overline{AE} = \overline{AC}$ заклучуваме дека $\measuredangle AEC = \beta$. Според тоа $\measuredangle AEC = \beta = \measuredangle ABC$, па затоа $\overline{CE} = \overline{BC}$. Бидејќи CD е симетрала на $\measuredangle ACB$ важи



$$\measuredangle ACD = \frac{180^\circ - \measuredangle ABC - \measuredangle BAC}{2} = \frac{180^\circ - \beta - 2\beta}{2} = 90^\circ - \tfrac{3}{2}\beta.$$

Во $\triangle CED$ важи

$$\measuredangle ECD = \measuredangle ECA + \measuredangle ACD = \beta + 90^\circ - \tfrac{3}{2}\beta = 90^\circ - \tfrac{1}{2}\beta$$

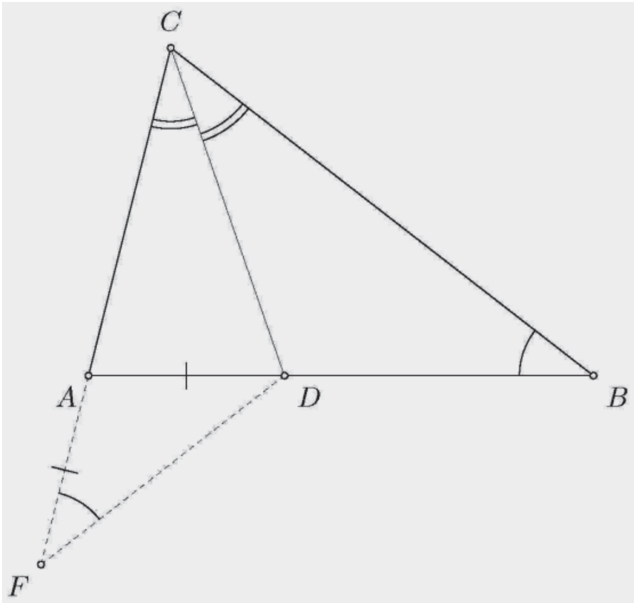
и

$$\measuredangle CDE = 180^\circ - \measuredangle DEC - \measuredangle ECD = 180^\circ - \beta - 90^\circ + \tfrac{1}{2}\beta = 90^\circ - \tfrac{1}{2}\beta.$$

Според тоа, $\measuredangle CDE = \measuredangle ECD$, па затоа $\overline{CE} = \overline{DE}$.

Конечно, од претходните разгледувања следува

$$\overline{BC} = \overline{CE} = \overline{DE} = \overline{AD} + \overline{AE} = \overline{AD} + \overline{AC}.$$



Втор начин. Нека $\beta = \measuredangle ABC$ Тогаш $\measuredangle BAC = 2\beta$. Нека F е точка на продолжението на страната AC преку темето A таква што $\overline{AF} = \overline{AD}$. Бидејќи

$$\measuredangle BAF = 180^\circ - 2\beta \text{ и } \overline{AF} = \overline{AD}$$

заклучуваме дека

$$\measuredangle DFA = \beta = \measuredangle ABC .$$

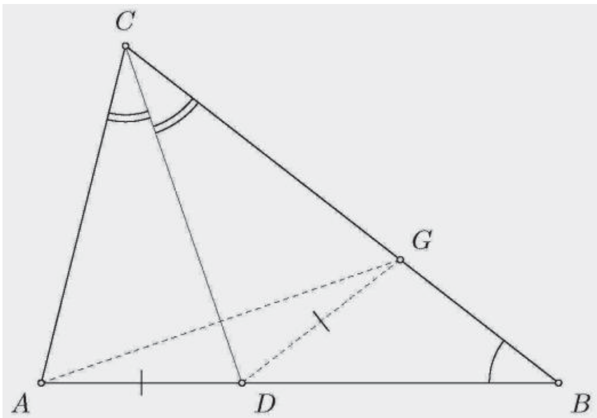
Бидејќи CD е симетрала на $\measuredangle ACB$ имаме

$$\measuredangle FCD = \measuredangle ACD = \measuredangle DCB ,$$

а бидејќи CD е заедничка страна на триаголниците CFD и CBD од признакот АСА следува дека овие триаголници се складни, па затоа $\overline{FC} = \overline{BC}$.

Конечно, од претходните разгледувања следува

$$\overline{BC} = \overline{FC} = \overline{AF} + \overline{AC} = \overline{AD} + \overline{AC} .$$



Трет начин. Нека G е точка на страната на BC таква што $\overline{AC} = \overline{CG}$. Бидејќи CD е симетрала на $\measuredangle ACG$ следува дека точката G е осносиметрична на точката A во однос на правата CD, што значи дека триаголниците ADC и GDC се складни. Затоа $\overline{AD} = \overline{DG}$. Исто така важи

$$\measuredangle CGD = \measuredangle DAC = 2\measuredangle ABC .$$

Бидејќи $\measuredangle CGD$ е надворешен за триаголникот BGD следува дека

$$\measuredangle BDG = \measuredangle DGC - \measuredangle DBG = 2\measuredangle ABC - \measuredangle ABC = \measuredangle ABC$$

Тоа значи дека $\overline{GD} = \overline{GB}$.

Конечно, од претходните разгледувања следува

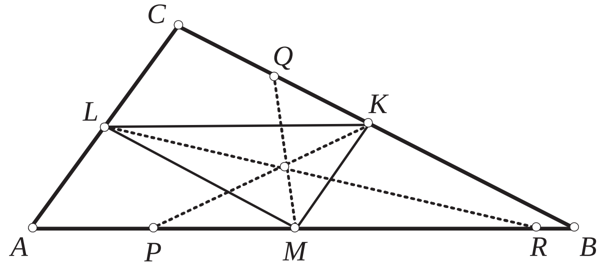
$$\overline{BC} = \overline{FG} + \overline{GC} = \overline{GD} + \overline{GC} = \overline{AD} + \overline{AC}.$$

47. Нека во $\triangle ABC$, точките M, K и L се средини на страните AB, BC и CA и нека точката P е средина на искршената линија BAC, Q е средина на искршената линија ACB, а R е средина на искршената линија CBA. Докажи дека правите KP, QM и LR се сечат во иста точка.

Решение. Нека $\overline{AB} \geq \overline{BC} \geq \overline{CA}$. Бидејќи P е средина на искршената линија BAC , добиваме дека

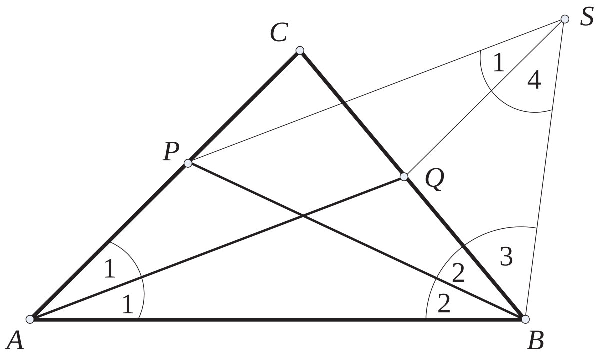
$$\overline{PB} = \frac{\overline{AB}+\overline{AC}}{2} = \overline{KM} + \overline{MB}$$

и оттука $\overline{PB}-\overline{MB}=\overline{KM}$, т.е. $\overline{PM}=\overline{KM}$. Значи, $\triangle PMK$ е рамнокрак па затоа $\measuredangle PKM=\measuredangle KPM$. Бидејќи LK е пралелна со AB следува дека $\measuredangle KPM=\measuredangle PKL$ и затоа $\measuredangle PKM=\measuredangle PKL$, односно KP е симетрала на $\measuredangle LKM$. Слично, MQ е симетрала на $\measuredangle LMK$, а LR е симетрала на $\measuredangle MLK$. Тогаш KP, QM и LR се симетрали на аглите на $\triangle MKL$, па затоа се сечат во иста точка.



48. Докажи дека ако должините на симетралите на два внатрешни агли на еден триаголник се еднакви, тогаш тој триаголникот е рамнокрак.

Решение. Нека AP е симетралата на аголот кај темето A, а BQ симетралата на аголот кај темето B (види цртеж). Според условот на задачата $\overline{AQ}=\overline{BP}$. Треба да докажеме $\measuredangle CAB=\measuredangle ABC$. Да претпоставиме дека важи $\measuredangle CAB\neq\measuredangle ABC$. Без губење на општоста, можеме да претпоставиме дека $\measuredangle CAB<\measuredangle ABC$. Тогаш $\measuredangle 1<\measuredangle 2$. Триаголниците ABQ и BAP имаат по две еднакви страни, $\overline{AB}=\overline{BA}$, $\overline{AQ}=\overline{BP}$, па од $\measuredangle 1<\measuredangle 2$ следува дека $\overline{BQ}<\overline{AP}$. Нека S е точка, таква што $APSQ$ е паралелограм. Тогаш од $\overline{AP}=\overline{QS}>\overline{BQ}$, следува $\measuredangle 3>\measuredangle 4$, па затоа



$$\measuredangle PBS=\measuredangle 2+\measuredangle 3>\measuredangle 1+\measuredangle 4=\measuredangle BSP.$$

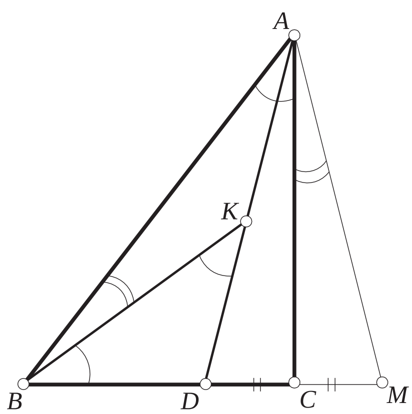
Оттука се добива дека $\overline{AQ}=\overline{PS}>\overline{BP}$, што противречи на $\overline{AQ}=\overline{BP}$. Конечно, од добиената противречност следува дека $\measuredangle CAB=\measuredangle ABC$.

49. Во триаголникот ABC аголот при темето C е прав. На страната BC е избрана точка D, а на отсечката AD точка K така што $\measuredangle BAC=\measuredangle KBD=\measuredangle BKD$. Докажи дека $\overline{AK}=2\overline{DC}$.

Решение. На продолжението на DC земаме точка M таква што $\overline{CM}=\overline{CD}$. Тогаш AC е висина во $\triangle MAD$, па затоа тој е рамнокрак, т.е. $\overline{DA}=\overline{MA}$. Понатаму,

$$\begin{aligned}\measuredangle ABK&=180^\circ-\measuredangle BKA-\measuredangle BAK\\&=\measuredangle BKA-\measuredangle BAK=\measuredangle BAC-\measuredangle BAK\\&=\measuredangle KAC=\measuredangle DAC=\measuredangle CAM.\end{aligned}$$

Но, тогаш



$$\measuredangle ABM = \measuredangle ABK + \measuredangle KBC = \measuredangle CAM + \measuredangle ABC = \measuredangle ABM.$$

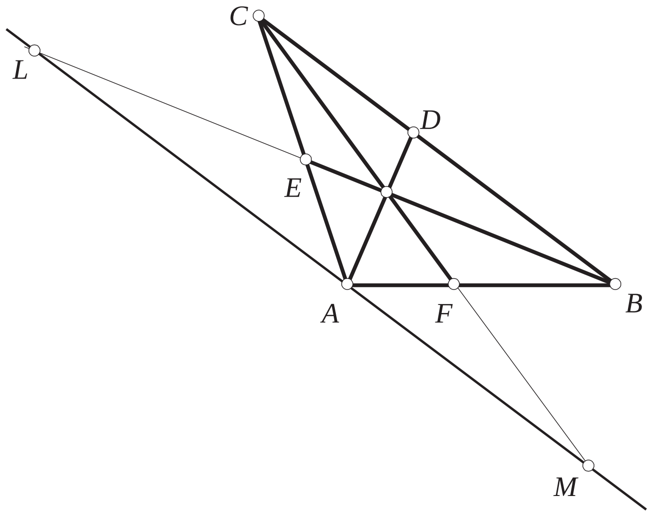
Според тоа, $\triangle BMA$ е рамнокрак со основа AB, односно $\overline{AM} = \overline{BM}$. Сега

$$\overline{AK} = \overline{AD} - \overline{KD} = \overline{AM} - \overline{KD} = \overline{BM} - \overline{KD} = \overline{BM} - \overline{BD} = \overline{DM} = 2\overline{DC},$$

што и требаше да се докаже.

50. На страните AB, BC и CA од $\triangle ABC$ се избрани точки F, D и E, соодветно. Отсечките AD, BE и CF се сечат во точката O. Докажи дека

$$\frac{\overline{AO}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{EC}} + \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}.$$



Решение. Низ точката A повлекуваме права l паралелна со BC, и нека пресеците на CF и BE со l се M и L соодветно (види цртеж). Јасно е дека триаголниците LEA и BEC се слични, од каде добиваме

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{EC}} = \frac{\overline{AL}}{\overline{BC}}. \qquad (1)$$

Од сличноста на триаголниците AFM и BEC имаме

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{FB}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{BC}}. \qquad (2)$$

Од сличноста на триаголниците AOL и DOB имаме

$$\frac{\overline{AO}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{AL}}{\overline{BD}}, \qquad (3)$$

а од сличноста на триаголниците AOM и DOC имаме

$$\frac{\overline{AO}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{DC}} \qquad (4)$$

Сега, од (3) и (4), добиваме

$$\frac{\overline{AO}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{AL}+\overline{AM}}{\overline{BD}+\overline{DC}} = \frac{\overline{AL}+\overline{AM}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AL}}{\overline{BC}} + \frac{\overline{AM}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{EC}} + \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}},$$

што и требаше да се докаже.

51. Нека $CL, (L \in AB)$ е симетрала на агол во $\triangle ABC$ и нека $\overline{AC} = \overline{CL}$. Точката K лежи на полуправата CL и важи $\measuredangle CAL + \measuredangle CAK = 180^\circ$. Докажи, дека $\overline{BC} = \overline{CK}$.

Решение. Од $\measuredangle CLA = \measuredangle CAL$ следува $\measuredangle CLB = \measuredangle CAK$, (направи цртеж). Оттука и од условот следува дека триаголниците CAK и CLB се складни, па затоа $\overline{BC} = \overline{CK}$.

52. Пресметај ја страната c на $\triangle ABC$, ако се дадени: $a = 20$, $b = 15$ и $\alpha - \beta = 90^\circ$.

Решение. Нека $AD \perp AB$, па следува

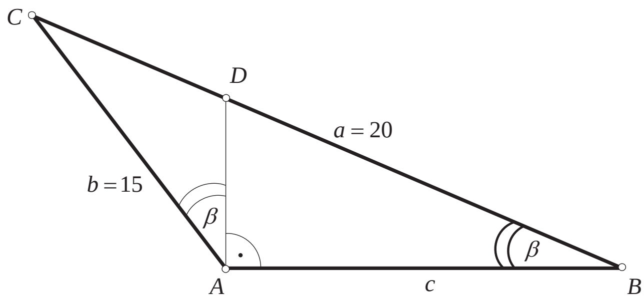
$\triangle CDA \sim \triangle CAB$ (*)

од каде што

$$\overline{CD} : \overline{CA} = \overline{CA} : \overline{CB}$$

или

$$\overline{CD} = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{BC}} = \frac{15^2}{20} = 11,25 .$$

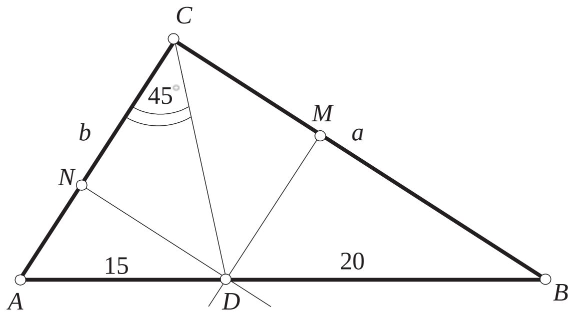


Од (*) следува уште и пропорцијата $\overline{CD} : \overline{DA} = \overline{CA} : \overline{AB}$, од каде што

$$\overline{DA} = \frac{\overline{CD} \cdot \overline{AB}}{\overline{CA}} = \frac{\frac{15^2}{20} \cdot c}{15} = \frac{3}{4} c .$$

Конечно, од правоаголниот триаголник $\triangle ABD$ имаме $c^2 + (\frac{3}{4} c)^2 = 8,75^2$, т.е. $c = 7$.

53. Симетралата на правиот агол во правоаголниот $\triangle ABC$ ја дели хипотенузата AB на две отсечки со должини $15\ cm$ и $20\ cm$. Најди ги катетите на $\triangle ABC$.



Решение. Нека CD е симетрала на $\measuredangle C$ (види цртеж). Тогаш од својството на симетрала следува односот $a : b = 20 : 15$, т.е. $b = \frac{3}{4} a$. Според Питагоровата теорема имаме

$$a^2 + b^2 = c^2, \text{т.е. } a^2 + (\tfrac{3}{4} a)^2 = (15 + 20)^2,$$

од каде добиваме $a = 28$, па според тоа $b = \frac{3 \cdot 28}{4} = 21$.

Значи, катетите на правоаголниот триаголник се $28\ cm$ и $21\ cm$.

54. Ако за страните a, b, c на триаголникот важи релацијата $a - b = \frac{1}{4} c$, тогаш $\overline{HT} = \frac{1}{8}(a + b)$, каде што H и T се подножјата на висината и тежишната линија, повлечени од темето C. Докажи!

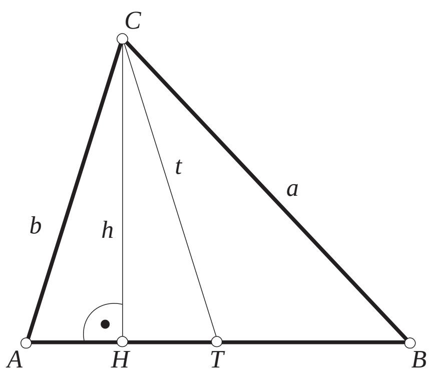
Решение. Нека $\overline{CH} = h$ и $\overline{CT} = t$ се висината и тежишната линија од темето C на триаголникот ABC (види цртеж). Ќе ја примениме Питагоровата теорема за триаголниците AHC и BHC:

$$h^2 = b^2 - \overline{AH}^2 , \quad h^2 = a^2 - \overline{BH}^2 ,$$

од каде што следува:

$$b^2 - \overline{AH}^2 = a^2 - \overline{BH}^2$$

$$a^2 - b^2 = \overline{BH}^2 - \overline{AH}^2 ,$$



$$(\overline{HB}+\overline{AH})(\overline{HB}-\overline{AH})=(a-b)(a+b).$$

Бидејќи $\overline{AH}+\overline{BH}=\overline{AB}=c$, од претпоставката $a-b=\frac{1}{4}c$, добиваме дека

$$c(\overline{HB}-\overline{AH})=\frac{1}{4}c(a+b),\ \ \overline{HB}-\overline{AH}=\frac{1}{4}(a+b).$$

Но,

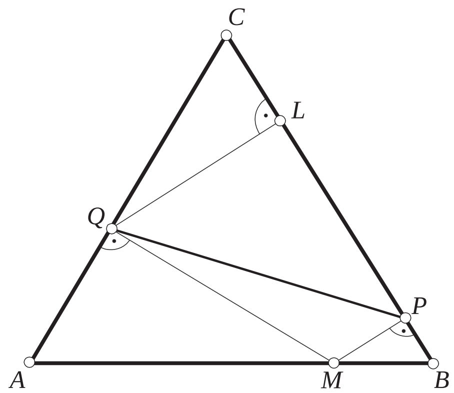
$$\overline{HB}-\overline{AH}=(\overline{HT}+\overline{TB})-\overline{AH}=\overline{HT}+(\overline{AT}-\overline{AH})=\overline{HT}+\overline{HT}=2\overline{HT},$$

па според тоа

$$2\overline{HT}=\frac{1}{4}(a+b),\ \text{т.е.}\ \ \overline{HT}=\frac{1}{8}(a+b).$$

55. Точката M ја дели страната AB на рамностраниот триаголник ABC во однос $3:1$. Од точката M се спуштени нормали MP и MQ на страните BC и AC соодветно. Најди го растојанието $\overline{PQ}$, ако $\overline{AB}=8\ cm$.

Решение. Нека триаголникот ABC е рамностран, тогаш од условот $\overline{AB}=8\ cm$ и $\overline{AM}:\overline{MB}=3:1=6:2$ следува $\overline{AM}=6\ cm$ и $\overline{MB}=2\ cm$ (види цртеж). Понатаму од $MP\perp BC$ и $\measuredangle B=60^\circ$ следува дека $\measuredangle MBP$ е правоаголен со $\measuredangle BMP=30^\circ$, па затоа $\overline{BP}=1\ cm$ (катетата наспроти агол од 30° е еднаква на половина од хипотенузата).



Аналогно заклучуваме дека $\overline{AQ}=3\ cm$.

Нека $QL\perp BC$, тогаш од правоаголниот $\triangle QCL$ следува $\overline{CL}=\frac{5}{2}cm$, $\overline{QL}=\frac{5\sqrt{3}}{2}cm$. Тогаш $\overline{PL}=\overline{CP}-\overline{CL}=7-\frac{5}{2}=\frac{9}{2}$.

Конечно, од правоаголниот $\triangle PQL$ наоѓаме

$$\overline{PQ}=\sqrt{\overline{PL}^2+\overline{QL}^2}=\sqrt{(\frac{9}{2})^2+(\frac{5\sqrt{3}}{2})^2}=\sqrt{39}.$$

Значи, $\overline{PQ}=\sqrt{39}\ cm$.

56. Должините на катетите на два правоаголни триаголници се природни броеви, а квадратите од должините на хипотенузите се прости броеви. Ако триаголниците имаат еднакви хипотенузи, тогаш тие се складни. Докажи!

Решение. Нека a и b се природни броеви кои се страни на едниот триаголник, а c и d се природни броеви кои се страни на втроиот триаголник. Нека p е прост број за кој што $\sqrt{p}$ е хипотенуза на двата триаголници. Според тоа

$$a^2+b^2=p \tag{1}$$

и

$$c^2+d^2=p. \tag{2}$$

Од точноста на последните равенства добиваме дека a и b се заемно прости и исто така c и d се заемно прости природни броеви. Од равенствата (1) и (2) , добиваме

$$p^2=(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2=(ad+bc)^2+(ac-bd)^2, \quad (3)$$

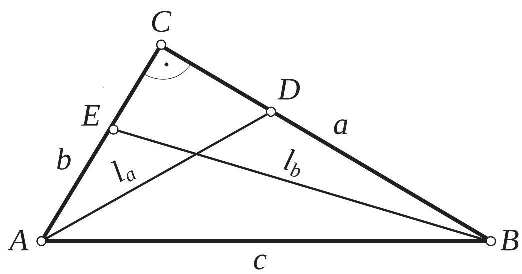
$$(ac+bd)(ad+bc)=(a^2+b^2)cd+(c^2+d^2)ab=pcd+pab=p(cd+ab) \quad (4)$$

$$(ac-bd)(ad-bc)=(a^2+b^2)cd-(c^2+d^2)ab=pcd-pab=p(cd-ab) \quad (5)$$

Бидејќи броевите a и b се заемно прости и исто така c и d се заемно прости, добиваме дека $ac+bd$ и $ac-bd$ се заемно прости и $ad+bc$ и $ad-bc$ се заемно прости. Заради тоа $p=1$ (што не е можно, $1=a^2+b^2=c^2+d^2$ за a,b,c,d природни броеви). Според тоа $p\neq 1$, и од претходните равенства добиваме дека $ac+bd$ и $ad-bc$, или $ad+bc$ и $ac-bd$ имаат зеднички делител p. Во секој од тие случаи, заради равенството (3), добиваме дека сите четири бриеви се деливи со p. Тоа е можно само во случајот $ad-bc=ac-bd=0$. Од последните равенства добиваме $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ од каде имаме $a=c,b=d$, бидејќи $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ се нескратливи дропки.

57. Докажи дека во правоаголен триаголник односот на производите на должините на симетралите на острите агли и производите на радиусите на опишаната и впишаната кружница во триаголникот е ирационален број.

Решение. Нека a,b,c се страните на триаголникот ABC, со прав агол кај C, соодветно и l_a и l_b симетралите на аглите кај темињата A и B соодветно. Користејќи дека симетралата на агол во триаголник ја дели спротивната страна на тој агол во однос како другите две страни и Питагоровата теорема, добиваме



$$\frac{\overline{BD}}{\overline{CD}}=\frac{c}{b} \Leftrightarrow \frac{\overline{BD}+\overline{CD}}{\overline{CD}}=\frac{c+b}{b} \Leftrightarrow \frac{a}{\overline{CD}}=\frac{c+b}{b} \Leftrightarrow \overline{CD}=\frac{ab}{c+b} \text{ и}$$

$$l_a^2=b^2+\overline{CD}^2=b^2+(\tfrac{ab}{c+b})^2=\frac{b^2}{(c+b)^2}((c+b)^2+a^2)=\frac{b^2}{(c+b)^2}(c^2+a^2+b^2+2bc)$$

$$=\frac{b^2}{(c+b)^2}2c(c+b)=\frac{2cb^2}{c+b}=\frac{2cb^2}{c+b}\cdot\frac{c-b}{c-b}=\frac{2cb^2(c-b)}{c^2-b^2}=\frac{2cb^2(c-b)}{a^2}.$$

Слично, $l_b^2=\frac{2ca^2(c-a)}{b^2}$. Од ови две равенства добиваме дека

$$l_a^2 l_b^2=4c^2(c-a)(c-b)\,. \quad (1)$$

Во правоаголниот триаголник важи $r=\frac{a+b-c}{2}$, каде r е радиус на впишаната кружница, а за радиусот R на опишаната кружница важи $R=\frac{c}{2}$. Според тоа

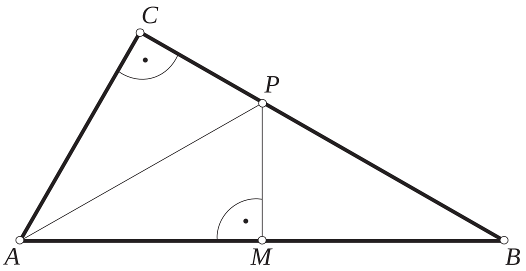
$$\begin{aligned} R^2r^2&=\frac{c^2}{4}\cdot(\tfrac{a+b-c}{2})^2=\frac{c^2}{16}(a^2+b^2+c^2-2ac-2bc+2ab)\\ &=\frac{c^2}{16}(2c^2-2ac-2bc+2ab)=\frac{c^2}{8}(c-a)(c-b) \end{aligned} \quad (2)$$

Од (1) и (2) добиваме $\frac{l_a^2 l_b^2}{R^2 r^2} = 32$, и оттука $\frac{l_a l_b}{Rr} = 4\sqrt{2}$, па бараниот однос е ирационален број.

58. Правоаголниот $\triangle ABC$ има хипотенуза $\overline{AB} = 8,5\ cm$ и катета $\overline{BC} = 7,5\ cm$. На катетата BC е избрана точка P, која од хипотенузата е оддалечена за $2,4\ cm$. Докажи дека AP е симетрала на аголот кај темето A.

Решение. Нека $PM \perp AB$ и $\overline{PM} = 2,4$ cm (види цртеж). Од Питагоровата теорема за правоаголниот $\triangle ABC$ имаме:

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{BC}^2} = \sqrt{8,5^2 - 7,5^2}$$
$$= \sqrt{72,25 - 56,25} = \sqrt{16} = 4.$$



Но бидејќи $\triangle ACB \sim \triangle PMB$, следува

$$\overline{AC} : \overline{CB} = \overline{PM} : \overline{MB}$$
$$4 : 7,5 = 2,4 : \overline{MB}$$

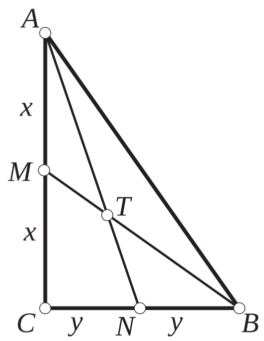
од каде што $\overline{MB} = \frac{7,5 \cdot 2,4}{4} = 4,5$. Тогаш

$$\overline{AM} = \overline{AB} - \overline{MB} = 8,5 - 4,5 = 4.$$

Според тоа, правоаголните триаголници ACP и AMP се складни ($\overline{AC} = \overline{AM} = 4$, $\overline{AP}$ -заедничка страна) па следува $\measuredangle CAP = \measuredangle MAP$, т.е. AP е симетрала на аголот кај темето A.

59. Во правоаголен триаголник, тежишните линии повлечени кон катетите имаат должини $\sqrt{52}$ и $\sqrt{73}$. Определи ја должината на хипотенузата.

Решение. Нека ABC е правоаголен триаголник со теме на правиот агол во C. Нека $N \in CB$ и $M \in AC$, така што AN и BM се тежишни линии, при што $\overline{AN} = \sqrt{52}$ и $\overline{BM} = \sqrt{73}$. Нека $\overline{AM} = \overline{MC} = x$ и $\overline{CN} = \overline{NB} = y$.



Од правоаголните триаголници ACN и MCB добиваме

$$\overline{AN}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CN}^2 = (2x)^2 + y^2 = 4x^2 + y^2$$
$$\overline{BM}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CM}^2 = (2y)^2 + x^2 = 4y^2 + x^2,$$

т.е.

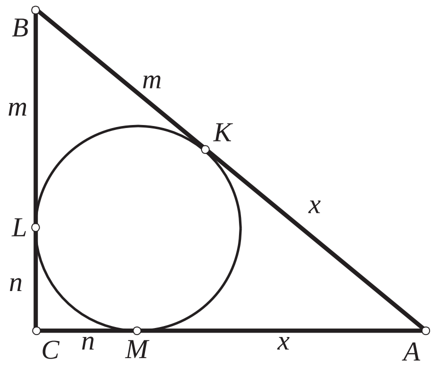
$$\begin{cases} 4x^2 + y^2 = 52 \\ x^2 + 4y^2 = 73 \end{cases}$$

Последните равенки ги собераме и добиваме $5x^2 + 5y^2 = 125$, т.е. $x^2 + y^2 = 25$. Од друга страна,

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = (2x)^2 + (2y)^2 = 4(x^2 + y^2) = 4 \cdot 25 = 100,$$

од каде добиваме $\overline{AB} = 10$.

60. Впишаната кружница во правоаголниот $\triangle ABC$ (со прав агол во темето C) со допирната точка ја дели едната негова катета на две отсечки со должини m и n. Определи ги должините на страните на триаголникот?



Решение. Нека претпоставиме дека $m > n$. Тогаш должината на радиусот на впишаната кружница е $r = n$ (види цртеж). Од

$$\overline{AM} = \overline{AK} = x, \quad \overline{BK} = \overline{BL} = m,$$

добиваме

$$\overline{CB} = m+n, \quad \overline{AC} = n+x, \quad \overline{AB} = m+x.$$

Од Питагоровата теорема следува

$$\overline{AC}^2 + \overline{CB}^2 = \overline{AB}^2,$$

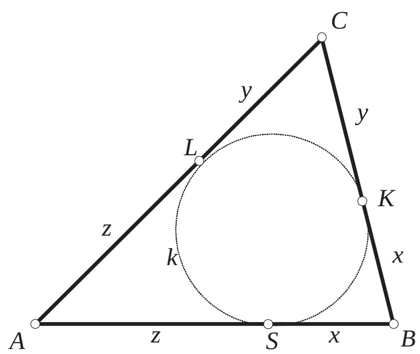
$$(m+n)^2 + (n+x)^2 = (m+x)^2,$$

$$2(n-m)x + 2n^2 + 2mn = 0.$$

Решение на равенката $(n-m)x + n^2 + mn = 0$ е $x = \frac{n(n+m)}{m-n}$. Според тоа

$$\overline{AB} = m+n, \quad \overline{AC} = \frac{2mn}{m-n}, \quad \overline{AB} = \frac{m^2+n^2}{m-n}.$$

61. Страните во триаголникот ABC се однесуваат како $m:n:p$. Определи го односот во кој се разделени страните со допирните точки на впишаната кружница k.



Решение. Нека допирните точки на впишаната кружница k со страните се точките $S, K\ L$ соодветно. Ако

$$\overline{SB} = x, \overline{KC} = y, \overline{LA} = z,$$

тогаш

$$\overline{BK} = \overline{SB} = x, \overline{LC} = \overline{KC} = y, \ \overline{AS} = \overline{LA} = z$$

и

$$\begin{cases} x+y=a \\ y+z=b \\ z+x=c \end{cases},$$

од каде што добиваме $x = \frac{a+c-b}{2}, y = \frac{a+b-c}{2}, z = \frac{b+c-a}{2}$. Од условот на задачата $a:b:c = m:n:p$, односно $\frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \frac{c}{p} = \lambda$. Бидејќи $a = \lambda m, b = \lambda n, c = \lambda p$, имаме

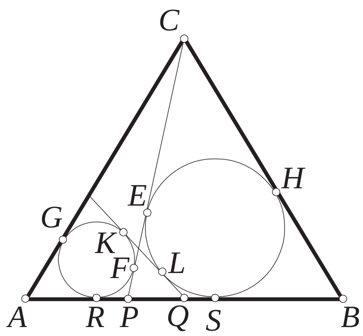
$$x = \frac{\lambda}{2}(m+p-n), \ y = \frac{\lambda}{2}(m+n-p), \ z = \frac{\lambda}{2}(n+p-m),$$

па според тоа

$$\frac{x}{y} = \frac{m+p-n}{m+n-p}, \ \frac{y}{z} = \frac{m+n-p}{n+p-m}, \ \frac{z}{x} = \frac{n+p-m}{m+p-n}.$$

62. Нека P е произволна точка од страната AB во рамностраниот триаголник ABC, а k_1 и k_2 се впишаните кружници во триаголниците APC и BPC соодветно. Заедничката тангента кон k_1 и k_2 ја сече страната AB во точка Q (различна од P). Докажи дека Q не зависи од изборот на точката P.

Решение. Со G, R, F ќе ги означиме допирните точки на кружницата k_1 со CA, AP и PC соодветно. Исто, со H, E, S ќе ги означиме допирните точки на k_2 со BC, CP, PB соодветно (види цртеж).



Нека KL е тангентата која ги допира k_1 и k_2 и ја сече AB во точката Q.

Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $AP < PB$. Ќе воведеме ознаки $\overline{AR} = a, \overline{RP} = b, \overline{PS} = c, \overline{SB} = d$. Сега ако $\overline{AB} = x$, имаме $a+b+c+d = x$. Бидејќи KL и EF се тангенти (внатрешни), имаме $\overline{KL} = \overline{EF}$, и $\overline{CE} = \overline{EH}$, $\overline{CF} = \overline{CG}$. Од претходните равенства добиваме:

$$\overline{KL} = \overline{EF} = \overline{CG} - \overline{CE} = \overline{CG} - \overline{CH} = \overline{AC} - \overline{AG} - \overline{BC} + \overline{BH} = \overline{BH} - \overline{AG} = d - a.$$

Ако означиме $\overline{QS} = y$, добиваме

$$\overline{KL} = \overline{KQ} - \overline{LQ} = \overline{RQ} - \overline{QS} = \overline{RS} - 2\overline{QS} = b + c - 2y (= d - a).$$

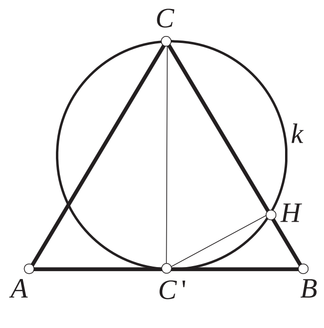
Од равенството $b + c - 2y = d - a$ добиваме $y = \frac{1}{2}(a+b+c+d) - d = \frac{1}{2}x - d$. Значи,

$$\overline{BQ} = \overline{BS} + \overline{SQ} = \tfrac{1}{2}x - d + d = \tfrac{1}{2}x = \tfrac{1}{2}\overline{AB},$$

т.е. Q е средина на страната AB, па затоа Q не зависи од изборот на точката P.

63. Висината на рамностран $\triangle ABC$ е дијаметар на кружница k. Докажи дека k ги сече двете страни во точки кои ги делат во однос $3:1$, сметано од темето на триаголникот низ кој кружницата минува.

Решение. Со CC' ќе ја означиме висината на рамностраниот $\triangle ABC$. Со k ќе ја означиме кружницата чиј дијаметар е CC', а со H ќе го означиме нејзиниот пресек со страната BC. Бидејќи $H \in k$ и CC' е нејзин дијаметар важи $\measuredangle C'HC = 90^\circ$. Според тоа, $\triangle C'HB$ е правоаголен со прав агол $\measuredangle C'HB$. Затоа



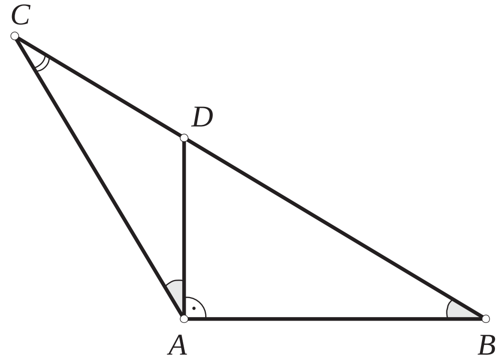
$$\overline{HB} = \tfrac{1}{2}\overline{C'B} = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2}\overline{AB} = \tfrac{1}{4}\overline{AB}.$$

Бидејќи $\triangle ABC$ е рамностран, имаме $\overline{AB} = \overline{BC}$. Конечно, $\overline{BH} = \frac{1}{4}\overline{BC}$, односно точката H ја дели страната BC во однос $3:1$, т.е. $\overline{CH} : \overline{HB} = 3:1$.

64. Ако во триаголникот ABC важи $\alpha - \beta = 90^\circ$, тогаш

$$(a^2 - b^2)^2 = (a^2 + b^2)\, c^2.$$

Решение. Очигледно, триаголниците ABC и DAC се слични (види цртеж), па добиваме:



i) $\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{DA} : \overline{AC}$, т.е.

$$\overline{DA} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{cb}{a}$$

$ii)\ \overline{AC}:\overline{BC}=\overline{DC}:\overline{AC}$, т.е. $\overline{DC}=\frac{\overline{AC}^2}{\overline{BC}}=\frac{b^2}{a}$

$iii)\ \overline{BD}=\overline{BC}-\overline{DC}=a-\frac{b^2}{a}=\frac{a^2-b^2}{a}$

Сега од правоаголниот триаголник ABD наоѓаме

$$\overline{AB}^2+\overline{AD}^2=\overline{BD}^2 \text{ ,т.е. } c^2+(\tfrac{bc}{a})^2=(\tfrac{a^2-b^2}{a})^2$$

$$a^2c^2+b^2c^2=(a^2-b^2)^2,\quad (a^2+b^2)c^2=(a^2-b^2)^2 .$$

65. На страните BC, CA, AB од $\triangle ABC$ се избрани точки A_1, B_1, C_1, такви што AA_1, BB_1 и CC_1 се сечат во точката M. Ако

$$\overline{AM}\cdot\overline{MA_1}=\overline{BM}\cdot\overline{MB_1}=\overline{CM}\cdot\overline{MC_1},$$

докажи дека AA_1, BB_1 и CC_1 се висини во триаголникот ABC.

Решение. Од равенствата

$$\overline{AM}\cdot\overline{MA_1}=\overline{BM}\cdot\overline{MB_1}=\overline{CM}\cdot\overline{MC_1},$$

следуваат сличностите $\triangle AMB_1 \sim \triangle BMA_1$, $\triangle BMC_1 \sim \triangle CMB_1$, $\triangle AMC_1 \sim \triangle CMA_1$. Освен тоа,

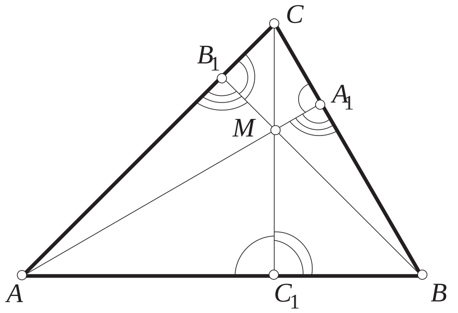
$$\measuredangle AC_1M+\measuredangle BC_1M=\measuredangle BA_1M+\measuredangle CA_1M=\measuredangle CB_1M+\measuredangle AB_1M=180^\circ .$$

Од горните парови на слични триаголници добиваме

$$\measuredangle AB_1M=\measuredangle BA_1M, \qquad (1)$$

$$\measuredangle CB_1M=\measuredangle BC_1M, \qquad (2)$$

$$\measuredangle AC_1M=\measuredangle CA_1M. \qquad (3)$$



Од равенството

$$\measuredangle BA_1M+\measuredangle CA_1M=\measuredangle CB_1M+\measuredangle AB_1M$$

и од равенството (1) добиваме

$$\measuredangle CA_1M=\measuredangle CB_1M,$$

од каде имаме $\measuredangle AC_1M=\measuredangle BC_1M$. Заради равенството $\measuredangle AC_1M+\measuredangle BC_1M=180^\circ$, добиваме $\measuredangle AC_1M=\measuredangle BC_1M=90^\circ$. На ист начин се добиваат на равенствата $\measuredangle BA_1M=\measuredangle CA_1M=90^\circ$ и $\measuredangle CB_1M=\measuredangle AB_1M=90^\circ$.

Според тоа AA_1, BB_1 и CC_1 се висини во триаголникот ABC.

66. Во остроаголен $\triangle ABC$ со $\measuredangle ACB=45^\circ$ симетралите на страните AB и AC се сечат во точката O. Висината AH ја сече правата BO во точката L и правата AO ја сече страната BC во точката K. Ако $\overline{AL}=2\overline{CK}$ определи ја големината на $\measuredangle ABC$.

Решение. Од својствата на симетралите имаме $\overline{AO}=\overline{BO}=\overline{CO}$ (направи цртеж). Нека $\measuredangle OAB=\measuredangle OBA=x$, $\measuredangle OCB=\measuredangle OBC=y$. Тогаш

$$\measuredangle OAC=\measuredangle OCA=45^\circ-y .$$

Од збирот на аглите во $\triangle ABC$ добиваме $2x=90^\circ$, па затоа $x=45^\circ$ и $\measuredangle AOB=90^\circ$.

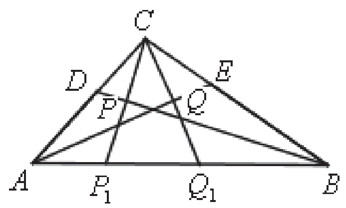
Сега

$$\measuredangle OBK = 90^\circ - \measuredangle OKB = \measuredangle LAO ,$$

па затоа $\triangle AOL \cong \triangle BOK$, од што следува $\overline{BK} = \overline{AL} = 2\overline{CK}$.

Нека M е средината на BK. Имаме $\overline{BM} = \overline{MK} = \overline{KC}$ и $\overline{BO} = \overline{OC}$, па затоа $\triangle BOM \cong \triangle COK$. Значи, $\overline{OK} = \overline{OM} = \overline{MK} = \overline{BM}$, па затоа $\triangle KOM$ е рамнокрак, $\measuredangle BMO = 120^\circ$, $\measuredangle MOB = \measuredangle MBO = 30^\circ$ и $\measuredangle ABC = 45^\circ + 30^\circ$.

67. Нека AE и BD се симетрали на $\measuredangle BAC$ и $\measuredangle ABC$ на $\triangle ABC$. Ако CP е нормала на BD, а CQ нормала на AE, P и Q лежат на AE и BD, соодветно, докажи дека PQ и AB се паралелни.

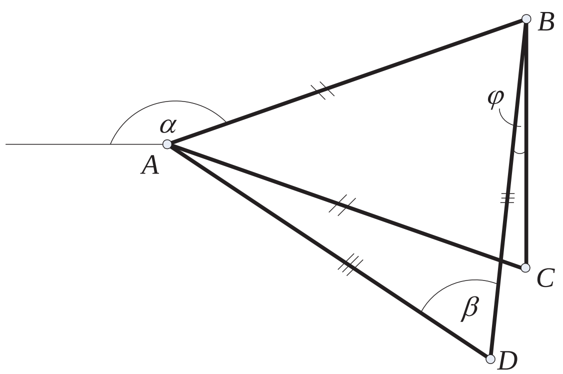


Решение. Нека CP и CQ ја сечат AB во точките P_1 и Q_1, соодветно. Бидејќи

$$\measuredangle CPB = \measuredangle P_1PB = 90^\circ , \ \measuredangle CBP = \measuredangle P_1BP = \frac{\measuredangle ABC}{2}$$

и BP е заедничка страна, триаголниците BCP и BP_1P се складни. Оттука, $\overline{CP} = \overline{PP_1}$, односно P е средина на отсечката CP_1. Слично, Q е средина на отсечката CQ_1. Тогаш PQ е средна линија во триаголникот P_1Q_1C, па $PQ \parallel P_1Q_1$, односно $PQ \parallel AB$.

68. Дадени се четири точки A, B, C и D во рамнината, такви што $\overline{AB} = \overline{AC}$ и $\overline{AD} = \overline{BD}$. Ако за аглите α и β означени како на цртежот важи $\alpha + \beta = 200^\circ$, определи го аголот $\varphi = \measuredangle CBD$.



Решение. Од цртежот се забележува дека $\measuredangle BAC = 180^\circ - \alpha$, а бидејќи триаголникот ABC е рамнокрак со основа BC добиваме

$$\measuredangle ACB = \measuredangle CBA = \frac{180^\circ - \measuredangle BAC}{2} = \frac{\alpha}{2} . \qquad (1)$$

Бидејќи триаголникот ABD е рамнокрак со основа AB, имаме

$$\measuredangle DBA = \measuredangle BAD = \frac{180^\circ - \beta}{2} . \qquad (2)$$

Од (1) и (2) добиваме

$$\varphi = \measuredangle CBD = \measuredangle CBA - \measuredangle DBA = \frac{\alpha}{2} - \frac{180^\circ - \beta}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2} - 90^\circ = \frac{200^\circ}{2} - 90^\circ = 10^\circ$$

69. Нека CD е симетрала на аголот ACB на $\triangle ABC$ ($D \in AB$). Ако центарот на опишаната кружница околу $\triangle ABC$ и центарот на впишаната кружница во $\triangle BCD$ се совпаѓаат, докажи дека

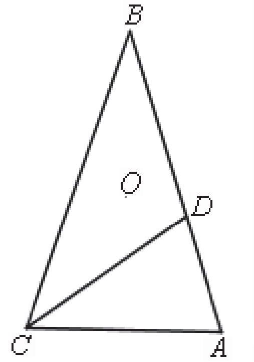
$$\overline{AC}^2 = \overline{AD} \cdot \overline{AB} .$$

Решение. Нека O е центар на опишаната кружница околу $\triangle ABC$ и центар на впишаната кружница во $\triangle BCD$. Тогаш, од O е центар на опишаната кружница околу $\triangle ABC$ следува

$$\measuredangle CBO = \measuredangle OCB = \frac{180^\circ - \measuredangle BOC}{2} = 90^\circ - \measuredangle BAC,$$

а од O е центар на впишаната кружница во $\triangle BCD$ следува

$$\measuredangle CBO = \tfrac{1}{2}\measuredangle CBA \text{ и } \measuredangle OCB = \tfrac{1}{2}\measuredangle DCB = \tfrac{1}{4}\measuredangle ACB.$$



Значи,

$$\tfrac{1}{2}\measuredangle CBA = \tfrac{1}{4}\measuredangle ACB = 90^\circ - \measuredangle BAC.$$

Од $\measuredangle CBA + \measuredangle ACB + \measuredangle BAC = 180^\circ$, добиваме

$$\measuredangle ACB = \measuredangle BAC = 72^\circ \text{ и } \measuredangle CBA = 36^\circ.$$

Тогаш $\triangle ADC \sim \triangle CAB$, па затоа $\frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$ и оттука

$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}\cdot\overline{BC} = \overline{AD}\cdot\overline{AB}.$$

70. Даден е рамностран $\triangle ABC$. Точката D е внатрешна за страната BC. Надворешно за $\triangle ABC$ се конструирани рамнострани триаголници BDE и CDF. Правите AE и AF ја сечат правата BC соодветно во точките M и N.

а) Пресметај ја вредноста на изразот $\frac{\overline{DM}}{\overline{MB}} + \frac{\overline{CN}}{\overline{NB}}$.

б) Ако $\frac{\overline{BD}}{\overline{BC}} = \frac{1}{3}$, пресметај $\frac{\overline{MN}}{\overline{BC}}$.

Решение. а) Од $\measuredangle ABD = \measuredangle BDE = 60^\circ$, имаме $DE \parallel AB$ и $\triangle ABM \sim \triangle EDM$. Тогаш $\frac{\overline{DM}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{AB}}$. Аналогно добиваме $\frac{\overline{CN}}{\overline{NB}} = \frac{\overline{CF}}{\overline{AB}}$. Според тоа,

$$\frac{\overline{DM}}{\overline{MB}} + \frac{\overline{CN}}{\overline{NB}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{AB}} + \frac{\overline{CF}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{BD}+\overline{CD}}{\overline{AB}} = 1.$$

б) Без ограничување на општоста можеме да сметаме, дека $\overline{AB} = 1$ и $\overline{BD} = \frac{1}{3}$. Да означиме $\overline{DM} = x$ и $\overline{CN} = y$. Тогаш, како во а) имаме $\frac{x}{\frac{1}{3}-x} = \frac{1}{3}$, па затоа $x = \frac{1}{12}$ и аналогно $\frac{y}{1-y} = \frac{2}{3}$, па затоа $y = \frac{2}{5}$. Значи, $\overline{MN} = x + \frac{2}{3} - y = \frac{7}{20}$, т.е. $\frac{\overline{MN}}{\overline{BC}} = \frac{7}{20}$.

71. Даден е рамнокрак $\triangle ABC$, $\overline{AC} = \overline{BC}$, со симетрала на агол $AL, L \in BC$. Кружницата со дијаметар AL ги сече AC и BL соодветно во точките D и E, $D \neq A, E \neq L$. Докажи дека D е средина на AC ако и само ако E е средина на BL.

Решение. Ако D е средината на AC, тогаш LD е средна линија и висина во $\triangle ALC$ и затоа $\measuredangle ACL = \measuredangle CAL$ (направи цртеж). Од друга страна

$$\measuredangle CAL = \tfrac{1}{2}\measuredangle BAC = \frac{180^\circ - \measuredangle ACL}{2},$$

па лесно следува дека $\measuredangle ACB = 36^\circ$ и $\measuredangle ABC = \measuredangle BAC = 72^\circ$. Сега, од $\triangle ABL$ добиваме $\measuredangle ALB = 72^\circ$, што значи дека $\triangle ABL$ е рамнокрак и AE е негова висина и тежишна линија, т.е. E е средина на BL.

Обратната насока се докажува аналогно.

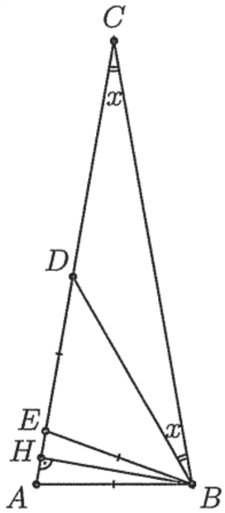
72. Даден е $\triangle ABC$ со центар на впишаната кружница I. Кружница со центар во I и радиус $\overline{CI}$ ја сече страната AB во внатрешни точки M и N. Докажи, дека $\measuredangle MCN < 60^\circ$.

Решение. Во $\triangle AMC$ точката I е пресек на симетралата на страната CM и симетралата на аголот $\measuredangle CAM$, па затоа I лежи на кружницата опишана околу $\triangle AMC$. Според тоа, $\measuredangle ICM = \measuredangle IAM = \frac{1}{2}\measuredangle CAB$. Аналогно, $\measuredangle ICN = \frac{1}{2}\measuredangle CBA$ и затоа

$$\measuredangle ACB = 180^\circ - \measuredangle CAB - \measuredangle CBA = 180^\circ - 2\measuredangle MCN .$$

Но, по услов M и N се внатрешни точки за AB, па затоа $\measuredangle ACB < \measuredangle MCN$, што заедно со последното равенство дава $\measuredangle MCN < 180^\circ - 2\measuredangle MCN$, т.е. $\measuredangle MCN < 60^\circ$.

73. Отсечката BH е висина во рамнокракиот $\triangle ABC$, $\overline{AC} = \overline{BC}$. Симетралата на страната BC ја сеча правата AC во точката D и $\overline{DH} = \overline{HA} + \overline{AB}$. Определи ги можните вредности на $\measuredangle BAC$.



Решение. *Прв случај*. Ако D лежи на отсечката AC, тогаш $\triangle ABC$ е остроаголен и H лежи на отсечката AC. Од условот следува дека H е меѓу A и D. Конструираме точка E на отсечката DH таква што $\overline{AH} = \overline{HE}$, што значи $\overline{BA} = \overline{BE}$. Имаме $\triangle AHB \cong \triangle EHB$, па затоа $\overline{BA} = \overline{BE} = \overline{DE}$. Од условот имаме $\overline{BD} = \overline{CD}$. Нека $\measuredangle ACB = \measuredangle DBC = x$. Тогаш

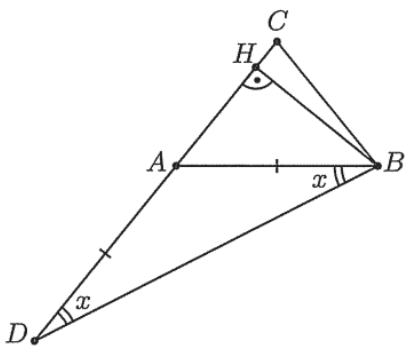
$$\measuredangle DBE = \measuredangle BDE = 2x$$

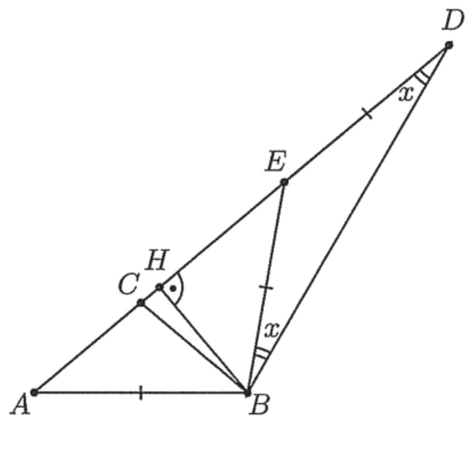
(како надворешен за $\triangle BCD$) и

$$\measuredangle BAH = \measuredangle BEH = 4x$$

(како надворешен за $\triangle BDE$). За збирот на аглите во $\triangle ABC$ добиваме $4x + 4x + x = 180^\circ$, од каде следува $\measuredangle BAC = 4x = 80^\circ$.

Втор случај. Ако D лежи на полуправата CA по точката A, тогаш $\triangle ABC$ е остроаголен и H лежи на отсечката AC. Од условот следува дека $\overline{AD} = \overline{AB}$. Нека $\measuredangle ADB = \measuredangle ABD = x$. Тогаш $\measuredangle ABC = \measuredangle BAC = 2x$ (како надворешен за $\triangle ABD$)



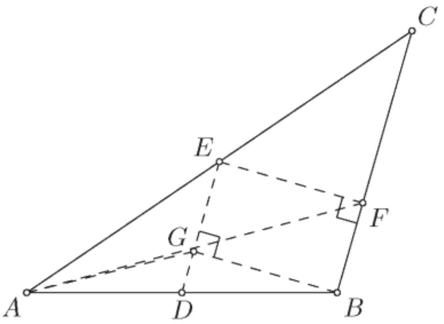


и $\measuredangle DCB = \measuredangle DBC = 3x$. За збирот на аглите во триаголникот $\triangle ABC$ добиваме $2x + 2x + 3x = 180^\circ$, од каде следува $\measuredangle BAC = 2x = \frac{360^\circ}{7}$.

Трет случај. Ако D лежи на полуправата AC по точката C, тогаш $\triangle ABC$ е тапоаголен и H лежи на истата полуправа. Од условот следува дека H е меѓу A и D. На отсечката AD конструираме точка E таква што $\overline{AH} = \overline{HE}$, што значи $\overline{BA} = \overline{BE}$. Имаме $\triangle AHB \cong \triangle EHB$, па затоа $\overline{BA} = \overline{BE} = \overline{DE}$. Нека $\measuredangle DBE = \measuredangle BDE = x$. Тогаш $\measuredangle ABC = \measuredangle BAC = \measuredangle BEA = 2x$ (како надворешен за $\triangle BDE$) и $\measuredangle CBD = \measuredangle BCD = 4x$ (како надворешен за $\triangle ABC$ (од симетралата имаме $\overline{BD} = \overline{CD}$). За збирот на аглите на $\triangle BCD$ добиваме $4x + 4x + x = 180^\circ$, од каде следува $\measuredangle BAC = 2x = 40^\circ$.

74. Нека ABC е тапоаголен триаголник со тап агол во темето B, нека D и E се средините на страните AB и AC соодветно, F е точка на страната BC таква што $\measuredangle BFE$ е прав и G е точка на отсечката DE таква што $\measuredangle BGE$ е прав. Докажи, дека точките A, F и G лежат на иста права ако и само ако $2\overline{BF} = \overline{CF}$.

Решение. Прво да забележиме дека четириаголникот $BFEG$ е правоаголник. Триаголниците ADE и ABC се слични со коефициент на сличност 2. Затоа точките A, F и G се колинеарни ако и само ако $\overline{FB} : \overline{GD} = 2:1$. Нека $\overline{BC} = a$ и $\overline{BF} = x$. Тогаш

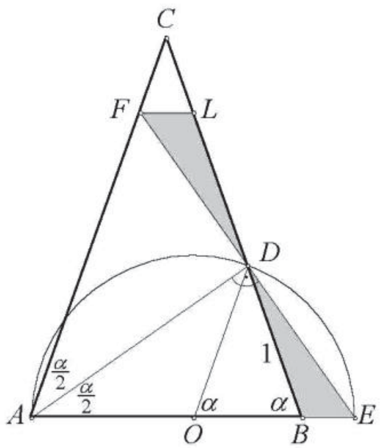


$$\overline{ED} = \tfrac{1}{2}a,\ \overline{EG} = \overline{BF} = x \text{ и}$$
$$\overline{GD} = \overline{DE} - \overline{EG} = \tfrac{1}{2}a - x.$$

Затоа равенството $\overline{FB} = 2\overline{GD}$ е еквивалентно со $x = 2(\frac{1}{2}a - x)$, односно $a = 3x$, што значи $\overline{BC} = 3\overline{BF}$, т.е. $2\overline{BF} = \overline{CF}$.

75. Во рамнокрак $\triangle ABC$, со основа AB, е повлечена бисектриса AD. Правата низ D и нормална на AD ја сече AB во точката E. Најди $\overline{AE}$, ако $\overline{BD} = 1$.

Решение. *Прв начин.* Нека AD е симетрала на аголот кај темето A и нека $DE \perp AD$ (види цртеж). Опишуваме кружница околу правоаголниот $\triangle AED$, со центар во O, тогаш



$$\overline{AO} = \overline{OE} = \overline{OD} = r,$$
$$\measuredangle EOD = 2\measuredangle EAD = 2\frac{\alpha}{2} = \alpha$$

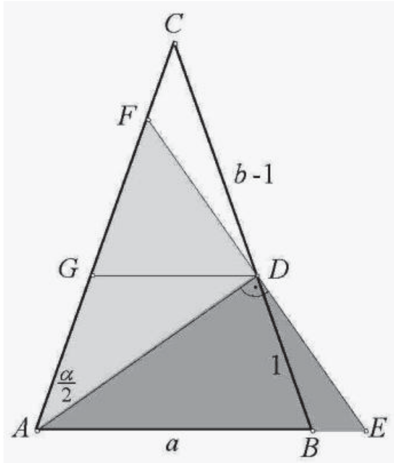
(како централен агол над ист лак).

Оттука следува дека $\triangle OBD$ е рамнокрак, т.е. $\overline{OD} = \overline{BD} = 1$, па имаме

$$\overline{AE} = 2\overline{AO} = 2\overline{OD} = 2 \cdot 1 = 2.$$

Втор начин. Нека DE ја сече AC во точката F, тогаш AD е и висина и тежишна линија на

$\triangle AEF$, па следува дека тој е рамнокрак триаголник, т.е. $\overline{AE}=\overline{AF}$. Нека $FL \parallel AB$, тогаш $\triangle BED \cong \triangle LFD$ (според признак ACA, бидејќи $\overline{DE}=\overline{DF}$, $\measuredangle BED=\measuredangle LDF$ како накрсни и $\measuredangle DBE=\measuredangle DLF$ како наизменични). Од складноста на овие триаголници следува дека $\overline{DL}=\overline{BD}=1$, $\overline{BL}=2$. Бидејќи $\overline{AE}=\overline{AF}$ и $\overline{AF}=\overline{BL}$, следува дека $\overline{AE}=2$.



Трет начин. Нека $DG \parallel AB$ и нека $\overline{AE}=x$, $\overline{AB}=a$, $\overline{AC}=\overline{BC}=b$, $\overline{BD}=1$, $\overline{DC}=b-1$ (види цртеж), тогаш $\triangle AED \cong \triangle AFD$, според ACA (бидејќи AD е заедничка страна, $\measuredangle EAD=\measuredangle FAD=\frac{\alpha}{2}$ и аголот кај D е прав). Оттука следува дека $\overline{ED}=\overline{DF}$, т.е. D е средина на EF .

Бидејќи $DG \parallel AE$, следува дека DG е средна линија во $\triangle AEF$, т.е. $\overline{DG}=\frac{1}{2}\overline{AE}=\frac{x}{2}$. Според теоремата за симетралата AD на аголот кај темето A во $\triangle ABC$ имаме: $\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{CD}$, т.е.

$$a=\frac{b}{b-1} \tag{1}$$

Од сличноста на триаголниците ABC и GDC имаме: $\overline{AB}:\overline{GD}=\overline{BC}:\overline{DC}$, $a:\frac{x}{2}=b:(b-1)$, т.е.

$$a=\frac{x}{2}\frac{b}{b-1} \tag{2}$$

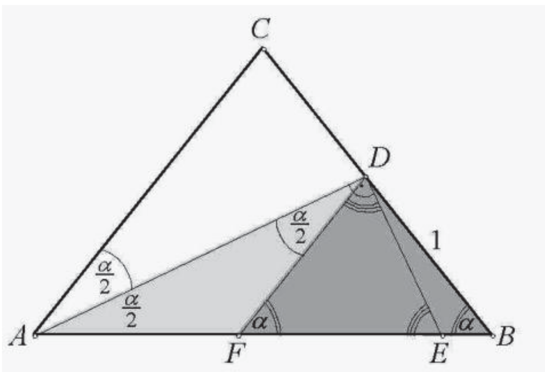
Од (1) и (2) заклучуваме дека $\frac{x}{2}=1$, т.е. $x=2$.

Да забележиме дека до ист резултат доаѓаме, ако симетралата AD ја сече отсечката AB.

Четврт начин. Нека $DF \parallel AC$ (види цртеж) , тогаш $\triangle FDB$ е рамнокрак т.е.

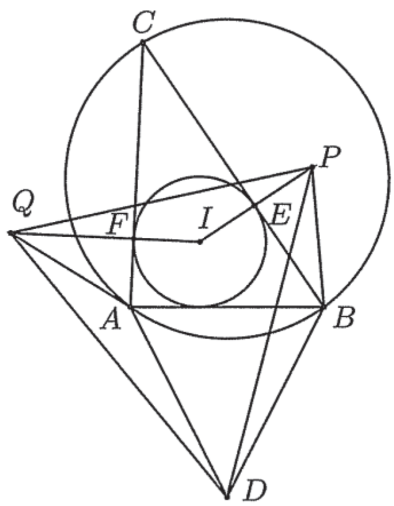
$$\overline{FD}=\overline{BD}=1$$

Понатаму $\measuredangle ADF=\measuredangle DAC=\frac{\alpha}{2}$, како наизменични, па следува дека $\triangle ADF$ е рамнокрак, т.е. $\overline{AF}=\overline{DF}=1$. Бидејќи $\measuredangle EDF=90^\circ-\alpha$ и $\measuredangle FED=90^\circ-\alpha$, следува дека и $\triangle EDF$ е рамнокрак, т.е. $\overline{EF}=\overline{DF}=1$. Оттука добиваме $\overline{AE}=\overline{AF}+\overline{FE}=1+1=2$.



76. Даден е агол $\gamma, 0^\circ<\gamma<180^\circ$ и права AB која ја дели рамнината на две полурамнини ψ и $\overline{\psi}$. Подвижна точка C од ψ е таква што $\measuredangle ACB=\gamma$. Вписаната кружница во $\triangle ABC$ со центар во точката I ги допира AC и BC во точките E и F, соодветно. Точката P лежи на полуправата IE, после E, и е така што

$PE \perp BC$ и $\overline{PE} = \overline{AF}$. Точката Q лежи на полуправата IF, после F и е таква што $QF \perp AC$ и $\overline{QF} = \overline{BE}$. Докажи, дека симетралата на отсечката PE минува низ постојана точка.



Решение. Нека точката $D \in \overline{\psi}$ е таква што $\overline{DA} = \overline{DB}$ и $\measuredangle ADB = 90^\circ - \gamma$. Ќе докажеме, дека тоа е бараната точка, т.е. дека $\overline{QD} = \overline{DP}$.

При стандардните ознаки за аглите на $\triangle ABC$ имаме

$$\measuredangle DAB = \measuredangle ABD = 45^\circ + \tfrac{\gamma}{2}.$$

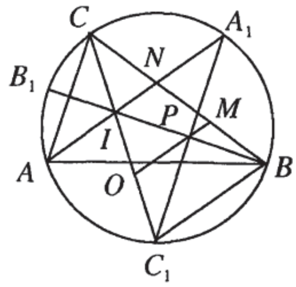
Од $\overline{PE} = \overline{AF}$, $\overline{QF} = \overline{BE}$ и $\measuredangle BEP = \measuredangle AFQ = 90^\circ$ следува, дека $\triangle BEP \cong \triangle QFA$, па затоа $\overline{BP} = \overline{AQ}$ и $\measuredangle FAQ = \measuredangle EPB$. Понатаму

$$\begin{aligned}\measuredangle DBP &= \measuredangle PBE + \beta + 45^\circ + \tfrac{\gamma}{2}\\ &= 90^\circ - \measuredangle FAQ + \beta + 45^\circ + \tfrac{\gamma}{2}\\ &= 360^\circ - \measuredangle FAQ - (45^\circ + \tfrac{\gamma}{2}) - \alpha\\ &= \measuredangle DAQ.\end{aligned}$$

Според тоа, $\triangle QAD \cong \triangle PBD$, т.е. $\overline{QD} = \overline{DP}$.

77. Симетралите на аглите при темињата A, B и C на $\triangle ABC$ ја сечат опишаната кружница околу триаголникот во точките A_1, B_1 и C_1, соодветно. Да означиме $AA_1 \cap CC_1 = I$, $AA_1 \cap BC = N$ и $BB_1 \cap A_1C_1 = P$. Нека O е центарот на опишаната кружница околу $\triangle IPC_1$ и $OP \cap BC = M$. Определи ги аглите на $\triangle ABC$, ако $\overline{BM} = \overline{MN}$ и $\measuredangle BAC = 2\measuredangle ABC$.

Решение. Нека $\measuredangle CAB = \alpha$, $\measuredangle ABC = \beta$ и $\measuredangle BCA = \gamma$. Имаме



$$\begin{aligned}\measuredangle IPC_1 &= \tfrac{1}{2}(BA_1 + C_1B_1) = \tfrac{1}{2}(BA_1 + AC_1 + AB_1)\\ &= \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma) = 90^\circ,\end{aligned}$$

па затоа O е средина на IC_1. Тогаш

$$\measuredangle IOP = 2\measuredangle IC_1P = CA_1 = \alpha.$$

Исто така $\measuredangle CC_1B = \alpha$, па затоа $OP \parallel C_1B$. Бидејќи $\overline{C_1O} = \overline{OI}$ и $\overline{BM} = \overline{MN}$, следува дека $IN \parallel C_1B$, т.е. $\measuredangle CIA_1 = \alpha$. Од друга страна

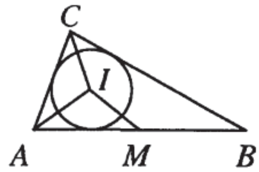
$$\measuredangle CIA_1 = \tfrac{1}{2}(CA_1 + AC_1) = \tfrac{1}{2}(\alpha + \gamma) = 90^\circ - \tfrac{\beta}{2}.$$

Оттука $\alpha = 90^\circ - \frac{\beta}{2} = \frac{\alpha+\gamma}{2}$, т.е. $\alpha = \gamma$. Бидејќи $\alpha = 2\beta$, заклучуваме дека

$\alpha = \gamma = 72^\circ$ и $\beta = 36^\circ$.

78. Нека I е центарот на впишаната кружница во $\triangle ABC$, а M е средината на страната AB. Ако $\overline{CI} = \overline{MI}$, определи ја најмалата можна вредност на $\measuredangle CIM$.

Решение. Без ограничување на општоста можеме да сметаме дека $\overline{AC} < \overline{BC}$. Бидејќи $\measuredangle ACI$ и $\measuredangle AMI$ се остри агли, важи $\triangle ACI \cong \triangle AMI$.



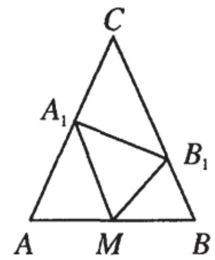
Според тоа, $\overline{AC} = \overline{AM}$ и $\measuredangle AIC = \measuredangle AIM$, т.е.

$$\measuredangle CIM = 360^\circ - 2\measuredangle AIC = 180^\circ - \measuredangle ABC.$$

Јасно, $\measuredangle ABC$ е најголем кога BC е тангента на кружницата со центар во A и радиус AM. Тогаш $\measuredangle ACB = 90^\circ$, $\measuredangle ACB = 30^\circ$, и затоа најмалата можна вредност на $\measuredangle CIM$ е 150°.

79. На краците AC и BC на рамнокракиот $\triangle ABC$ земени се точките A_1 и B_1, соодветно така што $4\overline{AA_1} \cdot \overline{BB_1} = \overline{AB}^2$. Докажи дека симетралите на $\measuredangle AA_1B_1$ и $\measuredangle BB_1A_1$ се сечат на правата AB.

Решение. Нека M е средината на AB. Тогаш равенството од условот на задачата можеме да го запишеме во видот $\frac{\overline{AM}}{\overline{BB_1}} = \frac{\overline{AA_1}}{\overline{BM}}$. Според тоа, $\triangle AMA_1 \sim \triangle BB_1M$. Значи, $\frac{\overline{AA_1}}{\overline{BM}} = \frac{\overline{MA_1}}{\overline{B_1M}}$, т.е. $\frac{\overline{AA_1}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{MA_1}}{\overline{MB_1}}$. Освен тоа, $\measuredangle AA_1M = \measuredangle BMB_1$, па затоа

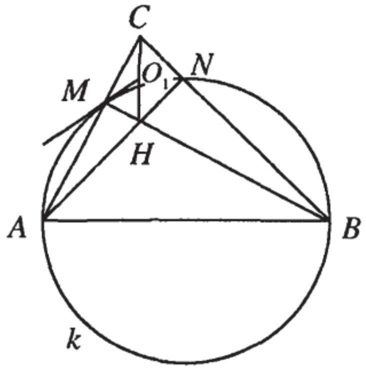


$$\begin{aligned}\measuredangle A_1MB_1 &= 180^\circ - \measuredangle AMB_1 - \measuredangle BMB_1 \\ &= 180^\circ - \measuredangle AMA_1 - \measuredangle AA_1M = \measuredangle A_1AM.\end{aligned}$$

Според тоа, $\triangle AMA_1 \sim \triangle MB_1A_1$, од каде следува $\measuredangle AA_1M = \measuredangle MB_1A_1$. Конечно, од $\triangle BB_1M \sim \triangle AMA_1 \sim \triangle MB_1A_1$ следува дека $\measuredangle BB_1M = \measuredangle MB_1A_1$. Значи, $M \in AB$ е пресечната точка на симетралите на $\measuredangle AA_1B_1$ и $\measuredangle BB_1A_1$.

80. Даден е остроаголен $\triangle ABC$. Кружница k низ A и B ги сече страните AC и BC во внатрешни точки M и N, соодветно. Тангентите на k во точките M и N се сечат во точката O. Докажи, дека O е центар на опишаната кружница околу $\triangle CMN$ ако и само ако AB е дијаметар на k.

Решение. Ако AB е дијаметар на k, тогаш AM и BN се висините на $\triangle ABC$. Нека H е ортоцентарот на $\triangle ABC$ и нека тангентата на k во M ја сече висината CH во точка O_1, цртеж десно. Тогаш $\triangle CMH$ е правоаголен и важи



$$\measuredangle CMO_1 = \measuredangle ABM = \frac{AM}{2}.$$

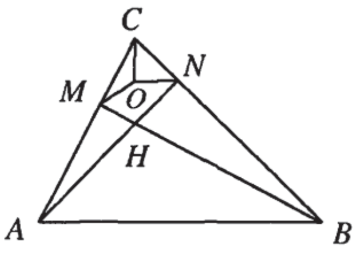
Но, $\measuredangle ABM = \measuredangle ACH$ и затоа $\measuredangle CMO_1 = \measuredangle MCO_1$, т.е. $\triangle MCO_1$ е рамнокрак, од каде заклучуваме дека O_1 е средина на CH. Аналогно се докажува дека тангентата на k во N минува низ O_1, т.е. $O \equiv O_1$ и $\overline{OM} = \overline{ON} = \overline{OC} = \frac{\overline{CH}}{2}$.

Нека O е центар на опишаната кружница околу $\triangle CMN$. Тогаш

$$\measuredangle CMO = \measuredangle MCO = \measuredangle ABM \text{ и}$$
$$\measuredangle CNO = \measuredangle NCO = \measuredangle BAN,$$

па затоа

$$\measuredangle ACB = \measuredangle MCO + \measuredangle NCO = \measuredangle ABM + \measuredangle BAN.$$



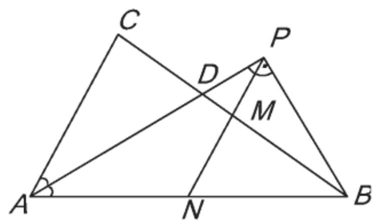
Според тоа,

$$\begin{aligned} 2\measuredangle ANB &= \measuredangle ANB + \measuredangle AMB \\ &= 180^\circ - \measuredangle ABC - \measuredangle BAN + 180^\circ - \measuredangle BAC - \measuredangle ABM \\ &= 360^\circ - (\measuredangle ABC + \measuredangle ACB + \measuredangle BAC) = 180^\circ, \end{aligned}$$

од каде следува $\measuredangle ANB = 90^\circ$, т.е. AB е дијаметар на k.

81. Нека M и N се средините на страните BC и AB на $\triangle ABC$, соодветно и точката D лежи на страната BC. Докажи, дека ако $P = AD \cap MN$, тогаш $AP \perp BP$ ако и само ако AD е симетрала на $\measuredangle CAB$.

Решение. Нека $AP \perp BP$. Тогаш $\triangle ABP$ е правоаголен и PN е тежишна линија повлечена кон хипотенузата. Според тоа, $\overline{PN} = \overline{AN} = \overline{BN}$, од каде следува дека $\measuredangle PAN = \measuredangle APN$. Освен тоа, бидејќи MN е средна линија на $\triangle ABC$ добиваме дека $\measuredangle APN = \measuredangle PAC$. Според тоа, $\measuredangle CAP = \measuredangle PAN$, т.е. AD е симетрала на $\measuredangle CAB$.



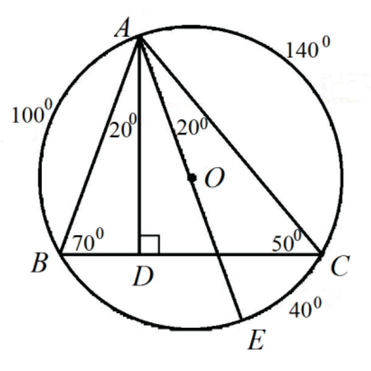
Нека AD е симетрала на $\measuredangle CAB$. Тогаш од $\measuredangle CAP = \measuredangle PAN = \measuredangle APN$ следува, дека $\overline{PN} = \overline{AN}$, што значи дека $\triangle ABP$ е правоаголен, т.е. $AP \perp BP$.

82. Во $\triangle ABC$ важи $\measuredangle ACB = 50^\circ$ и $\measuredangle CBA = 70^\circ$. Нека D е подножјето на нормалата повлечена од точката A кон страната BC, O е центарот на опишаната кружница околу $\triangle ABC$ и E е точката на кружницата која е дијаметрално спротивна на точката A. Определи ја големината на $\measuredangle DAE$.

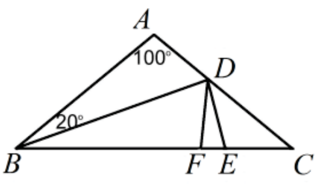
Решение. Во правоаголниот $\triangle ABD$ важи $\measuredangle BAD = 20^\circ$. Понатаму, $\measuredangle AOC = 2\measuredangle ABC = 140^\circ$. Затоа $\measuredangle COE = 180^\circ - \measuredangle AOC = 40^\circ$, што значи дека $\measuredangle CAE = 20^\circ$.

Бидејќи $\measuredangle BAC = 60^\circ$, добиваме дека

$$\begin{aligned} \measuredangle DAE &= \measuredangle BAC - \measuredangle BAD - \measuredangle EAC \\ &= 60^\circ - 20^\circ - 20^\circ = 20^\circ. \end{aligned}$$



83. Нека ABC е рамнокрак триаголник и $\measuredangle BAC = 100^\circ$. Нека D е пресечната точка на симетралата на $\measuredangle ABC$ и страната AC. Докажи дека $\overline{AD} + \overline{DB} = \overline{BC}$.

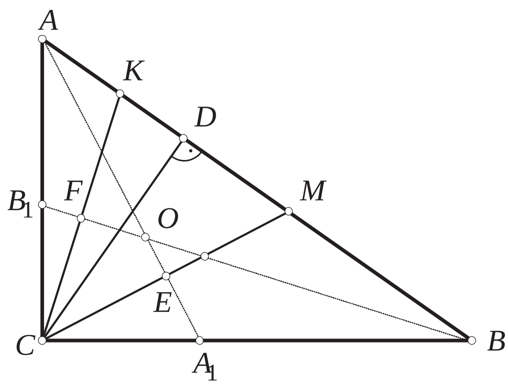


Решение. Нека E е точка на BC таква што $\overline{BE} = \overline{BD}$. Тогаш $\triangle BED$ е рамнокрак со агол меѓу краците 20°, па затоа аглите при основата му се 80°. Аголот $\measuredangle BED$ е надворешен за $\triangle ECD$, па затоа $80^\circ = \measuredangle BED = \measuredangle ECD + \measuredangle CDE$. Сега, $\measuredangle ECD = 40^\circ$ следува $\measuredangle CDE = 40^\circ$, па затоа $\triangle ECD$ е рамнокрак и важи $\overline{DE} = \overline{EC}$. Нека F е точка на BC таква што $\overline{BF} = \overline{BA}$. Тогаш триаголниците ABD и FBD се складни (признак САС). Оттука следува дека $\measuredangle BDF = \measuredangle BDA = 60^\circ$ и $\overline{AD} = \overline{DF}$. Но, тогаш $\measuredangle FDC = 60^\circ$. Од друга страна $\measuredangle CFD$ е надворешен за $\triangle BFD$, па затоа $\measuredangle CFD = 80^\circ$. Според тоа, $\triangle CDF$ е рамнокрак, па затоа $\overline{AD} = \overline{DF} = \overline{DE} = \overline{EC}$. Затоа $\overline{AD} + \overline{DB} = \overline{EC} + \overline{BE} = \overline{BC}$.

84. Нека CD е висина на триаголникот ABC ($\measuredangle C = 90^\circ$), а CK и CM бисектриси на аглите ACD и BCD. Докажи дека центарот на кружницата опишана околу триаголникот KCM се совпаѓа со центарот на впишаната кружница во триаголникот ABC.

Решение. *Прв начин.* Нека AA_1 и BB_1 се симетралите на аглите CAB и CKM соодветно. Нека $\{E\} = CM \cap AA_1$ и $\{F\} = CK \cap BB_1$. Тогаш CK (агли со заемно нормални краци) и $\measuredangle BCD = \measuredangle BAC$ (агли со заемно нормални краци), па

$$\begin{aligned}\measuredangle ACM &= \measuredangle ACD + \measuredangle DCM\\ &= \measuredangle ABC + \tfrac{1}{2}\measuredangle BAC,\\ \measuredangle BCK &= \measuredangle BCD + \measuredangle DCK\\ &= \measuredangle BAC + \tfrac{1}{2}\measuredangle ABC.\end{aligned}$$



Според тоа

$$\begin{aligned}\measuredangle AMC &= \measuredangle MBC + \measuredangle MCB\\ &= \measuredangle ABC + \tfrac{1}{2}\measuredangle DCB\\ &= \measuredangle ABC + \tfrac{1}{2}\measuredangle BAC = \measuredangle ACM.\end{aligned}$$

Значи триаголникот AMC е рамнокрак, па BF е симетрала на страната MC. Слично, имаме:

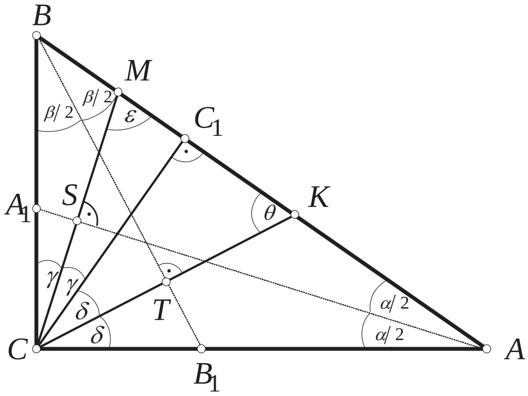
$$\measuredangle BKC = \measuredangle CAB + \measuredangle ACK = \measuredangle BAC + \tfrac{1}{2}\measuredangle ACD = \measuredangle BCK.$$

Според тоа триаголникот BCK е рамнокрак, па BF е симетрала на страната CK. Конечно добивме дека пресекот на симетралите на страните на триаголникот CKM се совпаѓа со пресекот на симетралите на аглите на триаголникот ABC и со тоа тврдењето е докажано.

Втор начин. Нека AA_1 и BB_1 се симетрали на аглите CAB и ABC, соодветно, CC_1 е висина на ΔABC,

$\{S\} = AA_1 \cap MC$ и $\{T\} = CK \cap BB_1$.

Аглите да ги означиме како на цртежот. Тогаш $\triangle ABC \sim \triangle CBC_1$ (тие се правоаголни и имаат заеднички агол β), па $2\gamma = 2\frac{\alpha}{2}$, т.е $\gamma = \frac{\alpha}{2}$. Триаголникот CC_1M е правоаголен, па $\varepsilon = 90^\circ - \gamma = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$. Да го разгледаме триаголникот AMS. Збирот на неговите агли ε и $\frac{\alpha}{2}$ е 90°, па $\measuredangle ASM = 90^\circ$.



Значи во $\triangle ACM$ симетралата на аголот CAM е AA_1, а таа е и висина спуштена од A. Следува $\triangle ACM$ е рамнокрак со основа CM. На сличен начин, од $\triangle ABC \sim \triangle CAC_1$, следува дека и $\triangle BCK$ е рамнокрак со основа CK. Правите AA_1 и BB_1 се симетрали на аглите α и β на $\triangle ABC$ и симетрали на страните CM и CK на $\triangle BKC$, па со тоа тврдењето е докажано.

85. Околу $\triangle ABC, b \geq c$ опишана е кружница. Од средината E на лакот BC кој не ја содржи точката A повлечен е дијаметар ED. Докажи дека $\measuredangle DEA = \frac{1}{2}(\beta - \gamma)$, каде β и γ се аглите на триаголникот во темињата B и C, соодветно.

Решение. Аголот $\measuredangle DAE$ е прав агол, како перифериски агол на дијаметарот DE на кружницата. Понатаму,

$$\measuredangle ADE = \measuredangle ADB + \measuredangle BDE \qquad (1)$$

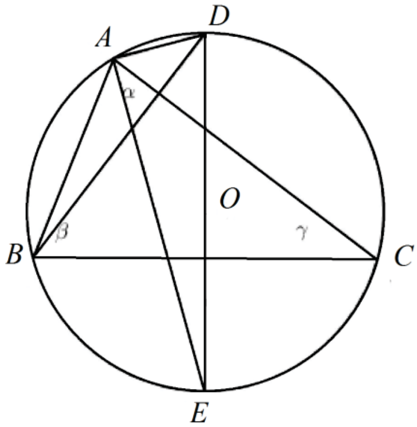
$$\measuredangle ADB = \measuredangle ACB = \gamma \qquad (2)$$

(како периферни агли над ист лак AB) и

$$\measuredangle BDE = \measuredangle BAE = \frac{\alpha}{2} \qquad (3)$$

(бидејќи $BE = CE$). Сега од (1), (2) и (3) следува

$$\measuredangle ADE = \gamma + \frac{\alpha}{2}. \qquad (4)$$



Понатаму, од правоаголниот $\triangle ADE$ добиваме

$$\measuredangle DEA = 90^\circ - \measuredangle ADE = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} - \measuredangle ADE,$$

а оттука заради (4) имаме

$$\measuredangle DEA = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} - (\gamma + \frac{\alpha}{2}) = \frac{1}{2}(\beta - \gamma).$$

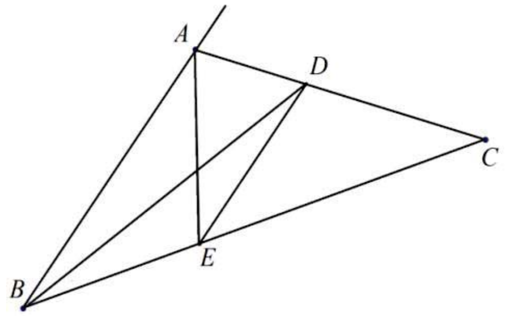
86. Во рамнокрак $\triangle ABC$, $\overline{AB} = \overline{BC}$ аголот при темето A е еднаков на 108°. Симетралата на $\measuredangle ABC$ ја сече страната AC во точката D, а точката E е на страната ABC иважи . Пресметај ја должината на отсечката ED ако $\overline{AE} = m$.

Решение. Од $\overline{AB} = \overline{BC}$ следува дека $\measuredangle ABC = \measuredangle ACB = 36^\circ$. Бидејќи $\overline{BE} = \overline{AE}$, добиваме дека $\measuredangle EAB = \measuredangle EBA = 36^\circ$. Значи, $\measuredangle CAE = 108^\circ - 36^\circ = 72^\circ$. Според тоа,

AC е симетрала на надворешниот агол на $\triangle AEB$, па затоа D е центар на припишаната кружница на $\triangle AEB$. Значи, ED е симетрала на $\measuredangle AEC$, па затоа $\measuredangle DEA = \measuredangle DEC = 36^\circ$. Според тоа,

$$\measuredangle ADE = 180^\circ - 72^\circ - 36^\circ = 72^\circ.$$

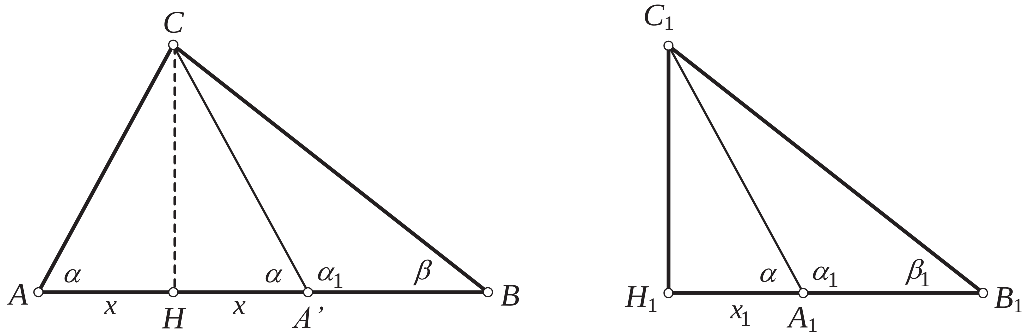
Значи, $\triangle ADE$ е рамнокрак, па затоа $\overline{ED} = \overline{AE} = m$.



87. Нека a, b, c и a_1, b_1, c_1 се должините на страните на триаголниците ABC и $A_1B_1C_1$, соодветно, а α, β, γ и $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ нивните агли. Докажи, ако $\alpha + \alpha_1 = \pi$, $\beta = \beta_1$, тогаш $aa_1 = bb_1 + cc_1$.

Решение. Ако $\alpha = \alpha_1 = \frac{\pi}{2}$, тогаш триаголниците ABC и $A_1B_1C_1$ се правоаголни, а од $\beta = \beta_1$ следува дека се слични. Тогаш $a = ka_1$, $b = kb_1$ и $c = kc_1$ и оттука

$$aa_1 = ka_1a_1 = k(b_1^2 + c_1^2) = kb_1^2 + kc_1^2 = bb_1 + cc_1.$$



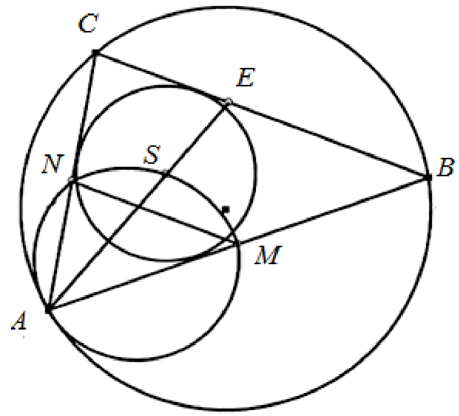
Да претпоставиме, без губење на општоста, дека $\alpha < \alpha_1$. Нека CH и C_1H_1 се висините во триаголниците ABC и $A_1B_1C_1$, соодветно. Да означиме со $x = \overline{AH}$, $x_1 = \overline{A_1H_1}$ и нека A' е точка од страната AB, таква што $x = \overline{A'H}$. Тогаш, од правоаголните триаголници $H_1B_1C_1$ и $H_1A_1C_1$ имаме $a_1^2 - (c_1 + x_1)^2 = b_1^2 - x_1^2$, односно, $a_1^2 = c_1^2 + b_1^2 + 2c_1x_1$.

Триаголниците CHA' и $C_1H_1A_1$ се слични со коефициент на сличност $k = \frac{\overline{CA'}}{\overline{C_1A_1}}$, исто како и триаголниците BCA' и $B_1C_1A_1$. Тогаш: $x = kx_1$, $a = ka_1$, $b = \overline{CA'} = kb_1$ и $c - 2x = kc_1$. Тогаш:

$$\begin{aligned} aa_1 &= ka_1a_1 = k(b_1^2 + c_1^2 + 2c_1x_1) = kb_1^2 + c_1(kc_1 + 2kx_1) \\ &= bb_1 + c_1(c - 2x + 2x) = bb_1 + cc_1. \end{aligned}$$

88. Во $\triangle ABC$ важи $\overline{BC} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{AC})$. Нека се M и N средините на отсечките AB и AC и нека k е кружницата опишана околу $\triangle AMN$. Докажи дека центарот на впишаната кружница во $\triangle ABC$ припаѓа на кружницата k.

Решение. Нека E е пресекот на симетралата на $\measuredangle BAC$ и отсечката BC. Тогаш важи $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{CE}}$. Оттука следува



$$\frac{\overline{AB}+\overline{AC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BE}+\overline{CE}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{CE}}$$

т.е. $\frac{2\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{CE}}$, а од овде следува

$$\overline{CE} = \frac{1}{2}\overline{AC} = \overline{CN}.$$

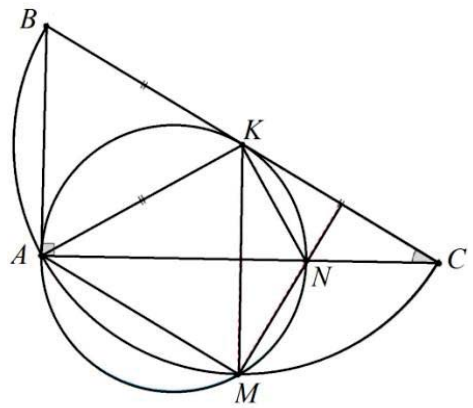
Аналогно се докажува дека

$$\overline{BE} = \frac{1}{2}\overline{AB} = \overline{BM}.$$

Според тоа, триаголниците NEC и EMB се рамнокраки, па затоа симетралите на аглите $\measuredangle NCE$ и $\measuredangle MBE$ истовремено се и симетрали на отсечките NE и ME, соодветно. Нивниот пресек е точката S, центарот на опишаната кружница околу $\triangle MNE$, па затоа припаѓа и на симетралата на отсечката MN. Точката S истовремено е центар и на впишаната кружница на $\triangle ABC$, па затоа се наоѓа на симетралата на аголот $\measuredangle BCA$, односно на аголот $\measuredangle MAN$. Но, симетралата на внатрешниот агол и симетралата на спротивната страна на тој агол во триаголникот се сечат на кружницата опишана околу триаголникот, па затоа точката S лежи на кружницата k.

89. Даден е правоаголен $\triangle ABC, \measuredangle A = 90^\circ, \measuredangle C = 30^\circ$. Кружницата ω минува низ точката A и ја допира страната BC во нејзината средина K. Нека ω ги сече страната AC и опишаната кружница околу $\triangle ABC$ во точките N и M, соодветно. Докажи, дека $MN \perp BC$.

Решение. Имаме $\overline{AK} = \overline{KC}$, па затоа



$$\measuredangle KAC = \measuredangle NKC = 30^\circ,$$

од каде добиваме

$$\measuredangle ANK = \measuredangle NKC + \measuredangle ACB = 60^\circ.$$

Точките A, K, N, M лежат на ω, па затоа

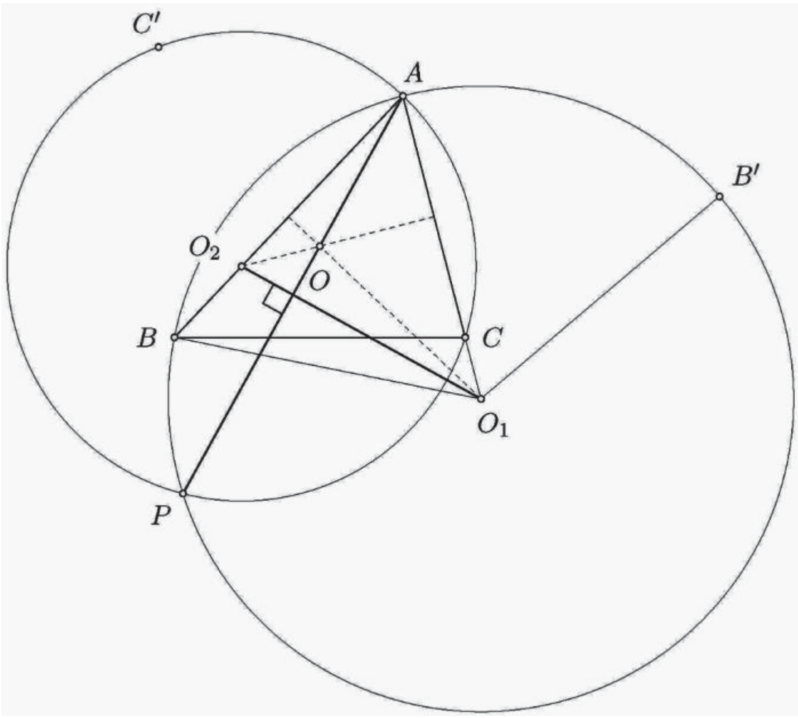
$$\measuredangle KAN = \measuredangle KMN = 30^\circ, \ \measuredangle AMK = 60^\circ.$$

Понатаму, K е центар на опишаната кружница околу $\triangle ABC$, па затоа $\overline{AK} = \overline{KC} = \overline{KM}$. Според тоа, $\triangle AKM$ е рамностран. Значи, $\measuredangle AKM = 60^\circ$, па како $\measuredangle AKB = 60^\circ$, добиваме дека $\measuredangle MKC = 60^\circ$. Од друга страна, $\measuredangle KMN = 30^\circ$, па затоа $MN \perp BC$.

90. Даден е остроаголен $\triangle ABC$. Точката B' е осносиметрична слика на точката B во однос на правата AC, а точката C' е осносиметрична слика на точката C во однос на правата AB. Опишаните кружници околу триаголниците ABB' и ACC' се сечат во точките A и P. Докажи, дека центарот на опишаната кружница околу $\triangle ABC$ лежи на правата AP.

Решение. Нека O_1 е пресекот на правата AC и симетралата на страната AB. Заради осната симетрија важи $\overline{BO_1} = \overline{B'O_1}$, т.е. O_1 е центарот на опишаната кружница околу триаголникот ABB'. Аналогно ја дефинираме точката O_2 како пресек на правата AB и симетралата на страната AC, што значи дека таа е центар на опишаната кружница околу триаголникот ACC'.

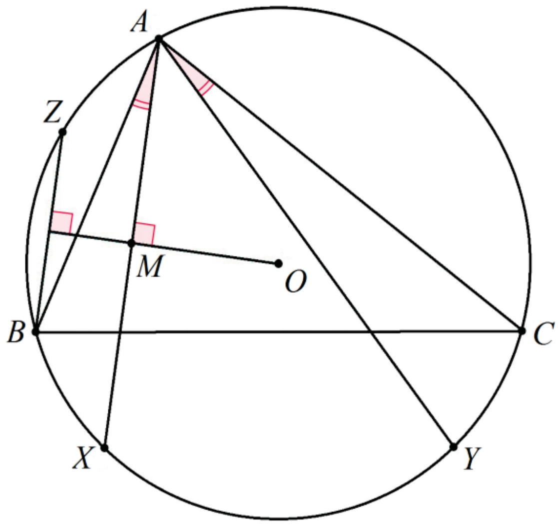
Бидејќи AP е заедничка тетива на двете кружници, правата AP е нормална на правата O_1O_2. Симетралите на страните AB и AC се сечат во точката O, т.е. OO_1 е нормална на AB и OO_2 е нормална на AC. Значи, O е ортоцентар на триаголникот AO_2O_1. Заклучуваме дека правата AO е нормална на правата O_1O_2.



Значи, правите AP и AO се нормални на O_1O_2, од што следува дека тие се совпаѓаат, т.е. точките A, O и P се колинеарни.

91. Даден е $\triangle ABC$. На лакот BC на опишаната кружница околу $\triangle ABC$, кој не ја содржи точката A, земени се точки X и Y такви што $\measuredangle BAX = \measuredangle CAY$. Нека M е средината на тетивата AX. Докажи, дека $\overline{BM} + \overline{CM} > \overline{AY}$.

Решение. Нека O е центарот на опишаната кружница околу $\triangle ABC$. Тогаш $OM \perp AX$. Повлекуваме нормала од B на OM и нека таа ја сече опишаната кружница во точката Z. Од $BZ \perp OM$ следува дека OM е симетрала на BZ. Според тоа, $\overline{MZ} = \overline{MB}$.



Сега од неравенството на триаголник следува

$$\overline{BM}+\overline{MC}=\overline{ZM}+\overline{MC}>\overline{CZ}.$$

Но, $BZ \parallel AX$, па затоа

$$AZ = BX = CY$$

од каде добиваме

$$ZAC = ZA + AC = YC + CA = YCA$$

т.е. $\overline{CZ}=\overline{AY}$. Затоа $\overline{BM}+\overline{CM}>\overline{AY}$.

92. Даден е $\triangle ABC$ и во него произволна точка M . Нека правите MA, MB, MC ги сечат страните BC, AC и AB соодветно, во точките P, Q, R . Да се докаже дека меѓу односите $\overline{AM}:\overline{MP}$, $\overline{BM}:\overline{MQ}$ и $\overline{CM}:\overline{MR}$ има барем еден кој не е поголем од 2 и барем еден кој не е помал од 2.

Решение. Нека T е тежиштето на $\triangle ABC$ и нека U,V,W се соодветно средините на страните BC, CA и AB . Ако $M \equiv T$, тогаш $P \equiv U$, $Q \equiv V$, $R \equiv W$, па затоа важи $\overline{AM}:\overline{MP}=\overline{AT}:\overline{TU}=2:1=2$.

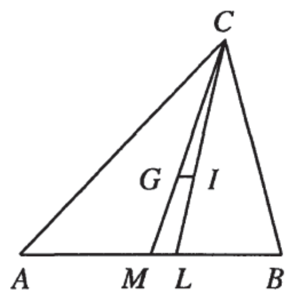
Нека $M \neq T$. Да ги разделиме страните CA и AB во однос $2:1$ со точките N и L соодветно (направи цртеж). Тогаш $TN \parallel AB$ и $TL \parallel BC$. Правата CR ја сече TN во точка D што се наоѓа меѓу C и M , од каде што следува дека

$$\overline{CM}:\overline{MR}\geq\overline{CD}:\overline{DR}=2:1=2.$$

Аналогно, AP ја сече TL во точка E , која е меѓу M и P , па според тоа

$$\overline{AM}:\overline{MP}\leq\overline{AE}:\overline{EP}=2:1=2.$$

93. Даден е $\triangle ABC$ со тежиште G и центар на впишаната кружница I . Ако $\overline{AB}=42$, $\overline{GI}=2$ и $AB \parallel GI$, определи ги должините на страните AC и BC .



Решение. Нека CM е тежишната линија и CL симетралата на аголот (цртеж десно). При стандардните ознаки за елементите на $\triangle ABC$ имаме $\frac{\overline{AL}}{\overline{BL}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=\frac{b}{a}$, па затоа $\overline{AL}=\frac{bc}{a+b}$. Од својствата на симетралата за $\triangle ALC$ имаме $\frac{\overline{CI}}{\overline{IL}}=\frac{\overline{CA}}{\overline{AL}}=\frac{a+b}{c}$. Од теоремата на Талес следува $\frac{\overline{CI}}{\overline{IL}}=\frac{\overline{CG}}{\overline{GM}}$, т.е. $\frac{a+b}{c}=2$, па затоа $a+b=84$. За $a \geq b$ имаме

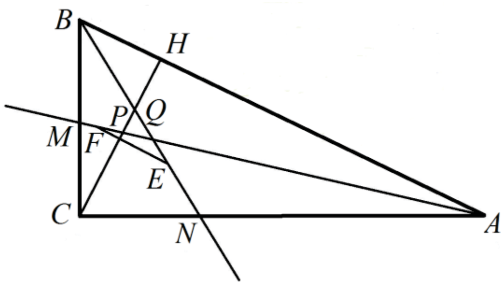
$$\overline{LM}=\tfrac{3}{2}\overline{IG}=2,\quad \overline{AM}=21 \text{ и } \overline{AL}=\overline{AM}-\overline{LM}=18, \overline{LB}=\overline{BM}+\overline{LM}=24,$$

па затоа $\frac{b}{a}=\frac{18}{24}=\frac{3}{4}$. Ја добиваме равенката $3x+4x=84$, од каде наоѓаме $x=12$, $\overline{AC}=36$ и $\overline{BC}=48$. Ако $a \leq b$, тогаш $\overline{AC}=48$ и $\overline{BC}=36$.

94. Нека M е произволна точка од хипотенузата BC на правоаголниот $\triangle ABC$. Точките P и Q се осносиметрични точки на точката M во однос на AB и AC , соодветно. Докажи дека $\overline{MP}\cdot\overline{MQ}\leq\overline{AB}\cdot\overline{AC}$.

Решение. Нека M_1 и M_2 се проекциите на M врз катетите AB и AC соодветно. Од сличноста $\Delta BM_1M \sim \Delta BAC$ имаме $\frac{\overline{MM_1}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{MB}}{\overline{BC}}$. Од сличноста $\Delta MM_2C \sim \Delta BAC$ имаме $\frac{\overline{MM_2}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{MC}}{\overline{BC}}$. Со множење на последните две равенства добиваме $\frac{\overline{MM_2}}{\overline{AB}} \cdot \frac{\overline{MM_1}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{MC}\cdot\overline{MB}}{\overline{BC}^2} = \frac{\overline{MC}\cdot\overline{MB}}{(\overline{MC}+\overline{MB})^2} \leq \frac{1}{4}$. Последното неравенство се добива од неравенството $(\overline{MC}-\overline{MB})^2 \geq 0$. Од равенствата $\overline{MP} = 2\overline{MM_1}$ и $\overline{MQ} = 2\overline{MM_2}$, неравенството $\frac{\overline{MM_2}}{\overline{AB}} \cdot \frac{\overline{MM_1}}{\overline{AC}} \leq \frac{1}{4}$ го добива обликот $\frac{2\overline{MM_2}}{\overline{AB}} \cdot \frac{2\overline{MM_1}}{\overline{AC}} \leq 1$, т.е. $\frac{\overline{MP}\cdot\overline{MQ}}{\overline{AB}\cdot\overline{AC}} \leq 1$, што и требаше да се докаже.

95. Нека ABC е правоаголен триаголник, со прав агол во темето C, и нека симетралите на внатрешните агли во темињата A и B ги сечат спротивните катети соодветно во точките M и N. Висината CH ги сече правите AM и BN соодветно во точките P и Q. Докажи дека правата која минува низ средините на отсечките QN и PM е паралелна со хипотенузата AB.

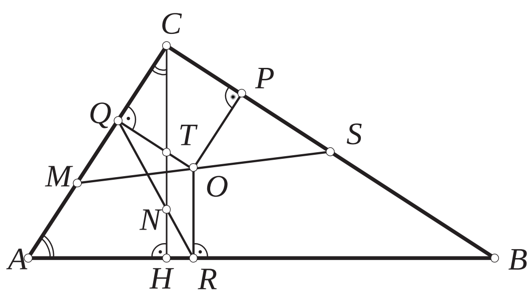


Решение. Нека E и F се соодветно средините на отсечките MP и NQ. Да означиме $\measuredangle MAC = \measuredangle MAB = \frac{\alpha}{2}$. Од правоаголните триаголници AMC и APH следува

$$\measuredangle CMA = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} = \measuredangle APH = \measuredangle CPM .$$

Според тоа, триаголникот CPM е рамнокрак и $CF \perp MP$. Бидејќи $\measuredangle CFA = \measuredangle CHA = 90^\circ$, заклучуваме дека точките C, F, H, A лежат на иста кружница, па затоа $\measuredangle FCH = \measuredangle FAH = \measuredangle FAC = \measuredangle FHC$. Според тоа, триаголникот CFH е рамнокрак и $\overline{FC} = \overline{FH}$. Значи, точката F се наоѓа на симетралата на отсечката CH. Аналогно, може да се покаже дека и точката E се наоѓа на симетралата на отсечката CH. Затоа $EF \perp CH$ и како $CH \perp AB$ добиваме $EF \parallel AB$.

96. Во правоаголен триаголник ABC правата што минува низ средината S на катетата BC и центарот O на впишаната кружница, ја сече катетата AC во точка M, а правата што минува низ допирните точки на впишаната кружница и страните AB и AC, ја сече висината CH во точката N. Докажи дека $\overline{CM} = \overline{CN}$.



Решение. Нека $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$, $\overline{AB} = c$, r-радиус на впишаната кружница и нека P, Q и R се допирните точки на впишаната кружница со центар O со страните на ΔABC. Точката S е средина на катетата BC. Треба да докажеме дека $\overline{CM}=\overline{CN}$ (види цртеж).

Од сличноста на триаголниците SPO и SCM $(PO \| CM)$ имаме

$$\overline{SP}:\overline{SC}=\overline{OP}:\overline{MC}$$
$$(\tfrac{a}{2}-r):\tfrac{a}{2}=r:\overline{MC}$$
$$\overline{MC}=\frac{ar}{a-2r}=\frac{a\frac{a+b-c}{2}}{a-(a+b-c)}=\frac{a^2+a(b-c)}{2(c-b)}$$
$$\overline{MC}=\frac{c^2-b^2+a(b-c)}{2(c-b)}=\frac{(c-b)(c+b-a)}{2(c-b)}=\frac{c+b-a}{2}$$

Понатаму е: $\overline{CN}=\overline{CT}+\overline{TN}$. Триаголникот QRO е рамнокрак $(\overline{OR}=\overline{OQ}=r)$ и е сличен со триаголникот QNT. Значи $\overline{TN}=\overline{TQ}$, а тогаш $\overline{CN}=\overline{CT}+\overline{TQ}$.

Од сличноста на триаголниците CQT и CHA добиваме:

$$\overline{CQ}:\overline{TQ}=\overline{CH}:\overline{AH},\quad r:\overline{TQ}=h:\overline{AH}$$

Бидејќи

$$\overline{AH}=\sqrt{b^2-h^2}=\sqrt{b^2-(\tfrac{ab}{c})^2}=\tfrac{1}{c}\sqrt{b^2(c^2-a^2)}=\tfrac{b^2}{c},\ ,$$

тогаш

$$\overline{TN}=\overline{TQ}=\frac{r}{h}\frac{b^2}{c}=\frac{rb^2}{ab}=\frac{rb}{a}.$$

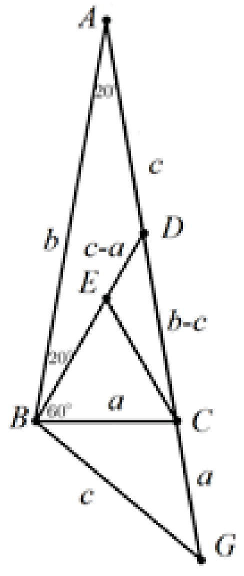
Од правоголникот $\triangle CTQ$ наоѓаме: $\overline{CT}^2=\overline{CQ}^2+\overline{TQ}^2=r^2+\frac{r^2b^2}{a^2}=\frac{r^2}{a^2}(a^2+b^2)$, т.е. $\overline{CT}=\frac{rc}{a}$. Конечно, за $\overline{CN}$ добиваме

$$\overline{CN}=\overline{CT}+\overline{TN}=\frac{rc}{a}+\frac{rb}{a}=\frac{r}{a}(c+b)=\frac{(a+b-c)(c+b)}{2a}$$
$$=\frac{ac+bc-c^2+ab+b^2-bc}{2a}=\frac{ac+ab-a^2}{2a}=\frac{c+b-a}{2}.$$

Следствено $\overline{CM}=\overline{CN}$.

97. Во рамнокрак $\triangle ABC$ важи $\measuredangle BAC=\measuredangle ABD=20^\circ$, $AB=AC$ и $D\in AC$. Докажи го равенството

$$\frac{1}{\overline{BD}}=\frac{1}{\overline{BC}}-\frac{1}{\overline{AB}}.$$



Решение. *Прв начин.* Да ги воведеме следниве ознаки:

$$\overline{AB}=\overline{AC}=b,\ \overline{BC}=a \text{ и } \overline{BD}=c.$$

Тогаш даденото равенство го добива обликот

$$\frac{1}{c}=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}.$$

Ако двете страни на последното равенство ги помножиме со abc добиваме

$$ab=bc-ac. \qquad (*)$$

Во рамнокракиот $\triangle ABC$ важи

$$\measuredangle ABC=\measuredangle ACB=(180^\circ-20^\circ):2=80^\circ.$$

Понатаму, $\triangle ABD$ исто така е рамнокрак, па затоа

$$\overline{AD}=\overline{BD}=c \text{ и } \overline{CD}=\overline{AC}-\overline{AD}=b-c.$$

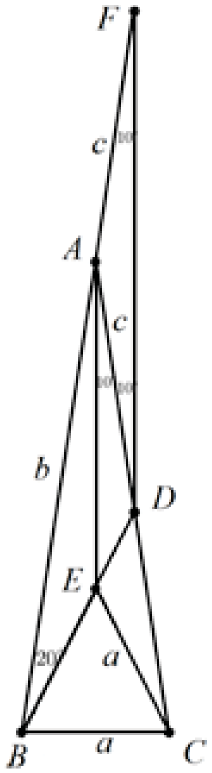
На отсечката BD да определиме точка E таква што важи $\overline{BE} = \overline{BC} = a$ (цртеж десно). Тогаш $\triangle BCE$ е рамностран, бидејќи $\overline{BE} = \overline{BC}$ и $\measuredangle CBE = 80^\circ - 20^\circ = 60^\circ$. Во $\triangle CDE$ важи

$$\measuredangle DCE = 80^\circ - 60^\circ = 20^\circ,\ \measuredangle CED = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ,$$

$$\measuredangle CDE = 180^\circ - (120^\circ + 20^\circ) = 40^\circ \text{ и } DE = BD - BE = c - a.$$

Да ја продолжиме страната AC до тачка G така што $\overline{CG} = \overline{BC} = a$. Тогаш $\triangle BCG$ е рамнокрак, што значи дека

$$\measuredangle CBG = \measuredangle BGC = \tfrac{1}{2}\measuredangle BCA = 40^\circ.$$



Но, $\measuredangle BDC = 40^\circ$ и оттука заклучуваме дека $\triangle BDG$ е рамнокрак. Затоа $\overline{BG} = \overline{BD} = c$. Триаголниците ABG и CDE имаат еднакви агли, па затоа се слични. Од сличноста следува

$$\overline{AB} : \overline{BG} = \overline{CE} : \overline{DE},\ \text{т.е. } b : c = a : (c - a).$$

Одовде добиваме $b(c-a) = ac$ или $bc - ab = ac$, односно

$$bc - ac = ab,$$

што значи дека важи $(*)$.

Втор начин. Тачку E одредимо како во претходното решение, а потоа да ја продолжиме страната BA до тачка F така што важи $\overline{AF} = \overline{AD} = c$ (цртеж лево). Тогаш $\triangle ADF$ е рамнокрак, па затоа важи

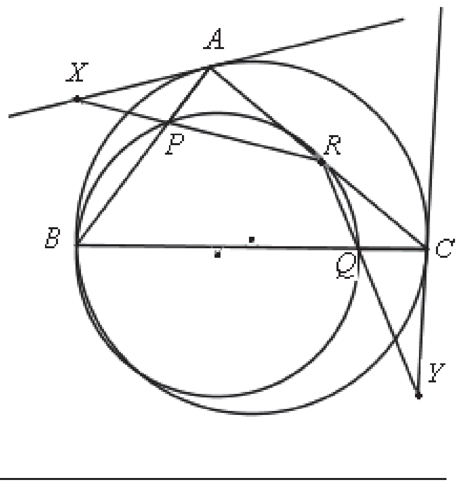
$$\measuredangle AFD = \measuredangle ADF = \tfrac{1}{2}\measuredangle BAC = 10^\circ.$$

Триаголниците AEC и BDF се слични, бидејќи имаат еднакви агли. Затоа

$$\overline{CE} : \overline{BD} = \overline{AC} : \overline{BF},\ \text{т.е. } a : c = b : (b + c).$$

Од последното равенство, после средувањето го добиваме бараното равенство $(*)$.

98. На страните AB, BC и CA на триаголникот ABC се избрани точки P, Q и R, соодветно, така што $\overline{AP} = \overline{CQ}$ и точките P, Q, R и B лежат на иста кружница. Тангентите во точките A и C, на опишаната кружница околу триаголникот ABC, ги сечат правите RP и RQ во точки X и Y, соодветно. Докажи дека $\overline{RX} = \overline{RY}$.



Решение. Од

$$\measuredangle APX = \measuredangle RPB = \measuredangle RQC,$$

$$\measuredangle XAB = \measuredangle ACB = \measuredangle RCQ$$

и $\overline{AP} = \overline{CQ}$ следува дека $\triangle AXP \cong \triangle CRQ$, па затоа важи $\overline{XP} = \overline{RQ}$. Од

$$\measuredangle YCQ = \measuredangle YCB = \measuredangle CAB = \measuredangle RAP,$$

$$\measuredangle APR = 180^\circ - \measuredangle BPR = \measuredangle RQB = \measuredangle CQY$$

и $\overline{AP}=\overline{CQ}$, следува дека $\triangle APR \cong \triangle CQY$, па затоа важи $\overline{PR}=\overline{QY}$. Конечно:

$$\overline{RX}=\overline{RP}+\overline{PX}=\overline{QY}+\overline{RQ}=\overline{RY}.$$

99. Нека се M и N подножјата на нормалите повлечени од темето A кон симетралите на надворешните агли при темињата B и C на $\triangle ABC$. Докажи дека должината на отсечката MN е еднаква на половина од должината на периметарот на $\triangle ABC$.

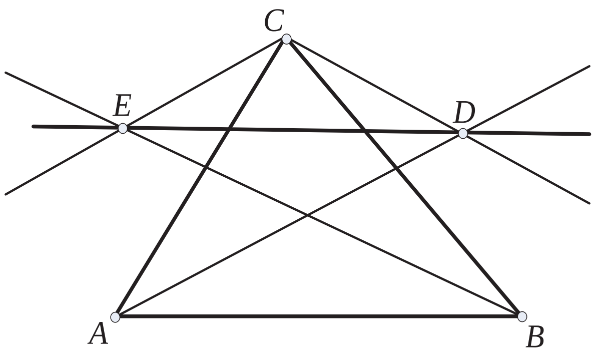
Решение. Нека E и E се средините на страните AB и AC на $\triangle ABC$. Бидејќи $\triangle ABM$ е правоаголен, точката E е центар на опишаната кружница околу $\triangle ABM$. Затоа $\overline{EB}=\overline{EM}$ и $\measuredangle EMB=\measuredangle EBM$ и овие агли се суплементни на $\measuredangle MBC$, од што следува дека $ME \parallel BC$ (направи цртеж). Но, $EF \parallel BC$, па затоа точките M,E,F и N се колинеарни. Според тоа,

$$\overline{ME}=\overline{EA}=\tfrac{1}{2}\overline{AB},\ \overline{FE}=\overline{FA}=\tfrac{1}{2}\overline{CA} \text{ и } \overline{EF}=\tfrac{1}{2}\overline{BC},$$

па затоа

$$\overline{MN}=\overline{ME}+\overline{EF}+\overline{FN}=\tfrac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}).$$

100. Во остроаголниот $\triangle ABC$ повлечени се симетралите на внатрешните агли во темињата A и B. Од темето C се повлечени прави паралелни со овие симетрали кои нив ги сечат во точките D и E, соодветно. Ако правата DE е паралелна со AB докажи дека $\triangle ABC$ е рамнокрак.

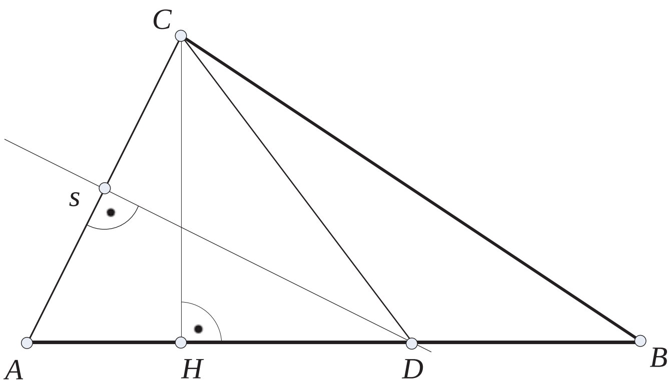


Решение. Бидејќи AD е симетрала на $\measuredangle A$, од $AB \parallel ED$ и $AD \parallel BC$ следува

$$\measuredangle CAD=\measuredangle BAD=\measuredangle DEC.$$

Според тоа, точките A,D,C,E лежат на иста кружница. Слично, добиваме дека точките B,D,C,E лежат на иста кружница. Значи A,B,C,D,E лежат на иста кружница. Од $AD \parallel EC$ и $BE \parallel CD$ следува $\measuredangle DAC=\measuredangle DEC=\measuredangle EDA=\measuredangle ABE$, од каде следува тврдењето во задачата .

101. Во $\triangle ABC$ должината на висината CH ($H \in AB$) е еднаква на половина од должината на страната AB и важи $\measuredangle BAC=75^\circ$. Определи го $\measuredangle ABC$.



Решение. *Прв начин*. Нека симетралата s на страната AC ја сече правата AB во точката D (види цртеж). Тогаш $\overline{AD}=\overline{CD}$, т.е. $\triangle ADC$ е рамнокрак. Бидејќи AC е основа на $\triangle ADC$ и

$$\measuredangle DAC=\measuredangle BAC=75^\circ,$$

добиваме

$$\measuredangle ADC = 180^\circ - 2\measuredangle DAC = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ.$$

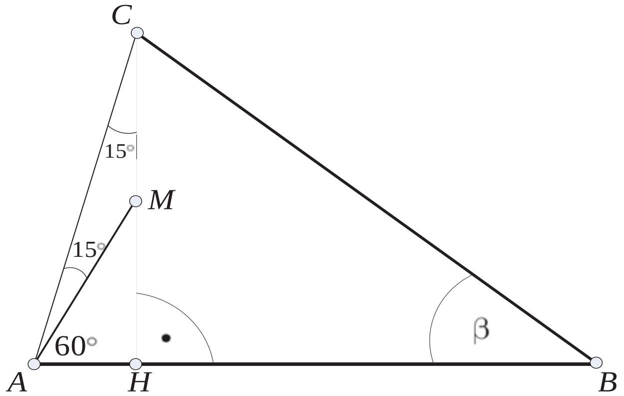
Сега $\triangle CHD$ е правоаголен со еден негов остар агол е еднаков на 30°. Според тоа, $\overline{CD} = 2\overline{CH} = \overline{AB}$. Но сега $\overline{AD} = \overline{CD} = \overline{AB}$, па точките D и B се совпаѓаат. Според тоа $\measuredangle DBC = \measuredangle ADC = 30^\circ$.

Втор начин. Нека $M \in CH$ така што $\measuredangle CAM = 15^\circ$. Бидејќи $\measuredangle BAC = 75^\circ$, добиваме

$$\measuredangle MAH = \measuredangle CAH - \measuredangle CAM = 75^\circ - 15^\circ = 60^\circ.$$

Од друга страна $\measuredangle AHC = 90^\circ$, $\measuredangle BAC = 75^\circ$, па затоа

$$\measuredangle ACH = 180^\circ - \measuredangle CAH - \measuredangle CHA$$
$$= 180^\circ - 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ.$$



Значи, $\triangle AMC$ е рамнокрак со основа CA, а $\triangle AHM$ е правоаголен со агли 30°, 60° и 90°. Од $\triangle AMH$ имаме

$$\overline{AM} = 2\overline{AH} \text{ и } \overline{AM} = \overline{CM},$$

па затоа $\overline{CM} = 2\overline{AM}$. Со непосредно пресметување добиваме

$$\overline{MH} = \tfrac{\sqrt{3}}{2}\overline{AM} = \tfrac{\sqrt{3}}{2}\overline{CM} = \tfrac{\sqrt{3}}{2}2\overline{AH} = \sqrt{3}\,\overline{AH}$$
$$\overline{CH} = \overline{CM} + \overline{MH} = 2\overline{AH} + \sqrt{3}\overline{AH} = (2+\sqrt{3})\overline{AH}.$$

Од условот на задачата имаме $\overline{AB} = 2\overline{CH}$, па затоа $\overline{CH} = \frac{1}{2}\overline{AB}$. Сега,

$$\tfrac{1}{2}\overline{AB} = (2+\sqrt{3})\overline{CH}, \text{ т.е. } \overline{AH} = \tfrac{1}{4+2\sqrt{3}}\overline{AB}.$$

Од друга страна

$$\overline{BH} = \overline{AB} - \overline{AH} = \overline{AB} - \tfrac{1}{4+2\sqrt{3}}\overline{AB} = \tfrac{3+2\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}}\overline{AB},$$

па од правоаголниот триаголник ΔBCH се добива: $\overline{BC}^2 = \overline{BH}^2 + \overline{CH}^2$, односно:

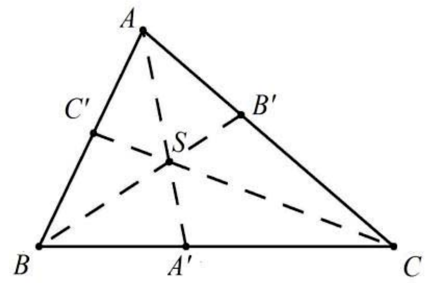
$$\overline{BC}^2 = (\tfrac{3+2\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}}\overline{AB})^2 + \tfrac{1}{4}\overline{AB}^2 = \tfrac{4(21+12\sqrt{3})+28+16\sqrt{3}}{16(2+\sqrt{3})^2}\overline{AB}^2$$
$$= \tfrac{4(21+12\sqrt{3}+7+4\sqrt{3})}{16(2+\sqrt{3})^2}\overline{AB}^2 = \tfrac{16(2+\sqrt{3})^2}{16(2+\sqrt{3})^2}\overline{AB}^2 = \overline{AB}^2.$$

Значи, $\overline{BC} = \overline{AB}$ односно $\triangle ABC$ е рамнокрак и $\beta = 30^\circ$.

102. Нека A', B', C' се точките во кои симетралите на аглите на $\triangle ABC$ ги сечат страните BC, CA, AB соодветно и нека S е центарот на впишаната кружница во $\triangle ABC$. Ако $\overline{AS} : \overline{SA'} = 3:2$, $\overline{BS} : \overline{SB'} = 4:3$ и $\overline{AB} = 12$, определи ги должините на останатите страни на $\triangle ABC$.

Решение. Нека a, b, c се должините на страните BC, AC, CA соодветно. Од својството на симетралата на аголот за $\triangle ABA'$ следува

$\overline{AB}:\overline{A'B}=\overline{AS}:\overline{A'S}=3:2$, т.е. $\overline{A'B}=\frac{2c}{3}$.



Слично од $\triangle ABB'$ следува

$\overline{AB}:\overline{AB'}=\overline{BS}:\overline{B'S}=4:3$, т.е. $\overline{AB'}=\frac{3c}{4}$,

а од $\triangle ACA'$ следува

$$\overline{AC}:\overline{A'C}=\overline{AS}:\overline{A'S}=3:2,$$

па затоа

$$b:(a-\tfrac{2c}{3})=3:2, \text{ т.е. } 3a-2c=2b.$$

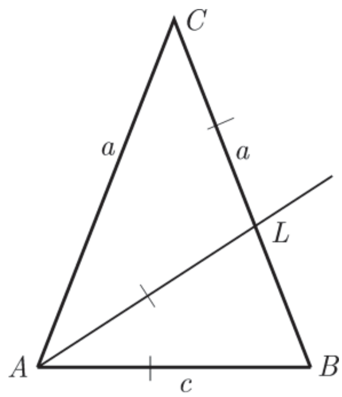
Слично, од $\triangle BCB'$ следува $\overline{BC}:\overline{B'C}=\overline{BS}:\overline{B'S}=4:3$, па затоа $a:(b-\frac{3c}{4})=4:3$, т.е. $4b-3c=3a$. Ако земеме предвид дека $c=12$, го добиваме системот

$$\begin{cases}3a-24=2b\\4b-36=3a\end{cases}$$

чие решение е $a=28, b=30$.

103. Најди го односот на должината на основата и должината на кракот во рамнокрак триаголник со агол при основата од $72°$.

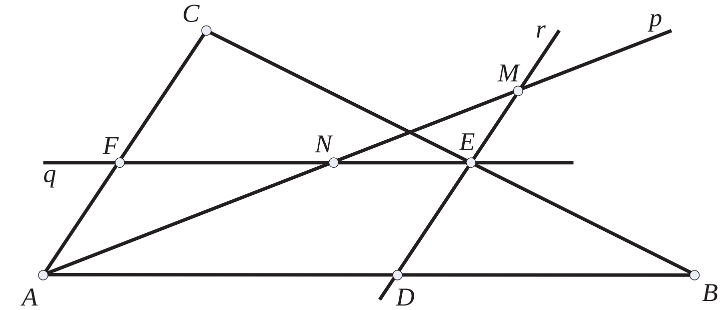
Решение. Нека дадениот триаголник е ABC, $\overline{AC}=\overline{BC}$ и $\measuredangle ABC=\measuredangle BAC=72°$, (цртеж десно). Ќе воведеме ознаки $\overline{AC}=\overline{BC}=a$ и $\overline{AB}=c$. Нека AL $(L\in BC)$ е симетрала на аголот при темето A. Тогаш $\triangle ABC \sim \triangle BLA$ и $\triangle CAL$ е рамнокрак, па затоа важи $\overline{AB}=\overline{AL}=\overline{CL}=c$. Од сличноста на $\triangle ABC$ и $\triangle BLA$ добиваме $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{BL}}{\overline{AB}}$, т.е. $\frac{c}{a}=\frac{a-c}{c}$.



Од последното равенство следува $c^2+ac-a^2=0$ и ако поделиме со a^2 добиваме $(\frac{c}{a})^2+\frac{c}{a}-1=0$, т.е. $(\frac{c}{a}+\frac{1}{2})^2-\frac{5}{4}=0$. Од последната равенка $\frac{c}{a}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ и како $\frac{c}{a}>0$ заклучуваме дека $\frac{c}{a}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

104. Нека E е произволна точка на страната BC од $\triangle ABC$, а p е произволна права која минува низ точката A. Правата q минува низ E, паралелна е со AB и $q\cap p=\{N\}$, а правата r минува низ E, паралелна е со AC и $r\cap p=\{M\}$. Докажи дека CN и MB се паралелни прави.

Решение. Да ги означиме пресечните точки на r и AB и на q и AC со D и F, соодветно. Тогаш четириаголникот $ADEF$ е паралелограм. Понатаму, $\triangle FAN \sim \triangle DMA$ ($\measuredangle F=\measuredangle D$ и $\measuredangle A=$



$\measuredangle M$), $\triangle CFE \sim \triangle EDB$ (од паралелноста на q и AB и на r и AC). Имаме:

$$\frac{\overline{FN}}{\overline{FC}} = \frac{\overline{FN}}{\overline{FA}} \cdot \frac{\overline{FA}}{\overline{FC}} = \frac{\overline{DA}}{\overline{DM}} \cdot \frac{\overline{ED}}{\overline{FC}} = \frac{\overline{DA}}{\overline{DM}} \cdot \frac{\overline{DB}}{\overline{FE}} = \frac{\overline{DA}}{\overline{DM}} \cdot \frac{\overline{DB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{DB}}{\overline{DM}} .$$

Од $\frac{\overline{FN}}{\overline{FC}} = \frac{\overline{DB}}{\overline{DM}}$ и $\measuredangle CFN = \measuredangle MDB$ следува дека $\triangle CFN \sim \triangle MDB$, а бидејќи по две страни им се паралелни следува дека CN и MB се паралелни.

105. Нека a,b,c се должини на страни на триаголник при што a е најдолгата. Докажи дека триаголникот е правоаголен ако и само ако важи

$$(\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b}) \cdot (\sqrt{a+c} + \sqrt{a-c}) = \sqrt{2}(a+b+c) .$$

Решение. Даденото равенство ќе го квадрираме и го добиваме еквивалентното равенство

$$2(a + \sqrt{a^2 - b^2})(a + \sqrt{a^2 - c^2}) = (a+b+c)^2 \qquad (1).$$

Нека триаголникот е правоаголен. Бидејќи a е најдолгата страна важи $a^2 = b^2 + c^2$. Тогаш

$$\begin{aligned} 2(a + \sqrt{a^2 - b^2})(a + \sqrt{a^2 - c^2}) &= 2(a+c)(a+b) = 2a^2 + 2ab + 2ac + 2bc \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc \\ &= (a+b+c)^2 \end{aligned}$$

односно важи (1).

Нека е исполнето равенството (1) и нека $a^2 > b^2 + c^2$. Тогаш важи

$$\begin{aligned} (a+b+c)^2 &= 2(a + \sqrt{a^2 - b^2})(a + \sqrt{a^2 - c^2}) \\ &> 2(a+c)(a+b) = 2a^2 + 2ab + ac + bc \\ &> a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + ac + bc = (a+b+c)^2 \end{aligned}$$

што не е можно. Слично, добиваме противречност ако претпоставиме дека $a^2 < b^2 + c^2$. Значи важи $a^2 = b^2 + c^2$ па триаголникот е правоаголен.

106. На страните BC , CA и AB на $\triangle ABC$ земени се точките A_1, B_1 и C_1 соодветно. Нека T е тежиштето на $\triangle ABC$, а T_1 е тежиштето на триаголникот $\triangle A_1B_1C_1$. Докажи дека $T \equiv T_1$ ако и само ако

$$\overline{AC_1} : \overline{C_1B} = \overline{BA_1} : \overline{A_1C} = \overline{CB_1} : \overline{B_1A} .$$

Решение. Нека $\overline{AC_1} : \overline{C_1B} = k$, $\overline{BA_1} : \overline{A_1C} = l$ и $\overline{CB_1} : \overline{B_1A} = m$. Тогаш,

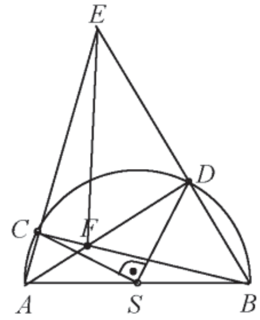
$$\begin{aligned} 3\overrightarrow{TT_1} &= \overrightarrow{TA_1} + \overrightarrow{TB_1} + \overrightarrow{TC_1} = (\overrightarrow{TA} + \overrightarrow{AA_1}) + (\overrightarrow{TB} + \overrightarrow{BB_1}) + (\overrightarrow{TC} + \overrightarrow{CC_1}) \\ &= (\overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{TC}) + (\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1}) \\ &= \vec{0} + \tfrac{k}{k+1}\overrightarrow{AB} + \tfrac{l}{l+1}\overrightarrow{BC} + \tfrac{m}{m+1}\overrightarrow{CA} = (\tfrac{k}{k+1} - \tfrac{m}{m+1})\overrightarrow{AB} + (\tfrac{l}{l+1} - \tfrac{m}{m+1})\overrightarrow{BC} \end{aligned}$$

Ако $T \equiv T_1$, од линеарната независност на векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ следува дека

$$\tfrac{k}{k+1} - \tfrac{m}{m+1} = \tfrac{l}{l+1} - \tfrac{m}{m+1} = 0 ,$$

односно $k = l = m$. Обратно, ако $k = l = m$, следува дека $\overrightarrow{TT_1} = \vec{0}$, т.е. $T \equiv T_1$.

107. Дадена е полукружница над дијаметар AB и на неа точки C и D такви што $\measuredangle CSD = 90°$, каде S е средината на AB. Нека $\overline{EF} = \overline{AB}$ и $F = AD \cap BC$. Докажи дека $EF \perp AB$ и $\overline{EF} = \overline{AB}$.

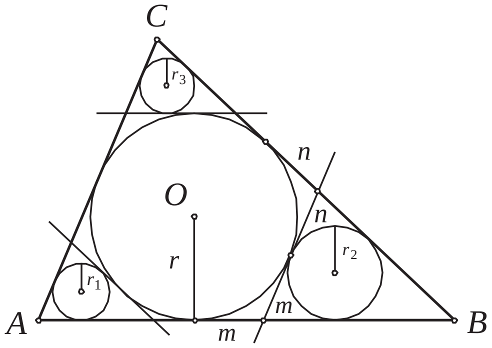


Решение. Според условите на задачата F е ортоцентар на $\triangle ABE$ или E е ортоцентар на $\triangle ABF$. Да претпоставиме дека е исполнет првиот случај. Тогаш $EF \perp AB$. Од $\measuredangle CSD = 90°$, следува дека $\measuredangle CAD = 45°$, па $\triangle ACF$ е рамнокрак правоаголен и $\overline{AC} = \overline{CF}$. Бидејќи,

$$\measuredangle ECF = \measuredangle BCA = 90° \text{ и } \measuredangle EFC = \measuredangle BAC$$

(агли со заемно нормални краци), следува дека триаголниците ECF и BCA се складни, од каде добиваме $\overline{EF} = \overline{AB}$.

108. Паралелно со страните на триаголникот ABC повлечени се тангенти на неговата впишана кружница. Секоја од тангентите од триаголникот отсекува триаголник. Ако r е радиусот на впишаната кружница во $\triangle ABC$ а r_1, r_2, r_3 се радиуси на впишаните кружници во отсечените триаголници, тогаш $r_1 + r_2 + r_3 = r$. Докажи!



Решение. Секој од малите триаголници е сличен со триаголникот ABC. Ако L е периметар на триаголникот ABC а L_1, L_2 и L_3 се периметри на малите триаголници со по едно теме A, B и C, соодветно, тогаш $\frac{L_1}{L} = \frac{r_1}{r}$, $\frac{L_2}{L} = \frac{r_2}{r}$ и $\frac{L_3}{L} = \frac{r_3}{r}$.

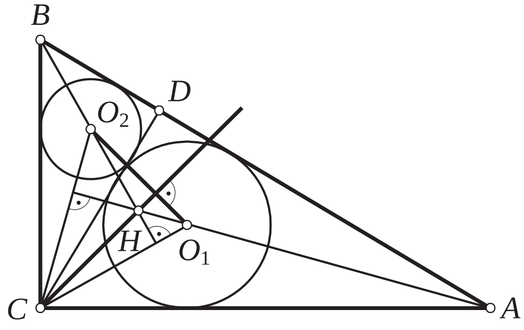
Нека допирните точки на отсечките AB, BC, CA со впишаната кружница се C_1, A_1, B_1, соодветно. Јасно,

$$L_1 = \overline{AB_1} + \overline{AC_1}, \; L_2 = \overline{BA_1} + \overline{BC_1} \text{ и } L_3 = \overline{CA_1} + \overline{CB_1}.$$

Од добиените равенства, следува $L_1 + L_2 + L_3 = L$. Според тоа

$$\frac{r_1}{r} + \frac{r_2}{r} + \frac{r_3}{r} = \frac{L_1}{L} + \frac{L_2}{L} + \frac{L_3}{L} = \frac{L_1 + L_2 + L_{13}}{L} = \frac{L}{L} = 1, \text{ т.е. } r_1 + r_2 + r_3 = r.$$

109. Нека ABC е правоаголен триаголник ($\measuredangle ACB = 90°$) и D е подножјето на нормалата спуштена од C кон AB. Центрите на впишаните кружници во триаголниците CAD и CBD се O_1 и O_2, соодветно. Докажи дека симетралата на аголот ACD е нормална на O_1O_2.



Решение. Бидејќи симетралите на два остри агли со нормални краци се заемно нормални, следува дека BO_2 (симетралата на аголот CBA) е нормална на CO_1 (симетралата на аголот ACD) и AO_1 (симетралата на аголот CAB) е нормална на CO_2 (симетралата на аголот DCB). Пресекот H на симетралите на аглите на триаголникот ABC е ортоцентар на триаголникот CO_1O_2 и оттука следува $CH \perp O_1O_2$.

110. Даден е $\triangle ABC$. Нека D е подножје на нормалата спуштена од центарот на впишаната кружница I на BC. Нека DI ја сече впишаната кружница по втор пат во точката E. Правата AE ја сече страната BC во точката F. Нека отсечката IO е паралелна со страната BC, кадешто O е центар на опишаната кружница околу $\triangle ABC$. Ако R и r се соодветно радиуси на опишаната и впишаната кружница на $\triangle ABC$, докажи дека $\overline{EF} = 2(R-r)$.

Решение. Нека тангентата на впишаната кружница во точката E ги сече AB и AC во B_1 и C_1, соодветно (направи цртеж). Тогаш $\triangle ABC \sim \triangle AB_1C_1$, па ако припишаната кружница на $\triangle ABC$ ја допира BC во F следува дека $\overline{BF} = \overline{CD}$ и ако A' е средината на BC тогаш $\overline{FA'} = \overline{DA'}$. Бидејќи OA' и OI се средни линии на $\triangle DEF$ (минуваат низ средината на едната страна и се паралелни со другата), добивамер дека O е средина на EF.

Од друга страна

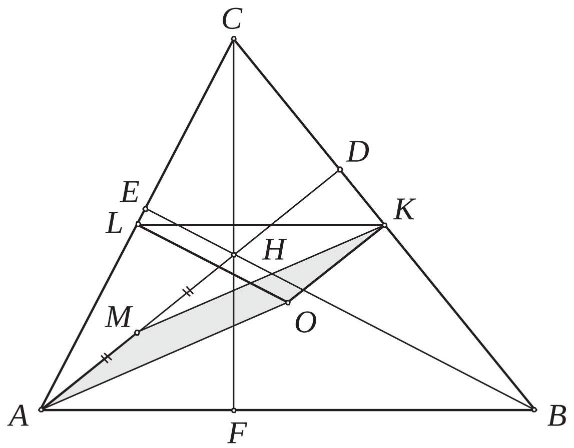
$$\overline{EF} = 2\overline{OE} = 2(\overline{OA} - \overline{AF}) = 2(R - \overline{AF}).$$

Доволно е уште да докажеме дека $\overline{AF} = r$. Ако AA'' е висината спуштена од A, тогаш

$$\measuredangle BAO = \tfrac{1}{2}(180^\circ - \measuredangle BOA) = 90^\circ - \measuredangle BCA = \measuredangle CAA''$$
$$\measuredangle FAI = \measuredangle A''AI = \measuredangle AIF,$$

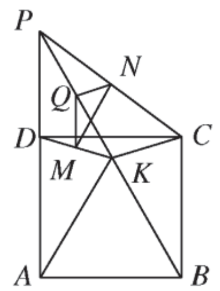
бидејќи DF и AA'' се паралелни. Значи, $\triangle AIF$ е рамнокрак со основа AI, па се добива дека $\overline{EF} = 2(R - \overline{AF}) = 2(R-r)$.

111. Точката H е ортоцентар, а точката O е центар на опишаната кружница во $\triangle ABC$. Ако M е среднина на отсечката AH, а K е средина на страната BC, докажи дека $\overline{AO} = \overline{KM}$.



Решение. Нека L е средина на страната AC. Бидејќи O е центар на опишаната кружница важи $OK \parallel AH$ и $OL \parallel BH$, а бидејќи L и K се средини на страните AC и BC соодветно, важи $LK \parallel AB$. Според тоа, $\triangle OKL \sim \triangle HAB$. Бидејќи $\overline{KL} = \frac{1}{2}\overline{AB}$, коефициентот на сличност е $\frac{1}{2}$. Според тоа $\overline{OK} = \frac{1}{2}\overline{AH} = \overline{AM}$. Значи, четириаголникот $OKMA$ е паралелограм и $\overline{AO} = \overline{KM}$.

112. Во внатрешноста на квадратот $ABCD$ е конструиран рамностран триаголник ABK. Правите BK и AD се сечат во точка P. Докажи, дека должината на отсечката која ги поврзува средините на отсечките KD и CP е еднаква на половината од должината на страната на квадратот.



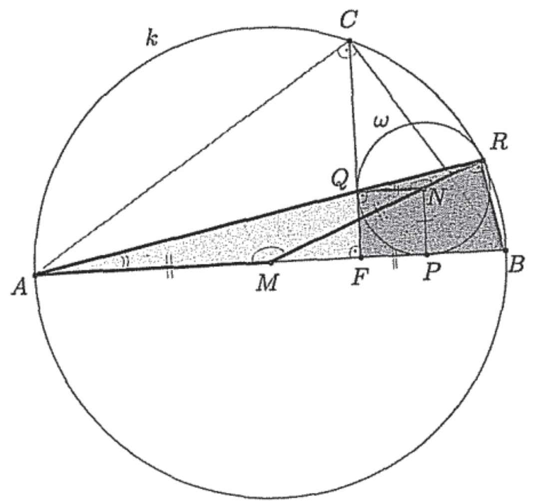
Решение. Триаголникот ABP е правоаголен и $\measuredangle APB = 30^\circ$, па затоа $\overline{AB} = \frac{1}{2}\overline{BP}$, од каде следува дека $\overline{PK} = \overline{AB}$. Нека M, N, Q се средините на DK, PC, PK, соодветно. Тогаш QM е средна линија во $\triangle DPK$, па затоа $QM \parallel DP$ и $\overline{QM} = \frac{1}{2}\overline{DP}$. Аналогно $QN \parallel KC$ и $\overline{QN} = \frac{1}{2}\overline{KC}$. Освен тоа

$$\measuredangle MQN = 30^\circ + 75^\circ = 105^\circ.$$

Понатаму $\triangle DKC$ е рамнокрак и $\measuredangle KDC = 15^\circ$, па затоа $\measuredangle KDP = 105^\circ$. Значи, $\triangle QMN \sim \triangle DPK$ со коефициент на сличност $\frac{1}{2}$, па затоа

$$\frac{\overline{MN}}{\overline{PK}} = \frac{1}{2}, \text{ т.е. } \overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{PK} = \frac{1}{2}\overline{AB}.$$

113. Даден е правоаголен $\triangle ABC, \measuredangle ACB = 90^\circ$. Нека F е подножјето на висината повлечена од темето C. Кружница ω ги допира отсечката FB во точката P, висината CF во точката Q и опишаната кружница околу $\triangle ABC$ во точката R. Докажи, дека точките A, Q и R се колинеарни и дека $\overline{AP} = \overline{AC}$.



Решение. Нека M е средината на страната AB и нека N е центарот на кружницата ω. Бидејќи точката M е центар на опишаната кружница k околу $\triangle ABC$ заклучуваме дека точките M, N и R се колинеарни (кружниците k и ω имаат заедничка тангента во R, а нормалата на тангентата минува низ центарот на кружницата).

Од $QN \perp CF$ и $AM \perp CF$ следува $QN \parallel AM$, па затоа $\measuredangle AMR = \measuredangle QNR$ како агли со паралелни краци. Покрај тоа, триаголниците AMR и QNR се рамнокраки чии краци се еднакви на радиусите на кружниците k и ω, соодветно, па затоа

$$\measuredangle MRA = \measuredangle MAR = \frac{180^\circ - \measuredangle AMR}{2} = \frac{180^\circ - \measuredangle QNR}{2} = \measuredangle RQN = \measuredangle NRQ.$$

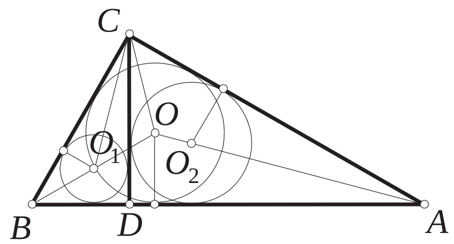
Но, правите MR и NR се совпаѓаат, па затоа правите RQ и RA се совпаѓаат, т.е. точките A, Q и R се колинеарни.

Правоаголните триаголници AFQ и ARB имаат заеднички остар агол, па затоа тие се слични. Според тоа, $\overline{AQ} : \overline{AB} = \overline{AF} : \overline{AR}$, т.е. $\overline{AQ} \cdot \overline{AR} = \overline{AF} \cdot \overline{AB}$. Од степенот на точката A на кружницата ω следува дека $\overline{AQ} \cdot \overline{AR} = \overline{AP}^2$. Сега од сличноста на триаголниците ABC и ACF (тие се правоаголни и имаат заеднички остар агол) следува $\overline{AC}^2 = \overline{AF} \cdot \overline{AB}$. Конечно, од последните три равенства следува $\overline{AP}^2 = \overline{AC}^2$, односно $\overline{AP} = \overline{AC}$.

114. Нека ABC е правоаголен триаголник со теме на правиот агол во точката C, а точката D е подножје на висината спуштена од кон хипотенузата. Ако r_1 и r_2 се радиусите на впишаните кружници во триаголниците ΔDCA и ΔDBC, а r е радиусот на впишаната кружница во триаголникот ABC, тогаш $r^2 = r_1^2 + r_2^2$. Докажи!

Решение. Нека центрите на впишаните кружници во триаголниците $\triangle ABC$, $\triangle ACD$ и $\triangle BDC$ се O, O_2 и O_1 соодветно (види цртеж). Јасно, триаголниците BDC, CDA и BCA се слични. Бидејќи CO_1 и AO се симетрали на $\measuredangle BCD = \measuredangle BAC = \alpha$, добиваме

$$\measuredangle BCO_1 = \measuredangle BAO.$$



Значи, триаголниците BCO_1 и ACO се слични (имаат исти агли). Од исти причини $\triangle BAO$ и $\triangle ACO_2$ се слични. Според тоа,

$$\triangle BCO_1 \sim \triangle ACO \sim \triangle CAO_2,$$

а r_1, r и r_2 се нивни висини. Од сличноста, имаме $\frac{r_1}{r} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BA}}$ и $\frac{r_1}{r} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BA}}$, од каде следува

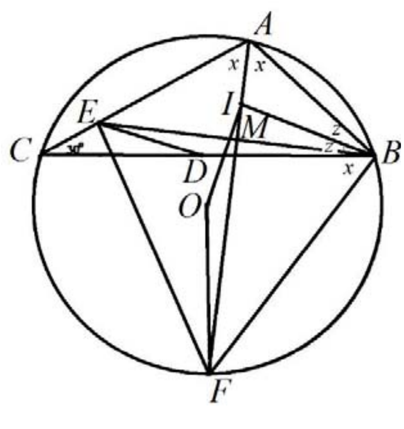
$$\frac{r_1^2}{r^2} + \frac{r_2^2}{r^2} = \frac{\overline{BC}^2}{\overline{BA}^2} + \frac{\overline{AC}^2}{\overline{BA}^2} = \frac{\overline{BC}^2 + \overline{AC}^2}{\overline{BA}^2} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{BA}^2} = 1.$$

Според тоа, $r^2 = r_1^2 + r_2^2$.

115. Нека I е центар на впишаната кружница, а O центар на опишаната кружница на $\triangle ABC$, при што $\measuredangle ACB = 30^\circ$. На страните AC и BC се земени точки E и D, соодветно, такви што $\overline{EA} = \overline{AB} = \overline{BD}$. Докажи дека $\overline{DE} = \overline{IO}$ и $DE \perp IO$.

Решение. Да ја продолжиме AI до пресекот со опишаната кружница F. Правата AI е симетрала на аголот при темето A во $\triangle ABC$. Според условот $\triangle EAB$ е рамнокрак, па затоа AI е симетрала, тежишна линија и висина во овој триаголник. Нека AI ја сече страната EB во точката M. Бидејќи AM е симетрала на EB, добиваме дека $\triangle EFB$ е рамнокрак. Според тоа,

$$\measuredangle EFB = 2\measuredangle AFB = 2\measuredangle ACB = 60^\circ.$$



Значи, $\triangle EFB$ е рамнокрак со агол меѓу краците еднаков 60°, па затоа тој е рамностран, т.е. $\overline{FB} = \overline{BE}$. Понатаму,

$$\measuredangle IBF = \measuredangle IBC + \measuredangle CBF = \measuredangle IBA + \measuredangle CAF = \measuredangle IBA + \measuredangle FAB = \measuredangle BIF\ ,$$

што значи дека $\triangle BIF$ е рамнокрак и важи $\overline{FB} = \overline{FI}$. Според тоа,

$$\overline{BE} = \overline{FI}\ . \tag{1}$$

Точката F е средина на лакот BC , па затоа FO е симетрала на тетивата BC . Правата AF е симетрала на отсечката BE , па затоа $IF \perp BE$. Според тоа, $\measuredangle OFI$ и $\measuredangle EBD$ се агли со нормални краци и важи

$$\measuredangle OFI = \measuredangle EBD\ . \tag{2}$$

Од друга страна, $\measuredangle AOB = 2\measuredangle ACB = 60^\circ$, па затоа $\triangle AOB$ е рамностран и важи

$$\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{AB} = \overline{AE} = \overline{BD}\ . \tag{3}$$

Од (1), (2) и (3) заклучуваме дека $\triangle OFI \cong \triangle EBD$, т.е. $\overline{DE} = \overline{IO}$ и $\measuredangle FIO = \measuredangle BED$. Од $\measuredangle FIO = \measuredangle BED$ и $FI \perp BE$ следува дека и другите два краци се заемно нормални, т.е. $DE \perp IO$.

116. Една страна на триаголникот има должина a а другата има должина b . Определи ја должината на третата страна ако нејзината должина е еднаква со должината на тежишната линија повлечена кон неа.

Решение. Ако ABC е триаголник во кој должините на страните $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$ и $\overline{CA} = b$, а t_a , t_b и t_c се должини на тежишните линии повлечени од точките A, B и C соодветно, тогаш точни се равенствата

$$t_c = \tfrac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}\ ,\ t_b = \tfrac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}\ ,\ t_a = \tfrac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}\ . \tag{*}$$

Од условот на задачата $t_c = c$ и од првото равенство, добиваме

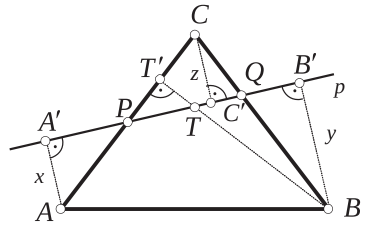
$$c = \tfrac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}\ .$$

Ако го разрешиме последното равенство по c добиваме $c = \sqrt{\frac{2a^2 + 2b^2}{5}}$.

117. Низ тежиштето на рамностран триаголник минува произволна права. Докажи дека збирот од квадратите на растојанијата од темињата на триаголникот до таа права не зависи од изборот на правата.

Решение. Да воведеме ознаки како на цртежот. Нека триаголникот има страна со должина a и нека растојанијата од темињата A, B, C до правата p се x, y, z , соодветно. Тогаш $\triangle TPT' \sim \triangle APA'$ (двата се правоаголни и $\measuredangle A'PB = \measuredangle T'PT$), па $\frac{x}{\overline{TT'}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{TP}}$, т.е.

$$x = \frac{\overline{AP}}{\overline{TP}}\overline{TT'}\ . \tag{1}$$



На сличен начин добиваме $\triangle TPT' \sim \triangle TBB'$

$$y = \frac{\overline{PT'}}{\overline{PT}}\overline{BT} \tag{2}$$

и $\triangle TPT' \sim \triangle CPC'$, па

$$z = \frac{\overline{TT'}}{\overline{TP}}\overline{PC}\ . \tag{3}$$

Бидејќи триаголникот е рамностран BT' е и висина и нека $\overline{BT} = h$. Тогаш

$\overline{TT'} = \frac{1}{3}h$ и $\overline{BT} = \frac{2}{3}h$. Заменувајќи во (1), (2) и (3) добиваме

$$x = \frac{\frac{1}{3}h}{\overline{TP}}\overline{AP}, \; y = \frac{\frac{2}{3}h}{\overline{PT}}\overline{PT'} \text{ и } z = \frac{\frac{1}{3}h}{\overline{TP}}\overline{PC}.$$

Уште важи

$$\overline{PC} = a - \overline{AP}, \; \overline{PT'} = \frac{a}{2} - \overline{AP}, \; \overline{PT}^2 = \overline{PT'}^2 + \overline{TT'}^2 = (\tfrac{1}{3}h)^2 + (\tfrac{a}{2} - \overline{AP})^2 \text{ и } h = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Користејќи го ова имаме

$$x^2 + y^2 + z^2 = (\tfrac{1}{3}h)^2 \frac{\overline{AP}^2 + 4\overline{PT'}^2 + \overline{PC}^2}{\overline{PT}^2} = \frac{h^2}{9} \cdot \frac{\overline{AP}^2 + a^2 - 4a\overline{AP} + 4\overline{AP}^2 + a^2 - 2a\overline{AP} + \overline{AP}^2}{\frac{h^2}{9} + \frac{a^2}{4} - a\overline{AP} + \overline{AP}^2}$$

$$= \frac{(\frac{a\sqrt{3}}{2})^2}{9} \cdot \frac{\overline{AP}^2 + a^2 - 4a\overline{AP} + 4\overline{AP}^2 + a^2 - 2a\overline{AP} + \overline{AP}^2}{\frac{(\frac{a\sqrt{3}}{2})^2}{9} + \frac{a^2}{4} - a\overline{AP} + \overline{AP}^2} = \frac{3a^2}{36} \cdot \frac{2(a^2 - 3a\overline{AP} + 3\overline{AP}^2)}{\frac{12(a^2 - 3a\overline{AP} + 3\overline{AP}^2)}{36}} = \frac{a^2}{2}.$$

Значи збирот на квадратите е константен за даден рамностран триаголник.

118. Должините на страните на триаголникот се a, b и c а R е радиус на неговата опишана кружница. Одреди ги аглите на триаголникот ако $R = \frac{a\sqrt{bc}}{b+c}$.

Решение. Бидејќи $b + c \geq 2\sqrt{bc}$, имаме $\frac{\sqrt{bc}}{b+c} \leq \frac{1}{2}$. Сега $\frac{R}{a} = \frac{\sqrt{bc}}{b+c} \leq \frac{1}{2}$, од каде добиваме $2R \leq a$. Но во било кој триаголник, должината на било која страна не е поголема од должината на дијаметарот на опишаната кружница. Според тоа $a \leq 2R$. Од последните две неравенства имаме $a = 2R$. Сега даденото равенство го добива обликот $R = \frac{2R\sqrt{bc}}{b+c}$, од каде добиваме $b + c = 2\sqrt{bc}$, т.е. $(\sqrt{b} - \sqrt{c})^2 = 0$, па затоа $\sqrt{b} - \sqrt{c} = 0$, односно $b = c$.

Конечно, од $a = 2R$ следува дека триаголникот е правоаголен, а од $b = c$ дека тој е рамнокрак. Според тоа аголите на триаголникот се $90^\circ, 45^\circ, 45^\circ$.

119. Дали постои точка во рамнината на триаголникот, таква што збирот на растојанијата од неа до темињата на триаголникот, да биде помал од полупериметарот на триаголникот?

Решение. Нека M е произволна точка во рамнината на триаголникот ABC, тогаш собирајќи ги неравенствата (притоа само едно од нив може да е нестрого неравенство-случај кога точката M лежи на една од страните на триаголникот):

$$\overline{MB} + \overline{MC} > \overline{BC}$$
$$\overline{MC} + \overline{MA} > \overline{CA}$$
$$\overline{MA} + \overline{MB} > \overline{AB}$$

добиваме $2(\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC}) > \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA}$ и конечно

$$\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} > \tfrac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA}).$$

Следствено, не постои таква точка. Имено за секоја точка во рамнината на триаголникот збирот на растојанијата од неа до темињата на триаголникот е поголем од полупериметарот на триаголникот.

120. Докажи дека од трите тежишни линии на произволен триаголник може да се конструира друг триаголник.

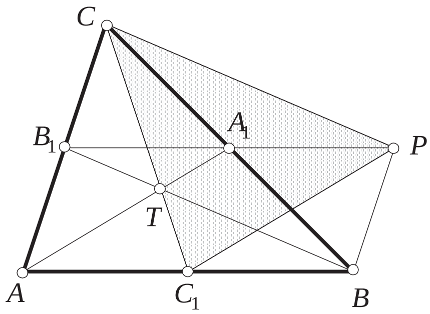
Решение. *Прв начин.* Нека AA_1, BB_1 и CC_1 се тежишните линии на произволен триаголник ABC. Бидејќи тие не се колинеарни, доволно е да докажеме дека $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=\vec{o}$. На овој начин, всушност, докажуваме дека постои триаголник, чии страни се паралелни и еднакви на тежишните линии AA_1, BB_1 и CC_1 на било кој триаголник ABC.

За векторите $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$ и $\overrightarrow{CC_1}$ имаме:

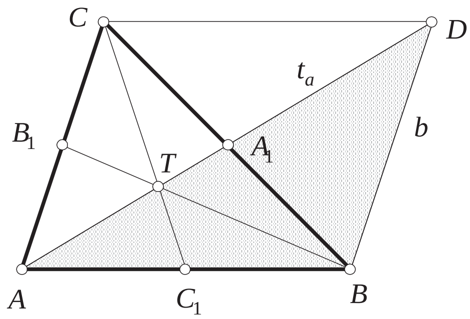
$$\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{AB}+\tfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}, \quad \overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{BC}+\tfrac{1}{2}\overrightarrow{CA}, \quad \overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{CA}+\tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}.$$

Ако ги собереме овие векторски равенства добиваме:

$$\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA})+\tfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA})=\tfrac{3}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA})=\tfrac{3}{2}\vec{o}=\vec{o}.$$



цртеж 1



цртеж 2

Втор начин. Ја конструираме отсечката CP паралелна и еднаква на отсечката BB_1 (види цртеж 1), тогаш четириаголникот $CPBB_1$ е паралелограм, па неговите дијагонали ќе се преполовуваат во пресечната точка A_1, т.е. $\overline{B_1A_1}=\overline{A_1P}$. Но $\overline{B_1A_1}=\frac{1}{2}\overline{AB}$ (како средна линија), т.е. $\overline{B_1A_1}=\overline{AC_1}$, па тогаш

$$\overline{A_1P}=\overline{AC_1} \text{ и } A_1P \parallel AC_1.$$

Значи, и четириаголникот AC_1PA_1 е паралелограм, па следува $\overline{C_1P}=\overline{AA_1}$.

Следствено, ΔC_1PC е триаголник чии страни се паралелни и еднакви на тежишните линии AA_1, BB_1 и CC_1 на триаголникот ABC.

Трет начин. Од три отсечки, со должини x, y, z, можеме да конструираме триаголник, ако во исто време се исполнети неравенствата:

$$x+y>z,\ y+z>x,\ z+x>y.$$

Ако ја продолжиме тежишната линија AA_1 за нејзината должина, ја добиваме точката D (види цртеж 2). Тогаш четириаголникот $ABDC$ е паралелограм бидејќи неговите дијагонали се преполовуваат, па имаме:

$$\overline{BD}=\overline{AC}=b,\ \overline{AD}=2t_a$$

Од триаголникот ABD добиваме:

$$2t_a<b+c,\ t_a<\tfrac{1}{2}(b+c) \qquad (1)$$

Понатаму, од триаголниците ABB_1 и ACC_1 наоѓаме: $c<\frac{1}{2}b+t_b$ и $b<\frac{1}{2}c+t_c$ т.е.

$$\frac{1}{2}(b+c) < t_b + t_c \qquad (2)$$

Од (1) и (2) следува $t_a < t_b + t_c$.

Аналогно докажуваме дека важат и неравенствата $t_b < t_c + t_a$ и $t_c < t_a + t_b$, па заклучуваме дека со тежишните линии t_a, t_b, t_c на произволен триаголник ABC може да се конструира друг триаголник.

121. Ако a, b, c се должини на страните на еден триаголник, тогаш постои триаголник чии страни се $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$. Докажи!

Дали важи обратното тврдење?

Решение. Ако $a = b = c$, тогаш и $\sqrt{a} = \sqrt{b} = \sqrt{c}$, па тврдењето е очигледно. Нека c е најголемата страна на триаголникот; тогаш $a + b > c$.

Од $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + b + 2\sqrt{ab} > a + b > c$, добиваме $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{c}$ од каде што заклучуваме дека постои триаголник со страни $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$.

Обратното тврдење е еквивалентно со тврдењето дека ако a, b, c се страни на еден триаголник, тогаш и a^2, b^2, c^2 се страни на триаголник. Ова тврдење не секогаш е точно. На пример, тројката броеви $2, 3, 4$ се страни на триаголник, но нивните квадрати $4, 9, 16$ не можат да бидат страни на ниту еден триаголник. Следствено, обратното тврдење не е точно.

122. Дали постојат шест различни точки во рамнината (една црвена, две плави и три зелени), такви што збирот на растојанијата меѓу црвената и плавите точки е 8, збирот на 6растојанијата меѓу црвената и зелените точки е 6, а збирот на растојанијата меѓу плавите и зелените точки е 9.

Решение. Нека претпоставиме дека такви точки постојат. Ќе ги означиме црвената, двете плави и трите зелени точки со R, B_1, B_2, G_1, G_2 и G_3 соодветно. Од неравенството на триаголник добиваме

$$\overline{RB_1}: \begin{cases} \overline{RG_1} + \overline{G_1B_1} \geq \overline{RB_1} \\ \overline{RG_2} + \overline{G_2B_1} \geq \overline{RB_1} \\ \overline{RG_3} + \overline{G_3B_1} \geq \overline{RB_1} \end{cases} \qquad \overline{RB_2}: \begin{cases} \overline{RG_1} + \overline{G_1B_2} \geq \overline{RB_2} \\ \overline{RG_2} + \overline{G_2B_2} \geq \overline{RB_2} \\ \overline{RG_3} + \overline{G_3B_2} \geq \overline{RB_2} \end{cases}$$

Ако овие неравенства ги собереме, имаме

$$(\overline{G_1B_1} + \overline{G_2B_1} + \overline{G_3B_1} + \overline{G_1B_2} + \overline{G_2B_2} + \overline{G_3B_2}) + 2(\overline{RG_1} + \overline{RG_2} + \overline{RG_3}) \geq 3(\overline{RB_1} + \overline{RB_2})$$

т.е. $9 + 2 \cdot 6 \geq 3 \cdot 8$. Заради добиената контрадикција, таков распоред не постои.

123. Нека a, b, c се страни на ист триаголник. Докажи дека

$$a^3 + b^3 + 3abc > c^3.$$

Решение. Од тоа што a, b, c се страни на триаголник, го користиме неравенството $a + b > c$ и добиваме

$$a^3 + b^3 + 3abc = (a+b)(a^2 - ab + b^2) + 3abc > c \cdot (a^2 - ab + b^2) + 3abc$$
$$= c \cdot (a^2 - ab + b^2 + 3ab) = c \cdot (a^2 + 2ab + b^2) > c \cdot (a+b)^2 > c \cdot c^2 = c^3,$$

што требаше да се докаже.

Забелешка. Аналогно се докажува дека

$$b^3+c^3+3abc>a^3 \text{ и } c^3+a^3+3abc>b^3 .$$

124. Нека a, b и c се должини на страни на триаголник, $p=\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$ и $q=\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}$. Докажи дека $|p-q|<1$.

Решение. Од неравенството на триаголник: $|a-b|<c$, $|b-c|<a$ и $|c-a|<b$, следува

$$\begin{aligned}|p-q|&=\frac{|a^2c+b^2a+c^2b-a^2b-c^2a-b^2c|}{abc}=\frac{|-ac(c-a)+b(c^2-a^2)-b^2(c-a)|}{abc}\\&=\frac{|(c-a)[-ac+bc+ba-b^2]|}{abc}=\frac{|(c-a)[-c(a-b)+b(a-b)]|}{abc}\\&=\left|\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{abc}\right|=\frac{|a-b||b-c||c-a|}{abc}<\frac{cab}{abc}=1.\end{aligned}$$

125. Докажи дека кај секој триаголник со страни a,b,c и полупериметар s важи неравенството

$$\frac{a}{s-a}+\frac{b}{s-b}+\frac{c}{s-c}\geq 6 .$$

Решение. Нека $a+b+c=2s$ и нека $x=s-a>0$, $y=s-b>0$, $z=s-c>0$. Тогаш $a=2s-b-c=s-b+s-c=y+z$. Аналогно добиваме $b=x+z$, $c=x+y$. Значи, треба да го докажеме неравенството $\frac{y+z}{x}+\frac{x+z}{y}+\frac{x+y}{z}\geq 6$.

Од неравенството меѓу аритметичката и геометрсиката средина следува

$$\begin{aligned}\frac{y+z}{x}+\frac{x+z}{y}+\frac{x+y}{z}&=\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)\\&\geq 2\sqrt{\frac{y}{x}\frac{x}{y}}+2\sqrt{\frac{x}{z}\frac{z}{x}}+2\sqrt{\frac{y}{z}\frac{z}{y}}=6,\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже. Знак за равенство важи ако само ако $x=y=z$, т.е. само ако триаголникот е рамностран.

126. Нека L и P се периметарот и плоштината на правоаголникот. Докажи, дека важи $L\geq\frac{24P}{L+P+1}$.

Решение. Ако должините на страните на правоаголникот ги означиме со a и b, тогаш $L=2(a+b)$ и $P=ab$, што значи дека даденото неравенство е еквивалентно со неравенството $2(a+b)(2a+2b+ab+1)\geq 24ab$. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува $a+b\geq 2\sqrt{ab}$ и

$$2a+2b+ab+1=a+a+b+b+ab+1\geq 6\sqrt[6]{a^3b^3}=6\sqrt{ab} .$$

Конечно,

$$2(a+b)(2a+2b+ab+1)\geq 2\cdot 2\sqrt{ab}\cdot 6\sqrt{ab}=24ab .$$

127. Нека a и b се катети, а c е хипотенуза во правоаголен триаголник. Докажи дека $ab+bc+ca<2c^2$.

Решение. *Прв начин.* Во секој триаголник (а и за секои реални броеви a,b,c) важат неравенствата $(a-b)^2 \geq 0, (b-c)^2 \geq 0$ и $(c-a)^2 \geq 0$, односно

$$a^2+b^2 \geq 2ab,\ b^2+c^2 \geq 2bc \text{ и } c^2+a^2 \geq 2ca.$$

Со собирање на овие неравенства добиваме $ab+bc+ca \leq a^2+b^2+c^2$. Триаголникот е правоаголен, па $a^2+b^2=c^2$. Според тоа $ab+bc+ca \leq 2c^2$. Знак на равенство може да важи само во случај $a=b, b=c$ и $c=a$, што не е можно кај правоаголен триаголник. Според тоа $ab+bc+ca < 2c^2$, што требаше да се докаже.

Втор начин. Од неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина за броевите a и b добиваме $\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$, па заради $a^2+b^2=c^2$ важи

$$a+b \leq c\sqrt{2}\,. \qquad (1)$$

Натаму имаме

$$\begin{aligned} ab+bc+ca &= \tfrac{1}{2}((a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)) \\ &= \tfrac{1}{2}((a+b+c)^2-2c^2) \overset{(1)}{\leq} \tfrac{1}{2}((c\sqrt{2}+c)^2-2c^2) \\ &= \tfrac{1+2\sqrt{2}}{2}c^2 < \tfrac{1+2\frac{3}{2}}{2}c^2 = 2c^2 \end{aligned}$$

што и требаше да се докаже.

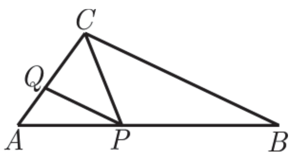
Забелешка. Овде го докажавме и неравенството $ab+bc+ca \leq \frac{1+2\sqrt{2}}{2}c^2$. Равенство важи ако и само ако $a=b=\frac{c}{\sqrt{2}}$.

128. Докажи дека за секоја точка P од страната AB на триаголникот ABC важи

$$\overline{PC}\cdot\overline{AB} < \overline{PA}\cdot\overline{BC}+\overline{PB}\cdot\overline{AC}\,.$$

Решение. Нека P е произволна точка од страната AB на $\triangle ABC$ и нека Q е точка од страната AC така што $PQ \parallel BC$. Од сличноста $\triangle APQ \sim \triangle ABC$ имаме $\overline{PQ}:\overline{BC}=\overline{PA}:\overline{AB}$, т.е.

$$\overline{PQ}\cdot\overline{AB}=\overline{PA}\cdot\overline{BC}\,. \qquad (1)$$



Од $PQ \parallel BC$ имаме $\overline{AC}:\overline{AB}=\overline{QC}:\overline{PB}$, т.е.

$$\overline{AB}\cdot\overline{CQ}=\overline{PB}\cdot\overline{AC}\,. \qquad (2)$$

Со собирање на равенствата (1) и (2) добиваме

$$\overline{AB}\cdot(\overline{PQ}+\overline{CQ})=\overline{PA}\cdot\overline{BC}+\overline{PB}\cdot\overline{AC} \qquad (3)$$

Од неравенство меѓу страните на триаголникот PQC имаме

$$\overline{PQ}+\overline{CQ}>\overline{PC} \qquad (4)$$

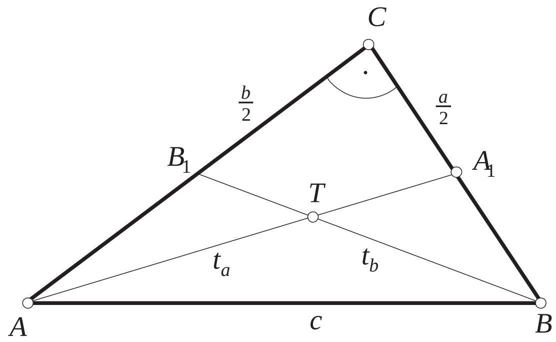
Конечно, од (3) и (4) се добива

$$\overline{AB}\cdot\overline{PC}<\overline{AB}\cdot(\overline{PQ}+\overline{CQ})=\overline{PA}\cdot\overline{BC}+\overline{PB}\cdot\overline{AC}\,,$$

што требаше да се докаже.

129. Докажи дека за правоаголниот триаголник важи неравенството $\frac{r^2}{t_a^2+t_b^2} \le \frac{3-\sqrt{8}}{5}$, каде што t_a и t_b се тежишните линии на катетите, а r е радиусот на впишаната кружница.

Решение. Нека $\triangle ABC$ е правоаголен со хипотенуза $\overline{AB} = c$, тогаш (види цртеж) од правоаголните триаголници AA_1C и BB_1C добиваме:



$$t_a^2 = \frac{1}{4}a^2 + b^2;\ t_b^2 = a^2 + \frac{1}{4}b^2,$$

т.е.

$$t_a^2 + t_b^2 = \frac{5}{4}(a^2+b^2) = \frac{5}{4}c^2.$$

Бидејќи $r = \frac{a+b-c}{2}$ добиваме:

$$\frac{r^2}{t_a^2+t_b^2} = \frac{(a+b-c)^2}{5(a^2+b^2)} = \frac{a^2+b^2+c^2+2ab-2c(a+b)}{5(a^2+b^2)}.$$

Од $(a-b)^2 \ge 0$ следува $a^2+b^2 \ge 2ab$, па од $a^2+b^2=c^2$ добиваме

$$(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab \le 2(a^2+b^2) = 2c^2, \text{ т.е. } a+b \le c\sqrt{2}.$$

Тогаш:

$$\frac{r^2}{t_a^2+t_b^2} \le \frac{(a^2+b^2)+c^2+(a^2+b^2)-2c\cdot c\sqrt{2}}{5(a^2+b^2)} = \frac{3c^2-2\sqrt{2}\,c^2}{5c^2} \text{ т.е. } \frac{r^2}{t_a^2+t_b^2} = \frac{3-\sqrt{8}}{5}.$$

2. ЕЛЕМЕНТИ НА ЧЕТИРИАГОЛНИК

1. Аглите на еден четириаголник редоследно се $x, x+20^\circ, x+30^\circ, x+50^\circ$. Определи ги неговите агли, а потоа докажи дека тој е трапез.

Решение. Бидејќи збирот на аглите во било кој четириаголник е 360°, добиваме дека $x+x+20^\circ+x+30^\circ+x+50^\circ=360^\circ$, т.е. $x=65^\circ$. Според тоа аглите на четириаголникот се $65^\circ, 85^\circ, 95^\circ$ и 115°. Бидејќи $85^\circ+95^\circ=115^\circ+65^\circ=180^\circ$, паровите агли $85^\circ, 95^\circ$ и $115^\circ, 65^\circ$ се агли на трансферзала. Бидејќи тие се агли во четириаголник, тој е трапез.

2. Каков е четириаголникот, ако неговите внатрешни агли се однесуваат како $\frac{1}{10}:\frac{1}{12}:\frac{1}{15}:\frac{1}{20}$?

Решение. Множејќи го дадениот однос со 60 го добиваме односот $6:5:4:3$. Според тоа, ако со $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ги означиме аглите на четириаголникот, тогаш $\alpha:\beta:\gamma:\delta = 6:5:4:3$, а оттука: $\alpha=6k,\ \beta=5k,\ \gamma=4k,\ \delta=3k$, каде што k е коефициентот на пропорционалност. Од равенството $\alpha+\beta+\gamma+\delta=360^\circ$, добиваме

$$6k+5k+4k+3k=360^\circ, \text{ т.е. } k=20^\circ.$$

Следствено, аглите на четириаголникот се: $\alpha=120^\circ$, $\beta=100^\circ$, $\gamma=80^\circ$, $\delta=60^\circ$. Бидејќи $\alpha+\delta=\beta+\gamma=180^\circ$ следува дека четириаголникот е трапез.

3. Даден е четириаголник $ABCD$. Нека O е пресечна точка на дијагоналите во четириаголник $ABCD$, $\measuredangle OCB=\measuredangle ODA=30^\circ$, $\measuredangle OBA=50^\circ$ и $\measuredangle AOB=70^\circ$. Определи ги аглите на четириаголникот.

Решение. Од $\measuredangle OCB=\measuredangle ODA=30^\circ$ следува дека четириаголникот $ABCD$ е тетивен (направи цртеж). Според тоа, $\measuredangle ACD=\measuredangle ABD=50^\circ$ како агли над AD.

Понатаму,

$$\measuredangle BAO=180^\circ-\measuredangle AOB-\measuredangle OBA=60^\circ, \qquad \measuredangle BDC=\measuredangle BAC=60^\circ.$$

Добиваме

$$\measuredangle CDA=\measuredangle CDO+\measuredangle ODA=90^\circ$$

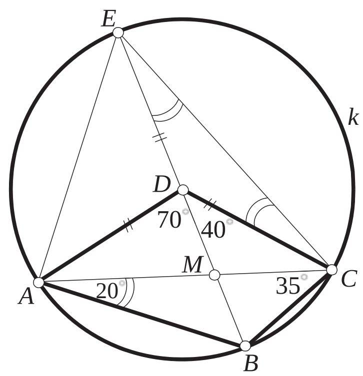
$$\measuredangle ABC=180^\circ-\measuredangle ADC=90^\circ$$

$$\measuredangle BAD=180^\circ-\measuredangle BCD=100^\circ.$$

4. Во конвексен четириаголник $ABCD$ познати се аглите $\measuredangle BAC=20^\circ$, $\measuredangle BCA=35^\circ$, $\measuredangle BDC=40^\circ$ и $\measuredangle BDA=70^\circ$. Најди го аголот меѓу дијагоналите на четириаголникот.

Решение. Да опишеме кружница околу $\triangle ABC$ и да ја означиме со E точката во која таа кружница ја сече правата BD (види цртеж). Во $\triangle DEC$ аголот DEC е еднаков на 20° (бидејќи $\measuredangle DEC=\measuredangle BAC$ како агли над ист лак), а надворешниот агол кај D е еднаков , по услов на 40°. Следува

$$\measuredangle DCE=\measuredangle DEC=20^\circ \text{ и } \overline{DC}=\overline{DE}.$$



Аналогно, за $\triangle AED$ имаме

$$\measuredangle AED=\measuredangle ACB=35^\circ \text{ и } \overline{DE}=\overline{DA}.$$

Оттука $\overline{DA}=\overline{DE}=\overline{DC}$, т.е. D е центар на кружницата опишана околу $\triangle ABC$, т.е. $\triangle ACD$ е рамнокрак, па добиваме:

$$\measuredangle DCA=\tfrac{1}{2}(180^\circ-110^\circ)=35^\circ,$$

$$\measuredangle BMC=40^\circ+35^\circ,$$

како надворешен агол за $\triangle CMD$.

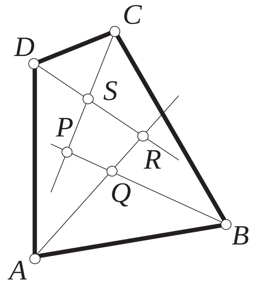
5. Докажи дека во секој конвексен четириаголник $ABCD$ пресекот на симетралите на внатрешните агли при темињата A и C со симетралите при внатрешните агли при темињата B и D лежат на една кружница.

Решение. Нека $ABCD$ е конвексен четириаголник и нека се повлечени симетралите во внатрешните агли на неговите темиња (види цртеж). Јасно е дека $\measuredangle SPQ=\measuredangle CPB$ и $\measuredangle QRS=\measuredangle ARD$. Од друга страна

$$\measuredangle BPC=\pi-(\measuredangle PBC+\measuredangle BCP) \text{ и } \measuredangle ARD=\pi-(\measuredangle RAD+\measuredangle RDA).$$

Според тоа

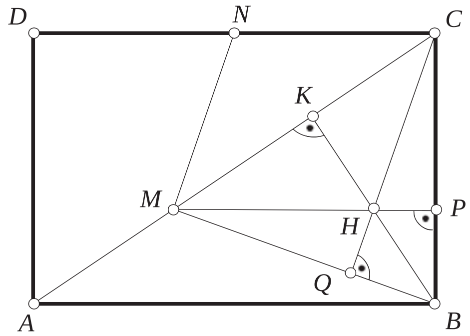
$$\measuredangle QPS+\measuredangle QRS=\measuredangle BPC+\measuredangle ARD$$
$$=\pi-(\measuredangle BPC+\measuredangle BCP)+\pi-(\measuredangle RAD+\measuredangle ADR)$$
$$=2\pi-(\measuredangle BPC+\measuredangle BCP+\measuredangle RAD+\measuredangle ADR)$$
$$=2\pi-\tfrac{1}{2}\cdot 2\pi=\pi.$$



Според тоа, четириаголникот $PQRS$ е тетивен, односно точките P,Q,R,S лежат на една кружница.

6. Во правоаголникот $ABCD$ е повлечена нормала BK на дијагоналата AC. Точките M и N се средини на отсечките AK и CD, соодветно. Докажи дека $\measuredangle BMN=90^\circ$.

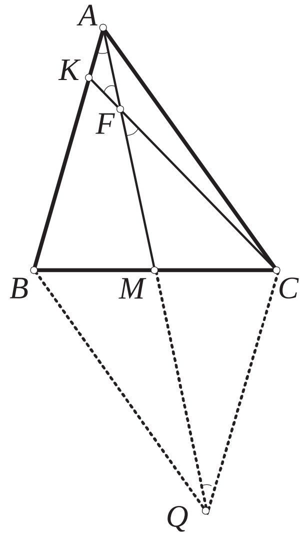
Решение. *Прв начин.* Нека $BK\perp AC$ (види цртеж), тогаш во $\triangle MBC$ BK е негова висина. Да ги повлечеме и другите две висини MP и CQ; тие се сечат во точката H - ортоцентарот на $\triangle MBC$.



Бидејќи $MP\perp BC$ и M е средина на отсечката AK, следува дека отсечката MH е средна линија во $\triangle ABK$, па имаме: $\overline{MH}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\overline{NC}$, $MH\parallel NC$. Оттука следува дека четириаголникот $MHCN$ е паралелограм, т.е. $MN\parallel CH$. Но, $CH\perp MB$, па следува дека и $MN\perp MB$, т.е. $\measuredangle BMN=90^\circ$.

Втор начин. На сличен начин како во претходното решение се докажува дека четириаголникот $MHCN$ е паралелограм (види цртеж), т.е. $MN\parallel CH$. Но тогаш четириаголникот $MQCN$ е трапез, па следува $\sphericalangle QMN+\sphericalangle MAC=180^\circ$, од каде што, поради $\sphericalangle MQC=90^\circ$ следува $\sphericalangle QMN=90^\circ$, т.е. $\sphericalangle BMN=90^\circ$.

7. На страната AB од остроаголниот триаголник ABC е избрана точка K. Точката M е средина на BC, а AM и CK се сечат во точката F, при што $\overline{KF}=\overline{AK}$. Докажи дека $\overline{CF}=\overline{AB}$.

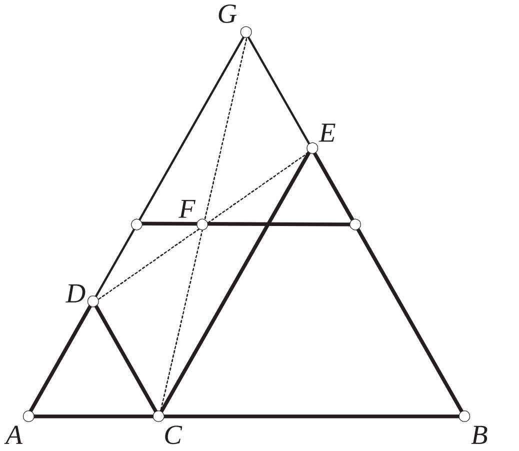


Решение. Од условот на задачата следува $\overline{KF}=\overline{AK}$, што значи дека триаголникот FAK е рамнокрак со основа AF. Според тоа, $\measuredangle KAF=\measuredangle AFK$ (агли при основа на рамнокрак триаголник). Понатаму, аглите $\measuredangle KFA$ и $\measuredangle MFC$ се накрсни, па затоа тие се еднакви.

На правата AM ќе избереме точка Q таква што $\overline{AM}=\overline{MQ}$. Бидејќи отсечките AQ и BC се половат, четириаголникот $BQCA$ е паралелограм. Како наизменични агли на трансферзала $\measuredangle BAQ=\measuredangle AQC$. Според тоа, триаголникот QCE е рамнокрак.

Сега е јасно дека $\overline{FC}=\overline{QC}=\overline{AB}$.

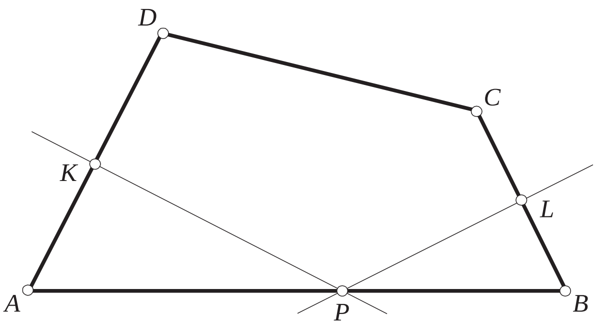
8. Нека C е внатрешна точка од отсечката AB, а ACD и CBE се рамнострани триаголници кои се на иста страна од AB. Која е геометриската фигура што е формирана од средините на отсечките DE.



Решение. Ако избереме произволна точка C од внатрешноста на отсечката AB и ги конструираме триаголниците ACD и CBE, тогаш $\measuredangle CAD$ и $\measuredangle CBE$ имаат по 60°. Значи, $AD \cap BE = G$ и точката G не зависи од изборот на C.

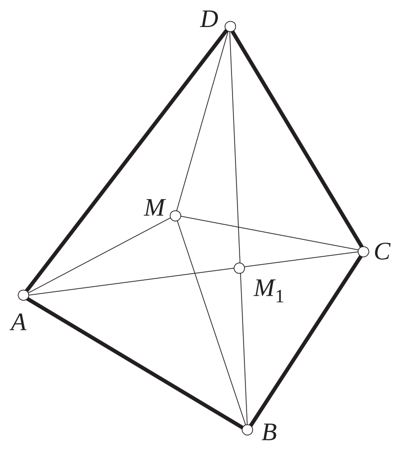
Бидејќи $CE \parallel DG$ и $DC \parallel GE$, четириаголникот $DCEG$ е параллелограм, а неговите дијагонали се половат. Според тоа F е средна точка на CG и припаѓа на средната линија на $\triangle ACG$ и $\triangle CBG$. Значи, F припаѓа на средната линија на $\triangle ABG$. Не е тешко да се провери и обратното, т.е. да се докаже дека за секоја точка од средната линија на триаголникот $\triangle ABG$ постојат рамнострани триаголници кои го исполнуваат условот од задачата.

9. Во конвексниот четириаголник $ABCD$ дијагоналите AC и BD се еднакви. Ако симетралите на страните AD и BC се сечат во точка P која лежи на страната AB, докажи дека $\measuredangle DAB = \measuredangle ABC$.



Решение. Со K и L ќе ги означиме средините на страните AD и BC на четириаголникот $ABCD$. Бидејќи $KP \perp AD$, триаголникот KPA е рамнокрак и $\overline{AP} = \overline{PD}$, а од $PL \perp BC$ добиваме дека триаголникот BPC е рамнокрак и $\overline{PB} = \overline{PC}$. Бидејќи дијагоналите AC и BD се со еднаква должина, добиваме дека триаголниците APC и BPD се складни. Според тоа $\measuredangle APC = \measuredangle BPD$, од каде што добиваме дека $\measuredangle APD = \measuredangle CPB$. Од друга страна, од триаголниците BPA и CPB кои се рамнокраки, добиваме $\measuredangle DPB = 180^\circ - 2\measuredangle DAP$ и $\measuredangle CPB = 180^\circ - 2\measuredangle PBC$. Од претходно добиените равенства, имаме $\measuredangle DAP = \measuredangle CBP$.

10. Во конвексен четириаголник да се најде онаа точка за која збирот на растојанијата до темињата е најмал.



Решение. Нека $ABCD$ е произволен конвексен четириаголник и M е произволна точка. Да ставиме $AC \cap BD = \{M_1\}$ и да ги воведеме ознаките: $\overline{AM} = x$, $\overline{BM} = y$, $\overline{CM} = z$, $\overline{DM} = u$, $\overline{AM_1} = x'$, $\overline{BM_1} = y'$, $\overline{CM_1} = z'$, $\overline{DM_1} = u'$. За триаголниците AMC и BMD важат неравенствата:

$$\overline{AM}+\overline{MC}\geq\overline{AM_1}+\overline{M_1C} \text{ и } \overline{BM}+\overline{DM}\geq\overline{BM_1}+\overline{M_1D},$$

т.е.

$$x+z\geq x'+z' \text{ и } y+z\geq y'+z'.$$

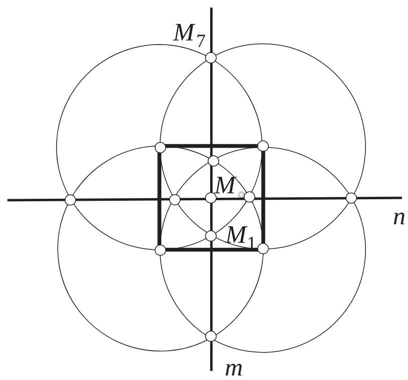
Собирајќи ги овие две неравенства, добиваме:

$$x+y+z+u\geq x'+y'+z'+u',$$

т.е. точката е во пресекот на дијагоналите AC и BD.

11. Даден е квадрат $ABCD$. Најди ги сите точки M од неговата рамнина, за кои што истовремено триаголниците ABM, BCM, CDM и DAM се рамнокраки.

Решение. Нека $\overline{AB}=a$. Страната на квадратот може да биде или основа или крак на рамнокракиот триаголник. Затоа, множеството L_1 на точки за кои што $\triangle ABM$ е рамнокрак, е унија на симетралата m на страната AB, без средината на AB (тогаш нема триаголник!) и кружниците $k_A(A,a)$ и $k_B(B,a)$ без точките A и B (види цртеж), т.е. $L_1=m\cup k_A\cup k_B$.

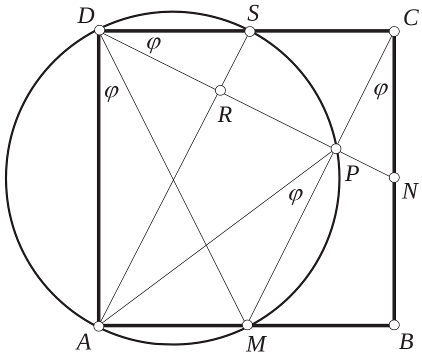


Аналогно, за триаголниците BCM, CDM и DAM ги имаме множествата: $L_2=m\cup k_B\cup k_C$, $L_3=m\cup k_C\cup k_D$, $L_4=m\cup k_D\cup k_A$.

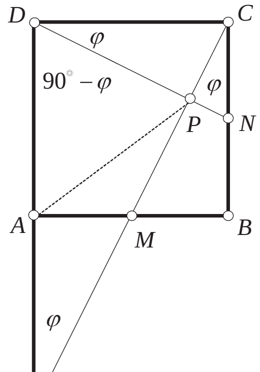
Пресекот на множествата L_1, L_2, L_3 и L_4 се бараните точки. Тоа се девет точки, што лежат на симетралите m и n: M_0-центарот на квадратот, M_1,M_2,M_3,M_4-внатре во квадратот и M_5,M_6,M_7,M_8-надвор од квадратот.

12. Точките M и N се средини на страните AB и BC на квадратот $ABCD$. Отсечките CM и DN се сечат во точката P. Докажи дека $\overline{AP}=\overline{AD}$.

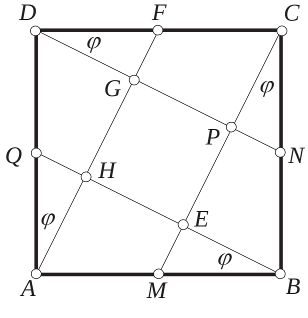
Решение. *Прв начин.* Очигледно е дека $\triangle MBC\cong\triangle NCD$ (види цртеж 1), според признакот САС; тогаш $\measuredangle BCM=\measuredangle CDN=\varphi$, а оттука. бидејќи $BC\perp CD$, ќе следува дека и другите краци на овие агли се меѓусебе нормални, т.е. $CM\perp DN$.



цртеж 1



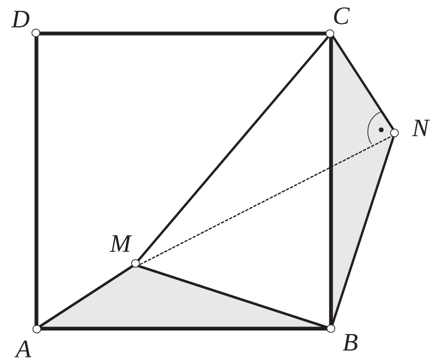
цртеж 2



цртеж 3

Нека S е средина на страната CD. Тогаш $AS \| MC$, бидејќи четириаголникот $AMCS$ е паралелограм ($\overline{AM} = \overline{SC}$ и $AM \| MS$), па ќе следува дека и $SR \perp DN$. Понатаму SR е средна линија на отсечката PCD, од каде што заклучуваме дека R е средина на отсечката DP. Но, тогаш AS е симетрала на отсечката DP, од каде што следува дека $\overline{AP} = \overline{AD}$.

Втор начин. Со ротација ρ на квадратот $ABCD$ околу неговиот центар O за 90°, точката M се пресликува во точката N, а темето C во темето D, т.е. $\rho(MC) = ND$, од што следува дека $MC \perp ND$. Нека S е средина на страната CD, тогаш $AS \| MC$ или $SR \| PC$ (види цртеж 1), од каде што следува дека R е средина на отсечката DP (SR е средна линија). Но $AR \perp PD$, па, следува дека ΔAPD е рамнокрак, т.е. $\overline{AP} = \overline{AD}$.



Трет начин. Од $MC \perp ND$ следува дека четириаголникот $AMPD$ е тетивен. Оттука $\measuredangle ADM = \measuredangle APM = \varphi$; но и $\measuredangle ADM = \measuredangle NCD = \varphi$, па следува дека $\measuredangle ADP = \measuredangle APD$, т.е. ΔAPD е рамнокрак; заклучуваме дека $\overline{AP} = \overline{AD}$.

Четврт начин. Очигледно $\triangle AMS \cong \triangle BMC$ (види цртеж 2; според признакот АСА); тогаш

$$\measuredangle MSA = \measuredangle MCB = \varphi. \tag{1}$$

Исто така $\Delta MBC \cong \Delta NCD$, па следува:

$$\measuredangle MCB = \measuredangle NDC = \varphi. \tag{2}$$

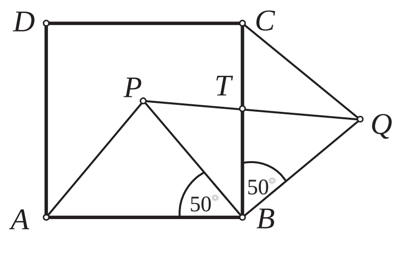
Тогаш $\measuredangle SDP = 90^\circ - \varphi$, а оттука $\measuredangle SPD = 90^\circ$.

Значи, $\triangle SDP$ е правоаголен со прав агол кај темето P. Бидејќи $\overline{AD} = \overline{AS}$, следува дека AP е тежишна линија на хипотенузата SD на правоаголниот ΔSDP и е еднаква на половина од неа, т.е. $\overline{AP} = \overline{AD}$.

Забелешка. Задачата може да се реши и преку цртежот 3, односно со разгледување на четириаголниците $EPGH$ и $BNDQ$ итн.

13. Страните AB и BC од квадратот $ABCD$ се основи на рамнокраки триаголници ABP и CBQ со $\measuredangle P = \measuredangle Q = 80^\circ$. Точката P припаѓа на внатрешноста на квадратот а точката Q е надвор од квадратот. Определи го аголот меѓу PQ и BC.

Решение. Бидејќи триаголниците ABP и BQC се рамнокраки (види цртеж) со агли при врвот од 80°, аглите при нивните основи имаат 50°. Од тоа што $\overline{AB} = \overline{BC}$, тие се складни, т.е. $\triangle BPA \cong \triangle BQC$, па според тоа $\overline{PB} = \overline{BQ}$. Јасно е дека $\measuredangle PBC = 40^\circ$, па според тоа



$$\measuredangle PBQ = \measuredangle PBC + \measuredangle CBQ = 40^\circ + 50^\circ = 90^\circ .$$

Значи, триаголникот $\triangle PBQ$ е рамнокрак правоаголен триаголник и

$$\measuredangle BQP = \measuredangle BQP = 45^\circ .$$

Сега,

$$\measuredangle BTQ = 180^\circ - (\measuredangle TBQ + \measuredangle TQB) = 180^\circ - 45^\circ - 50^\circ = 85^\circ .$$

14. Точката M се наоѓа во внатрешноста на квадратот $ABCD$, така што $\overline{AM} : \overline{BM} : \overline{CM} = 1:2:3$. Определи го $\measuredangle AMB$.

Решение. Нека M е точка во квадратот $ABCD$ што ги исполнува условите на задачата (види цртеж). Со ротација на $\triangle BAM$ околу темето B за агол од -90°, добиваме $\triangle BCN \cong \triangle BAM$ и притоа

$$\measuredangle AMB = \measuredangle CNB . \qquad (1)$$

Очигледно, $\triangle MNB$ е рамнокрак правоаголен, со агол при основата

$$\measuredangle MNB = 45^\circ . \qquad (2)$$

Да ставиме $\overline{AM} = x$, тогаш $\overline{BM} = 2x$, $\overline{CM} = 3x$, а од правоаголниот $\triangle MNB$ добиваме $\overline{MN}^2 = \overline{MB}^2 + \overline{NB}^2 = 4x^2 + 4x^2 = 8x^2$. Бидејќи $\overline{MC}^{\,2} = (3x)^2 = 9x^2$ и $\overline{MN}^2 = \overline{MB}^2 + \overline{NC}^2 = 8x^2 + x^2 = 9x^2$, следува дека $\overline{MC}^2 = \overline{MN}^2 + \overline{NC}^2$, од каде што заклучуваме дека ΔMNC е правоаголен, т.е.

$$\measuredangle CNM = 90^\circ . \qquad (3)$$

Од (1), (2) и (3) следува

$$\measuredangle AMB = \measuredangle CNB + \measuredangle MNB = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ .$$

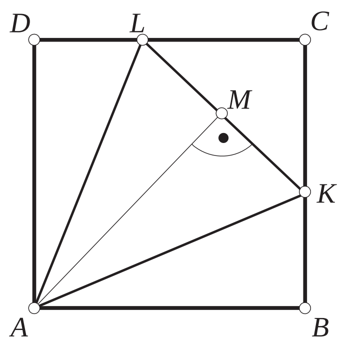
15. Точките K и L се избрани од страните BC и CD од квадратот $ABCD$ соодветно, така што $\measuredangle AKB = \measuredangle AKL$. Преметај го аголот $\measuredangle KAL$.

Решение. Нека AM е висина во $\triangle AKL$ ($M \in KL$). Правоаголните триаголници AMK и ABK имаат ист остар агол и заедничка хипотенуза. Според тоа, тие се складни. Значи, $\overline{AM} = \overline{AB} = \overline{AD}$. Правоаголните триаголници AML и ADL имаат заедничка хипотенуза и иста катета, па тие се складни. Но, тогаш

$$\measuredangle KAL = \measuredangle KAM + \measuredangle MAL = \measuredangle KAB + \measuredangle DAL ,$$

па според тоа

$$2\measuredangle KAL = \measuredangle KAM + \measuredangle MAL + \measuredangle KAB + \measuredangle DAL = 90^\circ .$$



Значи $\measuredangle KAL = 45^\circ$.

16. Точката K лежи на страната BC на квадратот $ABCD$, а бисектрисата на аголот KAD ја сече страната CD во точката L. Докажи дека $\overline{DL} + \overline{KB} = \overline{AK}$.

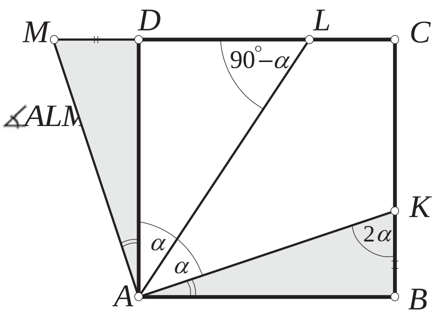
Решение. Ако $\measuredangle KAL = \measuredangle LAD = \alpha$, тогаш (види цртеж):

$$\measuredangle KAD = 2\alpha = \measuredangle AKB , \quad \measuredangle KAB = 90^\circ - 2\alpha .$$

Ја продолжуваме страната CD, преку точката D, за $\overline{DM} = \overline{BK}$, тогаш очигледно е дека $\triangle ADM \cong \triangle ABK$ (САС). Од складноста на овие триаголниците следува:

$\overline{AM} = \overline{AK}$ и $\measuredangle MAD = \measuredangle KAB = 90^\circ - 2\alpha$,
а оттука:

$\measuredangle MAL = \measuredangle MAD + \measuredangle DAL = 90^\circ - 2\alpha + \alpha = 90^\circ + \alpha = \measuredangle ALM$



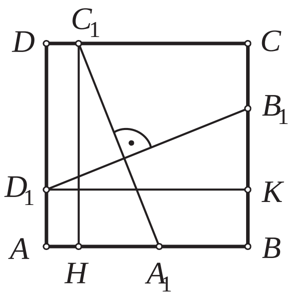
Значи, триаголникот ALM е рамнокрак, со основа AL, па добиваме

$\overline{AK} = \overline{LM} = \overline{LD} + \overline{DM}$, т.е. $\overline{AK} = \overline{DL} + \overline{KB}$.

17. На страните AB, BC, CD и DA од квадратот $ABCD$ се избрани точките A_1, B_1, C_1, D_1 соодветно, така што $A_1C_1 \perp B_1D_1$. Докажи дека

$$\overline{AA_1} + \overline{CC_1} = \overline{BB_1} + \overline{DD_1} .$$

Решение. Нека $ABCD$ е квадрат во кој што A_1, B_1, C_1, D_1 се точки од AB, BC, CD, DA соодветно (види цртеж). Од точките C_1 и D_1 ќе повлечеме нормали C_1H и D_1K кон AB и BC соодветно.



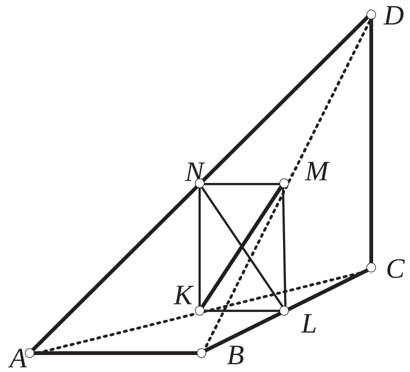
Од равенството $\measuredangle B_1D_1K = \measuredangle A_1C_1H$ (агли со нормални краци) добиваме дека $\triangle KD_1B_1 \cong \triangle HC_1A_1$. Од складноста, катетите KB_1 и A_1H се еднакви меѓу себе, и ќе воведеме ознака $\overline{KB_1} = \overline{A_1H} = t$. Сега заради равенствата $\overline{BH} = \overline{CC_1}$ и $\overline{CK} = \overline{DD_1}$, добиваме

$$\overline{AB} = \overline{AA_1} + \overline{BH} - \overline{A_1H} = \overline{AA_1} + \overline{CC_1} - t$$
$$\overline{BC} = \overline{BB_1} + \overline{CK} - \overline{B_1K} = \overline{CC_1} + \overline{DD_1} - t .$$

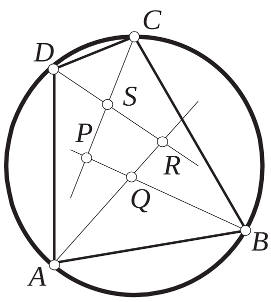
Бараното равенство се добива од равенството $\overline{AB} = \overline{BC}$.

18. Во конвексен четириаголник $ABCD$, отсечката што ги сврзува средините на страните AD и BC има должина 1. Правите AB и CD се нормални меѓу себе. Определи ја должината на отсечката што ги сврзува средините на дијагоналите AC и BD.

Решение. Нека $ABCD$ е четириаголник во кој правите AB и CD се нормални меѓу себе, и $\overline{LN} = 1$, каде L е средина на страната BC а N е средина на страната AD. Средините на дијагоналите AC и BD ќе ги означиме со K и M соодветно. Според тоа како се избрани точките K, L, M, N, отсечките KL, MN, LM и KN се средни линии на триаголниците ABC, ABD, CDB и CDA соодветно, при што $KL \| AB \| MN$ и $KN \| CD \| LM$. Бидејќи $AB \perp CD$, четириаголникот $KLMN$ е правоаголник. Според тоа $\overline{KM} = \overline{LN} = 1$.



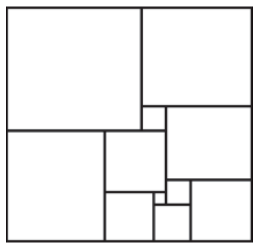
19. Точките K, L, M и N се средини на страните AB, BC, CD и DA соодветно од четириаголникот $ABCD$ кој е впишан во кружница. Докажи дека ортоцентрите на триаголниците AKN, BKL, CLM и DMN се темиња на паралелограм.



Решение. Нека H_A, H_B, H_C и H_D се ортоцентрите на триаголниците AKN, BKL, CLM и DMN соодветно, и нека O е центар на кружницата. Отсечката OK е паралелна со LH_A, бидејќи двете се нормални со страната AD. Од друга страна OL е паралелна со отсечката KH_A, бидејќи тие се нормални на страната AB. Значи, OKH_AL е паралелограм. Според тоа $\overrightarrow{LH}_A = \overrightarrow{OK}$. На потполно аналоген начин добиваме дека ONH_DK е паралелограм и $\overrightarrow{NH}_D = \overrightarrow{OK}$. Од равенствата $\overrightarrow{LH}_A = \overrightarrow{OK}$ и $\overrightarrow{NH}_D = \overrightarrow{OK}$, добиваме дека отсечката H_AH_B е еднаква и паралелна на отсечката LN.

На потполно аналоген начин, заклучуваме дека отсечката H_BH_C е паралелна и еднаква на отсечката LN. Според тоа $H_AH_BH_CH_D$ е параллелограм.

20. Правоаголникот на цртежот десно е поделен на 11 квадрати со различни страни. Најмалиот квадрат има страна 9. Определи ги димензиите на правоаголникот.

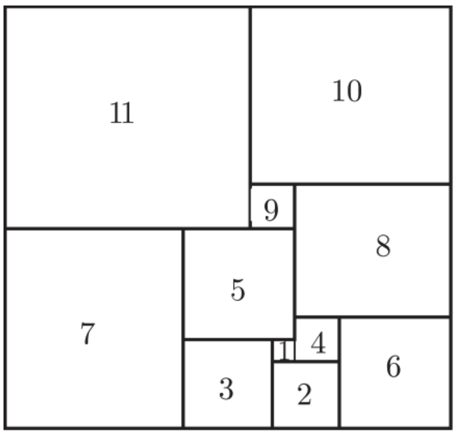


Решение. Квадратот означен со бројот 1 има должина (т.е. должина на страна) 9. Нека квадратот бр. 2 има должина x. Тогаш квадратот бр. 3 има должина $x+9$, квадратот бр. 4 има должина $x-9$, квадратот бр. 5 има должина $x+18$, квадратот бр. 6 има должина $2x-9$, квадратот бр. 7 има должина $2x+27$, квадратот бр. 8 има должина $3x-18$.

Ако страната на квадратот бр. 9 е y, тогаш

$$y+(x+18)+9=(3x-18)+(x-9),$$

од каде $y=3x-54$. Па, квадратот бр. 10 има страна $6x-72$, а квадратот бр. 11 страна $9x-126$.



Горната страна на дадениот правоаголник е збир на страните на квадратите бр. 10 и 11, т.е. има должина

$$(6x-72)+(9x-126)=15x-198,$$

а неговата долна страна е збир на страните на квадратите бр. 7, 3, 2 и 6, т.е. има должина

$$(2x+27)+(x+9)+x+(2x-9)=6x+27.$$

Изедначувајќи ги добиените изрази добиваме $x=25$. Затоа страните на квадратите означени со броевите од 1 до 11 се 9, 25, 34, 16, 43, 41, 77, 57, 21, 78, 99, соодветно. Па, должината на дадениот правоаголник е 177, а ширината 176.

21. Над страната CD на квадратот $ABCD$ е конструирана полукружница. Нека M е произволна точка од полукружницата и нека MA и MB ја сечат CD во точките K и L соодветно. Докажи дека $\overline{KL}^2=\overline{DK}\cdot\overline{LC}$

Решение. Нека $MD\cap AB=\{P\}$ и $MC\cap AB=\{Q\}$. Сега $\triangle PAM\sim\triangle DEM$ и $\triangle MKL\sim\triangle MAB$, па затоа $\frac{\overline{MK}}{\overline{MA}}=\frac{\overline{DK}}{\overline{PA}}$ и $\frac{\overline{MK}}{\overline{MA}}=\frac{\overline{KL}}{\overline{AB}}$ (направи цртеж). Од последните равенства следува

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AP}}=\frac{\overline{KL}}{\overline{DK}} \qquad (1)$$

Од друга страна за правоаголните триаголници DAP и QCB важи $\measuredangle DPA=\measuredangle BCQ$, како агли со нормални краци, па затоа тие се слични. Според тоа $\frac{\overline{BQ}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{AD}}{\overline{AP}}$, и бидејќи $ABCD$ е квадрат добиваме $\frac{\overline{BQ}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{AP}}$. Од последното равенство и од (1) следува дека

$$\frac{\overline{BQ}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{KL}}{\overline{DK}} \qquad (2)$$

Од друга страна, $\triangle MLC\sim\triangle MBQ$, па затоа $\frac{\overline{LC}}{\overline{BQ}}=\frac{\overline{ML}}{\overline{MB}}$ и како $\frac{\overline{ML}}{\overline{MB}}=\frac{\overline{KL}}{\overline{AB}}$, добиваме дека $\frac{\overline{LC}}{\overline{BQ}}=\frac{\overline{KL}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{KL}}{\overline{BC}}$, т.е.

$$\frac{\overline{BQ}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{LC}}{\overline{KL}}. \qquad (3)$$

Конечно, од равенствата (2) и (3) добиваме $\frac{\overline{KL}}{\overline{DK}}=\frac{\overline{LC}}{\overline{KL}}$, т.е. $\overline{KL}^2=\overline{DK}\cdot\overline{LC}$.

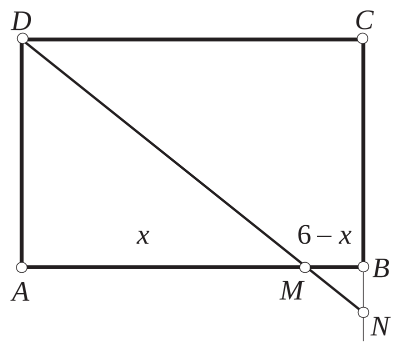
22. Нека $ABCD$ е правоаголник со $\overline{AB}=6$ и $\overline{BC}=4$ и нека M е точка од отсечката AB, различна од A и B. Правата DM ја сече правата BC во точката N. Нека $\overline{AM}=x$.

а) Изрази го $\overline{BN}$ како функција од x.

б) Одреди го множеството точки M такви што $\overline{BN}\le 1$.

Решение. а) Од условот на задачата следува дека $x\in(0,6)$, а од сличноста на правоаголните триаголници MAD и MBN (види цртеж) добиваме:

$$\overline{BN}:\overline{AD}=\overline{MB}:\overline{MA}, \quad \Rightarrow$$
$$\overline{BN}:4=(6-x):x \quad \Rightarrow$$
$$\overline{BN}=\tfrac{24}{x}-4.$$



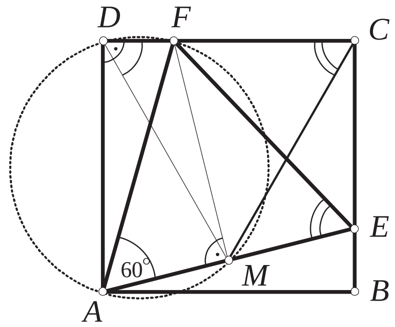
б) Од $\overline{BN}\le 1$ добиваме $\frac{24}{x}-4\le 1$, $x\ge\frac{24}{5}$. Но $x\in(0,6)$, па затоа $x\in[\frac{24}{5},6)$.

23. На страните BC и CD на правоаголникот $ABCD$ се избрани точки E и F, такви што триаголникот AEF е рамностран. Точката M е средина на отсечката AE. Докажи дека триаголникот CDM е рамностран.

Решение. Средината M на страната AE на рамностраниот триаголник AEF е воедно подножје на висината од точката F, т.е. аголот AMF е прав. Бидејќи и аголот ADF е прав, следува дека кружницата со дијаметар AF ги содржи точките M и D. Затоа

$$\measuredangle FDM = \measuredangle FAM = 60^\circ$$

(види цртеж).Слично од тетивниот четириаголник $MECF$ заклучуваме дека



$$\measuredangle FCM = \measuredangle FEM = 60^\circ,$$

од што следува дека триаголникот CDM е рамностран.

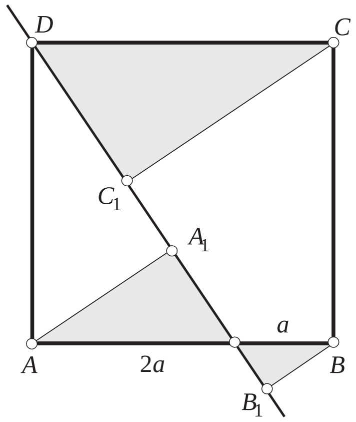
24. На страната AB на квадратот $ABCD$ е избрана точка M, таква што $\overline{AM}:\overline{MB}=2:1$, а потоа е повлечена правата $p \equiv DM$. Ако A_1, B_1, C_1 се ортогонални проекции на точките A, B, C врз правата p, тогаш $\overline{AA_1}+\overline{BB_1}=\overline{CC_1}$. Докажи!

Решение. Нека $\overline{AB}=3a$, тогаш $\overline{AM}=2a$, $\overline{MB}=a$. Од сличноста на триаголниците AA_1M и BB_1M (види цртеж) имаме:

$$\overline{AA_1}:\overline{BB_1}=\overline{AM}:\overline{BM}=2:1.$$

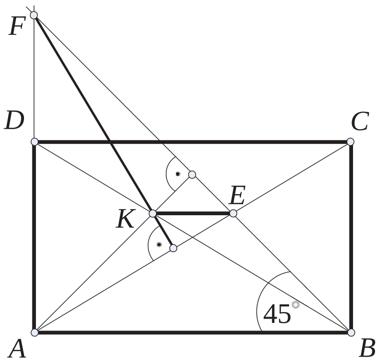
Ако $\overline{BB_1}=x$, тогаш $\overline{AA_1}=2x$. Аналогно, од сличноста на триаголниците BB_1M и CC_1D добиваме: $\overline{BB_1}:\overline{CC_1}=a:3a$, т.е. $\overline{CC_1}=3x$. Конечно,

$$\overline{AA_1}+\overline{BB_1}=\overline{CC_1}.$$

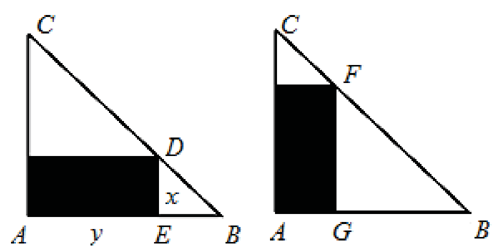


25. Во правоаголникот $ABCD$, симетралата на аголот кај темето B ги сече правите AC и AD во точки E и F, соодветно. Низ E е конструирана права паралелна со AB, која ја сече дијагоналата BD во точка K. Да се докаже дека $FK \perp AC$.

Решение. Имаме, $AB \parallel KE$, па затоа четириаголникот $ABEK$ е трапоез. Понатаму, од $\measuredangle BKE = \measuredangle ABD = \measuredangle BAC = \measuredangle AEK$ следува дека трапезот $ABEK$ е рамнокрак, па затоа важи $\measuredangle BAK = \measuredangle ABE = 45^\circ$ (види цртеж). Но, тоа значи дека правата AK е нормална на правата EF. Од друга страна правата EK е нормална на правата AF, па затоа точката K е ортоцентар на триаголникот AEF, т.е. $FK \perp AE$.



26. На цртежот е прикажан правоаголник, кој не е квадрат и који може да се впише во правоаголен триаголник на два различни начини. Едната катета на три-



аголникот има должина a. Докажи дека периметарот на правоаголникот е еднаков на $2a$.

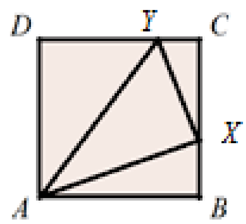
Решение. Нека $\triangle ABC$ е правоаголен со катета $\overline{AB}=a$ и нека x и y се должините на страните на правоаголникот кој на два начини е вписан во триаголникот (види цртеж). Тогаш, $\triangle EBD \sim \triangle GBF$. Според тоа, $\frac{x}{a-y}=\frac{y}{a-x}$, од каде што добиваме

$$x(a-x)=y(a-y)\text{ , т.е. } a(x-y)=(x+y)(x-y)$$

Сега бидејќи $x\neq y$, добиваме $a=x+y$. Периметарот на правоаголникот е

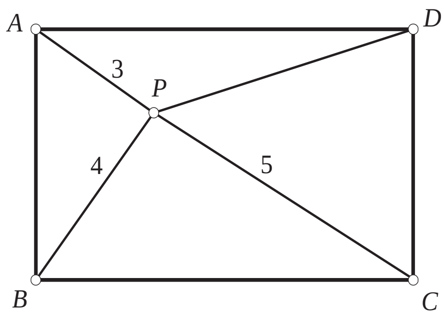
$$L=2x+2y=2(x+y)=2a.$$

27. Даден е квадрат $ABCD$. Точките X и Y лежат на страните BC и CD, соодветно. Должината на отсечките XY, AX и AY се 3, 4 и 5 соодветно. Пресметај ја должината на страната на квадратот.



Решение. Нека должината на страната на квадратот е a **.** Триаголникот AXY е правоаголен (страните се 3, 4 и 5) со прав агол кај темето X . Бидејќи $\measuredangle CXY=\measuredangle XAB$ (агли со нормални краци) следува дека $\triangle CXY$ е сличен со $\triangle BAX$, па затоа $\frac{\overline{CX}}{\overline{BA}}=\frac{\overline{XY}}{\overline{AX}}$ или $\overline{CX}=\frac{\overline{XY}\cdot\overline{BA}}{\overline{AX}}=\frac{3a}{4}$. Непосредно добиваме дека $\overline{BX}=\frac{a}{4}$. Од Питагоровата теорема за $\triangle ABX$ добиваме $a^2+(\frac{a}{4})^2=4^2$, од каде $a=\frac{16\sqrt{17}}{17}$.

28. Точката P припаѓа на внатрешноста на правоаголникот $ABCD$. Ако $\overline{AP}=3$, $\overline{BP}=4$ и $\overline{CP}=5$, определи ја должината на отсечката DP .



Решение. Ќе воведеме координатен систем со $B(0,0)$, $A(0,a)$, $C(c,0)$, $D(c,a)$ и $P(x,y)$. Од Питагоровата теорема имаме

$$\overline{PB}^2=x^2+y^2=16,\ \overline{AP}^2=(a-y)^2+x^2=9,$$

$$\overline{CP}^2=y^2+(c-x)^2=25 .$$

Тогаш

$$\begin{aligned}\overline{DP}^2&=(c-x)^2+(a-y)^2\\&=((c-x)^2+x^2)+((a-y)^2+y^2)-(x^2+y^2)\,.\\&=25+9-16=18\end{aligned}$$

Сега е јасно дека $\overline{DP}^2=18$, т.е. $\overline{DP}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$.

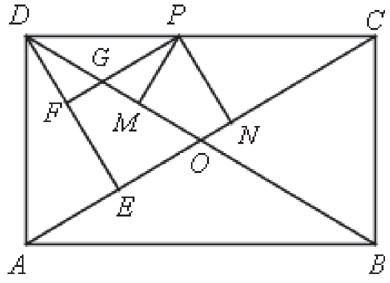
29. Нека P е точка од страната CD на правоаголникот $ABCD$. Нека PM и PN се нормалите повлечени на дијагоналите, M и N лежат на BD и AC, соодветно. Докажи дека збирот $\overline{PM}+\overline{PN}$ не зависи од изборот на точката P .

Решение. Нека DE е висина во триаголникот ACD, PF е права која што е нормална на DE ($F \in DE$) и $\{G\} = PF \cap DB$. Тогаш, четириаголникот $ENPF$ е правоаголник, па затоа $\overline{PN} = \overline{FE}$.

Од $\measuredangle DPF = \measuredangle DCA = \measuredangle CDB$ следува $\measuredangle DPG = \measuredangle PDG$ и затоа $\overline{DG} = \overline{PG}$. Тогаш, $\triangle FGD \cong \triangle MGP$ ($\measuredangle GFD = \measuredangle GMP = 90^\circ$, $\measuredangle FGD = \measuredangle MGP$ и $\overline{DG} = \overline{PG}$), па затоа важи $\overline{PM} = \overline{DF}$. Значи,

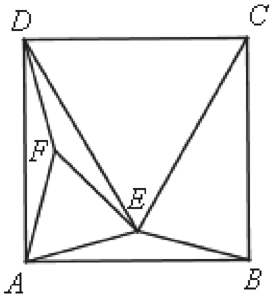
$$\overline{PM} + \overline{PN} = \overline{DF} + \overline{FE} = \overline{DE},$$

односно $\overline{PM} + \overline{PN}$ не зависи од изборот на точката P.



30. Нека E е точка во внатрешноста на квадратот $ABCD$ таква што $\measuredangle EAB = \measuredangle EBA = 15^\circ$. Докажи дека $\triangle CDE$ е рамностран.

Решение. Нека F е точка во внатрешноста на квадратот $ABCD$, така што $\measuredangle FAD = \measuredangle FDA = 15^\circ$. Тогаш $\triangle AFD \cong \triangle BEA$, па затоа $\overline{AF} = \overline{AE}$. Бидејќи $\measuredangle FAE = 90^\circ - 2 \cdot 15^\circ = 60^\circ$, следува дека $\triangle AEF$ е рамностран. Тогаш $\overline{FE} = \overline{FD}$ и $\measuredangle DFE = 360^\circ - 150^\circ - 60^\circ = 150^\circ$, па затоа $\triangle AFD \cong \triangle DFE$. Оттука, $\overline{AD} = \overline{DE}$, односно $\overline{DE} = \overline{DC}$. Од $\measuredangle CDE = 90^\circ - 2 \cdot 15^\circ = 60^\circ$ и $\overline{DE} = \overline{DC}$ добиваме дека $\triangle CDE$ е рамностран.



31. Нека точката M е во внатрешноста на квадратот $ABCD$. Ако A_1, B_1, C_1 и D_1 се вторите пресечни точки на правите AM, BM, CM и DM со опишаната кружница околу квадратот $ABCD$, соодветно, докажи дека

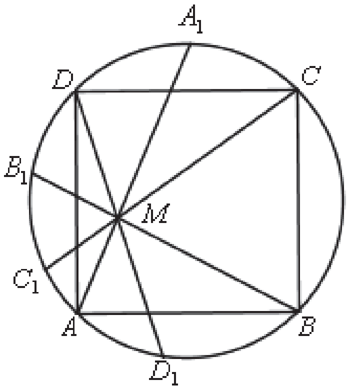
$$\overline{A_1B_1} \cdot \overline{C_1D_1} = \overline{A_1D_1} \cdot \overline{B_1C_1}.$$

Решение. Од $\measuredangle AMB = \measuredangle B_1MA_1$ и

$$\measuredangle MBA = \measuredangle B_1BA = \measuredangle B_1A_1A = \measuredangle MA_1B_1$$

следува $\triangle ABM \sim B_1A_1M$, па затоа $\frac{\overline{AB}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{\overline{BM}}{\overline{A_1M}}$.

Слично, од $\triangle BCM \sim \triangle C_1B_1M$ следува $\frac{\overline{BC}}{\overline{B_1C_1}} = \frac{\overline{BM}}{\overline{C_1M}}$, од $\triangle CDM \sim \triangle D_1C_1M$ следува $\frac{\overline{CD}}{\overline{C_1D_1}} = \frac{\overline{DM}}{\overline{C_1M}}$ и од $\triangle DAM \sim \triangle A_1D_1M$ следува $\frac{\overline{DA}}{\overline{D_1A_1}} = \frac{\overline{DM}}{\overline{A_1M}}$. Според тоа, $\frac{\overline{AB}}{\overline{A_1B_1}} \cdot \frac{\overline{CD}}{\overline{C_1D_1}} = \frac{\overline{BM}}{\overline{A_1M}} \cdot \frac{\overline{DM}}{\overline{C_1M}} = \frac{\overline{BM}}{\overline{C_1M}} \cdot \frac{\overline{DM}}{\overline{A_1M}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B_1C_1}} \cdot \frac{\overline{DA}}{\overline{D_1A_1}}$,

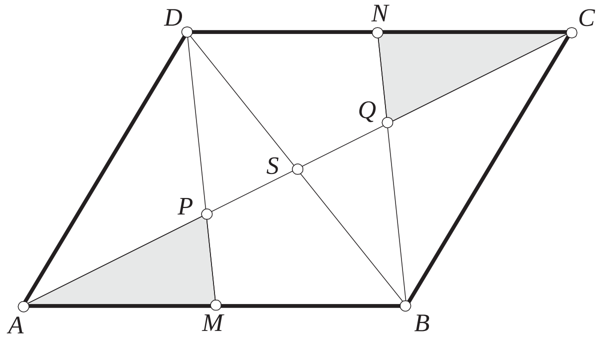


па бидејќи $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA}$ добиваме $\overline{A_1B_1} \cdot \overline{C_1D_1} = \overline{A_1D_1} \cdot \overline{B_1C_1}$.

32. Точките M и N се средини на страните AB и CD на паралелограмот $ABCD$. Докажете дека правите DM и BN ја делат дијагоналата AC на три еднакви делови.

Решение. *Прв начин.* Четириаголникот $MBND$ е паралелограм, бидејќи $\overline{MB}=\overline{ND}$ и $MB \parallel ND$ (види цртеж). За $\triangle CDP$ е $DP \parallel NQ$ и $\overline{DN}=\overline{NC}$, па следува $\overline{PQ}=\overline{QC}$. Аналогно, за $\triangle ABQ$, се докажува дека $\overline{AP}=\overline{PQ}$, па значи

$$\overline{AP}=\overline{PQ}=\overline{QC}.$$



Втор начин. За триаголникот ABD отсечките AS и DM се тежишни линии, а точката P е тежиште, па имаме $\overline{AP}:\overline{PS}=2:1$. Аналогно, за ΔBCD точката Q е тежиште и $\overline{CQ}:\overline{QS}=2:1$. Оттука, поради $\overline{AS}=\overline{SC}$, следува $\overline{AP}=\overline{QC}$, $\overline{PS}=\overline{QS}=\frac{1}{2}\overline{AP}$, т.е. $\overline{AP}=\overline{PQ}=\overline{QC}$.

Трет начин. Четириаголникот $MBND$ е паралелограм, па затоа $MD \parallel BN$. Но, тогаш $\triangle AMP \cong \triangle CNQ$, според признакот АСА ($\overline{AM}=\overline{CN}$, $\measuredangle A=\measuredangle C$, $\measuredangle M=\measuredangle N$; види цртеж), па следува $\overline{AP}=\overline{CQ}$. Понатаму, од сличноста на триаголниците ABQ и CNQ (зошто?) и $\overline{AB}=2\overline{CN}$, следува $\overline{AQ}:\overline{CQ}=2:1$. Конечно, од $\overline{AP}=\overline{QC}$ и $\overline{QC}=\frac{1}{2}\overline{AQ}$, следува $\overline{AP}=\frac{1}{2}\overline{AQ}$, т.е. $\overline{AP}=\overline{PQ}=\overline{QC}$

33. Четириаголникот $ABCD$ е поделен на два четириаголника со отсечка чии краеви се средини на две негови спротивни страни. Докажи дека средините на дијагоналите на добиените четириаголници се темиња на паралелограм или се колинеарни.

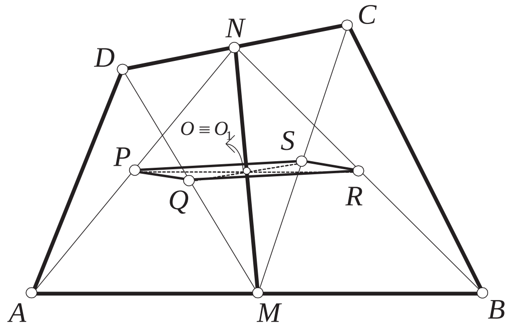
Решение. *Прв начин.* Нека $AB \nparallel CD$. Од триаголникот ABN, кај кој MN е тежишна линија, а PR средна линија (види цртеж) наоѓаме

(1) $PR \parallel AB$

(2) PR и MN се сечат во некоја точка O, која ги располовува овие отсечки.

Аналогно, од триаголникот CDM наоѓаме:

(3) $QS \parallel CD$



(4) QS и MN се сечат во некоја точка O_1, која ги располовува овие отсечки.

Бидејќи отсечката MN има единствена средина, заклучуваме $O \equiv O_1$. На таков начин, од (2) и (4) заклучуваме дека отсечките PR и QS имаат заедничка средина. Од (1) и (3) пак следува дека PR не е паралелно со QS (бидејќи по претпоставка $AB \nparallel CD$). Значи, PR и QS се сечат, а бидејќи се преполовуваат следува дека точките P, Q, R, S се темиња на паралелограм.

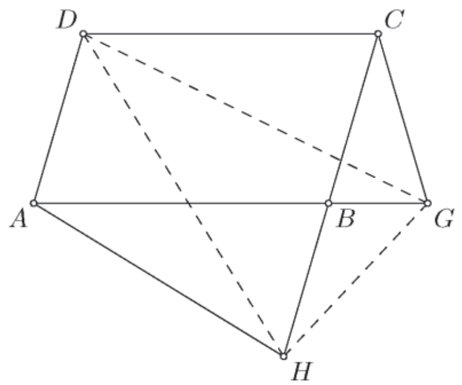
Ако $AB \parallel CD$, горните разгледувања остануваат, со таа разлика што сега отсечките PR и QS се паралелни, и бидејќи имаат заедничка средина, ќе следува дека точките P, Q, R, S се колинеарни. Направи цртеж за овој случај. Разгледај го и случајот кога $AB \parallel CD$ и $AD \parallel BC$, т.е. кога четириаголникот $ABCD$ е паралелограм.

Втор начин. Доволно е да се докаже дека $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$. Имаме по ред

$$\begin{cases} \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MQ} \\ \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{ND} + \overrightarrow{DQ} \end{cases},$$

т.е. $2\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{ND}$. Аналогно добиваме $2\overrightarrow{SR} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{CN}$. Бидејќи $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$ и $\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{ND}$, следува $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$.

34. Даден е паралелограм $ABCD$ со остар агол во темето A. На правата AB избрана е точка G различна од B таква што $\overline{BC} = \overline{CG}$, а на правата BC точка H различна од B таква што $\overline{AB} = \overline{AH}$. Докажи, дека триаголникот DGH е рамнокрак.



Решение. Триаголниците ABH и BCG се рамнокраки и важи $\measuredangle ABH = \measuredangle CBG$ (накрсни агли), па затоа $\measuredangle BAH = \measuredangle BCG$. Понатаму, бидејќи

$$\begin{aligned} \measuredangle DAH &= \measuredangle DAB + \measuredangle BAH \\ &= \measuredangle BCD + \measuredangle BCG = \measuredangle DCG \end{aligned}$$

и

$$\overline{AB} = \overline{AH} = \overline{CD},$$

заклучуваме дека триаголниците ADH и CGD се складни. Тоа значи дека $\overline{DH} = \overline{DG}$, т.е. триаголникот DGH е рамнокрак.

35. На страните AB и BC на паралелограмот $ABCD$ се избрани точки E и F такви што DE е симетрала на $\measuredangle ADF$ и $\overline{AE} + \overline{CF} = \overline{DF}$. Правата низ C која е нормална на DE, ја сече страната AD во точката L и ја сече дијагоналата BD во точката H. Нека DE ја сече AC во точката N.

а) Докажи, дека $\overline{AE} = \overline{DL}$.

б) Ако $HN \parallel AD$, докажи дека $\overline{BC} = \overline{CD}$.

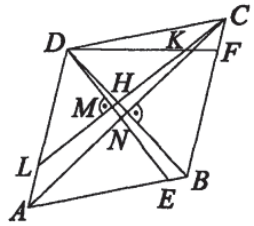
в) Ако $HN \parallel AD$, докажи дека четириаголникот $ABCD$ е квадрат.

Решение. а) Нека $M \in DE \cap CL, K \in DF \cap CL$. Тогаш DM е висина и симетрала на агол во $\triangle LKD$, па затоа $\overline{DL} = \overline{DK}$. Значи, $\triangle LKD \sim \triangle CKF$, па затоа $\overline{KF} = \overline{CF}$ и значи

$$\overline{AE} = \overline{DF} - \overline{CF} = \overline{DF} - \overline{KF} = \overline{DK} = \overline{DL}.$$

б) Од $\triangle ANE \sim \triangle CND$, $\triangle HNC \sim \triangle LAC$ и $\triangle LHD \sim \triangle CHB$ следува

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AN}}{\overline{NC}} = \frac{\overline{LH}}{\overline{HC}} = \frac{\overline{DL}}{\overline{BC}}.$$



Конечно, бидејќи $\overline{AE} = \overline{DL}$ добиваме $\overline{BC} = \overline{CD}$.

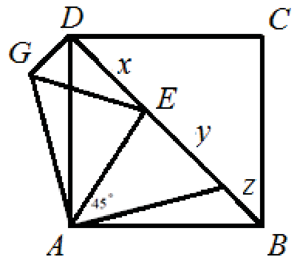
в) Од б) следува, дека четириаголникот $ABCD$ е ромб, таков што $DB \perp AC$, па значи H е ортоцентар во $\triangle DNC$. Според тоа, $HN \perp DC$, па затоа $AD \perp DC$, т.е. четириаголникот $ABCD$ е квадрат.

36. На дијагоналата BD на квадратот $ABCD$ избрани се точки E и F така што $\measuredangle EAF = 45^\circ$. Докажи дека

$$\overline{EF}^2 = \overline{DE}^2 + \overline{FB}^2.$$

Решение. Ако со x, y и z ги означиме должините на отсечките DE, EF и FB (цртеж десно), соодветно, тогаш треба да докажеме дека $y^2 = x^2 + z^2$. Нека G е точка, надвор од квадратот, таква што $\triangle GAD \cong \triangle FAB$, т.е. нека $\overline{AG} = \overline{AF}$ и $\overline{DG} = \overline{BF}$. Тогаш $\measuredangle GAD = \measuredangle FAB$, $\measuredangle GDA = \measuredangle FBA = 45^\circ$ и $\overline{GD} = \overline{FB} = z$. Добиваме дека

$$\begin{aligned}\measuredangle GAE &= \measuredangle GAD + \measuredangle DAE \\ &= \measuredangle FAB + \measuredangle DAE \\ &= 90^\circ - \measuredangle EAF = 45^\circ,\end{aligned}$$



па затоа триаголниците GAE и FAE се складни и оттука $\overline{GE} = \overline{FE} = y$. Бидејќи

$$\measuredangle GDE = \measuredangle GDA + \measuredangle ADE = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ,$$

триаголникот GED е правоаголен и затоа $y^2 = x^2 + z^2$.

37. Должините на страните на правоаголникот $ABCD$ се $\overline{AB} = a$ и $\overline{BC} = b$ ($a > b$). Точката B_1 е симетрична на точката B во однос на дијагоналата AC. Правата AB_1 ја сече страната DC во точката E.

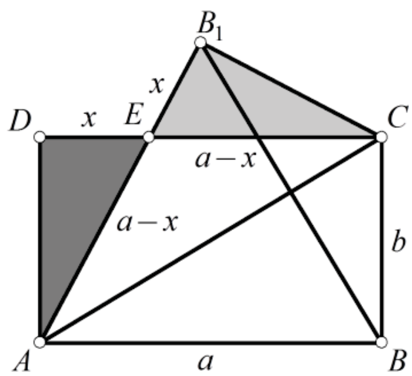
Докажи дека триаголниците ADE и CB_1E се складни. Изрази ги должините на нивните страни преку a и b.

Решение. Симетрија во однос на права ги запазува растојанијата, па затоа $\triangle ABC$ е складен со триаголникот $\triangle AB_1C$. Заради тоа

$$\overline{CB_1} = \overline{CB} = \overline{AD} = b$$

и

$$\measuredangle CB_1A = \measuredangle ABC = \measuredangle EDA = 90^\circ$$



Од друга страна $\measuredangle B_1EC = \measuredangle AED$ како накрсни агли. Триаголниците $\triangle ADE$ и $\triangle CB_1E$ се складни, бидејќи имаат еднакви агли и една еднаклва страна.

Нека $\overline{DE}=x$. Тогаш $\overline{EC}=a-x$, а од складноста следува $\overline{AE}=\overline{EC}=a-x$. Сега, од Питагоровата теорема добиваме

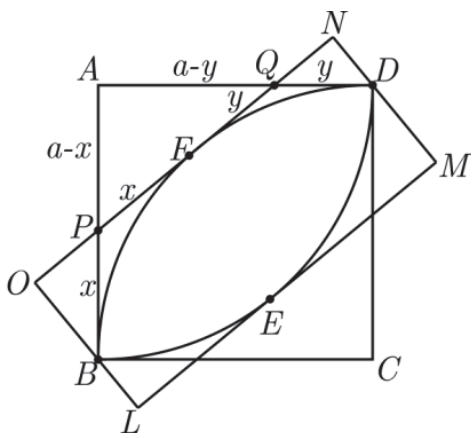
$$\overline{AE}^2=\overline{AD}^2+\overline{DE}^2 \text{, т.е. } (a-x)^2=b^2+x^2 .$$

Значи,

$$\overline{AD}=b,\ \overline{DE}=b,\ \overline{DE}=\tfrac{a^2-b^2}{2a},\ \overline{AE}=\tfrac{a^2+b^2}{2a} .$$

38. Фигурата $\boldsymbol{F}$ се состои од точките B и D и лаците BD конструирани во внатрешноста на квадратот $ABCD$ со центри во A и C и со радиуси AB. Докажи дека сите правоаголници опишани околу фигурата $\boldsymbol{F}$, така што секоја страна на правоаголникот има точно една заедничка точка со фигурата $\boldsymbol{F}$, имаат исти периметри.

Решение. Нека $LMNO$ е произволен правоаголник опишан околу фигурата $\boldsymbol{F}$, и нека допирните точки на $\boldsymbol{F}$ со правоаголникот се B, E, D, F. Нека страната ON ги сече страните AB и AD на квадратот во точките P и Q соодветно (види цртеж). Нека $\overline{PF}=x$, $\overline{FQ}=y$. Тогаш, $\overline{BP}=x$, $\overline{AP}=a-x$, $\overline{QD}=y$ и $\overline{AQ}=a-y$, каде a е должината на страната на квадратот $ABCD$.



Од $\triangle BPO \sim \triangle QPA$ ($\measuredangle BPO=\measuredangle QPA$ како накрсни агли и $\measuredangle BOP=\measuredangle QAP=90^\circ$) следува дека $\frac{\overline{OP}}{\overline{BP}}=\frac{\overline{AP}}{\overline{QP}}$ и $\frac{\overline{OB}}{\overline{BP}}=\frac{\overline{AQ}}{\overline{QP}}$, па затоа

$\overline{OP}=x\cdot\frac{a-x}{x+y}$ и $\overline{OB}=x\cdot\frac{a-y}{x+y}$.

Аналогно се докажува дека $\triangle QPA \sim \triangle QDN$, од каде се добива дека

$$\overline{DN}=y\cdot\tfrac{a-x}{x+y} \text{ и } \overline{QN}=y\cdot\tfrac{a-y}{x+y} .$$

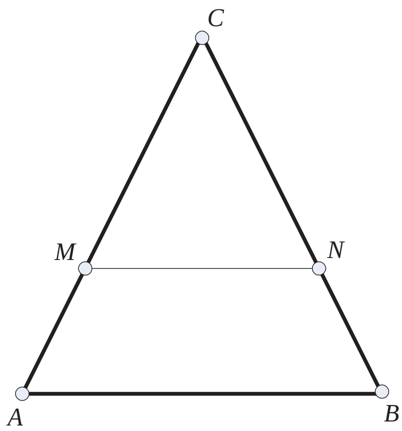
Тогаш, имаме

$$\overline{BO}+\overline{ON}+\overline{ND}=x\cdot\tfrac{a-y}{x+y}+x\cdot\tfrac{a-x}{x+y}+x+y+y\cdot\tfrac{a-y}{x+y}+x\cdot\tfrac{a-x}{x+y}$$

$$=x+y+\tfrac{2ax+2ay-x^2-y^2-2xy}{x+y}=x+y+2a-(x+y)=2a$$

Аналогно, $\overline{BL}+\overline{LM}+\overline{MD}=2a$, па следува дека периметарот на правоаголникот $LMNO$ е $\overline{LM}+\overline{MN}+\overline{NO}+\overline{OL}=4a$, односно е константен, што и требаше да се докаже.

39. На краците CA и CB на рамнокракиот триаголник ABC се избрани точки M и N соодветно, така што $CM=CN$. Должината на основата AB е $2a$. Определи го односот во кој точките M и N ги делат краците, ако триаголникот ABC има периметар $2s$, а четириаголникот $ABNM$ има периметар $2p$.



Решение. Должината на краците CA и CB на триаголникот ABC е $\frac{2s-2a}{2}=s-a$. Нека $x=\overline{CM}=\overline{CN}$. Од сличноста на триаголниците ABC и MNC добиваме дека

$$\frac{\overline{MN}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{MC}}{\overline{CA}}, \text{ т.е. } \frac{\overline{MN}}{2a}=\frac{x}{s-a}.$$

Според тоа $\overline{MN}=\frac{2ax}{s-a}$. Оттука

$$2s-2x+\frac{2ax}{s-a}=2p,$$

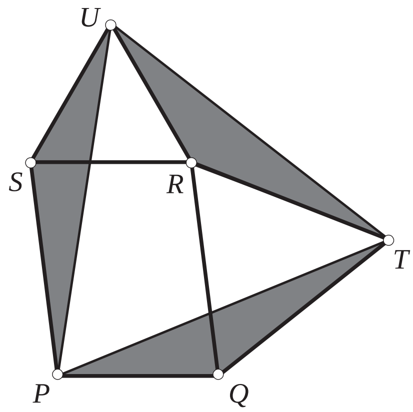
од каде добиваме $x=\frac{(s-a)(s-p)}{s-2a}$. Значи,

$$\overline{AM}=s-a-\frac{(s-a)(s-p)}{s-2a}=\frac{(s-a)(p-2a)}{s-2a}.$$

Конечно, $\frac{\overline{CM}}{\overline{MA}}=\frac{s-p}{p-2a}$.

40. Точките T и U се во надворешноста од паралелограмот $PQRS$. Триаголниците RQT и SRU се во надворешноста на паралелограмот и се рамнострани.

Докажи дека триаголникот PTU е рамностран.



Решение. Од својствата на паралелограмот и рамностраниот триаголник имаме

$$\overline{PQ}=\overline{SR}=\overline{US}=\overline{UR} \text{ и } \overline{SP}=\overline{RQ}=\overline{QT}=\overline{RT}.$$

Исто така

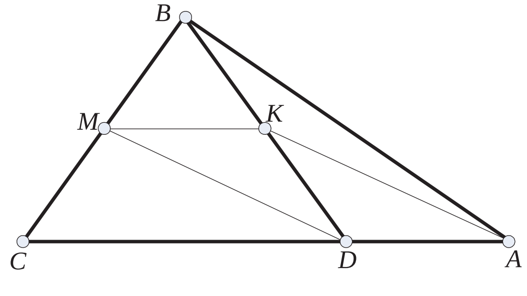
$$\measuredangle USP=60+\measuredangle RSP=60+\measuredangle PQR=\measuredangle PQT.$$

Од друга страна

$$\begin{aligned}\measuredangle URT&=360^\circ-60^\circ-60^\circ-\measuredangle QRS\\&=240^\circ-(180^\circ-\measuredangle PQR)\\&=60^\circ+\measuredangle PQR=\measuredangle PQT\end{aligned}$$

Сега од признакот САС, добиваме $\triangle USP\cong\triangle PQT\cong\triangle URT$, па затоа $\overline{UP}=\overline{PT}=\overline{TU}$.

41. На страната AC од триаголникот ABC е избрана точка D така што $\overline{AD}:\overline{DC}=1:2$. Дали постои тежишна линија во триаголникот CDB која е еднаква на некоја тежишна линија во триаголникот ABD.



Решение. Нека M е средината на отсечката CB, а K е средината на отсечката BD (види цртеж). Тогаш MK е средна линија во триаголникот DBC, од каде според условот на задачата добиваме

$$\overline{MK}=\tfrac{1}{2}\overline{CD}=\overline{DA}.$$

Бидејќи $MK\parallel DA$, добиваме дека четириаголникот $DAKM$ е паралелограм. Според тоа, $\overline{KA}=\overline{DM}$ и DM е тежишна линија во триаголникот DBC, а AK е тежишна линија во триаголникот ABD, т.е. одговорот на поставеното прашање е позитивен.

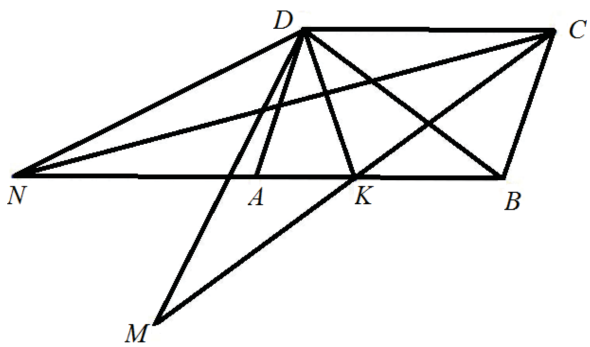
42. Во паралелограмот $ABCD$ важи $\overline{AB}=\overline{BD}$. Нека K е точка на AB, различна од A таква што $\overline{KD}=\overline{AD}$. Нека M е точката симетрична на точката C во однос на K, а N е точката симетрична на точката B во однос на A. Докажи, дека $\overline{DM}=\overline{DN}$.

Решение. Бидејќи

$$\measuredangle BKD=180^\circ-\measuredangle DKA=180^\circ-\measuredangle KAD$$
$$=\measuredangle CBK$$

и $\overline{DK}=\overline{DA}=\overline{BC}$, добиваме дека триаголниците DKB и KBC се складни. Затоа, $\overline{CK}=\overline{DB}=\overline{AB}=\overline{CD}$ и

$$\measuredangle NBD=\measuredangle KDB=\measuredangle BKC=\measuredangle DCM.$$

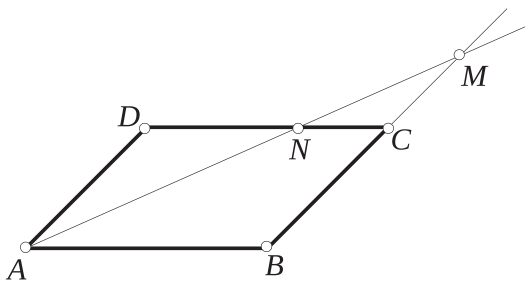


Сега, бидејќи $\measuredangle DCM=\measuredangle NBD$, $\overline{DC}=\overline{BD}$ и $\overline{CM}=2\overline{CK}=2\overline{DB}=2\overline{AB}=\overline{NB}$, добиваме дека триаголниците CDM и BDN се складни, од каде следува дека $\overline{DM}=\overline{DN}$.

43. Низ темето A на паралелограмот $ABCD$ е повлечена права која продолжението на BC го сече во точката M, а отсечката CD во точката N. Докажи дека $\frac{\overline{BM}}{\overline{CM}}-\frac{\overline{DN}}{\overline{CN}}=1$.

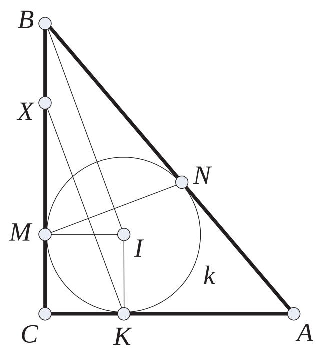
Решение. Од условот на задачата следува $\triangle ABM\sim\triangle NCM$, па според тоа $\frac{\overline{BM}}{\overline{CM}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{CN}}$. Сега,

$$\frac{\overline{BM}}{\overline{CM}}-\frac{\overline{DN}}{\overline{CN}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{CN}}-\frac{\overline{DN}}{\overline{CN}}=\frac{\overline{AB}-\overline{DN}}{\overline{CN}}$$
$$=\frac{\overline{DC}-\overline{DN}}{\overline{CN}}=\frac{\overline{CN}}{\overline{CN}}=1.$$



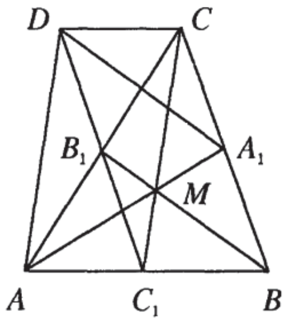
44. Во правоаголниот триаголникот ABC со прав агол во темето C, вишана е кружница k со центар I, која страните BC,CA и AB ги допира во точките M,K и N соодветно. Низ точката K е повлечена права нормална на MN, која страната BC ја сече во точката X. Докажи дека $\overline{CK}=\overline{BX}$.

Решение. Бидејќи I е центар на вписаната кружница k, добиваме $KI\perp AC$, $IM\perp BC$ и $\overline{KI}=\overline{MI}$. Според тоа $\measuredangle KIM$ е прав агол, и $KIMC$ е квадрат. Значи, $\overline{CK}=\overline{KI}$.



Бидејќи $\overline{BM} = \overline{BN}$, триаголникот NBM е рамнокрак, а бидејќи BI е симетрала на $\measuredangle B$, добиваме дека $BI \perp MN$. Значи $KX \parallel BI$, и бидејќи $KI \parallel BC$, добиваме дека $KIBX$ е паралелограм. Според тоа $\overline{BX} = \overline{KI}$, од каде добиваме $\overline{BX} = \overline{KI} = \overline{CK}$.

45. Во триаголникот ABC точките A_1, B_1 и C_1 се средини на страните BC, CA и AB, соодветно и M е тежиште. Правата која минува низ A_1 и е паралелна со BB_1 ја сече правата B_1C_1 во точката D. Докажи, дека ако точките A, B_1, M, C_1 лежат на една кружница, тогаш $\measuredangle ADA_1 = \measuredangle CAB$.



Решение. Од $A_1D \parallel MB_1$ и $A_1, B_1, M, C_1 \in k$ следува

$$\measuredangle AA_1D = \measuredangle AMB_1 = \measuredangle AC_1B_1 = \measuredangle ABC.$$

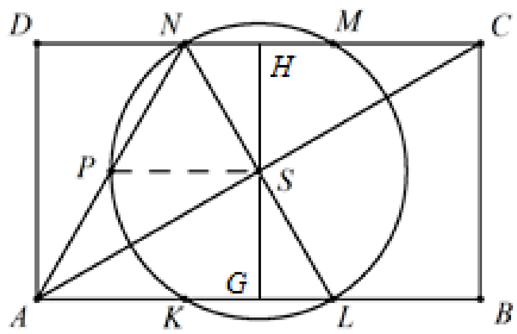
Од $B_1C_1 \parallel BA_1$ и $A_1D \parallel BB_1$ следува дека четириаголникот BA_1DB_1 е паралелограм. Тогаш $\overline{BA_1} = \overline{B_1D} = \overline{B_1C_1}$. Но, $\overline{AB_1} = \overline{B_1C}$, па затоа четириаголникот AC_1CD е паралелограм, т.е. $AD \parallel CC_1$. Според тоа

$$\measuredangle DAA_1 = \measuredangle CMA_1 = \measuredangle AMC_1 = \measuredangle AB_1C_1 = \measuredangle ACB.$$

Оттука следува

$$\measuredangle ADA_1 = 180^\circ - \measuredangle DAA_1 - \measuredangle DA_1A = 180^\circ - \measuredangle ABC - \measuredangle ACB = \measuredangle CAB.$$

46. Нека $ABCD$ е правоаголник и k е кружница со центар во пресекот на дијагоналите на правоаголникот. Кружницата k ја сече страната AB во точките K и L, а страната CD во точките M и N. Притоа важи $LN \perp AC$. Ако средината на отсечката AN припаѓа на кружницата k, определи го односот на должините на страните на правоаголникот.



Решение. Нека S е центарот на кружницата k и правоаголникот $ABCD$, P е средина на отсечката AN и r е радиусот на кружннцата k.

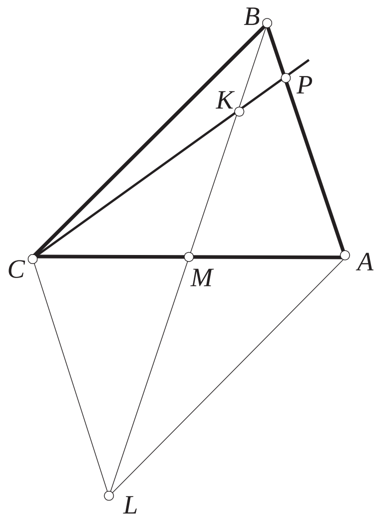
Ќе докажеме дека NL е дијаметар на кружницата k. Навистина, нека G и H се средините на страните AB и CD, соодветно. Триаголниците SGL и SHN се складни ($\measuredangle SGL = \measuredangle SHN = 90^\circ$, $\overline{SL} = \overline{SN} = r$ и $\overline{SG} = \overline{SH} = \frac{1}{2}\overline{BC}$), па затоа $\measuredangle GSL = \measuredangle HSN$, од што следува дека NL ја содржи S.

Понатаму, бидејќи $LN \perp AC$, добиваме дека триаголникот ASN е правоаголен. Отсечката PS е тежишна линија на овој триаголник, па затоа важи $\overline{AP} = \overline{PN} = \overline{PS}$. Сега, од $\overline{PN} = \overline{PS} = r = \overline{NS}$ следува дека триаголникот NPS е рамностран. Но, отсечката PS е средна линија на триаголникот ALN, па затоа $\overline{AL} =$

$2\overline{PS} = 2r$, што значи дека триаголникот ANL исто така е рамностран. Но, триаголникот ADN е правоаголен со хипотенуза AN со должина $2r$ и $\measuredangle NAD = 90^\circ - \measuredangle LAN = 30^\circ$. Затоа $\overline{DN} = \frac{1}{2}\overline{AN} = r$ и $\overline{DA} = \overline{DN}\sqrt{3} = r\sqrt{3}$.

Од друга страна, дијагоналите на четириаголникот $ALCN$ се заемно нормални и се преполовуваат, што значи дека тој е ромб. Затоа $\overline{NC} = \overline{AN} = 2r$. Според тоа, $\overline{DC} = \overline{DN} + \overline{NC} = r + 2r = 3r$. Конечно, бараниот однос е $\overline{CD} : \overline{AD} = \frac{3r}{r\sqrt{3}} = \sqrt{3}$.

47. Во $\triangle ABC$, $\frac{1}{2}\overline{CA} < \overline{AB} < \overline{CB}$, на тежишната линија BM е избрана точка K, таква што $\overline{CK} = \overline{AB}$. Пресекот на правата CK со AB е точката P. Докажи дека $\triangle BKP$ е рамнокрак.



Решение. На полуправата BM ќе избереме точка L така што $\overline{BM} = \overline{ML}$. Бидејќи $\overline{CM} = \overline{MA}$ добиваме дека $CLAB$ е паралелограм. Значи, $\overline{CL} = \overline{BA} = \overline{CK}$. Триаголникот CLK е рамнокрак со основа KL. Според тоа,

$$\measuredangle CLK = \measuredangle CKL = \measuredangle BKP, \qquad (1)$$

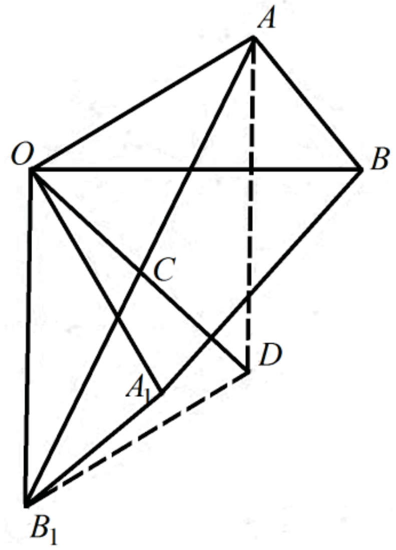
(последното равенство е од еднаквост на накрсни агли).

Бидејќи $CL \parallel AB$ и BL е трансферзала, добиваме

$$\measuredangle CLB = \measuredangle KBP. \qquad (2)$$

Во $\triangle KPB$, од (1) и (2), имаме $\measuredangle KBP = \measuredangle BKP$, па затоа овој триаголник е рамнокрак.

48. Триаголникот AOB со ротација во рамнината околу темето O за агол 90° се пресликува во $\triangle A_1OB_1$, при што A_1 е слика на A и B_1 е слика на B. Докажи дека тежишната линија на триаголникот OAB_1 повлечена кон страната AB_1 е нормална на правата A_1B.

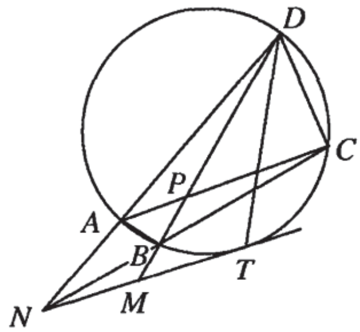


Решение. Нека OC е тежишната линија на триаголникот OAB_1 повлечена кон страната AB_1. Нека D лежи на продолжението на OC така што $\overline{OC} = \overline{CD}$ (види цртеж). Ќе докажеме дека $\triangle AOD \cong \triangle OA_1B$. Јасно, $\overline{OA_1} = \overline{AO}$. Понатаму, четириаголникот AOB_1D е паралелограм, па затоа $\overline{AD} = \overline{OB_1} = \overline{OB}$. Но, $AO \perp OA_1$, $BO \perp OB_1$ и $AD \parallel OB_1$, па затоа $\measuredangle OAD = \measuredangle A_1OB$. Оттука следува дека $\triangle AOD \cong \triangle OA_1B$ и две страни на едниот триаголник се нормални на соодветните две страни на другиот триаголник, па затоа и третата страна на првиот триаголник е нормална на соодветната страна на вториот триаголник, т.е. $OD \perp A_1B$, што и требаше да се докаже.

49. Четириаголникот $ABCD$ е впишан во кружница k. Полуправите DA и CB се сечат во точката N, а NT е тангента на кружницата k. Дијагоналите AC и BD се сечат во точката P, која е тежиште на $\triangle NTD$. Определи го односот $\overline{NT}:\overline{AP}$.

Решение. Од условот на задачата следува дека T припаѓа на лакот BC кој не ја содржи точката A, види цртеж. Нека $M \in NT \cap DP$ е средината на NT. Од својствата на тангентата и секантата следува

$$\overline{MB}\cdot\overline{MD}=\overline{MT}^2=\overline{MN}^2.$$



Според тоа,

$$\overline{MB}:\overline{MN}=\overline{MN}:\overline{MD},$$

па затоа $\triangle NMB \sim \triangle DMN$. Добиваме

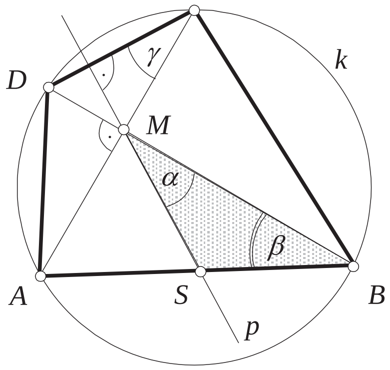
$$\measuredangle MNB=\measuredangle MDN=\measuredangle NCA,$$

па затоа $NT \parallel AC$. Според тоа,

$$\overline{NT}:\overline{AP}=2\overline{NM}:\overline{AP}=2\overline{MD}:\overline{PD}=3:1.$$

50. Дијагоналите на тетивен четириаголник се заемно нормални и се сечат во точката M. Докажи дека правата p, што минува низ M и е нормална на една од страните, ја располовува спротивната страна.

Решение. Нека правата p е нормална на страната CD и нека спротивната страна ја сече во точката S (види цртеж). Треба да докажеме дека $\overline{AS}=\overline{SB}$. Но, $\triangle ABM$ е правоаголен триаголник. Доволно е да докажеме дека $\overline{MS}=\overline{SB}$, т.е. дека $\triangle BMS$ е рамнокрак, односно дека $\phi=\beta$.



Очигледно е дека:

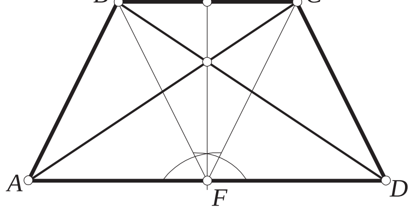
$\gamma=\beta$, како агли над ист лак AD

$\gamma=\phi$, како агли со нормални лаци

Оттука $\beta=\phi$, т.е. $\overline{MS}=\overline{SB}$.

51. Во конвексен четириаголник $ABCD$ дијагоналите AC и BD се еднакви, и симетралата на страната BC минува низ средината на страната AD. Докажи дека $\overline{AB}=\overline{CD}$.

Решение. Од условите на задачата имаме $\overline{AF}=\overline{FD}$, $\overline{BE}=\overline{EC}$ и $\overline{AC}=\overline{BD}$, каде точката E е средина на отсечката BC, а точката F е средина на отсечката AD. Правата што минува низ точките E и F е симетрала на страната BC, од каде што добиваме дека $\overline{BF}=\overline{FC}$. Аголот $\measuredangle FEC=\measuredangle FEB$ е прав, па според тоа триагол-



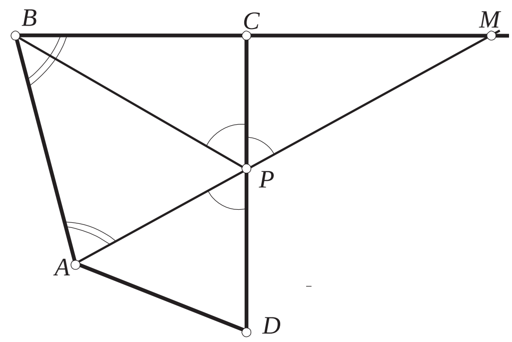
никот BFC е рамнокрак триаголник.

Од равенствата $\overline{AC} = \overline{BD}$, $\overline{AF} = \overline{FD}$ и $\overline{BF} = \overline{FC}$, добиваме дека триаголниците ACF и DBF се складни. Според тоа $\measuredangle BFD = \measuredangle CFA$. Од последното равенство, добиваме

$$\measuredangle AFB = \measuredangle AFC - \measuredangle BFC = \measuredangle DFB - \measuredangle BFC = \measuredangle CFD .$$

Триаголниците AFB и DFC имаат по две еднакви страни и аголот што го зафаќаат ($\overline{BF} = \overline{FC}$, $\overline{AF} = \overline{FD}$, $\measuredangle AFB = \measuredangle CFD$) па според тоа се складни. Конечно $\overline{AB} = \overline{CD}$.

52. Даден е конвексен четириаголник $ABCD$ кој има прав агол кај темето C. На страната CD постои точка P така што $\measuredangle APD = \measuredangle BPC$ и $\measuredangle BAP = \measuredangle ABC$. Докажи дека $\overline{BC} = \frac{\overline{AP}+\overline{BP}}{2}$.



Решение. Пресекот на правите AP и BC ќе го означиме со M. Триаголникот BMA е рамнокрак (според претпоставките од задачата $\measuredangle ABM = \measuredangle ABC = \measuredangle BAP = \measuredangle BAM$), па според тоа $\overline{BM} = \overline{AM}$. Триаголниците BCP и PCM се правоаголни, бидејќи по претпоставка $DC \perp BC$ (види цртеж). Од точноста на равенствата $\measuredangle APD = \measuredangle CPM$ и $\measuredangle APD = \measuredangle BPC$, добиваме дека $\measuredangle BPC = \measuredangle CPM$. Сега јасно е дека $\triangle BCP \cong \triangle MCP$ (имаат заедничка катета и еднакви агли). Од складноста на траиголниците добиваме $\overline{BC} = \overline{CM}$ и $\overline{BP} = \overline{PM}$, од каде што непосредно следува

$$2\overline{BC} = \overline{BC} + \overline{CM} = \overline{BM} = \overline{AM} = \overline{AP} + \overline{PM} = \overline{AP} + \overline{BP} .$$

53. Во конвексен четириаголник $ABCD$ дијагоналите AC и BD се сечат под агол од 90° во точката O. Нека K, L, M и N се ортогоналните проекции на точката O на страните AB, BC, CD и DA, соодветно. Докажи, дека четириаголникот $KLMN$ е тетивен.

Решение. Четириаголникот $AKON$ е тетивен, па затоа важи $\measuredangle OAN = \measuredangle OKN$. Аналогно заклучуваме дека важи

$$\measuredangle OBL = \measuredangle OKL, \measuredangle ODN = \measuredangle OMN, \measuredangle OCL = \measuredangle OML .$$

Ако ги собереме овие равенства добиваме

$$\measuredangle LKN + \measuredangle LMN = \measuredangle OAD + \measuredangle ODA + \measuredangle OBC + \measuredangle OCB = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ ,$$

што значи четириаголникот $KLMN$ е тетивен.

54. Отсечките AD и BE се висини во $\triangle ABC$. Правата низ точката D паралелна со AC ја сече правата AB во точка P. Правата низ точката E паралелна со BC ја сече правата AB во точката Q. Докажи, дека точките D, E, P, Q лежат на една кружница.

Решение. Точките D, E лежат на кружница со дијаметар AB. Во зависност од аглите на $\triangle ABC$ можни се неколку цртежи (направи ги!).

Ако аголот C е тап, тогаш $\measuredangle QPD = \measuredangle ABC = \measuredangle EDC = 180^\circ - \measuredangle QED$, што значи дека четириаголникот $QPDE$ е тетивен. Ако аголот A е тап, тогаш

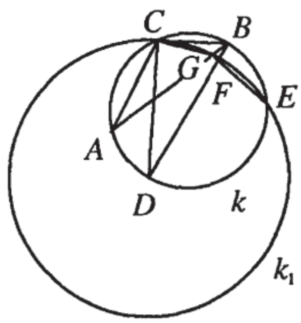
$$\measuredangle QPD = \measuredangle BAE = \measuredangle BDE = \measuredangle QED,$$

што значи дека четириаголникот $QPDE$ е тетивен. Ако аголот B е тап или $\triangle ABC$ нема тапи агли, тогаш

$$\measuredangle QPD = \measuredangle BAC = \measuredangle EDC = \measuredangle QED,$$

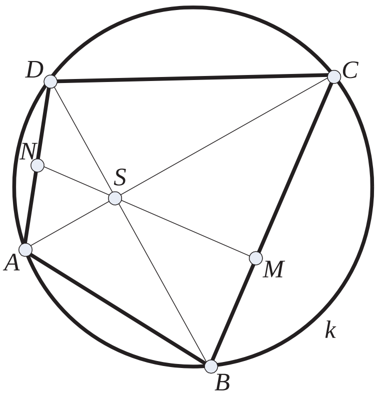
па затоа точките D, E, P, Q лежат на една кружница.

55. Во кружница k е впишан $\triangle ABC$ со $\measuredangle ACB > 90^\circ$. Нека BD е дијаметар на k. Кружницата k_1 со центар D и радиус DC по вторпат ја сече k во точката E и ја сече AB во точката G. Ако F е пресечната точка на GE и BD, докажи дека $\measuredangle DCG = \measuredangle EFD$.



Решение. Бидејќи $\measuredangle ACB > 90^\circ$, точките G и E се во различни полурамнини во однос на дијаметарот BD. Тогаш $\measuredangle EFD$ е надворешен за четириаголникот $CDFG$. Ако $\measuredangle DCG = \measuredangle EFD$, тогаш $\measuredangle DCG + \measuredangle DFG = 180^\circ$, т.е. доволно е да докажеме дека четириаголникот $CDFG$ е тетивен. Од друга страна, $CE \perp BD$ и D е центар на k_1. Затоа $\measuredangle CDF = \frac{1}{2} CGE_{k_1}$ (како централен агол), $\measuredangle CGF = \measuredangle CGE$ е впишан во k_1 и $\measuredangle CGF = \frac{1}{2}(360^\circ - CGE_{k_1})$. Тогаш $\measuredangle CDF + \measuredangle CGF = 180^\circ$, т.е. $CDFG$ е тетивен, од каде следува дека $\measuredangle DCG = \measuredangle EFD$.

56. Четириаголникот $ABCD$ е тетивен и конвексен и неговите дијагонали AC и BD се заемно нормални. Нормалата низ пресечната точка S на AC и BD кон правата BC ја полови отсечката AD. Докажи!

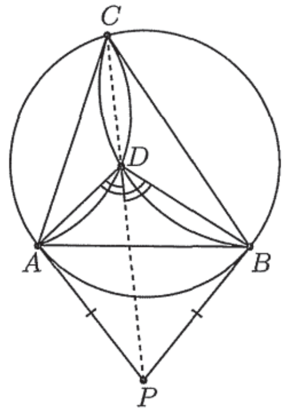


Решение. Четириаголникот $ABCD$ е тетивен и нека k е опишаната кружница околу него (види цртеж). Нека $N \in AD$ и $M \in BC$ при што $NM \perp BC$. Јасно е дека $\measuredangle DAC = \measuredangle DBC$ (како периферни агли над ист кружен лак DC во кружницата k).

Триаголниците ASD и BMS се слични бидејќи имаат по два еднакви агли. Значи, $\measuredangle BSM = \measuredangle ADS$. Од друга страна $\measuredangle BSM = \measuredangle DSN$ како накрсни агли. Значи, во триаголникот DNS внатрешните агли при страната DS се еднакви меѓу себе. Според тоа, триаголникот DNS е рамнокрак со основа DS и $\overline{NS} = \overline{ND}$.

Отсечката DA е дијаметар на кружница која што минува низ S (аголот $\measuredangle ASD$ е прав). Според тоа, точките D и S се еднакво оддалечени од средината на отсечката AD. Но бидејќи тие се еднакво оддалечени и од $N \in DA$ добиваме дека N е центар на таа кружница. Конечно $\overline{AN} = \overline{NS} = \overline{ND}$, односно N е средина на AD.

57. Даден е $\triangle ABC$. Кружницата која минува низ темињата B и C и ја допира страната AC во точката C и кружницата која минува низ темињата A и C и ја допира страната BC во точката C по втор пат се сечат во точката D. Докажи дека правата CD минува низ пресечната точка P на тангентите на опишаната кружница околу $\triangle ABC$ повлечени во темињата A и B.



Решение. Ако $\measuredangle ACB = \gamma$, тогаш од условот следува дека

$$\measuredangle ADC = \measuredangle BDC = 180^\circ - \gamma \text{, т.е. } \measuredangle ADB = 2\gamma .$$

Тогаш

$$\measuredangle ADB + \measuredangle APB = 2\gamma + 180^\circ - 2\gamma = 180^\circ ,$$

т.е. четириаголникот $APBD$ е тетивен. Останува да забележиме дека $\overline{PA} = \overline{PB}$, т.е. $\measuredangle PBD = \measuredangle PDA = \gamma$, па затоа

$$\measuredangle PDB + \measuredangle BDC = \gamma + 180^\circ - \gamma = 180^\circ ,$$

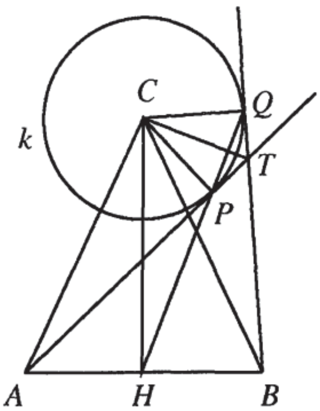
што значи дека точките C, D и P лежат на една права.

58. Даден е рамнокрак триаголник ABC, $\overline{AB} = \overline{BC}$. Нека k е кружница со центар во C и радиус помал од висината $CH, H \in AB$ на $\triangle ABC$. Низ точките A и B повлекуваме тангенти на k така што допирните точки P и Q се наоѓаат во иста полурамнина во однос на правата CH. Докажи, дека точките P, Q и H лежат на една права.

Решение. Од

$$\overline{CP} = \overline{CQ},\ \overline{CA} = \overline{CB} \text{ и } \measuredangle APC = \measuredangle BQC = 90^\circ ,$$

следува $\triangle APC \cong \triangle BQC$. Според тоа, $\measuredangle CAP = \measuredangle CBQ$, што значи дека ако пресечната точка на правите AP и BQ е T, тогаш околу четириаголникот $ABTC$ може да се опише кружница. Оттука следува дека $\measuredangle BAC = \measuredangle QTC$ и тогаш од $\measuredangle TQC = \measuredangle AHC = 90^\circ$ следува $\measuredangle QCT = \measuredangle ACH$. Од равенствата



$$\measuredangle AHC = \measuredangle APC = \measuredangle CPT = \measuredangle CQT = 90^\circ$$

следува дека четириаголниците $AHPC$ и $CPTQ$ се тетивни. Според тоа,

$$\measuredangle APH = \measuredangle ACH \text{ и } \measuredangle QPT = \measuredangle QCT ,$$

што значи дека $\measuredangle APH = \measuredangle QPT$, т.е. точките P, Q и H лежат на една права.

59. Четириаголникот $ABCD$ е впишан во кружница со дијаметар BD. Нека M е симетричната точка на точката A во однос на правата BD, $\{N\} = AM \cap BD$ и нека правата p низ N која е паралелна со правата AC ги сече CD и BC во точките P и Q, соодветно. Докажи дека точките P, C, Q и M се темиња на правоаголник.

Решение. Од условот на задачата следува дека $\measuredangle PCQ = 90^\circ$. Бидејќи

$$\measuredangle MNQ = \measuredangle MAC = \measuredangle MBC = \measuredangle MBQ,$$

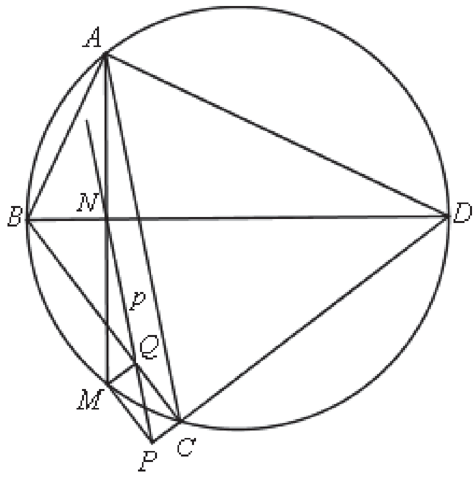
четириаголникот $MQNB$ е тетивен и тогаш $\measuredangle MQB = \measuredangle MNB = 90^\circ$. Затоа, $\measuredangle MQC = 90^\circ$. Понатаму,

$$\measuredangle MNP = \measuredangle MAC = \measuredangle MDC = \measuredangle MDP$$

па и четириаголникот $MPDN$ е тетивен. Оттука следува

$$\measuredangle MPC = \measuredangle MPD = \measuredangle MND = 90^\circ.$$

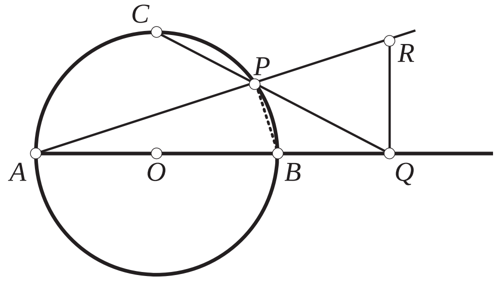
Значи, четириаголникот $MPCQ$ има три прави агли и затоа тој е правоаголник.



60. Нека AB е дијаметар на полукружница со центар во O и C е точка од полукружницата така што OC е нормална на AB. Нека P е произволна точка од лакот BC. Правите CP и AB се сечат во точката Q. Точката R е избрана на AP така што QR е нормална на AB. Докажи дека $\overline{BQ} = \overline{QR}$.

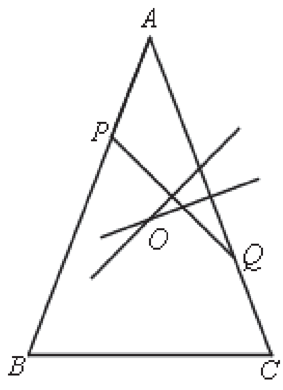
Решение. Ќе ја повлечеме отсечката PB. Бидејќи AB е дијаметар на полукружницата имаме $\measuredangle ABP = 90^\circ$, па според тоа $\measuredangle RPB = 90^\circ$. Збирот на спротивните агли $\measuredangle RPB$ и $\measuredangle BQR$ во четириаголникот $BQRP$ е 180°, па според тоа тој е тетивен.

За било која точка од лакот BC, па и за точката P, имаме $\measuredangle APC = 45^\circ$ (половина од централниот агол $\measuredangle AOC$). Од тука $\measuredangle RPQ = 45^\circ$. Како агли над ист кружен лак имаме $\measuredangle RBQ = \measuredangle RPB = 45^\circ$.



Во триаголникот BQR едниот остар агол има 45°. Според тоа, тој е рамнокрак правоаголен со хипотенуза BR. Според тоа, $\overline{BQ} = \overline{QR}$ што и требаше да се докаже.

61. Нека P и Q се точки на краците AB и AC, соодветно, на рамнокракиот $\triangle ABC$ такви што $\overline{AP} = \overline{CQ}$. Докажи дека кружницата опишана околу триаголникот APQ минува низ центарот на опишаната кружница околу $\triangle ABC$.



Решение. Нека симетралите на отсечките AC и PQ се сечат во точката O. Бидејќи $\overline{OP} = \overline{OQ}$, $\overline{OA} = \overline{OC}$ и

$\overline{AP} = \overline{CQ}$, следува дека $\triangle OAP \cong \triangle OCQ$. Тогаш,

$$\measuredangle OPA = \measuredangle OQC = 180^\circ - \measuredangle OQA,$$

па четириаголникот $APOQ$ е тетивен. Оттука,

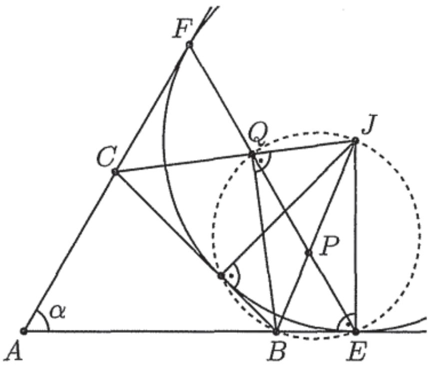
$$\measuredangle PAO = \measuredangle PQO = \measuredangle QPO = \measuredangle QAO.$$

Значи, AO е симетрала на аголот BAC и затоа е симетрала на страната $\overline{BC}$. Значи, O е центар на опишаната кружница околу $\triangle ABC$.

62. Даден е $\triangle ABC$. Припишана кружница кон страната BC има центар J и ги допира правите AB и AC соодветно во точките E и F. Правите BJ и CJ ја сечат правата EF соодветно во точките P и Q и притоа важи $\overline{BC} = 2\overline{PQ}$. Определи го $\measuredangle BAC$.

Решение. Нека $\measuredangle BAC = \alpha$. Тогаш

$$\measuredangle BJC = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} = \measuredangle BEF,$$



па затоа четириаголникот $BEJQ$ е тетивен. Но, $\measuredangle BEJ = 90^\circ$, па затоа опишаната кружница околу четириаголникот $BEJQ$ има дијаметар BJ. Понатаму,

$$\measuredangle JPQ = \measuredangle EBP = \measuredangle CBP,$$

што значи дека четириаголникот $CBPQ$ е тетивен (BC е дијаметар на опишаната околу него кружница). Значи, $\triangle JQP \sim \triangle JBC$, па затоа $\frac{\overline{JQ}}{\overline{JB}} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{BC}} = \frac{1}{2}$, од што следува дека $\measuredangle JBQ = 30^\circ$. Но, $\measuredangle JQB = 60^\circ$, па затоа

$$\measuredangle BAC = \alpha = 180^\circ - 2\measuredangle BJC = 2\measuredangle JBQ = 60^\circ.$$

63. Докажи, дека ако за должините на страните на $\triangle ABC$ е точно равенството $2\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$, тогаш темето B, центарот на впишаната кружница во $\triangle ABC$ и средините на страните AB и BC лежат на една кружница.

Решение. Ќе ги користиме стандардните означи за $\triangle ABC$. Без ограничување на општоста можеме да сметаме дека $a < b < c$. Нека C_0 е средината на AB, A_0 е средината на BC, I е центарот на впишаната кружница во $\triangle ABC$, $IT_1 \perp BC$, $T_1 \in BC$ и $IT_3 \perp AB, T_3 \in AB$. Бидејќи точките T_1 и T_3 се допирните точки на впишаната кружница за $\triangle ABC$ со страните BC и AB, добиваме дека важи $\overline{BT_1} = \overline{BT_3} = s - b = \frac{a+c-b}{2} = \frac{b}{2}$. Тогаш

$$\overline{A_0T_1} = \overline{BT_1} - \overline{BA_0} = \frac{b}{2} - \frac{a}{2} = \frac{b-a}{2} \text{ и } \overline{C_0T_3} = \overline{BC_0} - \overline{BT_3} = \frac{c}{2} - \frac{b}{2} = \frac{c-b}{2}.$$

Бидејќи $\frac{b-a}{2} = \frac{c-b}{2}$ следува дека $\triangle IT_1A_0 \cong \triangle IT_3C_0$, па затоа $\measuredangle A_0IT_1 = \measuredangle C_0IT_3$.

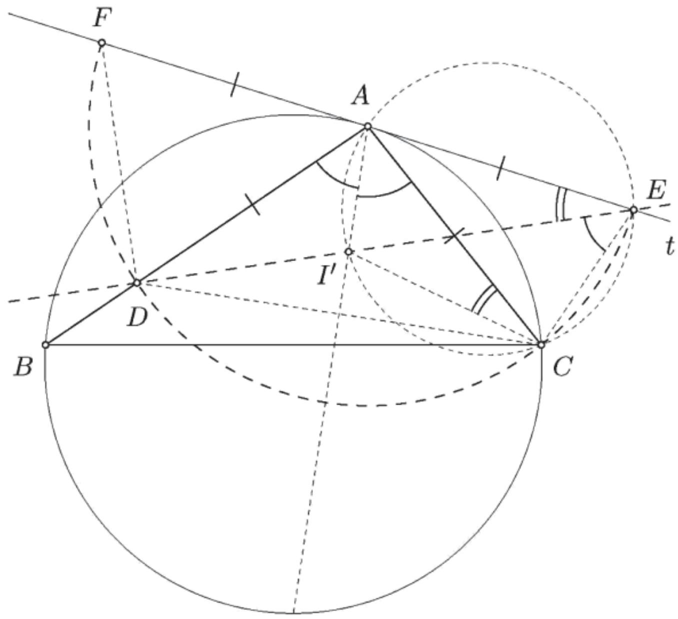
Од $\measuredangle BT_1I = \measuredangle BT_3I = 90^\circ$ следува дека четириаголникот IT_1BT_3 е тетивен. Тогаш $\measuredangle T_1BT_3 + \measuredangle T_1IT_3 = 180^\circ$, што заедно со $\measuredangle A_0IT_1 = \measuredangle C_0IT_3$ дава

$$\measuredangle A_0IC_0 + \measuredangle A_0BC_0 = 180^\circ,$$

т.е. точките B, I, A_0 и C_0 лежат на една кружница.

64. Даден е $\triangle ABC$ таков што $\overline{AB} > \overline{AC}$. Нека t е тангентата во точката A на опишаната кружница околу $\triangle ABC$. Кружницата со центар во точката A и радиус $\overline{AC}$ ја сече страната AB во точката D, а правата t ја сече во точките E и F така што C и E се од иста страна на правата AB. Докажи, дека центарот на опишаната кружница околу $\triangle ABC$ лежи на правата DE.

Решение. Нека $\measuredangle BCA = \alpha,$ $\measuredangle CBA = \beta$ и $\measuredangle ACB = \gamma$. Нека I' е пресекот на симетралата на $\measuredangle BAC$ и правата DE. Доволно е да докажеме дека I' лежи на симетралата на $\measuredangle BCA$, т.е. дека $\measuredangle ACI' = \frac{\gamma}{2}$.



Бидејќи t е тангента на опишаната кружница околу $\triangle ABC$ важи

$$\measuredangle DAF = \measuredangle BAF = \gamma.$$

Понатаму, $\measuredangle DAF$ е централен, а $\measuredangle DEF$ е периферен над тетивата DF, па затоа

$$\measuredangle DEA = \measuredangle DEF = \tfrac{1}{2}\gamma.$$

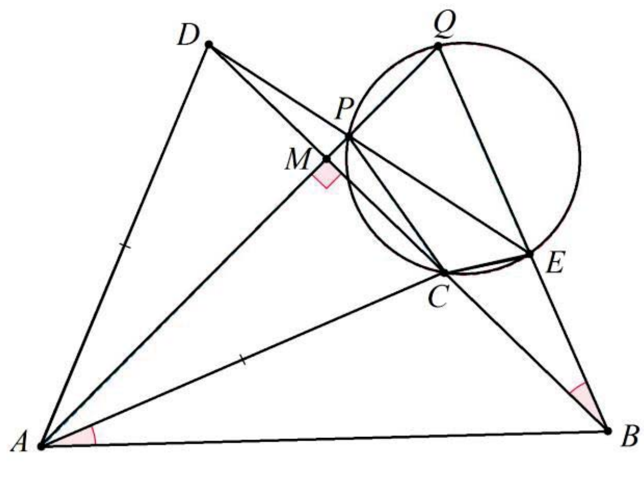
Аналогно

$$\measuredangle DEC = \tfrac{1}{2}\measuredangle DAC = \tfrac{1}{2}\alpha.$$

Бидејќи AI' е симетрала на $\measuredangle BAC$ важи $\measuredangle I'AC = \frac{1}{2}\alpha$, па затоа $\measuredangle I'AC = \measuredangle I'EC$, т.е четириаголникот $AI'CE$ е тетивен. Според тоа,

$$\measuredangle ACI' = \measuredangle AEI' = \measuredangle FED = \tfrac{1}{2}\gamma.$$

65. Даден е $\triangle ABC$ таков што $\measuredangle C = \measuredangle A + 90^\circ$. Нека D точката на продолжението на страната BC преку темето C за која важи $\overline{AC} = \overline{AD}$. Точката E припаѓа на полурамнината определена со правата BC која не ја содржи точката A и е таква што $\measuredangle EBC = \measuredangle A$ и $\measuredangle EDC = \frac{1}{2}\measuredangle A$. Докажи, дека $\measuredangle CED = \measuredangle ABC$.



Решение. Нека M е средината на CD. Тогаш AM е симетрала на отсечката CD.

Нека AM ги сече DE и BE во точките P и Q соодветно. Тогаш $\overline{PE}=\overline{PD}$. Затоа важи

$$\measuredangle EBA+\measuredangle CAB=\measuredangle A+\measuredangle B+\measuredangle A=180^\circ-\measuredangle C+\measuredangle A=90^\circ.$$

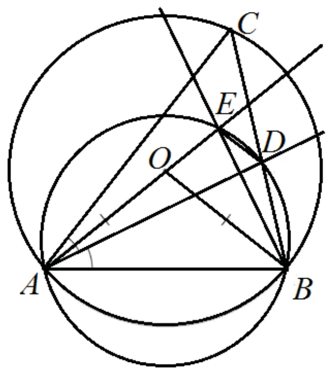
Тоа значи, дека $AC\perp BE$. Затоа во $\triangle ABQ$ правите BC и AC се висини, што значи дека C е ортоцентар на $\triangle ABQ$ и

$$\measuredangle CQE=\measuredangle CQB=\measuredangle A=\tfrac{1}{2}\measuredangle A+\tfrac{1}{2}\measuredangle A=\measuredangle PDC+\measuredangle PCD=\measuredangle CPE.$$

Според тоа, четириаголникот $CPQE$ е тетивен, па затоа

$$\measuredangle CED=\measuredangle CEP=\measuredangle CQP=\measuredangle CQA=\measuredangle ABC.$$

66. Даден е остроаголен $\triangle ABC$ таков што $\overline{AC}>\overline{AB}$. Нека O е центарот на опишаната кружница околу $\triangle ABC$. Симетралата на $\measuredangle CAB$ ја сече страната BC во точка D. Правата која минува низ точката B и е нормална на правата AD ја сече правата AO во точката E. Докажи, дека точките A,B,D и E лежат на иста кружница.

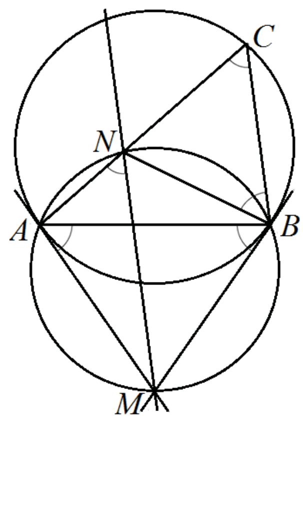


Решение. Нека α,β,γ се големините на аглите во темињата A,B,C на $\triangle ABC$, соодветно. Бидејќи O е центар на опишаната кружница околу $\triangle ABC$, добиваме дека $\triangle ABO$ е рамнокрак и важи $\measuredangle AOB=2\gamma$. Според тоа, $\measuredangle EAB=\measuredangle OAB=90^\circ-\gamma$. Бидејќи $\measuredangle DAB=\frac{\alpha}{2}$ важи $\measuredangle EAD=90^\circ-\gamma-\frac{\alpha}{2}=\frac{\beta-\gamma}{2}$. Понатаму, $\measuredangle ABE=90^\circ-\frac{\alpha}{2}$, па затоа важи

$$\measuredangle EBD=\measuredangle ABC-\measuredangle ABE=\beta-90^\circ+\frac{\alpha}{2}=\frac{\beta-\gamma}{2}.$$

Конечно, од $\measuredangle EAD=\measuredangle EBD$ следува дека четириаголникот $ABDE$ е тетивен.

67. Даден е остроаголен $\triangle ABC$. Тангентите во точките A и B на опишаната кружница околу $\triangle ABC$ се сечат во точка M. Правата која минува низ M и е паралелна со страната BC ја сече страната AC во точката N. Докажи, дека $\overline{BN}=\overline{CN}$.



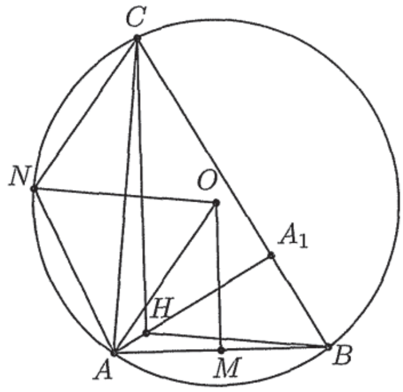
Решение. Нека α,β,γ се аглите на $\triangle ABC$ во темињата A,B,C соодветно. Од својството на аголот меѓу тетивата и тангентата следува $\measuredangle MBA=\gamma$. Бидејќи $MN\parallel BC$ важи $\measuredangle MNA=\gamma$, што значи дека четириаголникот $AMBN$ е тетивен. Аналогно, од својствата на аголот меѓу тетивата и тангентата следува $\measuredangle MAB=\gamma$, па затоа $\measuredangle MAN=\alpha+\gamma$. Бидејќи четириаголникот $AMBN$ е тетивен важи $\measuredangle MBN=180^\circ-\measuredangle MAN=\beta$. Понатаму, бидејќи $\measuredangle MBN=$ $\measuredangle ABC$, со одземање на $\measuredangle ABN$ добиваме $\measuredangle NBC=\measuredangle ABM=\gamma$. Значи, $\measuredangle BCN=$ $\measuredangle NBC$, па затоа $\overline{BN}=\overline{CN}$.

68. Во кружница k е впишан остроаголен $\triangle ABC$ со ортоцентар H . Кружницата опишана околу $\triangle ACH$ има радиус 1 и центарот и лежи на k .

а) Определи ја големината на $\measuredangle ABC$.

б) Определи ја должината на отсечката BH .

Решение. а) Нека $\measuredangle ABC=\beta$ и $N\in k$ е центарот на опишаната кружница околу $\triangle ACH$. Тогаш $\measuredangle ANC=\ 360^\circ-2\measuredangle AHC$. Лесно се гледа дека $\measuredangle AHC=180^\circ-\beta$ и затоа $\measuredangle ANC=2\beta$. Од друга страна, четириаголникот $ABCN$ е тетивен и затоа $\beta+2\beta=180^\circ$, т.е $\beta=60^\circ$.



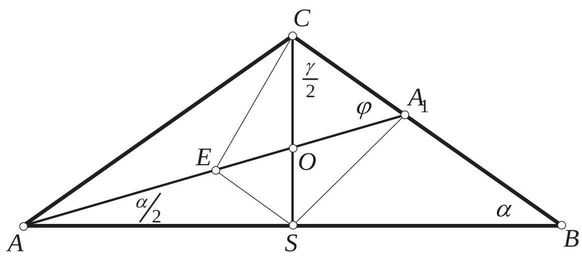
б) Нека O е центарот на k , M е средината на AB и A_1 е подножјето на висината повлечена од темето A . Од $\overline{AO}=\overline{ON}$ и $\measuredangle AON=60^\circ$ (N е средина на лакот AC), следува дека $\triangle AON$ е рамностран и затоа $\overline{OA}=\overline{NA}=1$. Од правоаголниот $\triangle ABA_1$ имаме $\overline{A_1B}=\frac{\overline{AB}}{2}=\overline{AM}$, како катета сприт агол од 30° . Освен тоа,

$$\measuredangle A_1BH=90^\circ-\measuredangle ACB=\measuredangle OAM .$$

Значи, $\triangle BA_1H\cong\triangle AMO$ и затоа $\overline{BH}=\overline{OA}=1$.

69. Во рамнокракиот триаголник ABC , со основа AB , висината CS е двапати помала од симетралата AA_1 на аголот α . Докажи дека $\measuredangle C=108^\circ$.

Решение. Нека CS е висината, AA_1 симетралата на аголот кај темето A , O пресекот на висината CS и симетралата AA_1 , а E средина на отсечката AA_1 (види цртеж).

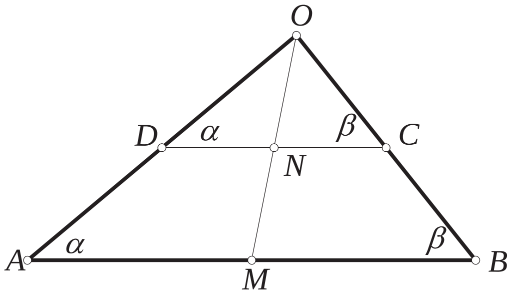


За $\triangle ABA_1$, отсечката SE е средна линија, па $SE\parallel BC$. Од друга страна, по услов, $\overline{CS}=\overline{A_1E}$. Бидејќи четириаголникот A_1CES има две паралелни страни ($A_1C\parallel SE$), и еднакви дијагонали ($\overline{CS}=\overline{A_1E}$), следува дека е рамнокрак трапез (лесно се покажува дека не е правоаголник). Според тоа, ќе имаме $\frac{\gamma}{2}=\varphi$. Бидејќи $\frac{\gamma}{2}=90^\circ-\alpha$, а $\varphi=\frac{3}{2}\alpha$ (како надворешен агол за триаголникот ABA_1), од $90^\circ-\alpha=\frac{3}{2}\alpha$, добиваме дека $\alpha=36^\circ$, или конечно $\gamma=108^\circ$.

70. Должините на основите на трапезот $ABCD$ се a и b , а збирот на аглите при едната основа е 90°. Колкава е должината на отсечката што ги сврзува средините на основите на трапезот?

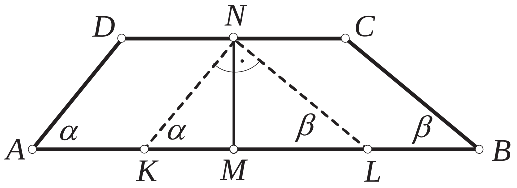
Решение. *Прв начин.* Од $\alpha+\beta=90^\circ$ следува дека $\measuredangle AOB=90^\circ$, т.е. $\triangle ABO$ е правоаголен (цртеж 1). Слично и $\triangle DCO$ е правоаголен. Тогаш OM и ON се радиуси на опишаните кружници околу овие триаголници, па имаме:

$$\overline{OM}=\frac{a}{2},\quad \overline{ON}=\frac{b}{2},\quad \overline{MN}=\frac{a-b}{2}.$$



цртеж 1

Втор начин. Нека $a>b$. Низ средината N на основата CD повлекуваме $NK\parallel DA$ и $NL\parallel CB$. Бидејќи $\alpha+\beta=90^\circ$, следува дека и $\measuredangle KNL=90^\circ$, т.е. $\triangle KLH$ е правоаголен, па $\overline{MN}=\overline{MK}=\overline{ML}$. Но, $\overline{AK}=\frac{b}{2}$, $\overline{AM}=\frac{a}{2}$, па $\overline{KM}=\frac{a}{2}-\frac{b}{2}=\frac{a-b}{2}$. Значи, $\overline{MN}=\frac{a-b}{2}$.



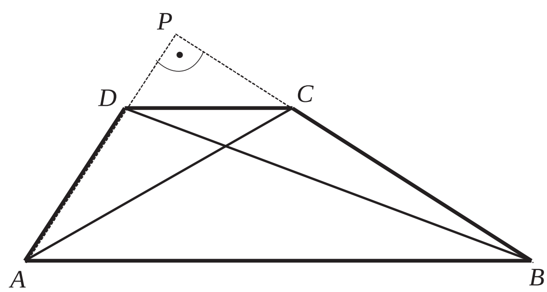
цртеж 2

71. Ако краците на трапезот се меѓусебно нормални, тогаш збирот од квадратите на неговите дијагонали е еднаков на збирот од квадратите на неговите основи. Докажи!

Решение. Нека краците на трапезот $ABCD$ се заемно нормални и нека се сечат во точката P (види цртеж).

Од правоаголните триаголници ACP и BDP имаме

$$\overline{AC}^2=\overline{AP}^2+\overline{PC}^2,$$
$$\overline{BD}^2=\overline{BP}^2+\overline{DP}^2.$$



Ако ги собереме овие равенства, добиваме

$$\overline{AC}^2+\overline{BD}^2=(\overline{AP}^2+\overline{BP}^2)+(\overline{PC}^2+\overline{DP}^2). \tag{1}$$

Од правоаголните триаголници, пак, ABP и DCP добиваме

$$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=\overline{AB}^2,\quad \overline{DP}^2+\overline{PC}^2=\overline{DC}^2. \tag{2}$$

Ако замениме (2) во (1) добиваме

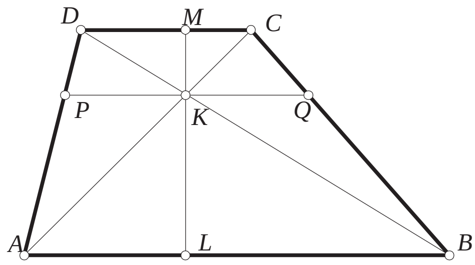
$$\overline{AC}^2+\overline{BD}^2=\overline{AB}^2+\overline{CD}^2$$

што и требаше да се докаже.

72. Низ точката на пресек на дијагоналите на трапезот $ABCD$ е повлечена права која е паралелна со нејзините основи. Пресметај ја должината на отсечката од таа права што се наоѓа меѓу бочните страни, ако должните на основите се a и b.

Решение. Нека $ABCD$ е дадениот трапез и K е пресечна точка на дијагоналите AC и BD. Низ точката K (види цртеж) повлекуваме отсечка PQ паралелна со основите и крајни точки на бочните страни на трапезот. Низ точката

K повледуваме уште една отсечка ML која е нормална на основите и крајните точки и се на основите (види цртеж). Нека $\overline{AB}=a$ и $\overline{CD}=b$ Од сличноста на триаголниците DKC и BKA го добиваме равенството $\frac{a}{\overline{KL}}=\frac{b}{\overline{KM}}$ кое што можеме да го запишеме во облик $\overline{KL}=\frac{ah}{a+b}$ или $\overline{MK}=\frac{bh}{a+b}$. Аналогно како и во претходното разгледување, добиваме



$$\overline{KQ}=\frac{\overline{KL}}{\overline{LM}}b=\frac{ab}{a+b} \text{ и } \overline{KP}=\frac{\overline{KM}}{\overline{LM}}a=\frac{ab}{a+b}.$$

Конечно,

$$\overline{KP}+\overline{KQ}=\frac{ab}{a+b}+\frac{ab}{a+b}=\frac{2ab}{a+b}.$$

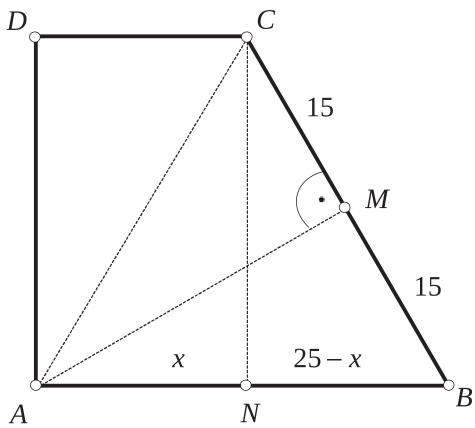
73. Во правоаголен трапез $ABCD$, основата $\overline{AB}=25\ cm$, точката M е средина на кракот $\overline{BC}=30\ cm$ и потоа $AM\perp BC$. Пресметај го периметарот на трапезот $ABCD$.

Решение. Од условите на задачата заклучуваме дека триаголникот ABC е рамнокрак (AM е: & висина, & тежишна линија), па следува дека $\overline{AC}=\overline{AB}=25\ cm$ (види цртеж).

За одредување на AD и DC повлекуваме $CN\perp AB$, па имаме:

$$\overline{AD}=\overline{NC},\ \overline{DC}=\overline{AN}=b,\ \overline{BN}=25-b.$$

Тогаш од правоаголните триаголници ANC и BNC добиваме:



$$\overline{CN}^2=\overline{AC}^2-\overline{AN}^2 \text{ и } \overline{CN}^2=\overline{BC}^2-\overline{BN}^2,$$

па затоа

$$25^2-b^2=30^2-(25-b)^2,$$

од каде што $b=7$, т.е. $\overline{DC}=7$ cm, а $\overline{NB}=18\ cm$. Потоа го наоѓаме $\overline{CN}$ на следниот начин

$$\overline{CN}^2=\overline{BC}^2-\overline{NB}^2=30^2-18^2=24^2.$$

Значи, $\overline{AD}=24$ cm, па периметарот на трапезот $ABCD$ е:

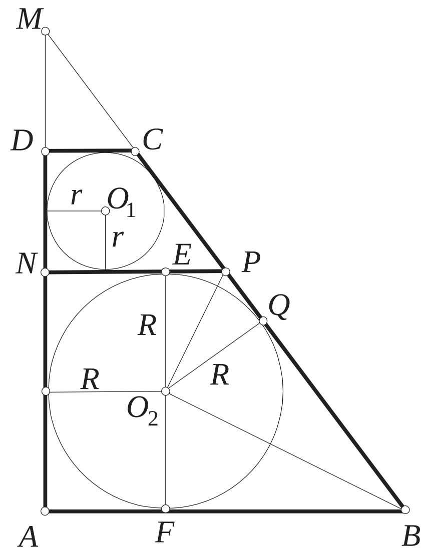
$$L=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DA}=86\ cm.$$

74. Даден е правоаголен трапез со основи a и b ($b<a$). Постои права паралелна со основите на трапезот која го дели на два трапези, такви што во секој од нив може да се впише кружница. Пресметај го збирот на радиусите на впишаните кружници.

Решение. Нека $ABCD$ е правоаголен трапез, со основи AB и CD. Пресекот на AD и BC ќе го означиме со M (види цртеж). Нека $N\in AD$ и $P\in BC$ така што $NP\,||\,AB\,||\,CD$.

Јасно е дека триаголниците MAB и MNP се правоаголни и слични. Впишаните кружници во трапезите $ABCD$ и $NPCD$ се впишани и во триаголниците MAB и MNP, соодветно. Нека нивните радиуси се R и r соодветно. Од сличноста на MAB и MNP добиваме

$$\overline{NP} : \overline{AB} = r : R. \qquad (1)$$



Впишаните кружници во триаголниците MAB и MNP се однадвор припишани на MNP и MDC, соодветно. Од сличноста на MNP и MDC, имаме

$$\overline{DC} : \overline{PN} = r : R. \qquad (2)$$

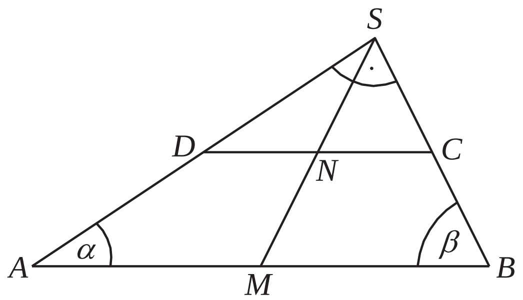
Од (1) и (2) лесно се добива дека $\overline{PN} = \sqrt{ab}$. Ако ја искористиме складноста на O_2PQ и O_2PE, како и складноста на O_2BQ и O_2BF, добиваме дека PO_2B е правоаголен триаголник. Сега, од (1) и (2) следува

$$R^2 = \overline{PQ} \cdot \overline{QB} = (b-R)(\sqrt{ab} - R),$$

од каде добиваме $R = \frac{b\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$. Лесно се добива $r = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$, па според тоа $r + R = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \frac{b\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \sqrt{ab}$.

75. Основите на еден трапез се a и b, $(a > b)$, а збирот на аглите при поголемата основа е 90°. Колкава е отсечката чии крајни точки се средините на основите?

Решение. Нека $\overline{AB} = a$ и $\overline{CD} = b$ се основите на трапезот $ABCD$, и нека $\alpha + \beta = 90^\circ$.



Со продолжување на краците AD и BC на трапезот $ABCD$ до нивната пресечна точка S ги добиваме правоаголните триаголници ABS и DCS. Ако M и N се средините на основите AB и CD соодветно, тогаш отсечките SM и SN се тежишни линии на овие правоаголни триаголници, па следува $\overline{SM} = \frac{a}{2}$, $\overline{SN} = \frac{b}{2}$. Оттука следува $\overline{MN} = \overline{SM} - \overline{SN} = \frac{a-b}{2}$.

76. Средината S на поголемата основа од трапезот $ABCD$ е сврзана со крајните точки на помалата основа. Тие сврзници ги сечат дијагоналите на трапезот во точките M и N. Да се докаже дека:

а) Правата p, определена со точките M и N е паралелна со основите на трапезот.

б) Точките M и N ја делат отсечката од правата p, заклучена меѓу краците на трапезот, на три еднакви дела.

Решение. а) Од сличноста на триаголниците ASM и CDM следува

$$\overline{AS} : \overline{DC} = \overline{AM} : \overline{MC},$$

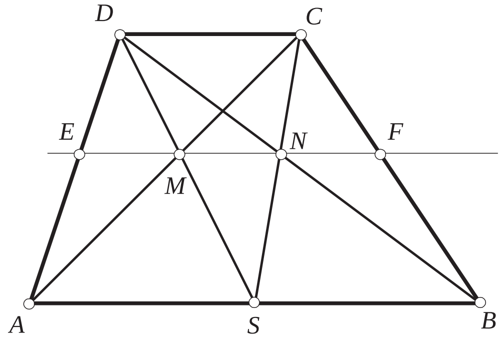
а од сличноста на триаголниците SBN и CDN следува

$$\overline{SB}:\overline{DC}=\overline{SN}:\overline{NC}.$$

Бидејќи $\overline{AS}=\overline{SB}$, добиваме

$$\overline{AM}:\overline{MC}=\overline{SN}:\overline{NC}$$

што значи дека $AS \parallel MN$, т.е. правата p е паралелна со основите на трапезот.



б) Од $p \parallel AB$ следува дека $\triangle ASD \sim \triangle EMD$, па затоа

$$\overline{AS}:\overline{EM}=\overline{AD}:\overline{ED}$$

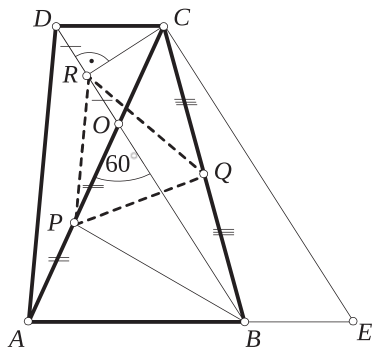
и дека $\triangle ABD \sim \triangle END$, па затоа $\overline{AB}:\overline{EN}=\overline{AD}:\overline{ED}$, од каде добиваме $\overline{AS}:\overline{EM}=\overline{AB}:\overline{EN}$, т.е. $\overline{AS}:\overline{AB}=\overline{EM}:\overline{EN}$. Бидејќи $\overline{AS}:\overline{AB}=1:2$, добиваме $2\overline{EM}=\overline{EN}$, а на сличен начин добиваме и $2\overline{NF}=\overline{FM}$.

Според тоа, $\overline{EM}=\overline{MN}=\overline{FM}$.

77. Даден е рамнокрак трапез $ABCD$ со основи AB и CD и дијагонала AC таква што $\overline{AC}=\overline{AB}+\overline{CD}$. Ако O е пресекот на дијагоналите, докажи дека средините на отсечките AO, BC и DO се темиња на рамностран триаголник.

Решение. Од сличноста на $\triangle ABO$ и $\triangle CDO$ следува $\overline{CO}:\overline{AO}=\overline{CD}:\overline{AB}$, а од тоа $(\overline{CO}+\overline{AO}):\overline{AO}=(\overline{CD}+\overline{AB}):\overline{AB}$, т.е. $\overline{AC}:\overline{AO}=\overline{AC}:\overline{AO}$, па затоа $\overline{AO}=\overline{AB}$. Значи, $\triangle ABO$ е рамностран. Аналогно и $\triangle CDO$ е рамностран. Тоа значи дека $BP \perp AO$ (P е средина на $\overline{AO}$), односно $\triangle BCP$ е правоаголен, со хипотенуза BC. Но, бидејќи PQ е тежишна линија над хипотенузата BC, следува

$$\overline{PQ}=\tfrac{1}{2}\overline{BC}. \qquad (1)$$



Аналогно, од правоаголниот $\triangle BCR$ имаме

$$\overline{RQ}=\tfrac{1}{2}\overline{BC} \qquad (2)$$

Понатаму, во $\triangle ADO$, PR е средна линија, па важи

$$\overline{PM}=\tfrac{1}{2}\overline{AD}. \qquad (3)$$

Конечно, ако се земе предвид условот на задачата $\overline{AO}=\overline{AB}$ и (1), (2) и (3) заклучуваме дека $\triangle PQR$ е рамностран, со страна еднаква на половината од кракот AD.

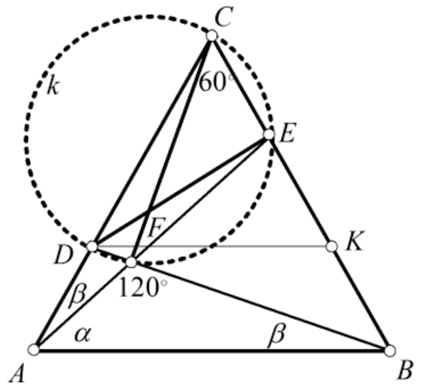
Забелешка. Дека триаголниците ABO и CDO се рамнострани, може да се докаже и на друг начин. Ако повлечеме $CE \parallel BD$, тогаш

$$\overline{AE}=\overline{AB}+\overline{BE}=\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{AC}.$$

Поради $\overline{AE}=\overline{AC}=\overline{DB}=\overline{CE}$ следува дека триаголникот AEC е рамнокрак, т.е. $\measuredangle ACE=60^\circ=\measuredangle AOB$ итн.

78. На страните AC и BC од рамностраниот триаголник ABC се избрани точки D и E такви што $\overline{AD}=\frac{1}{3}\overline{AC}$ и $\overline{CE}=\frac{1}{3}\overline{CB}$. Отсечките AE и BD се сечат во точката F. Определи го аголот $\measuredangle BFC$.

Решение. *Прв начин.* Ќе воведеме ознаки $\measuredangle EAB=\alpha$ и $\measuredangle ABD=\beta$ (види цртеж). Триаголниците $\triangle AEC$ и $\triangle BDA$ се складни. Според тоа $\measuredangle CAE=\measuredangle DBA=\beta$, од каде што добиваме $\alpha+\beta=60^\circ$. Но тогаш



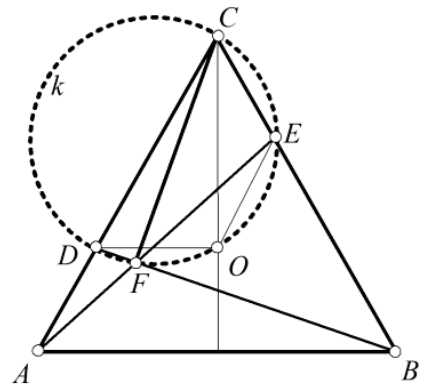
$$\measuredangle BFA=180^\circ-(\alpha+\beta)=180^\circ-60^\circ=120^\circ.$$

Во четириаголникот $ECDF$ е исполнето $\measuredangle DCE=60^\circ$ и $\measuredangle DFE=120^\circ$, од каде добиваме дека тој е тетивен. Нека k е неговата опишана кружница.

На страната BC ќе избереме точка K така што $\overline{BK}:\overline{KC}=1:2$. Но, тогаш $\triangle CDK$ е рамностран и DE е негова тежишна линија (E е средина на CK) , па според тоа и негова висина. Според тоа, $\measuredangle DEC=90^\circ$ и $\measuredangle CFD=\measuredangle DEC=90^\circ$ како агли над ист кружен лак. Сега е јасно дека

$$\measuredangle CFB=180^\circ-\measuredangle CFD=180^\circ-90^\circ=90^\circ.$$

Втор начин. Нека O е центар на рамностраниот триаголник ABC (види цртеж). Од определбата на точките D и E добиваме $DO\parallel AB$ и $OE\parallel CD$. Заради тоа



$$\measuredangle DOE=180^\circ-\measuredangle CDO=180^\circ-60^\circ=120^\circ$$

и четираголникот $CDOE$ е рамнокрак трапез.

Ќе разгледаме ротација со центар во O и агол $\varphi=-120^\circ$. При оваа ротација точката B се пресликува во точката A и точката D се пресликува во точката E. Значи, правата BD се пресликува во правата AE, па и аголот меѓу нив е 120°. Сега е јасно дека $\measuredangle DFE=120^\circ$.

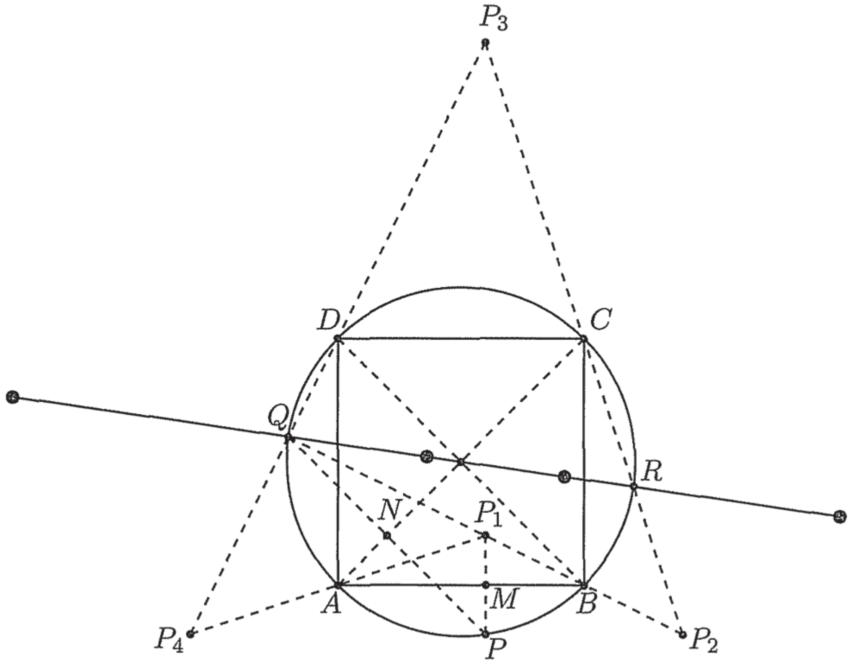
Ќе ја разгледаме опишаната кружница околу трапезот $DOEC$. Бидејќи $CO\perp DO$, тетивата DC е нејзин дијаметар. Но, $\measuredangle DFC=\measuredangle DOE$ од каде добиваме дека F лежи на таа кружница. Значи, $\measuredangle CFD=90^\circ$ од каде добиваме

$$\measuredangle BFC=180^\circ-\measuredangle CFD=180^\circ-90^\circ=90^\circ.$$

79. Точката P лежи на опишаната кружница околу квадратот $ABCD$. Нека P_1,P_2,P_3 и P_4 се симетричните точки на P во однос на правите AB,BC,CD и DA, соодветно. Докажи дека симетричните точки на P во однос на правите P_1P_2,P_2P_3,P_3P_4 и P_4P_1 лежат на една права која минува низ центарот на квадратот $ABCD$.

Решение. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека точката P е на помалиот лак AB, види цртеж. Нека Q и R се симетричните точки на P во однос на правите AC и BD, и нека M и N се проекциите на P врз AB и AC, соодветно.

Бидејќи M и N се средини на PP_1 и PQ, соодветно, а четириаголникот $PMNA$ е вписан во кружница со дијаметар PA, добиваме

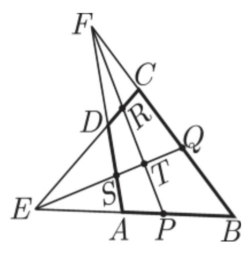


$$\measuredangle P_1QP = \measuredangle MNP = \measuredangle MAP = \measuredangle BAP = \tfrac{1}{2}PB .$$

Аналогно се докажува дека $\measuredangle P_2QP = \frac{1}{2}PB$, од каде следува дека точките P_1, P_2 и Q лежат на една права. На оваа права лежи и точката B, бидејќи P_1 и P_2 се симетрични во однос на B (зошто?).

Од $\measuredangle RQP = 2\measuredangle BQP = 2\measuredangle P_1QP$ следува дека точката симетрична на P во однос на правата P_1P_2 лежи на QR. Аналогно на QR лежат и точките симетрични на P воодност на правите P_2P_3, P_3P_4 и P_4P_1. Бидејќи QR е дијаметар на опишаната кружница околу квадратот $ABCD$, тој го содржи нејзиниот центар, со што задачата е решена.

80. Нека $ABCD$ е тетивен четириаголник, при што неговите спротивни страни не се паралелни. Нека E е пресечната точка на AB и CD, а F е пресечната точка на AD и BC. Симетралата на $\measuredangle AFB$ ги сече страните AB и CD во точки P и Q, соодветно, а симетралата на $\measuredangle BEC$ ги сече страните BC и AD во точки Q и S, соодветно. Докажи, дека четириаголникот $PQRS$ е ромб.



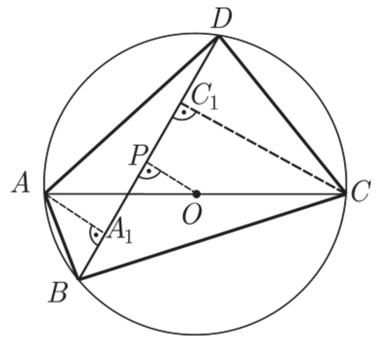
Решение. Нека пресекот на симетралите на аглите AFB и CEB е точката T. Со α, β, γ и δ ќе ги означиме аглите на четириаголникот $ABCD$. Имаме:

$$\begin{aligned}\measuredangle FTE = \measuredangle TFQ + \measuredangle TQF &= \tfrac{1}{2}\measuredangle AFB + \measuredangle QEB + \measuredangle FBE \\ &= \tfrac{1}{2}\measuredangle AFB + \tfrac{1}{2}\measuredangle CEB + \measuredangle FBE \\ &= \tfrac{1}{2}(180^\circ - \alpha - \beta) + \tfrac{1}{2}(180^\circ - \beta - \gamma) + \beta \\ &= 180^\circ - \tfrac{\alpha+\gamma}{2} = 180^\circ - \tfrac{180^\circ}{2} = 90^\circ.\end{aligned}$$

За $\triangle ETR$ и $\triangle ETP$ важи $\measuredangle RET = \measuredangle PET$, $\measuredangle RTE = \measuredangle PTE$ и ET е заедничка страна. Значи тие се складни, па затоа $\overline{TR} = \overline{TP}$. Слично, $\overline{ST} = \overline{QT}$. Значи за четириаголникот $PQRS$ важи дека дијагоналите се преполовуваат и се заемно нормални, па четириаголникот $PQRS$ е ромб.

81. Дијагоналата AC на четириаголникот $ABCD$ впишан во кружница е дијаметар на кружницата. Докажи дека проекциите на страните AB и CD на дијагоналата BD се еднакви.

Решение. *Прв начин.* Нека P е подножјето на нормалата од центарот O на опишаната кружница кон дијагоналата BD, и нека A_1 и C_1 се подножјата на нормалите од A и C на BD соодветно. Тогаш, од $AA_1 \parallel OP \parallel CC_1$ и $\overline{AO} = \overline{CO}$, како радиуси на опишаната кружница, следува дека $\overline{A_1P} = \overline{PC_1}$.



Користејќи дека $\overline{BP} = \overline{PD}$, затоа што $OP \perp BD$ и O е центар на кружницата, па затоа P е средина на тетивата BD, се добива

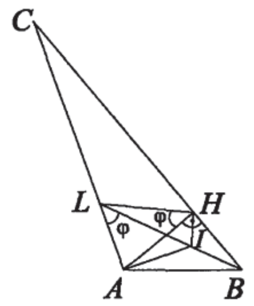
$$\overline{BA_1} = \overline{BP} - \overline{A_1P} = \overline{DP} - \overline{PC_1} = \overline{C_1D},$$

што требаше да се докаже.

Втор начин. Нека A_1 и C_1 се подножјата на нормалите од A и C на BD соодветно. Тогаш, $\triangle ABA_1 \sim \triangle ACD$ ($\measuredangle AA_1B = \measuredangle ADC = 90^\circ$ и $\measuredangle ABA_1 = \measuredangle ACD$, како перифериски агли над ист кружен лак), од каде $\frac{\overline{BA_1}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AC}}$. Понатаму, од $\triangle CDC_1 \sim \triangle CAB$ ($\measuredangle CC_1D = \measuredangle CBA = 90^\circ$ и $\measuredangle CDC_1 = \measuredangle CAB$, како перифериски агли над ист кружен лак), следува дека $\frac{\overline{DC_1}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AC}}$. Со изедначување на левите страни од равенствата се добива $\frac{\overline{BA_1}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DC_1}}{\overline{AB}}$, од каде $\overline{BA_1} = \overline{DC_1}$, што требаше да се докаже.

82. Даден е $\triangle ABC$. Нека $BL, L \in AC$ е симетралата на $\measuredangle ABC$, а $AH, H \in BC$ е висината на триаголникот повлечена од темето A. Докажи, дека $\measuredangle AHL = \measuredangle ALB$ ако и само ако $\measuredangle BAC = \measuredangle ACB + 90^\circ$.

Решение. Нека $\measuredangle AHL = \measuredangle ALB = \varphi$ и I е центарот на впишаната кружница во $\triangle ABH$. Тогаш



$$\measuredangle AHI = \frac{1}{2}\measuredangle AHB = 45^\circ \text{ и } \measuredangle AIL = 180^\circ - \measuredangle AIB = 45^\circ.$$

Оттука,

$$\measuredangle LAI + \measuredangle LHI = (180^\circ - \measuredangle ALI - \measuredangle ALI) + (\measuredangle AHL - \measuredangle AHI)$$
$$= (180^\circ - \varphi - 45^\circ) + (\varphi + 45^\circ) = 180^\circ.$$

Според тоа, четириаголникот $AIHL$ е тетивен, па затоа $\varphi = 45^\circ$. Сега имаме

$$\measuredangle BAC = 90^\circ + \measuredangle BAI = 90^\circ + \frac{1}{2}(90^\circ - \measuredangle ABC).$$

Ако во последното равенство замениме $\measuredangle ABC = 180^\circ - \measuredangle BAC - \measuredangle ACB$, добиваме

$$\measuredangle BAC = \measuredangle ACB + 90^\circ.$$

За да ја докажеме обратната импликација, ќе ги корисиме стандардните ознаки за аглите на $\triangle ABC$. Нека $\alpha = \gamma + 90^\circ$. Тогаш лесно се гледа, дека AL е надворешна симетрала на агол за $\triangle ABH$. Според тоа, L е центар на припишаната кружница за $\triangle ABH$ кон страната AH. Сега имаме $\measuredangle AHL = \frac{1}{2}\measuredangle CHA = 45^\circ$. Од друга страна

$$\measuredangle ALB = 180^\circ - \measuredangle BAL - \measuredangle ABL = 180^\circ - \alpha - \frac{\beta}{2} = 180^\circ - \alpha - \frac{180^\circ - \alpha - \gamma}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha - \gamma}{2} = 45^\circ.$$

Конечно, $\measuredangle AHL = \measuredangle ALB$.

83. Нека четириаголникот $ABCD$ е и тетивен и тангентен. Ако разликата на страните AD и BC е еднаква на разликата на страните AB и CD, докажи дека AC е дијаметар на кружницата опишана околу четириаголникот $ABCD$.

Решение. Од условот $\overline{AD} - \overline{BC} = \overline{AB} - \overline{CD}$ и тоа дека четириаголникот е тангентен, односно од $\overline{AD} + \overline{BC} = \overline{AB} + \overline{CD}$, се добива дека $\overline{BC} = \overline{CD}$ и $\overline{AB} = \overline{AD}$, па триаголниците ABC и ADC се складни (имаат три еднакви страни). Тогаш, $\measuredangle ABC = \measuredangle ADC = \frac{1}{2}(\measuredangle ABC + \measuredangle ADC) = 90^\circ$ (бидејќи четириаголникот е тетивен), па AC е дијаметар на опишаната кружница околу четириаголникот $ABCD$.

84. Аголот при врвот A на рамнокракиот триаголник ABC е 50°. Нека k е кружница со дијаметар AC и $\{D\} = k \cap AB$ и $\{E\} = k \cap BC$. Определи ги аглите на четириаголникот $ADEC$ и аголот меѓу дијагоналите на четириаголникот $ADEC$.

Решение. Нека $\measuredangle\alpha = 50^\circ$. Бидејќи триаголникот е рамнокрак имаме $\beta = 65^\circ$. Четириаголникот $ADEC$ е тетивен, па $65^\circ + \measuredangle ADE = 50^\circ + \measuredangle DEC$, односно

$$\measuredangle DEC - \measuredangle ADE = 15^\circ \qquad (1)$$

Од друга страна

$$\measuredangle DEC = \measuredangle BDE + \measuredangle DBE = (180^\circ - \measuredangle ADE) + \measuredangle DBE$$
$$= (180^\circ - \measuredangle ADE) + 65^\circ = 245^\circ - \measuredangle ADE$$

(надворешен агол кај триаголник е еднаков на збирот на внатрешните агли кои се несоседни со него). Значи

$$\measuredangle DEC+\measuredangle ADE=245^\circ \qquad (2)$$

Со собирање на (1) и (2) добиваме $2\measuredangle DEC=260^\circ$, односно $\measuredangle DEC=130^\circ$. Тогаш

$$\measuredangle ADE=245^\circ-\measuredangle DEC=115^\circ.$$

Сега $\measuredangle CEA=90^\circ$ (агол над дијаметарот), па

$$\measuredangle DEA=\measuredangle DEC-\measuredangle AEC=130^\circ-90^\circ=40^\circ.$$

На сличен начин и

$$\measuredangle EDC=\measuredangle EDA-\measuredangle CDA=115^\circ-90^\circ=25^\circ.$$

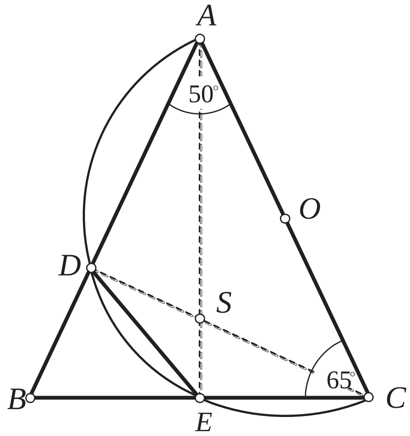
Оттука

$$\measuredangle DSE=180^\circ-\measuredangle EDS-\measuredangle DES$$

$$=180^\circ-25^\circ-40^\circ=115^\circ$$

и

$$\measuredangle CSE=180^\circ-\measuredangle DSE=180^\circ-115^\circ=65^\circ.$$

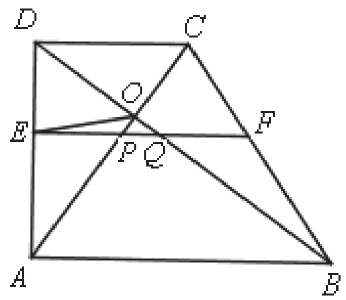


85. Даден е правоаголниот трапез $ABCD$ со прав агол кај темето A ($AB\parallel CD$, $\overline{AB}>\overline{CD}$). Дијагоналите на трапезот се заемно нормални и се сечат во точката O. Нека OE е симетралата на $\measuredangle AOD$, E лежи на AD и нека F е точка на кракот BC така што $EF\parallel AB$. Нека $\{P\}=EF\cap AC$, $\{Q\}=EF\cap BD$. Докажи дека:

а) $\overline{EP}=\overline{QF}$, б) $\overline{EF}=\overline{AD}$.

Решение. а) Од сличноста на триаголниците APE и ACD следува $\frac{\overline{EP}}{\overline{DC}}=\frac{\overline{AE}}{\overline{AD}}$, а од сличноста на триаголниците BFQ и BCD следува $\frac{\overline{QF}}{\overline{DC}}=\frac{\overline{BF}}{\overline{BC}}$. Понатаму, $\frac{\overline{AE}}{\overline{AD}}=\frac{\overline{AP}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{BF}}{\overline{BC}}$ и затоа

$$\frac{\overline{EP}}{\overline{DC}}=\frac{\overline{AE}}{\overline{AD}}=\frac{\overline{BF}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{QF}}{\overline{DC}}.$$



Од последното равенство следува $\overline{EP}=\overline{QF}$.

б) Четириаголниците $AQOE$ и $DEPO$ се тетивни ($\measuredangle AOQ=\measuredangle AEQ=90^\circ$ и $\measuredangle DEP=\measuredangle DOP=90^\circ$) па затоа $\measuredangle EQA=\measuredangle EOA=45^\circ$ и $\measuredangle DPE=\measuredangle DOE=45^\circ$. Оттука, добиваме дека триаголниците AQE и DEP се рамнокраки и правоаголни, па $\overline{EA}=\overline{EQ}$ и $\overline{DE}=\overline{EP}$. Значи, $\overline{EF}=\overline{EQ}+\overline{QF}=\overline{EA}+\overline{EP}=\overline{EA}+\overline{ED}=\overline{AD}$.

86. Нека P е точка во внатрешноста на $\triangle ABC$. Нека D,E и F се подножјата на нормалите повлечени од P на правите BC,CA и AB соодветно. Ако четириаголниците $AEPF, BFPD$ и $CDPE$ се тангентни, докажи дка P е центарот на впишаната кружница во $\triangle ABC$.

Решение. Бидејќи $\measuredangle AEP=\measuredangle EFP=90^\circ$ од Питагоровата теорема следува дека

$$\overline{PA}^2=\overline{PF}^2+\overline{FA}^2=\overline{PE}^2+\overline{EA}^2,$$

што може да се запише во видот

$$\overline{FA}^2 - \overline{PE}^2 = \overline{EA}^2 - \overline{PF}^2$$
$$(\overline{FA} - \overline{PE})(\overline{FA} + \overline{PE}) = (\overline{EA} - \overline{PF})(\overline{EA} + \overline{PF}).$$

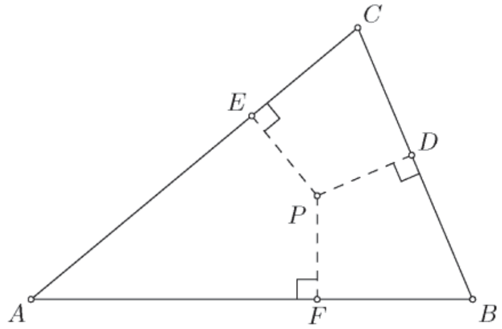
Но четириаголникот $AFPE$ е тангентен, па затоа важи

$$\overline{FA} + \overline{PE} = \overline{EA} + \overline{PF}$$

и од горното равенство следува

$$\overline{FA} - \overline{PE} = \overline{EA} - \overline{PF}.$$

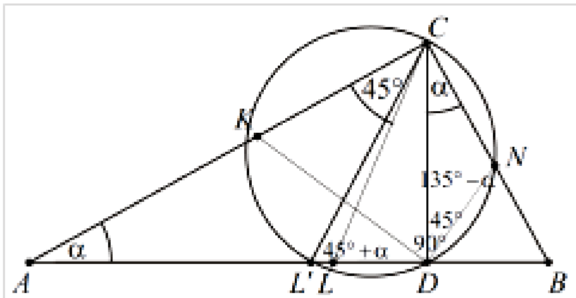
Конечно, од последните две равенства следува $\overline{PE} = \overline{PF}$. Аналогно се добива дека $\overline{PD} = \overline{PE}$, што значи дека P е центарот на впишаната кружница во $\triangle ABC$.



87. Во правоаголниот $\triangle ABC$ со прав агол при темето C, се конструирани висината CD, симетралата CL на $\measuredangle ACB$ и симетралите DK и DN на $\measuredangle ADC$ и $\measuredangle BDC$, соодветно. Притоа $D, L \in AB$, $K \in AC$ и $N \in BC$. Докажи дека точките C, K, L, D и N лежат на иста кружница. Докажи дека $\overline{KN} = \overline{CL}$.

Решение. Од $\measuredangle ACB = 90°$ и $\measuredangle KDN = \measuredangle KDC + \measuredangle CDN = 45° + 45° = 90°$, следува дека четириаголникот $CKDN$ е тетивен т.е. околу него може да се опише кружница k. Нека $AB \cap k = \{D, L'\}$. Нека $\measuredangle BAC = \alpha$, тогаш од $\triangle ADC \sim \triangle CDB$ следува

$$\measuredangle DCB = \measuredangle BAC = \alpha.$$



Заради $\measuredangle CDN = 45°$ од $\triangle CDN$ следува дека $\measuredangle DNC = 135° - \alpha$. Бидејќи $CL'DN$ е тетивен четириаголник, важи

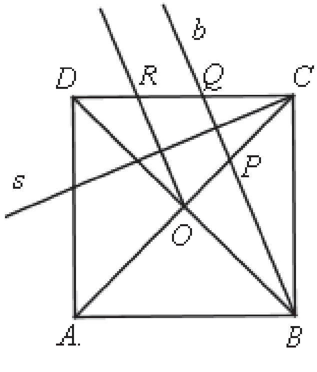
$$\measuredangle CL'B = 180° - \measuredangle DNC = 180° - (135° - \alpha) = 45° + \alpha \quad (1)$$

Од друга страна, $\measuredangle ACL = 45°$, бидејќи CL е симетрала на прав агол. Оттука,

$$\measuredangle CLB = 45° + \alpha \quad (2),$$

како надворешен агол за триаголникот ALC. Од (1) и (2) следува дека $L' \equiv L$, т.е. точките C, K, L, D и N лежат на k. Притоа $\overline{KN}$ и $\overline{CL}$ се дијаметри во опишаната кружница k, бидејќи тетивните агли над нив се прави, па $\overline{KN} = \overline{CL}$.

88. Даден е квадратот $ABCD$ со центар O. Нека s е симетралата на аголот ACD, b е нормала низ B на s која ја сече дијагоналата AC во P, а страната CD во Q. Докажи дека $\overline{DQ} = 2\overline{PO}$.

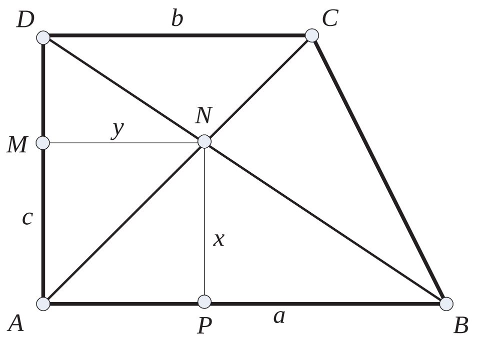


Решение. Нека R е точка од страната CD на квадратот $ABCD$ таква што правите OR и b се паралелни. Тогаш, бидејќи O е средина на страната

BD на триаголникот BQD и $OR \parallel BQ$, R е средина на отсечката DQ, односно $\overline{DQ} = 2\overline{RQ}$. Сега, симетралата s на аголот OCR е нормална на страната OR во $\triangle OCR$, па затоа $\triangle OCR$ е рамнокрак. Оттука, следува дека трапезот $ROPQ$ е рамнокрак и затоа $\overline{RQ} = \overline{OP}$. Конечно, $\overline{DQ} = 2\overline{RQ} = 2\overline{OP}$, што и требаше да се докаже.

89. Даден е правоаголен трапез со основи a и b ($a > b$) и должина на помалиот крак c. Определи го растојанието од пресечната точка на дијагоналите на трапезот до основата a, и до помалиот крак c.

Решение. Нека $ABCD$ е правоаголен трапез при што $\overline{AB} = a$, $\overline{CD} = b$ и $\overline{DA} = c$. Пресекот на дијагоналите AC и BD ќе го означиме со N. Нека M и P се подножја на нормалите од N кон AD и AB соодветно (види цртеж).



Триаголниците AMN и ADC се слични (имаат исти агли), па затоа $\frac{\overline{MN}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{AD}}$, односно $\frac{y}{b} = \frac{x}{c}$.

Триаголниците NPB и DAB се слични (имаат исти агли), па затоа $\frac{\overline{NP}}{\overline{DA}} = \frac{\overline{PB}}{\overline{AB}}$, односно $\frac{x}{c} = \frac{a-y}{a}$.

Од системот равенки $\frac{y}{b} = \frac{x}{c}$ и $\frac{x}{c} = \frac{a-y}{a}$, добиваме $y = \frac{ab}{a+b}$ и $x = \frac{ac}{a+b}$.

90. Даден е $\triangle ABC$, за кој $\overline{AC} > \overline{BC}$. Кружница со центар M на симетралата на $\measuredangle ACB$ ја сече правата AC во точките A и P, а правата BC во точките B и Q. Правите PQ и AB се сечат во точката L. Докажи, дека точките C, L и M лежат на една права.

Решение. Бидејќи $\overline{AM} = \overline{BM}$ следува дека центарот M на кружницата k лежи на симетралата на отсечката AB (направи цртеж). Понатаму, симетралата на $\measuredangle ACB$ и симетралата на отсечката AB се сечат во средината на лакот AB кој не ја содржи точката C. Од $\overline{AC} > \overline{BC}$ следува, дека P е внатрешна точка за AC, а Q е надворешна точка за BC, бидејќи $\measuredangle MAP = \measuredangle MBQ$. Според тоа, $\triangle MAP \cong \triangle MBQ$.

Прв начин. Точките Q и B соодветно се симетрични на A и P во однос на CM. Според тоа, $AQBP$ е рамнокрак трапез и дијагоналите AB и PQ се сечат на заедничката симетрала CM на двете основи.

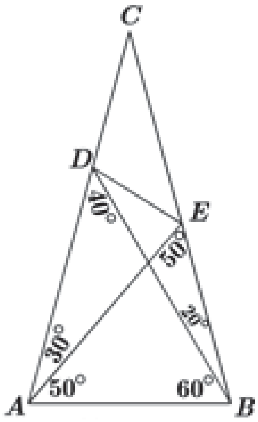
Втор начин. Од $\triangle MAP$ добиваме

$$\measuredangle AMP = 180^\circ - 2\measuredangle MAP = 180^\circ - 2(\alpha + \tfrac{\gamma}{2}) = \beta - \alpha .$$

Освен тоа, $\measuredangle PMB = 2\measuredangle PAB = 2\alpha$ и $\measuredangle PQB = \measuredangle PAB = \alpha$. Сега од $\triangle QBL$ добиваме

$\measuredangle BLQ=\beta-\alpha$. Значи, четириаголникот $MQBL$ е тетивен и $\measuredangle BML=\measuredangle BQL=\alpha$. Но, $\measuredangle BML=\measuredangle BAC=\alpha$, па затоа точките C,L и M лежат на една права.

91. Даден е рамнокрак $\triangle ABC$ со краци CA и CB и агол меѓу нив 20°. Нека D е точка од кракот CA така што $\measuredangle ABD=60^\circ$, а E е точка од кракот CB така што $\measuredangle BAE=50^\circ$ (цртеж десно). Пресметај го $\measuredangle BDE$.

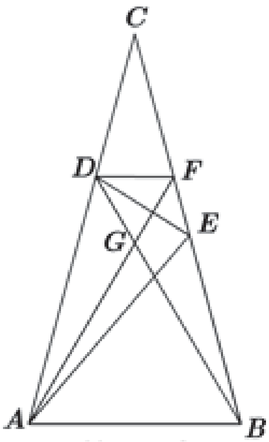


Решение. *Прв начин.* Да ја означиме должината на краците на дадениот триаголник со a, а должината на основата со c. Од условот во задачата следува дека

$$\measuredangle CAB=\measuredangle CBA=80^\circ,\ \measuredangle CAE=30^\circ,\ \measuredangle CBD=20^\circ,$$

$$\measuredangle ADB=40^\circ,\ \measuredangle AEB=50^\circ,\ \measuredangle BDC=140^\circ.$$

Оттука следува дека триаголниците BCD и EAB се рамнокраки, па затоа важи $\overline{BE}=\overline{BA}=c$ и нека $\overline{DC}=\overline{DB}=d$. Овие ознаки ќе го имаат истото значење во сите начини на решавање.

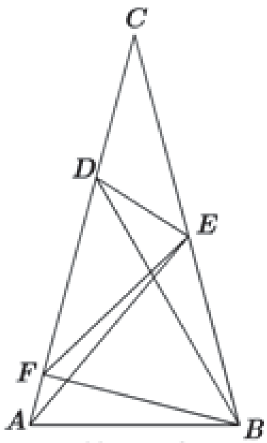


Нека F е точка од кракот CB така што DF и AB се паралелни и нека пресечната точка на AF и DB е G (цртеж лево). Тогаш четириаголникот $ABFD$ е рамнокрак трапез па $\measuredangle BAG=\measuredangle ABG=60^\circ$, односно $\triangle ABG$ е рамностран, како и $\triangle GFD$. Значи $\overline{BG}=\overline{BA}=\overline{BE}=c$ и оттука следува дека $\triangle EGB$ е рамнокрак. Тогаш

$$\measuredangle BGE=\tfrac{180^\circ-20^\circ}{2}=80^\circ \text{ и } \measuredangle FGE=180^\circ-80^\circ-60^\circ=40^\circ.$$

Од $\measuredangle FGE=\measuredangle GFE=40^\circ$ следува $\overline{EG}=\overline{EF}$, а бидејќи $\triangle GFD$ е рамностран имаме $\overline{DG}=\overline{DE}$. Затоа четриаголникот $GEFD$ е делтоид, па DE го преполовува $\measuredangle GDF$, односно $\measuredangle BDE=\frac{1}{2}60^\circ=30^\circ$.

Втор начин. Нека F е точка од кракот CA така што $\measuredangle ABF=20^\circ$ (цртеж десно). Тогаш $\triangle ABF$ е рамнокрак па $\overline{BF}=c$. Бидејќи и $\overline{BE}=c$, $\triangle EFB$ е рамнокрак, а од $\measuredangle FBE=80^\circ-20^\circ=60^\circ$ следува дека тој е рамностран. Од друга страна имаме



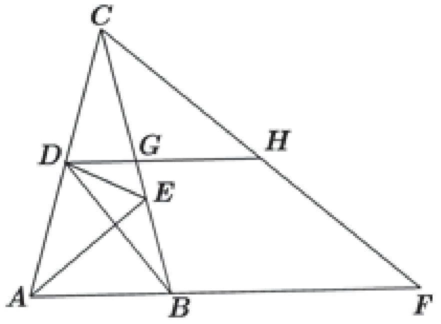
$$\measuredangle DBF=60^\circ-20^\circ=40^\circ,$$

па затоа и $\triangle BDF$ е рамнокрак, односно $\overline{DF}=c$. Тогаш, $\triangle EDF$ е рамнокрак,

$$\measuredangle FDE=\tfrac{60^\circ+80^\circ}{2}=70^\circ$$

и затоа $\measuredangle BDE=\measuredangle FDE-\measuredangle FDB=70^\circ-40^\circ=30^\circ$.

Трет начин. Нека F е точка на полуправата AB така што $\overline{BF}=a$, H е точка од CF така што DH и AB се паралелни и нека G е пресечната точка на DH и CB (цртеж лево). Тогаш, од рамнокракиот $\triangle FCB$ следува



$$\measuredangle BFC = \measuredangle BCF = \frac{80^\circ}{2} = 40^\circ .$$

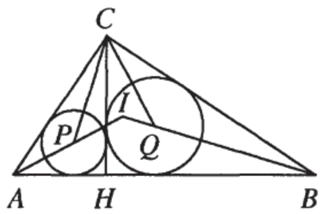
Бидејќи

$\measuredangle AFC = \measuredangle ADB = 40^\circ$ и $\measuredangle FAC = \measuredangle DAB = 80^\circ$, следува дека $\triangle AFC \sim \triangle ADB$, па затоа $\frac{\overline{AF}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}$, односно $\frac{c+a}{a} = \frac{a-d}{c}$. Тогаш $\frac{c+a-a}{a} = \frac{a-d-c}{c}$ односно $\frac{a-d-c}{c} = \frac{c}{a}$. Оттука имаме

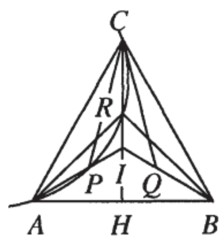
$$\frac{\overline{EG}}{\overline{BE}} = \frac{a-d-c}{c} = \frac{c}{a} = \frac{\overline{DG}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{DG}}{\overline{DB}},$$

од што следува дека DE е симетрала на аголот $\measuredangle BDG = 60^\circ$ и затоа $\measuredangle BDE = 30^\circ$.

92. Во $\triangle ABC$ е повлечена висината CH кон страната AB, при што точката H е внатрешна за AB. Со P и Q се означени центрите на кружниците впишани во $\triangle AHC$ и $\triangle BHC$, соодветно. Докажи, дека четириаголникот $ABQP$ е тетивен ако и само ако $\overline{AC} = \overline{BC}$ или $\measuredangle ACB = 90^\circ$.



Решение. Ако $\overline{AC} = \overline{BC}$, тогаш четириаголникот $ABQP$ е рамнокрак трапез, што значи дека тој е тетивен. Ако $\measuredangle ACB = 90^\circ$, тогаш $\measuredangle ACI = \measuredangle BCI = 45^\circ$, каде I е центарот на впишаната кружница во $\triangle ABC$. Имаме $\measuredangle APC = \measuredangle BQC = 135^\circ$, т.е. $\measuredangle IPC = \measuredangle IQC = 45^\circ$. Според тоа, $\triangle IPC \sim \triangle ICA$ и $\triangle IQC \sim \triangle ICB$. Оттука $\overline{IP} \cdot \overline{IA} = \overline{IC}^2 = \overline{IQ} \cdot \overline{IB}$, па затоа четириаголникот $ABQP$ е тетивен.

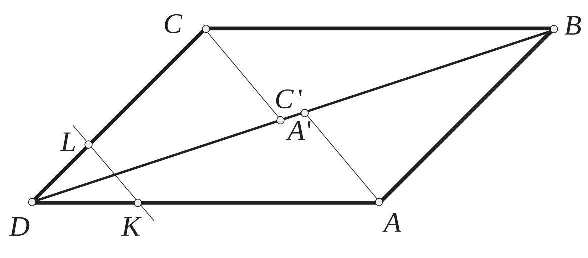


Да ја разгледаме кружницата опишана околу $\triangle APC$. Ако таа се допира до CI во точката C, тогаш $\measuredangle ACI = \measuredangle IPC = 45^\circ$, па затоа $\measuredangle ACB = 90^\circ$. Нека оваа кружница ја сече по вторпат CI во точка R. Тогаш $\overline{IP} \cdot \overline{IA} = \overline{IR} \cdot \overline{IC}$ и $\overline{IP} \cdot \overline{IA} = \overline{IQ} \cdot \overline{IB}$. Затоа $\overline{IQ} \cdot \overline{IB} = \overline{IR} \cdot \overline{IC}$ и четириаголникот $BCRQ$ е тетивен. Според тоа,

$$\measuredangle BRC = \measuredangle BQC = 135^\circ = \measuredangle APC = \measuredangle ARC, \ \triangle ARC \cong \triangle BRC \text{ и } \overline{AC} = \overline{BC}.$$

93. Даден е паралелограм $DABC$. На страната DC е нанесена точка L така што $3\overline{DL} = \overline{DC}$, а на страната DA е нанесена точка K така што $4\overline{DK} = \overline{DA}$. Низ точките L и K е повлечена права p која се сече со дијагоналата DB во точката M. Колкав дел од дијагоналата DB е отсечката DM?

Решение. Ги повлекуваме правите AA' и CC' паралелно со правата p, при што точките A' и C' лежат на дијагоналата OB. Тогаш триаголниците DLM и DCC' се



слични и триаголниците DKM и DAA' се слични. Од сличноста на овие триаголници, добиваме

$$3\overline{DM}=\overline{DC'} \text{ и } 4\overline{DM}=\overline{DA'}.$$

Триаголниците DCC' и BAA' се складни, бидејќи имаат еднакви страни $\overline{DC}=\overline{BA}$ и соодветните агли при овие страни им се еднакви (правите CC' и AA' се паралелни). Значи $\overline{DC'}=\overline{A'B}$. Од досега изнесеното имаме

$$\overline{OB}=\overline{OA'}+\overline{A'B}=\overline{OA'}+\overline{OC'}=4\cdot\overline{OM}+3\cdot\overline{OM}=7\cdot\overline{OM}.$$

Значи отсечката OM седмина од дијагоналата OB.

94. Даден е паралелограм $ABCD$. Над страните AB, BC, CD, DA се конструирани квадрати кои лежат во надворешноста на паралелограмот. Центарот на паралелограмот, средината на било која негова страна и центарот на квадратот конструиран на таа страна се темиња на триаголник.

а) Докажи дека четирите такви триаголници се складни,

б) Докажи дека четириаголникот чии темиња се центрите на конструираните квадрати се темиња на квадрат.

Решение. Нека S е центарот на паралелограмот $ABCD$ (пресекот на дијагоналите), а P и Q се средини на неговите страни AB и BC, соодветно. Нека S_1 и S_2 се центри на квадратите конструирани над страните AB и BC, соодветно. Од условот на задачата следува

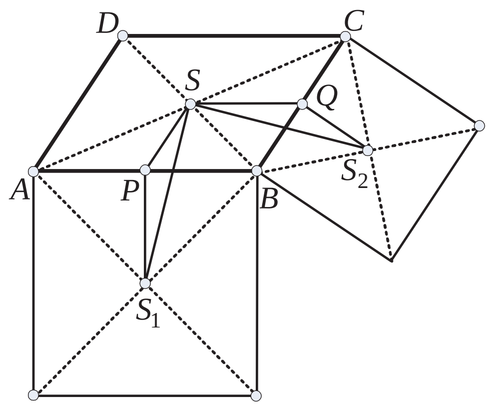
$$\overline{SQ}=\overline{PB}=\overline{PS_1},\quad \overline{SP}=\overline{QB}=\overline{QS_2}$$

и

$$\measuredangle SPS_1=\measuredangle SPB+\measuredangle BPS_1=\measuredangle SQB+\measuredangle BQS_2=\measuredangle SQS_2.$$

Според тоа, $\triangle SPS_1\cong\triangle SQS_2$. Потполно аналогно се докажува дека било кои два триаголници кои се добиени со помош на две страни на паралелограмот кои имаат заедничко теме се складни.

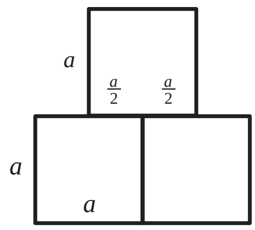
б) Бидејќи $\triangle SPS_1\cong\triangle SQS_2$, добиваме дека $\overline{SS_1}=\overline{SS_2}$. Од друга страна



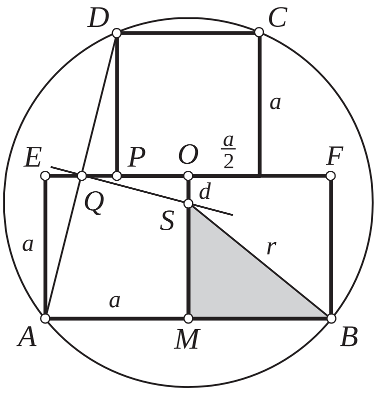
$$\begin{aligned}\measuredangle S_1SS_2&=\measuredangle PSQ-\measuredangle PSS_1-\measuredangle QSS_1\\&=\measuredangle PSQ-\angle PSS_1-\measuredangle PS_1S\\&=\measuredangle PSQ-(\pi-\measuredangle SPS_1)\\&=\measuredangle ADC-(\pi-(\tfrac{\pi}{2}+\measuredangle SPB))\\&=\measuredangle ADC-(\tfrac{\pi}{2}-\measuredangle DAB)\\&=\measuredangle ADC+\measuredangle DAB-\tfrac{\pi}{2}=\pi-\tfrac{\pi}{2}=\tfrac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Значи $SS_1\perp SS_2$.

Потполно аналогно се докажува дека $\overline{SS_3}=\overline{SS_4}=\overline{SS_1}$ и $SS_2\perp SS_3$. Значи, S_1S_3 и S_2S_4 се дијагонали на четириаголникот кои се преполовуваат и се заемно нормални. Според тоа четириаголникот $S_1S_2S_3S_4$ е квадрат.



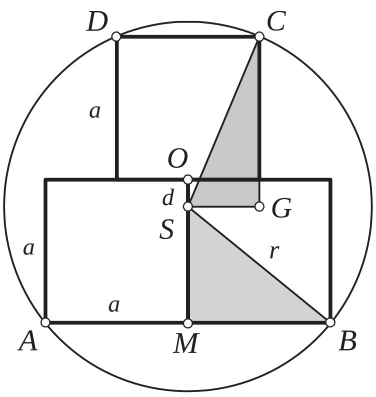
95. Најди го центарот и радиусот на кружницата опишана околу квадратите на цртежот десно.



Решение. *Прв начин.* Јасно е дека кружницата не може да минува низ точките A, B, C, D, E, F, па мора да минува низ A, B, C и D. Нејзиниот центар S се наоѓа на правата MO, односно е пресек на таа права и симетралата на отсечката AD. Притоа $\overline{SE} < \overline{SA} = r$, односно точката E (слично и точката F) лежат во внатрешноста на кружницата. Точката Q е средина на AD и Q лежи на EO (зошто?).

Сега триаголниците AEQ и DPQ се складни (соодветните агли им се еднакви и $\overline{AE} = \overline{DP} = a$), па $\overline{EQ} = \frac{a}{4}$ и $\overline{OQ} = \frac{3a}{4}$. Нека $d = \overline{SO}$. Триаголниците AEQ и QOS се слични (двата се правоаголни и $\measuredangle EAQ = \measuredangle SQO$ како агли со нормални краци), па затоа $\frac{\overline{SO}}{\overline{OQ}} = \frac{\overline{EQ}}{\overline{AE}}$. Оттука $d = \frac{\overline{EQ} \cdot \overline{OQ}}{\overline{AE}} = \frac{\frac{a}{4} \cdot \frac{3a}{4}}{a} = \frac{3a}{16}$. Според тоа центарот се наоѓа на растојание $\frac{3a}{16}$ од точката O. Сега, од правоаголниот триаголник SMB го наоѓаме радиусот на кружницата. Имаме

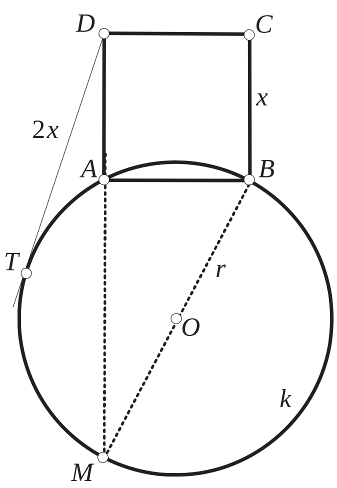
$$r = \sqrt{\overline{MB}^2 + \overline{SM}^2} = \sqrt{a^2 + (a - \frac{3a}{16})^2} = \frac{5\sqrt{17}}{16} a .$$



Втор начин. Да ја примениме Питагоровата теорема за триаголниците SMB и SGC. Имаме

$$r^2 = (a-d)^2 + a^2 \text{ и } r^2 = (a+d)^2 + (\frac{a}{2})^2 .$$

Ако ги изедначиме десните страни добиваме $d = \frac{3a}{16}$, а потоа r го пресметуваме како во претходниот начин на решавање.



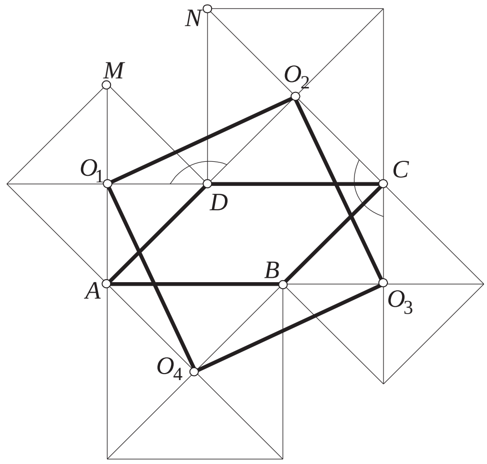
96. Темињата A и B од квадратот $ABCD$ припаѓаат на кружницата $k(O, r)$. Тангентата кон k од темето D (тангентата е во надворешноста на квадратот) е двојно поголема од страната на квадратот. Определи ја страната на квадратот.

Решение. Нека правата t е тангента од D кон кружницата k и нека $t \cap k = T$. Исто така, нека $\overline{AB} = x$ и $DA \cap k = \{A, M\}$. Од условот на задачата имаме $\overline{DM} \cdot \overline{DA} = \overline{DT}^2 = 4x^2$, односно $\overline{DM} \cdot x = 4x^2$, т.е. $\overline{DM} = 4x$.

Но сега, $\overline{AM} = \overline{DM} - \overline{DA} = 4x - x = 3x$. Бидејќи $\measuredangle MAB = 90^\circ$, триаголникот BAM е правоаголен и $\overline{BM}$ е дијаметар на k, т.е. $\overline{BM} = 2r$. Според Питагоровата теорема имаме $\overline{AB}^2 + \overline{AM}^2 = \overline{MB}^2$, т.е. $(3x)^2 + x^2 = (2r)^2$. Од последната равенка добиваме $x = \frac{\sqrt{10}}{5} r$.

97. Секоја страна на еден паралелограм е страна на квадрат конструиран во надворешноста на паралелограмот. Докажи дека центрите на тие квадрати се темиња на квадрат.

Решение. Бидејќи квадратите конструирани над страните AB и CD се еднакви имаме $\overline{O_1B} = \overline{O_3D}$ (види цртеж) како половина од дијагонала на квадрат. Јасно е дека $\overline{BO_2} = \overline{O_2C}$ (како половина од дијагонала на ист квадрат). Од конструкцијата е јасно дека $\measuredangle MDN = \measuredangle BCD$, како агли со заемно нормални краци. Според тоа



$$\begin{aligned}\measuredangle O_1BO_2 &= \measuredangle O_1BM + \measuredangle MBN + \measuredangle NBO_2\\ &= \tfrac{\pi}{4} + \measuredangle MBN + \tfrac{\pi}{4}\\ &= \measuredangle O_2CB + \measuredangle BCD + \measuredangle DCO_3\\ &= \measuredangle O_2CO_3.\end{aligned}$$

Значи, $\triangle O_1BO_2 \cong \triangle O_2CO_3$, па заради тоа $\overline{O_1O_2} = \overline{O_2O_3}$. Сега непосредно се докажува дека и $\measuredangle O_1O_2O_3 = \frac{\pi}{2}$.

Потполно аналогно се докажува дека $\overline{O_2O_3} = \overline{O_3O_4}$ и $\measuredangle O_2O_3O_4 = \frac{\pi}{2}$.

Конечно, од претходните разгледувања следува дека $O_1O_2O_3O_4$ е квадрат.

98. Докажи дека збирот на дијагоналите на конвексен четириаголник е помал од периметарот, а поголем од полупериметарот на тој четириаголник.

Решение. Нека дијагоналите на конвексниот четириаголник $ABCD$ се сечат во точката O, тогаш се точни неравенствата:

$$\overline{AB} + \overline{BC} > \overline{AC}$$
$$\overline{BC} + \overline{CD} > \overline{BD}$$
$$\overline{CD} + \overline{DA} > \overline{AC}$$
$$\overline{DA} + \overline{AB} > \overline{BD}$$

Со собирање на овие неравенства добиваме:

$$2(\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA}) > 2(\overline{AC} + \overline{BD})$$
$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA} > \overline{AC} + \overline{BD} \qquad (1)$$

Аналогно, од неравенствата

$$\overline{AB} < \overline{AO} + \overline{OB}$$
$$\overline{BC} < \overline{BO} + \overline{CO}$$
$$\overline{CD} < \overline{CO} + \overline{DO}$$
$$\overline{DA} < \overline{DO} + \overline{AO}$$

добиваме

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA} < 2(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD})$$
$$\tfrac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA} < (\overline{OA} + \overline{OC}) + (\overline{OB} + \overline{OD})$$
$$\tfrac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA}) < \overline{AC} + \overline{BD}\,. \tag{2}$$

Од (1) и (2) заклучуваме дека за секој конвексен четириаголник $ABCD$ важи

$$\tfrac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA}) < \overline{AC} + \overline{BD} < \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA}\,,$$

т.е. збирот на дијагоналите е поголем од полупериметарот, а помал од периметарот на тој четириаголник.

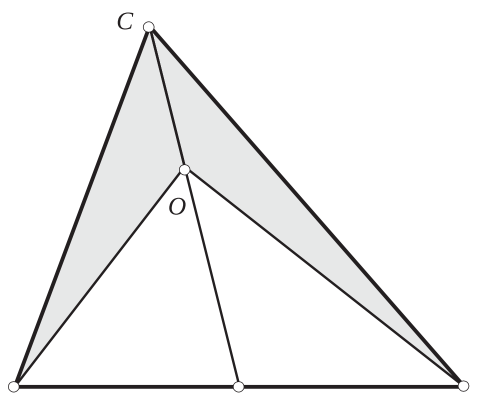
3. ПЛОШТИНА НА ТРИАГОЛНИК И ЧЕТИРИАГОЛНИК

1. Дали постои триаголник со висини $1\,cm$, $2\,cm$ и $3\,cm$.

Решение. Од условот $ah_a = bh_b = ch_c (= 2P)$, ставајќи $h_a = 1, h_b = 2, h_c = 3$, добиваме $a = 2b = 3c = 6k$ (k е константа) или $a = 6k$, $b = 3k$, $c = 2k$, што не е можно, бидејќи $a = 6k > 5k = b + c$.

Значи, не постои триаголник со висини $1\,cm$, $2\,cm$ и $3\,cm$.

2. Докажи дека плоштините на триаголниците AOC и BOC се еднакви, каде O е било која точка од тежишната линија CD на $\triangle ABC$.



Решение. Нека O е која било точка на тежишната линија CD на ΔABC (види цртеж). Очигледни се равенствата

$$P_{ADC} = P_{BDC} \tag{1}$$
$$P_{ADO} = P_{BDO} \tag{2}$$

Ако од (1) го одземеме (2) добиваме

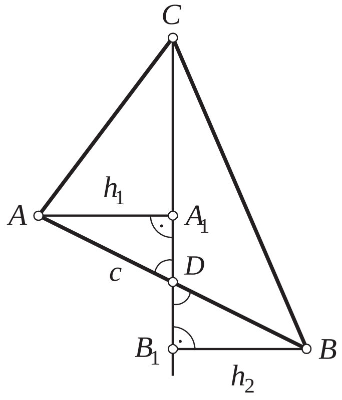
$$P_{ADC} - P_{ADO} = P_{BDC} - P_{BDO}$$

или $P_{AOC} = P_{BOC}$.

3. Може ли произволен триаголник со повлекување на една произволна права да се раздели на два складни триаголници?

Решение. *Прв начин.* Јасно е дека правата мора да поминува низ едно теме на триаголникот (во спротивно би добиле еден четириаголник). Нека тоа е темето C, и нека правата ја сече страната c во точката D. Триаголниците ACD и CBD се складни, па имаат еднакви плоштини. Страната CD е заедничка, па висините h_1 и

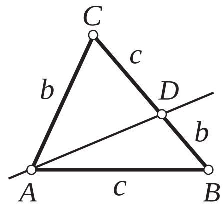
h_2 спуштени кон таа страна им се еднакви. Триаголниците AA_1C и BB_1D имаат една еднаква страна и трите агли им се еднакви, па се складни. Оттука следува $\overline{AD} = \overline{DB}$. Значи правата е тежишна линија во триаголникот. Натаму $\measuredangle ADC$ мора да е еднаков со некој од аглите во $\triangle BDC$ (заради складноста). Но тој е надворешен за $\triangle BDC$, па е поголем од двата внатрешни агли што не се соседни со него. Останува да е еднаков само со $\measuredangle CDB$. Според тоа



$$\measuredangle ADC = \measuredangle CDB = 90^\circ.$$

Значи правата е и висина во триаголникот. Според тоа триаголникот е рамнокрак со основа c. Од се ова следува дека ваквата поделба е можна ако и само ако триаголникот е рамнокрак.

Втор начин. Јасно е дека правата мора да поминува низ едно теме на триаголникот (во спротивно би добиле еден четириаголник). Нека тоа е темето A, и нека правата ја сече страната a во точката D. Да претпоставиме $b \neq c$. Триаголниците ACD и ABD се складни, $b \neq c$ и AD е заедничка страна, па мора $b = \overline{BD}$. Слично и $c = \overline{CD}$. Но тогаш $a = b + c$ што не е можно бидејќи a, b и c се страни на триаголник. Значи мора $b = c$, па триаголникот со дадениот услов е рамнокрак.

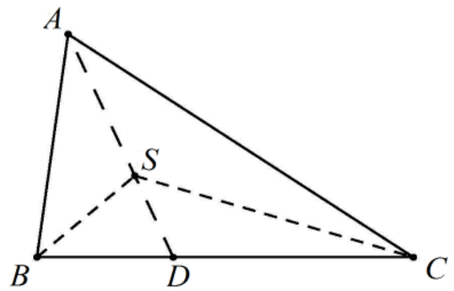


4. Нека S е центарот на впишаната кружница во $\triangle ABC$, а симетралата на $\measuredangle BAC$ ја сече страната BC во точката D. Докажи, дека $\overline{AS} : \overline{SD} = 2:1$ ако и само ако важи $\overline{CA} + \overline{AB} = 2\overline{BC}$.

Решение. Нека r е должината на радиусот на впишаната кружница во $\triangle ABC$. Нека $\overline{AS} : \overline{SD} = 2:1$. Триаголниците ASB и DSB имаат еднакви висини повлечени од темето B, па затоа

$P_{ASB} : P_{BSD} = \overline{AS} : \overline{SD} = 2$, т.е. $P_{ASB} = 2P_{BSD}$.

На потполно ист начин добиваме



$$P_{ASC} = 2P_{CSD}.$$

Затоа важи

$$P_{ASB} + P_{ASC} = 2P_{BSD} + 2P_{CSD} = 2P_{BSC}, \text{ т.е. } \tfrac{br}{2} + \tfrac{cr}{2} = 2\tfrac{ar}{2},$$

што значи $b + c = 2a$.

Нека претпоставиме дека $\overline{CA} + \overline{AB} = 2\overline{BC}$, т.е. $b + c = 2a$. Тогаш важи

$$\tfrac{br}{2} + \tfrac{cr}{2} = 2\tfrac{ar}{2}, \text{ т.е. } P_{ASB} + P_{ASC} = 2P_{BSC}.$$

Нека со v_b и v_c се означени растојанијата на темињата B и C до правата AD. Последното равенство последователно е еквивалентно на равенствата

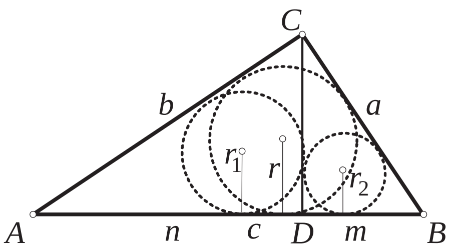
$$P_{ASB} + P_{ASC} = 2(P_{BSD} + P_{CSD})$$

$$\frac{1}{2}\overline{AS}\cdot v_c+\frac{1}{2}\overline{AS}\cdot v_b=2\left(\frac{1}{2}\overline{DS}\cdot v_c+\frac{1}{2}\overline{DS}\cdot v_b\right)$$
$$\overline{AS}\cdot(v_c+v_b)=2\overline{DS}(v_c+v_b)$$
$$\overline{AS}=2\overline{DS}$$
што и требаше да се докаже.

5. Даден е правоаголен триаголник ABC со прав агол во темето C, r радиус на впишаната кружница и CD е негова висина. Ако r_1 и r_2 се радиусите на впишаните кружници во триаголниците ADC и CDB соодветно, пресметај го збирот $r+r_1+r_2$.

Решение. Нека a,b,c се должини на страните на триаголникот, а n и m се должини на проекциите на катетите AC и BC врз хипотенузата AB. Според тоа, $P=\frac{ab}{2}$ и $P=\frac{a+b+c}{2}r$, од каде добиваме $\frac{ab}{2}=\frac{a+b+c}{2}r$, односно

$$r=\frac{ab}{a+b+c}. \qquad (1)$$



Од Питагоровата теорема $c^2=a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$, т.е. $ab=\frac{(a+b+c)(a+b-c)}{2}$. Со замена во (1) добиваме $r=\frac{a+b-c}{2}$. Сега, за триаголниците ADC и CDB имаме $r_1=\frac{n+h-b}{2}$ и $r_2=\frac{m+h-a}{2}$, каде h е должина на висината CD. Тогаш

$$r+r_1+r_2=\frac{a+b-c}{2}+\frac{n+h-b}{2}+\frac{m+h-a}{2}=\frac{h}{2}+\frac{h}{2}=h.$$

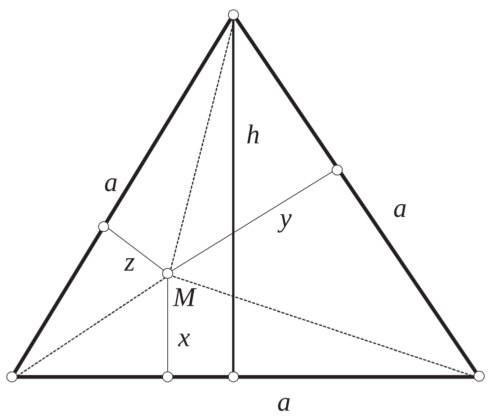
6. Каков е триаголникот ABC, ако за неговите висини важи равенството

$$\left(\frac{h_c}{h_a}\right)^2+\left(\frac{h_c}{h_b}\right)^2=1. \qquad (1)$$

Решение. Ако a,b,c се страни на $\triangle ABC$, а P неговата плоштина, тогаш од $2P=ah_a=bh_b=ch_c$ следува $\frac{h_c}{h_a}=\frac{a}{c}$ и $\frac{h_c}{h_b}=\frac{b}{c}$. Следствено, релацијата (1) го добива видот $\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2=1$, т.е. $a^2+b^2=c^2$, од каде што (според обратната теорема на Питагоровата) следува дека ABC е правоаголен триаголник.

7. Нека M е внатрешна точка во рамностраниот триаголик ABC. Докажи дека збирот на растојанијата од M до страните на триаголникот е еднаков на неговата висина.

Решение. Нека M е внатрешна точка во триаголникот (види цртеж). Збирот на плоштините на триаголниците ABM, BCM и CAM е еднаков на плоштината на триаголникот ABC, па, според ознаките на цр-



тежот, имаме $\frac{ax}{2}+\frac{ay}{2}+\frac{az}{2}=\frac{ah}{2}$, од каде што следува дека $\frac{a}{2}(x+y+z)=\frac{a}{2}h$, т.е. $x+y+z=h$.

8. Должините на страните на правоаголен триаголник се природни броеви. Може ли тој триаголник да се подели на три еднаквоплоштни триаголници чии што плоштини се изразуваат со природни броеви?

Решение. *Прв начин.* Ако a и b се катетите, c хипотенузата на правоаголниот триаголник, тогаш важи: $a^2+b^2=c^2$. Ќе покажеме дека во секој случај една од катетите е парен број и дека една од катетите е број делив со 3.

1) Ако a и b се два непарни броја, тогаш нивните квадрати при делење со 4 даваат остаток 1, т.е. се од видот $4m+1$, а збирот на нивните квадрати при делење со 4 дава остаток 2. Но квадратот на бројот c при делење со 4 не може да има остаток 2, а c^2 при делење со 3 неможе да има остаток 2. Значи, еден од броевите a и b секогаш е парен.

2) Ако ниеден од броевите a и b не е деллив со 3, тогаш збирот a^2+b^2 при делење со 3 дава остаток 2. Значи, еден од броевите a и b секогаш е број деллив со 3.

Според тоа, производот ab е деллив со 6, т.е. плоштината на триаголникот $\frac{ab}{2}$ е број деллив со 3. Тогаш доволно е која било страна на триаголникот да ја поделиме на три еднакви дела, а овие точки да ги поврземе со спротивното теме на триаголникот за да добиеме три еднаквоплоштни триаголници, чии што плоштини $\frac{ab}{6}$ се природни броеви.

Втор начин. Ако a и b се катети, а c хипотенуза на правоаголниот триаголник, тогаш $a=m^2-n^2$, $b=2mn$, $c=m^2+n^2$, $m,n\in\mathbb{N}$. За плоштината на триаголникот имаме $P=\frac{1}{2}ab=mn(m^2-n^2)$.

Треба да докажеме дека $\frac{P}{3}$ е природен број, т.е. дека $3\,|\,mn(m^2-n^2)$:

1) Ако барем еден од броевите е делив со 3, тогаш тврдењето е очигледно.

2) Ако m и n при делење со 3 даваат исти остатоци, тогаш разликата $m-n$ е длива со 3.

3) Ако m и n при делење со 3 даваат различни остатоци (на пример $m=3k+1$ и $n=3l+2$), тогаш $m+n$ е делив со 3.

Со тоа, доказот на задачата е завршен.

9. Во триаголник, со радиус на впишаната кружница еднаков на 1, должините на висините се цели броеви. Да се докаже дека триаголникот е рамностран.

Решение. Нека a,b,c се должини на страните, а h_a,h_b,h_c се должини на висините спуштени врз тие страни соодветно, за кои без ограничување на општоста можеме да претпоставиме $h_a\le h_b\le h_c$. Ако r е радиусот на впишаната кружница, тогаш

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c} \text{ и } ah_a=bh_b=ch_c=r(a+b+c).$$

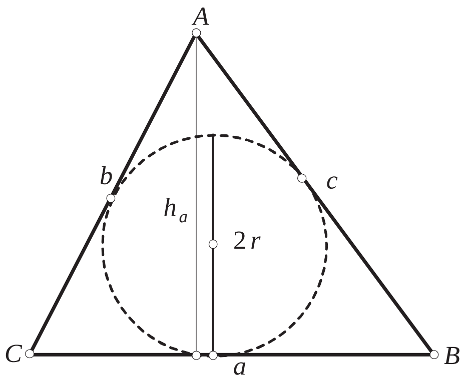
Навистина, од равенството

$$\frac{a+b+c}{2}=\frac{a}{2}+\frac{b}{2}+\frac{c}{2}$$

имаме

$$\frac{a+b+c}{2r}r=\frac{P}{h_a}+\frac{P}{h_b}+\frac{P}{hc}, \text{ т.е. } \frac{P}{r}=\frac{P}{h_a}+\frac{P}{h_b}+\frac{P}{hc}$$

од каде следува точноста на првото равенство. Останатите равенства се добиваат од формулате за плоштина на триаголник.



Сега,

$$ah_a=r(a+b+c)>r(a+a)=2ra,$$

т.е. $h_a>2r=2$ и $\frac{1}{r}\le\frac{3}{h_a}$, односно $h_a\le 3r=3$, од каде добиваме $h_a=3$. Од $\frac{1}{r}=\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}$, $h_a=3$, $r=1$ како и погоре добиваме $2<h_b\le 3$ т.е. $h_b=3$. Сега, од $h_a=h_b=3$, $r=1$ и равенството $\frac{1}{r}=\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}$ непосредно се добива $h_c=3$. Последното значи дека триаголникот ерамностран.

10. Во внатрешноста на рамностраниот $\triangle ABC$ избрана е произволна точка O. Нека M, N и P се проекциите на O врз страните a,b и c на триаголникот, соодветно. Докажи дека збирот $\overline{AP}+\overline{BM}+\overline{CN}$ не зависи од изборот на точката O.

Решение. Јасно е дека $\overline{OP}+\overline{OM}+\overline{ON}=h$ (Зошто?). Нека p е права низ A, нормална на AB, q е права низ C, нормална на AC, r е права низ B, нормална на CB и нека p и q се сечат во точка A', q и r се сечат во C', r и p се сечат во B'. Тогаш триаголникот $A'B'C'$ е рамностран.

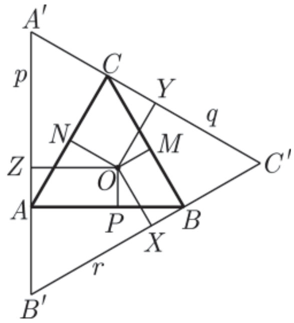
Нека X,Y и Z се проекциите на O врз $\overline{B'C'}$, $\overline{A'C'}$, $\overline{A'B'}$, соодветно. Тогаш

$$\overline{OX}+\overline{OY}+\overline{OZ}=h_{A'B'C'}.$$

Но $\overline{OX}=\overline{MB}$, $\overline{OY}=\overline{NC}$, $\overline{OZ}=\overline{AP}$, па затоа

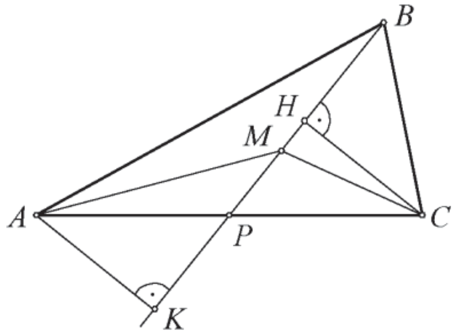
$$\overline{AP}+\overline{BM}+\overline{CN}=h_{A'B'C'},$$

односно збирот $\overline{AP}+\overline{BM}+\overline{CN}$ не зависи од изборот на точката O.



11. Точката M од внатрешноста на триаголникот ABC и таква што триаголниците ABM, BCM и ACM имаат еднакви плоштини. Докажи дека M е тежиштe на триаголникот.

Решение. Ќе покажеме дека ако триаголниците ABM и BCM имаат еднакви плоштини, тогаш точката M припаѓа на тежишната линија повлечена од темето B. Нека K и H се ортогоналните проекции од точките A и C на правата BM, и нека правата BM ја сече отсечката AC во точката P (види цртеж). Тогаш



$$\frac{\overline{BM}\cdot\overline{AK}}{2} = P_{\Delta ABM} = P_{\Delta BCM} = \frac{\overline{BM}\cdot\overline{CH}}{2},$$

па според тоа $\overline{AK} = \overline{CH}$.

Ако $AC \perp BM$, тогаш $K = H = P$, па $\overline{AP} = \overline{CP}$, т.е. $\overline{BP}$ е медијана.

Ако AC не е нормално на BP , тогаш јасно е дека триаголниците AKP и CHP се складни. Навистина, тие имаат еднакви агли и една иста страна. Според тоа $\overline{AP} = \overline{CP}$, т.е. $\overline{BP}$ е медијана.

12. Во $\triangle ABC$ збирот на висините повлечени од темињата A и B е еднаков на висината повлечена од темето C . Пресметај ја должината на страната AB ако $\overline{BC} = a$ и $\overline{AC} = b$.

Решение. Од условот на задачата имаме

$$h_a + h_b = h_c . \qquad (1)$$

Ако P е плоштина на триаголникот, тогаш $P = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}$, од каде добиваме

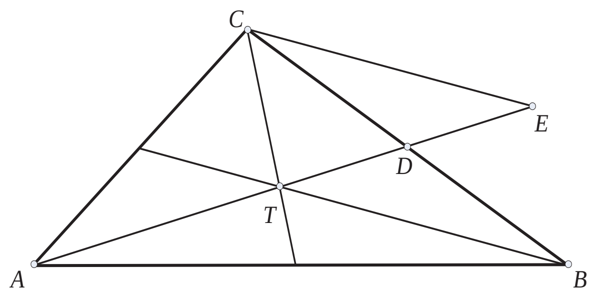
$$h_a = \frac{2P}{a}, \quad h_b = \frac{2P}{b}, \quad h_c = \frac{2P}{c} \qquad (2)$$

Ако равенствата (2) ги замениме во равенството (1) добиваме:

$$\frac{2P}{a} + \frac{2P}{b} = \frac{2P}{c}, \text{ т.е. } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c} .$$

Конечно, $c = \frac{ab}{a+b}$.

13. Најди го односот на плоштините на $\triangle ABC$ и триаголникот формиран од неговите тежишни линии.



Решение. Нека T е тежиштето на триаголникот ABC. На тежишната линија AD избираме точка E таква што $\overline{ED} = \overline{DT}$. Јасно, должините на страните на триаголникот CET се $\frac{2}{3}$ од должините на страните на триаголникот формиран од тежишните линии. Нека P_1 е плоштината на триаголникот формиран од тежишните линии. Тогаш имаме $P_1 = \frac{9}{4} P_{CET}$. Од друга страна, $\triangle CET$ се состои од два триаголници, $\triangle ABC$ од шест триаголници со плоштина еднаква на плоштината на $\triangle CDT$. Затоа, $P_{CET} = \frac{1}{3} P_{ABC}$ односно $\frac{P_1}{P_{ABC}} = \frac{3}{4}$.

14. Во рамнокрак $\triangle ABC$ ($\overline{AB} = \overline{BC}$) впишана е кружница k со радиус r . Висината спуштена врз основата на триаголникот и кружницата k се сечат во точка која ја дели висината во однос $1:2$ сметајќи од темето B . Пресметај ја плоштината на $\triangle ABC$.

Решение. Нека BL е висина во $\triangle ABC$, а K нејзина пресечна точка со кружницата k (види цртеж). Бидејќи $\overline{BK} : \overline{KL} = 1:2$ добиваме $\overline{KL} = 2\overline{BK}$. Од друга страна $\overline{KL} = 2r$, па според тоа $\overline{BK} = r$. Допирната точка на k со AB ќе ја означиме со M. Од сличноста на $\triangle LAB$ и $\triangle OMB$ и заради $\overline{BO} = 2r$, добиваме

$$\frac{\overline{BA}}{\overline{AL}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OM}} = \frac{2r}{r} = 2, \quad \overline{BA} = 2\overline{AL}.$$

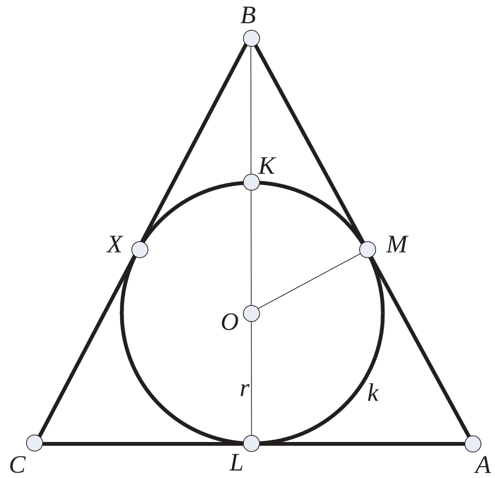
Воведуваме ознаки $\overline{BA} = b$, $\overline{CA} = a$, и добиваме

$$b = \overline{BA} = 2\overline{AL} = 2\tfrac{a}{2} = a,$$

односно $\triangle ABC$ е рамностран. Бидејќи

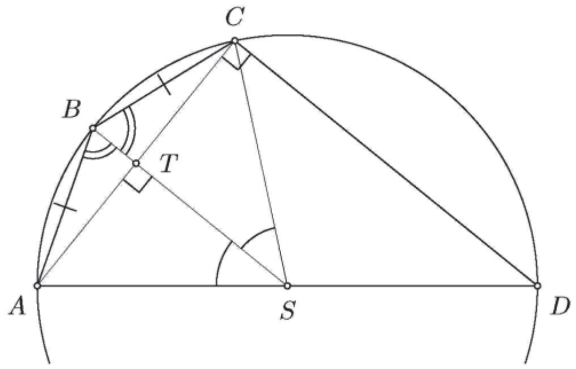
$$\overline{BM} = \sqrt{\overline{OB}^2 - \overline{OM}^2} = \sqrt{4r^2 - r^2} = r\sqrt{3},$$

страната на триаголникот е $a = 2r\sqrt{3}$. Според тоа, $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{3}r^2$.



15. Дадена е отсечка AD со должина 3. Нека B и C ($C \neq A$) се точки на кружницата со дијаметар AD такви што $\overline{AB} = \overline{BC} = 1$. Пресметај ја должината на отсечката CD.

Решение. Нека S е центарот на дадената кружница, а T е пресечната точка на отсечките SB и AC. Јасно, $\measuredangle ACD = 90^\circ$, како агол над дијаметар. Понатаму, $\measuredangle ASB = \measuredangle CSB$, па затоа $\measuredangle ABS = \measuredangle CBS$, што според признакот САС значи дека триаголниците ABT и CBT се складни. Посебно важи дека $\measuredangle ATB = \measuredangle CTB$, па затоа $\measuredangle ATB = 90^\circ$, т.е. $AT \perp BS$. Значи, AT е висина во триаголникот ASB. Нека h_S е висината во триаголникот ASB повлечена од темето B. Бидејќи $\overline{AB} = 1$, $\overline{AS} = \frac{3}{2}$, а триаголникот ASB е рамнокрак следува дека



$$h_S = \sqrt{(\tfrac{3}{2})^2 - (\tfrac{1}{2})^2} = \sqrt{2}.$$

Понатаму, $\frac{\overline{AT}\cdot\overline{BS}}{2} = \frac{\overline{AB}\cdot h_S}{2}$, па затоа $\overline{AT} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, т.е. $\overline{AC} = 2\overline{AT} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$. Конечно, од Питагоровата теорема следува

$$\overline{CD} = \sqrt{\overline{AD}^2 - \overline{AC}^2} = \frac{7}{3}.$$

16. За природните броеви a, b, c, d важи

$$a + b = c \text{ и } a + d = 2c.$$

Докажи, дека постои правоаголен триаголник со плоштина $abcd$ и чии должини на страни се изразени со природни броеви.

Решение. Имаме $a=c-b$ и $d=2c-a=b+c$. Според тоа,

$$abcd=(c-b)\cdot b\cdot c\cdot(b+c)=bc(c^2-b^2)=\tfrac{1}{2}(2bc)(c^2-b^2).$$

Бидејќи b и c се природни броеви и $c>b$ (a е природен број) добиваме дека $c^2-b^2>0$. Според тоа, $abcd$ е плоштина на правоаголен триаголник со катети со должини $2bc$ и c^2-b^2. Должината на хипотенузата е еднаква на

$$\sqrt{(2bc)^2+(c^2-b^2)^2}=\sqrt{c^4+2b^2c^2+c^4}=\sqrt{(b^2+c^2)^2}=b^2+c^2.$$

Јасно, бидејќи b и c се природни броеви и $c>b$, добиваме дека должините на сите три страни $2bc$, c^2-b^2 и c^2+b^2 се природни броеви.

17. Периметарот на правоаголен триаголник изнесува 18, а неговата плоштина е 9. Колкава е должината на хипотенузата на тој триаголник?

Решение. *Прв начин.* Нека a и b се должините на катетите, а c е должината на хипотенузата на дадениот триаголник. Од $a+b+c=18$ следува

$$(a+b)^2=(18-c)^2=18^2-36c+c^2.$$

Дадениот триаголник е правоаголен, па затоа $a^2+b^2=c$. Според тоа,

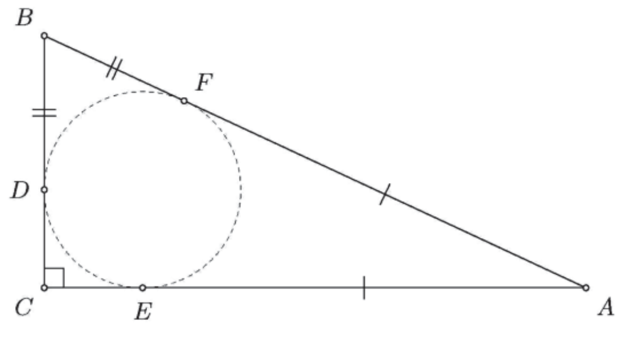
$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2=c^2+2ab,$$

па затоа

$$c^2+2ab=18^2-36c+c^2,\text{ т.е. } 2ab=18^2-36c.$$

Понатаму, плоштината на триаголникот е 9, па затоа $ab=18$ и ако замениме во последната равенка добиваме $36=18^2-36c$, од каде наоѓаме $c=8$.

Втор начин. Нека a и b се должините на катетите, а c е должината на хипотенузата на дадениот триаголник. За плоштината на триаголникот имаме $P=\frac{a+b+c}{2}r$, каде r е радиусот на впишаната кружница во триаголникот. Според тоа, $9=\frac{18}{2}r$, т.е. $r=1$.



Нека ABC е дадениот триаголник (цртеж десно). При дадените ознаки имаме

$$\begin{aligned}c&=\overline{AF}+\overline{FB}=\overline{AE}+\overline{BD}\\&=(a-r)+(b-r)\\&=a+b-2r,\end{aligned}$$

па затоа $r=\frac{a+b-c}{2}$. Бидејќи

$$a+b+c=18,\text{ т.е. } a+b=18-c,$$

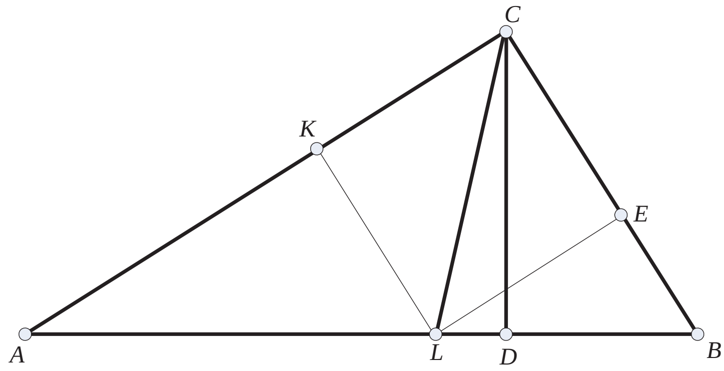
добиваме дека

$$c=a+b-2r=18-c-2r=16-c,$$

т.е. $c=8$.

18. Висината и симетралата повлечени од темето на правиот агол имаат должини 3 и 4 соодветно. Определи ја плоштината на триаголникот.

Решение. Триаголникот BCA е правоаголен со теме на правиот агол во точката C. Нека CD и CL се висина и симетрала на правиот агол (види цртеж).



Точките E и K се подножја на нормалите спуштени од точката L кон катетите BC и AC соодветно. Бидејќи $LE \parallel KC$, $LK \parallel CE$, $\measuredangle ECK = 90^\circ$ и $\measuredangle ECL = \measuredangle LCK = 45^\circ$ четириаголникот $LECK$ е квадрат во кој CL е негова дијагонала.

Триаголниците LEC и LKC ре рамнокраки и правоаголни во кои хипотенузата им е еднаква на $\overline{CL} = 4$. Затоа

$$\overline{LE} = \overline{LK} = \overline{CL}\sin 45^\circ = 4\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}\,.$$

Со стандардните ознаки за страните на триаголникот $\overline{BC} = a$ и $\overline{CA} = b$, добиваме

$$P_{ABC} = P_{ACL} + P_{LCB} = \tfrac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{KL} + \tfrac{1}{2}\overline{BC}\cdot\overline{LE} = \tfrac{1}{2}2\sqrt{2}\cdot a + \tfrac{1}{2}2\sqrt{2}\cdot b = \sqrt{2}(a+b)\,.$$

Од друга страна

$$P_{ABC} = \tfrac{1}{2}ab = \tfrac{1}{2}ch = \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}\cdot 3\,.$$

Од равенството $\frac{1}{2}ab = \sqrt{2}(a+b)$, добиваме $a+b = \frac{1}{2\sqrt{2}}ab$. Според тоа од равенството $ab = \sqrt{a^2+b^2}\cdot 3$ имаме

$$a^2b^2 = 9(a^2+b^2) = 9[(a+b)^2 - 2ab] = 9[(\tfrac{1}{2\sqrt{2}}ab)^2 - 2ab] = 9(\tfrac{a^2b^2}{8} - 2ab)\,.$$

Сега, од $a^2b^2 = 9(\frac{a^2b^2}{8} - 2ab)$ добиваме $ab = 144$, па затоа

$$P_{ABC} = \tfrac{ab}{2} = \tfrac{144}{2} = 72\,.$$

19. Даден е рамностран $\triangle ABC$ со должина на страна 1. На страните AB, BC и CA соодветно се избрани точки M, N и Q така што отсечките AN, BQ и CM го разделуваат $\triangle ABC$ на четири триаголници и три четириаголници. Секој триаголник го боиме со плава или жолта боја така што триаголниците со заедничко теме се обоени со различна боја. Ако плавиот и жолтиот дел имаат еднакви плоштини, пресметај ја вредноста на изразот $\overline{AM} + \overline{BN} + \overline{CQ}$.

Решение. Нека

$$\overline{AM} = m,\ \overline{BN} = n,\ \overline{CQ} = q,\ D \in AN \cap BQ,\ E \in CM \cap BQ,\ F \in AN \cap CM\,.$$

Ако F е меѓу A и D, D е меѓу B и E, E е меѓу C и F (направи цртеж), тогаш

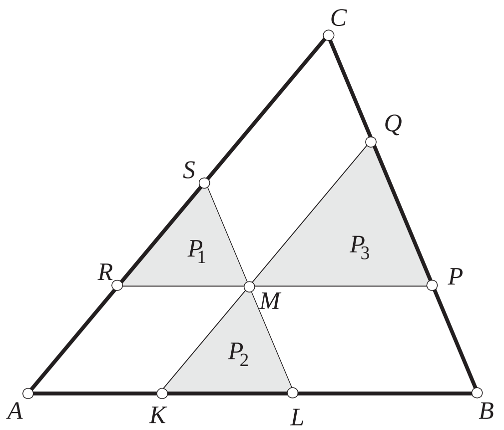
$$P_{ABC} = P_{ANB} + P_{CMA} + P_{BQC} - P_{AFM} - P_{BDN} - P_{CEQ} + P_{DEF} = (m+n+q)P_{ABC}\,,$$

Бидејќи плавата и жолтата плоштина се еднакви, добиваме $m+n+q = 1$. Случајот кога D е меѓу A и F се разгледува аналогно.

20. Низ произволна точка M во триаголникот ABC се повлечни прави паралелни со неговите страни. Тие го делат триаголникот на шест дела, од кои три се триаголници со плоштини P_1, P_2 и P_3. Изрази ја плоштината на $\triangle ABC$ преку плоштините P_1, P_2 и P_3.

Решение. Нека P е плоштина на триаголникот ABC. Секој од триаголниците RMS, KLM и MPQ е сличен со триаголникот ABC (види цртеж) затоа:

$$\frac{\sqrt{P_1}}{\sqrt{P}}=\frac{\overline{RM}}{\overline{AB}},\ \frac{\sqrt{P_2}}{\sqrt{P}}=\frac{\overline{KL}}{\overline{AB}},\ \frac{\sqrt{P_3}}{\sqrt{P}}=\frac{\overline{MP}}{\overline{AB}}.$$



Ако ги собереме овие равенства, имајќи предвид дека $\overline{RM}=\overline{AK}$, $\overline{MP}=\overline{LB}$, добиваме

$$\frac{\sqrt{P_1}+\sqrt{P_2}+\sqrt{P_3}}{\sqrt{P}}=\frac{\overline{AK}+\overline{KL}+\overline{LB}}{\overline{AB}}=1,$$

а оттука

$$P=(\sqrt{P_1}+\sqrt{P_2}+\sqrt{P_3})^2. \tag{1}$$

Забелешка. Задачата може да се реши и поинаку. Може да се пресметаат плоштините на паралелограмите, при што се добива

$$P_{AKMR}=2\sqrt{P_1P_2},\ P_{LBPM}=2\sqrt{P_2P_3},\quad P_{MQCS}=2\sqrt{P_1P_3}$$

а потоа од условот

$$P_{ABC}=P_1+P_2+P_3+2\sqrt{P_1P_2}+2\sqrt{P_2P_3}+2\sqrt{P_3P_1}.$$

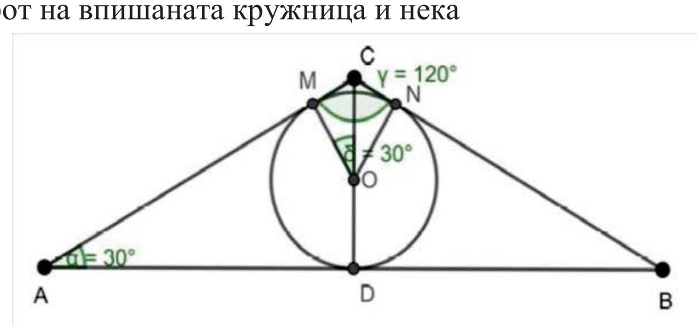
Од последното равенство се добива (1).

21. Радиусот на впишаната кружница во рамнокрак триаголник со агол при врвот 120° е $\sqrt{3}\,cm$. Пресметај ја плоштината на триаголникот.

Решение. Нека O е центарот на впишаната кружница и нека

$$\overline{OD}=\overline{OM}=\overline{ON}$$

се радиусите на впишаната кружница, каде што D, M и N се допирите со страните и нека $\overline{OC}=x$. Од правоаголниот $\triangle CMO$ следува дека $\overline{MC}=\frac{x}{2}$, и важи



$$x^2-\tfrac{x^2}{4}=r^2,\ x^2=\tfrac{4r^2}{3},\ x=\tfrac{2r}{\sqrt{3}}=2\,cm.$$

Значи, $\overline{CD}=x+r=2+\sqrt{3}\,cm$ и затоа $\overline{AC}=2\overline{CD}=4+2\sqrt{3}\,cm$. Правоаголните $\triangle ADC$ и $\triangle BDC$ се складни и се половинки од некој рамностран триаголник со страна $4+2\sqrt{3}\,cm$. Конечно, за бараната плоштина имаме

$$P=2\frac{(4+2\sqrt{3})^2}{8}\sqrt{3}=(2+\sqrt{3})^2\sqrt{3}=12+7\sqrt{3}\,cm\,.$$

22. Четири природни броеви a,b,c и d се такви што $a+b=c$ и $a+d=2c$. Докажи дека постои правоаголен триаголник со плоштина $abcd$ на кој должините на сите страни се природни броеви.

Решение. Ако ги изразиме a и d преку b и c имаме

$$a=c-b \text{ и } d=2c-a=b+c\,.$$

Тогаш

$$abcd=(c-d)b(b+c)c=bc(c^2-b^2)=\tfrac{1}{2}(2bc)(c^2-b^2)$$

Бидејќи b и c се природни броеви и $c>b$ следува $c^2-b^2>0$, па затоа $abcd$ е плоштина на правоаголен триаголник со должини на катети $2bc$ и c^2-b^2. Должината на хипотенузата е

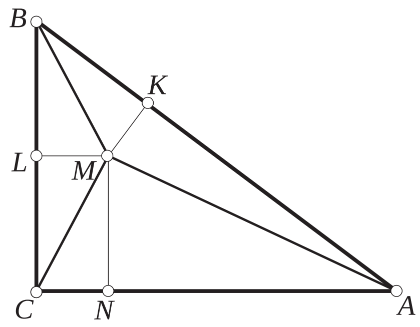
$$\sqrt{(2bc)^2+(c^2-b^2)^2}=\sqrt{c^4+b^4+2b^2c^2}=b^2+c^2\in\mathbb{N}\,.$$

23. Страните на еден триаголник имаат должини $a=3$, $b=4$ и $c=5$. Дали постои точка во внатрешноста на триаголникот која е на растојание помало од 1 од секоја од страните на триаголникот.

Решение. Нека ABC е триаголник во кој $\overline{BC}=a=3$, $\overline{AC}=b=4$ и $\overline{AB}=c=5$ се должините на страните. Заради равенството

$$a^2+b^2=3^2+4^2=5^2=c^2\,,$$

според обратната Питагорова теорема триаголникот е правоаголен.



Нека M е точка од внатрешноста на триаголникот која е на растојание помало од 1 од секоја страна на триаголникот ABC. Нека точките K,L и N се подножја на нормалите повлечени од точката M кон страните AB, BC и CA соодветно (види цртеж). Тогаш отсечките MK, ML и MN се висини во триаголниците AMB, BMC и CMA соодветно. Притоа

$$P_{ABC}=P_{AMB}+P_{BMC}+P_{CMA}\,. \qquad (1)$$

Ако $\overline{MK}=x, \overline{ML}=y$ и $\overline{MN}=z$, тогаш според претпоставката на задачата $x,y,z<1$. Од друга страна

$$P_{BMC}+P_{CMA}+P_{AMB}=\frac{xa}{2}+\frac{yb}{2}+\frac{zc}{2}<\frac{a}{2}+\frac{b}{2}+\frac{c}{2}=\frac{3}{2}+\frac{4}{2}+\frac{5}{2}=\frac{12}{2}=6=P_{ABC}\,,$$

што противречи на (1). Конечно, од добиената противречност следува дека таква точка M не постои.

24. Во остроаголниот $\triangle ABC$ отсечките $AA_1\ (A_1\in BC)$, $BB_1\ (B_1\in AC)$ се висини, а точката M е средина на страната AB. Триаголникот A_1B_1M е правоаголен и има плоштина еднаква на 2.

а) Определи ја должината на страната AB и големината на $\measuredangle ACB$.

б) Определи ја должината на радиусот на кружницата опишана околу $\triangle A_1B_1C$.

Решение. а) Бидејќи A_1M и B_1M се тежишни линии кон хипотенузата AB во $\triangle AA_1B$ и $\triangle BB_1A$, добиваме $\overline{A_1M} = \frac{\overline{AB}}{2} = \overline{B_1M}$ (направи цртеж). Сега, од условот следува дека $\measuredangle A_1MB_1 = 90^\circ$. Освен тоа,

$$\measuredangle AB_1M = \measuredangle B_1AM = \alpha \text{ и } \measuredangle BA_1M = \measuredangle A_1BM = \beta .$$

Имаме $2 = P_{A_1B_1M} = \frac{\overline{A_1M}\cdot\overline{B_1M}}{2} = \frac{\overline{AB}^2}{8}$ и затоа $\overline{AB} = 4$. Освен тоа,

$$\measuredangle AMB_1 = 180^\circ - 2\alpha \text{ и } \measuredangle BMA_1 = 180^\circ - 2\beta ,$$

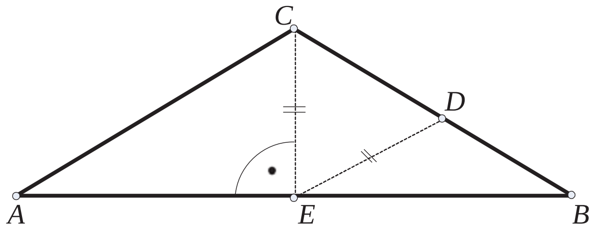
па затоа $90^\circ = \measuredangle A_1MB_1 = 2\alpha + 2\beta - 180^\circ$, т.е. $\alpha + \beta = 135^\circ$ и затоа $\gamma = 45^\circ$.

б) Нека O и R се соодветно центарот и радиусот на опишаната кружнца околу $\triangle A_1B_1C$. Тогаш $\measuredangle A_1OB_1 = 2\measuredangle A_1CB_1 = 90^\circ$. Значи, $\triangle A_1OB_1$ и $\triangle A_1MB_1$ се рамнокраки правоаголни со заедничка хипотенуза A_1B_1. Според тоа, овие триаголници се складни, па затоа $R = \overline{A_1O} = \overline{A_1M} = \frac{\overline{AB}}{2} = 2$.

25. Даден е рамнокрак триаголник со основа $6\ cm$. Да се пресмета плоштината на триаголникот, ако се знае дека средините на краците и врвот лежат на кружница со центар во средината на основата.

Решение. Нека AB основата на рамнокракиот триаголник ABC и нека E и D се средините на AB и BC соодветно (види цртеж). Тогаш $\overline{CE} = \overline{DE}$ и како DE е средна линија добиваме

$$\overline{DE} = \tfrac{1}{2}\overline{AC} = \tfrac{1}{2}\overline{BC} = \overline{CD} .$$

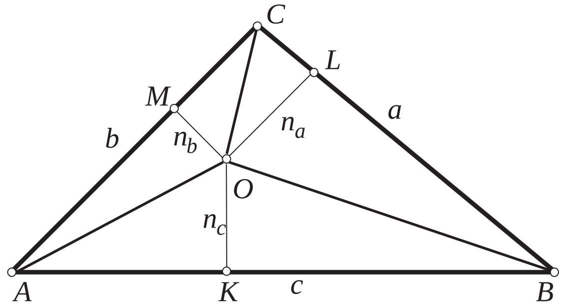


Според тоа, $\triangle CDE$ е рамностран. Значи, $\measuredangle ECD = \measuredangle ACE = 60^\circ$, $\measuredangle EAC = 30^\circ$, па затоа $\overline{CE} = \overline{AE}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}\ cm$.

Следствено, $P = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{CE}}{2} = 3\sqrt{3}\ cm^2$.

26. Од точката O од внатрешноста на $\triangle ABC$ кон неговите страни се спуштени нормали n_a, n_b, n_c. Ако h_a, h_b, h_c се висини на $\triangle ABC$, тогаш $\frac{n_a}{h_a} + \frac{n_b}{h_b} + \frac{n_c}{h_c} = 1$. Докажи!

Решение. Триаголникот ABC со точката O го разбиваме на три триаголници ABO, BCO и CAO (види цртеж). Ако P е плоштина на $\triangle ABC$ а P_1, P_2 и P_3 се плоштини на триаголниците ABO, BCO и CAO соодветно, тогаш



$$P = P_1 + P_2 + P_3 . \qquad (1)$$

Бидејќи

$$\overline{OK} = n_c , \quad \overline{OL} = n_a \text{ и } \overline{OM} = n_b$$

се должини на висините спуштени врз страните AB, BC и CA во триаголниците ABO, BCO и CAO соодветно, точни се равенствата

$$P_1 = \frac{\overline{AB} \cdot n_c}{2} = \frac{c \cdot n_c}{2} , \quad P_2 = \frac{\overline{BC} \cdot n_a}{2} = \frac{a \cdot n_a}{2} , \quad P_3 = \frac{\overline{CA} \cdot n_b}{2} = \frac{b \cdot n_b}{2} \qquad (2)$$

Ако h_a, h_b, h_c се висините во $\triangle ABC$, тогаш

$$P = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2} . \qquad (3)$$

Ако равенствата од (2) ги замениме во (1) добиваме

$$P = \frac{c \cdot n_c}{2} + \frac{a \cdot n_a}{2} + \frac{b \cdot n_b}{2} ,$$

т.е.

$$\frac{c \cdot n_c}{2P} + \frac{a \cdot n_a}{2P} + \frac{b \cdot n_b}{2P} = 1 . \qquad (4)$$

Од равенствата (3) имаме $ah_a = bh_b = ch_c = 2P$, па ако замениме во последното равенство, добиваме:

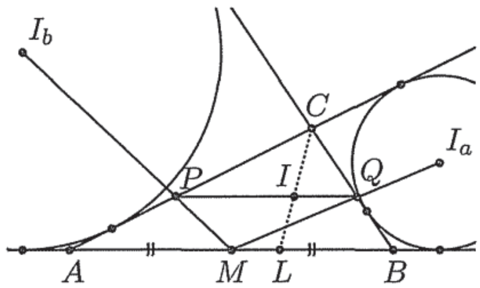
$$\frac{c \cdot n_c}{c \cdot h_c} + \frac{a \cdot n_a}{a \cdot h_a} + \frac{b \cdot n_b}{b \cdot h_b} = 1 , \text{ т.е. } \frac{n_a}{h_a} + \frac{n_b}{h_b} + \frac{n_c}{h_c} = 1 .$$

27. Даден е $\triangle ABC$ со центри I_a и I_b на припишаните кружници кон страните BC и AC, соодветно. Ако M е средината на страната AB и правите MI_a и MI_b ги сечат страните BC и AC соодветно во точките Q и P, докажи дека правата PQ е паралелна на AB и минува низ центарот I на впишаната кружница во $\triangle ABC$

Решение. Ги користиме стандардните ознаки за $\triangle ABC$. Имаме

$$\frac{\overline{CP}}{\overline{PA}} = \frac{P_{CMI_b}}{P_{AMI_b}} = \frac{\frac{1}{2} P_{CBI_b} + \frac{1}{2} P_{CAI_b}}{\frac{1}{2} P_{ABI_b}} = \frac{r_b a + r_b b}{r_b c} = \frac{a+b}{c} .$$

Аналогно, $\frac{\overline{CQ}}{\overline{QB}} = \frac{a+b}{c}$, т.е. $\frac{\overline{CP}}{\overline{PA}} = \frac{\overline{CQ}}{\overline{QB}}$, што значи дека $PQ \parallel AB$. Од друга страна ако правата CI ја сече страната AB во точката L, тогаш



$$\frac{\overline{CI}}{\overline{IL}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{BL}} = \frac{a}{\frac{ac}{a+b}} = \frac{a+b}{c} ,$$

што значи дека $I \in PQ$.

28. Даден е триаголник ABC со страни $\overline{AB} = a$, $\overline{AC} = b$ и $\overline{AB} = c$.

Кој услов треба да го задоволуваат страните a, b, c, за тежишните линии, повлечени од темињата B и C, да се заемно нормални?

Решение. *Прв начин.* Имајќи предвид дека:

$\overline{BT} = \frac{2}{3}t_b$, $\overline{TB_1} = \frac{1}{3}t_b$, $\overline{CT} = \frac{2}{3}t_c$, и $\overline{TC_1} = \frac{1}{2}t_c$, $\overline{B_1T_1} = \frac{a}{2}$,

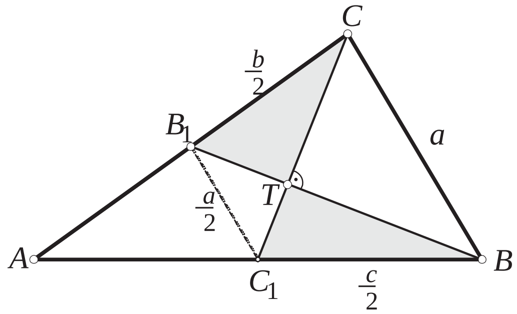
тогаш од правоаголните триаголници B_1TC и C_1BT (види цртеж) имаме:

$$(\tfrac{1}{3}t_b)^2 + (\tfrac{2}{3}t_c)^2 = (\tfrac{b}{2})^2 \quad \text{т.е.} \quad t_b^2 + 4t_c^2 = \tfrac{9}{4}b^2$$

$$(\tfrac{2}{3}t_b)^2 + (\tfrac{1}{3}t_c)^2 = (\tfrac{c}{2})^2 \quad \text{т.е.} \quad 4t_b^2 + t_c^2 = \tfrac{9}{4}c^2$$

Ако ги собереме овие две равенства, добиваме:

$$5(t_b^2 + t_c^2) = \tfrac{9}{4}(b^2 + c^2) \qquad (1)$$



Од правоаголниот $\triangle C_1TB_1$ наоѓаме:

$$(\tfrac{1}{3}t_b)^2 + (\tfrac{1}{3}t_c)^2 = (\tfrac{a}{2})^2,$$

т.е.

$$t_b^2 + t_c^2 = \tfrac{9}{4}a^2 \qquad (2)$$

Од (1) и (2) следува $5\frac{9}{4}a^2 = \frac{9}{4}(b^2 + c^2)$, т.е. $5a^2 = b^2 + c^2$.

Втор начин. Од правоаголниот триаголник BCT (види цртеж) имаме:

$$a^2 = (\tfrac{2}{3}t_b)^2 + (\tfrac{2}{3}t_c)^2 = \tfrac{4}{9}(t_b^2 + t_c^2)$$

Користејќи ги формулите:

$$t_b^2 = \tfrac{a^2+c^2}{2} - \tfrac{b^2}{4}, \quad t_c^2 = \tfrac{a^2+b^2}{2} - \tfrac{c^2}{4}$$

наоѓаме

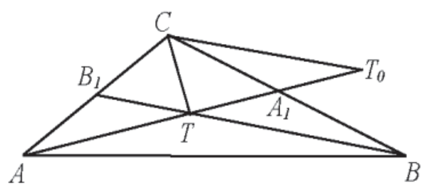
$$4(t_b^2 + t_c^2) = 2a^2 + 2c^2 - b^2 + 2a^2 + b^2 - c^2 = 4a^2 + b^2 + c^2.$$

Тогаш:

$$a^2 = \tfrac{1}{9}(4a^2 + b^2 + c^2), \text{ т.е. } 5a^2 = b^2 + c^2.$$

29. Нека t_a и t_b се тежишните линии во $\triangle ABC$ повлечни кон страните BC и CA соодветно, а P е плоштината на $\triangle ABC$. Докажи дека $t_a t_b \geq \frac{3}{2}P$. Кога важи знак за равенство?

Решение. Нека A_1 е средина на страната BC, а T_0 е симетричната точка на тежиштето T на $\triangle ABC$, во однос на A_1. Тогаш, од складноста на $\triangle TBA_1$ и $\triangle T_0CA_1$, должините на страните на $\triangle TT_0C$ се $\overline{TT_0} = \frac{2}{3}t_a$, $\overline{T_0C} = \frac{2}{3}t_b$ и $\overline{CT} = \frac{2}{3}t_c$, а неговата плоштина е



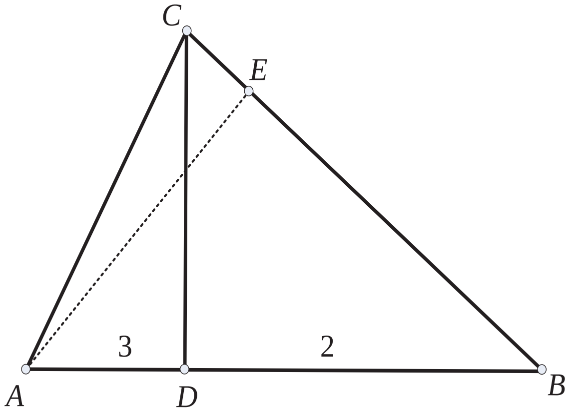
$$P_{TT_0C} = P_{TA_1C} + P_{A_1T_0C} = P_{TA_1C} + P_{TA_1B} = P_{TBC} = \tfrac{1}{3}P,$$

затоа што висината во $\triangle TBC$ која одговара на страната BC е три пати помала од соодветната висина во $\triangle ABC$. Бидејќи плоштината на еден триаголник не е поголема од полупроизводот на произволни две негови страни, од $\triangle ABT$ се добива $\frac{1}{3}P \leq \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}t_a\cdot\frac{2}{3}t_b$, односно $t_a t_b \geq \frac{3}{2}P$, што требаше да се докаже. Знак за равенство важи ако и само ако тежишните линии t_a и t_b се меѓусебно нормални, односно ако за страните на триаголникот важи $a^2+b^2=5c^2$.

30. Во остроаголен $\triangle ABC$ висината од врвот C ја дели спротивната страна на два дела AD и DB со должини $\overline{AD}=3\,cm$ и $\overline{DB}=2\,cm$. Аголот при темето A е еднаков на 60°. Определи ги должините на страните на $\triangle ABC$ и должината на висината на $\triangle ABC$ повлечена од темето A.

Решение. Јасно, $\overline{AB}=5\,cm$. Бидејќи аголот кај темето A е еднаков ан 60° и бидејќи $\triangle ADC$ е правоаголен имаме дека $\measuredangle DCA=30^\circ$, од каде следува $\overline{AC}=2\overline{AD}=6\,cm$. Од Питагоровата теорема $\triangle ADC$ имаме

$$\overline{DC}=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{AD}^2}=\sqrt{6^2-3^2}=5\,cm$$



Од Питагоровата теорема за $\triangle BDC$ имаме

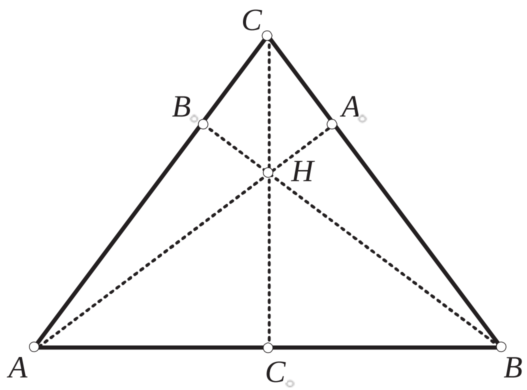
$$\overline{BC}=\sqrt{\overline{DC}^2+\overline{BD}^2}$$
$$=\sqrt{5^2+4^2}=\sqrt{29}\ cm.$$

Следно, за плоштината на $\triangle ABC$ имаме $P_{ABC}=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{CD}}{2}=\frac{5\cdot 5}{2}=\frac{25}{2}$. Од друга страна $P_{ABC}=\frac{\overline{BC}\cdot\overline{AE}}{2}$, па затоа $\frac{25}{2}=\frac{\sqrt{29}\cdot\overline{AE}}{2}$. Конечно, должината на висината повлечена од темето A е $\overline{AE}=\frac{25}{\sqrt{29}}cm$.

31. Во $\triangle ABC$ се повлечени висините AA_0, BB_0 и CC_0. Нека H е ортоцентарот на $\triangle ABC$. Ако $\overline{AH}:\overline{HA_0}=1:1$ и $\overline{BH}:\overline{HB_0}=2:1$, определи го односот $\overline{CH}:\overline{HC_0}$.

Решение. Да забележиме дека

$$\frac{P_{\triangle ABC}}{P_{\triangle BCH}}=\frac{\frac{\overline{BC}\cdot\overline{AA_0}}{2}}{\frac{\overline{BC}\cdot\overline{HA_0}}{2}}=\frac{\overline{AA_0}}{\overline{HA_0}}=2,$$



односно $P_{\triangle BCH}=\frac{1}{2}P_{\triangle ABC}$. Аналогно

$$\frac{P_{\triangle ABC}}{P_{\triangle ACH}}=\frac{\overline{BB_0}}{\overline{HB_0}}=3,$$

односно $P_{\triangle ACH}=\frac{1}{3}P_{\triangle ABC}$. Да забележиме дека

$$P_{\triangle ABC}=P_{\triangle BCH}+P_{\triangle ACH}+P_{\triangle ABH},$$

од што добиваме $P_{\triangle ABH}=\frac{1}{6}P_{\triangle ABC}$. Од ова имаме $6 = \frac{P_{\triangle ABC}}{P_{\triangle ABH}} = \frac{\overline{CC_0}}{\overline{HC_0}}$, односно $\overline{CH} : \overline{HC_0} = 5:1$.

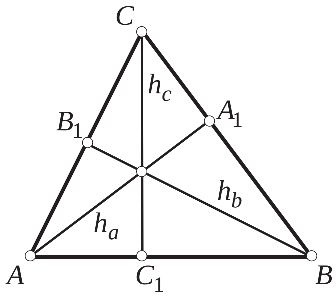
32. Должините на две страни во еден триаголник се 6 и 3, а полузбирот на од висините спуштени врз тие страни е еднаков на должината на третата висина.

Колку е должината на третата страна на триаголникот?

Решение. Нека $\triangle ABC$ е таков што $\overline{AB} = 6$ и $\overline{BC} = 3$, т.е. $c = 6$ и $a = 3$, при што $\frac{h_c + h_a}{2} = h_b$.

Ако BC ја избереме за основа на $\triangle ABC$, тогаш $P = \frac{1}{2} 3h_a$. Ако пак за основа ја избереме страната AB, тогаш $P = \frac{1}{2} 6h_c$. Според тоа

$$\tfrac{1}{2} 6h_c = \tfrac{1}{2} 3h_a \text{, т.е. } h_a = 2h_c .$$



Но тогаш $2h_b = h_a + h_c = 2h_c + h_c = 3h_c$, т.е. $h_b = \frac{3}{2} h_c$.

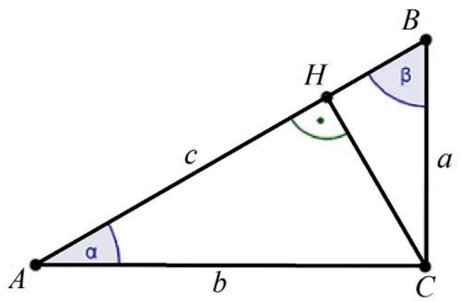
Ако $\overline{AC} = b$ ја избереме за основа на траиголникот, тогаш

$$P = \tfrac{1}{2} bh_b = \tfrac{1}{2} \tfrac{3}{2} h_c b = \tfrac{3}{4} bh_c .$$

Сега од равенството $\frac{3}{4} bh_c = \frac{1}{2} 6h_c$, добиваме $b = 4$.

33. Даден е правоаголен $\triangle ABC$ со прав агол во темето C. Нека H е подножјето на висината повлечена од темето C на страната AB. Докажи, дека збирот на радиусите на впишаните кружници во $\triangle ABC$, $\triangle BCH$ и $\triangle ACH$ е еднаков на $\overline{CH}$.

Решение. За елементите на $\triangle ABC$ ќе ги користиме стандардните ознаки. Нека $s = \frac{a+b+c}{2}$. Бидејќи AH е висина во $\triangle ABC$ имаме $\measuredangle AHC = 90^\circ$ па затоа $\triangle AHC \sim \triangle ABC \sim \triangle BCH$. Нека r, r_1, r_2 се радиусите на впишаните кружници во $\triangle ABC$, $\triangle ACH$, $\triangle BCH$. Од сличностите на триаголниците следува $\frac{r}{r_1} = \frac{c}{b}, \frac{r}{r_2} = \frac{c}{a}$, па затоа $r_1 = r\frac{b}{c}$, $r_2 = r\frac{a}{c}$.



Понатаму, од $r = \frac{P}{s} = \frac{\frac{ab}{2}}{\frac{a+b+c}{2}} = \frac{ab}{a+b+c}$, добиваме $r_1 = \frac{ab}{a+b+c} \cdot \frac{b}{c}$, $r_2 = \frac{ab}{a+b+c} \cdot \frac{a}{c}$. Според тоа,

$$\begin{aligned} r + r_1 + r_2 &= \frac{ab}{a+b+c} + \frac{ab}{a+b+c} \cdot \frac{b}{c} + \frac{ab}{a+b+c} \cdot \frac{a}{c} \\ &= \frac{ab}{a+b+c}\left(1 + \frac{b}{c} + \frac{a}{c}\right) = \frac{ab}{a+b+c} \cdot \frac{a+b+c}{c} = \frac{ab}{c}. \end{aligned}$$

Од друга страна, од $\triangle AHC \sim \triangle ABC$ следува $\frac{b}{c} = \frac{\overline{CH}}{a}$, т.е. $\overline{CH} = \frac{ab}{c}$. Значи, $r + r_1 + r_2 = \overline{CH}$, што и требаше да се докаже.

34. Во внатрешноста на $\triangle ABC$ се избрани две точки M и N. Растојанијата на точките M и N до страните AB, BC, CA се $1,15,3$ и $4,11,5$ соодветно. Определи го радиусот на впишаната кружница во $\triangle ABC$.

Решение. Нека должините на страните на триаголникот се a,b,c. Ќе ги разгледаме триаголниците ANB, BNC и CNA. За нивните плоштини се исполнети равенствата:

$$2P_{ANB} = 4c, \qquad 2P_{BNC} = 11a, \; 2P_{CNA} = 5b,$$

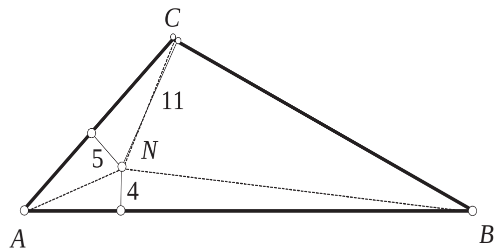
$$2P_{ABC} = 2P_{ANB} + 2P_{BNC} + 2P_{CNA} = 4c + 11a + 5b. \qquad (1)$$

Потполно аналогно,

$$2P_{ABC} = 2P_{AMB} + 2P_{BMC} + 2P_{CMA} = c + 15a + 3b \qquad (2)$$

Ако (1) го помножиме со 2 и го одземеме (2), добиваме $2P_{ABC} = 7c + 7a + 7b$, т.е.

$$\frac{2P_{ABC}}{a+b+c} = 7. \qquad (3)$$



Од друга страна, знаеме дека во секој триаголник ABC, ако r е радиусот на впишаната кружница, а a,b,c се должини на страните на триаголникот, тогаш

$$r = \frac{2P_{ABC}}{a+b+c}.$$

Од последното равенство и (3), добиваме $r = 7$.

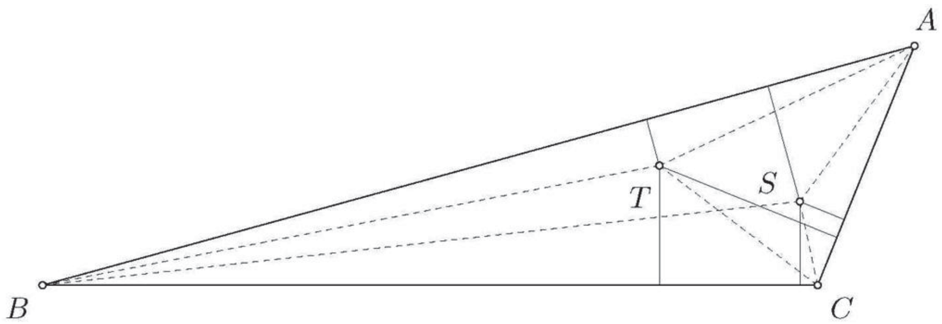
35. Во внатрешноста на $\triangle ABC$ земени се точки S и T такви што растојанијата на точката S до правите AB, BC и CA се 19, 7 и 4, соодветно, а растојанијата на точката T до правите AB, BC и CA се 4, 10 и 16, соодветно. Определи го радиусот на впишаната кружница во $\triangle ABC$.

Решение. Нека $\overline{BC} = a, \overline{CA} = b, \overline{AB} = c, s = \frac{a+b+c}{2}$, P е плоштината на триаголникот и r е радиусот на впишаната кружница. Триаголникот ABC да го поделиме на три помали триаголници така што точката S ја поврзуваме со темињата A, B и C (види цртеж). Ако ги собереме плоштините на триаголниците ABS, BCS и CAS, ја добиваме плоштината на $\triangle ABC$, па затоа важи

$$2P = 10c + 7a + 4b.$$

Аналогно, разгледувајќи ја точката T добиваме

$$2P = 4c + 10a + 16b.$$

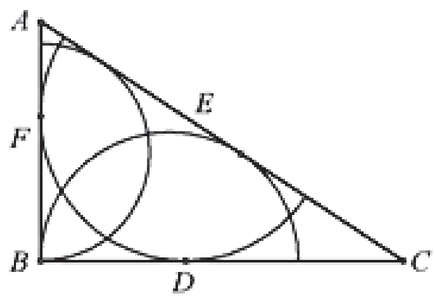


Ако првото равенство го помножиме со 2 и го собереме со второто добиваме

$$6P = 24(a+b+c) = 48s, \text{ т.е. } P = 8s.$$

Но, $P = rs$, па затоа $r = 8$.

36. Триаголник ABC е правоголен, со прав агол во темето B . Повлечени се три полукружници s_1, s_2, s_3 , такви што: дијаметарот на полукружницата s_1 лежи на хипотенузата AC и ги допира двете катети, дијаметрите на кружниците s_2 и s_3 лежат на катетите AB и BC соодветно, едниот крај им е во темето B и ја допираат хипотенузата AC . Ако r_b, r_c, r_a се радиусите на кружниците s_1, s_2, s_3 соодветно а r е радиусот на впишаната кружница во триаголникот ABC , тогаш $\frac{2}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}$. Докажи!



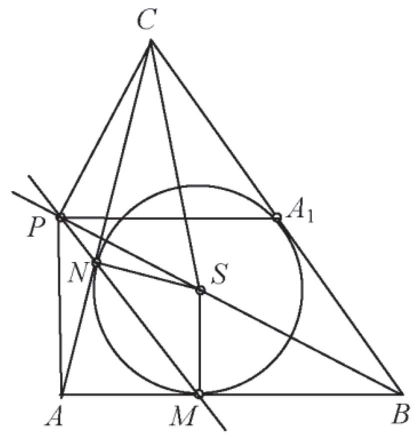
Решение. Ако D е центар на полукружницата s_3, тогаш $\triangle ABD$ има основа $\overline{AB} = c$ и висина r_a па неговата плоштина е $P_{\Delta ABD} = \frac{1}{2} c r_a$. Понатаму, $\triangle ACD$ има основа $\overline{AC} = b$ и висина r_a , па според тоа $P_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} b r_a$. Ако P е плоштина на $\triangle ABC$, тогаш $P = \frac{1}{2} r_a (b + c)$, односно $\frac{1}{r_a} = \frac{b+c}{2P}$.

Слично, ако E е центар на полукружницата s_1, тогаш триаголникот BEA има основа $\overline{BA} = c$ и висина r_b па според тоа, неговата плоштина е $P_{\triangle BEA} = \frac{1}{2} r_b c$ Триаголникот BEC има основа $\overline{BC} = a$ и висина r_b па според тоа $P_{\Delta BEC} = \frac{1}{2} a r_b$. Значи $P = \frac{1}{2} r_b (a + c)$, односно $\frac{1}{r_b} = \frac{a+c}{2P}$.

Со потполно аналогни разгледувања се добива дека $\frac{1}{r_c} = \frac{a+b}{2P}$.

Ако земеме во предвид дека $P = \frac{1}{2} r(a + b + c)$ каде r е радиусот на впишаната кружница, добиваме дека $\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{a+b}{2P} + \frac{b+c}{2P} + \frac{c+a}{2P} = \frac{2(a+b+c)}{2P} = \frac{2}{r}$.

37. Впишаната кружница во $\triangle ABC$ ги допира страните AB и AC во точките M и N , соодветно. Нека точката P е пресек на симетралата на аголот ABC и правата MN . Докажи дека $P_{\triangle ABC} = 2P_{\triangle ABP}$.



Решение. Нека S е центар на впишаната кружница, A_1 средината на страната BC , а α, β, γ се внатрешните агли на $\triangle ABC$ кај темињата A, B, C соодветно. Бидејќи, $\overline{AM} = \overline{AN}$, следува дека $\measuredangle AMN = 90° - \frac{\alpha}{2}$. Точките B , S и P се колинеарни, па добиваме дека

$$\measuredangle NPS = 180° - \measuredangle PBM - \measuredangle PMB$$
$$= 180° - \frac{\beta}{2} - (90° + \frac{\alpha}{2}) = \frac{\gamma}{2} = \measuredangle NCS$$

Значи, точките S, C, P и N припаѓаат на една кружница, од каде добиваме дека
$$\measuredangle CBP = \measuredangle CPS = \measuredangle CNS = 90^\circ .$$
Според тоа, PA_1 е тежишна линија во $\triangle PBC$, па следува $\measuredangle A_1PB = \measuredangle A_1BP = \measuredangle ABP$, односно дека $AB \parallel A_1P$, што значи дека P припаѓа на средната линија на $\triangle ABC$. Сега $\triangle ABP$ има заедничка страна со $\triangle ABC$, а соодветната висина му е, според претходно покажаното, два пати помала, од каде следува тврдењето на задачата.

38. Низ точката A се повлечени две прави кои ја допираат кружницата k со радиус R во точките B и C, така што $\triangle ABC$ е рамностран. Определи ја плоштината на $\triangle ABC$.

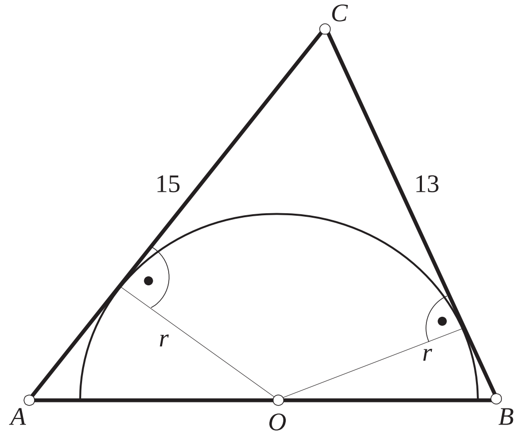
Решение. Нека O е центар на кружницата k. Тогаш $\triangle BOC$ е рамнокрак со основа BC и крак со должина R. Нека S е подножје на висината спуштена од O кон страната BC во $\triangle BOC$ (направи цртеж).

Да забележиме дека $\measuredangle OBA = \measuredangle OCA = 90^\circ$ (како агли меѓу тетива и тангента во кружница). Според тоа $\measuredangle BOC = 120^\circ$. Сега е јасно дека $\measuredangle COS = \measuredangle BOS = 60^\circ$ од каде добиваме дека $\overline{OS} = \frac{1}{2}\overline{OB} = \frac{1}{2}\overline{OC} = \frac{R}{2}$. Понатаму, од Питагорина теорема јасно е дека $\overline{BS} = \overline{CS} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$, па според тоа $a = \overline{BC} = 2\overline{BS} = 2\frac{R\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3}$. Значи, страната на рамностраниот триаголник ABC е $a = R\sqrt{3}$, па неговата плоштина е
$$P_{\triangle ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{R^2 3\sqrt{3}}{4} .$$

39. Колку триаголници има, кај кои мерниот број на периметарот е еднаков на мерниот број на плоштината на тој триаголник?

Решение. Ако ABC е произволен триаголник со периметар S и плоштина P, тогаш сличен на него триаголник, со коефициент на сличноста k, ќе има периметар kS и плоштина k^2P. Равенството $kS = k^2P$ е исполнето за $k = S / P$. На тој начин, меѓу триаголниците, слични на триаголникот ABC, може секогаш да се најде триаголник, кој ќе го задоволува условот на задачата. Следствено, такви триаголници има бесконечно многу. Така, на пример, триаголник со страни 13, 14 и 15 има плоштина 84 и периметар 42. Нему сличниот триаголник со ($k = \frac{1}{2}$) страни $\frac{13}{2}, 7, \frac{15}{2}$ ќе има и плоштина и периметар еднакви на 21. Провери!

40. Страните на триаголникот ABC се: $\overline{AB} = 14\ cm$, $\overline{BC} = 13\ cm$ и $\overline{CA} = 15\ cm$. Пресметај го радиусот на кружницата што ги допира страните AC и BC, а центарот и лежи на страната AB.



Решение. Прво, со Хероновата формула ќе ја пресметаме плоштината на триаголникот ABC. Од
$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} ,$$

каде што $2s = a+b+c$. Имаме

$$P = \sqrt{21\cdot 8\cdot 6\cdot 7} = \sqrt{7\cdot 3\cdot 8\cdot 2\cdot 3\cdot 7} = 84 .$$

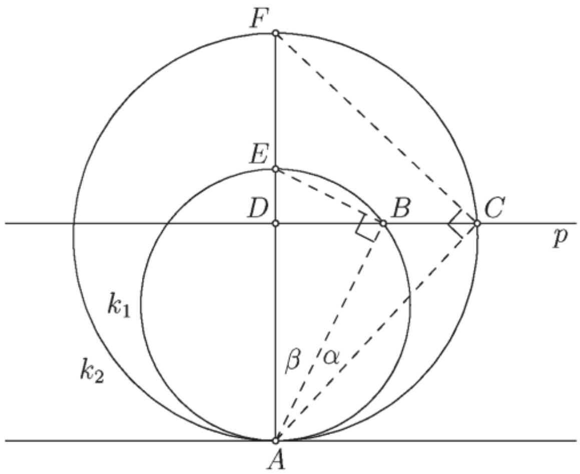
Од друга страна, за плоштината на триаголникот ABC добиваме

$$P = \tfrac{1}{2}\overline{AC}\cdot r + \tfrac{1}{2}\overline{BC}\cdot r = \tfrac{r}{2}(\overline{AC}+\overline{BC}) ,$$

или $84 = \frac{r}{2}(15+13)$ од каде што добиваме $r = 6\,cm$.

41. Кружниците k_1 и k_2 со радиуси r и R соодветно ($r < R$) внатрешно се допираат во точката A . Нека p е права паралелна со нивната заедничка тангента, B е едната пресечна точка на p и k_1 и C е пресечната точка на p и k_2 така што B и C се наоѓаат на иста страна на правата која ги поврзува центрите на кружниците. Докажи, дека радиусот на кружницата опишана околу $\triangle ABC$ не зависи од правата p и изрази го овој радиус со помош на r и R .

Решение. При ознаки како на цртежот десно, ако ρ е радиусот на опишаната кружница околу $\triangle ABC$, а со x го означиме растојанието меѓу правата p и тангентата на дадената кружница во точката A , добиваме



$$\rho = \frac{\overline{BC}\cdot\overline{CA}\cdot\overline{AB}}{4P_{ABC}} = \frac{\overline{BC}\cdot\overline{CA}\cdot\overline{AB}}{2\overline{BC}\cdot x} = \frac{\overline{CA}\cdot\overline{AB}}{2x} .$$

Триаголниците ABE и ACF се правоаголни со хипотенузи AE и AF , соодветно, па затоа од Евклидовата теорема следува

$$\overline{AB} = \sqrt{2rx} \text{ и } \overline{CA} = \sqrt{2Rx} .$$

Конечно, со замена во равенството (1) добиваме

$$\rho = \frac{\overline{CA}\cdot\overline{AB}}{2x} = \frac{\sqrt{2rx}\sqrt{2rRx}}{2x} = \sqrt{rR} ,$$

што не зависи од изборот на правата p .

42. Докажи дека во секој триаголник важи

$$\frac{1}{(s-a)(s-b)} + \frac{1}{(s-b)(s-c)} + \frac{1}{(s-c)(s-a)} = \frac{1}{r^2} ,$$

каде a,b,c се должините на страните на триаголникот, s е неговиот полупериметар и r е радиусот на впишаната кружница.

Решение. Да забележиме дека

$$\frac{1}{(s-a)(s-b)} + \frac{1}{(s-b)(s-c)} + \frac{1}{(s-c)(s-a)} = \frac{3s-a-b-c}{(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{s}{(s-a)(s-b)(s-c)} .$$

Од Херонова формула $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, а од друга страна $P = sr$. Горното равенство го добива обликот

$$\frac{1}{(s-a)(s-b)} + \frac{1}{(s-b)(s-c)} + \frac{1}{(s-c)(s-a)} = \frac{s^2}{P^2} = \frac{s^2}{r^2s^2} = \frac{1}{r^2} ,$$

што и требаше да се докаже.

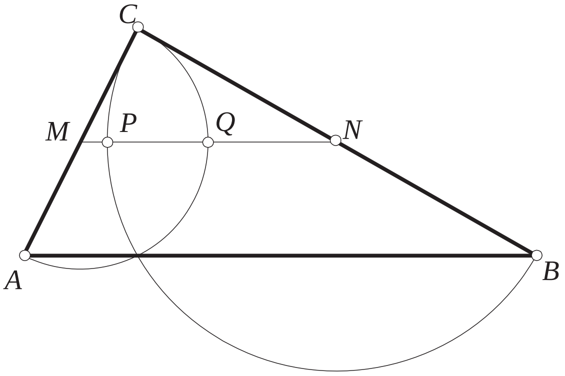
43. Над катетите AC и BC на правоаголниот триаголник ABC, како над дијаметри, се конструирани кружници. Докажи дека тие кружници на средната линија на триаголникот, што е паралелна со хипотенузата, отсекуваат отсечка еднаква на радиусот на впишаната кружница на триаголникот.

Решение. Нека

$$\overline{AB}=c,\ \overline{AC}=b,\ \overline{BC}=a$$

(види цртеж), тогаш:

$$\overline{MN}=\tfrac{c}{2},\ \ \overline{MQ}=\tfrac{b}{2},\ \ \overline{NP}=\tfrac{a}{2}.$$



Треба да докажеме дека $\overline{PQ}=r$.

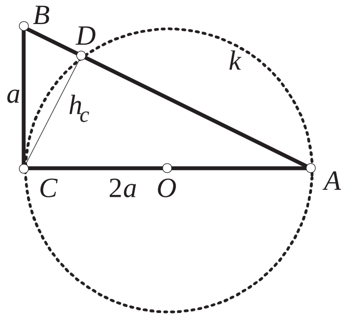
Имаме:

$$\overline{PQ}=\overline{NP}-\overline{NQ}=\overline{NP}-(\overline{MN}-\overline{MQ})$$
$$=\tfrac{a}{2}-(\tfrac{c}{2}-\tfrac{b}{2})=\tfrac{a+b-c}{2}$$
$$=\tfrac{a+b-c}{2}\cdot\tfrac{a+b+c}{a+b+c}=\tfrac{a^2+b^2+2ab-c^2}{2(a+b+c)}$$
$$=\frac{2ab}{2(a+b+c)}=\frac{\frac{ab}{2}}{\frac{a+b+c}{2}}=\frac{P}{s}=r.$$

44. Катетите на правоаголен триаголник ABC (со прав агол при темето C) имаат должини a и $2a$. Катетата со должина $2a$ е дијаметар на кружница k. Да се најде должината на отсечките на кои кружницата ја дели хипотенузата AB.

Решение. Бидејќи должините на катетите AC и CB се $\overline{AC}=2a$ и $\overline{CB}=a$, должината на хипотенузата, според Питагорина теорема е

$$c=\sqrt{a^2+(2a)^2}=\sqrt{5}\,a.$$



Плоштината на триаголникот е $P=\frac{2a\cdot a}{2}=a^2$. Ако $h_c=\overline{CD}$ е должината на висината на триаголникот спуштена од темето C кон хипотенузата AB (види цртеж), тогаш $\frac{\sqrt{5}ah_c}{2}=a^2$, од каде добиваме $\overline{CD}=h_c=\frac{2a}{\sqrt{5}}$. Бидејќи $\measuredangle BDC=90^\circ$, триаголникот BDC е правоаголен, па според тоа точката D е пресечна точка на кружницата k и хипотенузата AB. Од правоаголниот триаголник ADC добиваме $\overline{AD}=\sqrt{(2a)^2-(\frac{2a}{\sqrt{5}})^2}=\frac{4a}{\sqrt{5}}$. Според тоа,

$$\overline{DB}=\overline{AB}-\overline{DA}=a\sqrt{5}-\frac{4a}{\sqrt{5}}=\frac{a}{\sqrt{5}}.$$

45. Нека M е средина на страната AB на триаголникот ABC, а r, r_1, r_2 се радиусите на впишаните кружници во триаголниците ABC, AMC, MBC, соодветно. Ако $\overline{AB}=c$, тогаш $\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\geq 2(\frac{1}{r}+\frac{2}{c})$. Докажи!

Решение. Ако со P ја $_{\text{означиме}}$ плоштината на $\triangle ABC$, тогаш последователно добиваме:

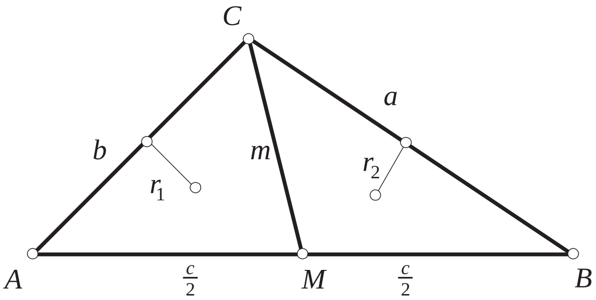
$P_{AMC} = P_{MBC} = \frac{P}{2}$

$P_{AMC} = \frac{1}{2} r_1 (\frac{c}{2} + m + b)$;

$P_{MBC} = \frac{1}{2} r_2 (\frac{c}{2} + a + m)$;

$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{P} (\frac{c}{2} + m + b)$;

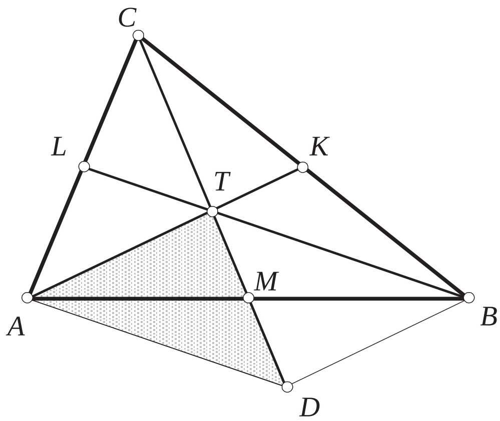
$\frac{1}{r_2} = \frac{1}{P} (\frac{c}{2} + a + m)$,



$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{1}{P}(a+b+c+2m) = \frac{a+b+c}{P} + \frac{2m}{P} = \frac{2}{r} + \frac{4m}{ch_c} \geq \frac{2}{r} + \frac{4h_c}{ch_c} = 2(\frac{1}{r} + \frac{2}{c}) .$$

46. Тежишните линии на триаголникот се $9\,cm$, $12\,cm$ и $15\,cm$. Колкава е плоштината на триаголникот?

Решение. Пред се, да воочиме дека плоштината на секој од триаголниците ABT, BCT и CAT е $\frac{1}{3}$ од плоштината P на триаголникот ABC.



Ако ја продолжиме тежишната линија CM за една третина, ја добиваме точката D (види цртеж). Тогаш четириаголникот $ADBT$ е паралелограм, бидејќи дијагоналите му се преполовуваат во пресечната точка M, па важи: $P_{ABT} = P_{ADT}$. Но, секоја страна на триаголникот ADT е $\frac{2}{3}$ од една тежишна линија на триаголникот ABC, т.е. неговите страни се: $6\,cm$, $8\,cm$ и $15\,cm$. Тој триаголник е правоаголен, па добиваме $P_{ADT} = \frac{1}{2} 6\,cm \cdot 8\,cm = 24\,cm^2$.

Следствено, бараната плоштина P на триаголникот е трипати поголема, т.е. $P = 72\,cm^2$.

47. Нека M и N се точки на страните AB и BC на триаголникот ABC, такви што $\overline{AM} : \overline{MB} = \overline{BN} : \overline{NC} = m : n$ и нека AN и CM се сечат во точката D. Докажи дека триаголникот ADC и четириаголникот $MBND$ се со еднакви плоштини.

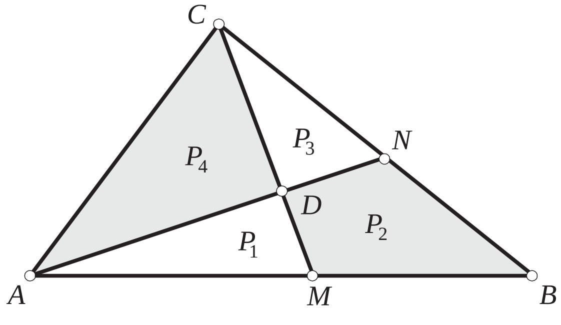
Решение. *Прв начин.* По услов е (види цртеж):

$$\overline{AM} : \overline{MB} = \overline{BN} : \overline{NC} = m : n$$

Оттука следува

$$\overline{AM} = \frac{m}{m+n} \overline{AB},$$

$$\overline{BN} = \frac{m}{m+n} \overline{BC}.$$



Нека P е плоштината на $\triangle ABC$, тогаш

$$P_{AMC} = \frac{1}{2} \overline{AM} \cdot h_c = \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{m+n} \overline{AB} \cdot h_c = \frac{m}{m+n} P .$$

$$P_{BNA} = \frac{1}{2}\overline{BN}\cdot h_a = \frac{1}{2}\cdot\frac{m}{m+n}\overline{BC}\cdot h_a = \frac{m}{m+n}P\,.$$

Значи, $P_{\triangle AMC} = P_{\triangle BNA}$.

Ако од овие плоштини ја одземеме плоштината на заедничкиот $\triangle AMD$, добиваме $P_{\triangle ADC} = P_{MBNC}$.

Втор начин. Нека деловите во ΔABC имаат плоштини P_1, P_2, P_3 и P_4 (види цртеж). Бидејќи триаголниците AMC и MBC имаат иста висина (од темето C), следува

$$(P_1+P_4):(P_2+P_3) = \overline{AM}:\overline{MB} \tag{1}$$

Аналогно за триаголниците BNA и NCA добиваме

$$(P_1+P_2):(P_3+P_4) = \overline{BN}:\overline{NC} \tag{2}$$

Од (1) и (2), имајќи го предвид условот $\overline{AM}:\overline{MB} = \overline{BN}:\overline{NC}$ добиваме:

$$(P_1+P_4):(P_2+P_3) = (P_1+P_2):(P_3+P_4)\,.$$

$$P_1P_3 + P_1P_4 + P_3P_4 + P_4^2 = P_1P_2 + P_1P_3 + P_2^2 + P_2P_3$$

$$P_4^2 - P_2^2 + P_1(P_4-P_2) + P_3(P_4-P_2) = 0$$

$$(P_4-P_2)(P_4+P_2+P_3+P_1) = 0\,.$$

Оттука $P_4 - P_2 = 0$, т.е. $P_4 = P_2$, што и требаше да се докаже.

48. Должините на страните на еден триаголник и неговата плоштина се природни броеви. Едната страна е 21, а периметарот 48 мерни единици. Одреди ја најмалата страна на тој триаголник.

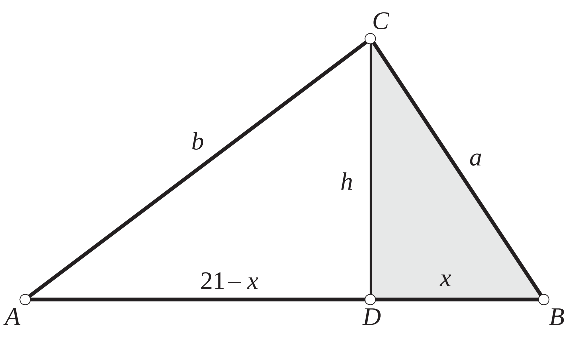
Решение А. Нека $\overline{AB} = 21$ и нека $\overline{BC} = a$ е најмалата страна на триаголникот ABC (види цртеж), тогаш:

$$a+b=27\,,$$

од каде добиваме дека $a \le 13$, а од друга страна

$$h^2 = a^2 - x^2 = (27-a)^2 - (21-x)^2$$

$$9a - 48 = 7x\,. \tag{1}$$



Равенката (1) има бесконечно множество решенија во $\mathbb{R}$. Ако докажеме дека $x \in \mathbb{N}$, тогаш на (1) ќе ги бараме само позитивните целобројни решенија. Од (1) следува дека $7x$ е природен број. Од условот, пак, дека $P = \frac{21\cdot h}{2}$ е природен број, следува дека $h \in \mathbb{N}$, а од условот $x^2 = a^2 - h^2$ следува дека $x^2 \in \mathbb{N}$. Конечно, од $7x \in \mathbb{N}$ и $x^2 \in \mathbb{N}$ заклучуваме дека $x \in \mathbb{N}$.

Сега равенката (1) ја запишуваме во видот $7(a-x) = 2(24-a)$. Оттука $7\,|\,(24-a)$, т.е. $a \in \{3,10,17\}$.

Очигледно $a \ne 17$, бидејќи $a \le 13$, а за $a = 3$ добиваме $b = 27-3 = 24$, $c = 21$. Но тројката $3, 21, 24$ не формира триаголник, бидејќи $3+21=24$.

Следствено, најмалата страна на триаголникот може да биде само 10 мерни единици. Во овој случај за плоштината на триаголникот наоѓаме ($b=17$)

$$P=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\sqrt{24\cdot 14\cdot 7\cdot 3}=84\,.$$

Конечно, најмалата страна на триаголникот има 10 мерни единици.

49. Докажи дека постојат бесконечно многу нееднакви меѓу себе триаголници T, такви што

а) должините на страните на T се последователни природни броеви,

б) плоштината на T е природен број.

Решение. Нека $n\geq 3$ и $n-1, n, n+1$ се должините на страните на триаголникот кој ги исполнува условите од задачата. Неговиот полупериметар е $\frac{3n}{2}$. Според Хероновата формула за плоштина на триаголник имаме

$$P=\sqrt{\tfrac{3n}{2}(\tfrac{3n}{2}-n+1)(\tfrac{3n}{2}-n)(\tfrac{3n}{2}-n-1)}=\tfrac{n}{2}\sqrt{\tfrac{3}{4}(n^2-4)}\,.$$

Тогаш, на пример, за $n=4$ имаме $P=6$, а за $n=14$ имаме $P=84$.

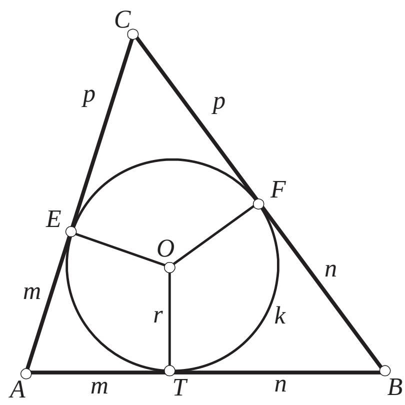
Нека n е парен број, $n\geq 14$ и $\frac{3}{4}(n^2-4)$ е точен квадрат. Ако избереме $m=n^2-2$ имаме $m>n$ и $m^2-4=(m-2)(m+2)=n^2(n^2-4)$. Според тоа, $\frac{3}{4}(m^2-4)=\frac{3}{4}n^2(n^2-4)$ е исто така полн квадрат. Триаголникот T_m со страни $m-1, m, m+1$ има плоштина $P=\frac{m}{2}\sqrt{\frac{3}{4}(m^2-4)}$, кој е природен број. Со тоа е комплетирано решението на задачата.

50. Во триаголник е впишана кружница со радиус r, која со допирната точка $T\in AB$ ја дели страната AB на отсечки со должини m и n. Да се определат должините на страните на триаголникот, плоштината и радиусот на опишаната кружница.

Решение. Нека е даден ΔABC и во него е впишана кружница $k(O,r)$, и нека допирната точка T ја дели страната AB на отсечки со должини m и n. Ако E и F се допирните точки на кружницата со страните AC и BC соодветно, ќе имаме

$\overline{AT}=\overline{AE}=m$, $\overline{BT}=\overline{BF}=n$ и $\overline{CE}=\overline{CF}=p$,

како тангентни отсечки (види цртеж).



За да ги определиме должините на страните на триаголникот ABC доволно е да се определи p. Плоштината на триаголникот ABC е

$$P=r\cdot s \qquad (1)$$

(r-радиусот на впишаната кружница, s-полупериметарот т.е. $s=m+n+p$).

Ако a,b и c се страните на триаголникот, ќе имаме $s-a=m$, $s-b=n$, $s-c=p$, па плоштината на триаголникот ABC, по Хероновата формула е

$$P=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\sqrt{(m+n+p)m\cdot n\cdot p}\,. \qquad (2)$$

Од (1) и (2) имаме

$$\sqrt{(m+n+p)m\cdot n\cdot p}=r(m+n+p)\,,$$

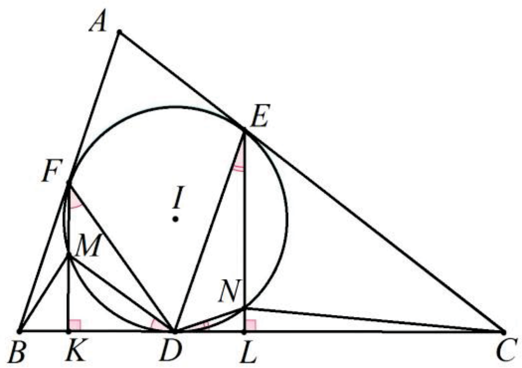
од каде што $p=\frac{r^2(m+n)}{mn-r^2}$. Значи, страните на триаголникот се:

$$\overline{AB}=m+n\,,\ \overline{BC}=n+p=\frac{m(n^2+r^2)}{mn-r^2}\,,\ \overline{AC}=m+p=\frac{n(m^2+r^2)}{mn-r^2}\,,$$

плоштината е $P=\frac{mnr(m+n)}{mn-r^2}$, а радиусот на опишаната кружница е

$$R=\frac{abc}{4p}=\frac{(m^2+n^2)(n^2+r^2)}{4r(mn-r^2)}\,.$$

51. Впишаната кружница во $\triangle ABC$ ги допира страните BC, AC и AB во точките D, E и F, соодветно. Со K и L да ги означиме се подножјата на нормалите повлечени од точките F и E на страната BC, соодветно. Нека вторите пресечни точки на овие нормали со впишаната кружница се M и N, соодветно. Докажи, дека $\frac{P_{\triangle BMD}}{P_{\triangle CND}}=\frac{\overline{DK}}{\overline{DL}}$.



Решение. Нека I е центарот на впишаната кружница во $\triangle ABC$. Имаме

$$\measuredangle BFK=90^\circ-\measuredangle B \text{ и}$$
$$\measuredangle BFD=90^\circ-\tfrac{1}{2}\measuredangle B\,,$$

па затоа

$$\measuredangle DFM=\tfrac{1}{2}\measuredangle B\,.$$

Но, $\measuredangle DFM=\measuredangle MDK$, па затоа

$$\measuredangle MDK=\tfrac{1}{2}\measuredangle B\,.$$

Значи, $\triangle MDK$ и $\triangle BID$ имаат еднакви агли, т.е. тие се слични. Од сличноста на овие триаголници следува $\frac{\overline{MK}}{\overline{DK}}=\frac{r}{\overline{BD}}$, каде r е радиусот на впишаната кружница во $\triangle ABC$. На потполно ист начин се докажува дека $\frac{\overline{NL}}{\overline{DL}}=\frac{r}{\overline{CD}}$. Затоа, $r=\frac{\overline{MK}\cdot\overline{BD}}{\overline{DK}}=\frac{\overline{NL}\cdot\overline{CD}}{\overline{DL}}$, од каде добиваме $\frac{P_{\triangle BMD}}{P_{\triangle CND}}=\frac{\overline{MK}\cdot\overline{BD}}{\overline{NL}\cdot\overline{CD}}=\frac{\overline{DK}}{\overline{DL}}$.

52. Докажи дека постојат бесконечно многу нееднакви меѓу себе триаголници T, такви што

а) должините на страните на T се последователни природни броеви,

б) плоштината на T е природен број.

Решение. Нека $n\geq 3$ и $n-1, n, n+1$ се должините на страните на триаголникот кој ги исполнува условите од задачата. Неговиот полупериметар е $\frac{3n}{2}$. Според Хероновата формула зап лоштина на триаголник имаме

$$P=\sqrt{\tfrac{3n}{2}(\tfrac{3n}{2}-n+1)(\tfrac{3n}{2}-n)(\tfrac{3n}{2}-n-1)}=\tfrac{n}{2}\sqrt{\tfrac{3}{4}(n^2-4)}\,.$$

Тогаш, на пример, за $n=4$ имаме $P=6$, а за $n=14$ имаме $P=84$.

Нека n е парен број, $n\geq 14$ и $\frac{3}{4}(n^2-4)$ е полн квадрат. Ако избереме $m=n^2-2$ имаме $m>n$ и $m^2-4=(m-2)(m+2)=n^2(n^2-4)$. Според тоа,

$\frac{3}{4}(m^2-4)=\frac{3}{4}n^2(n^2-4)$ е исто така полн квадрат. Триаголникот T_m со страни $m-1, m, m+1$ има плоштина $P=\frac{m}{2}\sqrt{\frac{3}{4}(m^2-4)}$, кој е природен број. Со тоа е комплетирано решението на задачата.

53. Должините на висините во еден триаголник се 12, 15 и 20. Колку е плоштината на триаголникот? Колку се должините на неговите страни?

Решение. Нека a, b и c се должините на страните на триаголникот, а $h_a=12, h_b=15$ и $h_c=20$ се должините на соодветните висини. Од равенствата $P=\frac{ah_a}{2}=\frac{bh_b}{2}=\frac{ch_c}{2}$ добиваме $a:b=h_b:h_a$ и $a:c=h_c:h_a$ од каде што добиваме $b=\frac{h_a}{h_b}a=\frac{4}{5}a$, $c=\frac{h_a}{h_c}a=\frac{3}{5}a$.

Плоштината на триаголникот е

$$P=\frac{ah_a}{2}=6a. \tag{1}$$

Неговиот полупериметар е

$$s=\frac{1}{2}(a+b+c)=\frac{1}{2}(a+\frac{4}{5}a+\frac{3}{5}a)=\frac{6}{5}a,$$

при што $s-a=\frac{a}{5}$, $s-b=\frac{2a}{5}$, $s-c=\frac{3a}{5}$. Според Хероновата формула за плоштина на триаголник имаме

$$P=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\sqrt{\frac{6a}{5}\frac{a}{5}\frac{2a}{5}\frac{3a}{5}}=\frac{6a^2}{25}. \tag{2}$$

Од (1) и (2) ја добиваме равенката $6a=\frac{6a^2}{25}$, од каде добиваме $a=25$. Сега $b=20$ и $c=15$, а $P=6\cdot 25=150$.

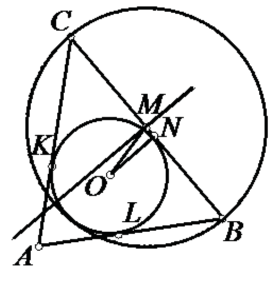
54. Страната BC на $\triangle ABC$ има должина a, а радиусот на впишаната кружница r. Определи ја плоштината на триаголникот, ако впишаната кружница ја допира кружницата со дијаметар BC.

Решение. Нека O е центар на впишаната кружница, а M е средина на отсечката BC. Нека кружницата k впишана во $\triangle ABC$ ги допира страните AC, AB и BC во точките K, L и N соодветно. Ќе воведеме ознаки

$$\overline{AK}=\overline{AL}=x,\ \overline{CK}=\overline{CN}=y \text{ и } \overline{BL}=\overline{BN}=z.$$

Притоа, од условот на задачата имаме $\overline{OM}=\frac{a}{2}-r$ и $y+z=a$. Но тогаш

$$\overline{NM}=\sqrt{\overline{OM}^2-\overline{ON}^2}=\sqrt{(\frac{a}{2}-r)^2-r^2}=\sqrt{\frac{a^2}{4}-ar},$$



од каде што следува дека едната од отсечките y и z има должина $\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}-ar}$, а другата $\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-ar}$.

Од Хероновата формула имаме $P=\sqrt{(x+y+z)xyz}$, а од формулата $P=sr$, каде $s=\frac{a+b+c}{2}=x+y+z$, имаме $P=(x+y+z)r$. Според тоа

$$\sqrt{(x+y+z)xyz}=(x+y+z)r,$$
$$xyz=(x+a)r^2,$$
$$arx=(x+a)r^2.$$

Од последното равенство имаме $x=\frac{ar}{a-r}$, па за плоштината добиваме

$$P=(x+y+z)r=(x+a)r=(\tfrac{ar}{a-r}+a)r=\tfrac{a^2r}{a-r}.$$

55. Должините на страните на еден триаголник се прости броеви. Докажи дека неговата плоштина не може да биде природен број.

Решение. Од Хероновата формула за плоштина на триаголник имаме

$$P^2=s(s-a)(s-b)(s-c), \tag{1}$$

каде a,b,c се страните на триаголникот, а $s=\frac{a+b+c}{2}$. Нека a,b,c се прости броеви. Да претпоставиме дека и $P\in\mathbb{N}$. Означуваме со $L=a+b+c$ и тогаш равенството (1) преминува во

$$16P^2=L\cdot(L-2a)\cdot(L-2b)\cdot(L-2c). \tag{2}$$

Левата страна на равенството (2) е парен број, значи и десната страна е исто така парен број, од каде заклучуваме дека L е парен број. Настануваат два случаи:

1^0 Сите a,b,c се парни броеви. Од тоа што a,b,c се прости броеви, следи дека $a=b=c=2\Rightarrow P=\frac{2^2\sqrt{3}}{4}=\sqrt{3}\notin\mathbb{N}$, што противречи на претпоставката.

2^0 Еден од a,b,c е парен, а останатите два се непарни броеви. Без губење од општоста може да земеме дека a е парен број, а b и c се непарни броеви. Тогаш,

$$a=2 \text{ и } b,c\geq 3. \tag{3}$$

Ако $b\neq c$, нека $b<c$, тогаш $c-b\geq 2$ т.е. $c\geq b+2=b+a$, што претставува противрешност со неравенството меѓу страните во триаголник.

Значи, $b=c$, па тогаш $L=a+b+c=2+2b$ и (2) преминува во

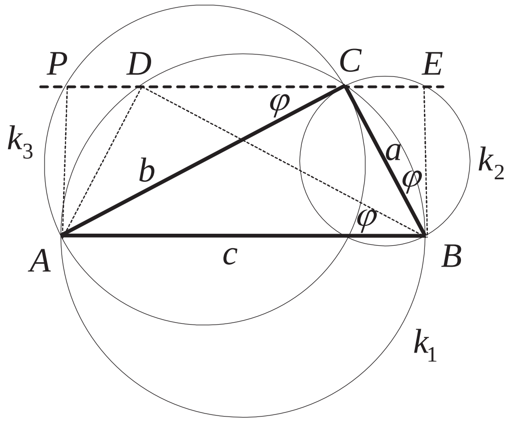
$$16P^2=(2+2b)\cdot(2+2b-4)\cdot(2+2b-2b)\cdot(2+2b-2b)$$
$$16P^2=16\cdot(1+b)\cdot(b-1)$$
$$P^2=b^2-1$$
$$1=(b-P)\cdot(b+P), \tag{4}$$

но бидејќи $b+P\geq 3$, заради (3), следи дека равенството (4) не е можно.

Значи, ако a,b,c се прости броеви, тогаш $P\notin\mathbb{N}$, што и требаше да се докаже.

56. Трите страни на правоаголниот триаголник $\triangle ABC$ се дијаметри на кружници. Низ темето на правиот агол C повлечени е права во надворешноста на триаголникот, која кружинците со дијаметри AB, BC и CA ги сече во точките D, E и P соодветно. Докажи дека плоштините на триаголникот $\triangle ABD$ е еднаква на збирот на плоштините на триаголниците $\triangle BCE$ и $\triangle ACP$.

Решение. Нека $\triangle ABC$ е правоаголен триаголник со теме на правиот агол во C, а p е права која минува низ темето C која не ја сече внатрешноста на триаголникот. Правата p ги сече кружинците k_1, k_2 и k_3 во точките D, E и P соодветно. Јасно е дека триаголниците $\triangle ABD$, $\triangle BEC$ и $\triangle CPA$ се правоаголни.



Од друга страна $\measuredangle CBE = \measuredangle ACP$ бидејќи AC е тангента а CE е тетива на k_2, а $\measuredangle CBE$ е периферен агол над лакот CE. Сега е јасно дека $\triangle ABD \sim \triangle CBE \sim \triangle CPA$. Хипотенузите на $\triangle ABD, \triangle CBE$ и $\triangle CPA$ се c, a и b соодветно.

Според тоа

$$\frac{P_{\triangle BEC}}{P_{\triangle BDA}} = \frac{a^2}{c^2} \text{ и } \frac{P_{\triangle CPA}}{P_{\triangle BDA}} = \frac{b^2}{c^2},$$

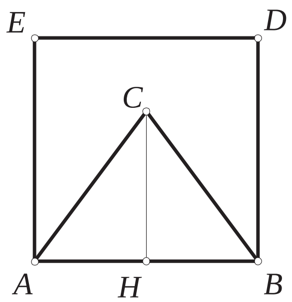
од каде добиваме

$$\frac{P_{\triangle CPA}}{P_{\triangle BDA}} + \frac{P_{\triangle BEC}}{P_{\triangle BDA}} = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2+b^2}{c^2} = 1,$$

т.е. $P_{\triangle ABD} = P_{\triangle BCE} + P_{\triangle CPA}$.

57. Плоштината на рамнокрак триаголник е $\frac{1}{3}$ од плоштината на квадратот со страна еднаква на основата на триаголникот. Бочните страни се за 1 помали од должината на основата на триаголникот. Определи ги должините на страните на триаголникот, и должината на висината спуштена врз основата.

Решение. Од условот на задачата имаме



$$\overline{AB}^2 = \frac{3}{2}\overline{CH} \cdot \overline{AB}$$

од каде добиваме $\overline{AB} = \frac{3}{2}\overline{CH}$, т.е. $\overline{CH} = \frac{2}{3}\overline{AB}$. Од друга страна, според Питагоровата теорема, имаме

$$\overline{CH}^2 = \overline{CB}^2 - (\tfrac{1}{2}\overline{AB})^2,$$

$$(\tfrac{2}{3}\overline{AB}(^2 = \overline{CB}^2 - (\tfrac{1}{2}\overline{AB})^2$$

од што следува $\overline{CB} = \frac{5}{6}\overline{AB}$. Бидејќи $\overline{AB} = \overline{CB} + 1$, од последното равенство имаме $\overline{CB} = \frac{5}{6}(\overline{CB} + 1)$, т.е. $\overline{CB} = 5$.

Конечно, $\overline{AB} = 6$ и $\overline{CH} = 4$.

58. Во остроаголен триаголник е впишан квадрат. Докажи дека плоштината на квадратот не е поголема од половина од плоштината на триаголникот.

Решение. Нека квадратот $KLMN$ е впишан во $\triangle ABC$ (види цртеж) и нека $\overline{AB} = c, \overline{MN} = x, \overline{CC_1} = h$.

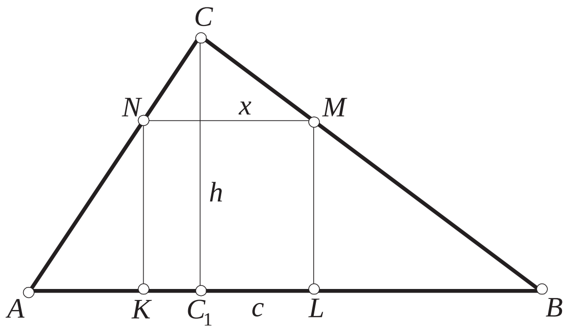
Од сличноста на триаголниците ABC и NMC имаме $\frac{x}{c} = \frac{h-x}{h}$. Оттука

$$x=\frac{ch}{c+h} \text{ и } P=x^2=\frac{(ch)^2}{(c+h)^2}.$$

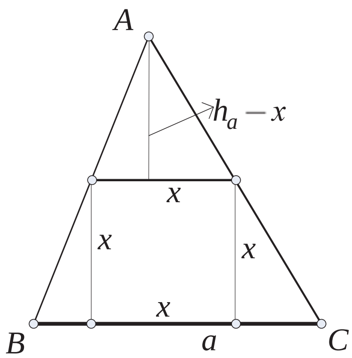
Користејќи го неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина на два позитивни броеви, добиваме:

$$P=\frac{(ch)^2}{(c+h)^2}\le\frac{(ch)^2}{4ch}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}ch=\frac{1}{2}P_{ABC}.$$

Равенството е исполнето само ако $h=c$.



59. Во триаголник ABC со должини на страни a,b,c вписани се три квадрати со должини на страни x,y,z, така што по две темиња на тие квадрати лежат на страните AB,BC,CA соодветно. Ако $x=y=z$, тогаш $a=b=c$. Докажи!



Решение. Нека ABC е триаголник со должини на страни a,b и c во стандардни ознаки. Со P ќе ја означиме плоштината на триаголникот. Од условот на задачата $\overline{BC}=a$, а квадратот што е вписан во триаголникот и две негови темиња лежат на страната BC има должина на страната x. Тогаш не е тешко да се види дека е точно равенството

$$P=x^2+\frac{1}{2}(a-x)x+\frac{1}{2}(h_a-x)x.$$

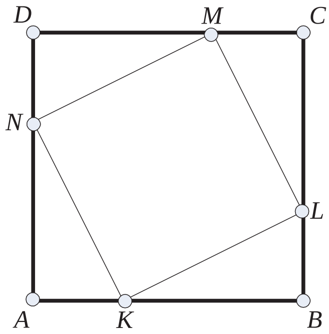
Со средување на ова равенство добиваме $x=\frac{2P}{a+h_a}$.

На потполно аналоген начин ако y и z се должини на страните на квадратите чии две темиња лежат на страните AC и AB, соодветно, тогаш $y=\frac{2P}{b+h_b}$, $z=\frac{2P}{c+h_c}$. Од условот на задачата добиваме дека $\frac{2P}{a+h_a}=\frac{2P}{b+h_b}=\frac{2P}{c+h_c}$, односно

$$a+h_a=b+h_b=c+h_c.$$

Ќе претпоставиме дека не се исполнети равенствата $a=b=c$. Нека, на пример, $a\neq b$. Тогаш $a\neq c$ или $b\neq c$. Без ограничување на општоста ќе претпоставиме дека $a\neq c$. Но, тогаш $a-b=h_b-h_a=\frac{2P}{b}-\frac{2P}{a}=\frac{2P(a-b)}{ab}$, од каде добиваме дека $P=\frac{1}{2}ab$, т.е. $\gamma=90^\circ$, и $a-c=h_c-h_a=\frac{2P}{c}-\frac{2P}{a}=\frac{2P(a-c)}{ac}$, од каде пак добиваме дека $P=\frac{1}{2}ac$, т.е. $\beta=90^\circ$. Но, во еден триаголник не може да има два прави агли, па според тоа $a=b=c$.

60. На секоја страна на квадратот е избрана точка која ја дели во однос $m:n$, $m\neq n$. Секое теме на квадратот е крајна точка на две делбени отсечки на неговите страните, кои имаат различна должина. Делбените точки се темиња на четириаголник. Пресметај ја плоштината на тој четириаголник, ако должината на страната на квадратот е a.



Решение. Нека $ABCD$ е квадрат со страна a во кој $K \in AB$. $L \in BC$, $M \in CD$ и $N \in DA$ се избрани така што

$\overline{AK}:\overline{KB}=\overline{BL}:\overline{LC}=\overline{CM}:\overline{MD}=\overline{DN}:\overline{NA}=m:n$.

Тогаш

$$\overline{AK}=\overline{BL}=\overline{CM}=\overline{DN}=\frac{ma}{m+n},$$

$$\overline{KB}=\overline{LC}=\overline{MD}=\overline{NA}=\frac{na}{m+n}.$$

Според тоа

$$\overline{KL}=\overline{LM}=\overline{MN}=\overline{NK}=a\sqrt{\frac{m^2+n^2}{(m+n)^2}}.$$

Прв начин. Триаголниците AKN, BLK, CML и DNM се складни, па според тоа $\measuredangle ANK=\measuredangle LKB$. Но, $\measuredangle AKN+\measuredangle ANK=90^\circ$, па затоа $\measuredangle AKN+\measuredangle LKB=90^\circ$, од каде добиваме дека $\measuredangle NKL=90^\circ$. Според тоа $NKLM$ е квадрат, и конечно

$$P_{KLMN}=(a\frac{\sqrt{m^2+n^2}}{m+n})^2=a^2\frac{m^2+n^2}{(m+n)^2}.$$

Втор начин. Плоштината на секој од триаголниците AKN, BLK, CML и DNM е еднаква на

$$P=\frac{1}{2}\frac{am}{m+n}\frac{an}{m+n}=\frac{1}{2}\frac{a^2mn}{(m+n)^2},$$

од каде што добиваме дека

$$P_{KLMN}=a^2-4\frac{1}{2}\frac{a^2mn}{(m+n)^2}=a^2(1-\frac{2mn}{(m+n)^2})=a^2\frac{m^2+n^2}{(m+n)^2}.$$

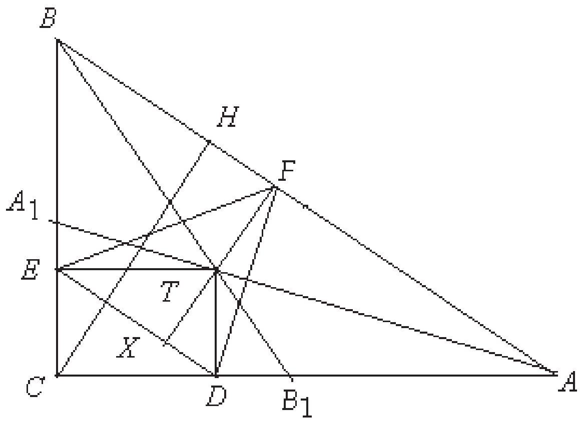
61. Даден е правоаголен $\triangle ABC$ со плоштина P. Изрази ја преку P, плоштината на триаголникот чии темиња се ортогоналните проекции на тежиштето врз страните на триаголникот.

Решение. Нека D, E и F се ортогонални проекции на тежиштето T врз страните AC, BC и AB, соодветно. Четириаголникот $CDTE$ е правоаголник и оттука добиваме

$$\overline{CD}:\overline{CA}=\overline{A_1T}:\overline{A_1A}=1:3$$

и

$$\overline{CE}:\overline{CB}=\overline{B_1T}:\overline{B_1B}=1:3.$$



Оттука следува дека DE и AB се паралелни и $\overline{DE}=\frac{\overline{AB}}{3}$. Ако FX е нормална на DE, т.е. на AF, тогаш FX и CH се паралелни и $\overline{FX}=\frac{2}{3}\overline{CH}$. Затоа, плоштината на триаголникот EDF е

$$\frac{\overline{ED}\cdot\overline{FX}}{2}=\frac{\overline{AB}\cdot 2\overline{CH}}{2\cdot 3\cdot 3}=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{CH}}{3\cdot 3}=\frac{2}{9}P.$$

62. Должините на страните и дијагоналите на еден правоаголник се изразени со природни броеви. Докажи, дека неговата плоштина е изразена со природен број делив со 12.

Решение. Со a и b да ги означиме должините на страните, а со d должината на дијагоналата на правоаголникот. Важи $a^2+b^2=d^2$, а треба да докажеме дека $12\,|\,ab$.

Нека претпоставиме дека ниту еден од броевите a и b не е делив со 3. Тогаш броевите a и b се од видот $3k\pm1$, па затоа броевите a^2 и b^2 се од видот $3n+1$, што значи дека бројот $d^2=a^2+b^2$ е од видот $3M+2$, што не е можно бидејќи квадрат на природен број при делење со 3 дава остаток 0 или 1. Според тоа, $3\,|\,a$ или $3\,|\,b$, па затоа $3\,|\,ab$. Ќе докажеме дека $4\,|\,ab$. Можни се три случаи.

Прв случај. Ако $a=2m, b=2n$, тогаш јасно $4\,|\,ab$.

Втор случај. Нека $a=2m+1, b=2n+1$. Тогаш

$$d^2=a^2+b^2=4(m(m+1)+n(n+1))+2,$$

што не е можно бидејќи квадрат на природен број при делење со 4 дава остаток 0 или 1.

Трет случај. Нека $a=2m, b=2n+1$. Тогаш очигледно $d=2k+1$, па ако замениме во $d^2=a^2+b^2$, по средувањето добиваме $k(k+1)=m^2+n(n+1)$. Понатаму, броевите $k(k+1)$ и $n(n+1)$ се парни, па затоа и бројот m^2 е парен, т.е. $m=2p$. Според тоа, $a=4p$, па затоа $4\,|\,a\,|\,ab$.

Конечно, $3\,|\,ab$ и $4\,|\,ab$, па затоа $12\,|\,ab$.

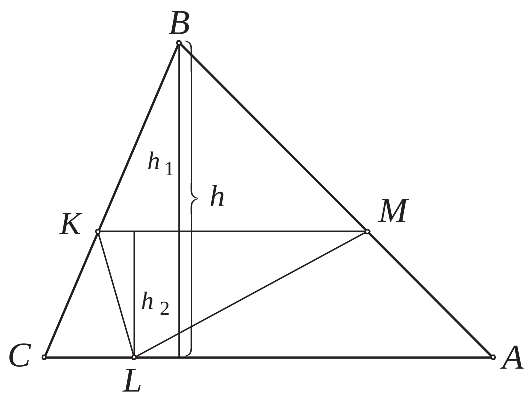
63. Даден е $\triangle ABC$ и $M\in AB$, $K\in BC$ се такви што $MK\,\|\,AC$. Ако L е произволна точка од страната AC на $\triangle ABC$, $P_{\triangle ABC}=P$, $P_{\triangle MBK}=S$, определи ја P_{LMBK}.

Решение. Плоштината на $\triangle KLM$ ја означуваме со Q, т.е. $P_{\triangle KLM}=Q$. Бидејќи $\triangle KLM$ и $\triangle KMB$ имаат иста страна KM имаме

$$\frac{Q}{S}=\frac{\frac{1}{2}\overline{KM}\cdot h_2}{\frac{1}{2}\overline{KM}\cdot h_1}=\frac{h_2}{h_1}=\frac{h-h_1}{h_1}$$

$$=\frac{h}{h_1}-1=\frac{\sqrt{P}}{\sqrt{S}}-1.$$

Оттука добиваме $Q=\sqrt{P\cdot S}-S$, т.е. $Q+S=\sqrt{P\cdot S}$. Значи, $P_{LMBK}=\sqrt{P\cdot S}$.



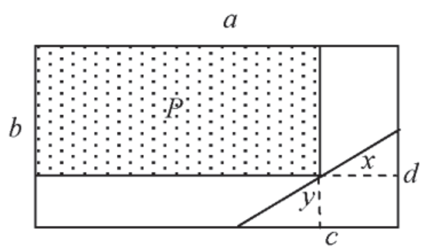
64. Дали постои квадрат со страна цел број и плоштина еднаква на 111...11 (бројот содржи 1992 цифри)?

Решение. Да претпоставиме дека таков квадрат постои и нека неговата страна е a. Тогаш $a^2=111...11$. Но ова не е можно, бидејќи бројот 111...11 е делив со 3 (збирот на цифрите му е делив со 3), но не е делив со 9, значи не е точен квадрат. Следствено, не постои таков квадрат.

65. Определи ги сите четириаголници со најголема плоштина, кај кои производот на должините на секои негови две соседни страни е еднаков на 1.

Решение. Нека a,b,c и d се должини на страните на четириаголникот $ABCD$, при што $\overline{AB}=a$, $\overline{BC}=b$, $\overline{CD}=c$ и $\overline{DA}=d$. Од условот на задачата, имаме $ab=1$, $bc=1$, $cd=1$ и $da=1$. Од првите две равенства имаме $ab=bc$ и бидејќи $b\neq 0$ (должина на страна), добиваме $a=c$. Аналогно, од второто и третото равенство, добиваме $bc=cd$, и бидејќи $c\neq 0$ (должина на страна) добиваме $b=d$. Бидејќи паровите спротивни страни се со еднаква должина, добиваме дека четириаголникот е паралелограм. Од фамилијата паралелограми со дадени страни, најголема плоштина има правоаголникот (Зошто?). Бидејќи $a=c$ и $b=d$ и $P=1$, добиваме $ab=1$, т.е. $b=\frac{1}{a}$. Според тоа, должините на страните се a и $\frac{1}{a}$.

66. Од правоаголна плоча со страни a и b исечено е триаголно ќоше со две страни c и d (види цртеж). Од преостанатиот дел треба да се исече нова правоаголна плоча, така што нејзината плоштина P да биде најголема можна. Пресметај ја плоштината на исечената нова правоаголна плоча.



Решение. Нека x и y се нормалните растојанија од допирната точка на новата плоча со исеченото ќоше, соодветно до страните на првобитната плоча (види цртеж). Тогаш, плоштината на новата плоча ќе биде

$$P=(a-x)(b-y).$$

Од сличноста на триаголниците добиени со повлекувањето на растојанието y паралелно со страната d кај триаголното ќоше, се добива пропорцијата $y:d=(c-x):c$, од каде $y=d-\frac{d}{c}x$. Со замена во плоштината на новата плоча добиваме,

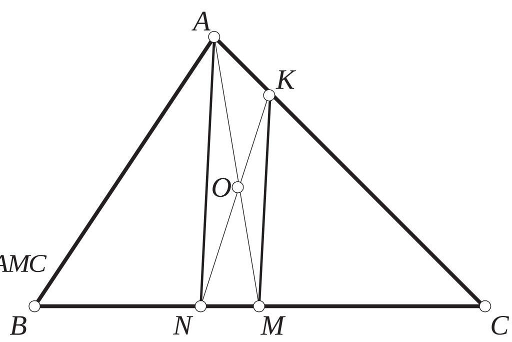
$$P=(a-x)(b-d+\tfrac{d}{c}x)=ab-ad+\tfrac{1}{4cd}(ad+cd-bc)^2-\tfrac{d}{c}(x-\tfrac{1}{2d}(ad+cd-bc))^2.$$

Членот $\frac{d}{c}(x-\frac{1}{2d}(ad+cd-bc))^2$ во изразот за плоштината P е секогаш позитивен, значи достигнува најмала вредност 0 кога $x=\frac{1}{2d}(ad+cd-bc)$, и тогаш P достигнува најголема вредност

$$P_{\max}=ab-ad+\tfrac{1}{4cd}(ad+cd-bc)^2=\tfrac{1}{4cd}(ad+bc-cd)^2.$$

67. Точката K од страната AC од $\triangle ABC$ е таква што $\overline{AK}<\overline{KC}$ (види цртеж). Нека M е средина на страната BC, а N е точка од правата BC таква што $AN\parallel KM$. Докажи дека KN го дели $\triangle ABC$ на два дела со еднакви плоштини.

Решение. Бидејќи $\frac{\overline{AK}}{\overline{KC}}<1$, добиваме дека N припаѓа на страната BC од $\triangle ABC$. Нека O е пресечна точка на AM и KN.



Бидејќи $AN \parallel KM$, добиваме дека $P_{ANM} = P_{AKN}$ (четириаголникот $ANMK$ е трапез). Според тоа

$$P_{ONM} = P_{ANM} - P_{AON} = P_{ANK} - P_{AON} = P_{AOK}$$

од каде добиваме

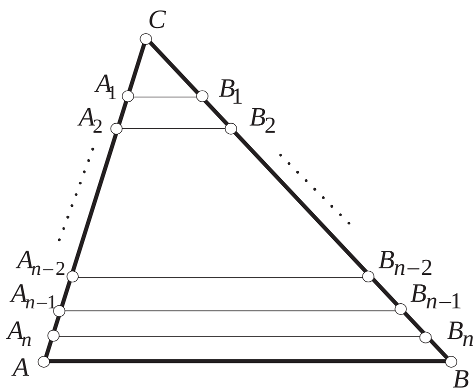
$$P_{KCN} = P_{KOMC} + P_{ONM} = P_{KOMC} + P_{KOA} = P_{AMC}.$$

Но, AM е тежишна линија во ΔABC, па според тоа $P_{KCN} = \frac{1}{2} P_{ABC}$. Значи,

$$P_{BNKA} = P_{ABC} - P_{KNC} = P_{ABC} - \frac{1}{2} P_{ABC} = \frac{1}{2} P_{ABC},$$

што требаше да се докаже.

68. Паралелно со основата на триаголникот се повлечени n прави, кои го разделуваат триаголникот на $n+1$ делови кои имаат еднакви плоштини. Во каков однос тие прави, сметајќи од врвот на триаголникот, ги делат бочните страни на триаголникот?



Решение. Во триаголникот ABC нека AB е основа. Според тоа, n-те прави се паралелни со правата која што минува низ точките A и B. Нека должините на отсечките на кои е разделена една од бочните страни на триаголникот, на пример CA се $a_0, a_1, ..., a_n$. Ако делбените точки се $A_1, A_2, ..., A_n$ редоследно од точката C кон точката A, тогаш $\overline{CA_1} = a_0$, $\overline{A_1A_2} = a_1, ...,$ $\overline{A_nA} = a_n$. Нека соодветните делбени точки на точките $A_1, A_2, ..., A_n$, на страната BC, се точките $B_1, B_2, ..., B_n$ (види цртеж).

Нека плоштината на триаголникот ABC е P. Од претпоставката на задачата $P_{A_kB_kB_{k-1}A_{k-1}} = \frac{P}{n+1}$, за $k = 2,3,...,n$ и $P_{ABB_nA_n} = P_{A_1B_1C} = \frac{P}{n+1}$. Од сличноста на триаголниците A_kB_kC и $A_{k+1}B_{k+1}C$ добиваме

$$\left(\frac{a_0+a_1+...+a_k}{a_0+a_1+...+a_{k-1}}\right)^2 = \frac{(k+1)\frac{P}{n+1}}{k\frac{P}{n+1}} = \frac{k+1}{k}.$$

Според тоа $\frac{a_0+a_1+...+a_k}{a_0+a_1+...+a_{k-1}} = \frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{k}}$. За $k=1$ добиваме $\frac{a_0+a_1}{a_0} = \frac{\sqrt{2}}{1}$, т.е. $\frac{a_1}{a_0} = \sqrt{2}-1$. За $k=2$ имаме

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{a_0+a_1+a_2}{a_0+a_1} = 1 + \frac{a_2}{a_0+a_1} = 1 + \frac{a_2}{a_0}\frac{a_0}{a_0+a_1} = 1 + \frac{a_2}{a_0}\frac{1}{\sqrt{2}},$$

од каде што добиваме $\frac{a_2}{a_0} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$. За $k=3$, како и претходно, имаме

$$\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}}=\frac{a_0+a_1+a_2+a_3}{a_0+a_1+a_2}=1+\frac{a_3}{a_0}\cdot\frac{a_0}{a_0+a_1}\cdot\frac{a_0+a_1}{a_0+a_1+a_2}=1+\frac{a_3}{a_0}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

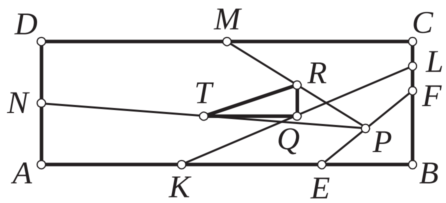
Според тоа $\frac{a_3}{a_0}=\sqrt{4}-\sqrt{3}$. Продолжувајќи ја оваа постапка, добиваме дека $\frac{a_k}{a_0}=\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$, т.е. $\frac{a_k}{a_{k-1}}=\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k}-\sqrt{k-1}}$ и

$$a_0:a_1:...:a_n=(\sqrt{2}-1):(\sqrt{3}-\sqrt{2}):...:(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$$

69. Точките E и F припаѓаат на страните AB и BC од правоаголникот $ABCD$ кој има плоштина 1. Средините на отсечките AE, EF, FC, CD, DA се K, P, L, M, N соодветно. Средините на KL, PM и PN се точките Q, R и T соодветно. Определи ја плоштината на $\triangle QRT$.

Решение. Нека O е произволна точка од рамнината на правоаголникот. Според тоа,

$$\overrightarrow{OQ}=\tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{OL})=\tfrac{1}{4}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{OC})$$
$$\overrightarrow{OR}=\tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OM})=\tfrac{1}{4}(\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})$$
$$\overrightarrow{OT}=\tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{ON})=\tfrac{1}{4}(\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA})$$
$$\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OQ}=\tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA})=\tfrac{1}{4}\overrightarrow{AD}$$
$$\overrightarrow{QT}=\overrightarrow{OT}-\overrightarrow{OQ}=\tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC})=\tfrac{1}{4}\overrightarrow{CD}$$



Значи QR и QT се взаемно нормални и нивната должина е $\frac{1}{4}$ од должината на AD и CD соодветно. Триаголникот QRT е правоаголен, а неговата плоштина е

$$\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4}\cdot\overline{AD}\cdot\tfrac{1}{4}\cdot\overline{CD}=\tfrac{1}{32}\cdot\overline{AD}\cdot\overline{CD}=\tfrac{1}{32}.$$

70. Нека H е ортоцентарот на остроаголниот $\triangle ABC$, D, E и F се подножните точки на висините повлечени од темињата A, B и C соодветно, и нека $\overline{AH}=\overline{HD}$ и $\overline{BH}=2\overline{HE}$.

а) Најди го односот $\overline{CH}:\overline{HF}$,

б) Најди го аголот ACB.

Решение.а) Од условите на задачата имаме:

$$P_{AHC}=\tfrac{1}{2}\overline{AC}\cdot\tfrac{1}{3}\overline{BE}=\tfrac{1}{3}P_{ABC} \text{ и } P_{BHC}=\tfrac{1}{2}\overline{BC}\cdot\tfrac{1}{2}\overline{AD}=\tfrac{1}{2}P_{ABC}.$$

Според тоа,

$$P_{AHB}=P_{ABC}-P_{AHC}-P_{BHC}=P_{ABC}-\tfrac{1}{2}P_{ABC}-\tfrac{1}{3}P_{ABC}=\tfrac{1}{6}P_{ABC}.$$

Но, $P_{AHB}=\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{HF}$ и $P_{ABC}=\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{CF}$, и ако замениме во последното равенство, добиваме $\overline{HF}=\frac{1}{6}\overline{CF}$, од што следува $\overline{CH}:\overline{HF}=5:1$.

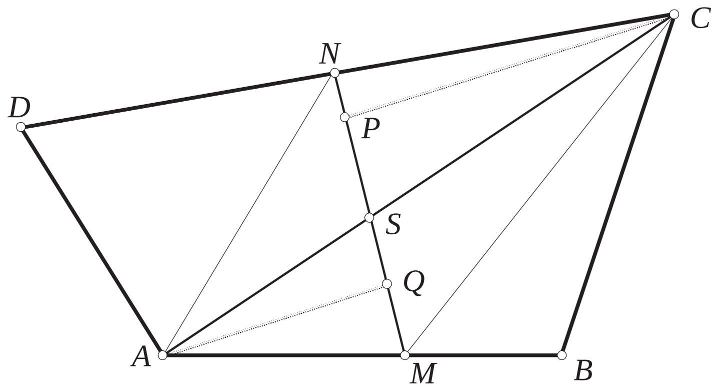
б) Нека G средина на $\overline{BH}$. Триаголникот BDH е правоаголен, со прав агол во темето D, па затоа $\overline{BG}=\overline{GH}=\overline{GD}$. Од

$$\overline{AH}=\overline{HD},\ \overline{EH}=\overline{HG} \text{ и } \measuredangle AHE=\measuredangle DHG,$$

следува $\triangle AEH \cong \triangle DGH$. Според тоа, $\overline{AE} = \overline{DG} = \overline{HG} = \overline{EH}$, т.е. $\triangle AEH$ е рамнокрак и правоаголен, па значи $\measuredangle EAH = 45^\circ$. Конечно, од $\triangle CAD$ добиваме

$$\measuredangle ACB = 90^\circ - \measuredangle CAD = 90^\circ - \measuredangle EAH = 45^\circ .$$

71. Даден е четириаголник $ABCD$. Отсечката која ги сврзува средината M на страната AB и средината N на страната CD со дијагоналата AC е поделена на два еднакви дела. Докажи дека $P_{\triangle ABC} = P_{\triangle ADC}$.



Решение. Триаголниците AMS и ASN имаат еднаква висина $h_1 = \overline{AQ}$ и еднаква основа, $\overline{MS} = \overline{NS}$. Според тоа

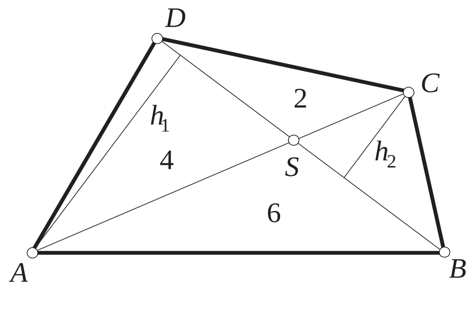
$P_1 = P_{\triangle AMS} = P_{\triangle ASN}$.

Слично, триаголниците MSC и NSC имаат иста висина $h_0 = \overline{CP}$. Бидејќи тие имаат основи со еднаква должина $\overline{MS} = \overline{NS}$, добиваме $P_{\triangle MSC} = P_{\triangle NSC} = P_2$. Слично како и во претходните случаи, $P_{\triangle AMC} = P_{\triangle MBC} = P_1 + P_2$ и $P_{\triangle AND} = P_{\triangle ANC} = P_1 + P_2$. Конечно, од претходно добиените равенства, имаме

$$P_{\triangle ABC} = P_{\triangle AMC} + P_{\triangle MBC} = (P_1 + P_2) + (P_1 + P_2) = P_{\triangle ACN} + P_{\triangle AND} = P_{\triangle ACD} .$$

72. Дијагоналите на конвексен четириаголник $ABCD$ се сечат во точката S . Пресметај ја плоштината на четириаголникот $ABCD$, ако плоштините на триаголниците ABD, ACD, ASD соодветно се еднакви на $10cm^2, 6cm^2, 4cm^2$.

Решение. Од условите на задачата наоѓаме: $P_{\triangle ABS} = 6cm^2$, $P_{\triangle CDS} = 2cm^2$. Триаголниците ASD и SCD имаат заедничка страна SD , а плоштината на првиот е двапати поголема од плоштината на вториот. Оттука следува дека $h_1 = 2h_2$ (види цртеж).



Но и триаголниците ABS и BCS имаат заедничка страна BS , а висината на првиот (на таа страна) е двапати поголема од висината на вториот триаголник, па затоа $P_{\triangle ABS} = 2P_{\triangle BCS}$, $P_{\Delta BCS} = 3cm^2$.

Конечно, добиваме дека плоштината на четириаголникот $ABCD$ е еднаква на $15\ cm^2$.

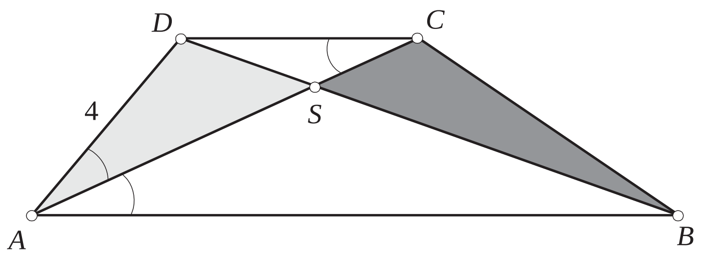
73. Нека S е пресекот на дијагоналите на конвексен четириаголник $ABCD$. Најди ја страната CD , ако се знае дека $\overline{AD} = 4\ cm$, дијагоналата AC го полови аголот кај темето A , а триаголниците ASD и BSC се еднаквоплоштни.

Решение. Од условот $P_{ASD} = P_{BSC}$ следува $P_{ACD} = P_{BCD}$. Значи, триаголниците CDA и CDB имаат еднакви висини, повлечени од темињата A и B на заедничката основа CD (види цртеж). Оттука заклучуваме дека $AB \parallel CD$ (четириаголникот $ABCD$ е трапез), од каде следува дека $\measuredangle BAC = \measuredangle DCA$, како наизменични. Оттука, и од условот дека

$$\measuredangle BAC = \measuredangle DAC,$$

добиваме

$$\measuredangle DAC = \measuredangle DCA,$$



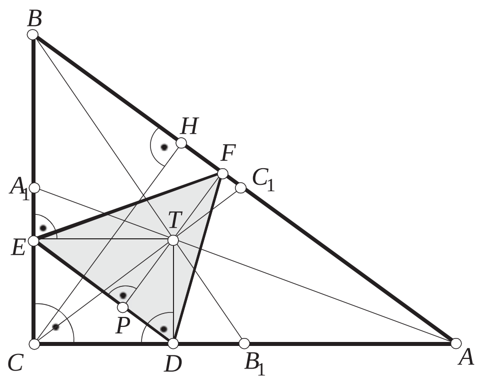
т.е. триаголникот ACD е рамнокрак, па значи $\overline{CD} = \overline{AD} = 4\ cm$.

74. Плоштината на еден правоаголен триаголник е $45 cm^2$. Најди ја плоштината на триаголникот, чии темиња се ортогонални проекции на тежиштето врз страните на триаголникот.

Решение. Нека D, E и F се ортогонални проекции на тежиштето T на $\triangle ABC$ на страните AC, BC и AB соодветно (види цртеж). Ќе покажеме дека $P_{DEF} = \frac{2}{9}P$, каде P е плоштина на $\triangle ABC$. Очигледно, четириаголникот $CDTE$ е правоаголник, па според Талесовата теорема добиваме:

$$\overline{CD} : \overline{CA} = \overline{A_1T} : \overline{A_1A} = 1:3$$

$$\overline{CE} : \overline{CB} = \overline{B_1T} : \overline{B_1B} = 1:3.$$



Оттука следува дека $DE \parallel AB$ и $\overline{DE} = \frac{1}{3}\overline{AB}$. Ако $FP \perp DE$, т.е. $FP \perp AF$ тогаш $FP \parallel CH$ и $\overline{FP} = \frac{2}{3}\overline{CH}$. За плоштината на $\triangle DEF$ добиваме:

$$P_{DEF} = \tfrac{1}{2}\overline{DE} \cdot \overline{FP} = \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{3}\overline{AB}\tfrac{2}{3}\overline{CH} = \tfrac{2}{9}P.$$

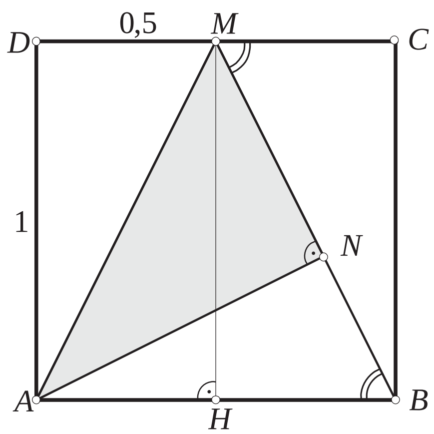
Во нашиот случај добиваме $P_{DEF} = \frac{2}{9} \cdot 45 = 10$. Значи,бараната плоштината е $10\ cm^2$.

75. Во квадратот $ABCD$ со страна 1, точката M е средина на страната CD, а N е подножје на нормалата повлечена од A на BM. Докажи дека страните на триаголникот MNA се однесуваат како $3:4:5$.

Решение. *Прв начин.* Имаме

$$\overline{AM} = \overline{BM} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

(цртеж 1), па затоа



цртеж 1

$$2P_{ABM}=\overline{AB}\cdot\overline{MH}=\overline{BM}\cdot\overline{AN}=1,\ \overline{AN}=\frac{1}{\overline{BM}}=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Од правоаголниот $\triangle AMN$ имаме

$$\overline{MN}=\sqrt{\overline{AM}^2-\overline{AN}^2}=\sqrt{\frac{5}{4}-\frac{4}{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{10}.$$

Тогаш

$$\overline{MN}:\overline{AN}:\overline{AM}=\frac{3\sqrt{5}}{10}:\frac{2\sqrt{5}}{5}:\frac{\sqrt{5}}{2}=3:4:5.$$

Втор начин. Од ΔAMD наоѓаме: $\overline{AM}=\sqrt{1+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$. На ист начин и $\overline{BM}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.
Од сличноста на триаголниците ABN и BMC ($\measuredangle B=\measuredangle M$, како наизменични, цртеж 1), следува

$$\overline{AB}:\overline{AN}=\overline{BM}:\overline{BC},\quad 1:\overline{AN}=\frac{\sqrt{5}}{2}:1 \text{ т.е. } \overline{AN}=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Од правоаголниот $\triangle AMN$ имаме

$$\overline{MN}=\sqrt{\overline{AM}^2-\overline{AN}^2}=\sqrt{\frac{5}{4}-\frac{4}{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{10},$$

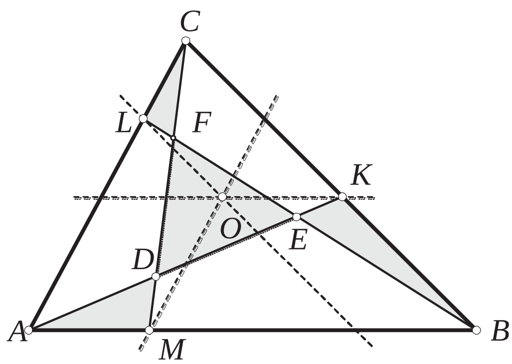
па тогаш

$$\overline{MN}:\overline{AN}:\overline{AM}=\frac{3\sqrt{5}}{10}:\frac{2\sqrt{5}}{5}:\frac{\sqrt{5}}{2}=3:4:5.$$

76. Низ произволна точка O во триаголникот ABC се повлечени три прави, паралелни на неговите страни. Секоја од нив го дели триаголникот ABC на еден трапез и еден триаголник. Три дијагонали на овие трапези, кои немаат заеднички краеви, го делат триаголникот ABC на седум делови, од кои четири се триаголници.

Докажи дека збирот на плоштините на три од нив е еднаков на плоштината на четвртиот триаголник.

Решение. Да ги означиме плоштините на триаголниците AMD, BKE, CLF и DEF со P_1, P_2, P_3 и P_0 (види цртеж), тогаш:



$$P_0=P_{ABC}-(P_{ABK}+P_{BCL}+P_{CAM})+$$
$$+P_1+P_2+P_3.$$

Бидејќи

$P_{ABK}=P_{ABO}$, $P_{BCL}=P_{BCO}$, $P_{CAM}=P_{CAO}$

како триаголници со иста основа и еднакви висини, имаме

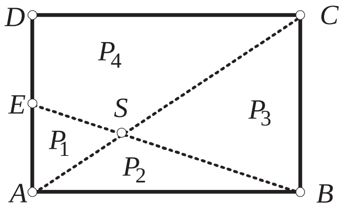
$$P_{ABK}+P_{BCL}+P_{CAM}=P_{ABO}+P_{BCO}+P_{CAO}=P_{ABC}$$

па конечно добиваме

$$P_0=P_{ABC}-P_{ABC}+(P_1+P_2+P_3),\text{ т.е. } P_0=P_1+P_2+P_3.$$

77. Нека $ABCD$ е правоаголник и E средина на страната DA. Со повлекувањето на отсечките EB и AC правоаголникот е поделен на четири дела: три триаголници и еден четириаголник. Да означиме $P_1 = P_{\triangle ASE}$, $P_2 = P_{\triangle ABS}$, $P_3 = P_{\triangle SBC}$ и $P_4 = P_{ESCD}$, каде $\{S\} = EB \cap AC$. Најди го односот $P_1 : P_2 : P_3 : P_4$.

Решение. *Прв начин.* Нека $\overline{AB} = \overline{CD} = a$ и $\overline{AD} = \overline{BC} = b$. Тогаш $\overline{AE} = \overline{ED} = \frac{b}{2}$. Натаму $\measuredangle ASE = \measuredangle BSC$ и $\measuredangle SAE = \measuredangle SCB$ па $\Delta ASE \sim \Delta CSB$. Бидејќи $\overline{AE} : \overline{BC} = 1:2$ следува дека $P_1 : P_3 = 1:4$, односно $P_3 = 4P_1$. Од друга страна $P_1 + P_4 = P_2 + P_3$, па со замена на $P_3 = 4P_1$ добиваме $P_4 = 3P_1 + P_2$. Ако со P ја означиме плоштината на правоаголникот имаме $P_1 + P_4 = \frac{P}{2}$, односно $4P_1 + P_2 = \frac{P}{2}$. Натаму

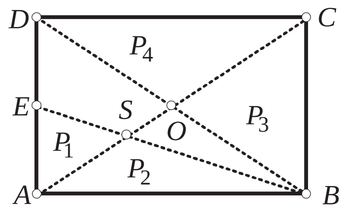


$$P_1 + P_2 = P_{\Delta ABE} = \frac{a\frac{b}{2}}{2} = \frac{ab}{4} = \frac{P}{4}.$$

Од равенствата $4P_1 + P_2 = \frac{P}{2}$ и $P_1 + P_2 = \frac{P}{4}$ добиваме $3P_1 = \frac{P}{4}$, односно $P_1 = \frac{P}{12}$ и $P_2 = \frac{P}{6} = \frac{2P}{12}$. Користејќи ги P_1 и P_2 и равенството $P_4 = 3P_1 + P_2$ добиваме $P_4 = \frac{5P}{12}$, а од равенството $P_3 = 4P_1$ добиваме $P_3 = \frac{4P}{12}$. Според тоа,

$$P_1 : P_2 : P_3 : P_4 = \frac{P}{12} : \frac{2P}{12} : \frac{4P}{12} : \frac{5P}{12} = 1:2:4:5.$$

Втор начин. Да ја повлечеме дијагоналата BD во правоаголникот. Нека $\{O\} = AC \cap BD$. Тогаш AO и BE се тежишни линии во триаголникот ABD па S е неговото тежиште. Значи $\overline{AS} = 2\overline{SO} = 2\frac{1}{3}\overline{AO} = \frac{1}{3}\overline{AC}$ па $\overline{SC} = \frac{2}{3}\overline{AC}$. Натаму



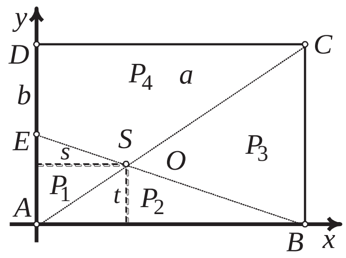
$$P_3 : P_2 = \overline{SC} : \overline{AS} = \frac{2}{3}\overline{AC} : \frac{1}{3}\overline{AC} = 2:1$$

(триаголниците ASB и SBC имаат еднакви висини од B) па $P_3 = 2P_2$. Од друга страна $P_{\triangle ABE} = \frac{1}{2}P_{\triangle ABD} = \frac{1}{4}P_{ABCD} = \frac{1}{2}P_{\triangle ABC}$ (BE е тежишна линија на триаголникот ABD), па имаме $P_1 + P_2 = \frac{1}{2}(P_2 + P_3)$. Од последното равенство и од равенството $P_3 = 2P_2$ добиваме $P_1 = \frac{1}{2}P_2$. Уште важи $P_1 + P_4 = P_2 + P_3$. Ако во него ги замениме равенствата $P_3 = 2P_2$ и $P_1 = \frac{1}{2}P_2$ добиваме $P_4 = \frac{5}{2}P_2$. Според тоа $P_1 : P_2 : P_3 : P_4 = \frac{1}{2}P_2 : P_2 : 2P_2 : \frac{5}{2}P_2 = 1:2:4:5$.

Трет начин. Нека x и y се висините во триаголниците ASE и ABS спуштени од темето S, соодветно, и нека $a = \overline{AB}$, $b = \overline{AD}$. Тогаш $P_1 + P_2 = \frac{a\frac{b}{2}}{2} = \frac{ab}{4}$ и $P_2 + P_3 = \frac{ab}{2}$. Од друга страна $P_1 = \frac{1}{2}\frac{b}{2}x = \frac{bx}{4}$, $P_2 = \frac{ay}{2}$ и $P_3 = \frac{b(a-x)}{2}$, па заменувајќи во претходните равенки добиваме $\frac{bx}{4} + \frac{ay}{2} = \frac{ab}{4}$ и $\frac{ay}{2} + \frac{b(a-x)}{2} = \frac{ab}{2}$. Со решавање на овој систем по x и y добиваме $x = \frac{a}{3}$, $y = \frac{b}{3}$. Сега $P_1 = \frac{bx}{4} = \frac{b}{4}\cdot\frac{a}{3} = \frac{ab}{12}$,

$P_4 = ab-(P_1+P_2+P_3) = \frac{5ab}{12}$, $\quad P_2 = \frac{ax}{2} = \frac{a}{2}\cdot\frac{b}{3} = \frac{ab}{6}$ $\quad$ и $\quad P_3 = \frac{b(a-x)}{2} = \frac{b}{2}(a-\frac{a}{3}) = \frac{ab}{3}$.

Според тоа $P_1 : P_2 : P_3 : P_4 = \frac{1}{12} : \frac{1}{6} : \frac{1}{3} : \frac{5}{12} = 1:2:4:5$.

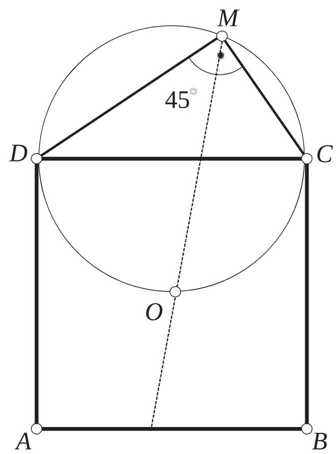


Четврт начин. Да го ставиме правоаголникот во правоаголен координатен систем со почеток во A, апсциса правата AB и ордината правата AD. Нека $D(0,\ b)$ и $B(a,\ 0)$. Тогаш $C(a,\ b)$ и $E(0, \frac{b}{2})$. Нека $S(s,\ t)$. Да ги напишеме равенките на правите AC и BE. Равенката на AC гласи $y = \frac{b}{a}x$, а на EB гласи $y = -\frac{b}{2a}x + \frac{b}{2}$. Натаму ги пресметуваме координатите на нивниот пресек s и t и добиваме $s = \frac{a}{3}$ и $t = \frac{b}{3}$. Сега имаме

$$P_1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{b}{2}s = \frac{1}{2}\cdot\frac{b}{2}\cdot\frac{a}{3} = \frac{ab}{12}, \qquad P_2 = \frac{at}{2} = \frac{a}{2}\cdot\frac{b}{3} = \frac{ab}{6},$$

$$P_3 = \frac{b(a-s)}{2} = \frac{b}{2}(a-\frac{a}{3}) = \frac{ab}{3} \quad \text{и} \quad P_4 = \frac{ab}{2} - P_1 = \frac{5ab}{12}.$$

Според тоа бараниот однос е $1:2:4:5$.



78. Страната CD на квадратот $ABCD$ е хипотенуза на правоаголен триаголник, конструиран надвор од квадратот. Докажи дека симетралата на правиот агол на правоаголниот триаголник ја дели плоштината на квадратот на половина.

Решение. Нека DCM е правоаголниот триаголник со хипотенуза DC (види цртеж). Опишаната кружница околу $\triangle DCM$ минува низ точката O - центарот на квадратот $ABCD$. Бидејќи $\overline{OD} = \overline{OC}$ следува дека симетралата на аголот DMC ќе минува низ точката O, па значи ќе ја дели плоштината на квадратот $ABCD$ на два еднакви дела.

79. Определи ги сите четириаголници со најголема плоштина, кај кои производот на должините на секои негови две соседни страни е еднаков на 1.

Решение. Нека a, b, c и d се должини на страните на четириаголникот $ABCD$, при што $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$, $\overline{CD} = c$ и $\overline{DA} = d$. Од условот на задачата, имаме

$$ab = 1,\ bc = 1,\ cd = 1 \text{ и } da = 1.$$

Од првите две равенства имаме $ab = bc$ и бидејќи $b \neq 0$ (должина на страна), добиваме $a = c$. Аналогно, од второто и третото равенство, добиваме $bc = cd$, и бидејќи $c \neq 0$ (должина на страна) добиваме $b = d$. Бидејќи паровите спротивни страни се со еднаква должина, добиваме дека четириаголникот е паралелограм. Од фамилијата паралелограми со дадени страни, најголема плоштина има правоаголникот. Бидејќи $a = c$ и $b = d$ и $P = 1$, добиваме $ab = 1$, т.е. $b = \frac{1}{a}$. Според тоа, должините на страните се a и $\frac{1}{a}$.

80. Градовите *A*, *B* и *C* се поврзани со праволиниски патишта. Покрај патот *A*-*B* се наоѓа квадратно поле со страна $0,5\overline{AB}$, а покрај патот *B*-*C* се наоѓа квадратно поле со страна $\overline{BC}$, покрај патот *A*-*C* постои шума со правоаголна форма, чија должина е $\overline{AC}$, а ширина 4 километри. Определи ја плоштината на шумата, ако таа е за $20\ km^2$ километри поголема од збирот на плоштините на квадратните полиња.

Решение. Нека $\overline{AB}=a,\overline{BC}=b,\overline{AC}=x$. Притоа $a+b\geq x$. Според условот

$$4x=\frac{a^2}{4}+b^2+20$$

$$x=\frac{a^2}{16}+\frac{b^2}{4}+5$$

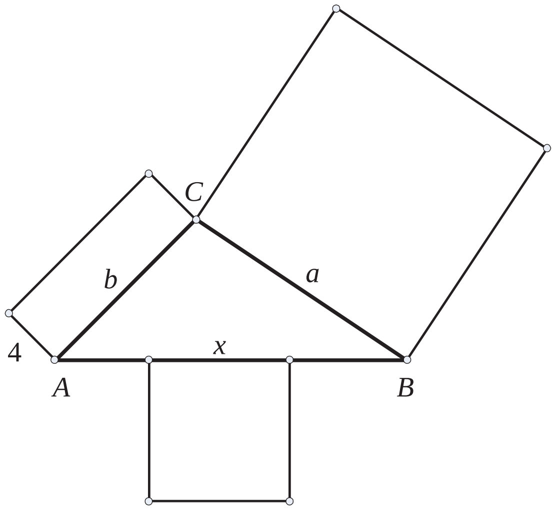
$$a+b\geq\frac{a^2}{16}+\frac{b^2}{4}+5$$

$$16a+16b\geq a^2+4b^2+80$$

$$a^2-16a+4b^2-16b+80\leq 0$$

$$(a-8)^2+4(b-2)^2\leq 0$$

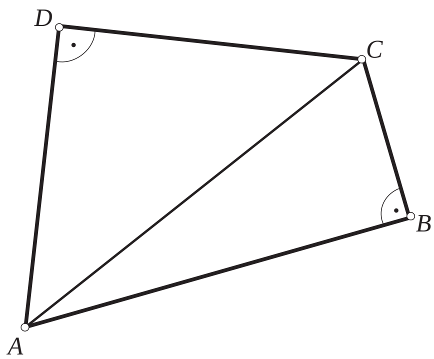
$$a=8,b=2.$$



Значи, $x=10$, па зотоа $P=40\ km^2$.

81. Пресметај ја плоштината на четириаголникот $ABCD$, ако: $\measuredangle B=\measuredangle D=90^\circ$, $\overline{AB}=24\ cm$, $\overline{BC}=7\ cm$, $\overline{CD}=15\ cm$.

Решение. Нека $ABCD$ е дадениот четириаголник (види цртеж). Очигледно, неговата плоштина е збир на плоштините на правоаголните триаголници ABC и ACD. За нивното одредување доволно е да ја најдеме должината на страната AD. Имаме



$$\overline{AD}^2+\overline{CD}^2=\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2$$

$$\overline{AD}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-\overline{CD}^2$$

$$\overline{AD}^2=24^2+7^2-15^2$$

$$\overline{AD}^2=400,$$

па $\overline{AD}=20$. Тогаш

$$P=\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{BC}+\frac{1}{2}\overline{AD}\cdot\overline{CD}$$

$$P=\frac{1}{2}\cdot 24\cdot 7+\frac{1}{2}\cdot 20\cdot 15=234.$$

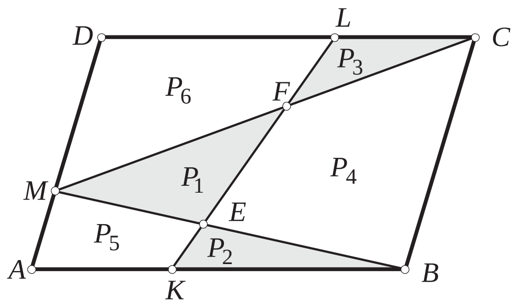
Значи, бараната плоштина е $234\ \mathrm{cm}^2$.

82. На страните AB и CD на паралелограмот $ABCD$ се избрани точки K и L, такви што $\overline{AK}=\overline{CL}$, а M е произволна точка на страната AD. Правите KL,

BM и CM го разбиваат паралелограмот на три триаголника и три четириаголника.

Докажи дека плоштината на еден од триаголниците е еднаква на збирот на плоштините на другите два триаголника, а плоштината на еден од четириаголниците е еднаква на збирот од плоштините на другите два четириаголника.

Решение. Ќе покажеме дека плоштината P_1 на $\triangle MEF$ е еднаква на збирот на плоштините P_2 и P_3 на триаголниците KBE и FCL (види цртеж).



Бидејќи плоштината на $\triangle BCM$ е половина од плоштината P на паралелограмот $ABCD$, исто така и плоштината на трапезот $KBCL$ е половина од плоштината на паралелограмот $ABCD$, ќе имаме

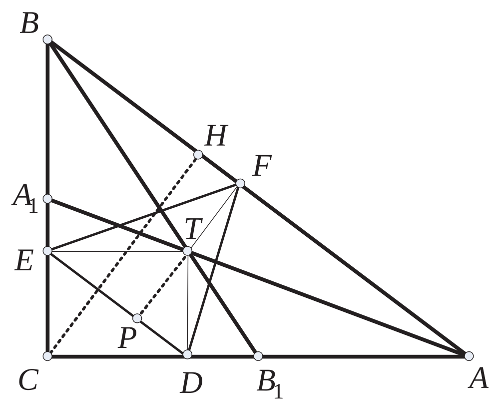
$P_1 + P_4 = \frac{P}{2} = P_2 + P_4 + P_3$, т.е. $P_1 = P_2 + P_3$.

Сега не е тешко да докажеме дека $P_4 = P_5 + P_6$. Имаме,

$$P_1 + P_4 = \frac{P}{2} = P_5 + P_1 + P_6, \text{ т.е. } P_4 = P_5 + P_6.$$

83. Плоштината на еден правоаголен триаголник е P. Определи ја плоштината на триаголникот, чии темиња се ортогонални проекции на тежиштето врз страните на триаголникот.

Решение. Нека D, E и F се ортогоналните проекции на тежиштето T на правоаголниот $\triangle ABC$ на страните AC, BC и AB, соодветно (C е темето на правиот агол). Очигледно, четириаголникот $CDTE$ е правоаголник, па



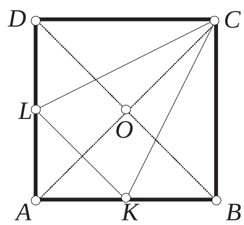
$$\overline{CD} : \overline{CA} = \overline{A_1T} : \overline{A_1A} = 1:3 \text{ и}$$

$$\overline{CE} : \overline{CB} = \overline{B_1T} : \overline{B_1B} = 1:3.$$

Оттука следува дека DE и AB се паралелни и $\overline{DE} = \frac{1}{3}\overline{AB}$. Нека правата FT ја сече ED во точка P. Тогаш, FP е висина во триаголникот DFE и затоа $\overline{FP} = \frac{2}{3}\overline{CH}$, каде што CH е висината . Конечно,

$$P_{\triangle DFE} = \frac{\overline{DE}\cdot\overline{FP}}{2} = \frac{2}{9}\cdot\frac{\overline{AB}\cdot\overline{CH}}{2} = \frac{2}{9}P.$$

84. Даден е квадрат $ABCD$ со должина на страна a, а средините на страните AB и AD се точките K и L, соодветно. Пресметај ја плоштината на триаголникот KLC.



Решение. *Прв начин.* Должината на дијагоналата на квадратот е $d = a\sqrt{2}$. Отсечката LK е средна линија во триаголникот ABD, која е паралелна со дијагоналата BD па според тоа нејзината должина е еднаква на $\overline{LK}=\frac{\sqrt{2}}{2}a$. Триаголникот AOL е рамнокрак правоаголен триаголник со хипотенуза AL, па според тоа

$$\overline{AO}=\overline{LO}=\tfrac{1}{2}\overline{LK}=\tfrac{1}{2}\tfrac{\sqrt{2}}{2}a=\tfrac{\sqrt{2}}{4}a.$$

Значи, висината на триаголникот LKC е еднаква на

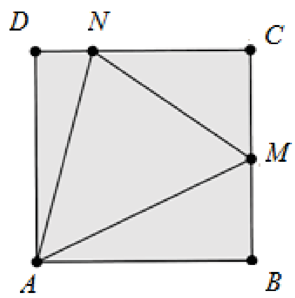
$$h=\overline{CO}=a\sqrt{2}-\tfrac{\sqrt{2}}{4}a=a\sqrt{2}(1-\tfrac{1}{4})=a\tfrac{3\sqrt{2}}{4}.$$

Конечно, плоштината на триаголникот KLC е еднаква на $P=\frac{1}{2}a\frac{\sqrt{2}}{2}a\frac{3\sqrt{2}}{4}=\frac{3}{8}a^2$.

Втор начин. Очигледно $P_{\triangle KAL}=\frac{a^2}{8}$ и $P_{\triangle CDL}=P_{\triangle CBK}=\frac{a^2}{4}$. Според тоа,

$$P_{\triangle CLK}=a^2-\tfrac{a^2}{8}-2\cdot\tfrac{a^2}{4}=\tfrac{3}{8}a^2.$$

85. Дадени се точките M и N на страните BD и CD, соодветно, на квадратот $ABCD$ така што збирот на плоштините на $\triangle ABM$ и $\triangle AND$ е еднаков со плоштината на $\triangle NMC$. Ако $\overline{DN}=3$ и $\overline{BM}=5$, колкава е плоштината на $\triangle AMN$?



Решение. Нека страната на квадратот е a. Тогаш за плоштината на $\triangle ABM$ имаме $P_1=\frac{a\cdot\overline{BM}}{2}=\frac{5a}{2}$, за плоштината на $\triangle AND$ имаме $P_2=\frac{a\cdot\overline{DN}}{2}=\frac{3a}{2}$ и за плоштината на $\triangle NMC$ добиваме

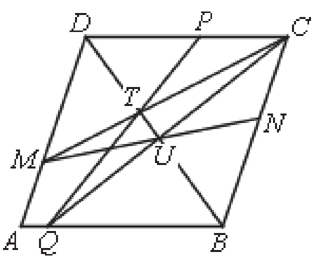
$$P_3=\frac{\overline{NC}\cdot\overline{MC}}{2}=\frac{(a-3)(a-5)}{2}.$$

Според условот во задачата, $P_1+P_2=P_3$, па важи $8a=(a-3)(a-5)$ и оттука ја добиваме равенката $a^2-16a+15=0$. Нејзини решенија се 1 и 15, но страната на квадратот, според условите, не може да е 1. Значи, $a=15$ и за плоштината на $\triangle AMN$ добиваме:

$$P=15^2-2\cdot\tfrac{12\cdot 10}{2}=225-120=105.$$

86. Точките M и N се на страните AD и BC, соодветно, на ромбот $ABCD$. Ако $\{T\}=MC\cap BD$, $\{U\}=MN\cap BD$, $\{Q\}=CU\cap AB$, $\{P\}=QT\cap CD$ докажи дека плоштините на триаголниците QCP и MNC се еднакви.

Решение. Височините на триаголниците QCP и MNC од темињата Q и M се еднакви. Затоа, за да докажеме дека плоштините на овие триаголници се еднакви доволно е да докажеме дека $\overline{PC}=\overline{CN}$ или $\overline{PD}=\overline{NB}$. Од сличноста на триаголниците QBU и CDU имаме $\frac{\overline{BU}}{\overline{UD}}=\frac{\overline{UQ}}{\overline{UC}}$, а од сличноста на триаголниците BNU и DMU имаме $\frac{\overline{BU}}{\overline{UD}}=\frac{\overline{UN}}{\overline{UM}}$. Значи, ва-

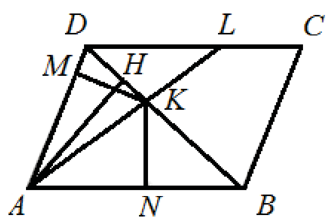


жи $\frac{\overline{UQ}}{\overline{UN}} = \frac{\overline{UC}}{\overline{UM}}$ и бидејќи $\measuredangle QUN = \measuredangle CUM$ следува $\triangle QUN \sim \triangle CUM$ Оттука, $\measuredangle MCU = \measuredangle NQU$ и затоа $MC \parallel QN$. Слично, се докажува дека $MP \parallel QC$. Тогаш, $\triangle MDP \sim \triangle CBQ$ и $\triangle BNQ \sim \triangle DMC$, па затоа $\frac{\overline{DP}}{\overline{BQ}} = \frac{\overline{MD}}{\overline{CB}}$ и $\frac{\overline{BN}}{\overline{DM}} = \frac{\overline{BQ}}{\overline{DC}}$. Од последните две равенства добиваме

$$\overline{DP} \cdot \overline{CB} = \overline{MD} \cdot \overline{BQ} = \overline{BN} \cdot \overline{DC}$$

и по кратењето со $\overline{CB} = \overline{DC}$ добиваме $\overline{DP} = \overline{BN}$.

87. Даден е паралелограм $ABCD$. Симетралата на $\measuredangle DAB$ ја сече страната DC во точка L, а дијагоналата BD во точка K, таква да $\overline{DK} : \overline{KB} = 3:4$. Пресметај ја должината на отсечката LC, ако периметарот на паралелограмот е 28.



Решение. Бидејќи AL е симетрала на $\measuredangle DAB$ имаме $\measuredangle DAL = \measuredangle LAB = \measuredangle ALD$, па $\triangle ALD$ е рамнокрак. Да означиме $\overline{DL} = \overline{AD} = b$ и $\overline{AB} = \overline{DC} = a$. Имаме

$$P_{\triangle AKD} : P_{\triangle ABK} = \frac{\overline{AD} \cdot \overline{MK}}{2} : \frac{\overline{AB} \cdot \overline{NK}}{2} = \overline{AD} : \overline{AB} = b : a,$$

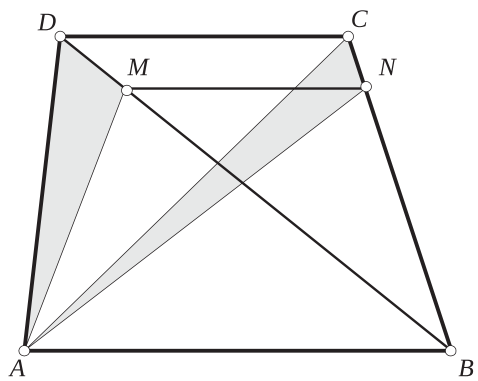
каде MK и NK се соодветните висини спуштени кон страните и за нив важи $\overline{MK} = \overline{NK}$ затоа што точката K, како точка од симетралата на $\measuredangle DAB$ е подеднакво оддалечена од краците на аголот.

Од друга страна,

$$P_{\triangle AKD} : P_{\triangle ABK} = \frac{\overline{DK} \cdot \overline{AH}}{2} : \frac{\overline{BK} \cdot \overline{AH}}{2} = \overline{DK} : \overline{KB} = 3:4.$$

Сега, изедначувајќи ги односите на плоштините добиваме $\frac{b}{a} = \frac{3}{4}$, а од периметарот на паралелограмот $2(a+b) = 28$, имаме $b = 6, a = 8.$ Конечно, $\overline{LC} = a - b = 2$.

88. На дијагоналата BD од трапезот $ABCD$ е избрана произволна точка M. Правата низ M, паралелна со основата AB, го сече кракот BC во точката N. Докажи дека триаголниците ACN и ADM имаат еднакви плоштини.



Решение. Висините на триаголниците ABM и ABN се еднакви ($MN \parallel AB$) па затоа $P_{ABM} = P_{ABN}$. Аналогно, $P_{ABD} = P_{ABC}$.

Од

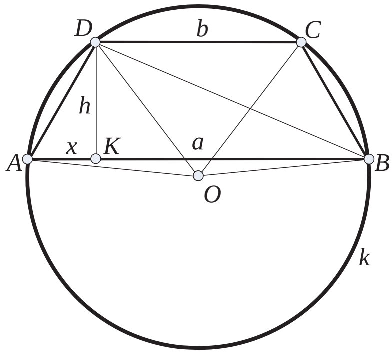
$$P_{ABD} = P_{ABM} + P_{AMD} \text{ и}$$
$$P_{ABC} = P_{ABN} + P_{ANC},$$

следува

$$P_{AMD} = P_{ANC}.$$

89. Висината на рамнокрак трапез е h. Од центарот на опишаната кружница околу трапезот неговиот крак се гледа под агол од 60°. Пресметај ја неговата плоштина.

Решение. Нека $ABCD$ е рамнокрак трапез со основи AB и CD. Подножјето на висината спуштена од темето D врз основата AB ќе го означиме со K. Според тоа $\overline{DK}=h$. Ќе воведеме ознаки $\overline{AK}=x$, $\overline{AB}=a$ и $\overline{CD}=b$. Бидејќи трапезот е рамнокрак, имаме $\overline{BK}=b+x$ и $\overline{AB}=b+2x$



Централниот агол над лакот AD е еднаков на 60°, т.е. $\measuredangle AOD=60^\circ$, па според тоа за периферниот агол над истиот лак имаме

$$\measuredangle KAD=\measuredangle ABD=30^\circ.$$

Од правоаголниот триаголник DKB, имаме

$$b+x=\overline{KB}=\overline{DK}\cdot\operatorname{ctg}30^\circ=h\sqrt{3}.$$

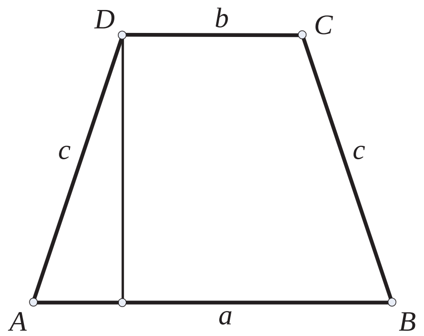
Но тогаш $2(b+x)=2h\sqrt{3}$, односно

$$a+b=b+2x+b=2(b+x)=2h\sqrt{3}.$$

Според тоа, $P=\frac{a+b}{2}h=\frac{2h\sqrt{3}}{2}h=h^2\sqrt{3}$.

90. Во рамнокрак трапез со плоштина 20 е впишана кружница со радиус 2. Да се определи должината на секоја од страните на трапезот.

Решение. Дијаметарот на впишаната кружница е еднаков на висината h на дадениот трапез. Значи, $h=4$. За плоштината на трапезот имаме $P=\frac{a+b}{2}h=20$,



од каде се добива дека $a+b=10$. Бидејќи дадениот трапез е тангентен, збировите на должините на спротивните страни му се еднакви па $a+b=2c$, од каде добиваме дека $c=5$. Од питагоровата теорема добиваме дека: $\frac{a-b}{2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$. Конечно решевајќи го системот равенки

$$\begin{cases}a+b=10\\a-b=6\end{cases},$$

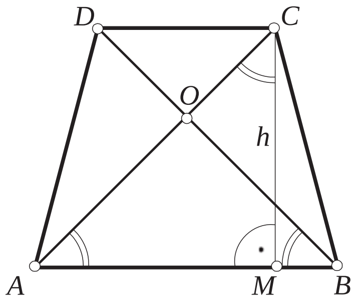
добиваме $a=8$ и $b=2$.

91. Висината на рамнокрак трапез е h, а неговата плоштина е h^2. Под кој агол се сечат дијагоналите на трапезот?

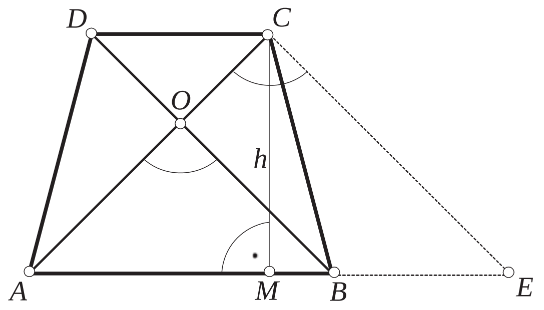
Решение. *Прв начин,* Во рамнокракиот трапез $ABCD$ ја повлекуваме висината $\overline{CM}=h$ (цртеж 1.) По услов $P=h^2$, т.е. $\frac{a+b}{2}h=h^2$, од каде што $h=\frac{a+b}{2}$. Бидејќи $\overline{AM}=\frac{a+b}{2}$, следува $\overline{AM}=\overline{CM}=h$, т.е. $\triangle AMC$ е рамнокрак правоаголен, т.е.

$$\measuredangle MAC=\measuredangle MCA=45^\circ.$$

Но, тогаш и $\measuredangle ABD=45^\circ$, бидејќи трпаезот $ABCD$ е рамнокрак, од каде следува дека $\triangle ABO$ е рамнокрак правоаголен.Следствено, аголот меѓу дијагоналите на трапезот е 90°.



цртеж 1

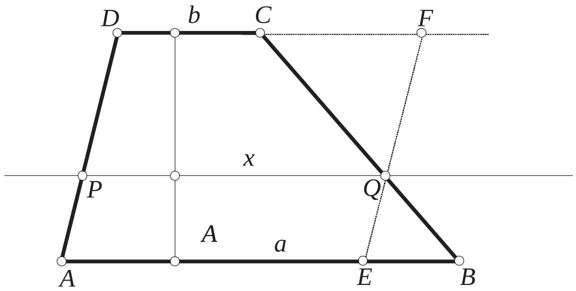


цртеж 2

Втор начин. Повлекуваме $CE \parallel DB$ (цртеж 2) и го добиваме рамнокракиот $\triangle AEC$, со висина $\overline{CM}=h$ и основа $\overline{AE}=a+b$. Од условот $P=h^2$ следува $2h=a+b$. Значи, $\overline{AE}=2h$. Бидејќи висината $\overline{CM}=h$ во рамнокракиот $\triangle AEC$ е и тежишна линија, а е еднаква на половината од основата, следува дека $\triangle AEC$ е правоаголен со $\triangle AECACE=90^\circ$. Но, $\measuredangle AOB=\measuredangle ACE=90^\circ$, што значи дека дијагоналите се сечат под прав агол.

92. Даден е трапезот $ABCD$ со основи $\overline{AB}=a$ и $\overline{CD}=b$. Најди ја должината на отсечката за која се исполнети условите

- паралелна е со AB и CD
- го дели трапезот на два дела со еднакви плоштини
- нејзините крајни точки лежат на краците на трапезот.



Решение. *Прв начин.* Нека PQ е отсечката која е паралелна со основите на трапезот, го дели трапезот на два трапези $ABPQ$ и $PQCD$ со еднакви плоштини и има должина x. Отсечката EF е паралелна со бочната страна AD, крајните точки припаѓаат на правите на кои што лежат основите на трапезот и минува низ точката Q (види цртеж). Ако висината на трапезот $ABPQ$ е h_1, висината на трапезот $PQCD$ е h_2 и висината на $ABCD$ е h, тогаш $h_1+h_2=h$. Од условот на задачата $P_{ABQP}=P_{PQCD}$, па според тоа $\frac{a+x}{2}h_1=\frac{b+x}{2}h_2$, па според тоа $\frac{a+x}{b+x}=\frac{h_2}{h_1}$. Триаголниците BEQ и CFQ се слични (имаат еднакви агли). Бидејќи $\overline{EB}=a-x$ и $\overline{CF}=x-b$, добиваме $\frac{a-x}{x-b}=\frac{h_1}{h_2}$, т.е. $\frac{h_2}{h_1}=\frac{x-b}{a-x}$. Според тоа, $\frac{a+x}{b+x}=\frac{x-b}{a-x}$. Од последното равенство имаме

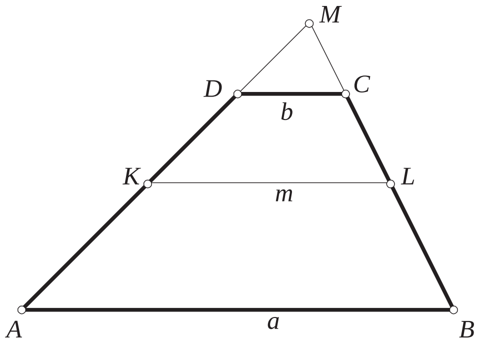
$$(x-b)(b+x)=(a+x)(a-x),$$

т.е.

$$a^2-x^2=x^2-b^2.$$

Значи, $x=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

Втор начин. Нека правата $p \parallel AB \parallel CD$ ги сече краците AD и BC во точките K и L соодветно и го преполовува трапезот $ABCD$ на два еднаквоплоштни дела. Нека $\overline{KL} = m$. Ги продолжуваме краците AD и BC до нивниот пресек M (види цртеж). Тогаш, триаголниците $\triangle ABM$, $\triangle KLM$ и $\triangle DCM$ се слични, па следи дека



$$P_{ABM} : P_{KLM} : P_{DCM} = a^2 : m^2 : b^2,$$

Односно

$$P_{ABM} = ka^2,\ P_{KLM} = km^2 \text{ и } P_{DCM} = kb^2.$$

Од условот $P_{ABLK} = P_{KLCD}$ добиваме

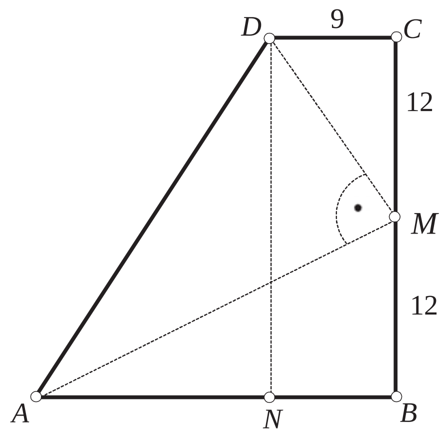
$$P_{ABM} - P_{KLM} = P_{KLM} - P_{DCM}, \text{ т.е } ka^2 - km^2 = km^2 - kb^2,$$

од каде се добива $m^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$, т.е. $m = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

93. Точката M е средина на помалиот крак на правоаголниот трапез $ABCD$. Пресметај ја плоштината на трапезот, ако $\overline{BC} = 24\ cm$, $\overline{CD} = 9\ cm$ и $\measuredangle AMD = 90^\circ$.

Решение. *Прв начин.* За да ја пресметаме плоштината на трапезот $ABCD$ треба да ја најдеме $\overline{AB}$. Лесно воочуваме дека правоаголните триаголници ABM и MCD (види цртеж) се слични (имаат по еден еднаков остар агол - аглите при темињата A и M се еднакви како агли со заемно нормални краци), па имаме:

$$\overline{AB} : \overline{BM} = \overline{MC} : \overline{CD}, \qquad \overline{AB} : 12 = 12 : 9$$



од каде што $\overline{AB} = 16\ cm$. Тогаш плоштината на трапезот е

$$P = \frac{\overline{AB}+\overline{CD}}{2} \cdot \overline{BC} = \frac{16+9}{2} \cdot 24 = 300\ cm^2.$$

Втор начин. Според условите од задачата, следува дека $BC \perp AB$, т.е. M е средина на кракот BC (види цртеж). Треба да ја определиме основата AB. Повлекуваме $DN \perp AB$, тогаш $\overline{NB} = \overline{DC} = 9\ cm$.

Нека $\overline{AN} = x$. Од правоаголните триаголници AND, AMD, ABM и MCD имаме:

$$\overline{AD}^2 = \overline{AN}^2 + \overline{ND}^2 = x^2 + 24^2 = x^2 + 576,$$

$$\overline{AD}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{MD}^2 = (\overline{AB}^2 + \overline{BM}^2) + (\overline{MC}^2 + \overline{CD}^2) =$$

$$= (x+9)^2 + 12^2 + 12^2 + 9^2 = x^2 + 18x + 450.$$

Оттука: $x^2 + 18x + 450 = x^2 + 576$, т.е. $x = 7$. Значи, $\overline{AB} = 16\ cm$, па бараната плоштина е: $P = \frac{\overline{AB}+\overline{CD}}{2} \cdot \overline{BC} = \frac{16+9}{2} \cdot 24 = 300\ cm^2$.

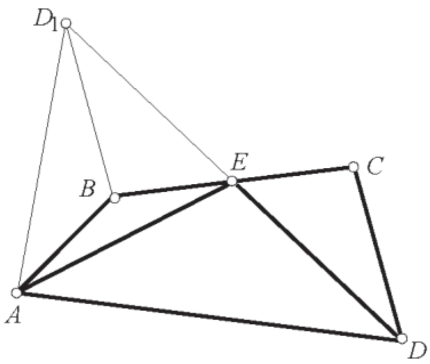
94. Во четириаголникот $ABCD$, E е средина на страната BC и плоштината на триаголникот AED е двапати помала од плоштината на четириаголникот $ABCD$. Докажи дека AB е паралелна со CD.

Решение. Нека $ABCD$ е четириаголникот во кој E е средина на BC, при што $P_{ABCD} = 2P_{AED}$. Точката D ќе ја пресликаме централно симетрично со центар на симетрија E. Нека D_1 е нејзината слика. Бидејќи $\triangle ECD \cong \triangle EBC$ имаме $P_{ECD} = P_{EBC}$, од каде добиваме

$$P_{ABCD} = 2(P_{ABE} + P_{ECD}) = 2(P_{ABE} + P_{EBD_1}) . \qquad (1)$$

Од друга страна $P_{AED} = P_{AED_1}$ (имаат иста должина на основа и висината спуштена врз неа). Значи

$$P_{ABCD} = 2P_{AED_1} \qquad (2)$$



Од (1) и (2) добиваме

$$P_{ABE} + P_{EBD_1} = P_{AED_1} .$$

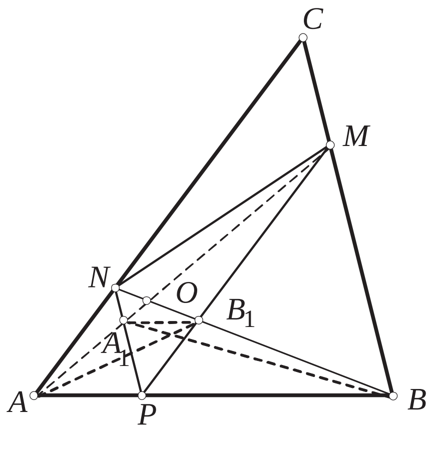
Ако A, B и D_1 не се колинеарни, последното равенство не е точно. Значи A, B и D_1 се колинеарни.

Од колинеарноста на A, B и D_1 и од тоа што $DC \parallel BD_1$, добиваме дека $AB \parallel CD$.

95. На страните BC, CA и AB на $\triangle ABC$ се земени точки M, N и P, соодветно, така што четириаголникот $CNPM$ е паралелограм. Нека $\{O\} = AM \cap BN$, $\{A_1\} = AM \cap PN$ и $\{B_1\} = BN \cap PM$. Докажи дека $P_{MON} = P_{PB_1OA_1}$.

Решение. *Прв начин.* Од $AN \parallel B_1M$ следува дека $P_{NB_1M} = P_{AB_1M}$ и затоа

$$P_{MON} = P_{NB_1M} - P_{MOB_1}$$
$$= P_{AB_1M} - P_{MOB_1} = P_{AOB_1} .$$



Аналогно се докажува дека $P_{MON} = P_{A_1OB}$.

Според тоа, $P_{AOB_1} = P_{A_1OB}$. Оттука следува дека $P_{A_1B_1P} = P_{A_1B_1A}$ па затоа

$$P_{PB_1OA_1} = P_{A_1B_1P} + P_{A_1B_1O} = P_{A_1B_1A} + P_{A_1B_1O}$$
$$= P_{AB_1O} = P_{MON} .$$

Втор начин. Да воведеме ознаки како на цртежот:

$$\overline{CN} = y, \overline{CM} = x, \overline{NA} = p_1, \overline{B_1M} = p_2 ,$$

$$P_{A_1ON} = P_1, P_{OA_1PB_1} = P_2, P_{B_1OM} = P_3 \text{ и } P_{MON} = P_4 .$$

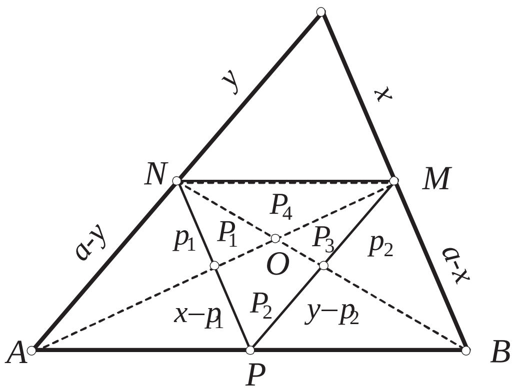
Тогаш важи $\frac{P_2+P_3}{P_1+P_4} = \frac{x-p_1}{p_1}$ (висинате спуштени од темето M се еднакви за триаголниците NA_1M и A_1PM).

Аналогно се докажува дека $\frac{P_4+P_3}{P_1+P_2}=\frac{p_2}{y-p_2}$. Натаму $\triangle ANP \sim \triangle ABC \sim \triangle PMB$, па затоа

$$\frac{b-y}{x}=\frac{y}{a-x} \quad \Rightarrow \quad \frac{a-x}{x}=\frac{y}{b-y} \qquad (1)$$

$$\frac{x}{p_1}=\frac{a-x}{x-p_1} \quad \Rightarrow \quad \frac{x-p_1}{p_1}=\frac{a-x}{x} \qquad (2)$$

$$\frac{y}{p_2}=\frac{b-y}{y-p_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{p_2}{y-p_2}=\frac{y}{b-y} \qquad (3)$$



Користејќи ги (1), (2) и (3) добиваме

$$\frac{P_2+P_3}{P_1+P_4}=\frac{x-p_1}{p_1}\overset{(2)}{=}\frac{a-x}{x}\overset{(1)}{=}\frac{y}{b-y}\overset{(3)}{=}\frac{p_2}{y-p_2}=\frac{P_4+P_3}{P_1+P_2},$$

односно

$$P_2(P_1+P_3+P_2)=P_4(P_1+P_3+P_4). \qquad (4)$$

i) Ако $P_2>P_4$, тогаш

$$P_1+P_2+P_3>P_1+P_3+P_4 \text{ и } P_2(P_1+P_3+P_2)>P_4(P_1+P_3+P_4)$$

што е во спротивност со (4);

ii) Ако $P_2<P_4$ аналогно добиваме

$$P_2(P_1+P_3+P_2)<P_4(P_1+P_3+P_4),$$

што е повторно во спротивност со (4).

Останува $P_2=P_4$, што требаше да се докаже.

96. Триаголникот ABC има плоштина 1, A_1 е средина на BC, B_1 е средина на AC и C_1 е средина на AB. Нека M е точка на отсечката C_1B, L е точка на отсечката A_1C и K е точка на отсечката B_1A. Колкава е најмалата заедничка плоштина на триаголниците $A_1B_1C_1$ и KLM ?

Решение: Точките M_1 и M_2, L_1 и L_2, K_1 и K_2 ги означуваме како на цртежот. Да забележиме дека

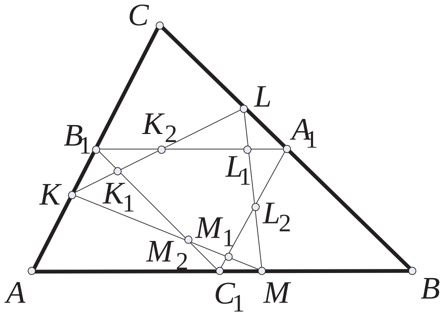
$$\frac{\overline{C_1M_1}}{\overline{M_1L_2}}\le\frac{\overline{AK}}{\overline{KC}}\le\frac{\overline{AB_1}}{\overline{B_1C}}=1.$$

Од ова добиваме дека $P_{\triangle C_1M_1M_2}\le P_{\triangle M_1L_2M_2}$.

Аналогно, се добива

$$P_{\triangle A_1L_1L_2}\le P_{\triangle L_1L_2K_2} \text{ и } P_{\triangle B_1K_1K_2}\le P_{\triangle K_1K_2M_2}.$$

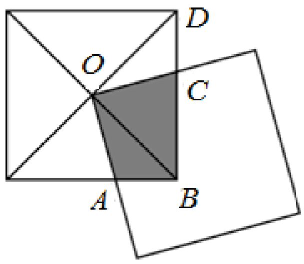
Нека со P ја означиме заедничката плоштина на триаголниците $A_1B_1C_1$ и KLM. Тогаш



$$\begin{aligned}P_{\triangle A_1B_1C_1}-P&=P_{\triangle C_1M_1M_2}+P_{\triangle A_1L_1L_2}+P_{\triangle B_1K_1K_2}\\&\le P_{\triangle M_1L_2M_2}+P_{\triangle L_1L_2K_2}+P_{\triangle K_1K_2M_2}\\&=P-P_{\triangle M_2L_2K_2}\le P.\end{aligned}$$

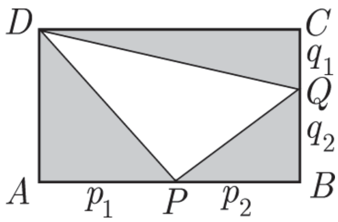
односно $P\ge\frac{1}{2}P_{\triangle A_1B_1C_1}=\frac{1}{8}$. Да забележиме дека вредноста $\frac{1}{8}$ се достигнува и тоа ако, на пример, избериме $M\equiv C_1$, $L\equiv C$ и $K\equiv B_1$.

97. Дадени се два квадрати со страна 1, така што едно теме на едниот квадрат е центар на другиот квадрат. Која е најмалата можна вредност на плоштината на пресечниот дел?



Решение. Да го разгледаме цртежот десно. Аглите COD и AOB се еднакви како агли со нормални краци, $\measuredangle OBA = \measuredangle ODC = 45^\circ$ и $\overline{OD} = \overline{OB}$, па затоа следува дека $\triangle AOB \cong \triangle COD$. Значи, бараната плоштина е еднаква на плоштината на триаголникот BOD, т.е. таа е еднаква на четвртина од плоштината на квадратот, односно на $\frac{1}{4}$. Бидејќи плоштината на пресечниот дел е константна, таа е и најмалата можна вредност.

98. Во правоаголникот $ABCD$, точките P и Q се точки од AB и BC соодветно, такви што триаголниците APD, PBQ и QCD имаат иста плоштина. Определи го количникот $\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}}$.



Решение. Воведуваме ознаки $\overline{AP} = p_1$, $\overline{PB} = p_2$, $\overline{QB} = q_2$ и $\overline{QC} = q_1$. Од равенството

$$\tfrac{1}{2}(p_1 + p_2)q_1 = \tfrac{1}{2}(q_1 + q_2)p_1$$

добиваме $\frac{p_1}{p_2} = \frac{q_1}{q_2}$, а од $\frac{1}{2}(q_1 + q_2)p_1 = \frac{1}{2}q_2 p_2$, добиваме $\frac{p_1}{p_2} = \frac{q_2}{q_1+q_2}$. Според тоа $\frac{p_1}{p_2} = \frac{q_2}{q_1+q_2} = \frac{1}{\frac{q_1}{q_2}+1} = \frac{1}{\frac{p_1}{p_2}+1}$. Значи, $\frac{p_1}{p_2} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

99. На страните AB и BC од триаголникот ABC се избрани точки M и N соодветно, така што

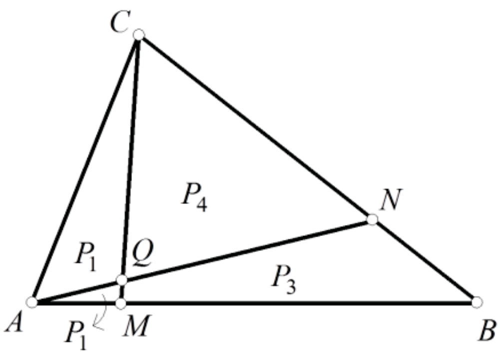
$$\overline{AM} : \overline{MB} = \overline{BN} : \overline{NC} = k .$$

Точката Q е пресек на правите AN и CM. Докажи дека плоштините на четириаголникот $MBNQ$ е еднаква на површината на триаголникот ACQ.

Решение. Отсечките CM и AN го делат триаголникот ABC на три триаголници AMQ, QNC и AQC и еден четириаголник и еден четириаголник $MBNQ$. Ќе воведеме ознаки

$P_{AQC} = P_1$, $P_{AMQ} = P_2$, $P_{QNC} = P_4$,

а плоштината на четириаголникот $MBNQ$ со $P_{MBNQ} = P_3$.



Да забележиме дека триаголниците AMC и CMB имаат исти висини, па нивните плоштини ќе се однесуваат како нивните основи. Според тоа,

$$\frac{P_1+P_2}{P_3+P_4} = \frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = k . \qquad (1)$$

Слично, триаголниците ABN и ANC

имаат исти висини, па според тоа, нивните плоштини се однесуваат како нивните основи. Оттука добиваме

$$\frac{P_2+P_3}{P_1+P_4}=\frac{\overline{BN}}{\overline{CN}}=k\,. \qquad (2)$$

Сега, од (1) и (2) добиваме

$$\frac{P_1+P_2}{P_3+P_4}=\frac{P_2+P_3}{P_1+P_4}$$
$$(P_1+P_2)(P_1+P_4)=(P_2+P_3)(P_3+P_4)$$
$$P_1^2+P_1P_2+P_1P_4+P_2P_4=P_3^2+P_2P_3+P_2P_4+P_3P_4$$
$$P_1^2-P_3^2+P_1P_4-P_3P_4+P_1P_2-P_2P_3=0$$
$$(P_1-P_3)(P_1+P_2+P_3+P_4)=0\,.$$

Бидејќи $P_1+P_2+P_3+P_4=P_{ABC}\neq 0$, добиваме дека $P_1-P_3=0$, т.е. $P_1=P_3$ што требаше да се докаже.

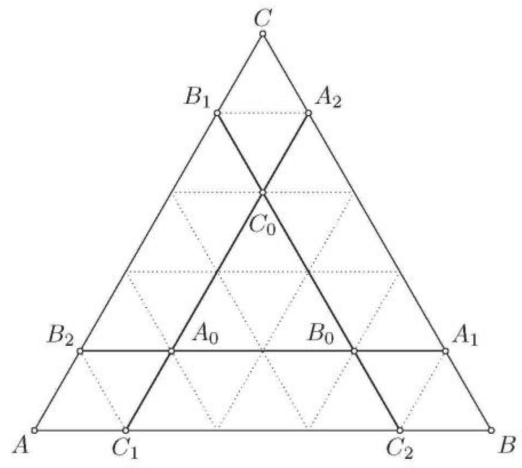
100. Паралелно на страните на рамностран триаголник се повлечени прави кои триаголникот го делат на три складни ромба, три складни трапези и еден рамностран триаголник. Определи го односот на плоштината на почетниот триаголник и плоштината на едниот трапез, ако се знае дека плоштината на добиениот триаголник е трипати поголема од плоштината на еден од ромбовите.

Решение. Точките да ги означиме како на цртежот десно. За да четириаголниците

$$AC_1A_0B_2,\ BA_1B_0C_2 \text{ и } CB_1C_0A_2$$

се ромбови треба да важи

$\overline{AC_1}=\overline{C_2B}=\overline{BA_1}=\overline{A_2C}=\overline{CB_1}=\overline{B_2A}=x$.



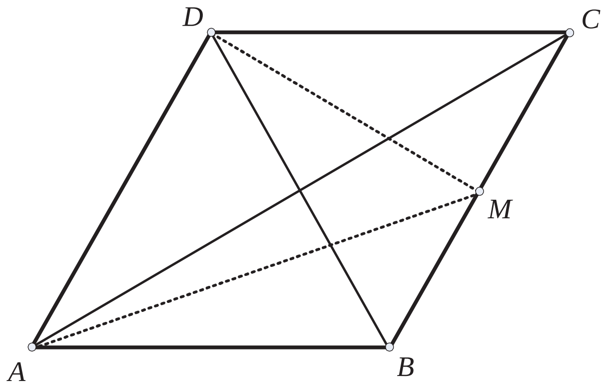
Плоштината на ромбот е двапати поголема од плоштината на рамностран триаголник со страна x. Тогаш според условот на задачата плоштината на рамностраниот триаголник $A_0B_0C_0$ е четири пати поголема од плоштината на рамностраниот триаголник со страна x. Според тоа, должината страната на рамностраниот $A_0B_0C_0$ е $2x$, т.е. $\overline{A_0B_0}=2x$. Понатаму, аглите при основата C_1C_2 на рамнокракиот трапез $C_1C_2B_0A_0$ се еднакви на 60°, должината на кракот на овој трапез е x, а должината на помалата основа е $2x$. Затоа овој трапез може да се расече на паралелограм и рамностран триаголник, т.е. на 5 рамнострани триаголници со страна со должина x. Значи, должината на основата на овој трапез е $\overline{C_1C_2}=3x$, а должината на страната на почетниот триаголник е $\overline{AB}=5x$.

Плоштината на триаголникот ABC е 25 пати поголема од плоштината на рамностраниот триаголник со должина на страна x. Плоштината на едниот трапез е 5 пати поголема од плоштината на рамностраниот триаголник со должина на страна x, па затоа бараниот однос е $25:5=5:1$.

101. Даден е ромб $ABCD$. Пресечната точка на симетралите на аглите $\measuredangle BAC$ и $\measuredangle BDC$ лежи на една негова страна. Да се определат аглите на ромбот.

Решение. Пресекот на симетралите на аглите $\measuredangle BAC$ и $\measuredangle BDC$ го означуваме со M, при што M лежи на страната BC. Според теоремата за симетрала на внатрешен агол на триаголник, важи:

$$\overline{BM}:\overline{MC}=\overline{AB}:\overline{AC}$$ и
$$\overline{BM}:\overline{MC}=\overline{BD}:\overline{CD}.$$



Оттука се добива дека
$$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{CD},$$
т.е.
$$\overline{AC}\cdot\overline{BD}=\overline{AB}\cdot\overline{CD}.$$
Ако страната на ромбот ја означиме со a, а висината со h, тогаш последното равенство го добива обликот $2ah=a^2$, т.е. $a=2h$, што значи дека аглите на ромбот изнесуваат 60° и 120°.

102. Во ромб со страна a и остар агол 60° е впишана кружница. Определи ја плоштината на четириаголникот чии темиња се допирните точки на кружницата со страните на ромбот.

Решение. Допирните точки на впишаната кружница k во ромбот $ABCD$ да ги означиме со M,N,P,Q (направи цртеж). Јасно, висината на ромбот е $h=\frac{a\sqrt{3}}{2}$, па затоа радиусот на впишаната кружница во ромбот е $R=\frac{h}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Сега, страната на рамностраниот $\triangle AMQ$ е $x=R\sqrt{3}=\frac{3a}{4}$. Значи, должината на едната страна на четириаголникот $MNPQ$ е $x=\frac{3a}{4}$.

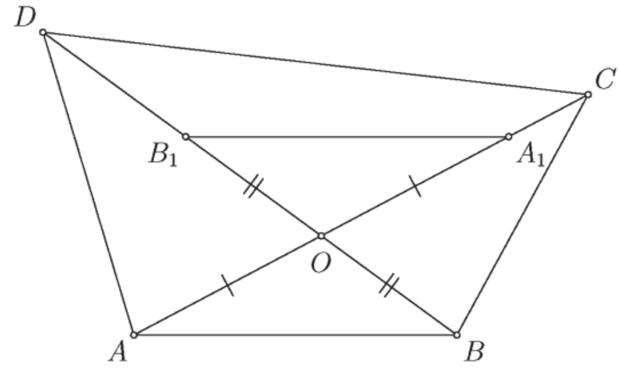
Од друга страна, должината на краците DP и DQ на рамнокракиот триаголник PDQ е $\overline{DP}=\overline{DQ}=\frac{a}{4}$. Неговите агли имаат големини $120^\circ,30^\circ,30^\circ$, па не е тешко да се пресмета дека должината на неговата основа е $y=2\cdot\frac{a}{4}\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Конечно, четириаголникот $MNPQ$ е правоаголник, па според тоа неговата плоштина е $P=xy=\frac{3a}{4}\frac{a\sqrt{3}}{4}=\frac{3a^2\sqrt{3}}{16}$.

103. Конвексен четириаголник со дијагоналите е поделен на четири триаголници чии впишани кружници се складни. Докажи, дека четириаголникот е ромб.

Решение. Нека O е пресекот на дијагоналите на четириаголникот $ABCD$. Ќе докажеме дека четириаголникот $ABCD$ е паралелограм, т.е. дека точката O ги полови неговите дијагонали.

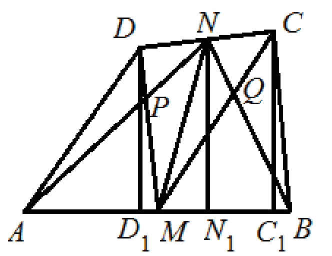
Нека го претпоставиме спротивното, т.е. дека точката O не ја полови барем едната дијагонала на четириаголникот $ABCD$, на пример BD.



Тогаш, без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $\overline{BO} < \overline{DO}$. Исто така, без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $\overline{AO} \le \overline{OC}$. Понатаму, да го разгледаме триаголникот OA_1B_1 кој е централно симетричен на триаголникот AOB во однос на точката O. Очигледно радиусот на впишаната кружница во триаголникот OA_1B_1 е помал од радиусот на впишаната кружница во триаголникот OCD, што е противречност бидејќи според претпоставката тие треба да се еднакви. Од добиената противречност следува дека дијагоналите на четириаголникот $ABCD$ се полoват, т.е. тој е паралелограм.

Понатаму, бидејќи $ABCD$ е паралелограм, добиваме дека триаголниците OAB, OBC, OCD и ODA имаат еднакви плоштини. Понатаму, од $P = rs$ следува дека овие триаголници имаат еднакви полупериметри, па затоа имаат и еднакви периметри. Да ги разгледаме триаголниците OAB и OBC. Бидејќи OB е заедничка страна и $\overline{OA} = \overline{OB}$, добиваме дека $\overline{AB} = \overline{BC}$, т.е. $ABCD$ е ромб.

104. Нека M и N се средините на страните AB и CD на конвексниот четириаголник $ABCD$ и нека P е пресекот на MD и AN, а Q е пресекот на MC и BN. Докажи, дека плоштината на четириаголникот $MQNP$ е еднаква на збирот од плоштините на триаголниците APD и BCQ .



Решение. Нека $h_1 = \overline{DD_1}$, $h = \overline{NN_1}$ и $h_2 = \overline{CC_1}$ се должините на висините на $\triangle MD, \triangle ABN$ и $\triangle MBC$, соодветно. Четириаголникот DD_1CC_1 е трапез со основи h_1 и h_2 и средна линија h, па затоа $2h = h_1 + h_2$. Ако $\overline{AB} = a$, тогаш збирот на плоштините на $\triangle AMD$ и $\triangle MBC$ е

$$P_{AMD} + P_{MBC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} h_1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} h_2 = \frac{1}{2} ah = P_{ABN} \; . \quad (1)$$

Понатаму,

$$P_{AMD} = P_{AMP} + P_{APD}, \; P_{MBC} = P_{MBQ} + P_{BQC} \text{ и } P_{ABN} = P_{AMP} + P_{MQNP} + P_{MBQ} \, .$$

Ако од последните три равенства замениме во (1), после скратувањето добиваме

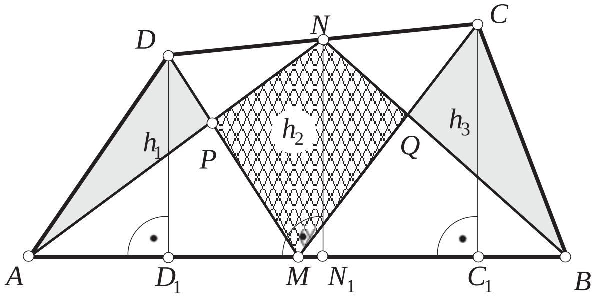
$$P_{APD} + P_{BQC} = P_{MQNP} \, ,$$

што и требаше да се докаже.

105. Нека M и N се средини на страните AB и CD на конвексниот четириаголник $ABCD$ и нека $MD \cap AN = \{P\}$ и $MC \cap BN = \{Q\}$. Докажи дека плоштината на четириаголникот $MQNP$ е еднаква на збирот на плоштините на триаголниците APD и BCQ.

Решение. Нека $h_1 = \overline{DD_1}$, $h = \overline{NN_1}$ и $h_2 = \overline{CC_1}$ се висините на триаголниците AMD, ABN и MBC, соодветно (види цртеж). Бидејќи четириаголникот DD_1C_1C е трапез со основи h_1 и h_2 и средна линија h, следува дека $2h = h_1 + h_2$. Ако $\overline{AB} = a$, тогаш збирот на плоштините на триаголниците AMD и MBC е:

$$P_{AMD} + P_{MBC} = \tfrac{1}{2}\tfrac{a}{2}h_1 + \tfrac{1}{2}\tfrac{a}{2}h_2$$
$$= \tfrac{1}{2}ah = P_{ABN}.$$

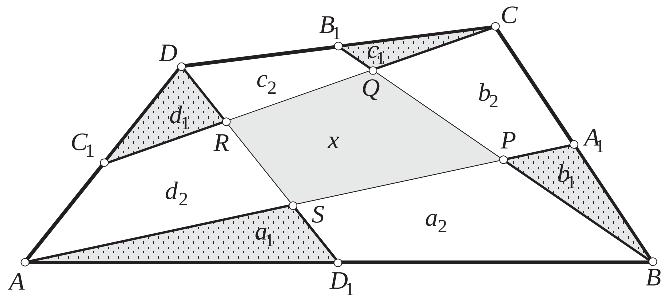


Ако од овие плоштини ги одземеме заедничките плоштини добиваме дека важи равенството:

$$P_{APD} + P_{BQC} = P_{MQNP}.$$

106. Средините на страните AB, BC, CD, DA на конвексен четириаголник $ABCD$ се D_1, A_1, B_1, C_1 соодветно. Отсечките AA_1 и BB_1, BB_1 и CC_1 , CC_1 и DD_1, DD_1 и AA_1 се сечат во точките P, Q, R, S соодветно. Докажи дека плоштината на четириаголникот $PQRS$ е еднаква на збирот на плоштините на триаголниците AD_1S, BA_1P, CB_1Q и DC_1R.

Решение. Да ги означиме плоштините како на цртежот. Од тоа што A_1 е средина на страната BC од триаголникот ABC следува дека



$$a_1 + a_2 + b_1 = \tfrac{1}{2}P_{ABC}.$$

На сличен начин, се добива дека

$$c_1 + c_2 + d_1 = \tfrac{1}{2}P_{ACD}.$$

Со собирање на овие две равенства, добиваме

$$(a_1 + b_1 + c_1 + d_1) + (a_2 + c_2) = \tfrac{1}{2}P_{ABCD} \qquad (1)$$

Разгледувајќи ги триаголниците ABD и BCD, како погоре, добиваме

$$(a_1 + b_1 + c_1 + d_1) + (b_2 + d_2) = \tfrac{1}{2}P_{ABCD}. \qquad (2)$$

Со собирање на (1) и (2), добиваме

$$2(a_1 + b_1 + c_1 + d_1) + (a_2 + b_2 + c_2 + d_2) = P_{ABCD}. \qquad (3)$$

Но очигледно е дека

$$(a_1 + b_1 + c_1 + d_1) + (a_2 + b_2 + c_2 + d_2) + x = P_{ABCD}. \qquad (4)$$

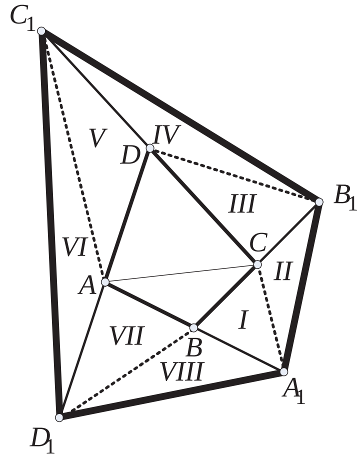
Споредувајќи ги (3) и (4), добиваме дека $a_1 + b_1 + c_1 + d_1 = x$, што и требаше да се докаже.

107. Даден е конвексен четириаголник $ABCD$ со плоштина P. Ја продолжуваме страната AB преку B до A_1, така што $\overline{AB} = \overline{BA_1}$, потоа BC преку C до B_1, така што $\overline{BC} = \overline{CB_1}$, па CD преку D до C_1, така што $\overline{CD} = \overline{DC_1}$ и DA преку

A до D_1, така што $\overline{DA}=\overline{AD_1}$. Колкава е плоштината на четириаголникот $A_1B_1C_1D_1$?

Решение. Ги поврзуваме A со C_1, B со D_1, C со A_1, D со B_1. Тогаш,

$$P_{ABC}=P_I=P_{II}$$
$$P_{BCD}=P_{III}=P_{IV}$$
$$P_{CDA}=P_V=P_{VI}$$
$$P_{DAB}=P_{VII}=P_{VIII}$$



каде што

$$P_I=P_{BA_1C},\qquad P_{II}=P_{CA_1B_1},$$
$$P_{III}=P_{DCB_1},\qquad P_{IV}=P_{C_1DB_1},$$
$$P_V=P_{C_1DA},\qquad P_{VI}=P_{C_1D_1A},$$
$$P_{VII}=P_{AD_1B},\qquad P_{VIII}=P_{BD_1A_1}$$

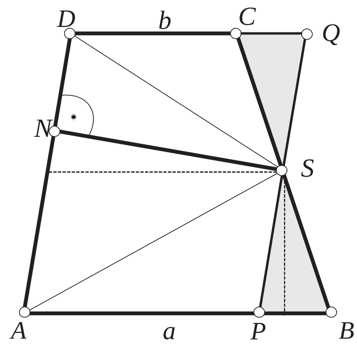
Имаме:

$$P_{ABC}+P_{BCD}+P_{CDA}+P_{DAB}=P_I+P_{III}+P_V+P_{VII}$$
$$=P_{II}+P_{IV}+P_{VI}+P_{VIII}=2P$$

$$P_1=P+(P_I+P_{II}+P_{III}+P_{IV}+P_V+P_{VI}+P_{VII}+P_{VIII})=P+(2P+2P)=5P.$$

108. Пресметај ја плоштината на трапез, ако еден негов крак е $10\,cm$, а растојанието од средината на другиот крак до дадениот е $8\,cm$.

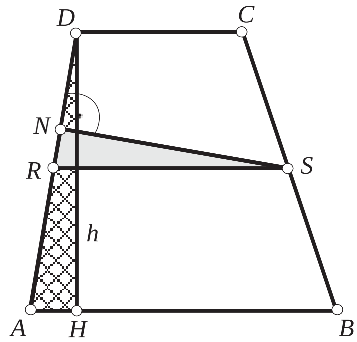
Решение. *Прв начин.* Да го означиме трапезот со $ABCD$ и притоа нека $\overline{AD}=10\,cm$ и $\overline{SN}=8\,cm$, каде што S е средина на кракот BC (и $SN\perp AD$, види цртеж). Ако низ S повлечеме $PQ\,\|\,AD$, ќе го добиеме паралелограмот $APQD$. Бидејќи $\triangle PSB\cong\triangle QCS$ (според АСА) ќе следува дека плоштината на трапезот $ABCD$ е еднаква на плоштината на паралелограмот $APQD$, т.е.



$$P_{ABCD}=P_{APQD}=\overline{AD}\cdot\overline{SN}=10\cdot 8=80.$$

Значи, плоштината на трапезот е $80\,cm^2$.

Втор начин. Со повлекување на отсечките AS и DS ги добиваме триаголниците ABS и CDS, со основи a и b и висина $\frac{h}{2}$ (види цртеж). Тогаш:



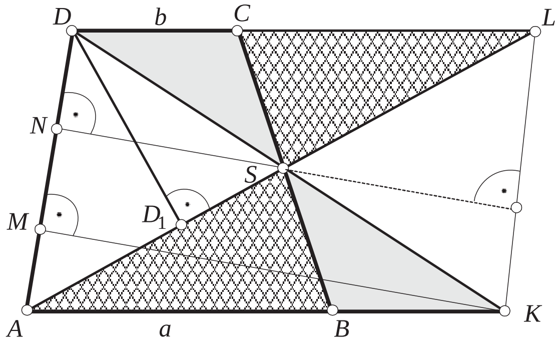
$$P=P_{ABCD}=P_{ABS}+P_{CDS}+P_{ADS}$$
$$P=\frac{a}{2}\frac{h}{2}+\frac{b}{2}\frac{h}{2}+\frac{1}{2}\overline{AD}\cdot\overline{SN}$$
$$P=\frac{1}{2}\frac{a+b}{2}h+\frac{1}{2}10\cdot 8,$$
$$P=\frac{1}{2}P+40$$

од каде што $P=80$. Значи, плоштината на трапезот е $80\ cm^2$.

Трет начин. Нека $\overline{RS}=m$ е средна линија, а $\overline{DH}=h$ е висина на трапезот $ABCD$ (види цртеж). Правоаголните триаголници AHD и RNS се слични, бидејќи $\measuredangle ADH=\measuredangle RSN$ како агли со нормални краци. Од сличноста на овие триаголници следува пропорцијата $10:h=m:8$, од каде што $mh=80$.

Но плоштината на трапезот $ABCD$ е еднаква на mh; значи изнесува $80\ cm^2$.

Четврт начин. Нека правите AB и DS се сечат во точката K, а CD и AS се сечат во точката L (види цртеж) Тогаш $\triangle ABS\cong\triangle LCS$ и $\triangle BKS\cong\triangle CDS$ од каде што следува $\overline{AS}=\overline{LS}$ и $\overline{KS}=\overline{DS}$. Следствено, четириаголникот $AKLD$ е параллелограм (неговите дијагонали се преполовуваат во точката S). Бидејќи правата што минува низ неговиот центар на симетрија го дели овој параллелограм на два складни трапезе(од кои едниот е $ABCD$), ќе следува дека $P_{ABCD}=\frac{1}{2}P_{AKLD}=\frac{1}{2}\overline{AD}\cdot 2\overline{SN}=\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 2\cdot 8=80$.



Значи, плоштината на трапезот е $80\ cm^2$.

Петти начин. Од складноста на триаголниците BKS и CDS следува дека $P_{ABCD}=P_{AKD}$. Од $\triangle DNS\sim\triangle DMK$ следува $\overline{MK}:8=\overline{DK}:\overline{DS}$, а бидејќи $\overline{DK}=2\overline{DS}$, добиваме $\overline{MK}:8=2:1$, $\overline{MK}=16$. Тогаш $P_{AKD}=\frac{1}{2}\overline{AD}\cdot\overline{MK}=\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 16=80$.

Следствено, $P_{ABCD}=80\ cm^2$.

109. Нека O е пресечна точка на дијагоналите на трапезот $ABCD$ $AB\parallel CD$, а P_1 и P_2 плоштини на триаголниците ABO и CDO. Изрази ја плоштината на трапезот $ABCD$ преку плоштините P_1 и P_2.

Решение. Триаголниците ABC и ABD имаат еднакви плоштини, бидејќи имаат заедничка основа и еднакви висини (види цртеж). Тогаш од

$P_{AOD}=P_{ABD}-P_1$

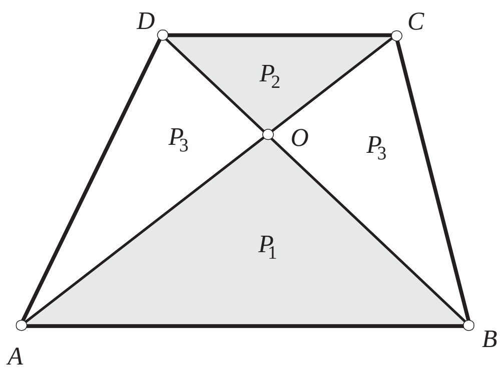
$P_{BOC}=P_{ABC}-P_1$

следува дека $P_{AOD}=P_{BOC}=P_3$.

Плоштината на трапезот

$$P=P_1+P_2+2P_3,$$

за да биде изразена преку P_1 и P_2, доволно е плоштината P_3 да ја изразиме преку P_1 и P_2. Бидејќи триаголниците ABO и AOD имаа заедничка висина на страните BO и OD, следува



$$\frac{P_1}{P_3}=\frac{\overline{BO}}{\overline{OD}} \tag{1}$$

Аналогно, за триаголниците BOC и DOC заклучуваме дека

$$\frac{P_3}{P_2}=\frac{\overline{BO}}{\overline{OD}} \tag{2}$$

Од (1) и (2) следува дека $\frac{P_1}{P_3}=\frac{P_3}{P_2}$, од каде што $P_3=\sqrt{P_1P_2}$. Според тоа, плоштината на трапезот $ABCD$ е $P=P_1+P_2+2\sqrt{P_1P_2}=(\sqrt{P_1}+\sqrt{P_2})^2$.

110. Во трапезот $ABCD$, паралелно со основите AB и CD се повлечени две отсечки, чии краеви се на краците на трапезот. Пресметај ги должините на овие отсечки, ако тие го делат трапезот на три еднакви по плоштина делови и ако $\overline{AB}=a$, $\overline{CD}=b$.

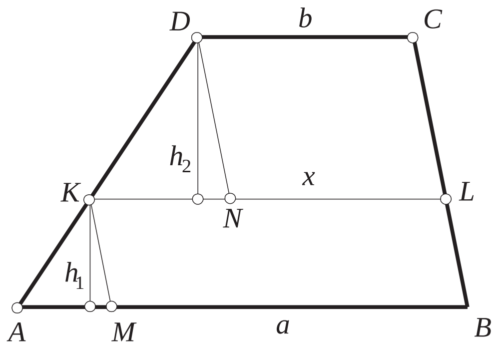
Решение. Прво ќе покажеме дека: ако отсечката x е паралелна со основите на трапезот и го дели истиот на два дела со еднакви плоштини, тогаш таа е квадратна средина од мерните броеви на основите на трапезот.

Од условот дека плоштините на трапезите $ABLK$ и $KLCD$ се еднакви, добиваме $\frac{a+x}{2}\cdot h_1=\frac{x+b}{2}h_2$, т.е.

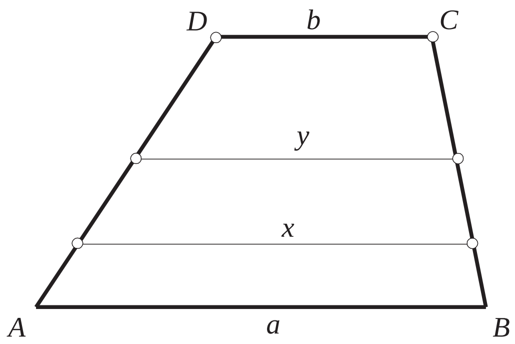
$$h_1:h_2=(x+b):(x+a). \tag{1}$$

Од сличноста пак, на триаголниците AMK и KND (види цртеж 1) добиваме:

$$h_1:h_2=\overline{AM}:\overline{KN}=(a-x):(x-b) \tag{2}$$



цртеж 1



цртеж 2

Од (1) и (2) имаме $(x+b):(x+a)=(a-x):(x-b)$, т.е. $x^2-b^2=a^2-x^2$ па затоа

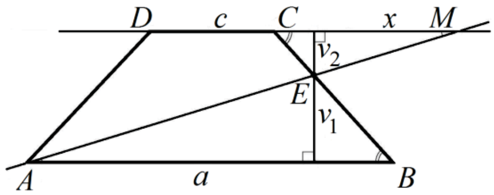
$$2x^2=a^2+b^2 \tag{3}$$

Ако со x и y ги означима отсечките, кои што трапезот $ABCD$ го делат на три еднакви плоштини (види цртеж 2), тогаш, според (3), добиваме $2x^2=a^2+y^2$, т.е. $2y^2=x^2+b^2$. Оттука $3x^2=2a^2+b^2$, т.е. $x=\sqrt{\frac{2a^2+b^2}{3}}$, и $3y^2=a^2+2b^2$, т.е. $y=\sqrt{\frac{a^2+2b^2}{3}}$.

111. Во трапезот $ABCD$ должините на поголемата AB и помалата основа CD се однесуваат како $3:1$. На продолжението на CD преку темето C избрана е точка M така да правата AM го дели трапезот на два дела со еднакви плоштини. Докажи дека растојанието на точката M до темето C е половина од должината на основата AB.

Решение. *Прв начин.* Нека должината на поголемата основа е a, на помалата c, висината на трапезот е $v = v_1 + v_2$ и нека растојанието од точката M до точката C е x, види цртеж. Од условот на задачата следува $a:c = 3:1$, т.е. $a = 3c$. Понатаму, бидејќи $P_{\triangle ABE} = P_{AECD}$, важи

$$\frac{av_1}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{a+c}{2}(v_1+v_2).$$



Ако замениме $a = 3c$ добиваме

$$\frac{3cv_1}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3c+c}{2}(v_1+v_2),$$

Од каде после средувањето наоѓаме $v_1 : v_2 = 2:1$. Од сличноста на триаголниците ABE и MCE следува $a : x = v_1 : v_2$, па затоа $a : x = 2:1$, односно $x = \frac{a}{2}$, што и требаше да се докаже.

Втор начин. Нека должината на поголемата основа е a, на помалата c, висината на трапезот е $v = v_1 + v_2$ и нека растојанието од точката M до точката C е x. Од условот на задачата следува $a:c = 3:1$, т.е. $a = 3c$. бидејќи $P_{\triangle ABE} = P_{AECD}$, важи $\frac{av_1}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{a+c}{2}(v_1+v_2)$. Од последното равенство следува $2av_1 = (a+c)(v_1+v_2)$, односно $av_1 = av_2 + cv_1 + cv_2$. Од сличноста на триаголниците ABE и MCE следува $a : x = v_1 : v_2$, па затоа $x = \frac{av_2}{v_1}$. Ако во равенството $av_1 = av_2 + cv_1 + cv_2$ земеме дека $a = 3c$ добиваме $3cv_1 = 3cv_2 + cv_1 + cv_2$, односно $v_1 = 2v_2$. Конечно, со замена во $x = \frac{av_2}{v_1}$ добиваме дека $x = \frac{av_2}{2v_2} = \frac{a}{2}$, што и требаше да се докаже.

Трет начин. Нека должината на поголемата основа е a, на помалата c, висината на трапезот е $v = v_1 + v_2$ и нека растојанието од точката M до точката C е x. Од условот на задачата следува $a:c = 3:1$, т.е. $a = 3c$. Бидејќи $P_{\triangle ABE} = P_{AECD} = \frac{1}{2}P_{ABCD}$ добиваме $\frac{av_1}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{a+c}{2}v$. Со замена за $a = 3c$ добиваме $\frac{3cv_1}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3c+c}{2}v$, односно $v_1 = \frac{2}{3}v$. Според тоа, $v_2 = \frac{1}{3}v$. Од $P_{AECD} = \frac{1}{2}P_{ABCD}$ $= \frac{1}{2}\cdot\frac{3c+c}{2}v$, следува

$$P_{\triangle AMD} = P_{AECD} + P_{\triangle EMC} = cv + \frac{1}{2}xv_2 = cv + \frac{1}{2}x\cdot\frac{1}{3}v = v(c+\frac{x}{6}).$$

Од друга страна $P_{\triangle AMD} = \frac{(c+x)v}{2}$, па затоа $\frac{(c+x)v}{2} = v(c+\frac{x}{6})$, од каде наоѓаме $6c + x = 3c + 3x$, односно $2x = 3c$. Конечно, $a = 3c = 2x$, т.е. $x = \frac{a}{2}$, што и требаше да се докаже.

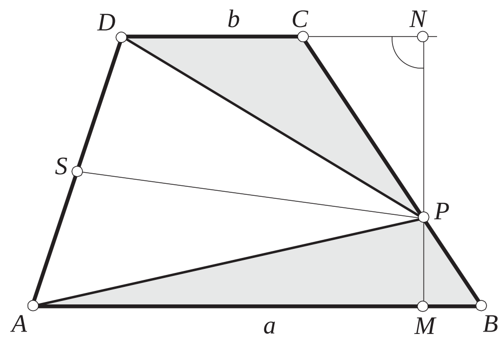
112. Даден трапез подели го на два еднакви по плоштина делови, со права која минува низ средината на еден негов крак.

Решение. *Прв начин.* Нека S е средина на кракот $\overline{AD}$ на трапезот $ABCD$, $\overline{AB}=a$, $\overline{DC}=b$ и нека SP е бараната права (види цртеж). Под услов

$$P_{ABPS}=P_{SPCD} \tag{1}$$

Бидејќи SP е средна линија на триаголникот APD, имаме:

$$P_{APS}=P_{SPD} \tag{2}$$



Одземајќи го равенството (2) од равенството (1) добиваме $P_{ABP}=P_{DPC}$ или

$$\tfrac{1}{2}\cdot a\cdot\overline{MP}=\tfrac{1}{2}\cdot b\cdot\overline{NP},$$

од каде што

$$\overline{MP}:\overline{NP}=b:a \tag{3}$$

Од друга страна, од сличноста на триаголниците BMP и CNP следува:

$$\overline{MP}:\overline{NP}=\overline{BP}:\overline{CP}. \tag{4}$$

Од (3) и (4) добиваме $\overline{BP}:\overline{CP}=b:a$. Бидејќи основите a и b се познати, следува дека точката P ја одредуваме така што кракот BC го делиме во однос $b:a$. Со одредување на точката P е одредена и правата SP со која трапезот е поделен на два еднакви по плоштина делови.

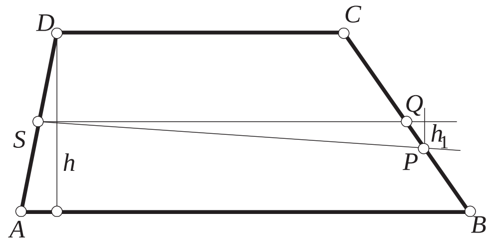
Втор начин. Нека SQ е средна линија на трапезот $ABCD$, а SP права која го дели трапезот на два еднакви по плоштина делови (види цртеж). За да ја одредиме точката P доволно е да ја најдеме висината h_1 на триаголникот SPQ. Имаме

$$P_{SPQ}=P_{ABQS}-\tfrac{1}{2}P_{ABCD}$$

$$\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{a+b}{2}\cdot h_1=\tfrac{1}{2}(\tfrac{a+b}{2}+a)\cdot\tfrac{h}{2}-\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{a+b}{2}\cdot h$$

$$2(a+b)h_1=(a+b+2a)h-2(a+b)h$$

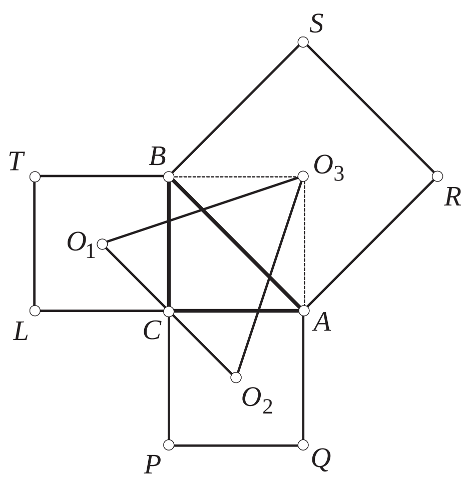
$$h_1=\tfrac{h(a-b)}{2(a+b)}.$$



Бидејќи a,b,h се познати, лесно може конструктивно да се одреди h_1.

113. Над страните на рамнокрак правоаголен триаголник со катета a, конструирани се квадрати во неговата надворешност. Центрите на трите квадрати се темиња на триаголник. Определи ја плоштината на овој триаголник?

Решение. Нека ABC е рамнокрак правоаголен триаголник со катети AC и BC (види цртеж). Нека $ACPQ$, $BTLC$ и $ARSB$ се квадрати конструирани над неговите страни.



Бидејќи

$$\measuredangle BCO_1=\measuredangle ACO_2=45^\circ \text{ и } \measuredangle BCA=90^\circ,$$

добиваме дека O_1, C и O_2 лежат на една права. Од друга страна $\overline{CQ}=\overline{CT}=a\sqrt{2}$, па според тоа

$$\overline{O_1O_2} = \overline{O_1C} + \overline{O_2C} = \tfrac{1}{2}a\sqrt{2} + \tfrac{1}{2}a\sqrt{2} = a\sqrt{2}\ .$$

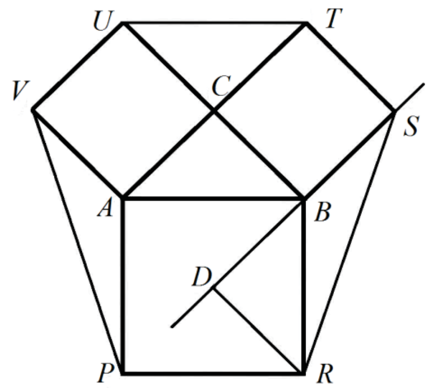
Должината на хипотенузата на триаголникот е $\overline{AB} = a\sqrt{2}$. Бидејќи $ARSB$ е квадрат, имаме $\overline{SA} = \sqrt{(a\sqrt{2})^2 + (a\sqrt{2})^2} = 2a$, и $\overline{AO_3} = a$. Значи, CAO_3B е квадрат со страна a, добиваме дека $\overline{CO_3} = a\sqrt{2}$ како должина на неговата дијагонала. Јасно е дека $CO_3 \perp O_1O_2$, т.е. CO_3 е висина на $O_1O_2O_3$. Сега $P_{O_1O_2O_3} = \tfrac{1}{2}(a\sqrt{2})^2 = a^2$.

114. Даден е рамнокрак праваголен $\triangle ABC\ (\measuredangle ACB = 90^\circ)$. Над страните на $\triangle ABC$ надвор од триаголникот се конструирани квадрати $APRB, BSTC$ и $ACUV$. Докажи дека

$$P_{\triangle ABC} + P_{\triangle CTU} + P_{\triangle AVP} + P_{\triangle BRS} = P_{BSTC} + P_{ACUV}\ .$$

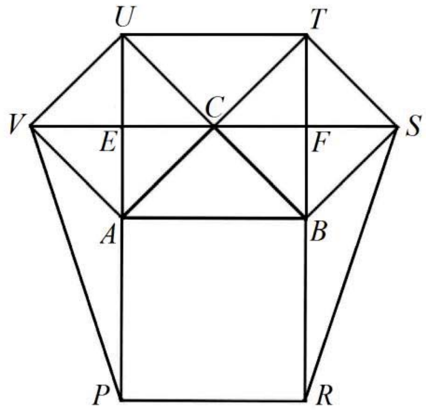
Решение. *Прв начин*. Триаголникот ABC е рамнокрак и правоаголен, па затоа $a = \overline{AC} = \overline{BC}$ и $c = \overline{AB}$. Нека D е подножјето на нормалата повлечена од точката R на правата SB. Од $BC \perp BD$ и $AB \perp BR$ следува дека острите агли $\measuredangle CBA$ и $\measuredangle DBR$ се со нормални краци, па затоа важи $\measuredangle CBA = \measuredangle DBR = 45^\circ$. Триаголникот BDR е правоаголен па затоа

$\measuredangle BRD = 90^\circ - \measuredangle DBR = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ = \measuredangle BAC$.



Понатаму, четириаголникот $APRB$ е квадрат, па затоа $\overline{BR} = \overline{AB} = c$. Освен тоа, $\measuredangle DBR = \measuredangle CBA$ и $\measuredangle BRD = \measuredangle BAC$, па од признакот за складност АСА следува дека $\triangle RBD \cong \triangle ABC$, што значи дека $\overline{DR} = \overline{CA} = a$. Отсечката DR е висина на триаголникот BRS спуштена на страната BS, па затоа $P_{\triangle BRS} = \frac{\overline{BS}\cdot\overline{DR}}{2} = \frac{a^2}{2}$. Заради симетрија имаме $P_{\triangle AVP} = \frac{a^2}{2}$. Од друга страна триаголниците ABC и CTU се правоаголни со должини на катети еднакви на a, па затоа важи $P_{\triangle ABC} = P_{\triangle CTU} = \frac{a^2}{2}$. Значи,

$P_{\triangle ABC} + P_{\triangle CTU} + P_{\triangle AVP} + P_{\triangle BRS} = 4\frac{a^2}{2} = 2a^2$. Но, $P_{BSTC} + P_{ACUV} = a^2 + a^2 = 2a^2$, со што тврдењето е докажано.



Втор начин. Ако ги повлечеме дијагоналите на квадратите $BSTC$ и $ACUV$ (види цртеж), добиваме дека триаголниците ABC, BTC, TBS, TUC, UAC и AUV се складни. Имено, овие триаголници се правоаголни и нивните катети се еднакви, па складноста следува од признакот САС. Понатаму, важи

$$P_{\triangle ABC} + P_{\triangle CTU} = P_{\triangle TBS} + P_{\triangle BTC} = P_{BSTC}\ .$$

Исто така важи

$$\measuredangle BAC = \measuredangle CAU = 45^\circ \text{ и } \measuredangle PAB = 90^\circ,$$

па затоа точките P, A, E и U се колинеарни. Дијагоналите на квадратот се заемно нормални и се преполовуваат, па затоа $VC \perp AU$, а точката E е средина на дијагоналата на квадратот $ACUV$. Отсечката EV е висина на триаголникот AUV спуштена на страната AU, но е висина и на триаголникот AVP спуштена кон страната AP. Триаголниците ABC и UAC се складни, па затоа $\overline{AU} = \overline{AB} = \overline{AP}$. Понатаму, важи $P_{\triangle AVP} = \frac{\overline{AP} \cdot \overline{EV}}{2} = \frac{\overline{AU} \cdot \overline{EV}}{2} = P_{\triangle AUV}$. На ист начин се покажува дека $P_{\triangle BRS} = P_{\triangle TBS}$. Оттука $P_{\triangle BRS} = P_{\triangle TBS} = P_{\triangle ACU}$. Според тоа, важи

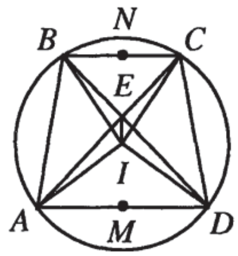
$$P_{\triangle AVP} + P_{\triangle BRS} = P_{\triangle AUV} + P_{\triangle ACU} = P_{ACUV},$$

со што е докажано тврдењето

$$P_{\triangle ABC} + P_{\triangle CTU} + P_{\triangle AVP} + P_{\triangle BRS} = P_{BSTC} + P_{ACUV}.$$

115. Дијагоналите AC и BD на тетивен четириаголник $ABCD$ со центар на опишаната кружница I се сечат во точката E. Докажи, дека ако средините на отсечките AD, BC и IE лежат на една права, тогаш $\overline{AB} = \overline{CD}$.

Решение. Со M и N да ги означиме средините на AD и BC соодветно. Без ограничување на општоста можеме да сметаме дека I е внатрешна точка за $AMNB$, а E е внатрешна точка за $MDCN$. Имаме



$$\begin{aligned} P_{MIN} &= P_{AMNB} - P_{ABI} - P_{AMI} - P_{BNI} \\ &= P_{AMNB} - P_{ABI} - \tfrac{1}{2}(P_{ADI} + P_{BCI}) \\ &= P_{AMNB} - \tfrac{1}{2}P_{ABI} - \tfrac{1}{2}(P_{ABCD} - P_{CDI}. \end{aligned}$$

Аналогно, $P_{MEN} = P_{MDCN} - \frac{1}{2}P_{DCE} - \frac{1}{2}(P_{ABCD} - P_{ABE})$. Сега од $P_{MIN} = P_{MEN}$ добиваме

$$P_{AMNB} - \tfrac{1}{2}P_{ABI} - \tfrac{1}{2}(P_{ABCD} - P_{CDI}) = P_{MDCN} - \tfrac{1}{2}P_{DCE} - \tfrac{1}{2}(P_{ABCD} - P_{ABE}),$$

$$\tfrac{1}{2}P_{ADN} + \tfrac{1}{2}P_{ABC} - \tfrac{1}{2}P_{ABI} - \tfrac{1}{2}(P_{ABCD} + \tfrac{1}{2}P_{CDI}) =$$

$$= \tfrac{1}{2}P_{ADN} + \tfrac{1}{2}P_{CBD} - \tfrac{1}{2}P_{DCE} - \tfrac{1}{2}(P_{ABCD} + \tfrac{1}{2}P_{ABE}),$$

$$P_{ABC} - P_{CBD} + P_{DCE} - P_{ABE} = P_{ABI} - P_{CDI},$$

$$P_{ABE} - P_{CDE} + P_{DCE} - P_{ABE} = P_{ABI} - P_{CDI}$$

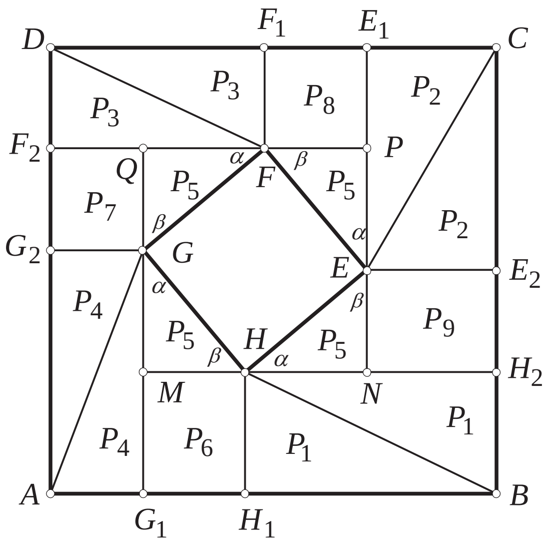
Затоа $P_{ABI} = P_{CDI}$, од каде следува дека $\overline{AB} = \overline{CD}$.

116. Во еден квадрат е поставен помал квадрат. Темињата на овие квадрати се поврзани со четири отсечки, кои не го сечат помалиот квадрат. На тој начин, делот меѓу двата квадрати е поделен на четири четириаголници. Докажи дека збирот на плоштините на два спротивни четириаголника е еднаков на збирот на плоштините на другите два четириаголника.

Решение. Нека поголемиот квадрат е $ABCD$, а помалиот $EFGH$. Треба да докажеме дека $P_{DFGA} + P_{CEHB} = P_{DFEC} + P_{AGHB}$. Подножјата на темињата на помалиот квадрат спуштени на страните од поголомиот да ги означиме како на цртежот.

Нека $Q = GG_1 \cap FF_2, P = FF_2 \cap EE_1, N = HH_2 \cap EE_1$ и $M = HH_2 \cap GG_1$. Тогаш

$$\measuredangle GQF = \measuredangle FPE = \measuredangle ENH = \measuredangle HMG = 90^\circ .$$



Четириаголниците DF_1FF_2, E_1CE_2E, HH_2BH_1 и G_2GG_1A се правоаголници, па добиваме еднаквост на плоштините на триаголниците што се добиваат со поделба на тие квадрати со дијагоналата. Плоштините на тие триаголници да ги означиме со P_1, P_2, P_3 и P_4 (види цртеж). Натаму $\measuredangle QFG = \measuredangle PEF = \measuredangle NHE = \measuredangle HGM = \alpha$ како агли со нормални краци. Од исти причини $\measuredangle FGQ = \measuredangle PFE = \measuredangle NEH = \measuredangle MHG = \beta$. Значи $\triangle GFQ \sim \triangle FEP \sim \triangle EHN \sim \triangle HGM$. Кај овие триаголници важи $\overline{FG} = \overline{EF} = \overline{HE} = \overline{GH},$ па тие се и складни. Нивната плоштина да ја означиме со P_5.

Од складноста следува дека $\overline{H_1G_1} = \overline{H_2E_2} = \overline{E_1F_1} = \overline{F_2G_2}$. Четириаголникот $PQMN$ е квадрат, бидејќи аглите кај темињата се прави и

$$\overline{QP} = \overline{QF} + \overline{FP} = \overline{GM} + \overline{QG} = \overline{QM} ,$$

па затоа

$$P_6 + P_8 = \overline{G_1H_1} \cdot \overline{H_1P_1} + \overline{FP} \cdot \overline{FF_1} = \overline{FP} \cdot (\overline{H_1P_1} + \overline{FF_1}) ,$$

$$P_7 + P_9 = \overline{F_2G_2} \cdot \overline{G_2G} + \overline{E_2H_2} \cdot \overline{EE_2} = \overline{F_2G_2} \cdot (\overline{G_2G} + \overline{EE_2}) ,$$

Од друга страна

$$\overline{H_1P_1} + \overline{FF_1} = \overline{AD} - \overline{QM} = \overline{AB} - \overline{MN} = \overline{G_2G} + \overline{EE_2} .$$

Значи $P_6 + P_8 = P_7 + P_9$.

Според тоа

$$\begin{aligned} P_{DFGA} + P_{CEHB} &= P_3 + P_7 + P_5 + P_4 + P_2 + P_9 + P_5 + P_1 \\ &= P_3 + P_8 + P_5 + P_4 + P_2 + P_6 + P_5 + P_1 \\ &= P_{DFEC} + P_{AGHB} \end{aligned}$$

117. Нека h_a, h_b, h_c се висини на триаголник со страни a, b, c, а r е радиус на впишаната кружница во триаголникот. Докажи дека триаголникот е рамностран ако и само ако $h_a + h_b + h_c = 9r$.

Решение. Од $h_a = \frac{2P}{a}$, $h_b = \frac{2P}{b}$, $h_c = \frac{2P}{c}$, $r = \frac{2P}{a+b+c}$ и $h_a + h_b + h_c = 9r$, добиваме

$$h_a + h_b + h_c = 9r \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{9}{a+b+c} \Leftrightarrow \frac{a+b+c}{3} = \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \Leftrightarrow$$

аритметичката е еднаква со хармониската средина, а тоа е можно ако и само ако $a = b = c$.

118. Нека $\triangle ABC$ е тапоаголен со тап агол кај темето *A*. Нека $\overline{BC} = a, \overline{AC} = b,$ h_a – висината повлечена од темето *A* и h_b – висината повлечена од темето *B*. Докажи дека $a + h_a > b + h_b$.

Решение. Од условот на задачата имаме $a > b > h_a$. Според тоа

$$2P = bh_b = ah_a < ab$$

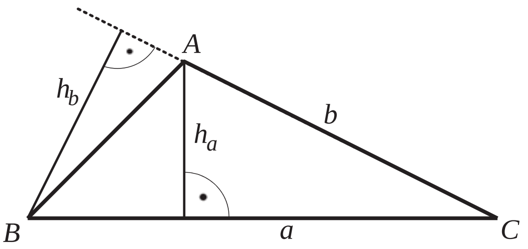
$$\frac{2P}{ab} < 1$$

$$\frac{2P}{ab}(a-b) < a-b$$

$$\frac{2P}{b} - \frac{2P}{a} < a-b$$

$$h_b - h_a < a-b$$

$$b + h_b < a + h_a .$$

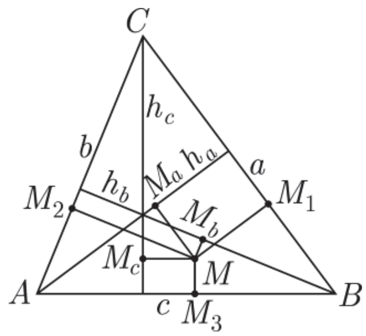


119. Во внатрешноста на триаголникот ABC избрана е произволна точка M . Нека M_1, M_2, M_3 се проекциите на M врз страните a, b, c на триаголникот, соодветно, а M_a, M_b, M_c се проекциите на M врз висините h_a, h_b, h_c на триаголникот, соодветно. Докажи дека

$$\frac{\overline{AM_a}}{\overline{MM_1}} + \frac{\overline{BM_b}}{\overline{MM_2}} + \frac{\overline{CM_c}}{\overline{MM_3}} \geq 6 .$$

Решение. Од $\frac{P_{ABC}}{P_{MBC}} = \frac{h_a}{\overline{MM_1}}$ (види цртеж) следува

$$\frac{P_{ABC} - P_{MBC}}{P_{MBC}} = \frac{h_a - \overline{MM_1}}{\overline{MM_1}} ,$$



односно

$$\frac{P_{ABM} + P_{AMC}}{P_{MBC}} = \frac{\overline{AM_a}}{\overline{MM_1}} .$$

Аналогно

$$\frac{P_{ABM} + P_{BMC}}{P_{AMC}} = \frac{\overline{BM_b}}{\overline{MM_2}} \text{ и } \frac{P_{BCM} + P_{AMC}}{P_{ABM}} = \frac{\overline{CM_c}}{\overline{MM_3}} .$$

Тогаш

$$\frac{\overline{AM_a}}{\overline{MM_1}} + \frac{\overline{BM_b}}{\overline{MM_2}} + \frac{\overline{CM_c}}{\overline{MM_3}} = (\frac{P_{ABM}}{P_{MBC}} + \frac{P_{BCM}}{P_{ABM}}) + (\frac{P_{AMC}}{P_{MBC}} + \frac{P_{BCM}}{P_{AMC}}) + (\frac{P_{ABM}}{P_{AMC}} + \frac{P_{CMA}}{P_{ABM}}) \geq 2 + 2 + 2 = 6 .$$

120. Одреди го најмалиот природен број n за да важи пропорцијата

$$h_a : h_b : h_c = n : (n+1) : (n+2) ,$$

ако h_a, h_b, h_c се висини во триаголник ABC .

Решение. Од условот $ah_a = bh_b = ch_c (= 2P)$ следува пропорцијата

$$a : b : c = \frac{1}{h_a} : \frac{1}{h_b} : \frac{1}{h_c} = \frac{1}{n} : \frac{1}{n+1} : \frac{1}{n+2} = (n+1)(n+2) : n(n+2) : n(n+1) .$$

Бидејќи $h_a < h_b < h_c$, следува $a > b > c$, па доволно е да најдеме за кој $n \in \mathbb{N}$ важи неравенството $a < b + c$, т.е.

$$n^2 + 3n + 2 < n^2 + 2n + n^2 + n,$$

од каде добиваме $n^2 > 2$.

Следствено, бараниот најмал природен број е 2.

121. Даден е правоаголник $ABCD$ и точка M која припаѓа во неговата внатрешност. Низ точката M се повлечни прави паралелни со страните на правоаголникот кои го делат на четири правоаголници. Докажи дека плоштината на еден од делбените правоаголници, тој кој ја содржи точката A или тој кој ја содржи точката C, има плоштината помала од $\frac{1}{4}$ од плоштината на целиот правоаголник.

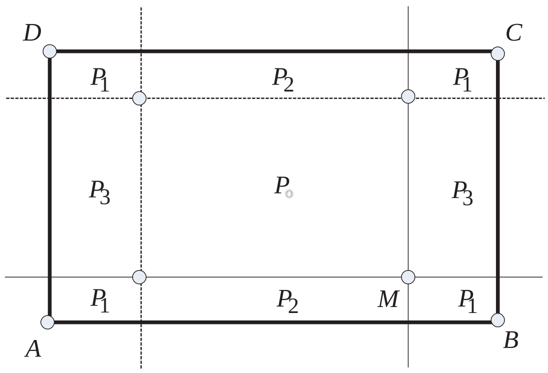
Решение. Нека $ABCD$ е правоаголник кој има плоштина P и нека M е точка во неговата внатрешнос(види цртеж). Правоаголникот има две оски на симетрија. Тие го делат на четири еднакви дела. Нивниот пресек е центар на симетрија на правоаголникот.

Ќе разгледаме неколку случаи.

Случај 1. Ако избраната точка M е пресекот на оските на симетрија, тогаш и двата делбени правоаголници, и оној што ја содржи точката A и оној што ја содржи точката C се делбени четириаголници кои што немаат плоштина поголема од $\frac{P}{4}$. Значи во овој случај тврдењето од задачата е точно (направи цртеж).

Случај 2. Нека точката M припаѓа на правоаголникот кој ја содржи точката A или на правоаголникот кој ја содржи точката C (делбени правоаголници на кои почетниот правоаголник е разделен со оските на симетрија). Тогаш јасно е дека делбениот правоаголник чии темиња се M и A или делбениот правоаголник чии темиња се M и C има плоштина која не е поголема од $\frac{P}{4}$. Значи, и во овој случај тврдењето од задачата е точно (направи цртеж).

Случај 3. Нека точката M припаѓа на правоаголникот кој ја содржи точката B или на правоаголникот кој ја содржи точката D (делбени правоаголници на кои почетниот правоаголник е разделен со оските на симетрија).



Ќе направиме централна симетрија при што центар на симетрија е пресечната точка на оските на симетрија. Двете делбени прави и нивните слики со централната симетрија го делат правоаголникот на девет правоаголници. Четири од нив имаат плоштина P_1 (оние кои ги содржат темињата A, B, C, D на почетниот правоаголник), два од нив имаат плоштина P_2, два од нив P_3 и еден од нив има плоштина $P_\circ$ (види цртеж).

Плоштината на делбениот правоаголник што го содржи темето A е $P_1 + P_2$ а плоштината на делбениот правоаголник кој го содржи темето C е $P_1 + P_3$ (од условот на задачата). При тоа

$$P_\circ + 4P_1 + 2P_2 + 2P_3 = P$$
$$4P_1 + 2P_2 + 2P_3 < P$$
$$2P_1 + P_2 + P_3 < \tfrac{P}{2}$$
$$(P_1 + P_2) + (P_1 + P_3) < \tfrac{P}{2}\,.$$

Барем еден од збировите $P_1 + P_2$ и $P_1 + P_3$ не поголем од $\frac{1}{2}\frac{P}{2}$. Според тоа

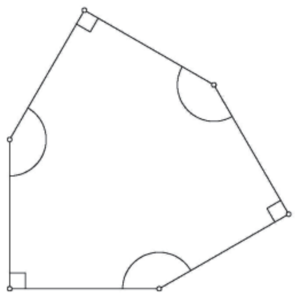
$$P_1 + P_2 \le \tfrac{1}{2}\tfrac{P}{2} = \tfrac{P}{4} \text{ или } P_1 + P_3 \le \tfrac{1}{2}\tfrac{P}{2} = \tfrac{P}{4}\,.$$

Значи, и во овој случај тврдењето од задачата е точно.

4. МНОГУАГОЛНИК

1. Точно три агли на конвексен многуаголник се тапи. Колку најмногу страни може да има овој многуаголник?

Решение. Збирот на надворешните агли на конвексен многуаголник е еднаков на 360°. Три надворешни агли на разгледуваниот многуаголник се остри, а останатите надворешни агли мораат да бидат прави или тапи. Најмногу три надвоешни агли може да се тапи или прави, бидејќи во спротивно нивниот збир би бил 360° или поголем, што не е можно. Последното значи дека најмногу три внатрешни агли може да бидат прави, па затоа разгледуваниот многуаголник има најмногу шест темиња. Останува да дадеме пример на шестаголник со опишаните својства. На пример, тоа е шестаголникот чии агли последователно се со големина $90^\circ, 150^\circ, 90^\circ, 150^\circ, 90^\circ, 150^\circ$ и сите страни имаат еднаква должина (цртеж десно).



2. Определи ги сите конвексни многуаголници кои имаат повеќе од три внатрешни остри агли.

Решение. Нека α_i, $i = 1, 2, ..., n$ се внатрешните агли на произволен конвексен n-аголник, а β_i, $i = 1, 2, ..., n$ се соодветните надворешни агли, т.е. $\beta_i = \pi - \alpha_i$, $i = 1, 2, ..., n$. Бидејќи $\sum_{i=1}^{n} \beta_i = 2\pi$, најмногу три од надворешните агли на конвексниот n-аголник можат да бидат тапи. Според тоа, не постои конвексен многуаголник кој има повеќе од три остри агли.

3. Нека M и N се средини на страните BC и DE на правилниот шестаголник $ABCDEF$, а S средината на отсечката AN. Изрази го векторот $\overrightarrow{SM}$ преку векторите $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AF}$.

Решение. *Прв начин.* Имаме (види цртеж 1):

$$\overrightarrow{SM} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}$$
$$\overrightarrow{SM} = \overrightarrow{SN} + \overrightarrow{ND} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CM}\,.$$

Ако ги собереме овие две векторски равенства, добиваме

$$2\overrightarrow{SM}=(\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SN})+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}+(\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM})+\overrightarrow{ND}$$

$$2\overrightarrow{SM}=\vec{\text{o}}+\vec{a}+(-\vec{b})+\vec{\text{o}}+\frac{\vec{a}}{2}$$

$$\overrightarrow{SM}=\tfrac{3}{4}\vec{a}-\tfrac{1}{2}\vec{b}\,.$$

Втор начин. Продолженијата на страните AF и DE се сечат во точката G. Очигледно, $\triangle ADG$ е рамностран (сите агли му се по 60°), со страна двапати поголема од страната на правилниот шестаголник (види цртеж 2). Тогаш:

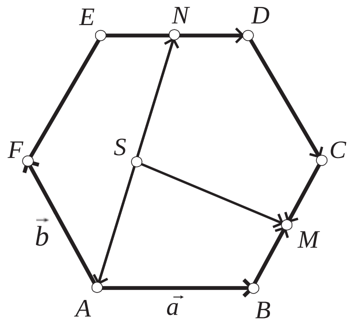
$$\overline{AT}:\overline{TN}=\overline{AO}:\overline{OD}\,,\ \ \overline{AT}=\overline{TN}\ \ (T\equiv S\ )$$

$$\overline{DN}=\tfrac{1}{2}\overline{DE}=\tfrac{1}{4}\overline{DG}\,.$$

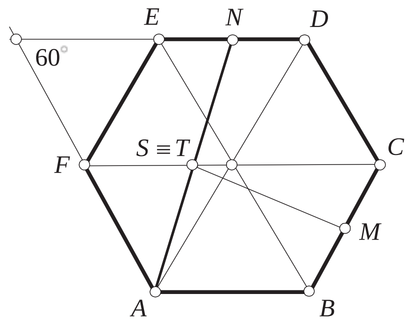
Оттука $\overline{OS}=\frac{1}{4}\overline{OF}$, т.е. $\overrightarrow{SO}=\frac{1}{4}\overrightarrow{FO}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{4}\vec{a}$. Од $\overrightarrow{SM}=\overrightarrow{SO}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CM}$ добиваме $\overrightarrow{SM}=\frac{1}{4}\vec{a}+\vec{a}+\overrightarrow{CM}=\frac{5}{4}\vec{a}+\overrightarrow{CM}$. Но

$$\overrightarrow{CM}=\tfrac{1}{2}\overrightarrow{CB}=-\tfrac{1}{2}\overrightarrow{AO}=-\tfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF})=-\tfrac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$$

Тогаш $\overrightarrow{SM}=\frac{5}{4}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}=\frac{3}{4}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}\,.$



цртеж 1



цртеж 2

Трет начин. Ако го искористиме равенството $\overrightarrow{OZ}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OX}+\overrightarrow{OY})$ (Z е средина на XY) ќе добиеме (види цртеж 2):

$$\overrightarrow{OM}=\tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}),\qquad \overrightarrow{ON}=\tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE})\,,\qquad \overrightarrow{OS}=\tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{ON})\,.$$

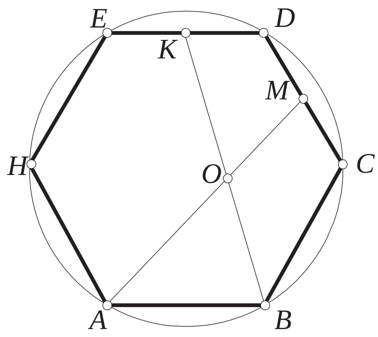
Бидејќи $\overrightarrow{DC}=-\overrightarrow{AF}=-\vec{b}$, наоѓаме:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{SM}&=\overrightarrow{SO}+\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OS}\\&=\tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{ON})\\&=\tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}-\tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}))\\&=\tfrac{1}{2}(-\vec{b}+\vec{a}+\overrightarrow{AO}-\tfrac{1}{2}\overrightarrow{AO}-\tfrac{1}{2}\overrightarrow{OE})\\&=\tfrac{1}{2}(-\vec{b}+\vec{a}+\tfrac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})-\tfrac{1}{2}\vec{b})=\tfrac{3}{4}\vec{a}-\tfrac{1}{2}\vec{b}.\end{aligned}$$

4. Нека $ABCDEH$ е правилен шестаголник, при што M е средна точка на CD, K е средна точка на DE, а O е пресек на отсечките AM и BK. Докажи дека плоштините на триаголникот ABO и четириаголникот $MDKO$ се еднакви.

Решение. Не е тешко да се види дека четириаголниците $BCDK$ и $ABCM$ се складни. Навистина, $\triangle BCD \cong \triangle ABC$ и $\triangle BDK \cong \triangle ACM$, од каде се добива бараната складност. Значи, $P_{BCDK} = P_{ABCD}$, од каде добиваме

$$\begin{aligned} P_{OMDK} &= P_{BCDK} - P_{BCMO} \\ &= P_{ABCM} - P_{BCMO} \\ &= P_{ABO}. \end{aligned}$$

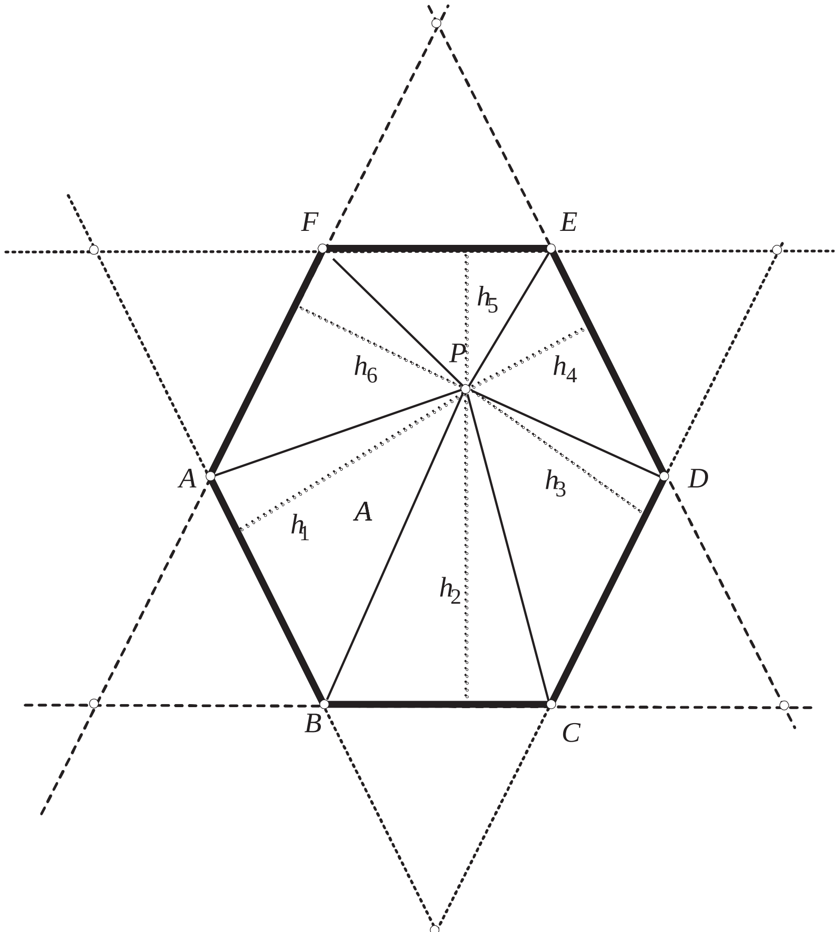


5. Даден е правилен шестаголник $ABCDEF$ и точка P во внатрешноста на триаголникот. Докажи дека збирот на плоштините на триаголниците PAB, PCD и PEF е еднаков на збирот на плоштините на триаголниците PBC, PDE и PFA.

Решение. Нека S_{XYZ} е ознака за плоштина на триаголник XYZ. Според тоа, треба да покажеме дека

$$S_{PAB} + S_{PCD} + S_{PEF} = S_{PBC} + S_{PDE} + S_{PFA}$$

Сите триаголници за кои ја бараме плоштината имаат една заедничка страна која има должина a. Нека $h_1, h_2, h_3, h_4, h_5 h_6$ се висини на триаголниците PAB, PBC, PCD, PDE, PEF, PFA спуштени од точката P врз страните со должина a (види



цртеж).Тогаш

$$S_{PAB}+S_{PCD}+S_{PEF}=\frac{ah_1}{2}+\frac{ah_3}{2}+\frac{ah_5}{2}=\frac{a}{2}(h_1+h_3+h_5)$$

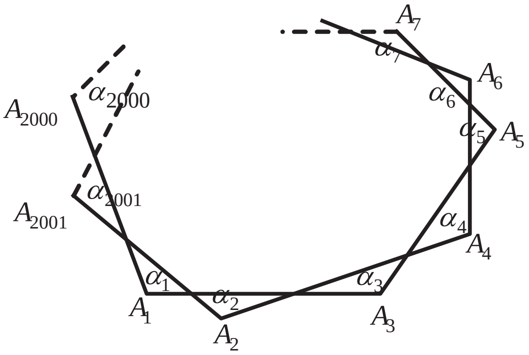
и

$$S_{PBC}+S_{PDE}+S_{PFA}=\frac{ah_2}{2}+\frac{ah_4}{2}+\frac{ah_6}{2}=\frac{a}{2}(h_2+h_4+h_6)$$

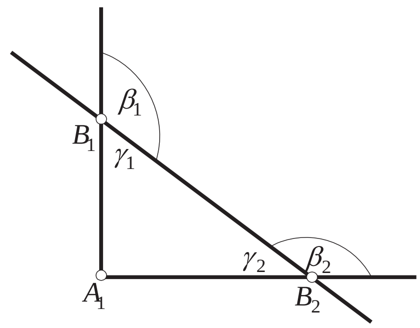
Ќе ги разгледаме триаголниците T_1 чии темиња се пресеците $AF\cap BC$, $BC\cap ED$, $AF\cap ED$ и T_2 чии темиња се $AB\cap CD$, $CD\cap EF$ и $EF\cap AB$. Тие се рамнострани складни триаголници. Нека нивната висина е h. Бидејќи $h_1+h_3+h_5=h$ и $h_2+h_4+h_6=h$, добиваме дека равенството од задачата кое требаше да го докажеме е точно.

6. Пресметај го, во радијани, збирот на внатрешните агли $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_{2001}$ на ѕвездата $A_1A_3A_5...A_{2001}A_2A_4A_6...A_{2002}A_1$, дадена на цртеж 1.

Решение. *Прв начин.* Ќе ја решиме задачата во општ случај, за ѕвезда со произволен број $n(n\geq 5)$ краци. Од $\triangle A_1B_2B_1$ (види цртеж 2) имаме:



цртеж 1



цртеж 2

$$\alpha_1=\pi-(\gamma_1+\gamma_2)=(\pi-\gamma_1)+(\pi-\gamma_2)-\pi=\beta_1+\beta_2-\pi$$

Аналогно наоѓаме дека

$$\alpha_i=\beta_i+\beta_{i+1}-\pi\ \ (i=1,2,3,...,n).$$

Собирајќи ги овие равенства добиваме

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=2\sum_{i=1}^{n}\beta_i-n\pi\,.$$

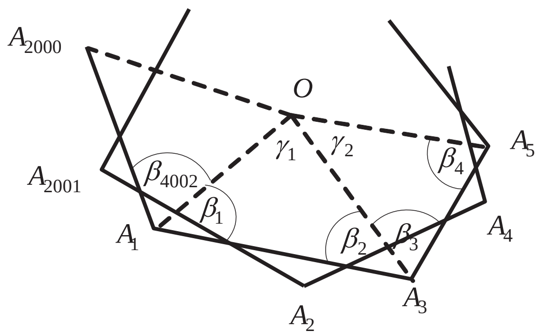
Имајќи предвид дека $\sum_{i=1}^{n}\beta_i=(n-2)\pi$ (тоа е збирот на внатрешните агли на n-аголникот $B_1B_2...B_n$), добиваме

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=2(n-2)\pi-n\pi=(n-4)\pi\,.$$

Следствено, во нашиот случај бараниот збир е 1997π.

Втор начин. Нека O е точка во ѕвездата (види цртеж 3), тогаш:

$$\alpha_1=\beta_1+\beta_2=\pi-\gamma_1$$



цртеж 3

$$\alpha_2 = \beta_3 + \beta_4 = \pi - \gamma_2$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\alpha_{2001} = \beta_{4001} + \beta_{4002} = \pi - \gamma_{2001}.$$

Со собирање на овие равенства, а имајќи предвид дека

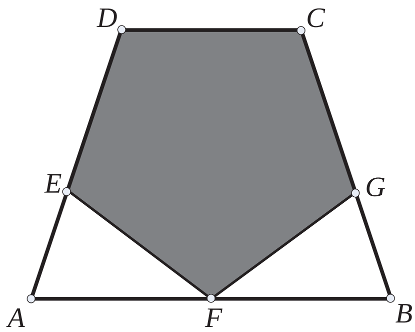
$$\gamma_1 + \gamma_2 + ... + \gamma_{2001} = 2 \cdot 2\pi = 4\pi,$$

добиваме

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 2001\pi - 4\pi = 1997\pi.$$

7. На цртежот е прикажан правилен петаголник $CDEFG$ кој е во внатрешноста на трапезот $ABCD$. Докажи дека $\overline{AB} = 2\overline{CD}$.

Решение. Збирот на надворешните агли на правилниот петаголник е 360°. Според тоа, било кој надворешен агол е $360^\circ : 5 = 72^\circ$, (надворешните агли се еднакви меѓу себе) па според тоа било кој надворешен агол е еднаков на $180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$.



Според тоа $\measuredangle EDC = 108^\circ$ и $\measuredangle EAF = 72^\circ$. Бидејќи $\measuredangle AEF = 72^\circ$, добиваме дека $\triangle AFE$ е рамнокрак со основа AE. Триаголниците $\triangle AFE$ и $\triangle GFB$ се складни (имаат исти агли е една иста страна), па според тоа $\overline{EF} = \overline{FG} = \overline{AF} = \overline{FB}$.

Бидејќи петаголникот е правилен, добиваме дека $\overline{AF} = \overline{FB} = \overline{DC}$ од каде се добива $\overline{AB} = \overline{AF} + \overline{FB} = \overline{CD} + \overline{CD} = 2\overline{CD}$.

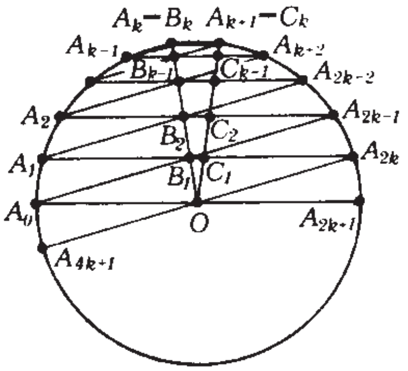
8. Нека $A_1, A_2, A_3, ..., A_{11}, A_{12}$ се последователни темиња на правилен дванаесетаголник. Докажи дека дијагоналите A_1A_9, A_2A_{11} и A_4A_{12} се сечат во една точка.

Решение. Нека O е центарот на опишаната кружница околу дадениот правилен дванаесетаголник. Од еднаквоста на перифериските агли над ист лак, својството на централниот и периферискиот агол над ист лак и од тоа што $\measuredangle A_1OA_2 = 30^\circ$, следува

$$\measuredangle A_1A_{12}A_4 = \measuredangle A_{12}A_1A_9 = 45^\circ \text{ и } \measuredangle A_1A_2A_{11} = \measuredangle A_{12}A_{11}A_2 = 30^\circ.$$

Нека A и B се точки од A_1A_9 и A_4A_{12} соодветно, така што A_1B и $A_{12}A$ се нормални на A_1A_{12} (направи цртеж). Вака формираниот четириаголник ABA_1A_{12} е квадрат со центар во пресекот на дијагоналите A_1A_9 и A_4A_{12}. Понатаму, триаголниците A_1A_2B и $AA_{11}A_{12}$ се рамнострани чии висини повлечени од A_2 и A_{11} се делови од дијагоналата A_2A_{11}. Според тоа, A_2A_{11} минува низ средните точки на спротивните страни на квадратот ABA_1A_{12}, што значи дека минува и низ центарот на тој квадрат.

9. Даден е правилен $(4k+2)-$аголник $A_0A_1...A_{4k+1}$ со центар O. Докажи дека збирот на отсечките што ги отсекуваат краците на аголот A_kOA_{k+1} на правите $A_1A_{2k}, A_2A_{2k-1}, ..., A_kA_{k+1}$ е еднаков на радиусот OA_0 на опишаната кружница на $(4k+2)-$аголникот.



Решение. Да ги означиме разгледуваните отсечки на тетивите со $B_iC_i, i=1,2,...,k$ ($B_k = A_k$, $C_k = A_{k+1}$, цртеж десно). Бидејќи точките A_{k-i} и A_{k+i}, $i=1,2,...,k$, а исто така и точките A_{4k+1} и A_{2k} се симетрични во однос на правата OA_k добиваме дека тетивите

$$A_{4k+1}A_{2k},\ A_0A_{2k-1}, A_1A_{2k-2}, ..., A_{k-1}A_{k+1}$$

се симетрични на тетивите

$$A_0A_{2k+1}, A_1A_{2k}, A_2A_{2k-1}, ..., A_kA_{k+1}$$

во однос на правата OA_k, соодветно, и затоа тие се сечат во точките $O, B_1, B_2, ..., B_k$ и се паралелни меѓу себе. Според тоа, четириаголниците

$$OA_0B_1A_{2k}, B_1A_1B_2A_{2k-1}, ..., B_{k-1}A_{k-1}B_kA_{k+1}$$

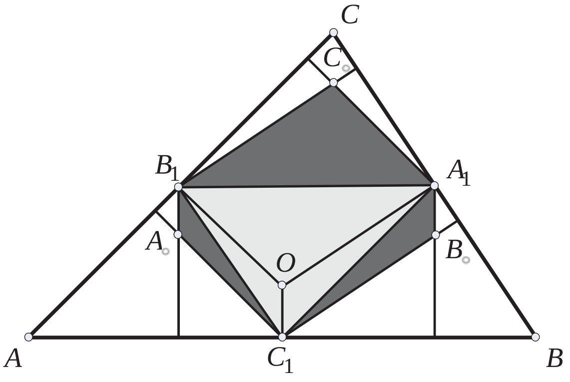
се паралелграми и за радиусот на дадената кружница добиваме

$$\begin{aligned}\overline{OA_0} &= \overline{B_1A_{2k}} = \overline{B_1C_1} + \overline{C_1A_{2k}} = \overline{B_1C_1} + \overline{A_1B_1} = \overline{B_1C_1} + \overline{B_2A_{2k-1}}\\ &= \overline{B_1C_1} + \overline{B_2C_2} + \overline{A_2B_2} = \overline{B_1C_1} + \overline{B_2C_2} + \overline{B_3A_{2k-2}} = ...\\ &= \overline{B_1C_1} + \overline{B_2C_2} + ... + \overline{B_{k-2}C_{k-2}} + \overline{B_{k-1}A_{k+2}}\\ &= \overline{B_1C_1} + \overline{B_2C_2} + ... + \overline{B_{k-2}C_{k-2}} + \overline{B_{k-1}C_{k-1}} + \overline{B_kC_k}\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже.

10. Од средините A_1, B_1 и C_1 на страните на триаголникот ABC, се спуштени нормали кон секоја од останатите две страни. Докажи дека плоштината на шестаголникот ограничен со тие нормали е еднаква на половина од плоштината на триаголникот.

Решение. Бидејќи A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1 се средни линии на $\triangle ABC$, важи $P_{A_1B_1C_1} = \frac{1}{4}P_{ABC}$.

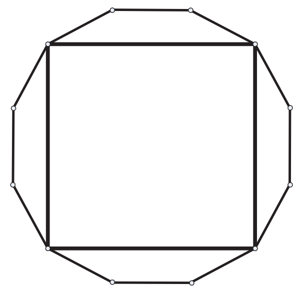


Од точките A_1, B_1 и C_1, повлекуваме нормали на страните AB, BC и CA. Тие се симетрали на страните и се сечат во центатот на опишаната кружница O. Четириаголникот $A_0C_1OB_1$ е паралелограм. Следува $P_{A_0C_1B_1} = P_{C_1OB_1}$. (види цртеж) Аналогно

$$P_{C_1BA_1}=P_{C_1A_1O} \text{ и } P_{AC_1B_1}=P_{CB_1A_1}.$$

Следува плоштината на шестоаголникот е два пати поголема од плоштината на триаголникот $A_1B_1C_1$, што требаше да се докаже.

11. На страните на квадрат со должина 2, конструирани се од надворешната страна, рамнокраки трапези, така што темињата на сите трапези се истовремено темиња на правилен дванаестоаголник. Определи го периметарот на дванаестаголникот?

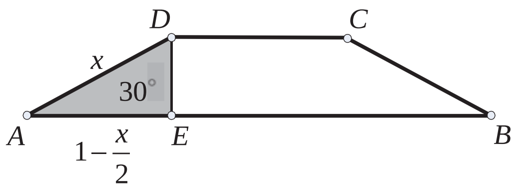


Решение. Да разгледаме еден трапез од дванаестаголникот. Внатрешниот агол на дванестоаголникот е $\frac{12-2}{12}\cdot 180^\circ = 150^\circ$. Следува $\alpha = 30^\circ$. Од

$$\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DA}=x \text{ и } |AB|=2,$$

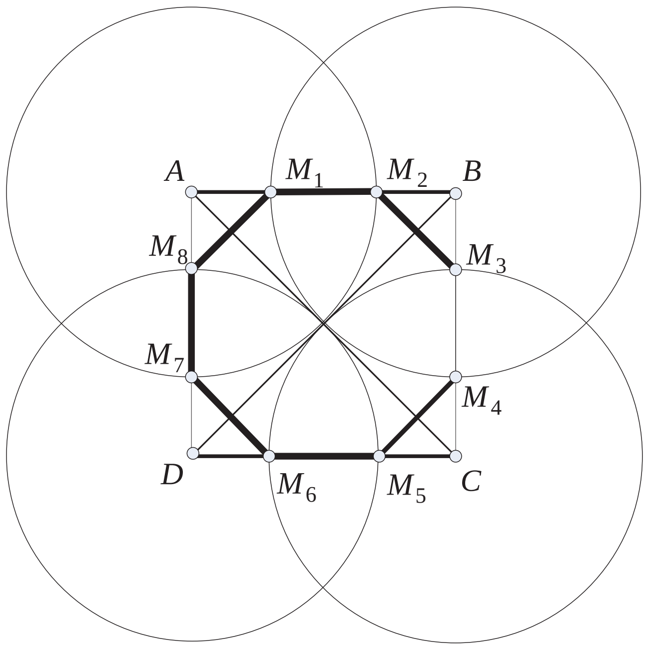
следува $\overline{AE}=1-\frac{x}{2}$. Од друга страна за правоаголниот триаголник AED, со агли 30° и 60°, важи $\overline{AE}=x\frac{\sqrt{3}}{2}$. Значи $x\frac{\sqrt{3}}{2}=1-\frac{x}{2}$, односно $x=\frac{2}{1+\sqrt{3}}=\sqrt{3}-1$. Затоа периметарот на дванасетаголникот

$$L=12x=12(\sqrt{3}-1).$$



12. Темињата на даден квадрат се центри на кружници со радиуси еднакви на половина од дијагоналата на квадратот. Докажи дека пресечните точки на кружниците со страните на квадратот се темиња на правилен осумаголник.

Решение. Пресечните точки на кружниците со страните на квадратот ќе ги означиме со $M_1, M_2, M_3, ..., M_8$ (види цртеж). За да докажеме дека осумаголникот е правилен, доволно е да докажеме дека неговите страни се еднакви меѓу себе, и аголот меѓу две негови соседни страни е 135°.



Ако a е должина на страната на квадратот, тогаш $a\sqrt{2}$ е должината на неговата дијагонала, а $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ е должината на радиусите на кружниците. Но, тогаш

$$\overline{AM_1}=\overline{M_2B}=\overline{BM_3}=a-\frac{a\sqrt{2}}{2},$$

па според тоа

$$\overline{M_1M_2} = a - 2(a - \tfrac{a\sqrt{2}}{2}) = a\sqrt{2} - a = a(\sqrt{2}-1)\,.$$

Од друга страна, триаголникот M_2BM_3 е рамнокрак правоаголен, па M_2M_3 е дијагонала на квадрат со страна $a - \frac{a\sqrt{2}}{2}$, т.е. $\overline{M_2M_3} = (a - \frac{a\sqrt{2}}{2})\sqrt{2} = a(\sqrt{2}-1)$. Од причини на симетрија, имаме $\overline{M_1M_2} = \overline{M_3M_4} = \overline{M_5M_6} = \overline{M_7M_8}$ и $\overline{M_2M_3} = \overline{M_4M_5} = \overline{M_6M_7} = \overline{M_8M_1}$, односно страните на осумаголникот се еднакви меѓу себе.

Бидејќи $\measuredangle BM_2M_3 = \measuredangle BM_3M_2 = 45^\circ$, добиваме

$$\measuredangle M_1M_2M_3 = \measuredangle M_2M_3M_4 = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ.$$

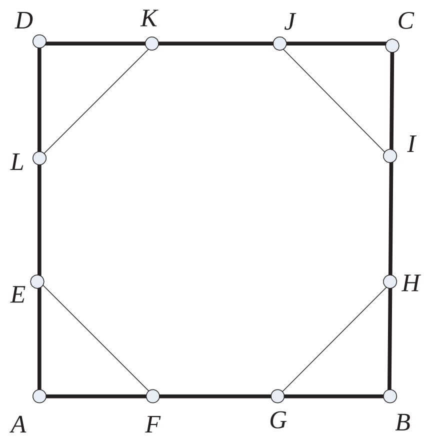
Понатаму, $\triangle M_2M_3B \cong \triangle M_4M_5C \cong \triangle M_6M_7D \cong \triangle M_8M_1A$, па затоа

$$\measuredangle M_{i-1}M_iM_{i+1} = 135^\circ,$$

за $i = 1,2,3,4,5,6,7,8$, при што $M_0 = M_8$ и $M_9 = M_1$. Конечно, многуаголникот $M_1M_2M_3M_4M_5M_6M_7M_8$ е правилен осумаголник.

13. Од квадрат со страна a отсечени се четири триаголници. Секое теме на квадратот е теме и на еден од отсечените триаголници. Остатокот на квадратот е правилен осумаголник. Определи ја неговата плоштина.

Решение. Нека $ABCD$ е квадрат со страна a од кој се отсечени триаголниците AFE, BHG, CJI и DLK така што $EFGHIJKL$ е правилен осумаголник (види цртеж).



Тогаш,

$$\overline{FG} = \overline{GH} = \overline{HI} = \overline{IJ} = \overline{JK} = \overline{KL} = \overline{LE} = \overline{EF} = x\,,$$

$$\measuredangle EFG = \measuredangle FGH = \measuredangle GHI = \measuredangle HIJ$$
$$= \measuredangle IJK = \measuredangle JKL = \measuredangle KLE = \measuredangle LEF.$$

Заради последните равенства добиваме

$$\measuredangle AEF = \measuredangle AFE = \measuredangle BGH = \measuredangle BHG = \measuredangle CIJ$$
$$= \measuredangle CJI = \measuredangle DKL = \measuredangle DLK.$$

Според тоа, триаголниците EAF, GBH, ICJ и KDL се рамнокраки правоаголни.

Должината на катетите на секој од нив е $\frac{a-x}{2}$, а должината на хипотенузата е $x = \frac{a-x}{2}\sqrt{2}$, односно $x = a(\sqrt{2}-1)$. Значи, должините на катетите на отсечените триаголници е $\frac{a(2-\sqrt{2})}{2}$, а нивната плоштина $P = \frac{a^2(\sqrt{2}-1)^2}{4}$.

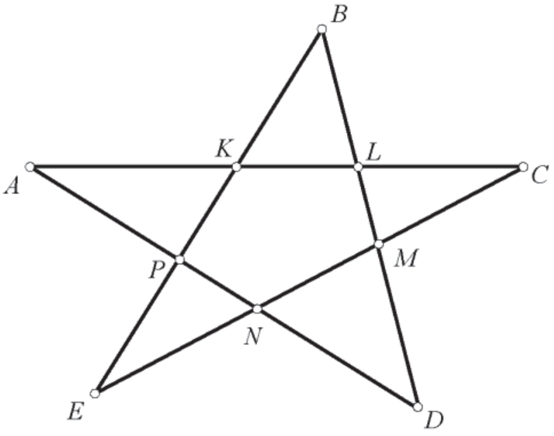
Ако $P_\circ$ е плоштината на осумаголникот, тогаш

$$P_0 = a^2 - 4\frac{a^2(\sqrt{2}-1)^2}{4} = a^2 - a^2(3-2\sqrt{2}) = 2(\sqrt{2}-1)a^2\,.$$

14. Во петокраката на цртежот важат следниве равенства :

$$\overline{AK} = \overline{LC}, \overline{BL} = \overline{MD}, \overline{CM} = \overline{NE}, \overline{DN} = \overline{PA}\,.$$

Докажи, дека $\overline{EP} = \overline{KB}$.



Решение. Да ги повлечеме отсечките AB, BC, CD, DE, EA. Од дадените равенства во условот следува дека триаголниците

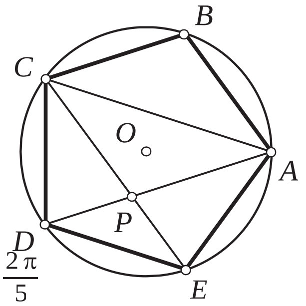
$$AKB, LCB, MCD, NED, PEA$$

се еднаквоплоштни користејќи дека имаат по еден пар еднакви страни и заедничка соодветна висина. Но тогаш $\triangle EPA, \square KBA$ се еднаквоплоштни, и имаат заедничка висина од темето A, па затоа точно е равенството $\overline{EP} = \overline{KB}$.

15. Нека $ABCDE$ е правилен петаголник и нека P е пресечната точка на дијагоналите AD и CE.

а) Пресметај ги аглите DAC и DOC;

б) Докажи дека триаголникот ACD е сличен со триаголникот CDP.



Решение. а) Аголот DOC е централен агол во правилен петаголник, па тој е еднаков на петти дел од полниот агол, односно $\frac{2\pi}{5}$. Аголот DAC е периферен агол над тетивата CD, па е двапати помал од аголот DOC, односно е еднаков на $\frac{\pi}{5}$.

б) Бидејќи

$$\measuredangle ACD = \measuredangle CDA = \measuredangle CDP = \tfrac{1}{2}(\pi - \measuredangle DAC) = \frac{2\pi}{5}$$

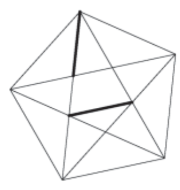
,

$$\measuredangle ABC = \measuredangle BCD = \frac{3\pi}{5},$$

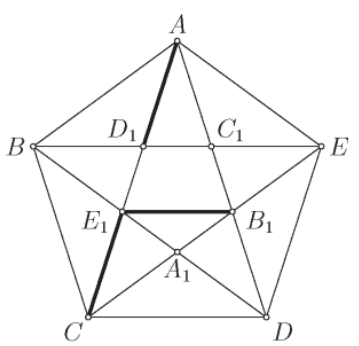
$$\measuredangle BCA = \tfrac{1}{2}(\pi - \measuredangle ABC) = \tfrac{\pi}{5},$$

$$\measuredangle PCD = \measuredangle BCD - \measuredangle ACE - \measuredangle BCA = \tfrac{\pi}{5} = \measuredangle DAC,$$

следува дека триаголникот ACD е сличен со CDP.



16. На цртежот е даден правилен петаголник во кој се повлечени дијагоналите. Докажи, дека задебелените отсечки имаат еднаква должина.



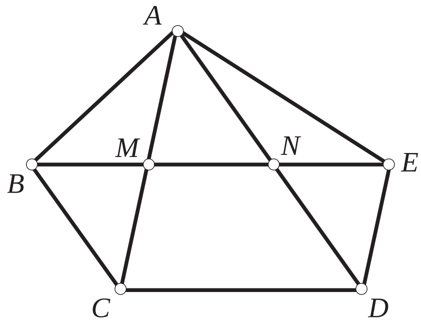
Решение. Бидејќи $\overline{CE_1} = \overline{AD_1}$, доволно е да докажеме дека $\triangle CB_1E_1$ е рамнокрак. Бидејќи дијагоналата на правилен петаголник е паралелна на неговата страна (докажи!), важи $B_1E_1 \parallel C_1D_1$, односно $E_1B_1 \parallel D_1E$.

Според тоа, $\measuredangle CB_1E_1 = \measuredangle CED_1$, како агли со паралелни краци. Заради симетријата на петаголникот

$\triangle CED_1$ е рамнокрак, па затоа $\measuredangle CED_1 = \measuredangle ECD_1$. Конечно, $\measuredangle CB_1E_1 = \measuredangle B_1CE_1$, што значи дека $\triangle CB_1E_1$ е рамнокрак.

17. Во петаголникот $ABCDE$, триаголниците ABC, BCD, CDE, DEA и EAB имаат исти плоштини. Правите AC и AD ја сечат EB во точките M и N соодветно. Докажи дека $\overline{BM} = \overline{EN}$.

Решение. Од условот на задачата $P_{BCD} = P_{CDE}$, и бидејќи $\triangle BCD$ и $\triangle CDE$ имаат заедничка страна CD, тие имаат и еднакви висини. Според тоа, точките E и B се еднакво оддалечени од CD. Значи $EB \parallel CD$. Со слични разгледувања се добива $BC \parallel AD$ и $DE \parallel AC$. Но тогаш $BCDN$ и $MCDE$ се паралелограми (имаат по два пара паралелни страни).



Од тоа што $BCDN$ е паралелограм имаме $\overline{BN} = \overline{CD}$, а од тоа што $MCDE$ е паралелограм имаме $\overline{EM} = \overline{CD}$. Но, тогаш $\overline{BN} = \overline{ME}$, $\overline{BM} + \overline{NM} = \overline{MN} + \overline{NE}$ и $\overline{BM} = \overline{NE}$, што требаше да се докаже.

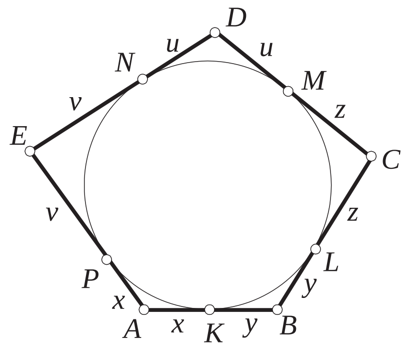
18. Страните на петаголникот последователно се еднакви на $4\,cm$, $6\,cm$, $8\,cm$, $7\,cm$ и $9\,cm$. Дали во петаголникот може да се впише кружница?

Решение. Нека $ABCDE$ е паетаголник, $\overline{AB} = 4\,cm$, $\overline{BC} = 6\,cm$, $\overline{CD} = 8\,cm$, $\overline{DE} = 7\,cm$ и $\overline{EA} = 9\,cm$ во кој може да се впише кружница k. Допирните точки на AB, BC, CD, DE, EA со k ќе ги означиме со K, L, M, N, P соодветно. Тогаш

$$\overline{PA} = \overline{AK} = x, \quad \overline{KB} = \overline{BL} = y, \quad \overline{LC} = \overline{CM} = z, \quad \overline{MD} = \overline{DN} = u, \quad \overline{NE} = \overline{EP} = v,$$

и

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ y + z = 6 \\ z + u = 8 \\ u + v = 7 \\ v + x = 9 \end{cases}$$



Ако ги собереме равенките добиваме

$$2(x + y + z + u + v) = 34,\ \text{т.е.}$$
$$x + y + z + u + v = 17.$$

Но тогаш

$$17 = x + y + z + u + v = y + (x + v) + (z + u) = y + 9 + 8 = y + 17,$$

од каде добиваме $y = 0$. Ако $y = 0$, тогаш $K \equiv B \equiv L$, односно A, B и C се колинеарни. Тоа е противречност со претпоставката дека $ABCDE$ е петаголник.

Значи во петаголникот не може да се впише кружница.

19. Многуаголник, опишан околу кружница со радиус r, е разбиен на произволен начин на триаголници. Докажи дека збирот на радиусите на впишаните кружници во тие триаголници е поголем од r.

Решение. Да ги означиме радиусите на впишаните кружници во триаголниците со $r_1, r_2, ..., r_n$, периметрите на триаголниците со $L_1, L_2, ..., L_n$, а нивните плоштини со $P_1, P_2, ..., P_n$ соодветно. Нека плоштината и периметарот на многуаголникот се означени со P и L соодветно.

За плоштината на секој од триаголниците важи $P_k = r_k s_k$, каде s_k е полузбирот од страните на триаголникот, односно $s_k = \frac{L_k}{2}$. Тогаш $P_k = \frac{r_k L_k}{2}$, од каде $r_k = \frac{2P_k}{L_k}$. Од друга страна периметарот на секој триаголник е помал од периметарот на многуаголникот, односно $L_k < L$ или уште повеќе $\frac{1}{L_k} > \frac{1}{L}$. Сега за збирот на радиусите на впишаните кружници важи

$$r_1 + r_2 + ... + r_n = \frac{2P_1}{L_1} + \frac{2P_2}{L_2} + ... + \frac{2P_n}{L_n} > \frac{2P_1}{L} + \frac{2P_2}{L} + ... + \frac{2P_n}{L} = \frac{2}{L}(P_1 + P_2 + ... + P_n)$$

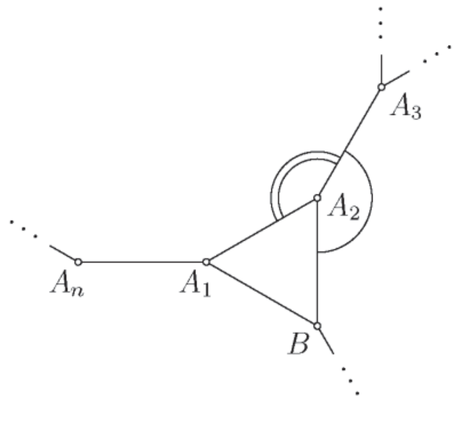
Да забележиме дека плоштината на многуаголникот претставува збир од плоштините на триаголниците на кои е разбиен, односно $P = P_1 + P_2 + ... + P_n$. Уште повеќе, плоштината на многуаголникот се пресметува и како $P = \frac{Lr}{2}$. Тогаш имаме

$$r_1 + r_2 + ... + r_n > \frac{2}{L}(P_1 + ... + P_n) = \frac{2}{L} P = \frac{2}{L} \cdot \frac{Lr}{2} = r .$$

Со тоа покажавме дека навистина $r_1 + r_2 + ... + r_n > r$.

20. Надвор од правилен многуаголник $A_1 A_2 ... A_n$ се наоѓа точка B таква што триаголникот $A_1 A_2 B$ е рамностран. Определи ги сите природни броеви n за кои точките B, A_2 и A_3 се последователни темиња на правилен многуаголник.

Решение. *Прв случај.* Новиот многуаголник лежи надвор од дадениот многуаголник, т.е. $n-$аголникот и $m-$аголникот се наоѓаат на спротивни страни на правата A_2A_3. Тогаш важи $\measuredangle BA_2A_3 + \measuredangle A_1A_2A_3 + 60^\circ = 360^\circ$. Внатрешниот агол на правилен $k-$аголник е еднаков на $\frac{k-2}{k} \cdot 180^\circ$, па затоа



$$\frac{n-2}{n} \cdot 180^\circ + \frac{m-2}{m} \cdot 180^\circ + 60^\circ = 360^\circ$$

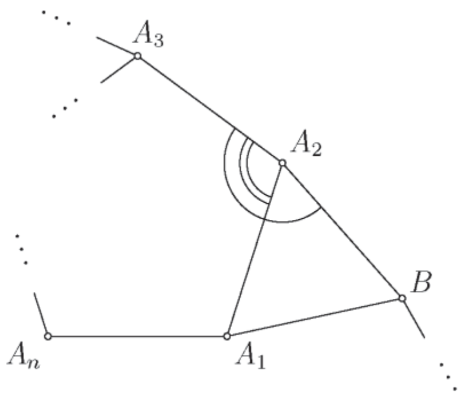
$$3m(n-2) + 3n(m-2) + mn = 6mn$$

$$m = \frac{6n}{n-6} = 6 + \frac{36}{n-6}$$

Од $n-6 \in \mathbb{N}$ и $n-6 \mid 36$ дека задачата има девет решенија

$n-6$	1	2	3	4	6	9	12	18	36
n	7	8	9	10	12	15	18	24	42
m	42	24	18	15	12	10	9	8	7

Втор случај. Разгледуваниот $m-$аголникот и $n-$аголникот се наоѓаат на спротивни страни на правата A_2A_3. Во овој случај $\measuredangle BA_2A_3 = \measuredangle A_1A_2A_3 + 60^\circ$, па затоа



$$\frac{m-2}{n}\cdot 180^\circ = \frac{n-2}{n}\cdot 180^\circ + 60^\circ$$

$$3m(n-2) = 3n(m-2) + mn$$

$$n = \frac{6m}{m+6} = 6 - \frac{36}{m+6}$$

Бидејќи $n \geq 3$, добиваме $\frac{36}{m+6} \in \{1,2,3\}$.

Тогаш

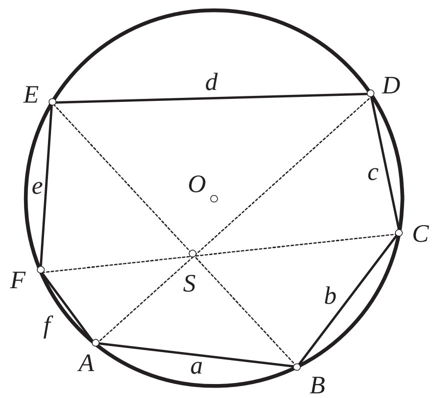
$m+6$	36	18	12
m	30	12	6
n	5	4	3

Според тоа, решенија на задачата се $n \in \{3,4,5,7,8,9,10,12,15,18,24,42\}$.

21. Последователните страни на еден впишан шестаголник во кружница се a,b,c,d,e,f. Каква врска постои меѓу нив, ако трите дијагонали што ги сврзуваат спротивните темиња се сечат во една точка?

Решение. Нека $ABCDEF$ е впишаниот шестаголник и нека S е точката во која се сечат дијагоналите AD, BE и CF (види цртеж).

За триаголниците ABS и EDS имаме $\measuredangle ASB = \measuredangle ESD$ (како накрсни агли) и $\measuredangle ABS = \measuredangle EDS$ (како периферни агли над ист лак). Значи, $\triangle ABS \sim \triangle EDS$. Слично, имаме дека $\triangle BSC \sim \triangle FSE$ и $\triangle CSD \sim \triangle ASF$. Од ова следувас дека:



$$a : d = \overline{SA} : \overline{SE},$$

$$e : b = \overline{SE} : \overline{SC},$$

$$c : f = \overline{SC} : \overline{SA},$$

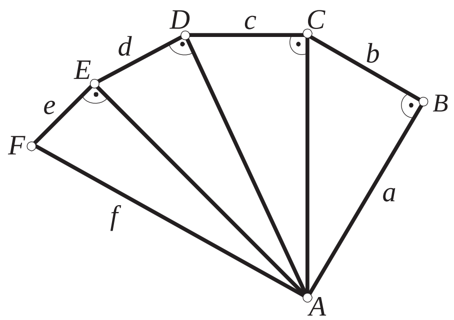
од каде што добиваме дека $ace = bdf$.

22. Даден е шестаголник $ABCDEF$ таков што

$$AB \perp BC,\ BC \perp CD,\ AD \perp DE,\ AE \perp EF.$$

Ако должините на страните на овој шестаголник се природни броеви, докажи дека не е можно сите да бидат непарни броеви.

Решение. Со a,b,c,d,e,f да ги означиме должините на страните AB, BC, CD, DE, EF, FA, соодветно. Од правоаголните триаголници ABC, ACD, ADE, AEF следува



$$a^2 + b^2 = \overline{AC}^2,\ \overline{AC}^2 + c^2 = \overline{AD}^2,$$

$$\overline{AD}^2 + d^2 = \overline{AE}^2,\ \overline{AE}^2 + e^2 = f^2,$$

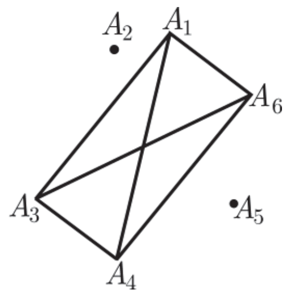
па затоа важи

$$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=f^2.$$

Нека претпоставиме дека a,b,c,d,e,f се непарни природни броеви. Ако искористиме дека квадрат на непарен природен број при делење со 8 дава остаток 1, тогаш добиваме дека бројот на левата страна на последното равенство при делење со 8 дава остаток 5, а бројот на десната страна дава остаток 1, што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува тврдењето на задачата.

23. Определи ги сите природни броеви n, $n>3$, за кои што постои конвексен n-аголник во кој сите дијагонали се со еднаква должина.

Решение. За $n=4$, таков е квадратот, а за $n=5$ таков е правилниот петаголник. Нека $n>5$. Да претпоставиме дека таков n-аголник постои и нека неговите последователни темиња ги означиме со $A_1,A_2,...,A_n$. Го разгледуваме конвексниот четириаголник $A_1A_3A_4A_6$. Од неравенството на триаголник имаме:

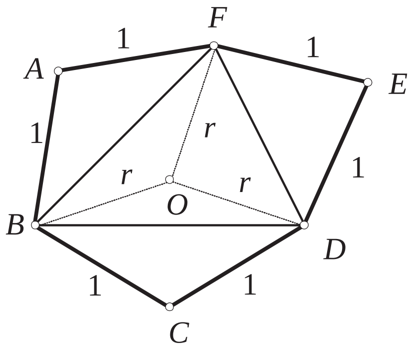


$$\overline{A_1A_4}+\overline{A_3A_6}>\overline{A_1A_3}+\overline{A_4A_6}$$

што противерели на $\overline{A_1A_4}=\overline{A_3A_6}=\overline{A_1A_3}=\overline{A_4A_6}$.

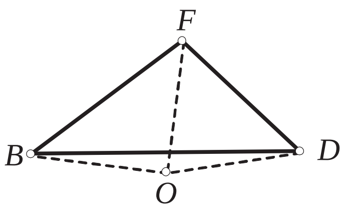
24. Сите страни на конвексен шестаголник $ABCDEF$ имаат должина 1. Докажи, дека радиусот на кружницата опишана околу еден од триаголниците ACE и BDF е поголем или еднаков на 1.

Решение. Да ги означиме радиусите на опишаните кружници околу триаголниците BDF и ACE со r и r_1, соодветно и да претпоставиме дека $r\ge r_1$. Нека $r<1$. Да го оцениме збирот на аглите на шестаголникот. Бидејќи рамнострание триаголници ABF и OBF, каде O е центарот на опишаната кружница околу триаголникот BDF, имаат заедничка основа BF и притоа $\overline{AB}=1>\overline{OB}=r$, добиваме дека $\measuredangle BAF<\measuredangle FOB$. Аналогно, $\measuredangle BCD<\measuredangle BOD$ и $\measuredangle DEF<\measuredangle DOF$. Според тоа,



цртеж 1

$$\measuredangle BAF+\measuredangle BCD+\measuredangle DEF<\measuredangle FOB+\measuredangle BOD+\measuredangle DOF \quad (1)$$



цртеж 2

а збирот на десната страна на (1) е еднаков на 2π (кога триаголникот BDF е остроаголен или правоаголен, цртеж 1) или помал од 2π (кога триаголникот BDF е тапоаголен, цртеж 2). Според тоа,

$$\measuredangle BAF+\measuredangle BCD+\measuredangle DEF<2\pi.$$

Бидејќи $r_1<1$, аналогно се докажува дека

$$\measuredangle ABC+\measuredangle CDE+\measuredangle EFA<2\pi,$$

што значи дека збирот на аглите во шестаголникот е помал од 4π, што не е можно. Од добиената противречност следува дека $r\ge 1$.

25. Аглите на конвексниот n-аголник се $\alpha, 2\alpha, ..., n\alpha$. Определи ги сите можни ведности за n и соодветните вредности за α.

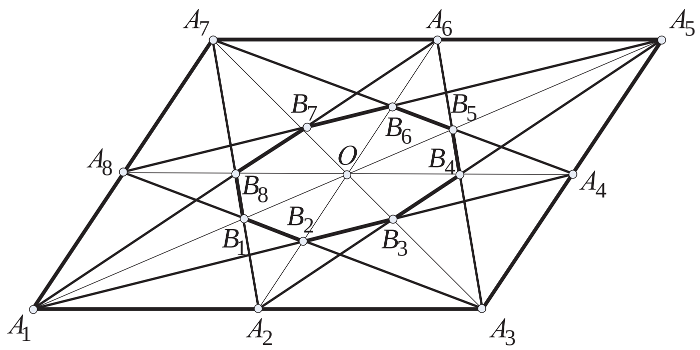
Решение. Јасно е дека $n \geq 3$. Збирот на аглите во конвексниот n-аголник е $(n-2)\pi$ (n-аголникот можеме да го поделиме на $n-2$ триаголници). Од друга страна

$$\alpha + 2\alpha + ... + n\alpha = \alpha(1+2+...+n) = \frac{n(n+1)}{2}\alpha .$$

Од равенката, $(n-2)\pi = \frac{n(n+1)}{2}\alpha$ добиваме $\alpha = \frac{2\pi(n-2)}{n(n+1)}$ и $n\alpha = \frac{2\pi(n-2)}{n+1} < \pi$. Но тогаш $\frac{2(n-2)}{n+1} < 1$, т.е. $n < 5$. Сега за $n = 3$ имаме $\alpha = \frac{\pi}{6}$, а за $n = 4$ имаме $\alpha = \frac{\pi}{5}$.

26. Средините на страните во даден паралелограм се поврзани со спротивните темиња. Така добиените отсечки формираат осумаголник. Докажи дека неговата плоштина е шест пати помала од плоштината на паралелограмот.

Решение. Нека A_2, A_4, A_6, A_8 се средини на страните, а O центар на паралелограмот $A_1A_3A_5A_7$. Нека $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6, B_7, B_8$ се темиња на осумаголникот (види цртеж).



Бидејќи пресекот на дијагоналите во параллелограм е негов центар на симетрија, следува дека A_8, B_8, O, B_4, A_4, а исто така и A_6, B_6, O, B_2, A_2 се колинеарни.

Нека M е пресекот на A_4A_6 и OA_5. Бидејќи M е средина на A_4A_6 (види цртеж) следува дека B_5 е тежиште на триаголникот OA_4A_6 и O, B_5, N, A_5 се колинеарни. Слично се покажува дека A_1, B_1, O, B_5, A_5, а исто така и A_3, B_3, O, B_7, A_7 се колинеарни.

Нека P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 се плоштините на триаголниците OA_4A_5, OA_4B_5, OB_4B_5, $A_4B_5B_4$, $A_4A_5B_5$, соодветно. Бидејќи триаголниците OB_4B_5 и $B_4A_4B_5$ имаат еднакви страни и висини, следува дека $P_3 = P_4$. Бидејќи триаголниците OA_4B_5 и $B_5A_4A_5$ имаат еднакви висини спуштени од A_4 и $\overline{A_5B_5} = 2\overline{OB_5}$ (B_5 е тежиште на триаголникот OA_4A_6), следува дека $P_5 = 2P_2$. Од тоа што $P_2 = P_3 + P_4 = 2P_3$, следува дека $P_1 = P_2 = P_5 = 3P_2 = 6P_3$.

Оваа дискусија се спроведува на ист начин за секој од паровите триаголници (OB_1B_2, OA_1A_2), (OB_2B_3, OA_2A_3), …, (OB_8B_1, OA_8A_1) (види цртеж), од што следува дека плоштината на осумаголникот е шест пати помала од плоштината на паралелограмот.

27. Околу кружница е опишан n-аголник. Произволна точка од внатрешноста на кружницата е поврзана со отсечки со сите темиња на n-аголникот и со сите допирни точки на n-аголникот со кружницата. Добиените $2n$ триаголници се обоени наизменично со црвена и сина боја. Докажи дека производот на плоштините на сините триаголници е еднаква на производот на плоштините на црвените триаголници.

Решение. Нека темињата на n-аголникот се $A_1, A_2, ..., A_n$, допирните точки со кружницата k на страните на n-аголникот се

$$B_1 \in A_1A_2, B_2 \in A_2A_3, ..., B_{n-1} \in A_{n-1}A_n, B_n \in A_nA_1,$$

и S е точка од внатрешноста на кругот. Нека триаголниците SB_1A_2, $SB_2A_3, \dots,$ $SB_{n-1}A_n$, SA_1B_n се обоени во сина боја, а триаголниците SB_1A_1, $SB_2A_2, \dots,$ $SB_{n-1}A_{n-1}$, SB_nA_n се обоени во црвена боја.

Исполнети се равенствата

$$\overline{B_{i-1}A_i} = \overline{A_iB_i}, \; i = 1, 2, ..., n \tag{1}$$

каде A_iB_i е страна на црвен триаголник, а $B_{i-1}A_i$ е страна на син триаголник, и $\overline{B_nA_1} = \overline{A_1B_1}$, при што B_nA_1 е страна на син триаголник. Од друга страна триаголниците SA_iB_i и SB_iA_{i+1} имаат еднаква висина h_i, спуштена од заедничкото теме S. Исто и за триаголниците SA_1B_n и SB_nA_n, при што тогаш висината е h_n

Производот на плоштините на сините триаголници е

$$P_1 = \tfrac{1}{2}\overline{B_nA_1} \cdot h_n \cdot \tfrac{1}{2}\overline{B_1A_2} \cdot h_1 \cdot \tfrac{1}{2}\overline{B_2A_3} \cdot h_2 \cdot ... \cdot \tfrac{1}{2}\overline{B_{n-1}A_n} \cdot h_2,$$

а производот на плоштините на црвените триаголници е

$$P_2 = \tfrac{1}{2}\overline{B_1A_1} \cdot h_1 \cdot \tfrac{1}{2}\overline{B_2A_2} \cdot h_2 \cdot \tfrac{1}{2}\overline{B_3A_3} \cdot h_3 \cdot ... \cdot \tfrac{1}{2}\overline{B_nA_n} \cdot h_n.$$

Сега, заради равенствата (1) јасно е дека $P_1 = P_2$.

5. КРУЖНИЦА И КРУГ

1. Дадена е кружница $k(O, r)$ и една нејзина тетива AB што не е дијаметар. На правата AB е избрана точка C таква што $\overline{BC} = r$ и B е меѓу A и C. Правата CO ја сече кружницата k во точката S, која што не припаѓа на отсечката CO. Докажи дека аголот AOS е трипати поголем од аголот ACS.

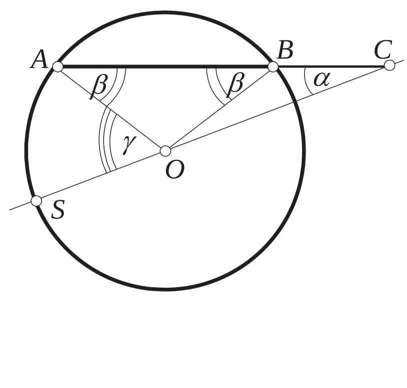
Решение. Триаголниците OCB и ABO се рамнокраки, бидејќи $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{BC}$ (види цртеж). Ако

$$\measuredangle BCO = \measuredangle BOC = \alpha, \measuredangle AOB = \measuredangle BAO = \beta,$$

тогаш: $\beta = 2\alpha$, како надворешен агол за $\triangle OCB$, а γ е надворешен агол за $\triangle AOC$, па имаме:

$$\gamma = \alpha + \beta = \alpha + 2\alpha = 3\alpha.$$

Значи, $\measuredangle AOS = 3\measuredangle ACS$.

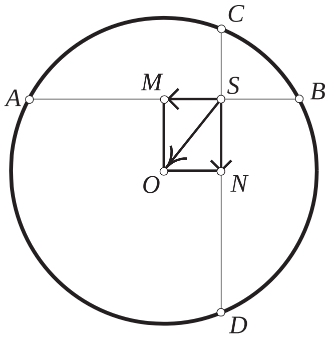


2. Тетивите AB и CD на кружницата (O, r) се заемно нормални и се сечат во точката S. Докажи дека $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}=2\overrightarrow{SO}$.

Решение. Нека AB и CD се заемно нормални тетиви на кружницата (O, r) и нека M и N се нивните средини (види цртеж); тогаш:

$$\overrightarrow{SM}=\tfrac{1}{2}(\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB})$$

$$\overrightarrow{SN}=\tfrac{1}{2}(\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}),$$



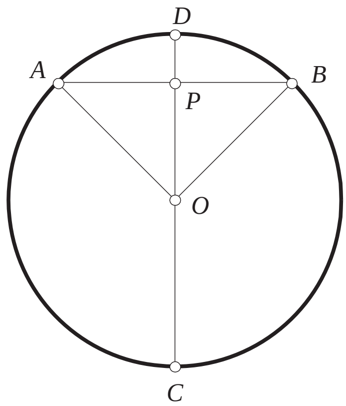
а оттука $\overrightarrow{SO}=\overrightarrow{SM}+\overrightarrow{SN}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD})$, т.е.

$$2\overrightarrow{SO}=\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}.$$

3. Точката P е 9 единици оддалечена од центарот на кружницата со радиус 15. Колку различни тетиви со целобројна должина минуваат низ P ?

Решение. Најголемата тетива што минува низ P е $\overline{CD}=2R=30$. Најмалата тетива е $\overline{AB}$ која е нормална на CD (види цртеж). Од $\triangle APO$, имаме:

$$\frac{\overline{AB}}{2}=\sqrt{15^2-9^2}=12,$$

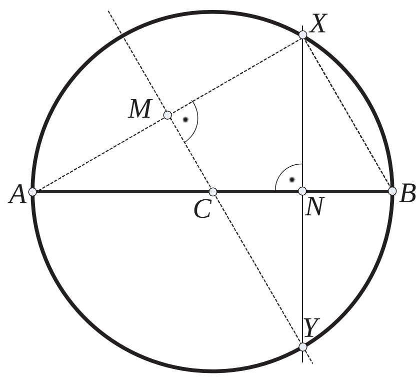


т.е. $\overline{AB}=24$.

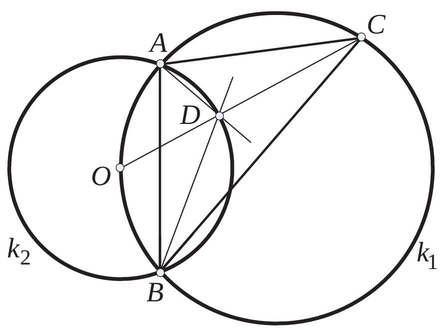
Следствено, низ точката P минуваат 7 тетиви со целобројна должина: 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30.

4. Нека k е кружница со дијаметар AB, и нека C е произволна точка од отсечката AB. На кружницата k определи точки X и Y кои се симетрични во однос на AB и се такви што правите AX и CY се заемно нормални.

Решение. Нека X е една од бараните точки и нека $AX \cap CY = M$ и $AB \cap XY = N$. Тогаш $\measuredangle AMY = 90^\circ$ и $\measuredangle AXB = 90^\circ$, па затоа важи $BX \parallel CY$. Освен тоа, $\overline{NX}=\overline{NY}$ и $BC \perp XY$, па затоа N е средина на на отсечката BC.



5. Нека кружниците k_1 и k_2 се сечат во точките A и B така што центарот O на кружницата k_2 лежи на k_1 и нека C е произволна точка од лакот AB од кружницата k_1 кој не ја содржи точката O и е различна од A и B. Отсечката OC ја сече кружницата k_2 во точката D. Докажи дека точката D е пресек на симетралите на внатрешните агли на три-



аголникот ABC.

Решение. Нека точката C припаѓа на лакот AB на кој што не припаѓа точката O. Ќе докажеме дека AD е симетрала на $\measuredangle BAC$. Имаме $\measuredangle BAD = \frac{1}{2}\measuredangle BOD$ (перифериски и централен агол над BD). Понатаму,

$$\measuredangle BOD = \measuredangle BOC = \measuredangle BAC$$

(периферни агли над BC). Значи, $\measuredangle BAD = \frac{1}{2}\measuredangle BAC$. Со тоа покажавме дека AD е симетрала на $\measuredangle BAC$. Слично се покажува дека BD е симетрала на $\measuredangle ABC$

6. Кружниците $k_1(O_1, r_1)$ и $k_2(O_2, r_2)$ се сечат во точка A. Правата O_1A ја сече кружницата k_2 во точка M_2, а правата O_2A ја сече кружницата k_1 во точка M_1.

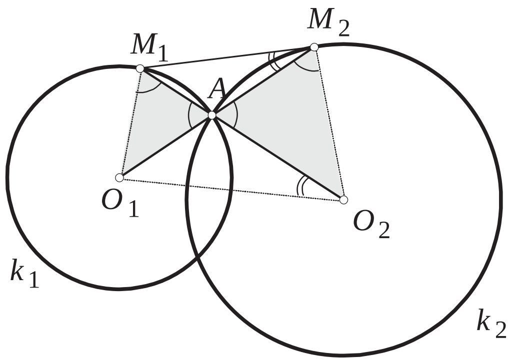
Докажи дека $\measuredangle O_1O_2A = \measuredangle M_1M_2A$.

Решение. Рамнокраките триаголници AM_1O_1 и AM_2O_2 се слични, бидејќи имаат еднакви агли при основите (цртеж десно). Оттука $\measuredangle O_1M_1A = \measuredangle O_2M_2A$, па околу четириаголникот $O_1O_2M_2M_1$ може да се опише кружница, па тогаш

$$\measuredangle O_1O_2M_1 = \measuredangle O_1M_2M_1$$

како перифериски агли, т.е.

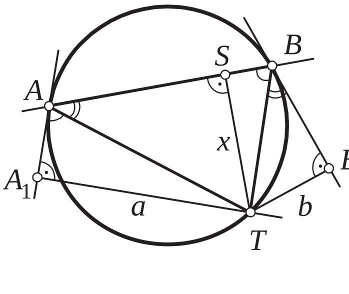
$$\measuredangle O_1AM_1 = \measuredangle O_2AM_2.$$



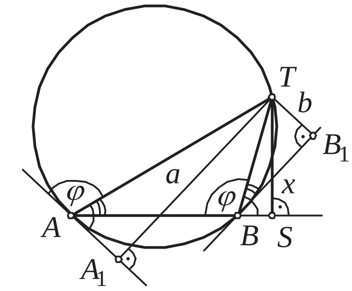
7. На кружница дадени се тoчките A, B и T. Pactojanijata од T до tangentite на кружницатa во A и B се a и b соодветно. Орредели go pactojanieto од T до рравата AB.

Решение. Нека S е пресечната точка на правата AB и нормалата спуштена од T кон AB. Ќе разгледаме два случаи:

1) S е меѓу A и B. Да воведеме ознаки како на цртежот. Во овој случај аголот ABT е остар. Аглите A_1AT и ABT се еднакви (аголот меѓу тетивата и тангентата во една точка е еднаков на произволен периферен агол над таа тетива), па $\triangle A_1AT \sim \triangle SBT$. Следува $\frac{a}{x} = \frac{\overline{AT}}{\overline{BT}}$. Од исти причини и $\measuredangle TAS = \measuredangle TBB_1$, па $\triangle AST \sim \triangle BB_1T$ и следува $\frac{\overline{AT}}{\overline{BT}} = \frac{x}{b}$. Според тоа $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$, односно $x = \sqrt{ab}$.



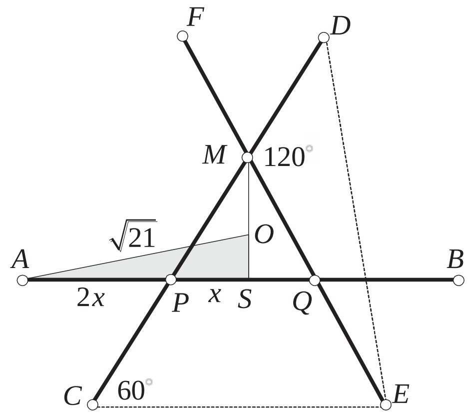
2) S е надвор од отсечката AB. Повторно ќе ги користиме ознаките како на цртежот. Сега $\triangle A_1AT \sim \triangle SBT$ бидејќи имаат по еден прав агол и $\measuredangle A_1AT = \measuredangle SBT = 180^\circ - \phi$ (овде аголот ABT е тап), па



$\frac{a}{x}=\frac{\overline{AT}}{\overline{BT}}$. Слично и $\triangle AST \sim \triangle BB_1T$ (имаат по еден прав агол и $\measuredangle BAT=\measuredangle B_1BT$). Според тоа $\frac{\overline{AT}}{\overline{BT}}=\frac{x}{b}$. Повторно добиваме $\frac{a}{x}=\frac{x}{b}$ и оттука $x=\sqrt{ab}$.

8. Во кружница со радиус $\sqrt{21}$ се повлечени три меѓусебе еднакви тетиви, кои со своите пресеци се поделени на три еднакви дела.Пресметај ја должината на тие тетиви.

Решение. Нека AB, CD и EF се три еднакви тетиви во кружницата K. По услов е: $\overline{AP}=\overline{PQ}=\overline{QB}$ (види цртеж).



Нека S е средина на PQ и нека $\overline{PS}=x$; тогаш $\overline{AP}=2x$ и како $\triangle PQM$ е рамностран, добиваме:

$$\overline{SO}=\frac{1}{3}\overline{SM}=\frac{1}{3}\frac{2x\sqrt{3}}{2}=\frac{x\sqrt{3}}{3}.$$

Од правоаголниот $\triangle ASO$ имаме:

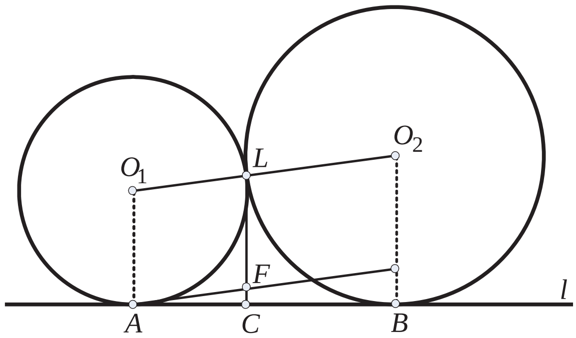
$$21=\overline{AO}^2=\overline{AS}^2+\overline{SO}^2=\frac{28}{3}x^2,$$

$$x=\frac{3}{2},\quad \overline{AB}=6x=9.$$

Значи, должините на секоја од тетивите е 9.

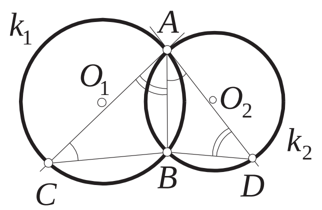
9. Две кружници k_1 и k_2 се допираат во точката L. Растојанието од L до нивната заедничка тангента е еднакво на 1. Ако r_1 и r_2 се радиуси на кружниците k_1 и k_2, тогаш $\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}=2$. Докажи!

Решение. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $r_1 \le r_2$. Нека A и B се допирните точки на тангентата l со кружниците k_1 и k_2 соодветно. Точката F е пресек на отсечките LC и AM, каде $M \in BO_2$ и $AM \parallel O_1O_2$. Триаголниците $\triangle AFC$ и $\triangle AMB$ се слични и заради тоа $\overline{FC}:\overline{MB}=\overline{AF}:\overline{AM}$, т.е. $\frac{1-r_1}{r_2-r_1}=\frac{r_1}{r_1+r_2}$,



од каде следува $r_1+r_2-r_1^2-r_1r_2=r_1r_2-r_1^2$. Значи $r_1+r_2=2r_1r_2$, т.е. $\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}=2$.

10. Две кружници се сечат во точките A и B. Во точката A се повлечени тетиви AC и AD кои се тангентни кон кружинците. Докажи дека $\overline{AB}^2=\overline{BC}\cdot\overline{BD}$ и $\frac{\overline{AC}^2}{\overline{AD}^2}=\frac{\overline{BC}}{\overline{BD}}$.



Решение. Нека кружнците k_1 и k_2 се сечат во точките A и B (види цртеж). Нека AC е тетива во k_1 која ја допира k_2 и AD е тетива во k_2 која ја допира k_1. Според теоремата за агол меѓу тетива и тангента кои имаат заедничка точка, добиваме дека

$$\measuredangle BAD = \measuredangle BCA$$
$$\measuredangle ADB = \measuredangle CAB.$$

Бидејќи $\triangle CAB$ и $\triangle ADB$ имаат исти агли, тие се слични. Според тоа $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{AB}}$, односно $\overline{AB}^2 = \overline{BC} \cdot \overline{BD}$. Но сега од $\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$, имаме $\frac{\overline{AC}^2}{\overline{AD}^2} = \frac{\overline{BC}^2}{\overline{AB}^2} = \frac{\overline{BC}^2}{\overline{BC} \cdot \overline{BD}} == \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}}$, што и требаше да се докаже.

11. Рамнокрак $\triangle ABC$, $\overline{AB} = \overline{AC}$ е вписан во кружница k. Нека D е точка на основата BC на $\triangle ABC$, k_1 е опишаната кружница околу $\triangle ABD$ и E е точка на кружницата k_1 таква што правата AE ја сече кружницата k во точките A и F при што F е меѓу A и E. Ако правите DE и BF се сечат во точката G, докажи дека важи $\overline{EG} = \overline{GF}$.

Решение. Бидејќи точките A, B, C и F лежат на иста кружница заклучуваме дека

$$\measuredangle GFE = 180^\circ - \measuredangle GFA$$
$$= \measuredangle BCA.$$

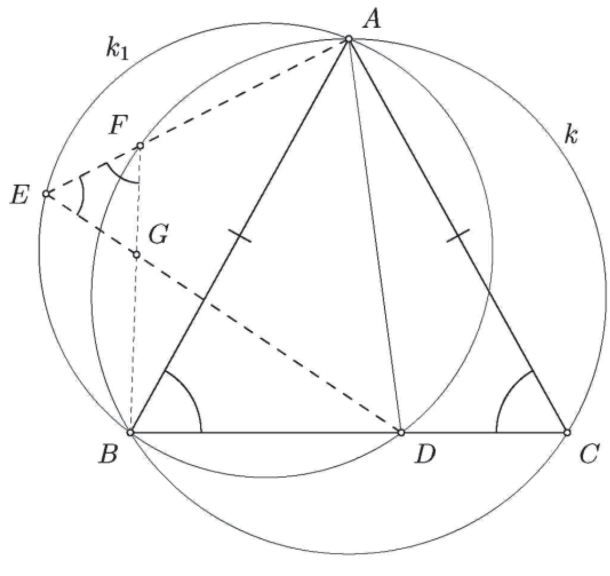
Бидејќи точките A, B, D и E лежат на иста кружница заклучуваме дека

$$\measuredangle ABD = \measuredangle AED = \measuredangle GEF.$$

Понатаму, од $\overline{AB} = \overline{AC}$ следува $\measuredangle GFE = \measuredangle BCA = \measuredangle ABD = \measuredangle GEF$. Конечно, бидејќи

$$\measuredangle GFE = \measuredangle GEF,$$

важи $\overline{EG} = \overline{GF}$.



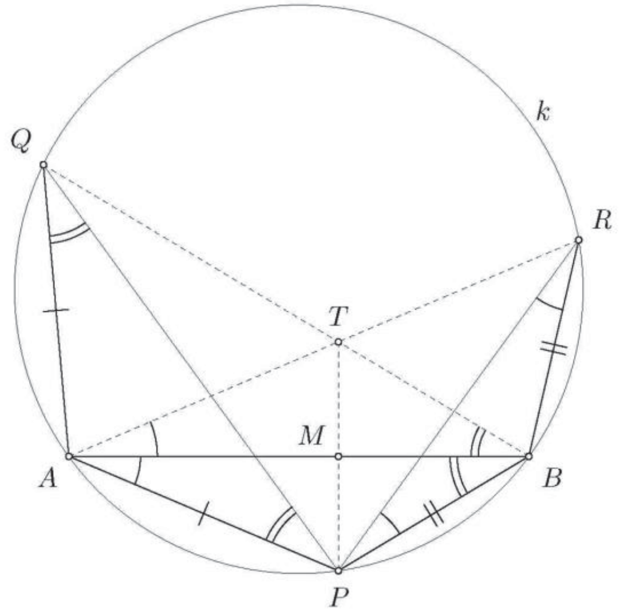
12. Точките A и B припаѓаат на кружницата k, а точката P припаѓа на помалиот лак AB. Нека Q и R се точки од k, различни од P, такви што $\overline{AP} = \overline{AQ}$ и $\overline{BP} = \overline{BR}$. Нека T е пресекот на правите AR и BQ. Докажи, дека правите PT и AB се заемно нормални.

Решение. Од рамнокраките триаголници APQ и BPR следува

$$\measuredangle PAB = \measuredangle PRB = \measuredangle RPB = \measuredangle RAB = \measuredangle TAB$$

и аналогно

$$\measuredangle PBA = \measuredangle PQA = \measuredangle QPA = \measuredangle QBA = \measuredangle TBA.$$



Ова значи дека триаголниците APB и ABT имаа заедничка страна и два пара еднакви соодветни агли, па затоа тие се складни.

Нека PT и AB се сечат во точката M. Триаголниците AMP и AMT имаат заедничка страна AM, еднакви агли $\measuredangle PAM = \measuredangle TAM$ и еднакви страни $\overline{PA} = \overline{TA}$, следува од складноста на триаголниците APB и ABT. Затоа од признакот САС следува дека триаголниците AMP и AMT се складни. Тоа значи дека $\measuredangle PMA = \measuredangle TMA$, па како збирот на овие агли е еднаков на 180°, заклучуваме дека $AM \perp PT$, со што тврдењето е докажано.

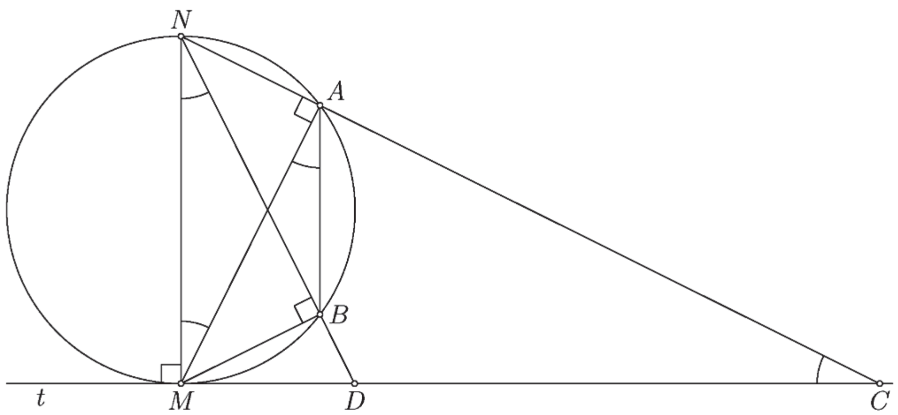
13. Дадена е кружница и во неа тетива AB која е паралелна со дијаметарот MN. Нека t е тангента на кружницата во точката M и нека точките C и D се пресеците на правите NA и NB со правата t, соодветно. Докажи, дека

$$\overline{MC} \cdot \overline{MD} = \overline{MN}^2 .$$

Решение. Нека $\measuredangle MND = \alpha$. Тогаш $\alpha = \measuredangle MNB = \measuredangle MAB = \measuredangle AMN$, па затоа $\measuredangle AMC = \measuredangle CMN = 90^\circ - \alpha$.

Бидејќи MN е дијаметар на кружницата, триаголникот MAN е правоаголен. Затоа $MA \perp NC$, па од правоаголниот триаголник AMC следува

$$\measuredangle ACM = 90^\circ - \measuredangle AMC = 90^\circ - (90^\circ - \alpha) = \alpha .$$



Сега од

$$\measuredangle MCN = \measuredangle MND = \alpha \text{ и } \measuredangle NMC = \measuredangle DMN = 90^\circ$$

следува дека триаголниците MCN и MND се складни, па затоа важи равенството $\frac{\overline{MC}}{\overline{MN}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{MD}}$, кое е еквивалентно со равенството $\overline{MC} \cdot \overline{MD} = \overline{MN}^2$.

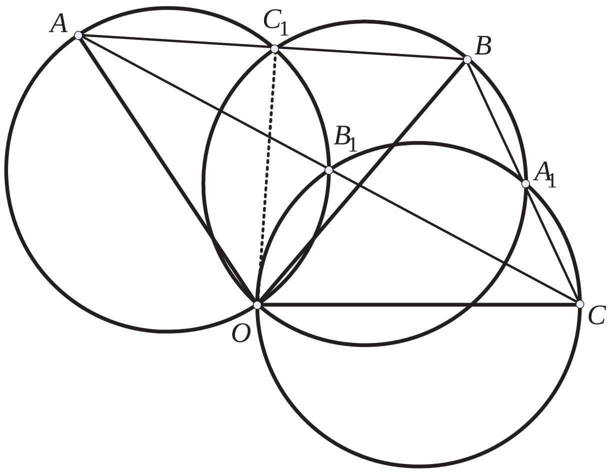
14. Даден е $\triangle ABC$. Низ точката A минува кружница Γ која ја допира страната BC во точката P. Кружницата Γ ги сече страните AB и AC во точките M и N, соодветно. Докажи дека должините на малите кружни лаци MP и NP се еднакви ако и само ако кружницата Γ ја допира опишаната кружница на $\triangle ABC$ во точката A.

Решение. Нека N' е подножјето на нормалата од N на тангентата на Γ во точката A. Слично, нека C' е подножјето на нормалата од C на тангентата на опишаната кружница на $\triangle ABC$ во точката A. Тогаш, малите кружни лаци се еднакви ако и само ако последователно (направи цртеж):

$$\begin{aligned}\sphericalangle MNP = \sphericalangle NMP = \sphericalangle NPC & \\ & \Leftrightarrow MN \parallel BC \\ & \Leftrightarrow \sphericalangle AMN = \sphericalangle ABC = \sphericalangle N'AN = \sphericalangle C'AC \\ & \Leftrightarrow \Gamma \text{ ја допира опишаната кружница на } \triangle ABC \text{ во точката } A.\end{aligned}$$

15. Во рамнина се дадени три еднакви по должина отсечки OA, OB и OC при што точката B лежи во внатрешноста на помалиот агол AOC. Тие се дијаметри на три кружници кои освен во точката O, се сечат и во точките A_1, B_1 и C_1. Докажи дека плоштината на криволинискиот триаголник $A_1B_1C_1$ (шрафираниот дел на цртежот) е половина од плоштината на $\triangle ABC$.

Решение. Триаголниците $\triangle OAC_1$ и $\triangle OC_1B$ се складни, бидејќи $\overline{OA} = \overline{OB}$, $\overline{OC_1}$ е заедничка страна и $\measuredangle OC_1B = \measuredangle AC_1O = 90^\circ$ (Талесова теорема). Од тука следува дека $\overline{AC_1} = \overline{C_1B}$, т.е. точката C_1 е средина на страната AB.



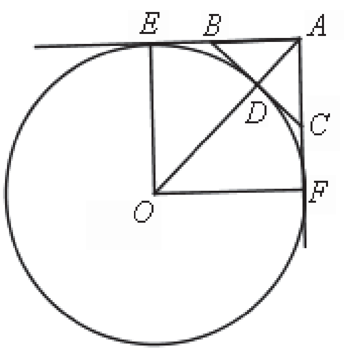
Слично, точките B_1 и A_1 се средини на страните AC и BC, соодветно. Односно, C_1B_1 и B_1A_1 се средни линии на $\triangle ABC$, од каде што следува дека $\overline{A_1B} = \overline{B_1C_1}$. Оттука следува дека плоштината на кружниот отсечок ограничен со лакот B_1C_1 и отсечката B_1C_1 е еднаква со плоштината на кружниот отсечок ограничен со лакот A_1B и отсечката A_1B. Слично, важи и за плоштините на кружните отсечоци чии лаци се BC_1 и A_1B_1.

Од претходно изнесеното следува дека, плоштината на криволинискиот триаголник $A_1B_1C_1$ е еднаква на плоштината на четириаголникот $A_1B_1C_1B$, која што пак е половина од плоштината на триаголникот ABC, што требаше да се докаже.

16. Кружницата $k(O,r)$ ја допира хипотенузата BC на рамнокракиот правоаголен $\triangle ABC$ и ги допира продолженијата на катетите AB и AC во точки E и

F, соодветно. Ако плоштината на триаголникот ABC е p^2, пресметај ја плоштината на кругот $k(O,r)$.

Решение. Нека $k(O,r)$ ја допира хипотенузата BC на рамнокракиот правоаголен триаголник ABC во точка D, којашто е средина на хипотенузата. Од $P_{ABC} = p^2$, следува дека $\overline{AB} = \overline{AC} = p\sqrt{2}$, а тогаш $\overline{BC} = 2p$. Од сличноста на $\triangle ADC$ и $\triangle AFO$ следува $\frac{\overline{DC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{FO}}{\overline{AO}}$, односно $\frac{p}{p\sqrt{2}} = \frac{r}{r+p}$, од каде што добиваме $r = p(\sqrt{2}+1)$. Тогаш плоштината на кругот е



$$P = p^2(3+2\sqrt{2})\pi .$$

17. Две кружници истовремено ги допираат краците на еден прав агол. Најди го односот на нивните радиуси, ако едната од нив минува низ центарот на другата.

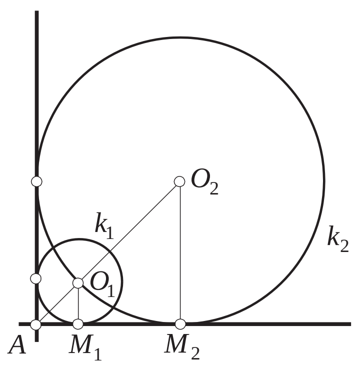
Решение. Можни се два случаја:

1) Нека кружницата $K_2(O_2,R)$ минува низ центарот O_1 на кружницата $K_1(O_1,r)$ (види цртеж 1). Нека M_1 и M_2 се ортогоналните проекции на центрите O_1 и O_2 врз едниот од краците на правиот агол. Тогаш

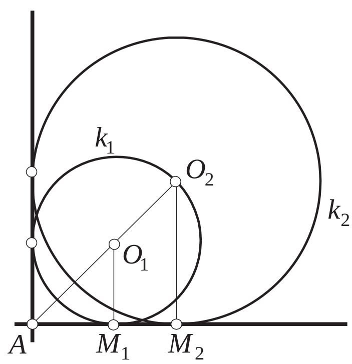
$$\overline{AM_1} = \overline{O_1M_1} = r,\ \overline{AM_2} = \overline{O_2M_2} = R,\ \overline{AO_1} = r\sqrt{2},\ \overline{AO_2} = R\sqrt{2}.$$

Од друга страна $\overline{AO_2} = \overline{AO_1} + \overline{O_1O_2}$, т.е. $R\sqrt{2} = r\sqrt{2} + R$, од каде добиваме

$$\frac{R}{r} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = 2+\sqrt{2}.$$



цртеж 1



цртеж 2

2) Нека кружницата $K_1(O_1,r)$ минува низ центарот O_2 на другата кружница (види цртеж 2). Тогаш аналогно на претходниот случај, последователно добиваме $\overline{AO_2} = \overline{AO_1} + \overline{O_1O_2}$, т.е. $R\sqrt{2} = r\sqrt{2} + r$, па затоа $\frac{R}{r} = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}} = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$.

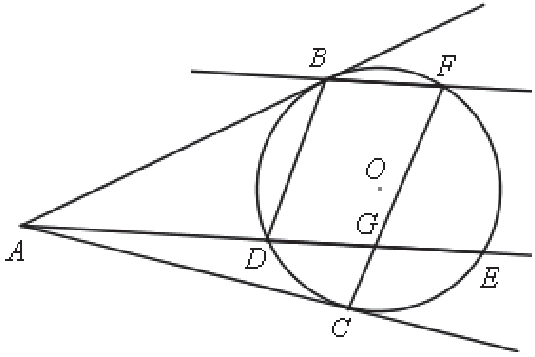
18. Од точка A која е надворешна за кружницата $k(O,r)$, се повлечени тангентите кон кружницата со допири B и C. Тетивата BF е паралелна со секантата AD, која што ја сече кружницата и во точка E. Докажи дека FC ја преполовува тетивата DE.

Решение. Нека $\{G\}=FC\cap DE$. Бидејќи аголот BDE е надворешен агол за $\triangle ADB$ имаме

$$\measuredangle BAD+\measuredangle ABD=\measuredangle BDE,$$

а оттука следува:

$$\begin{aligned}\measuredangle BAG=\measuredangle BAD&=\measuredangle BDE-\measuredangle ABD\\&=\measuredangle BCE-\measuredangle ABD\\&=\measuredangle BCF+\measuredangle FCE-\measuredangle ABD\\&=\measuredangle BCF+\measuredangle BCD-\measuredangle ABD\\&=\measuredangle BCF+\measuredangle ABD-\measuredangle ABD\\&=\measuredangle BCF=\measuredangle BCG\end{aligned}$$



(бидејќи $\overline{BD}=\overline{FE}$ важи $\measuredangle FCE=\measuredangle BCD$, а $\measuredangle ABD$ е периферен над тетивата BD па затоа $\measuredangle ABD=\measuredangle BCD$).

Од $\measuredangle BAG=\measuredangle BCG$ следува дека точките B,A,C и G лежат на иста кружница. Од друга страна, бидејќи $\measuredangle ABO=\measuredangle ACO=90^\circ$, следува дека точките B,A,C и O лежат на иста кружница. Тогаш, точките B,A,C, G и O лежат на кружница чиј дијаметар е AO и затоа $\measuredangle AGO=90^\circ$. Значи, правата OG е нормална на тетивата DE, односно G е средина на тетивата DE.

19. Дадена е кружница k со две паралелни тангенти t_1 и t_2 и радиус R. Дадена е кружница k_1 со радиус r_1 која ја допира k однадвор и ја допира t_1 и кружница k_2 со радиус r_2 која ја допира k однадвор и ја допира t_2. Изрази го R преку r_1 и r_2.

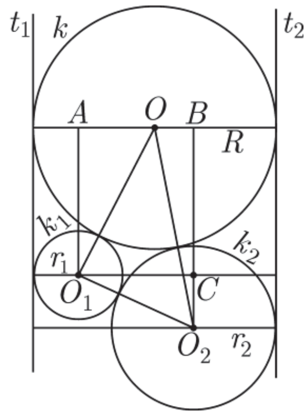
Решение. Од правоаголниот $\triangle OAO_1$ имаме

$$\overline{O_1A}^2=(R+r_1)^2-(R-r_1)^2;\ \overline{O_1A}=2\sqrt{Rr_1}.$$

Од правоаголниот $\triangle OBO_2$ имаме :

$$\overline{O_2B}^2=(R+r_2)^2-(R-r_2)^2,$$

$$\overline{O_2B}=2\sqrt{Rr_2},\ \overline{O_1C}=2R-r_1-r_2.$$



Од правоаголниот $\triangle O_1O_2C$ имаме :

$$\begin{aligned}\overline{O_1C}^2&=(r_1+r_2)^2-\overline{O_2C}^2=(r_1+r_2)^2-(\overline{O_2B}-\overline{CB})^2\\&=(r_1+r_2)^2-(\overline{O_2B}-\overline{O_1A})^2\\&=(r_1+r_2)^2-(2\sqrt{Rr_2}-2\sqrt{Rr_1})^2\end{aligned}$$

т.е.

$$(2R-r_1-r_2)^2=(r_1+r_2)^2-(2\sqrt{Rr_2}-2\sqrt{Rr_1})^2.$$

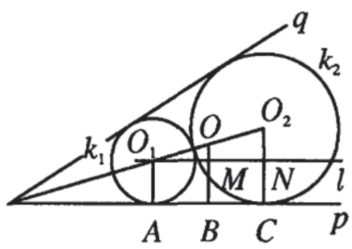
Оттука

$$4R^2+r_1^2+r_2^2-4Rr_1-4Rr_2+2r_1r_2=r_2^2+2r_1r_2+r_2^2-4Rr_2+8R\sqrt{r_1r_2}-4Rr_1.$$

Според тоа, $4R^2 = 8R\sqrt{r_1 r_2}$, т.е. $R = 2\sqrt{r_1 r_2}$.

20. Во внатрешноста на даден агол се конструирани две кружници со центри O_1 и O_2. Кружниците ги допираат краците на аголот и се допираат меѓусебно. Докажи, дека ако трета кружница чиј центар лежи на отсечката O_1O_2 ги допира краците на аголот и ја содржи една од точките O_1 или O_2, тогаш ја содржи и другата точка.

Решение. Нека кружниците се $k_1(O_1, r)$, $k_2(O_2, R)$ и $k(O, x)$, каде $r < x < R$. Повлекуваме нормали O_1A, OB и O_2C кон кракот p на аголот (цртеж десно). Нека $l \parallel p$ е права низ точката O_1 и нека таа ги сече OB и O_2C во точките M и N, соодветно. Тогаш $\triangle O_1OM \sim \triangle O_1O_2N$, па затоа $\frac{\overline{OO_1}}{\overline{O_1O_2}} = \frac{\overline{OM}}{\overline{O_2N}}$.



Имаме,

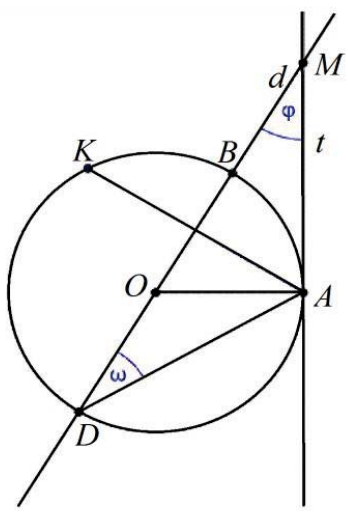
$$\overline{OM} = \overline{OB} - \overline{BM} = \overline{OB} - \overline{O_1A} = x - r,$$
$$\overline{O_2N} = \overline{O_2C} - \overline{CN} = \overline{O_2C} - \overline{O_1A} = R - r$$

и $\overline{O_1O_2} = r + R$. Ако k ја содржи точката O_1, тогаш $\overline{O_1O} = x$ и ја добиваме равенката $\frac{x}{R+r} = \frac{x-r}{R-r}$, од каде наоѓаме $x = \frac{r+R}{2}$. Ако k ја содржи точката O_2, тогаш $\overline{O_1O} = R + r - x$ и ја добиваме равенката $\frac{r+R-x}{R+r} = \frac{x-r}{R-r}$, од каде наоѓаме $x = \frac{r+R}{2}$. И во двата случаја O е средина на O_1O_2, што значи дека k ги содржи и двете точки O_1 и O_2.

21. Нека C е кружница со центар во O и радиус R. Од точката A на кружницата C конструираме тангента t на кружницата. Низ центарот O повлекуваме права d која тангентата ја сече во точка M и кружницата ја сече во точките B и D (B лежи меѓу O и M). Ако $\overline{AM} = R\sqrt{3}$, докажи дека:

а) Триагоникот AMD е рамнокрак.

б) Центарот на опишаната кружница околу $\triangle AMD$ лежи на кружницата C.



Решение. Бидејќи t е тангента на кружницата C важи $\measuredangle OAM = 90^\circ$. Од Питагоровата теорема следува

$$\overline{OM}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AM}^2 = R^2 + (R\sqrt{3})^2 = 4R^2$$

т.е. $\overline{OM} = 2R$. Значи, во правоаголниот $\triangle OAM$

имаме $\overline{OM}=2\overline{OA}$, па затоа $\varphi=\measuredangle OMA=30^\circ$. Понатаму, бидејќи $\overline{OA}=\overline{OD}=R$, $\triangle OAD$ е рамнокрак и важи

$$\measuredangle ODA=\measuredangle OAD=\omega \text{ и } \measuredangle AOD=180^\circ-\omega.$$

Аголот $\measuredangle AOD$ е надворешен за $\triangle OAM$, па затоа

$$\measuredangle AOD=90^\circ+\measuredangle OMA$$

$$180^\circ-2\omega=90^\circ+\varphi$$

$$\omega=\frac{90^\circ-\varphi}{2}=\frac{90^\circ-30^\circ}{2}=30^\circ.$$

Според тоа, $\triangle AMD$ е рамнокрак со $\overline{AM}=\overline{AD}$.

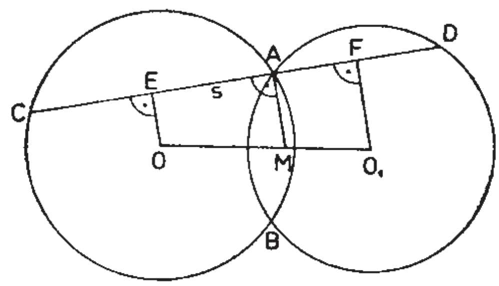
б) Центарот на опишаната кружница околу $\triangle AMD$ лежи на симетралата на страната MD, која минува низ темето A и ја сече кружницата C во уште една точка K. Според тоа, $KA\perp DM$. Понатаму, $\triangle OAK$ е рамнокрак, па затоа правата DM е симетрала на отсечката KA, што значи дека $\triangle DAK$ е рамнокрак ($\overline{DK}=\overline{DA}$). Но, тоа значи дека $\measuredangle ADK=2\omega=2\cdot 30^\circ=60^\circ$, па затоа

$$\measuredangle KAD=\measuredangle AKD=\frac{180^\circ-60^\circ}{2}=60^\circ,$$

т.е. $\triangle DAK$ е рамностран. Според тоа, $\overline{KA}=\overline{KD}$. Од друга страна K припаѓа на симетралата на страната DM, па затоа $\overline{KM}=\overline{KD}$, што заедно со претходно изнесеното повлекува $\overline{KM}=\overline{KD}=\overline{KA}$, т.е. K е центар на опишаната кружница околу $\triangle AMD$.

22. Нека кружниците $K(O,R)$ и $K_1(O_1,R_1)$ се сечат во точките A и B. Низ точката A конструирај права s која ги сече K и K_1 во точките C и D, соодветно, таква што $\overline{CA}:\overline{AD}=3:2$.

Решение. Нека претпоставиме дека задачата е решена и нека $\overline{CA}:\overline{AD}=3:2$. Со E и F да ги означиме средините на тетивите CA и AD, (цртеж десно). Тогаш, $\overline{EA}:\overline{AF}=3:2$. Да ги поврземе центрите на кружниците и да конструираме права $AM\perp s$. Тогаш, $OE\,\|\,MA\,\|\,O_1F$, па затоа



$$\overline{EA}:\overline{AF}=\overline{OM}:\overline{O_1M}.$$

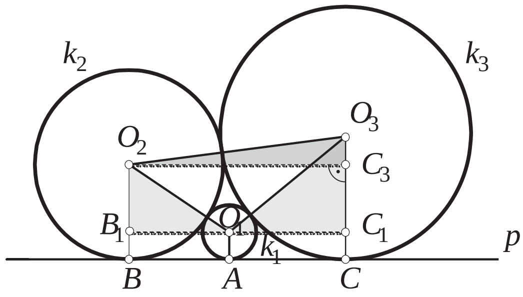
Од досега изнесеното следува следната конструкција. На отсечката OO_1 наоѓаме точка M таква, што

$$\overline{OM}:\overline{O_1M}=3:2$$

и ја конструираме правата AM. Во точката A конструираме права s нормална на AM и тоа е бараната права.

23. Три кружници со радиуси a,b и c $(a<b<c)$ се допираат меѓусебно однадвор, а секоја од нив допира иста права. Докажи дека $\frac{1}{\sqrt{a}}=\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}}$.

Решение. Нека $k_1(O_1,a)$, $k_2(O_2,b)$ и $k_3(O_3,c)$ ја допираат правата p во точките A, B, C, соодветна (види цртеж).



Повлекуваме прави низ O_1 и O_2 паралелни со правата p и ги добиваме точките B_1, C_1 и C_2. Лесно се утврдува дека триаголниците $O_1B_1O_2$, $O_1C_1O_3$ и $O_2C_2O_3$ се правоаголни, и притоа:

$$\overline{O_2B_1}=b-a,\ \overline{O_2O_1}=b+a,\ \overline{O_3C_1}=c-a$$
$$\overline{O_3C_2}=c-b,\ \overline{O_3O_1}=c+a,\ \overline{O_3O_1}=b+c$$

Од $\triangle B_1O_1O_2$ имаме:

$$\overline{B_1O_1}^2=(b+a)^2-(b-a)^2=4ab$$

Од $\triangle C_1O_1O_3$ имаме:

$$\overline{C_1O_1}^2=(c+a)^2-(c-a)^2=4ac$$

Од $\triangle O_2C_2O_3$ имаме:

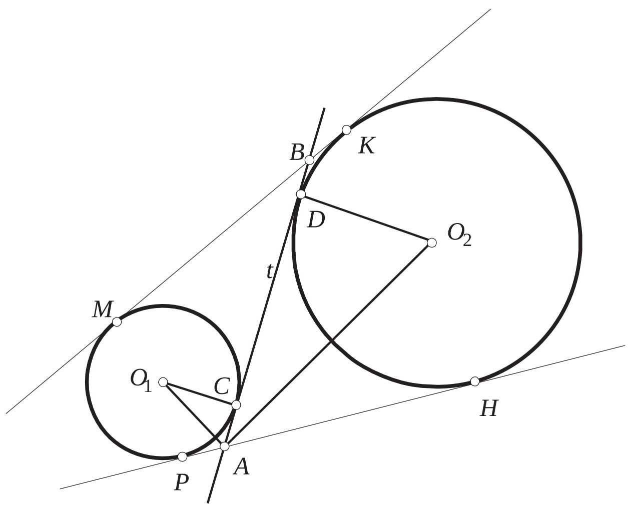
$$\overline{C_1O_1}^2=(c+a)^2-(c-a)^2=4ac$$

Но, очигледно важи:

$$\overline{B_1O_1}+\overline{O_1C_1}=\overline{B_1C_1}=\overline{O_2C_2}$$
$$2\sqrt{ab}+2\sqrt{ac}=2\sqrt{bc}\quad /:2\sqrt{abc}$$
$$\frac{1}{\sqrt{a}}=\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}}.$$

24. Дадени се две кружници со радиуси R_1 и R_2 кои не се сечат и се вписани во агол. Заедничката тангента, која не е ниту еден од краците на аголот, ги допира во точките C и D, а краците на аголот ги сече во точките A и B. Докажи дека

$$\overline{AC}\cdot\overline{CB}=\overline{AD}\cdot\overline{DB}=R_1\cdot R_2.$$



Решение. Од равенствата $\overline{MK}=\overline{PH}$, $\overline{CD}+2\overline{DB}=\overline{MK}$ и $\overline{CD}+2\overline{CA}=\overline{PH}$ добиваме

$$\overline{CD}+2\overline{DB}=\overline{CD}+2\overline{CA},\text{ т.е. }\overline{DB}=\overline{CA}.$$

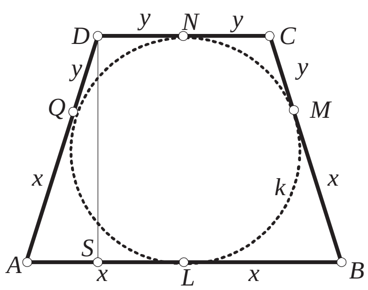
Според тоа

$$\overline{AC}\cdot\overline{CB}=\overline{AC}\cdot(\overline{CD}+\overline{DB})=\overline{BD}\cdot(\overline{CD}+\overline{AC})=\overline{BD}\cdot\overline{DA}.$$

Полуправата AO_2 е симетрала на аголот $\measuredangle BAH$, а полуправата AO_1 е симетрала на аголот $\measuredangle PAB$. Бидејќи аголот $\measuredangle PAH$ е прав агол, добиваме дека $\measuredangle O_1AO_2$ е прав агол, т.е. $O_1A \perp O_2A$. Очигледно е дека $O_1C \perp AD$, па заради тоа $\measuredangle AO_1C = \measuredangle O_2AD$ (како агли со заемно нормални краци). Бидејќи триаголниците $\triangle AO_1C$ и $\triangle O_2AD$ имаат еднакви агли, тие се слични. Значи, $\overline{O_1C} : \overline{AC} = \overline{AD} : \overline{DO_2}$ и $R_1 : \overline{AC} = \overline{AD} : R_2$. Конечно, $R_1 \cdot R_2 = \overline{AC} \cdot \overline{AD} = \overline{AC} \cdot \overline{CB} = \overline{AD} \cdot \overline{DB}$.

25. Во рамнокрак трапез впишана е кружница. Пресметај ја плоштината на кружницата ако основите на трапезот имаат должини a и b.

Решение. Нека $ABCD$ е рамнокрак трапез со основи $\overline{AB} = a$ и $\overline{CD} = b$ и нека k е кружница која е впишана во него. Нека допирните точки на кружницата со страните AB, BC, CD, DA се L, M, N, Q соодветно, а S е подножје на нормалата спуштена од темето D врз основата AB (види цртеж). Тогаш



$$\overline{AL} = \overline{LB} = \overline{BM} = \overline{AQ} = x \text{ и}$$
$$\overline{MC} = \overline{CN} = \overline{ND} = \overline{DQ} = y$$

па

$$b = \overline{CD} = \overline{CN} + \overline{ND} = y + y = 2y, \quad a = \overline{AB} = \overline{AL} + \overline{LB} = x + x = 2x.$$

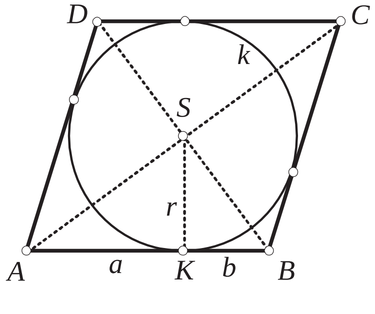
Од друга страна $c = \overline{AD} = \overline{BC} = x + y$. Бидејќи $x + y = \frac{2(x+y)}{2} = \frac{2x+2y}{2} = \frac{a+b}{2}$, добиваме $c = \frac{a+b}{2}$. Бидејќи трапезот е рамнокрак, имаме $\overline{AS} = \frac{a-b}{2}$. Од правоаголниот триаголник ASD, добиваме

$$\overline{DS} = \sqrt{\overline{AD}^2 - \overline{AS}^2} = \sqrt{(\tfrac{a+b}{2})^2 - (\tfrac{a-b}{2})^2} = \sqrt{ab}.$$

Од равенствата $d = 2R = \overline{DS} = \sqrt{ab}$, каде е радиусот на впишаната кружница, добиваме $R = \frac{1}{2}\sqrt{ab}$. Според тоа, $P_k = R^2\pi = (\frac{1}{2}\sqrt{ab})^2\pi = \frac{1}{4}\pi ab$.

26. Во ромб е впишан круг. Секоја страна на ромбот со допирната точка на впишаната кружница е разделена на две отсечки со должини a и b. Пресметај ја плоштината на кругот.

Решение. Нека $ABCD$ е ромб во кој дијагоналите AC и BD се сечат во точката S а впишаната кружница во ромбот k ја допира страната AB во точката K. Според тоа, од условот на задачата $\overline{AK} : \overline{KB} = a : b$. Бидејќи $SK \perp AB$ и $AS \perp SB$, добиваме дека $\measuredangle KSB = \measuredangle KAS$ (агли со нормални краци). Бидејќи триаголниците AKS и SKB се правоаголни, тие се слични (имаат еднакви агли). Бидејќи $\overline{SK} = r$ е радиус на впишаната кружница,



добиваме дека $\frac{\overline{AK}}{\overline{KS}}=\frac{\overline{KS}}{\overline{KB}}$, т.е. $\frac{a}{r}=\frac{r}{b}$. Според тоа, $r^2=ab$ и плоштината на впишаната кружница е еднаква на $P=\pi r^2=\pi ab$.

27. Во рамнокрак трапез опишан околу кружница со радиус R, односот на бочната страна и неговата долна основа е k. Колкава е должината на помалата основа.

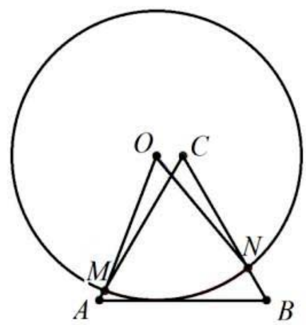
Решение. Нека $ABCD$ е рамнокрак трапез во кој е впишана кружница со радиус R, и должината на поголемата основа е $\overline{AB}=a$. Ако c е должина на бочната страна, тогаш од условот на задачата $\frac{c}{a}=k$, т.е. $c=ak$. Нека S е подножје на висината спуштена од темето D. Тогаш должината на висината DS е еднаква на $h=\overline{DS}=2R$. Ако $b=\overline{CD}$, тогаш од претходната задача имаме $c=\frac{a+b}{2}$, $\overline{AS}=\frac{a-b}{2}$. Ако ги искористиме равенствата $c=\frac{a+b}{2}$ и $c=ak$, добиваме $ak=\frac{a+b}{2}$, $a+b=2ak$, т.е.

$$b=2ak-a. \tag{1}$$

Од друга страна $a-b=2a-2ak$, па според тоа $\overline{AS}=a-ak$, и од правоаголниот триаголник ASD, имаме $\overline{DS}^2=\overline{AD}^2-\overline{AS}^2$, т.е. $(2R)^2=(ak)^2-(a-ak)^2$. Од последната равенка добиваме $a=\frac{2R}{\sqrt{2k-1}}$. Ако замениме во (1) за помалата основа се добива $b=2R\sqrt{2k-1}$.

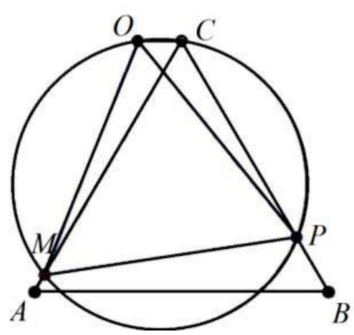
28. Даден е рамностран $\triangle ABC$ со должина на висина 1. Кружница со центар на иста страна на правата AB како и точката C и радиус 1 ја допира страната AB. Кружницата се тркала по страната AB. Додека кружницата се тркала, таа ги сече страните AC и BC. Докажи, дека должината на лакот кој е внатре во триаголникот е константна.

Решение. Нека k е разгледуваната кружница, O е нејзиниот центар и k ги сече страните AC и BC во точките M и N, соодветно. Точките O и C се еднакво оддалечени од правата AB, па затоа $OC \parallel AB$. Од $OC \parallel AB$ и $\measuredangle ABC=60^\circ$ следува дека $\measuredangle OCB=120^\circ$. Понатаму, од $\measuredangle ACB=60^\circ$ следува $\measuredangle ACO=60^\circ$.



Нека кружницата низ точките O, C, M ја сече страната BC во точката P. Ќе докажеме дека $P\equiv N$. Четириаголникот $MOCP$ е тетивен, па затоа важи

$$\measuredangle PMO=180^\circ-\measuredangle OCP=60^\circ=\measuredangle MCO=\measuredangle MPO.$$



Според тоа, за $\triangle MOP$ два агли се еднакви на 60°, па затоа тој е рамностран. Значи, $\overline{OP}=\overline{ON}=1$, т.е. $P\equiv N$. Сега, од еднаквоста на аглите над иста тетива следува дека

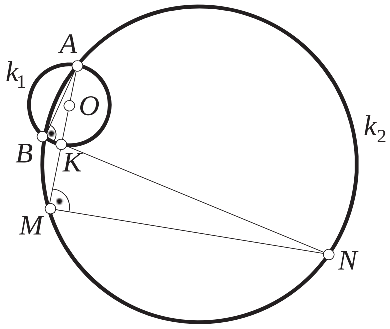
$$\measuredangle MON=\measuredangle MOP=\measuredangle MCP=60^\circ.$$

Значи, централниот агол на кружницата k над лакот MP (делот кој се наоѓа внатре во $\triangle ABC$) е константен, па затоа и должината на лакот MP е константна.

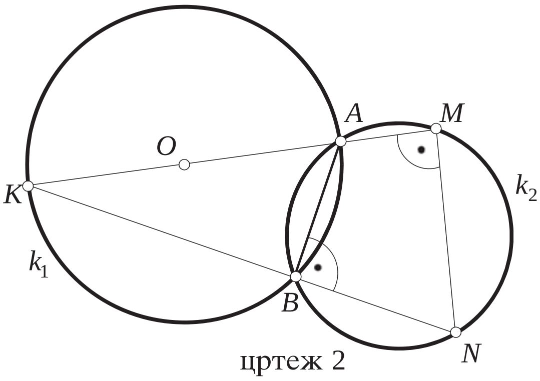
29. Две кружници се сечат во точките A и B. Низ точката K од првата кружница се повлечени правите KA и KB, кои што ја сечат другата кружница во точките M и N. Ако O е центарот на првата кружница, тогаш $MN \perp OK$. Докажи!

Решение. Во зависност од изборот на точката K и заемната положба на кружниците k_1 со центар O и k_2, ќе разгледаме неколку случаи. Притоа, точката K не се совпаѓа со некоја од точките A или B, бидејќи во тој случај задачата не е добро дефинирана, бидејќи правите KA и KB не се добро определени.

1. Правата KA или KB минува низ O. Во овој случај аголот KBA е прав, па тврдењето следува од сличноста на правоаголните триаголници KBA и KMN, ако K е во кругот k_2 (види цртеж 1), односно од тетивноста на четириаголникот



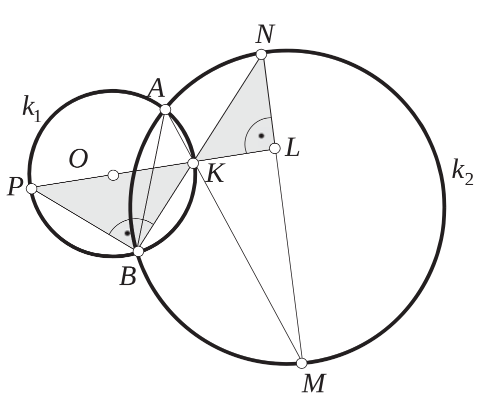
цртеж 1



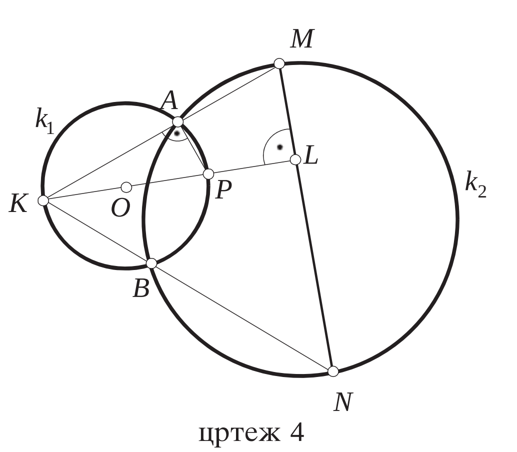
цртеж 2

$ABMN$, ако K не е во кругот k_2 (види цртеж 2).

2. Нека K е во кругот k_2 и нека правата KO ја сече кружницата k_1 во точката P, а правата MN во точката L (види цртеж 3). Треба да докажеме дека $MN \perp OK$, т.е. дека $\triangle KNL$ е правоаголен, со прав агол кај темето L. За таа цел доволно е да докажеме дека тој е сличен со правоаголниот $\triangle KPB$, со прав агол кај B. Имаме: $\measuredangle P = \measuredangle A = \measuredangle N$, над ист лак, па $\measuredangle BKP = \measuredangle LKH$, како накрсни, па затоа $\triangle KNL \sim \triangle KPB$, $\measuredangle L = \measuredangle B = 90^\circ$.



цртеж 3



цртеж 4

3. Нека K е надвор од k_2, а двете точки M и N се надвор од k_1 (види цртеж 4). Треба да докажеме дека $MN \perp OK$, т.е. дека ΔKNL е правоаголен $\measuredangle L = 90^\circ$. Доволно е да докажеме дека ΔKNL е сличен со ΔKPA, кај кој што $\measuredangle A = 90^\circ$, (Талесова теорема). Бидејќи аголот кај темето K им е заеднички, доволно е да докажеме дека $\measuredangle KPA = \measuredangle KML$. Имаме:

i) $\measuredangle KPA = \measuredangle KBA$, агли над ист лак

ii) $\measuredangle KBA + \measuredangle ABN = 180^\circ$, напоредни агли,

iii) $\measuredangle AMN + \measuredangle ABN = 180^\circ$, како спротивни агли во тетивниот четириаголник $ABNM$.

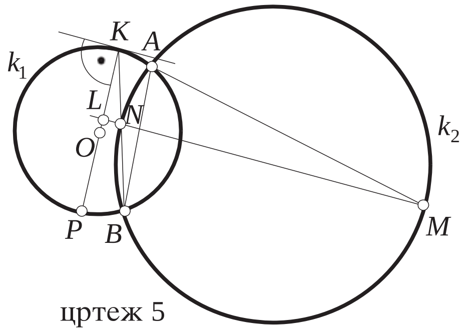
Од i), ii) и iii) следува дека

$\measuredangle KPA = \measuredangle AMN$, т.е. $\measuredangle KPA = \measuredangle KML$.

Значи, $\triangle KNL$ е сличен со $\triangle KPA$.

4. Нека K е надвор од k_2, а една од точките M или N е во k_1 (види цртеж 5). Нека KT е тангнта на кружницата k_1. Доволно е да докажеме дека $KT \parallel LM$, т.е. дека се еднакви трансферзалните агли TKA и AML. Последното следува од равенствата:

$$\measuredangle TKA = \measuredangle KBA \text{ и } \measuredangle KBA = \measuredangle AMN.$$



цртеж 5

30. Дадена е кружница k со центар O, A и B се две нејзини точки такви што $\measuredangle AOB = 90^\circ$. Кружинците $k_1(O_1)$ и $k_2(O_2)$ се допираат до k одвнатре во точките A и B соодветно, и се допираат меѓу себе. Кружницата $k_3(O_3)$ е во внатрешноста на $\measuredangle AOB = 90^\circ$, ги допира k_1 и k_2 однадвор а k однатре. Докажи дека O, O_1, O_2 и O_3 се темиња на правоаголник.

Решение. Нека $k(O,R)$, $k_1(O_1,r_1)$ и $k_2(O_2,r_2)$ се дадените кружницивкои го исполнуваат условот од задачата и нека $r = R - r_1 - r_2$.

Ќе избереме точка P така што OO_2PO_1 е правоаголник. Бидејќи k, k_1, k_2 се допираат меѓу себе имаме

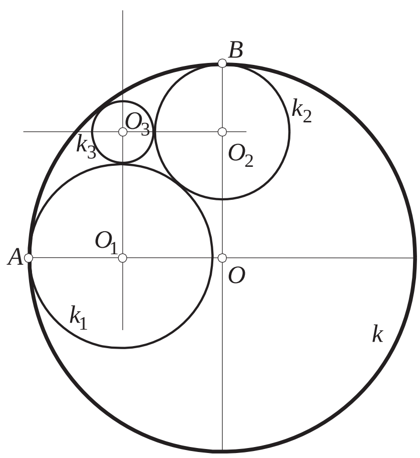
$\overline{OO_1} = R - r_1$, $\overline{OO_2} = R - r_2$, $\overline{O_1O_2} = r_1 + r_2 = R - r$.

Доволно е да се докаже дека P е центар на k_3 и нејзиниоит радиус е r.

Бидејќи OO_2PO_1 е правоагоник имаме

$$\overline{OP} = \overline{O_1O_2} = r_1 + r_2 = R - r.$$

Значи, P е центар на кружница со радиус r што ја допира k.



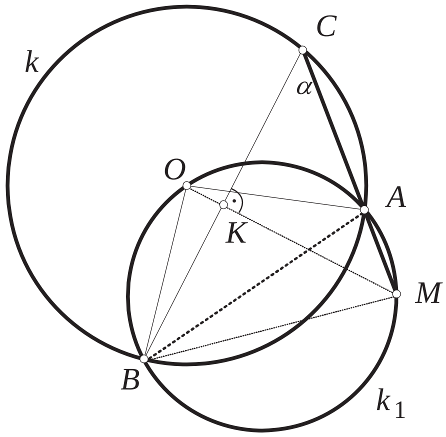
Од друга страна $\overline{O_1P} = \overline{OO_2} = R - r_2 = r + r_1$, добиваме дека P е центар на кружница која ја допира k_1 и има радиус r.

Слично од $\overline{O_2P} = \overline{OO_1} = R - r_1 = r + r_2$, добиваме дека P е центар на кружница со радиус r што ја допира k_2 .

Конечно, $P \equiv O_3$ и бидејќи OO_2PO_1 е правоаголник добиваме дека $OO_2O_3O_1$ е правоаголник.

31. Отсечката AB е заедничка тетива на кружниците $k(O,r)$ и k_1, при што k_1 минува низ точката O. Произволна права низ A ги сече кружниците k и k_1 во точките C и M , соодветно. Докажи дека $OM \perp BC$.

Решение. Ќе воведеме ознаки како на цртежите.



цртеж 1

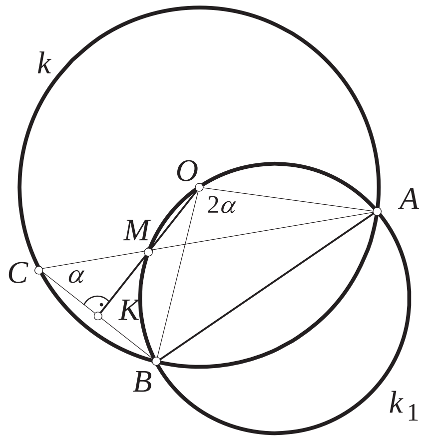
<u>1 случај.</u> Точката M е надвор од k , а C е надвор од k_1 (цртеж 1). Да го означиме со α аголот ACB . Аголот AOB е централен, а α е периферен над лакот AB , па $\measuredangle AOB = 2\alpha$. Триаголникот OAB е рамнокрак со основа AB па затоа

$$\measuredangle OAB = \frac{180^\circ - 2\alpha}{2} = 90^\circ - \alpha = \measuredangle OBA .$$

Од друга страна $\measuredangle OMB = \measuredangle OAB$ како периферни агли над лакот AB во k_1. Значи $\measuredangle AMO = 90^\circ - \alpha$. Според тоа во триаголникот CMK имаме

$$\alpha + \measuredangle CMK = \alpha + 90^\circ - \alpha = 90^\circ ,$$

па $\measuredangle CKM = 90^\circ$, што требаше да се докаже.



цртеж 2

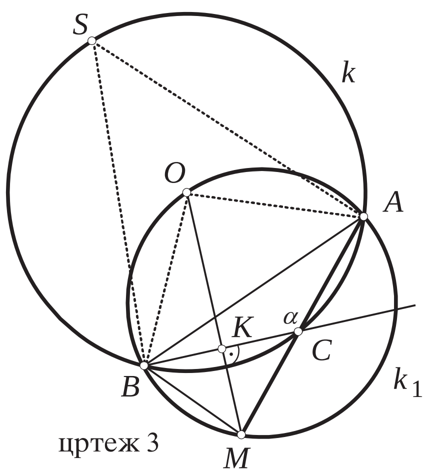
<u>2 случај.</u> Точката M се наоѓа во внатрешноста на k (цртеж 2). Нека $\alpha = \measuredangle ACB$. Од исти причини како во првиот случај $\measuredangle AOB = 2\alpha$ и

$$\measuredangle OAB = \frac{180^\circ - 2\alpha}{2} = 90^\circ - \alpha = \measuredangle OBA .$$

Од друга страна $\measuredangle OMA = \measuredangle OBA$ како периферни агли над лакот OA во k_1. Исто така $\measuredangle OMA = \measuredangle CMK$ како накрсни агли. Значи во триаголникот CMK имаме

$$\measuredangle MCK + \measuredangle CMK = \alpha + 90^\circ - \alpha = 90^\circ ,$$

па $\measuredangle CKM = 90^\circ$.



цртеж 3

<u>3 случај.</u> Точката C е во внатрешноста на k_1 (цртеж 3). Нека $\alpha = \measuredangle ACB$. Тогаш $\measuredangle AOM = \measuredangle ABM$ како периферни агли над лакот AM во k_1. Нека S е точка од k . Тогаш четириаголникот $ASBC$ е тетивен па $\measuredangle ASB = 180^\circ - \alpha$. Од

друга страна

$$\measuredangle AOB = 2\measuredangle ASB = 360^\circ - 2\alpha .$$

Триаголникот OAB е рамнокрак, па

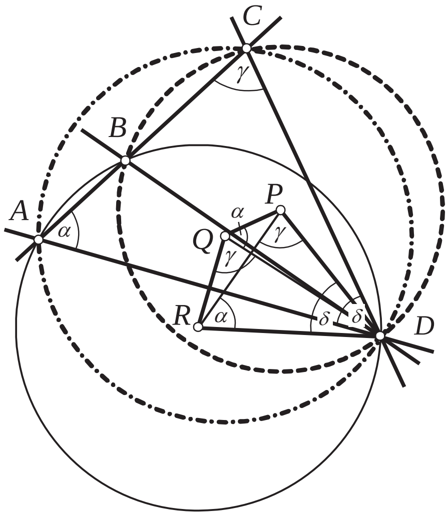
$$\measuredangle OAB = \frac{180^\circ - 360^\circ + 2\alpha}{2} = \alpha - 90^\circ .$$

Исто така $\measuredangle OMA = \measuredangle OMB = \alpha - 90^\circ$ (агли над тетиви со еднакви должини) и $\measuredangle OAB = \measuredangle OMB$ (периферни агли над лакот OB). Во триаголникот CKM имаме

$$\measuredangle KMC + \measuredangle KCM = \alpha - 90^\circ + 180^\circ - \alpha = 90^\circ ,$$

па аголот CKM е прав.

32. Нека A, B и C се различни точки од една права (B е меѓу A и C) и D е точка надвор од таа права. Нека P, Q и R се се центрите на опишаните кружници околу триаголниците BCD, CAD и ABD, соодветно. Докажи дека четириаголникот $DPRQ$ е тетивен.



Решение. *Прв начин.* Да воведеме ознаки како на цртежот. Тогаш Q и R лежат на симетралата на AD (AD е заедничка тетива за двете кружници), па $QR \perp AD$. Аналогно $RP \perp BD$ и $PQ \perp CD$. Сега, користејќи го фактот дека периферниот агол е двапати помал од централниот над иста тетива добиваме

$\measuredangle RQD = \gamma, \measuredangle PQD = \alpha, \measuredangle RPD = \gamma, \measuredangle PRD = \alpha$.

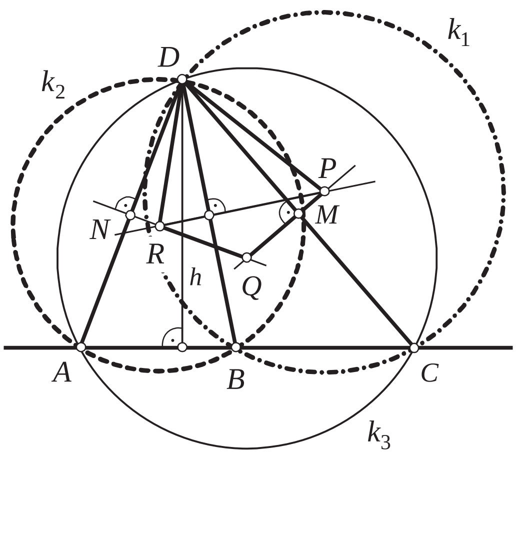
Од триаголникот RPD имаме

$$\measuredangle PDR = 180^\circ - (\alpha + \gamma) = \delta ,$$

бидејќи α, γ и δ се внатрешните агли во триаголникот ADC и нивниот збир изнесува 180°. Според тоа,

$$\measuredangle PQR + \measuredangle PDR = \alpha + \gamma + \delta = 180^\circ ,$$

па следува четириаголникот $PQRD$ е тетивен.



Втор начин. Центарот Q на k_3 е пресек на симетралите на CD и AD, центарот P на k_1 е пресек на симетралите на BD и CD и центарот R на k_2 е пресек на симетралите на BD и AD. Нека N е средина на AD и M е средина на CD. Значи RQ е симетрала на AD и PQ е симетрала на CD. Четириаголникот $NQMD$ е тетивен, бидејќи

$$\measuredangle QND + \measuredangle DMQ = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ.$$

Значи и $\measuredangle NQM + \measuredangle NDM = 180^\circ$. Тогаш

$$\measuredangle RQP+\measuredangle RDP=\measuredangle NQM+\measuredangle NDM-\measuredangle NDP+\measuredangle MDP,$$

односно

$$\measuredangle RQP+\measuredangle RDP=180^\circ-\measuredangle NDR+\measuredangle MDP.$$

За да докажеме дека четириаголникот $RDPQ$ е тетивен доволно е да докажеме дека $\measuredangle NDR=\measuredangle MDP.$

Да ги разгледаме триаголниците NRD и PMD. Тие се правоаголни. Ќе докажеме дека се слични. Радиусот на k_2 е RD, па затоа

$$\overline{RD}=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{BD}\cdot\overline{AD}}{4\cdot P_{ABD}}=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{BD}\cdot\overline{AD}}{4\cdot\frac{\overline{AB}\cdot h}{2}}=\frac{\overline{BD}\cdot\overline{AD}}{2h}\,. \qquad (1)$$

Триаголниците ABD и BCD имаа заедничка висина h спуштена од темето D, па аналогно на претходното добиваме

$$\overline{DP}=\frac{\overline{CD}\cdot\overline{BD}}{2h}\,. \qquad (2)$$

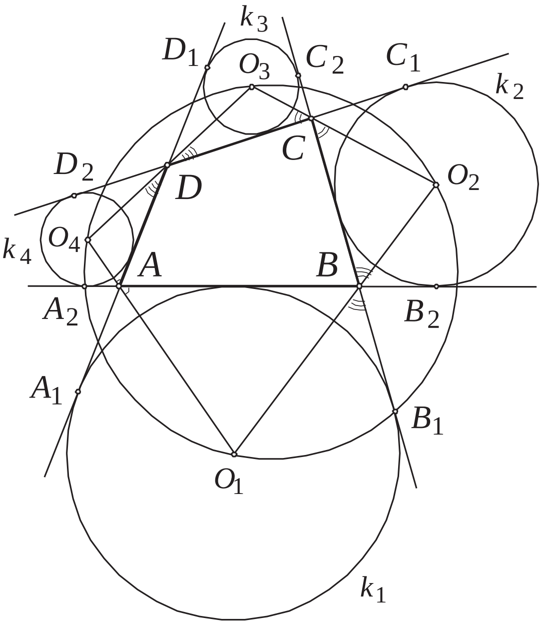
Од (1) и (2) следува $\frac{\overline{RD}}{\overline{DP}}=\frac{\overline{DN}}{\overline{DM}}=k$. Значи $\overline{RD}=k\cdot\overline{DP}$ и $\overline{DN}=k\cdot\overline{DM}$. Триаголниците NRD и MPD се правоаголни, па имаме

$$\overline{NR}=\sqrt{\overline{RD}^2-\overline{ND}^2}=\sqrt{(k\cdot\overline{DP})^2-(k\cdot\overline{DM})^2}=k\sqrt{\overline{DP}^2-\overline{DM}^2}=k\cdot\overline{MP}\,.$$

Значи триаголниците DNR и DMP имаат три пропорционални страни, па се слични. Според тоа $\measuredangle NDR=\measuredangle MDP$. Со тоа тврдењето е докажано.

33. Страните на произволен конвексен четириаголник се продолжени и повлечени се четири кружници. Секоја кружница, од надвор, допира една страна на четириаголникот и продолженијата на двете нејзини соседни страни. Докажи дека центрите на четирите кружници лежат на иста кружница.

Решение. Нека центрите на кружниците ги означиме со O_1,O_2,O_3 и O_4 на кружниците k_1,k_2,k_3 и k_4 кои ги допираат страните AB,BC,CD и DA. Според ознаките на цртежот кружницата k_1 ги допира полуправите AA_1 и AB. Според тоа, нејзиниот центар лежи на симетралата на аголот $\measuredangle A_1AB$, т.е. O_1A е симетрала на аголот $\measuredangle A_1AB$. Слично, кружницата k_4 ги допира полуправите AA_2 и AD. Значи, нејзиниот центар O_4 лежи на симетралата на аголот $\measuredangle A_2AD$, т.е. AO_4 е симетрала на аголот $\measuredangle A_2AD$. Од $\measuredangle A_1AB=\measuredangle A_2AD$, слдува дека



правата O_4O_1 е симетрала и на $\measuredangle A_1AB$ и на $\measuredangle A_2AD$. Сега е јасно дека $\measuredangle O_1AB=\frac{180^\circ-\measuredangle A}{2}=\measuredangle O_4AD$.

Од исти причини исполнети се равенствата:

$$\measuredangle O_1BA = \frac{180^\circ - \measuredangle B}{2} = \measuredangle O_2BC\,,$$

$$\measuredangle O_2CB = \frac{180^\circ - \measuredangle C}{2} = \measuredangle O_3CD\,,$$

$$\measuredangle O_3DC = \frac{180^\circ - \measuredangle D}{2} = \measuredangle O_4DA\,.$$

Ако ги искористиме овие равенства добиваме:

$$\measuredangle O_4O_1O_2 = 180^\circ - \measuredangle O_1AB - \measuredangle O_1BA = 180^\circ - \frac{180^\circ - \measuredangle A}{2} - \frac{180^\circ - \measuredangle B}{2} = \frac{\measuredangle A + \measuredangle B}{2}$$

и

$$\measuredangle O_4O_3O_2 = 180^\circ - \measuredangle O_3DC - \measuredangle O_3CD = 180^\circ - \frac{180^\circ - \measuredangle D}{2} - \frac{180^\circ - \measuredangle C}{2} = \frac{\measuredangle C + \measuredangle D}{2}\,.$$

Конечно, $\measuredangle O_4O_1O_2 + \measuredangle O_4O_3O_2 = \frac{\measuredangle A + \measuredangle B}{2} + \frac{\measuredangle C + \measuredangle D}{2} = 180^\circ$. Според тоа, четириаголникот $O_1O_2O_3O_4$ е тетивен и околу него може да се опише кружница.

34. Зададени се три точки A, B и C, во рамнината. Докажи дека, ако M е произволна точка од рамнината, тогаш векторот $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$ не зависи од изборот на точката M. Одреди ја точката M, за да важи равенството

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB}\,.$$

Решение. Имаме,

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} = (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}) + (\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}) = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}\,,$$

т.е. векторот $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$ не зависи од изборот на точката M.

Од

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{MC}$$

добиваме

$$\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{CA}.$$

Значи, M лежи на правата AC и при тоа $\overline{MC} = 2\overline{AC}$, а точките A и M се од различни страни на точката C.

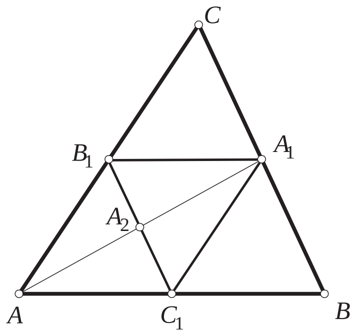
5. КОНСТРУКТИВНИ ЗАДАЧИ

1. Даден агол од 7° раздели го на седум еднакви делови.

Решение. Доволно е да конструираме агол од 1°, а тоа е можно, имајќи го предвид равенството $13 \cdot 7^\circ - 90^\circ = 91^\circ - 90^\circ = 1^\circ$. Значи, треба аглот од 7° да го нанесеме тринаесет пати, а потоа од овој збир да одземеме агол од 90° и со тоа добиваме агол од 1°, што претставува една седмина од аголот од 7°.

2. Да се конструира триаголник ABC, за кој се познати средините на страните.

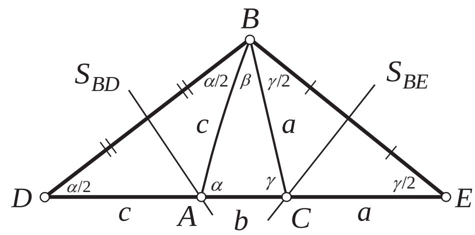
Решение. *Прв начин.* Нека A_1, B_1, C_1 се средини на страните BC, CA, AB соодветно (види цртеж). Точката A_2 е средина на отсечката AA_1, односно B_1C_1, бидејќи четириаголникот AC_1A_1B е паралелограм. Значи, при дадени точки A_1, B_1, C_1, лесно можеме да го определиме темето A. Темињата B и C ги определуваме аналогно.



Втор начин. Нека A_1, B_1, C_1 се средини на страните BC, CA, AB соодветно. Од својствата на средните линии на $\triangle ABC$ имаме $A_1B_1 \parallel AB,\ B_1C_1 \parallel BC$ и $A_1C_1 \parallel AC$. Според тоа, За да го конструираме триаголникот ABC доволно е низ точките A_1, B_1, C_1 да конструираме прави паралелни на $B_1C_1,\ A_1C_1,\ A_1B_1$, соодветно, во чии пресеци се наоѓаат темињата на бараниот $\triangle ABC$.

3. Конструирај триаголник ако се дадени периметарот L и аглите α и γ.

Решение. Анализа. Да претпоставиме дека задачата е решена. Конструиран е триаголникот ABC. На правата AC од спротивната страна на C да избереме точка D така што $\overline{AD} = c$. На сличен начин избираме точка E така што $\overline{CD} = a$. Сега да го разгледаме триаголникот DEB. Имаме $\measuredangle DAB = \beta + \gamma$. Уште важи $\measuredangle BDA + \measuredangle DAB + \measuredangle ABD = 180^\circ$ и триаголникот ADB е рамнокрак, па $\measuredangle BDA = \measuredangle DBA = \frac{\alpha}{2}$. Слично $\measuredangle CEB = \measuredangle EBC = \frac{\gamma}{2}$. Значи за триаголникот DEB познати се страната DE која има должина L и аглите што лежат на неа $\frac{\alpha}{2}$ и $\frac{\gamma}{2}$, па тој може да се конструира. Сега точките A и C ќе ги определиме како пресек на симетралите на страните BD и BE со DE, соодветно.



Конструкција. Конструираме отсечка DE со должина L, а потоа агли $\frac{\alpha}{2}$ и $\frac{\gamma}{2}$ чиј еден крак е правата DE и се конструирани на иста страна од правата. Точката B е пресекот на краците на аглите. Натаму конструираме симетрали s_{BD} и s_{BE} на отсечките DB и BE. Конечно $s_{BD} \cap DE = \{A\}$ и $s_{BE} \cap DE = \{C\}$.

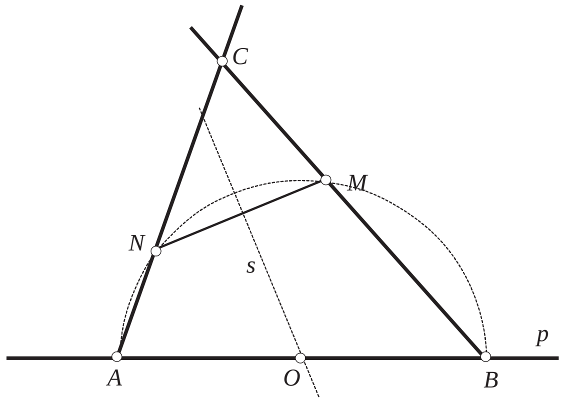
Доказ. Следува од анализата.

Дискусија. Задачата има едно решение (до складност) ако $\alpha + \gamma < 180^\circ$. Во спротивно задачата нема решение.

4. Конструирај триаголник ABC ако се дадени: правата p на која лежи страната AB на триаголникот и подножјата M и N на висините спуштени од темињата A и B.

Решение. Анализа. Да претпоставиме дека триаголникот ABC е конструиран (види цртеж). Бидејќи $\measuredangle AMB = \measuredangle ANB = 90^\circ$, следува дека точките M и N лежат на полукружница со дијаметар AB. Центарот на таа полукружница, бидејќи A и B не се дадени, го наоѓаме како пресек на симетралата s на тетивата MN и правата p, на која лежи страната AB. На крајот, темето C го добиваме во пресекот на AN и BM.

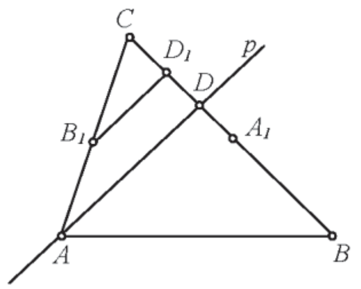
Конструкцијата и доказот следуваат од анализата. Задачата има единствено решение ако отсечката MN не е нормална на правата p, а нема решение ако $MN \perp p$.



5. Во рамнината се дадени две точки и права. Конструирај $\triangle ABC$ таков што дадените точки се средини на страните BC и CA, а висината повлечена од темето A лежи на дадената права.

Решение. Анализа. Нека A_1 и B_1 се средини на страните BC и CA соодветно. Ја означуваме дадената права со p. Нека D е подножјето на нормалата од A на страната BC, а D_1 подножјето на нормалата од B_1 на BC. Па, тогаш важи $p \parallel B_1D_1$, $\measuredangle A_1D_1B_1 = 90^\circ$ и B_1D_1 е средна линија во триаголникот ADC.

Конструкција. Во пресекот на кружницата со дијаметар A_1B_1 и правата низ B_1 паралелна со p, ја добиваме точката D_1. Во пресек на правата p и A_1D_1, ја добиваме точката D. Точката A се наоѓа на правата p во истата полурамнина определена со правата A_1D_1 во која се наоѓа и точката B_1 и при тоа $\overline{AD} = 2\overline{B_1D_1}$. Точката C се добива во пресек на правите AB_1 и A_1D_1. Точката B е точка од правата A_1D_1 за која важи $\overline{A_1C} = \overline{A_1B}$ и различна е од точката C.



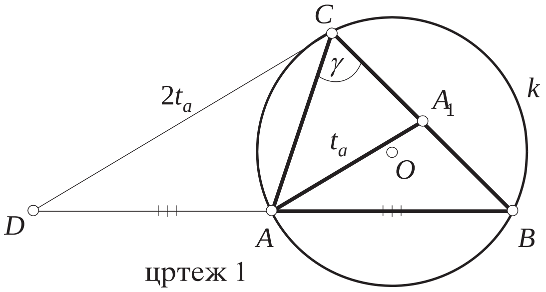
Доказ. Од конструкцијата следува дека висината AD лежи на правата p и дека A_1 е средина на страната BC. Според конструкцијата триаголниците CDA и CD_1B_1 се слични со коефициент на сличност 2, па затоа B_1 е средина на страната CA.

Дискусија. Нема решение, ако $p \perp A_1B_1$ (затоа што тогаш правата p би била нормална и на BC и на AB) и ако правата p ги содржи точките A_1 и B_1 истовремено (затоа што тогаш $AB \perp BC$, па p би ги содржела A_1, B_1, A и B). Во останатите случаи конструкцијата е можна и е еднозначна.

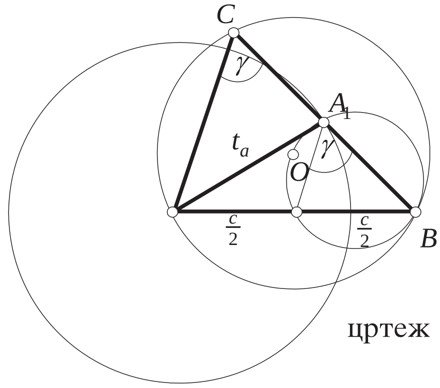
6. Да се конструира триаголник ако се дадени: страната $\overline{AB} = c$, аголот γ и тежишната линија t_a.

Решение. *Прв начин.* Бидејќи страната $c = \overline{AB}$ е дадена, следува дека темињата A и B се определени. Темето C лежи на кружницата k од која отсечката AB се гледа под агол γ. Од друга страна, C лежи на правата BA_1. Значи, за определување на темето C, доволно е да се определи точката A_1 - средина на страната BC (види цртеж 1).

Точката A лежи на кружница k_1, од која отсечката C_1B се гледа под агол γ и е на растојание $t_a = \overline{AA_1}$ од темето A. Значи, $A_1 = k_1 \cap k_2$, каде $k_2(A, t_a)$. Понатаму C се добива лесно!



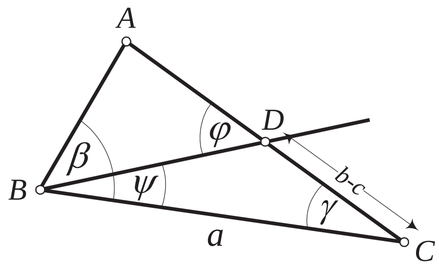
цртеж 1



цртеж 2

Втор начин. Нека $\triangle ABC$ е конструиран. Да ја продолжиме страната BA за должина c, т.е. нека е $\overline{DA} = \overline{AB}$ (види цртеж 2). Тогаш за $\triangle DBC$, отсечката AA_1 е негова средна линија па е $\overline{DC} = 2t_a$. Значи, темето C лежи на кружницата k и е на растојание $2t_a$ од точката D.

7. Конструирај го триаголникот ABC ако се дадени a, $\beta-\gamma$ и $b-c$.



Решение. Да претпоставиме дека триаголникот е конструиран. Нека D е точка на страната AC таква што $\overline{AB} = \overline{AD} = c$. Тогаш $\overline{DC} = b-c$. Да го разгледаме триаголникот BDC. Имаме $\measuredangle ADB = \varphi = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$. Бидејќи овој агол е надворешен за триаголникот BDC важи

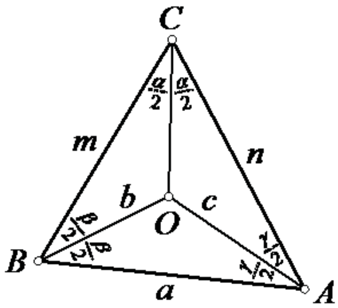
$$\varphi = \measuredangle ADB = \measuredangle DBC + \measuredangle BCD = \psi + \gamma .$$

Оттука

$$\psi = \varphi - \gamma = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} - \gamma = 90^\circ - (90^\circ - \frac{\beta+\gamma}{2}) - \gamma = \frac{\beta-\gamma}{2} .$$

Триаголникот BCD е определен со страните BC и DC и аголот DBC. Темето A се одредува како пресек на симетралата на отсечката BD и правата DC.

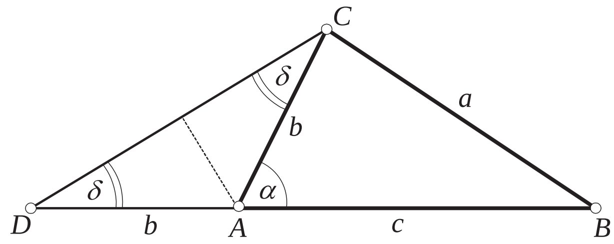
8. Во рамнината се дадени три прави кои минуваат низ иста точка O. На една од правите е избрана точка A. Конструирај триаголник чие едно теме е точката A, а дадените прави се симетрали на неговите агли.



Решение. Да претпоставиме дека задачата е решена. Ако аголот во темето A на триаголникот ABC го означиме со α, тогаш $\measuredangle BOC = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$, каде O е центар на впишаната кружница во триаголникот. Бидејќи тој агол е даден, познат ни е и аголот во темето. Правите m и n, кои ја сечат правата a во точката A и со неа образуваат агли еднакви на $\frac{\alpha}{2}$, ги сечат правите b и c во точките B и C, соодветно.

9. Конструирај триаголник зададен со: $a,\ b+c,\ \gamma-\beta$.

Решение. Да претпоставиме дека ABC е бараниот триаголник. Ја продолжуваме страната AB за отсечка $\overline{AD}=b$ (види цртеж) и го добиваме ΔDBC, со страни $\overline{DB}=b+c$, $\overline{BC}=a$. Триаголникот CDA е рамнокрак со агол кај основата $\delta=\alpha/2$. Тогаш

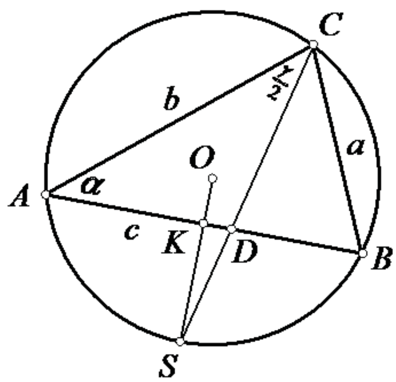


$$\measuredangle BCD=\gamma+\delta=\gamma+\frac{\alpha}{2}=\frac{\gamma}{2}+\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma-\beta}{2}=90^\circ+\frac{\gamma-\beta}{2}.$$

Следствено, помошниот триаголник DBC можеме да го конструираме, бидејќи за него знаеме две страни и агол спроти поголемата од нив. Темето A е пресек на страната DB и симетралата на отсечката DC. Задачата секогаш има единствено решение.

10. Конструирај триаголник ако е даден радиусот на опишаната кружница, една страна и разликата на аглите кои лежат на таа страна.

Решение. Да претпоставиме дека бараниот триаголник е конструиран и дадените елементи нека се означени со R, c и $\alpha-\beta$. Симетралата на аголот ACB ја сече опишаната кружница околу триаголникот ABC во точка S која е средина на лакот AB. (Теорема. Симетралата на перифериското агол на кружница го преполовува кружниот лак над кој е конструиран перифериското агол). Бидејќи O е центар на опишаната кружница, се добива дека $OS \perp AB$. Нека $CS \cap AB=\{D\}$ и $OS \cap AB=\{K\}$. Од триаголникот ADC



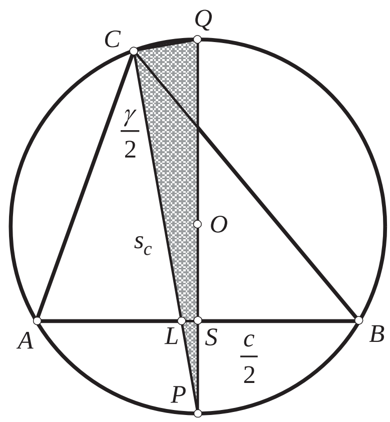
следува дека $\measuredangle ADC=\measuredangle BDS=180^\circ-\alpha-(90^\circ-\frac{\alpha+\beta}{2})=90^\circ-\frac{\alpha-\beta}{2}$.

Аглите $\measuredangle KDS$ и $\measuredangle KSD$ се комплементни како остри агли во правоаголниот триаголник KSD, па според тоа $\measuredangle KSD=\frac{\alpha-\beta}{2}$.

<u>*Конструкција.*</u> Прво се конструира кружница $k(O,R)$ и неговата тетива $\overline{AB}=c$. Потоа се конструира аголот $\measuredangle OSD=\frac{\alpha-\beta}{2}$, каде $OS \perp AB$ и D е точка која лежи на AB. Правата SD ја сече кружницата во точката C.

11. Да се конструира триаголник ако се дадени: страната $\overline{AB}=c$, аголот γ и симетралата s_c на аголот γ.

Решение. Да претпоставиме дека задачата е решена, т.е. дека ΔABC е конструиран (види цртеж), и притоа е: $\overline{AB}=c$, $\overline{CL}=s_c$, $\measuredangle C=\gamma$.



Бидејќи е дадена страната $\overline{AB}=c$, темињата A и B се познати. Треба да се одреди уште темето c. Но $\measuredangle C=\gamma$, што значи дека страната AB се гледа под агол γ од темето C. Тоа, пак, значи дека темето C лежи на една кружница $(O,\overline{OA})$, која лесно се црта. Нека S е средина на страната AB и нека дијаметарот на кружницата што минува низ S ја сече истата во точките P и Q. Триаголникот ABC ќе го конструираме, ако претходно го конструираме $\triangle PSL$. За тоа, доволно е да се определи $x=\overline{PL}$.

Од сличноста на триаголниците PLS и PQC се добива $\frac{x}{\overline{PQ}}=\frac{\overline{PS}}{x+s_c}$, т.е.

$$x^2+x\cdot s_c-\overline{PQ}\cdot\overline{PS}=0.$$

Ако ставиме $\overline{PQ}\cdot\overline{PS}=m^2$ (бидејќи $\overline{PQ}$ и $\overline{PS}$ се познати должини), ќе имаме

$$x=-\frac{s_c}{2}+\sqrt{(\frac{s_c}{2})^2+m^2}.$$

Отсечката x може лесно да се конструира, а со тоа и $\triangle PSL$, односно бараниот триаголник ABC.

12. Конструирај триаголник ABC со дадени: a, $b+c$, $\gamma-\beta$.

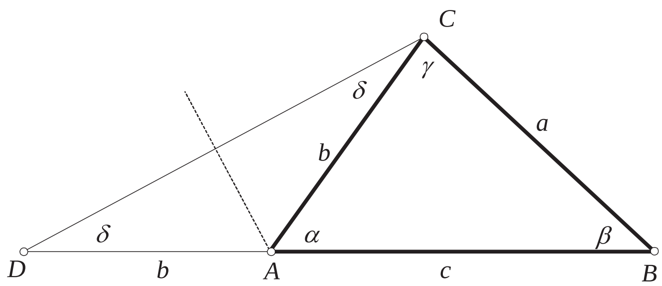
Решение. _Анализа_. Нека $\triangle ABC$ е бараниот триаголник. Ќе ја продолжиме страната AB, до точката D, така што $\overline{AD}=b$ и $\overline{AD}+\overline{AB}=b+c$ (види цртеж). На тој начин добиваме рамнокрак триаголник CDA, со агол при основата $\delta=\frac{1}{2}\alpha$. За помошниот $\triangle DCB$ добиваме:

1) $\overline{DB}=b+c$, 2) $\overline{BC}=a$ и

3) $\measuredangle BCD=\gamma+\delta=\frac{\alpha}{2}+\frac{\gamma}{2}+\frac{\gamma}{2}=(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2})+\frac{\gamma-\beta}{2}=90^\circ-\frac{1}{2}(\gamma-\beta)$.

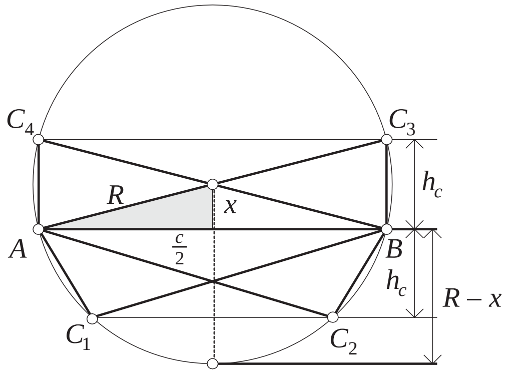
Бидејќи за триаголникот DBC знаеме две страни и агол спроти поголемата од тие страни, можеме да го конструираме. Потоа точката A се наоѓа како пресек на DB со симетралата на CD.

Конструкцијата и доказот следуваат од анализата (па ги оставаме за читателот!). Задачата има единствено решение за $b+c>a$, а нема решение за $b+c\le a$.



13. Колку најмногу триаголници можат да се конструираат од зададените елементи: страната c, соодветна висина h_c и радиус R на опишаната кружница околу тој триаголник и при која зависност на тие елементи?

Решение. Триаголникот, зададен со R, c и h_c лесно можеме да го конструираме. Очигледно, задачата има решение само ако $c \le 2R$, а најголем број решенија ќе има ако $c < 2R$ и $h_c < R - x$ (види цртеж). Во тој случај задачата ќе има четири различни решенија-триаголниците ABC_1, ABC_2, ABC_3 и ABC_4. Значи, можат да се конструираат најмногу четири триаголници, при условите $c < 2R$ и $h_c < R - \sqrt{R^2 - \frac{c^2}{4}}$.



14. Даден е триаголник ABC. На полуправите AB, BC и CA нанесени се точките A_1, B_1 и C_1 соодветно, така што $\overline{AB} = \overline{BA_1}$, $\overline{BC} = \overline{CB_1}$ и $\overline{CA} = \overline{AC_1}$. Конструирај го триаголникот ABC, ако се дадени точките A_1, B_1 и C_1.

Решение. *Прв начин.* Нека триаголникот ABC е бараниот триаголник и нека точките A_1, B_1 и C_1 ги исполнуваат условите од задачата (види цртеж 1).

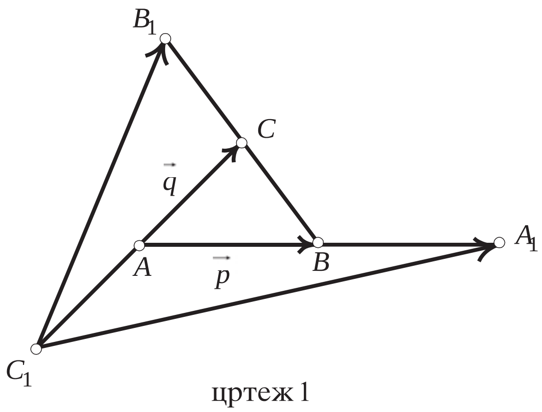
Да ставиме $\overrightarrow{AB} = \vec{p}$ и $\overrightarrow{AC} = \vec{q}$, тогаш:

$\overrightarrow{C_1A_1} = \overrightarrow{C_1A} + \overrightarrow{AA_1} = \vec{p} + 2\vec{q}$

$\overrightarrow{C_1B_1} = \overrightarrow{C_1C} + \overrightarrow{CB} = 2\vec{q} + \vec{q} - \vec{p} = 3\vec{q} - \vec{p}$.

Со елиминација на $\vec{p}$, добиваме

$$\overrightarrow{C_1A_1} + 2\overrightarrow{C_1B_1} = 7\vec{q} \qquad (1)$$

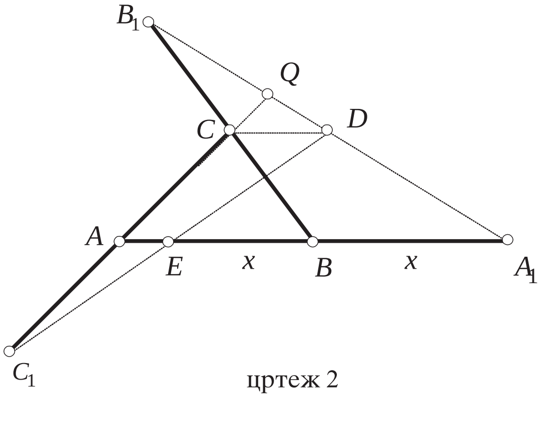


цртеж 1

Бидејќи точките A_1, B_1 и C_1 се зададени, со (1) одреден е векторот $\vec{q}$, т.е. $\overrightarrow{C_1A} = \vec{q}$, а со тоа и темето A на ΔABC. Понатаму лесно ги одредуваме темињата C и B.

Втор начин. Нека точката D е средина на отсечката A_1B_1 (види цртеж 2), тогаш отсечката CD е средна линија на триаголникот BA_1B_1, па имаме $CD \parallel BA_1$ и $\overline{CD} = \frac{1}{2}\overline{BA_1} = \frac{1}{2}x$.

Нека со E го означиме пресекот на AB и C_1D. Бидејќи $AE \parallel CD$ и A е средина на C_1C следува дека отсечката AE е средна линија во триаголникот CC_1D, т.е. $\overline{AE} = \frac{1}{2}\overline{CD} = \frac{1}{4}x$.

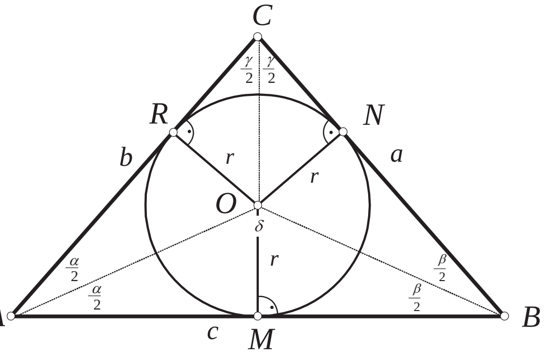


цртеж 2

Значи со точката E, средината на отсечката C_1D, е одредена правата AA_1. Од условот, пак $\overline{AE} = \frac{1}{4}x$ заклучуваме дека $\overline{EA_1} = \frac{7}{4}x$. Со тоа е одредено темето A на бараниот триаголник ABC. Понатаму лесно ги одредуваме темињата B и C.

15. Конструирај триаголник по дадена страна, агол спроти неа и радиус на вписаната кружница во триаголникот (c, γ, r).

Решение. *Прв начин.* *Анализа.* Да претпоставиме дека задачата е решена. Нека ABC е бараниот триаголник и да ги означиме неговите елементи како на цртежот. Во триаголникот AOB имаме: c е една страна, $\overline{OM} = r$ висина. Уште $\delta = 180^\circ - \frac{\alpha+\beta}{2}$. Од друга страна од триаголникот ABC имаме $\alpha+\beta+\gamma = 180^\circ$, односно $\alpha+\beta = 180^\circ - \gamma$. Оттука

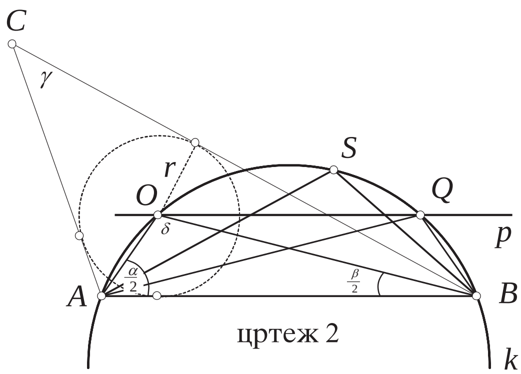


цртеж 1

$$\delta = 180^\circ - \frac{180^\circ - \gamma}{2} = 90^\circ + \frac{\gamma}{2}.$$

Значи за триаголникот AOB познати се страна, агол спроти неа и висината спуштена кон страната што е позната. Така триаголникот AOB можеме да го конструираме. Со тоа ги добиваме и аглите α и β, па ΔABC можеме да го конструираме.

Конструкција. Конструираме агол $\delta = 90^\circ + \frac{\gamma}{2}$ со теме S. На едниот крак од аголот бираме точка A така што $\overline{AS} < c$. На другиот крак од аголот бираме точка B така што $\overline{AB} = c$ (точката B се добива како пресек на кружница со центар во A и радиус c, и кракот на аголот на кој не лежи A). На растојание r од правата AB кон S повлекуваме права p паралелна со AB. Нека k е опишаната кружница околу ΔABS. Тогаш за центар на впишаната кружница во ΔABC може да се земе една од пресечните точки на k и p, а тоа се O и Q. Нека тоа е точката O. Имаме $\measuredangle OAB = \frac{\alpha}{2}$, $\measuredangle OBA = \frac{\beta}{2}$ па ги конструираме аглите α и β како двојни на аглите OAB и OBA, а C го добиваме како пресек на краците на тие агли.

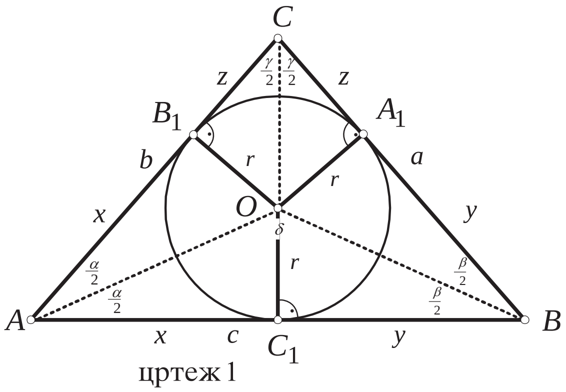


цртеж 2

Доказ. Следува од анализата.

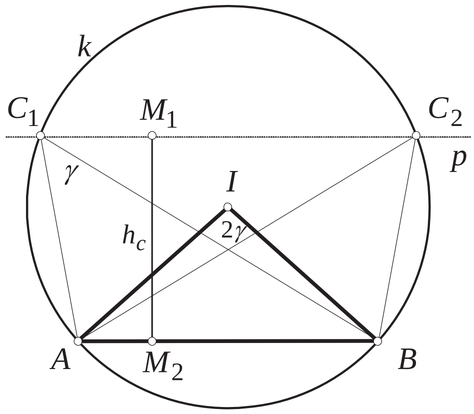
Дискусија. Задачата нема решение ако $\gamma \geq 180^\circ$. Задачата нема решение и ако $r > c$ (во тој случај правата p и кружницата k од конструкцијата немаат пресечни точки). Во останатите случаи задачата има единствено решение. Ако се земе за центар на впишаната кружница точката Q, ќе се добие триаголник складен на претходно разгледаниот. Значи решението е единствено до складност.

Втор начин. *Анализа.* Да претпоставиме дека задачата е решена. Нека $\overline{CB_1} = \overline{CA_1} = z$, $\overline{AC_1} = \overline{AB_1} = x$ и $\overline{BC_1} = \overline{BA_1} = y$. Важи $x+z=b$, $y+z=a$ и $x+y=c$ па со собирање на првите две равенства добиваме $(x+y)+2x = a+b$, односно $c+2z=a+b$, т.е. $z=\frac{a+b-c}{2}=s-c$, каде $s=\frac{a+b+c}{2}$. Аналогно $x=s-a$, $y=s-b$. За плоштината на триаголникот ABC важи $P=rs=\dfrac{ch_c}{2}$ од каде добиваме $\frac{2r}{c}=\frac{h_c}{s}$. Триаголникот CB_1O е правоаголен, $\measuredangle OCB_1=\frac{\gamma}{2}$ и $\overline{OB_1}=r$ па него може да го конструираме. Така ја добиваме отсечката z. Од равенството $z=s-c$ добиваме $s=z+c$, па значи го имаме и s. Тогаш $h_c=\frac{2rs}{c}$.



цртеж 1

Конструкција. Конструираме рамнокрак триаголник AIB со основа AB така што $\overline{AB}=c$ и агол при врвот 2γ. Потоа опишуваме кружница околу него. Констуираме права p паралелна со AB на растојание h_c од AB кон аголот 2γ. Нека пресечните точки на p со кружницата се C_1 и C_2. Тогаш бараниот триаголник е ABC_1 (или ABC_2 кој е складен со ABC_1). Притоа аголот $\measuredangle AC_1B = \gamma$ е периферен агол над лакот AB, на кој одговара централен агол 2γ.



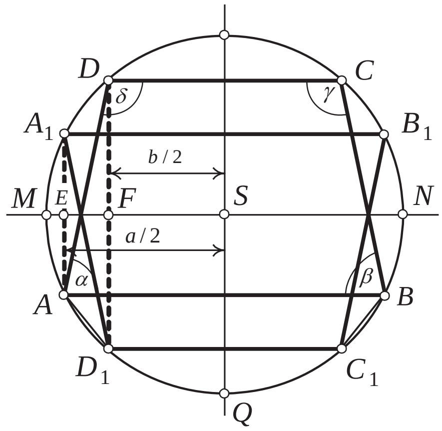
цртеж 2

Доказ. Следува од анализата.

Дискусија. Аналогно како во претходниот начин на решавање,

16. Во дадена кружница со радиус r впиши трапез со дадени основи a и b.

Решение. *Прв начин.* *Анализа.* Да претпоставиме дека задачата е решена. Trapezot $ABCD$ е тетивен па $\alpha+\gamma=\pi$. Од друга страна $\beta+\gamma=\pi$ (согласни агли на трансферзала на две паралелни прави), па следува дека $\alpha=\beta$. Според тоа трапезот е рамнокрак. Оттука следува дека средините на основите и центарот на опишаната кружница се колинеарни. Тогаш $\overline{EF}=\frac{a-b}{2}$, па трапезот можеме да го конструираме.



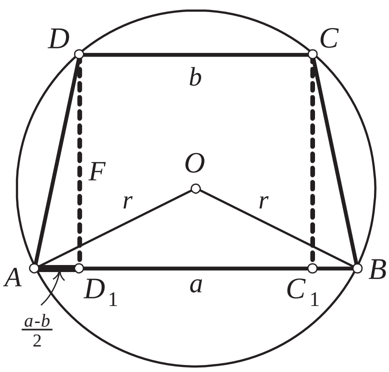
<u>*Конструкција.*</u> Повлекуваме два нормални дијаметри MN и PQ на дадената кружница $k(S,r)$. На едниот од нив нанесуваме две отсечки $\overline{SE}=\frac{a}{2}$ и $\overline{SF}=\frac{b}{2}$. Повлекуваме нормали од E и F на тој дијаметар. Пресечните точки на овие нормали со кружницата ги одредуваат двете темиња на трапезот. Другите две темиња ќе ги добиеме како пресечни точки на правите низ првите две темиња паралелни со SE, и кружницата.

<u>*Доказ.*</u> Следува од анализата.

<u>*Дискусија.*</u> Бидејќи се работи за трапез претпоставуваме дека $a\neq b$. Нека $a<2r$, $b<2r$. При конструкцијата се добиваат четири трапези. Тоа се $ABCD$, ABC_1D_1, A_1B_1CD и $A_1B_1C_1D_1$.

Но $ABCD\cong A_1B_1C_1D_1$ и $ABC_1D_1\cong A_1B_1CD$. Според тоа задачата има две решенија, ако $a<2r$, $b<2r$ (тоа се на пример трапезите $ABCD$ и A_1B_1CD).). Во спротивно задачата нема решение.

Втор начин <u>*Анализа.*</u> Да претпоставиме дека задачата е решена. Слично како во решението А добиваме дека трапезот мора да биде рамнокрак. Нека O е центарот на опишаната кружница. Тогаш триаголникот ABO можеме да го конструираме, бидејќи познати се должините на неговите три страни $\overline{AB}=a$ и $\overline{AO}=\overline{BO}=r$ ($\overline{AB}$ е должина на поголемата основа). Нека D_1 и C_1 се нормалните проекции на точките D и C на AB. Бидејќи трапезот е рамнокрак, добиваме дека $\overline{AD_1}=\overline{BC_1}=\frac{a-b}{2}$.



<u>*Конструкција.*</u> Го конструираме триаголникот ABO. Потоа на отсечката AB од A кон B нанесуваме отсечка AD_1 со должина $\frac{a-b}{2}$. Повлекуваме нормала на AB од D_1 и во пресекот на таа нормала и кружницата е точката D. Повлекуваме права низ D паралелна со AB и во пресекот на таа права со кружницата ја добиваме точката C. Така бараниот трапез е конструиран.

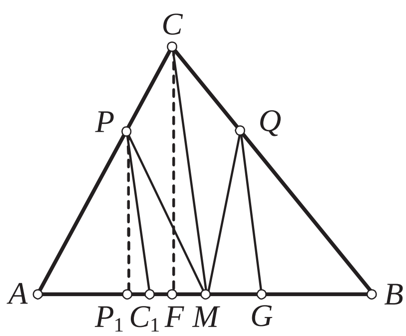
<u>*Доказ.*</u> Следува од анализата.

<u>*Дискусија.*</u> Како во претходниот начин на решавање.

17. Даден е триаголникот ABC и на страната AB точката M. Конструирај две прави кои минуваат низ точката M и го делат триаголникот на три дела со еднакви плоштини.

Решение. Со точките F и G ја делиме страната AB на триаголникот ABC на три еднакви отсечки. Постојат две можности:

а) Точката M лежи меѓу точките F и G. Конструираме прави низ точките F и G паралелни на правата CM. Тие прави ги сечат страните AC и BC во точките P и Q, соодветно. Правите MP и MQ се бараните прави.



Доказ. Триаголниците APF и ACM се слични, па

$$\overline{PA}:\overline{CA}=\overline{FA}:\overline{MA}=\overline{AB}:3\overline{MA}.$$

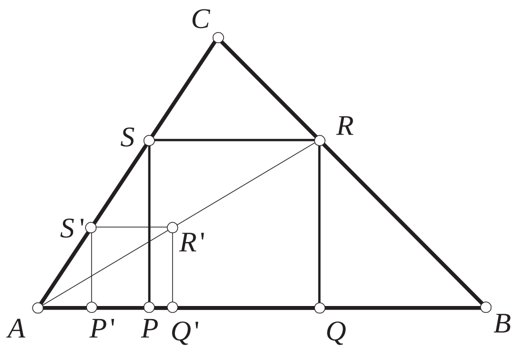
Нека P_1 и C_1 се подножјата на нормалите спуштени од P и C, соодветно, на страната AB. Од сличноста на триаголниците PAP_1 и CAC_1 следува дека $\overline{PP_1}:\overline{CC_1}=\overline{PA}:\overline{CA}$ т.е. $\overline{PP_1}:\overline{CC_1}=\overline{AB}:3\overline{MA}$, односно $\frac{3\overline{MA}\cdot\overline{PP_1}}{2}=\frac{\overline{CC_1}\cdot\overline{AB}}{2}$. Значи $P_{\triangle AMP}=\frac{1}{3}P_{\triangle ABC}$. На сличен начин се докажува дека $P_{\triangle BMQ}=\frac{1}{3}P_{\triangle ABC}$.

б) Точката M не лежи меѓу точките F и G.Овој дел од решението е сличен со претходниот, па го оставаме на читателот за вежба.

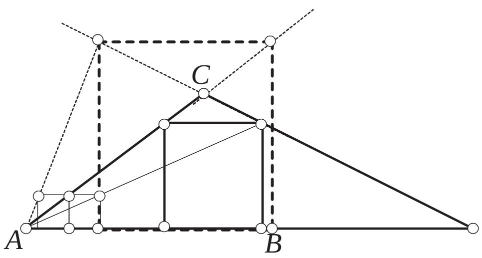
18. Во даден триаголник ABC да се впише квадрат $PQRS$ (тоа значи: темињата да лежат на страните на триаголникот ABC).

Решение. Анализа. Да претпоставиме дека задачата е решена и $PQRS$ е бараниот квадрат (види цртеж 1). Ако χ е хомотетија со центар во A и некој коефициент $k\neq 1$, тогаш квадратот $PQRS$ ќе се преслика во квадратот $P'Q'R'S'$, при што P' и Q' ќе лежат на правата AB, а S' ќе лежи на правата AC. Точката R' ќе лежи на правата AR. Ако S' ја избереме произволно на AC, квадратот $P'Q'R'S'$ може лесно да се конструира. Бидејќи R', R и A се колинеарни, следува дека R е пресечна точка на првите AR' и BC.

Конструкција. Избираме произволна точка S' на AC. Нека P' е нејзината ортогонална проекција врз правата AB, а $P'Q'R'S'$ е квадрат со страна $P'S'$. Ако R е пресечна точка на правата AR' и BC, а Q нејзината ортогонална проекција врз правата AB, тогаш бараниот квадрат $PQRS$ е квадратот со страна QR.



цртеж 1



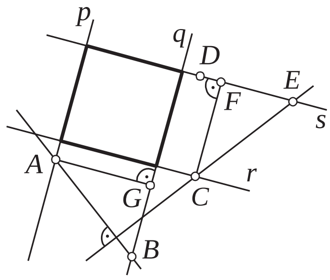
цртеж 2

Доказ. Точноста на конструкцијата следува од тоа што хомотетија со центар во A и коефициент $\overline{AR}:\overline{AR'}$ го пресликува квадратот $P'Q'R'S'$ во квадратот $PQRS$.

Дискусија. Задачата секогаш има едно решение ако триаголникот е остроаголен. Ако, пак, триаголникот е тапоаголен, тогаш задачата може и да нема решение; на пример, при нашите ознаки, ако еден од аглите $\alpha=\measuredangle A$ или $\beta=\measuredangle B$ е тап, тогаш задачата нема решение. Ова е тогаш, кога под “квадрат впишан во триаголник” с подразбира дека неговите темиња лежат на страните на триаголникот.

Ако, пак, под “квадрат впишан во многуаголник” подразбираме да неговите темиња лежат на страните на триаголникот, или на неговите продолженија, тогаш задачата секогаш има едно, а во некој случај и две решенија (види цртеж 2).

19. Дадени се четири точки во рамнина така што никои три од нив не се колинеарни и ниту една права одредена со две од тие четири точки не е нормална на правата одредена со другите две точки. Конструирај квадрат така што секоја од дадените точки лежи на по една негова страна или на нејзиното продолжение. Колку решенија може да има задачата?



Решение. _Анализа._ Да претпоставиме дека задачата е решена. Да разгледаме две од дадените точки кои лежат на две паралелни прави чии делови се страните од квадратот. Нека тоа се точките A и B. Да повлечеме нормала од една од останатите две точки (на пример C) кон правата AB. Со E да ја означиме пресечната точка на оваа нормала со страната од квадратот (или нејзиното продолжение) на која лежи четвртата точка. Притоа $D \neq E$ бидејќи во спротивно би добиле $AB \perp DC$ што е во спротивност со условот на задачата. Од C да повлечеме нормала на DE и од A на q и нека F и G се соодветно пресечните точки на нормалите со s и q. Тогаш $\overline{AG} = \overline{FC}$, $\measuredangle AGB = \measuredangle CFE = 90^\circ$ и $\measuredangle ABG = \measuredangle FEC$ (агли со нормални краци) па следува $\triangle ABG \cong \triangle CEF$ и оттука $\overline{AB} = \overline{EC}$.

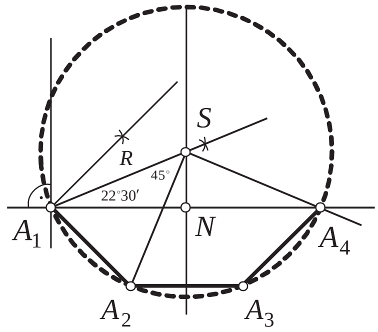
Конструкција. Избираме две од четрите дадени точки, нека се тоа A и B. Повлекуваме нормала на AB од C и одредуваме точка E така што $\overline{AB} = \overline{CE}$. Притоа $D \neq E$ бидејќи во спротивно би добиле $AB \perp DC$. Со s да ја означиме правата DE. Од првите две избрани точки A и B повлекуваме нормали p и q на правата DE, а од третата точка C права r паралелна со DE. Правите p, q, r и s формираат квадрат.

Доказ. Ќе докажеме дека правите p, q, r и s од конструкцијата формираат квадрат кој ги исполнува условите на задачата. Од конструкцијата јасно е дека тие формираат правоаголник. Од C да повлечеме нормала на DE и F е пресечната точка на таа нормала со DE. Слично, од A повлекуваме нормала на q и G е пресечната точка на таа нормала со q. Да ги разгледаме триаголниците ABG и CEF. Имаме $\overline{AB} = \overline{CE}$, $\measuredangle ABG = \measuredangle FEC$ (агли со нормални краци) и аглите AGB и CFE се прави, па $\triangle ABG \cong \triangle CEF$. Оттука $\overline{AG} = \overline{FC}$, па правоаголникот кој го формираат е квадрат и дадените точки лежат на неговите страни или на нивните продолженија.

Дискусија. Да забележиме дека за почетни точки можеме да избереме кои било две од четирите дадени точки и да продолжиме со избор за трета точка една од останатите две. Значи првите две точки можеме да ги избереме на $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ начини. Третата точка можеме да ја избереме од останатите две, односно на 2 начини. На крајот точката E можеме да ја избереме на два начини (на нормалата на AB од двете страни на C). Според тоа задачата може да има најмногу 24 (може да се случи некои од квадратите да се поклопат).

20. Конструирај правилен осумаголник $A_1A_2\dots A_8$ (темињата се во тој редослед) ако му е позната дијагоналата $d=\overline{A_1A_4}$.

Решение. *Прв начин.* *Анализа.* Да го разгледаме триаголникот A_1NS , каде S е центарот на опишаната кружница, а N е пресечна точка на A_1A_4 со нејзината нормала спуштена од S . Централниот агол над A_1A_2 во четириаголникот е $\frac{360^\circ}{8}=45^\circ$, па $\measuredangle A_1SA_4=3\cdot 45^\circ=135^\circ$. Триаголникот A_1A_4S е рамнокрак, па



$\measuredangle SA_1N=\frac{180^\circ-135^\circ}{2}=22^\circ 30'$

(кој може да се конструира како четвртина од правиот агол). Според тоа за триаголникот A_1NS имаме $\measuredangle SA_1N=22^\circ 30'$, $\measuredangle A_1NS=90^\circ$ и $\overline{A_1N}=\frac{d}{2}$ па можеме да го конструираме. Хипотенузата на овој триаголник е радиусот на опишаната кружница околу осумаголникот. Сега, аголот $A_1SA_2=45^\circ$, па на тој начин е определена точката A_2 а со тоа и страната на осумаголникот.

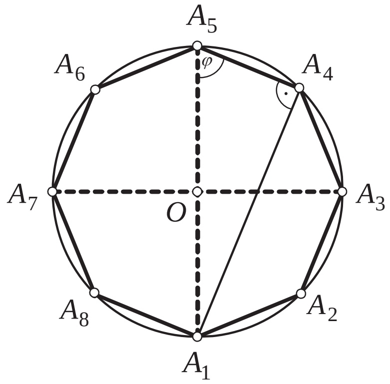
Конструкција. Во средината N на отсечката A_1A_4 повлекуваме нормала p на A_1A_4. Конструираме агол од $22^\circ 30'$ (како четвртина од правиот агол) со теме во A_1 и еден крак A_1N . Нека S е пресекот на другиот крак со нормалата во N . Конструираме кружница со центар во S и радиус A_1S . Конструираме агол од 45° со теме во S и крак A_1S . Точката A_2 е пресек на кружницата со другиот крак на аголот. Другите точки од осумаголникот ги добиваме последователно нанесувајќи ги тетивите со должина $\overline{A_1A_2}$ од точките $A_2, A_3, \dots$

Доказ. Следува од анализата.

Дискусија. Задачата секогаш има единствено решение.

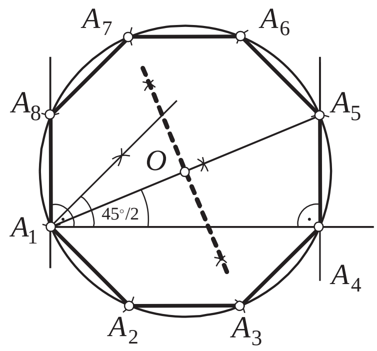
Втор начин. *Анализа.* Да претпоставиме дека задачата е решена (цртеж 1). Бидејќи осумаголникот е правилен следува дека центарот O на опишаната кружница е центар на симетрија за него. Исто така A_1A_5 е дијаметар на опишаната кружница. Да го разгледаме триаголникот $A_4A_5A_6$. Кај правилен осумаголник важи

$$\measuredangle A_4A_5A_6=\frac{8\cdot 180^\circ-360^\circ}{8}=135^\circ.$$



цртеж 1

Триаголникот $A_5A_6A_4$ е рамнокрак и $A_6A_4\perp OA_5$, па $\phi=\frac{135^\circ}{2}$. Аголот $A_5A_4A_1$ е прав како агол над дијаметарот. Уште ја знаеме страната A_1A_4. Тоа е доволно да го конструираме триаголникот $A_1A_4A_5$.



цртеж 2

<u>*Конструкција.*</u> Конструираме отсечка $\overline{A_1A_4} = d$ (цртеж 2) и од A_4 нормала на неа. Конструираме агол од $90^\circ - \frac{135^\circ}{2} = \frac{45^\circ}{2}$ (како половина од правиот агол) со теме во A_1 и еден крак A_1A_4. Пресекот на другиот крак на тој агол и нормалата на A_1A_4 во точката A_4 ја дава точката A_5. Така ја добивме страната A_4A_5 на осумаголникот. Ја конструираме опишаната кружница околу триаголникот $A_1A_4A_5$ (тоа е кружницата со центар во средината O на A_1A_5 и радиус OA_1), а потоа од A_4 нанесуваме уште 7 тетиви со должина d.

<u>*Доказ.*</u> Следува од анализата.

<u>*Дискусија.*</u> Како во претходниот начин на решавање.

21. Докажи дека само со линијар и шестар агол од p° може да се раздели на p еднакви делови, ако p е природен број кој не е делив ниту со 3 ниту со 5.

Решение. Треба да докажеме дека аглите p, кои имаат 2, 4, 7, 11, 13, 16, 17, 19, 22, ... степени, може да се поделат на $2, 4, 7, 8, 11, \ldots$ делови соодветно.

Ќе разгледаме неколку случаи.

1) Ако $p \in \{2, 4, 8, \ldots\}$ тогаш делењето на аголот на p еднакви делови се сведува на конструирање на симетралата на аголот.

2) Ако $p = 7$, тогаш нанесувајќи го аголот α од 7° тринаесет пати, го добиваме аголот $\varphi = 91^\circ$. Со конструкција на нормала на еден од краците на тој агол, го добиваме аголот $\psi = 90^\circ$. Тогаш $\psi - \varphi = 1^\circ$. Нанесувајќи го аголот од 1° последователно на аголот α го делиме истиот на 7 еднакви делови.

3) Ако $p = 11$, тогаш $\varphi = 8\alpha = 88^\circ$, па од равенството $90^\circ - 88^\circ = 2^\circ$, следува дека можеме да конструираме агол од 2°, а потоа со негово делење на два дела и агол од 1°. Понатаму постапката е очигледна.

4) Ако $p = 13$, тогаш $\varphi = 7\alpha = 91^\circ$, па постапката е слична како во вториот случај.

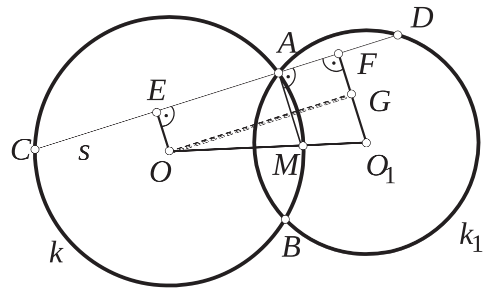
5) За агли поголеми од 15°, т.е. за $p > 15$, го користиме равенството:

$$p = 15k + q, \quad k \in \mathbb{N}, \quad q \in \{1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14\}.$$

Со тоа задачата се сведува на еден од претходните случаи, ако успееме да го конструираме аголот од 15°. Но, конструкцијата на агол од 15° е јасна од равенството $60^\circ : 4 = 15^\circ$. Тогаш, одземајќи го аголот $k \cdot 15^\circ$ од дадениот агол, добиваме агол од q° ($q^\circ = p^\circ - k \cdot 15^\circ$) за кој веќе покажавме како може да се подели на q еднакви делови.

22. Нека кружниците $k(O,r)$ и $k_1(O_1,r_1)$ се сечат во точките A и B. Низ точката A конструирај права s, која ги сече k и k_1 соодветно во точките C и D, таква што $\overline{CA}:\overline{AD}=3:2$.

Решение. Да претпоставиме дека задачата е решена. Нека $\overline{CA}:\overline{AD}=3:2$. Ако E и F се средините на тетивата CA и AD (цртеж десно), тогаш очигледно важи $\overline{EA}:\overline{AF}=3:2$.



Нека M е точка од отсечката OO_1 и нека $AM \perp s$, тогаш, поради $OE \| MA \| O_1F$ следува $\overline{OM}:\overline{MO_1}=3:2$.

Од досега изнесеното следува и бараната конструкција. На отсечката OO_1 наоѓаме точка M, таква што $\overline{OM}:\overline{MO_1}=3:2$. Потоа ја конструираме отсечката MA и на крај правата s - низ точката A, нормална на MA и тоа е бараната права.

VI МНОЖЕСТВА, ЛОГИКА И КОМБИНАТОРИКА

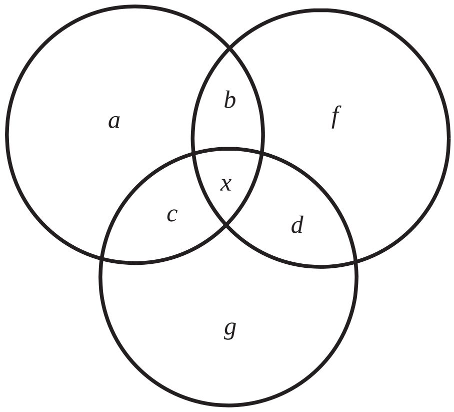
1. МНОЖЕСТВА

1. Нека $\varnothing$ е празното множество и нека $A=\{1,\{1\},\varnothing\}$ и $B=\{0,1,\{\varnothing\}\}$. Определи ги $A\cap B$ и $A\cup B$.

Решение. $A\cap B=\{1\}$, $A\cup B=\{0,1,\varnothing,\{\varnothing\},\{1\}\}$.

2. Во една паралелка од 34 ученика, 28 зборуваат англиски, 26 француски и 23 германски јазик. Колку најмалку од нив ги зборуваат сите три јазици?

Решение. Според ознаките на цртежот и условите на задачата имаме:



$$x+a+b+c+d+f+g=34$$

$$x+a+b+c+=28$$

$$x+b+d+f=26$$

$$x+c+d+g=23$$

Ако од збирот на последните три равенки го одземеме двојниот производ на првата равенка, добиваме:

$$x-(a-f+g)=77-68=9$$

од каде добиваме $x\geq 9$. Следствено, најмалку 9 ученици ги зборуваат сите три јазици.

Втор начин. Англиски и француски зборуваат најмалку

$$(28+26)-34=20 \text{ ученици}$$

Англиски, француски и германски зборуваат најмалку

$$(20+23)-34=9 \text{ ученици.}$$

3. Најди пет множества, такви што во унијата на било кои две од нив е содржано секое од преостанатите три множества.

Решение. Очигледно, произволно избрани пет еднакви множества го исполнуваат условот на задачата. Затоа ќе наведеме пример на пет различни множества. За таа цел од петчленото множество $\{1,2,3,4,5\}$ ги формираме следниве пет множества: $\{2,3,4,5\}$, $\{1,3,4,5\}$, $\{1,2,4,5\}$, $\{1,2,3,5\}$ и $\{1,2,3,4\}$, кои очигледно ги исполнуваат условите на задачата.

Да забележиме дека со вакво расудување можеме да ја обопштиме задачата во случај за n множства.

4. Најди го пресекот и разликата на множествата

$$A=\{3k+2\,|\,k\in\mathbb{Z}\} \text{ и } B=\{2k+1\,|\,k\in\mathbb{Z}\}.$$

Решение. Го разбиваме множеството на целите броеви $\mathbb{Z}$ на подмножества, кои при делење со 6 (НЗС на коефициентите пред k), даваат еднакви остатоци, т.е.

$$\mathbb{Z}=\{6k,\ k\in\mathbb{Z}\}\cup\{6k+1,\ k\in\mathbb{Z}\}\cup\{6k+2,\ k\in\mathbb{Z}\}\cup$$
$$\cup\{6k+3,\ k\in\mathbb{Z}\}\cup\{6k+4,\ k\in\mathbb{Z}\}\cup\{6k+5,\ k\in\mathbb{Z}\}.$$

При разбивање броевите кои при делење со 3 даваат остаток 2 го имаат видот $6k+2$ или $6k+5$, па

$$A=\{6k+2,\ k\in\mathbb{Z}\}\cup\{6k+5,\ k\in\mathbb{Z}\},$$

а непарните броеви припаѓаат на множествата $\{6k+1,\ k\in\mathbb{Z}\}$ или $\{6k+3,\ k\in\mathbb{Z}\}$ или $\{6k+5,\ k\in\mathbb{Z}\}$, т.е.

$$B=\{6k+1,\ k\in\mathbb{Z}\}\cup\{6k+3,\ k\in\mathbb{Z}\}\cup\{6k+5,\ k\in\mathbb{Z}\}.$$

Според тоа

$$A\cap B=\{6k+5,\ k\in\mathbb{Z}\},\ A\setminus B=\{6k+2,\ k\in\mathbb{Z}\}.$$

5. Дадени се множествата $A=\{n\mid n\in\mathbb{N},\frac{17}{11}<\frac{19+n}{13}\}$ и $B=\{x\mid x\in\mathbb{N},\frac{11}{17}\leq\frac{5}{1,72+2x}\}$. Најди $A\cup B$, $A\cap B$ и $B\setminus A$.

Решение. Од $\frac{17}{11}<\frac{19+n}{13}$ следува $n>\frac{12}{11}=1,(09)$, па $A=\{2,3,4,5,...,n,...\}$. За да го одредиме множеството B, прво го запишуваме бројот $1,(72)$ како дропка. Имаме $a=1,727272...$ и $100a=172,7272...$, па затоа $99a=171$, т.е. $a=\frac{171}{99}=\frac{19}{11}$. Од $\frac{11}{17}\leq\frac{5}{\frac{19}{11}+2x}$ добиваме $19+22x\leq 85$, $x\leq\frac{66}{22}=3$. Значи, $B=\{1,2,3\}$, па затоа $A\cup B=\{1,2,3,...,n,...\}=\mathbb{N}$ и $A\cap B=\{2,3\}$, $B\setminus A=\{1\}$.

6. Дадено е множеството $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17\}$. Дали може да се изберат три броеви a,b,c од множеството A, така што бројот $ab+bc+ca$ да е еднаков на разликата од производот abc и збирот на преостанатите броеви.

Решение. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $a<b<c$. Од условот на задачата

$$ab+bc+ca=abc-(1+2+3+...+17-a-b-c).$$

Последното равенство можеме да го запишеме во облик

$$abc-ab-bc-ca+a+b+c=\frac{17\cdot 18}{2},\text{ т.е. }(a-1)(b-1)(c-1)=152.$$

Бројот 152 можеме да го претставиме во облик $152=2\cdot 76=2\cdot 2\cdot 38=2\cdot 2\cdot 2\cdot 19$. Од претпоставката $a<b<c$, добиваме дека $c>2,4,8$, па според тоа $c-1=19$, односно $c=20\notin A$. Според тоа таков избор не е можен.

7. Дадени се три множества A_1, A_2, A_3 и за секој $n\geq 4$ го определуваме множеството A_n на следниот начин

$$A_n=A_{n-1}\cap(A_{n-2}\cup A_{n-3}).$$

Определи го множеството A_{10}.

Решение. *Прв начин*. Од равенствата

$$A_4=A_3\cap(A_2\cup A_1)\text{ и }A_5=A_4\cap(A_3\cup A_2)$$

добиваме:

$$A_5 = A_4 \cap (A_3 \cup A_2) = [A_3 \cap (A_2 \cup A_1)] \cap (A_3 \cup A_2)$$
$$= [A_3 \cap (A_3 \cup A_2)] \cap (A_2 \cup A_1) = A_3 \cap (A_2 \cup A_1)$$

Значи, $A_5 = A_4$. Но, тогаш $A_6 = A_4 \cap (A_4 \cup A_3) = A_4$. Очигледно

$$A_7 = A_8 = A_9 = A_{10} = A_4 .$$

Втпр начин. Од равенството $A_n = A_{n-1} \cap (A_{n-2} \cup A_{n-3})$, за $n \geq 4$ добиваме: $A_n \subseteq A_{n-1}$, па затоа $A_n \subseteq A_{n-1} \cup A_{n-2}$, од што следува

$$A_n = A_n \cap (A_{n-1} \cup A_{n-2}) = A_{n+1} .$$

Следствено, $A_{10} = A_4 = A_3 \cap (A_2 \cup A_1)$.

8. Определи ги сите подмножества S од множеството цели броеви $\mathbb{Z}$, такви што:

(1) $m,n \in S \qquad \Rightarrow \qquad m+n \in S$

(2) $m,n \in S \qquad \Rightarrow \qquad m \cdot n \in S$

(3) $(\forall m \in \mathbb{Z})$ $m \in S$ или $-m \in S$ или $m = 0$.

Решение. Нека $S \subseteq \mathbb{Z}$ ги задоволува условите од задачата. Бидејќи $1 \in \mathbb{Z}$ и $1 \neq 0$, од условот (3) следува дека $1 \in S$ или $-1 \in S$.

Ако $-1 \in S$, тогаш од (2) следува $1 = (-1)(-1) \in S$, па од (1) следува $0 \in S$. Сега, повторно од (1) следува $S = \mathbb{Z}$.

Ако $-1 \notin S$, тогаш бидејќи $1 \neq 0$ од (3) следува $1 \in S$, па од (1) следува дека $\mathbb{N} \subseteq S$. Сега, ако $0 \in S$, тогаш $S = \mathbb{N} \cup \{0\}$, а ако $0 \notin S$, тогаш $S = \mathbb{N}$.

9. Нека A е множество природни броеви со следново својство: за секои $m,n \in A,\ m \neq n$ точно е неравенството $10|m-n|+50 \geq mn$. Определи го најголемиот можен број елементи на A.

Решение. Нека $m,n \in A$ и без ограничување на општоста можеме да земеме дека $m > n$. Тогаш даденото неравенство можеме да го запишеме во обликот $mn + 10n - 10m \leq 50$, т.е. во обликот $(m+10)(n-10) \leq -50$. Но, тоа значи дека не е можно $n \geq 10$. Според тоа, A има најмногу еден број поголем од 9. Псвен тоа, лесно се гледа, дека не е можно броевите 8 и 9 истовремено да се во A. Затоа, $|A| \leq 9$.

Множеството $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,15\}$ го има саканото својство и тоа има 9 елементи. Јасно е како се добиваат првите 8 елементи, а 15 е најмалиот број кој соодветствува на sсловот заедно со 8.

10. Можно ли е множеството $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ да се разбие на две дисјунктни подмножества, така што во секое од нив разликата на кои било два елементи да не припаѓа на тоа множество?

Решение. Да претпоставиме дека такво разбивање постои и нека

$$A = B \cup C ,\ B \cap C = \varnothing .$$

Ако $1 \in B$, тогаш од $2-1=1$ следува дека $2 \notin B$, т.е. $2 \in C$. Бидејќи $4-2=2$, добиваме дека $4 \notin C$, т.е. $4 \in B$, па затоа $3 \in C$. Веќе е очигледно дека 5 не може да припаѓа ниту на $B = \{1,4\}$, ниту на $C = \{2,3\}$. Имено, ако $5 \in B$, тогаш $5-4=1 \in B$, а ако $5 \in C$, тогаш $5-3=2 \in C$.

Следствено, такво разбивање не постои.

11. Дадени се 1998 броеви, од кои секој е еднаков на 1 или -1 Дали може овие броеви да се разбијат во две групи, чии збирови се меѓу себе еднакви?

Решение. *Прв начин.* Ќе разгледаме три случаи.

1° Сите броеви се еднакви меѓу себе. Во тој случај лесно ги разбиваме во две групи по 999 броја, па збирот во секоја група ќе биде 999 или -999, во зависност дали сите броеви се позитивни или негативни единици.

2° Бројот на позитивните и бројот на негативните единици е парен. Во овој случај во секоја група ставаме половина од позитивните и половина од негативните единици, па затоа нивните збирови ќе бидат еднакви.

3° Бројот на позитивните и бројот на негативните единици е непарен. Во овој случај, во една група ставаме по една позитивна и една негативна единица, чиј збир е нула, а потоа останатите броеви ги делиме во двете групи како во вториот случај.

Втор начин. Ќе разгледаме два случаи.

1° Бројот на позитивните единици е еднаков на бројот на негативните единици. Тогаш во првата група ставаме една позитивна и една негативна единица, а во втората група - сите други броеви. Во овој случај и во двете групи збирот е еднаков на нула.

2° Бројот на позитивните единици е различен од бројот на негативните единици. Нека, на пример, бројот на негативните единици е помал. Да го означиме со n. Тогаш збирот на сите броеви е $1998-2n$. Сега во првата група ги ставаме сите n негативни единици и 999 позитивни единици $(n<999)$, а во втората ставаме $(999-n)$ позитивни единици. На тој начин во секоја група збирот ќе биде еднаков на $999-n$.

Аналогно постапуваме ако бројот на позитивните единици е помал од бројот на негативните единици.

12. Природните броеви од 1 до n се поделени на две множества. Едното множество содржи два од дадените броеви, а второто множество ги содржи останатите $n-2$ броеви. Производот на двата броја од првото множество е еднаков на збирот од сите броеви од второто множество. Дали може оваа поделба да се направи за:

а) $n=10$, б) $n=15$?

Решение. а) Нека x и y се броевите од првото множество, при што $1\le x<y\le 10$. Тогаш, од условот имаме $1+2+...+10-x-y=xy$, од каде $xy+x+y=55$, со додавање на 1 од двете страни се добива $xy+x+y+1=56$, од каде $(x+1)(y+1)=56$. Ако $x+1=7$ и $y+1=8$, односно ако $x=6$ и $y=7$, можна е поделбата на две такви множества за $n=10$. Имено, важи

$$1+2+3+4+5+8+9+10=6\cdot 7\,.$$

б) Нека x и y се броевите од првото множество, при што $1\le x<y\le 15$. Тогаш, од условот имаме $1+2+...+15-x-y=xy$, од каде $xy+x+y=120$, па слично како претходно се добива $(x+1)(y+1)=121$. Како $x<y$ можни се следните

случаи $x+1=1$, $y+1=121$ или $x+1=11$, $y+1=11$. Во првиот случај се добива $x=0$, $y=120$, што не е можно затоа што $x \geq 1$ и $y \leq 15$. Во вториот случај се добива $x=y=10$, што пак не е можно затоа што треба $x \neq y$. Значи, за $n=15$ не е можна поделбата.

13. Колку најмногу цели броеви може да содржи конечно множество S такво што меѓу секои три елементи на множеството S постојат два различни броја чиј збир припаѓа на S ?

Решение. Нека S е конечно множество од цели броеви такво што меѓу секои три елементи на S постојат два различни броја чиј збир припаѓа ма S . Ќе докажеме дека S не може да има повеќе од 7 елементи.

Нека претпоставиме дека S има барем три позитивни елементи. Нека се $a<b<c$ најголемите три елементи на S . Бидејќи $a+c>c$ и $b+c>c$, мора да важи $a+b \in S$. Но, $a+b>b$ и $a+b \in S$, па затоа $a+b=c$. Нека x е најголемиот елемент на множеството S кој е помал од a . Да ги разгледаме елементите x,b,c . Ако $x>0$, тогаш $x+c>c$ и $b+c>c$, па мора да важи $x+b \in S$. Бидејќи $x+b>b$ мора да важи $x+b=c=a+b$, т.е. $x=a$, што не е можно. Значи, x не може да биде позитивен, т.е. S содржи точно 3 позитивни броја. Аналогно се докажува дека ако S содржи барем т3 негативни броја, тогаш S содржи точно 3 негативни броја. Со други зборови, S може да содржи најмногу 3 броја со ист предзнак. Значи, S може да иам најмногу 7 елементи (три позитивни, три негативни и 0). Пример на множество S со 7 елементи кое го има саканото својство е $S=\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$.

2. ЛОГИКА

1. Да се најде четирицифрен број со различни цифри, ако броевите 5860, 1674, 9432, 3017 содржат по две цифри од бараниот број, но така што ниедна цифра од бараниот број не стои во истиот разред со цифрите од дадените броеви.

Решение. Во дадените броеви цифрите 0, 1, 3, 4, 6 и 7 се јавуваат по двапати, па значи, бараниот број може да се состои од тие цифри. Од овие цифри во броевите 5860 и 9432 по двапати се јавуваат цифрите 0, 3, 4 и 6, па бараниот број се состои од овие цифри. Сега, лесно се добива дека тој број е 4306.

2. Записот на секој датум се состои од осум цифри (на пр. 25.03.2001). Најди го најблискиот датум што доаѓа, во чиј запис сите цифри се различни.

Решение. Во записот $\overline{ab}.\overline{cd}.\overline{efgh}$ очигледно $e=2$. Бројот на месецот $\overline{cd}$ е различен од 11 и 12, па следува дека во неговиот запис ќе ја има цифрата 0 , т.е. $c=0$. Но, тогаш $12 \leq \overline{ab} \leq 19$ или $\overline{ab}=31$, т.е. записот на бројот $\overline{ab}$ ќе ја содржи цифрата 1. Затоа секоја од цифрите f, g, h е поголема од 2, па најблиската година е $\overline{efgh} \geq 2345$. Ако $\overline{efgh}=2345$, тогаш лесно одредуваме дека $\overline{cd} \geq 06$. За $\overline{cd}=06,$ наоѓаме $\overline{ab}=17.$ Значи бараниот датум е $17.06.2345.$

3. Дадени се 21 плочка во облик на квадратче, со иста димензија. На четири плочки е запишан бројот 1; на две плочки е запишан бројот 2; на седум плочки е запишан бројот 3; на 8 плочки е запишан бројот 4. Користејќи 20 од тие плочки, Димитар формирал правоаголник со димензии 4 по 5. За формираниот правоаголник збирот на броевите во секоја редица е иста, и збирот на броевите во секоја колона е иста. Кој број стои на неискористената плочка?

Решение. Да го означиме со S збирот на сите броеви запишани на плочките кои го формираат правоаголникот. Од условот на задачата, имаме дека 4 е делител на S и дека 5 е делител на S. Значи 20 е делител на S. Збирот на сите броеви запишани на 21-ната плочка е точно 61. Заклучуваме дека на неискористената плочка мора да стои бројот 1.

4. Докажи, дека броевите од 1 до 16 може да се наредат во низа така што збирот на секои два соседни броеви е точен квадрат на природен број.

Решение. Бројот 16 има барем еден соседен број, па збирот во случајов ќе биде поголем од 16. Ако до бројот 16 е запишан бројот a, тогаш $17 \le 16 + a \le 31$, па за да збирот биде точен квадрат мора да биде $a = 9$ и притоа бројот 16 може да има само еден соседен број. Значи, подредувањето на низата мора да почне од бројот 16 или низата треба да заврши со бројот 16. Ако прво го запишеме бројот 16, тогаш од условот на задачата лесно се добива следново подредување: 16, 9, 7, 2, 14, 11, 5, 4, 12, 13, 3, 6, 10, 15, 1, 8.

5. „Тркалото на среќата“ е поделено на 30 делови во кои се запишани броевите 50, 100, 150, ..., 1500 (во некој редослед). Докажи дека постојат три последователни делови во кои збирот на запишаните броеви е поголем или еднаков на 2350.

Решение. Три последователни делови може да се изберат на 30 различни начини. Нека збирот на броевите во било кои три последователни делови е помал од 2350. Тогаш збирот на броевите, секој од кои е збир на броеви во три последователни делови, е помал од $2350 \cdot 30$. Но од друга страна тој збир е

$$3(50 + 100 + 150 + ... + 1450 + 1500) = 30 \cdot 2325 .$$

Добиваме, $2350 \cdot 30 < 30 \cdot 2325$, што е противречност. Од добиената противречност следува дека постојат три последователни делови во кои збирот на броевите не е помал од 2350.

6. Во рибникот се пуштени 1983 штуки. Тие се гладни и се јадат меѓу себе. Штуката е сита кога ќе изеде три штуки (сити или гладни). Кој е најголемиот број на штуки кои може да се најадат?

Решение. Кога една штука ќе се засити, тогаш бројот на штуките ќе се намали за три. Нека k е бројот на заситените штуки, кои што јаделе само гладни штуки. Ако некоја наредна гладна штука изеде некоја од најадените , тогаш бројот на најадените штуки се намалува или останува ист. Затоа, најголемиот број на штуки што може да се заситат е бројот $k = [\frac{1983}{4}] = 495$.

7. Нека a, b, c, d се ненегативни броеви. Докажи дека следниве искази се еквивалентни:

$$p_1 : \; a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 0 \text{ и } a - b + c - d = 0 \text{, и}$$

$$p_2 : a^k - b^k + c^k - d^k = 0 \text{, за секој } k \in \mathbb{Z}.$$

Решение. Импликацијата $p_2 \Rightarrow p_1$ е очигледна. Ако p_2 е исполнет за произволен $k \in Z$, тогаш за $k=2$ и $k=1$ се добива p_1.

Ќе ја покажеме импликацијата $p_1 \Rightarrow p_2$. Имаме

$$p_1 \Leftrightarrow \begin{cases} a-b=d-c \\ a^2-b^2=d^2-c^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-d=b-c \\ (a-b)(a+b)=(d-c)(d+c) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-d=b-c \\ (a-b)(a+b-d-c)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ c=d \end{cases} \vee \begin{cases} a=d \\ b=c \end{cases}$$

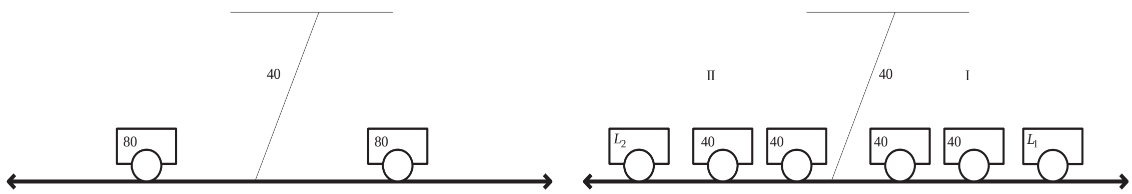
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^k=b^k \\ c^k=d^k \end{cases} \vee \begin{cases} a^k=d^k \\ b^k=c^k \end{cases} \Rightarrow a^k-b^k+c^k-d^k=0 \Leftrightarrow p_2,$$

што требаше да се докаже.

8. Секое од 20 лица им праќа по едно писмо на некои 10 од преостанатите лица. Докажи дека постојат две лица кои едно на друго си испратиле писмо.

Решение. Во даденото множество од 20 лица, постои лице кое примило барем 10 писма (инаку бројот на примени писма би бил помал од $9 \cdot 20 = 180$, а тој број мора да е еднаков на бројот на испратени писма т.е $10 \cdot 20 = 200$). Тоа лице испратило 10 писма на некои од преостанатите 19 лица, а примило барем 10 писма од истите 19 лица. Ако не се случило заемно испраќање, примање на писмо меѓу тоа лице и некое друго лице, тогаш покрај тоа лице би требало да има уште најмалку $10+10=20>19$ лица, што не е можно. Затоа, следи дека тоа лице примило писмо од лице на кое му пратил писмо, што требаше и да се докаже.

9. Два воза (секоја има локомотива и 80 вагони) мораат да се разминат на железничка пруга со еден колосек и еден помошен страничен колосек како на сликата. Како да се изведе тоа ако на помошната пруга има место само за 40



вагони.

Решение. Разминувањето на двата воза се изведува на следниот начин:

1) локомотивата L_1 оди на помошниот колосек.

2) Возот B оди кон вагоните на возот A, а локомотивата L_1 заминува кон II (види цртеж).

3) Локомотивата L_2 зема 40 вагони од возот A, се враќа назад и ги остава на споредниот колосек.

4) Возот B оди во правец кон останатите 40 вагони од возот A, а локомотивата L_1 ги зема оние 40 вагони од споредниот колосек и оди кон II.

5) Возот B ги зема останатите 40 вагони од возот A, ги става на споредниот колосек и со своите 80 вагони заминува кон I.

6) На крајот возот A ги зема останатите 40 вагони од споредниот колосек и заминува кон II.

10. Спортскиот известувач задоцнил за финишот на трката на $100\,m$. Од петмина присутни расположени гледачи ги собрал следните податоци:

Александар: Сенко беше втор, а Огнен трет.
Блаже: Петар беше трет, а Томе петти.
Васко: Томе беше прв, а Петар втор.
Горјан: Сенко беше втор, а Раде четврти.
Драган: Огнен беше прв, а Раде четврти.

На известувачот му било јасно дека гледачите сепак биле премногу расположени и го препрашал својот колега за резултатите. Но колегата само му спомнал деда секој од гледачите дал по еден точен одговор и еден неточен за пласманот на натпреварувачите. Помогнете му на известувачот да го определи конечниот редослед на натпреварувачите во трката.

Решение. За секој од натпреварувачите и гледачите ја користиме само првата буква од неговото име како кратенка.

Да претпоставиме дека С е навистина втор. Тогаш, според изјавата н а Г, Р не е четврт. Сега, од изјавата на В, следува дека П е втор. Но, последново противречи на претпоставката дека С е втор. Значи, не е можно С да е втор.

Со оглед на претходниот заклучок и изјавите на А и Г, добиваме дека О е трет и Р е четврт. Бидејќи О е трет, според изјавата на Б, добиваме дека Т е петти. Сега, бидејќи Т е петти, според изјавата на В, добиваме дека П е втор. Конечно, преостанува дека С победил во трката.

Значи, конечниот редослед е: С, П, О, Р, Т

11. Тројца мажи Гоце, Васил и Никола го посетиле панаѓурот со своите сопруги Елена, Фросина и Билјана. Секој од нив купил различен број предмети и за секој купен предмет платил онолку денари, колку што предмети купил. Притоа, секој маж потрошил 45 денари повеќе од својата сопруга. Одреди ги имињата на брачните двојки, ако се знае дека Гоце купил 17 предмети повеќе од Билјана, а Никола 7 предмети повеќе од Елена.

Решение. Нека еден од мажите купил x предмети, тогаш тој платил x^2 денари, а неговата сопруга купила y предмети и платила y^2 денари. Тогаш, по услов е: $x^2-y^2=45$, т.е.

$$(x-y)(x+y)=1\cdot 45=3\cdot 15=5\cdot 9, \qquad x+y>x-y.$$

Оттука $(x,y)\in\{(23,22),(9,6),(7,2)\}$. Значи, брачните парови купиле по 23 и 22 предмети, 9 и 6 предмети и 7 и 2 предмети.

Бидејќи Гоце купил 17 предмети повеќе од Билјана, заклучуваме дека Гоце купил 23 а Билјана 6 предмети. Слично од условот Никола купил 7 предмети повеќе од Елена, заклучуваме дека тоа е можно ако Никола купил 9, а Елена 2 предмети. Преостанува дека Васил купил 7 предмети, а Фросина 22 предмети.

Следствено, брачните парови се : Гоце и Фросина, Никола и Билјана, Васил и Елена.

12. Во едно маало живеат 4 добри другари Горан, Зоран, Јован и Стојан. Секој од нив има постар брат кој се вика како еден од неговите другари. Името на таткото на секој од нив е име на некој од неговите другари. Секој татко заедно со неговите двајца синови имаат различни имиња.

Таткото на Стојан и братот на Јован го носат името на детето чиј брат се вика Јован. Братот на детето што го носи името на Зорановиот брат се вика како детето чиј татко е Горан.

Чиј татко се вика Стојан?

Решение. Да ги означиме децата со почетните букви од нивните имиња, т.е. со $Г, З, J, С$. Ако X е едно од децата, тогаш го означуваме со $Б(X)$ името на неговиот брат, а со $T(X)$ името на неговиот татко. Тогаш, условите на задачата, преку овие ознаки може да се формулираат на следниот начин:

(1) $X \neq Б(X) \neq T(X) \neq X$, за секој $X \in \{Г,\ З,\ J,\ С\}$

(2) $Б(X) = J \Leftrightarrow T(С) = Б(J) = X$

(3) $X = Б(З) \Leftrightarrow T(Б(X)) = Г$

Бидејќи, $T(С) \neq С$ и $T(J) \neq J$, можни се следните два случаи

1^0 $T(С) = Б(J) = Г$

Тогаш, според (2) $Б(Г) = J$, од каде $Б(З) = С$. Но, според (3) следи дека $T(Б(С)) = T(З) = Г$, што не е можно, бидејќи $T(С) = Г$.

2^0 $T(С) = Б(J) = З$

Тогаш, од (2) имаме дека $Б(З) = J$, а од (3) дека $T(Б(J)) = Г$, односно дека $T(З) = Г$. Па, имаме дека $Б(J) = З$ и од $Б(З) = J$ и $T(З) = Г$, следи дека $Б(Г) = С$, $Б(С) = Г$ и $T(С) = З$. Значи, $T(J) = С$, од каде $T(Г) = J$.

Значи, таткото на Јован се вика Стојан.

13. Одреди ги сите подредени двојки (x, y); $x, y \in \mathbb{N}$, за кои што три од наведените тврдења се точни, а само едно е неточно:

(а) Бројот $x+1$ е делив со y ;

(б) $x = 2y+5$;

(в) Бројот $x+y$ е делив со 3 ;

(г) $x+7y$ е прост број.

Решение. *Прв начин.* Тврдењата (б) и (в) не можат да бидат истовремено точни. Од $x = 2y+5$ и $3 | (x+y)$, т.е. $x+y = 3k$, $k \in \mathbb{N}$, следува $2y+5+y = 3k$, $5 = 3(k-y)$. Последното равенство не е можно, бидејќи десната страна е делива со 3 , а левата не е делива со 3 .

Исто така, и тврдењата (в) и (г) не можат да бидат точни. Од $x+y = 3k$, $k \in \mathbb{N}$ добиваме: $x+7y = 3k-y+7y = 3k+6y = 3(k+2y)$, т.е. дека $x+7y$ не може да биде прост број за ниту едно $k, y \in \mathbb{N}$.

Следствено, треба да се точни равенствата (а), (б) и (г). Од (а) следува $x+1 = my$, $m \in \mathbb{N}$, па со замена во (б) добиваме: $x = 2y+5$, $my-1 = 2y+5$, $y = \frac{6}{m-2}$. Оттука $y \in \mathbb{N}$ за $m \in \{3,4,5,8\}$, па добиваме:

y	6	3	2	1
x	17	11	9	7

За да биде точно тврдењето (г), треба за овие вредности на x и y изразот $x+7y$ да е прост број, а тоа се само подредените двојки $(17,6)$ и $(9,2)$.

Втор начин. За било кои природни броеви x и y, бројот $x+7y$ можеме да го претставиме во облик $x+7y=(x+y)+6y$. Според тоа, не може во исто време да се точни тврдењата (в) и (г). Значи, точни се тврдењата (а) и (б) и едно од тврдењата (в) и (г). Од точноста на тврдењето (б), добиваме дека за природните броеви x и y е исполнето равенството $x+y=3y+5$. Бидејќи бројот 3 не е делител на $3y+5$, добиваме дека 3 не е делител на $x+y$. Според тоа, тврдењето (в) е неточно.

Значи, треба да ги определиме сите природни броеви за кои се точни тврдењата (а), (б) и (г).

Од (а) добиваме дека $x+1=ky$, каде $k\in\mathbb{N}$. Ако замениме во равенството $x=2y+5$, добиваме $ky=2y+6$, односно $y=\frac{6}{k-2}$. Бидејќи y е природен број, $k-2\in\{1,2,3,6\}$. Според тоа $y\in\{6,3,2,1\}$ и парови природни броеви кои ги задоволуваат условите (а) и (б) се $(x,y)\in\{(17,6),(11,3),(9,2),(7,1)\}$.

Од добиените парови природни броеви (x,y) условот (г) го задоволуваат само паровите $(17,6)$ и $(9,2)$.

Трет начин. Четирите можности: $\top\top\top\bot$, $\top\top\bot\top$, $\top\bot\top\top$ и $\bot\top\top\top$ ќе ги опфатиме во две разгледувања.

1) Нека се точни тврдењата (а) и (в), тогаш од $x+1=ym$, $m\in\mathbb{N}$ и $x=2y+5$ добиваме:

$$(m-2)y=6 \qquad (*)$$

Разгледуваме четири случаи:

i) Ако $y=6$, тогаш $m=3$ и $x=17$. Во овој случај

$$\tau\,(\text{в})=\tau\,(3|23)=\bot,\ \text{а}\ \tau\,(\text{г})=\tau\,(59\ \text{е прост број})=\top.$$

Значи, за подредената двојка $(17,6)$ три од тврдењата се точни, а само едно е неточно.

ii) Ако $y=3$, тогаш $m=4, x=11$ и притоа $\tau(\text{в})=\tau(\text{г})=\bot$.

iii) Ако $y=2$, тогаш $m=5, x=9$ и $\tau(\text{в})=\bot, \tau(\text{г})=\top$, па во овој случај бараната двојка е $(9,2)$.

iv) Ако $y=1$, тогаш $m=8$, $x=7$ и $\tau(\text{в})=\tau(\text{г})=\bot$.

2) Да видиме дали можат тврдењата (г) и (д) истовремено да бидат точни. Од $x+y=3k$, $k\in\mathbb{N}$ следува $x=3k-y$; но тогаш: $x+7y=3k-y+7y=3(k+2y)$ не може да биде прост број.

Следствено, постојат само две подредени двојки $(17,6)$ и $(9,2)$, за коишто се точни три од тврдењата, а едно е неточно.

14. На n картици запишани се речениците:

Најмалку k реченици лево од оваа картица се невистинити?

за $k=0,1,2,...,n-1$. Картиците се наредени во некој редослед од лево на десно. Колку најмногу реченици може да бидат вистинити?

Решение. Ќе докажеме дека најмногу $[\frac{n+1}{2}]$ реченици може да бидат вистинити.

Картицата на која пишува: *Најмалку* k *реченици лево од оваа картица се невистинити* ја нарекуваме картица k. Притоа ќе велиме “*картицата* k *е невистинита* (*вистинита*)” наместо ”*реченицата на картицата* k *е невистинита* (*вистинита*)”.

Ако картиците ги наредиме во редоследот: $0,n-1,1,n-2,...$ тогаш речениците на првата, третата, петтата,... по ред се вистинити, а останатите картици се невистинити. Во овој распоред има точно $[\frac{n+1}{2}]$ вистинити картици.

Ќе докажеме дека не е можно да има повеќе од $[\frac{n+1}{2}]$ вистинити картици.

Нека $n=2m$ или $n=2m-1$. Ако картицата k за некој $k\geq m$ вистинита, тогаш има најмалку k невистинити картици. Тоа значи дека има најмалку m невистинити картици, што значи дека има најмногу $n-m\leq m$ вистинити картици. Во спротивно, сите картици за $k>m$ се невистинити, па затоа има најмногу m вистинити картици. Сега тврдењето следува од тоа што

$$[\frac{n+1}{2}]=[\frac{2m+1}{2}]=m \text{ или } [\frac{n+1}{2}]=[\frac{2m-+1}{2}]=m .$$

15. На почетокот на таблата се наоѓаат броевите 2015, 2018 и 2021. Илија во секој чекор ги означува броевите на таблата со a,b и c во некој редослед, а потоа ги заменува со броевите $3a-b,3b-c$ и $3c-a$. Дали може Илија со последователна примена на оваа постапка во некој момент на таблата да добие три еднакви броеви?

Решение. На почетокот на таблата се запишани еден парен и два непарни броја. Ќе докажеме дека после секој чекор на таблата исто така се запишани еден парен и два непарни броја. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека во некој момент бројот a е парен, а броевите b и c се непарни. Тогаш и броевите $3a-b$ и $3c-a$ се непарни, а бројот $3a-c$ е парен, што значи дека после овој чекор повторно имаме два напарни и еден парен број. Според тоа, во ниту еден момент на таблата не е можно да бидат запишани три парни или три непарни броеви, а тоа значи дека не е можно да се добијат три исти броеви.

16. Од 7 листови хартија извесен број е исечен на по десет делови. Од добиените листови, извесен број повоторно е исечен на по десет делови. Ако оваа постапка се повтори неколку пати, дали е можно на крајот да се добијат 1987 листови?

Решение. Нека во првиот чекор се исечени n_1 листови. Тогаш, после сечењето ќе има вкупно $10n_1+(7-n_1)=7+9n_1$ листови, (притоа $1\leq n_1\leq 7$). Ако во вториот чекор се исечени n_2 листови, ќе се добијат вкупно

$$10n_2+(7+9n_1-n_2)=7+9n_1+9n_2$$

листови. Продолжувајќи на сличен начин, заклучуваме дека при секое ново сечење, бројот на листовите се зголемува за некој број помножен со 9. Според тоа, на крајот, ќе има вкупно $7+9n$ листови.

Значи ќе важи равенството

$$1987 = 7+9n \quad \text{или} \quad 1980 = 9n\,.$$

Бидејќи бројот 1980 е делив со 9, следува дека одговорот е потврден.

На пример, еден начин на добивање е даден со следнава шема:

$$7 \to 7\cdot 10 = 70 \to 70\cdot 10 = 700 \begin{array}{l} \to 143\cdot 10 = 1430 \\ \to \quad 557\cdot 1 = 557 \end{array} \Rightarrow 1430+557 = 1987,$$

т.е. прв чекор-сите листови се исечени на по 10 делови; втор чекор-сите 70 листови се исечени на по десет делови и се добиени 700 листови; трет чекор – 143 листови се исечени на по 10 делови, а 557 воопшто не се исечени, па збирот е 1987.

17. На таблата се напишани броевите: 1, 9, 9, 8. Дозволено е да се изберат кои било два од нив и да се зголемат за 1. Може ли со повторување на оваа операција да се добијат четири еднакви броја?

Решение. По секој опишан чекор збирот на броевите се зголемува за 2, т.е парноста на збирот не се менува. Бидејќи почетниот збир е непарен ($1+9+9+8=27$), а збирот на четири еднакви броеви е парен број (дури и делив со 4), тоа значи дека со опишаната постапка, (операција) не може да се добијат четири еднакви броја.

18. Болва се наоѓа на координатната рамнина. Од точката (m,n) болвата може да скокне во една од точките (n,m), $(m-n,n)$ или $(m+n,n)$. Дали болвата може да дојде во точката $(12, 32)$, ако на почетокот се наоѓала во точката

а) $(7,12)$, б) $(8,12)$?

Решение. При можните премини, заради точноста на равенствата

$$\mathrm{NZD}(a,b) = \mathrm{NZD}(a+b,b) = \mathrm{NZD}(a,b-a) = \mathrm{NZD}(a-b,b)\,,$$

каде $a,b \in \mathbb{N}$, добиваме дека $\mathrm{NZD}(m,n)$ е инваријанта (во секој нареден чекор се добива пар кој има ист најголем заеднички делител како и почетниот пар).

а) Бидејќи $\mathrm{NZD}(7,12) = 1 \neq 4 = \mathrm{NZD}(12,32)$, добиваме дека не може да се премине од точката $(7,12)$ во точката $(12,32)$.

б) Ако воведеме ознаки

$$\mathrm{I}:(m,n)\to(n,m)\,,\ \mathrm{II}:(m,n)\to(m+n,n) \text{ и } \mathrm{III}:(m,n)\to(m-n,n)\,,$$

тогаш

$$(8,12)\xrightarrow{\mathrm{III}}(20,12)\xrightarrow{\mathrm{III}}(32,12)\xrightarrow{\mathrm{I}}(12,32)\,.$$

19. Дадени се три купчиња камчиња. Кон произволно купче можат да се додадат или од него да се извадат камчиња, чиј што број е еднаков на заедничкиот број на камчиња на другите две купчиња (пример: $[12,3,5]\to[12,20,5]$ или $[12,3,5]\to[4,3,5]$). Дали може почнувајќи од купчињата $[1993,199,19]$ да се добие празно купче.

Решение. Во секое од купчињата има непарен број камчиња. Заедничкиот број камчиња на било кои две купчиња е парен број. Ако на бројот на камчиња се додаде или одземе парен број на камчиња ќе се добие купче со непарен број на камчиња. Значи, после секој чекор, во секое од трите купчиња, ќе имаме непарен број камчиња. Следствено, бројот 0, т.е. парно купче, со споменатата постапка, никогаш нема да се добие.

20. На таблата се запишани броевите 1, 2, 3, ..., 2015, 2016. Во секој чекор избираме два од запишаните броеви a и b, ги бришиме и на нивно место ги запишуваме броевите $3a-b$ и $13a-3b$. Дали после конечен број чекори може на таблата да се појават броевите 2, 4, 6, ..., 4030, 4032.

Решение. При замена на броевите a и b со броевите $3a-b$ и $13a-3b$ збирот на броевите се менува за

$$3a-b+13a-3b-(a+b)=5(3a-b).$$

Според тоа, после конечен број чекори при делење со бројот 5 збирот на почетните броеви и збирот на крајните броеви даваат ист остаток. Меѓутоа,

$$1+2+3+...+2015+2016=\tfrac{2016\cdot 2017}{2}=1008\cdot 2017\equiv 3\cdot 2\equiv 1(\mathrm{mod}\,5)$$

и

$$2+4+...+4030+4032=2\cdot(1+2+...+2015+2016)=2016\cdot 2017\equiv 1\cdot 2\equiv 2(\mathrm{mod}\,5)$$

па затоа на таблата не може да се појават броевите 2, 4, 6, ..., 4030, 4032.

21. Петар имал 40 крави од кои првата давала $1l$ млеко, втората $2l$ млеко, третата $3l$ млеко, и т.н. четириесеттата крава давала $40l$ млеко. Петар сакал на неговите 4 синови да му ги подели кравите така што секој да добие десет крави и синовите од добиените крави да добиваат по ист број литри млеко. Дали Петре може да ги подели кравите? Доколку може најди една таква поделба.

Решение. Сите крави заедно ќе даваат

$$2+3+...+39+40=(1+40)+(2+39)+(3+38)+...+(20+21)=20\cdot 41=820.$$

Значи секој син треба да добие десет крави кои ќе даваат по 205 литри млеко. Ќе ги искористиме равенствата $1+40=2+39=3+38=...=20+21$. Заради претходните равенства можеме кравите да ги поделиме по парови. Кравите кои даваат заедно четириесет и еден литар млеко ќе ги сметаме за пар, и ќе ги нарекуваме крави придружнички. Петар може да постапи на следниот начин: ако на некој син му ја додели кравата која дава n литри млеко, ќе му ја додели и кравата придружничка. Значи на секој од синовите нема да му дели по една крава, туку ќе им дели парови крави кои се придружнички. Сега е лесно, На секој од синовите ќе му даде по пет крави кои даваат не повеќе од дваесет литри млеко а потоа на секој од синовите на доделените крави ќе му ги додели и кравите придружнички.

Еден таков начин е

1 син: $1,2,3,4,5,40,39,38,37,36$ 2 син: $6,7,8,9,10,35,34,33,32,31$

3 син: $11,12,13,14,15,30,29,28,27,26$ 4 син: $16,17,18,19,20,25,24,23,22,21$

Секако дека постојат и други поделби.

22. Позитивните разлики a_i-a_j на пет различни природни броеви $a_1,a_2,a_3,$ a_4 и a_5 се попарно различни. Да се најде најмалата можна вредност на најголемиот број a_i (од броевите a_1,a_2,a_3,a_4 и a_5).

Решение. Без ограничување на општоста, за природните броеви a_1, a_2, a_3, a_4 и a_5 можеме да претпоставиме дека $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$, со други зборови најголем е a_5. Бројот на разлики $a_i - a_j$ е $\frac{5\cdot 4}{2} = 10$, и тие се

$$a_5 - a_4,\ a_5 - a_3,\ a_5 - a_2,\ a_5 - a_1,\ a_4 - a_3,\ a_4 - a_2,\ a_4 - a_1,\ a_3 - a_2,\ a_3 - a_1,\ a_2 - a_1.$$

Најголема разлика секако е $a_5 - a_1$. Јасно е дека постои избор на броевите да разликите може да бидат 1,2,3,4,5,6,7,8,910. Најмала можна вредност на a_5 може да биде $a_5 = 11$, а во тој случај $a_1 = 1$. Но, тогаш збирот на сите разлики е

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10 = \frac{10\cdot 11}{2} = 55,$$

а од друга страна

$$\begin{aligned}(a_5 - a_4) + (a_5 - a_3) + (a_5 - a_2) + (a_5 - a_1) + (a_4 - a_3) + (a_4 - a_2)\\ + (a_4 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_3 - a_1) + (a_2 - a_1) =\\ = 4a_5 + 2a_4 - 2a_2 - 4a_1 = 2(2a_5 + a_4 - a_2 - 2a_1).\end{aligned}$$

Бројот $4a_5 + 2a_4 - 2a_2 - 4a_1 = 2(2a_5 + a_4 - a_2 - 2a_1)$ е парен а бројот 55 е непарен па таков избор не постои.

Значи најмалата можна вредност на a_5 не може да биде помала од 12. За овој број може да се изберат природни броеви $a_1 = 1,\ a_2 = 3,\ a_3 = 8,\ a_4 = 11,\ a_5 = 12$, кои имаат различни разлики

$$12 - 11 = 1, 2 = 3 - 1, 3 = 11 - 8, 4 = 12 - 8, 5 = 8 - 3,$$
$$7 = 8 - 1, 8 = 11 - 3, 9 = 12 - 3, 10 = 11 - 1, 11 = 12 - 1.$$

23. На еден шаховски турнир учесниците играле секој со секого по еднаш и ниту една партија не завршила реми. Докажи дека меѓу учесниците постои шахист A со следното својство: ако B е некој друг учесник на турнирот, тогаш A го победил B, или постои шахист C којшто е победен од A и го победил B.

Решение. Можни се два сдлучаја:
- еден шахист има најмногу победи на турнирот,
- два или повеќе шахисти имаат најмногу победи на турнирот.

Во првиот случај шахистот кој има најмногу победи е бараниот шахист A, бидејќи ако B е некој друг учесник, тогаш или A го победил B и тогаш навистина сме го нашле учесникот A, или A изгубил од B, во кој случај мора да постои шахист C кој изгубил од A и го победил B, оти ако таков нема, сите други шахисти или го победиле A, па A би имал најмал број победи што не е можно, или изгубиле од B, па B би имал најмногу победи што исто така не е можно.

Во вториот случај, кој било од тие неколку кои имаат најмногу, но ист број победи е бараниот шахист A. Проверката е слична како во претходниот случај.

24. На шаховска табла, 8×8, поставени се 63 монети од по 5 денари и една монета од 10 денари, така што во секое поле е поставена точно една монета. Дадени се на располагање доволен број монети од по 5, 10 и 20 денари. Можни се следниве замени на три монети од таблата со други три монети:

$(5,5,5) \leftrightarrow (10,10,10)$, $\qquad (5,5,10) \leftrightarrow (5,10,20) \leftrightarrow (20,20,10)$,

$$(5,10,10) \leftrightarrow (10,10,20)\,, \qquad (5,20,20) \leftrightarrow (5,5,20) \leftrightarrow (20,20,20)$$

при што редоследот не е битен.

Дали е можно, после конечно многу замени на таблата да бидат поставени 60 монети од по 10 денари, 3 монети од по 20 денари и 1 монета од 5 денари?

Решение. Да забележиме дека со замена на три монети од таблата со други три монети збирот на од вредностите на парите се менува за 15 или 30. Значи, разликата меѓу збировите на вредностите од парите на таблата на почетокот и по неколку замени е делива со 15.

Збирот на вредностите од монетите на почетокот е $63\cdot 5+10=325$, додека на крајот на бараниот распоред е $60\cdot 10+3\cdot 20+1\cdot 5=665$. Нивната разлика е 340, а тој број не е делив со 15.

Значи, одговорот на поставеното прашање е не.

25. На еден шаховски турнир учествувале 5 играчи, кои одиграле по една партија секој со секого, како што е вообичаено. За победа е доделуван по 1 поен, за реми $\frac{1}{2}$ поени и за пораз 0 поени. По завршувањето на турнирот:

- немало играчи со ист број на поени,
- победникот не ремизирал ниедна партија,
- второпласираниот играч не изгубил ниту една партија,
- играчот кој освоил четврто место не победил ни во една партија.

Определи ги резултатите во сите партии.

Решение. Бидејќи победникот не ремизирал ниту една партија, а второпласираниот не загубил од никого, следува дека победникот загубил од второпласираниот. Бидејќи второпласираниот нема изгубено ниедна партија, може да има најмалку $2,5$ поени. Од овде следува дека првиот ги победил останатите натпреварувачи. Второпласираниот играч, заради првиот и третиот услов од задачата, ремизирал со третиот, четвртиот и петтиот играч. Првиот и вториот освоиле вкупно $5,5$ поени. Бидејќи се одиграни 10 партии, останатите играчи освоиле заедно $4,5$ поени. Користејќи дека немало играчи со ист број на поени, добиваме дека единствена можност е третиот да има 2 поени, четвртиот да има $1,5$ поен а петтиот 1 поен. Заклучуваме дека третиот ремизирал со четвртиот и го победил петтиот, а четвртиот и петтиот играч ремизирале заради последниот услов од задачата. На тој начин ја добиваме табела прикажана десно.

	1	2	3	4	5
1		0	1	1	1
2	1		1/2	1/2	1/2
3	0	1/2		1/2	1
4	0	1/2	1/2		1/2
5	0	1/2	0	1/2	

26. На еден шаховски турнир на кој немало нерешени резултати, учествувале 10 шахисти и притоа секој играл со секого. Нека a_i и b_i го означува бројот на победи и бројот на порази соодветно на i-тиот шахист. Докажи дека

$$\sum_{i=1}^{10} a_i^2 = \sum_{i=1}^{10} b_i^2\,. \tag{1}$$

Решение. На секоја победа соодветствува еден пораз и обратно. Според тоа, важи

$$\sum_{i=1}^{10} a_i = \sum_{i=1}^{10} b_i \ .$$

Освен тоа, јасно е дека $a_i + b_i = 9$ за секој $1 \le i \le 10$. Оттука добиваме дека

$$\sum_{i=1}^{10} a_i^2 - \sum_{i=1}^{10} b_i^2 = \sum_{i=1}^{10} (a_i^2 - b_i^2) = \sum_{i=1}^{10} (a_i - b_i)(a_i + b_i)$$

$$= 9\sum_{i=1}^{10} (a_i - b_i) = 9(\sum_{i=1}^{10} a_i - \sum_{i=1}^{10} b_i) = 9 \cdot 0 = 0$$

т.е. точно е равенството (1).

27. На турнир за мал фудбал секоја екипа со преостанатите одиграла само по еден натпревар. За победа се добиваат 2 бода, за нерешен резултат 1 бод, а за изгубен натпревар не се добиваат бодови. По завршувањето на турнирот првопласираната екипа освоила 7 бодови, второпласираната 5, а третопласираната 3 бода.

Колку екипи учествувале на турнирот?

Решение. Нека на турнирот учествувале n екипи. Тогаш се одиграни $\frac{n(n-1)}{2}$ натпревари, а бидејќи од секој натпревар се добиваат само 2 бода, тоа значи дека се освоени вкупно $n(n-1)$ бодови. Бидејќи бројот на освоените бодови не е помал од $7+5+3=15,$ важи

$$n(n-1) \ge 15, \text{ т.е. } n \ge 5. \qquad (1)$$

Од друга страна, ниедна од преостанатите екипи што учествувале, не освоила повеќе од 3 бода, па вкупниот број бодови е најмногу

$$15+3(n-3)=3n+6,$$

т.е.

$$n(n-1) \le 3n+6, \ \Rightarrow \ n \le 5. \qquad (2)$$

Од (1) и (2) следува дека $n=5.$ Значи на турнирот учествувале пет екипи.

28. На тениски турнир секој тенисер играл по еден натпревар со секој друг тенисер (во тенисот ниту еден натпревар не завршува нерешено). Се покажало, дека најголемиот број играчи кои можат да седнат околу тркалезна маса, но така што секој играч да го победил играчот кој се наоѓа од неговата десна страна е еднаков на четири. Докажи, дека бројот на начините сите играчи да се подредат во редица, но така што секој играч да го победил играчот кој се наоѓа од неговата десна страна е делив со пет.

Решение. Група тенисери кои можат да седнат околу тркалезна маса така што секој да го победил играчот кој се наоѓа од неговата десна страна ќе ја нарекуваме *цикл*, а редица од играчи во која секој го победил играчот кој стои од неговата десна страна ќе ја нарекуваме *патека*.

Нека A, B, C и D формираат (во овој редослед) еден цикл од четири тенисери (нив ќе ги нарекуваме *централни*).

Нека X е произволен играч кој го победил A. Ако D го победил X, тогаш $X-A-B-C-D$ ќе биде цикл кој содржи повеќе од четири тенисери, што е противречност. Според тоа, X го победил D. На потполно ист начин, последователно заклучуваме дека X ги победил и C и B. Секој нтаков играч ќе го нарекуваме *силен*.

Аналогно се заклучува дека секој играч кој е победен од A е победен и од B, C и D. Секој таков играч ќе го нарекуваме *слаб*.

Нека претпоставиме дека некој слаб тенисер X победил некој силен тенисер Y. Тогаш $X-Y-A-B-C-D$ ќе биде цикл кој содржи повеќе од четири тенисери, што е противречност.

Според тоа, секој силен тенисер ги победил сите централни и сите слаби тенисери. Оттука следува дека во секоја патека прво треба да стојат силните тенисери, потоа централните и на крајот слабите.

Нека P, Q и R е бројот на начините на кои силните, централните и слабите играчи, соодветно, можат да бидат распоредени во патека (можно е воопшто да нема силни или слаби играчи и тогаш ставаме $P=1$ или $Q=1$, соодветно). Тогаш бројот на начините на кои сите играчи можат да бидат распоредени во патека е еднаков на PQR. Но, $Q=5$, независно од резултатите на натпреварите $A-C$ и $B-D$, со што задачата е решена.

29. Како, со помош на садови од $5l$ и $17l$ ќе можеме да одделиме $13l$ од цистерна со вода?

Решение. Со помош на малиот сад од $5l$ го полниме големиот сад од $17l$; на тој начин во малиот сад ќе останат $3l$ вода. Потоа го празниме големиот сад и во него ги долеваме трите литри вода од малиот сад. На крајот големиот сад го дополнуваме со уште $10l$ вода со помош на садот од $5l$.

30. Располагаме со 100 вреќи со по 100 монети. Во 99 од нив монетите тежат по 10 грама, а во една вреќа сите монети се неисправни и тежат по 9 грама. Како со едно мерење на вага со тегови ќе дознаеме во која вреќа се неисправните монети.

Решение. Ги нумерираме вреќите со броевите од 1 до 100. Потоа земаме 1 монета од првата вреќа, 2 монети од втората вреќа, 3 монети од третата вреќа, ... , и 100 монети од стотата вреќа. Така добиваме вкупно $1+2+3+...+100=50500$ монети. Ако сите монети се исправни, тогаш тие би тежеле 50500 грама. Но, поради неисправноста на монетите, во една од вреќите, ние би добиле $(50500-k)$ грама, $1\leq k\leq 100$, врз основа на што заклучуваме дека неисправните монети се наоѓаат во вреќата нумерирана со k. Така, на пример, ако сме измериле 50499 грама (тоа значи дека недостасува 1 грам), заклучуваме дека неисправните монети се во првата вреќа, ако сме измериле 50498 грама, тогаш неисправните монети се во втората вреќа, итн.

31. Имаме извесен број вреќи со доволно монети во секоја од нив. Во една вреќа сите монети се неисправни и се за 1 грам полесни од исправните монети. Колкав е најмалиот број на мерења на вага со тегови, за да се одреди вреќата со неисправните монети.

Решение. Да претпоставиме дека имаме n вреќи и да ги нумерираме со броевите од 1 до n. Од секоја вреќа земаме онолку монети, колку што е нејзиниот број, т.е. од првата вреќа земаме 1 монета, од втората вреќа 2 монети итн, и од n-тата вреќа земаме n монети, и ги мериме. Вкупниот број на монети е:

$$S = 1+2+3+...+n .$$

Ако исправните монети се со тежина од a грама, тогаш неисправните монети имаат $(a-1)$-грам. Нека неисправните монети се во вреќата означена, на пример, со k ($1 \le k \le n$), тогаш вагата ќе покажува

$$T = a+2a+...+k(a-1)+...+na = Sa-k$$

грама. Мериме сега (второ мерење) S монети од првата вреќа. Ако монетите се неисправни, тогаш нивната тежина T_1 ќе биде помала од T, а ако се исправни, тогаш $T_1 > T$.

Значи, ако $T_1 < T$ неисправните монети се во првата вреќа. Во спротивен случај кога во првата вреќа монетите се исправни, ја дознаваме тежината $S \cdot a$ на исправните монети. Тогаш разликата $T_1 - T = Sa-(Sa-k) = k$ го дава бројот k на неисправните монети, а со тоа и нумерацијата на вреќата со неисправните монети.

Значи, за да ја одредиме вреќата со неисправни монети потребни се две мерења. Очигледно, едно мерење не е доволно.

32. Дадени се 28 топчиња со иста големина, но сите со различни тежини. Опиши ја постапката како со 40 мерења на вага без тегови ќе ги издвоиме најлесното и најтешкото топче?

Решение. Најнапред ќе покажеме дека од n топчиња, кои ги исполнуваат условите од задачата, со ($n-1$)-но мерење можеме да го издвоиме најлесното (или најтешкото) топче. Да ги означиме топчињата со $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$. Споредуваме било кои две од нив, на пример a_i и a_j. Ако $a_i < a_j$, тогаш топчето a_i го споредуваме со останатите топчиња. При секое такво споредување го отстрануваме потешкото, а мерењето, споредувањето го вршиме меѓу полесното топче и останатите топчиња. На таков начин, точно со ($n-1$)-но мерење ќе го издвоиме најлесното топче.

Во нашиот случај мерењата ќе ги извршиме на следниот начин. Најнапред со 14 мерења на произволно две избрани две по две топчиња ги разделуваме топчињата на две групи: група A што ги содржи 14-те полесни топчиња и група B што ги содржи 14-те потешки топчиња. Притоа, очигледно е дека најлесното топче ќе се содржи во групата A, а најтешкото топче ќе се содржи во групата B. Навистина, во групата A не може да биде најтешкото топче, бидејќи барем едно топче во B е потешко од него.

Понатаму, како што на почетокот истакнавме, од полесните 14 топчиња во групата A, со точно 13 мерења ќе го издвоиме најлесното топче, а со точно 13 мерења во групата B ќе го издвоиме најтешкото топче. Значи, употребивме $14+13+13$ мерења, т.е. 40 мерења, со кои од 28 топчиња ги издвоивме најлесното и најтешкото топче.

33. Дадени се 2005 тегови со маси $1g, 2g, 3g, ..., 2005g$. Дали може овие тегови да се поделат во пет групи така, што во секоја група да има ист број на тегови и нивната вкупна тежина да биде иста.

Решение. Одговорот на задачата е позитивен. Навистина десет тегови со маси $n+1, n+2, n+3, ..., n+9, n+10$ грамови можат да се поделат во пет групи со по два тега, така што во секоја група теговите да имаат маса од $2n+11$ грамови. Начинот на поделба на овие тегови е даден во табелата:

Група	прва	втора	трета	четврта	петта
Маса на теговите во групата	$n+1$ $n+10$	$n+2$ $n+9$	$n+3$ $n+8$	$n+4$ $n+7$	$n+5$ $n+6$

Според дадената шема да ги распределиме теговите со маси од 16g до 25g, од 26g до 35g, ..., од 2001g до 2005g. Останатите 15 тегови во овие пет групи ќе ги распределиме на следниот начин:

Група	прва	втора	трета	четврта	петта
Маса на теговите во групата	1 10 13	2 7 15	3 9 12	4 6 14	5 8 11

Забелешка. Постојат и други поделби на теговите така што условот на задачата да биде исполнет.

34. Емилија и Весна го пребарувале таванот на дедо Марко и нашле вага и кутија со тегови. Кога теговите ги распределиле по маси, констатирале дека има 5 различни групи тегови. Играјќи се со вагата и теговите, констатирале дека ако на едната страна на вагата стават било кои два тега, тогаш е можно во кутијата да се најдат други два тега такви што со нивно ставање на другата страна на вагата, вагата е во рамнотежа.

Определи го најмалиот можен број тегови во кутијата.

Решение. Според условот на задачата, за секој пар тегови (x, y) постои пар тегови (u,v) таков што $x+y=u+v$. Во овој случај ќе велиме дека парот (u,v) го *урамнотежува* парот (x, y).

Нека a,b,c,d,e се различни тежини на теговите од ова множество. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $a<b<c<d<e$. Да го разгледаме парот (a,b). Бидејќи $2a<a+b<2b$ и $a+b<x+y$ за секои x и y различни од a и b, заклучуваме дека овој пар го урамнотежува само ист таков пар, т.е. парот (a,b). Затоа во множеството од сите тегови S мора да има два тега со маса a и два тега со маса b.

Бидејќи во S постојат најмалку два тега со маса a, треба да го разгледаме парот (a,a). Вкупната маса на овој пар е $a+a=2a$. Секој пар $(x, y)\neq(a,a)$ има поголем збир на маси од парот (a,a). Според претпоставката постои пар тегови кој го ѕрамнотежува, а тоа единствено е можно ако урамнотежувачкиот пар е (a,a). Тоа значи дека имаме најмалку 4 тегови со маса a.

Сега да го разгледаме парот (d,e). Единствен пар кој го урамнотежува е ист таков пар, што значи дека имаме 2 тега со маса d и 2 тега со маса e. Парот (e,e)

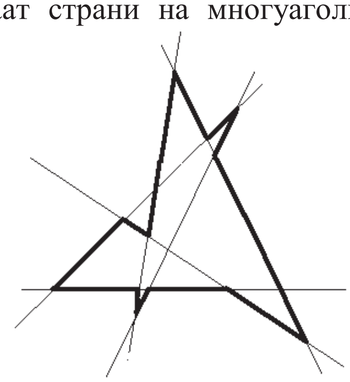
има најголема вкупна маса, па единствен пар кој го урамнотежува е ист таков пар. Значи, имаме 4 тегови со маса e.

Според условот на задачата постои тег чија маса е поголема од b и е помала од d. Масата на тој тег ја означивме со c.

Од досега изнесеното следува дека бројот на теговите не може да биде помал од $4+2+1+2+4=13$. Ќе докажеме дека тоа е најмалиот број елементи на множеството S. Последното може да го докажеме, ако конструираме множество S со 13 елементи кои го задоволуваат условот на задачата. Такво множество се состои од 4 тегови со маса 1, 2 тега со маса 2, 1 тег со маса 3, 2 тега со маса 4 и 4 тегови со маса 5.

35. Дадени се 6 прави што се сечат. Конструиран е $n-$аголник таков што сите негови страни лежат на дадените прави. Одреди ја најголемата вредност за n.

Решение. Секоја права може да се сече со најмногу 5 други, односно на неа може да има најмногу 5 пресечни точки. Тие пресечни точки ја делат правата на најмногу 6 делови. Два од тие делови се полуправи. Значи, на секоја права лежат најмногу 4 отсечки без заеднички внатрешни точки. Лесно е да се разбере дека од овие отсечки најмногу две можат да претставуваат страни на многуаголник, бидејќи две страни на еден многуаголник кои лежат на една иста права не можат да имаат заеднички точки.



Значи, на секоја права лежат најмногу 2 страни на многуаголникот, затоа вкупниот број страни на многуаголникот не надминува $6\cdot 2=12$. На цртежот е пкажано дека е можно многуаголникот да има 12 страни. Значи најголемата вредност за n е 12.

36. Некои од полињата на квадратна $n\times n$, $n\geq 2$ мрежа се минирани така што во секој 2×2 квадрат има барем едно минирано поле. Во секое поле е запишан бројот на минираните полиња кои имаат заеднички точки со тоа поле (тоа се самото поле и полињата кои имаат заедничка страна или заедничко теме со тоа поле). Нека M е најголемиот запишан број. Определи ја најмалата можна вредност на M.

Решение. Редиците и колоните на мрежата ги нумерираме така што секое поле се задава со подреден пар природни броеви (x,y). Ако $n=2$ или $n=3$, тогаш доволно е да се минира само полето $(2,2)$ и како со сигурност има барем едно минирано поле, тогаш најмалата вредност е $M=1$.

Нека $n\geq 4$. Ако ги минираме полињата за кои $x+y$ се дели со 3, тогаш во секој 2×2 квадрат има барем едно минирано поле, а во секој 3×3 квадрат има три минирани полиња (по едно во секој ред), што значи дека $M=3$. Нека претпоставиме дека е можно $M\leq 2$. Тогаш во сите полиња запишаните броеви се помали или еднакви на 2. Да разгледаме произволен 4×4 квадрат. Во неговиот централен 2×2 квадрат, кој го означуваме со K, има поле Π кое не е минирано. Бидејќи во 2×2 квадратите кои го содржат Π има барем по едно минирано поле, а бројот во Π не е поголем од 2, заклучуваме дека Π се наоѓа меѓу две минирани полиња, соседни со страна со Π, а останатите полиња оседни на Π не се минирани. Во K постои поле T, кое е соседно со страна со Π и кое не е минирано. Да го разгледаме 3×3 квадратот со центар во T. Во него има барем три минирани полиња: двете соседни на Π и барем уште едно во 2×2 квадратот кој го содржи T и не го содржи Π. Според тоа, бројот запишан во T е поголем или еднаков на 3, што противречи на претпоставката дека $M \le 2$. Конечно, кога $n \ge 4$ најмалата можна вредност на M е 3.

Според тоа, одговорот е 1 кога $n \le 3$ и 3 кога $n \ge 4$.

37. Во секое теме на еден правилен 360-аголник F со центар O е запишан по еден природен број помал или еднаков на 180, така што збирот на сите запишани броеви е непарен. Докажи, дека може да се најдат две темиња A и B на F такви што разликата на запишаните броеви во нив е еднаква на мерката на $\measuredangle AOB$ изразена во степени.

Решение. За секое теме A на F нека A' е она тема на F за кое мерката на $\measuredangle AOB$ изразена во степени е еднаква на бројот запишан во A и $\triangle AOB$ е позитивно ориентиран. За секое теме A да нацртаме стрелка насочена од A кон A'.

Ако две од овие стрелки покажуваат едно исто теме на F, тогаш нивните почетни темиња формираат пар од видот кој се бара во задачата. Нека претпоставиме дека таков пар не постои. Тогаш, бидејќи од секое теме излегува точно една стрелка, добиваме дека во секое теме треба да влегува точно една стрелка. Според тоа, стрелките формираат неколку независни циклуси.

Бидејќи секој таков циклус извршува цел број пати обиколувања околу O, збирот, изразен во степени, на мерките на стрелките кои учествуваат во циклусот е делив со 360. Оттука следува дека збирот, изразен во степени, на сите стрелки – кој се совпаѓа со збирот на сите запишани броеви – ќе биде делив со 360, што противречи на условот дека збирот на сите запишани броеви е непарен.

38. Мравка се движи по линиите на квадратна шема од теме до теме на следниот начин: поаѓа од едно теме на шемата и во секое следно теме го менува правецот на движење за 90°. После посетата на одреден број на темиња, мравката се вратила во темето од кое го почнала движењето.

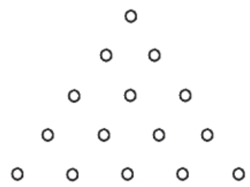
Докажи дека бројот на темиња кои мравката ги посетила е делив со 4. (Темињата се бројат при секоја посета.)

Решение. Движењата на мравката можеме да ги разделиме на четири вида: движење нагоре, движење надолу, движење во лево и движење во десно. Движењата нагоре и надолу ќе ги нарекуваме вертикални, а движењата во лево и во десно ќе ги нарекуваме хоризонтални.

Нека мравката тргнала од некое теме и после посета на одреден број на темиња таа се вратила во почетното теме.

Бројот на темиња y кои ги посетила мравката движејќи се налево е еднаков на бројот на темиња кои ги посетила движејќи се на десно. Според тоа, таа движејќи се хоризонтално посетила $2y$ темиња. Бројот на темиња x кои мравката ги посетила движејќи се нагоре е еднаков на бројот на темиња кои мравката ги посетила движејќи се надолу. По посетата на теме движејќи се хоризонтално, таа продолжува да се движи вертикално и посетува теме кое се наоѓа вертикално. Според тоа $2x = 2y$, т.е. $x = y$. Значи, бројот на темиња кои таа ќе ги посети е $2x + 2y = 2x + 2x = 4x = 4y$, т.е. тој е делив со 4, што и требаше да се докаже.

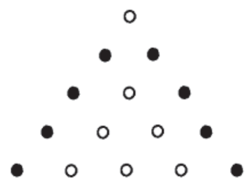
39. Дадени се 15 сијалици кои се подредени во форма на рамностран триаголник, како што е прикажано на цртежот десно. На почетокот сијалиците се изгаснати.



а) Докажи, дека може да се запалат 8 сијалици така што меѓу нив нема три кои се темиња на рамностран триаголник.

б) Докажи, дека како и да се запалат 9 сијалици, тогаш меѓу нив има три кои се темиња на рамностран триаголник.

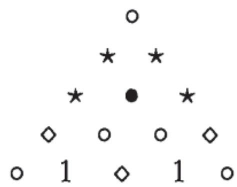
Решение. а) Да запалиме 8 сијалици како што е прикажано на цртежот десно, каде исполнетите кружчиња се запалените сијалици. Јасно, никои три од нев не се темиња на рамностран триаголник.



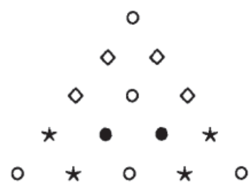
б) Ќе докажеме, дека ако имаме ситуација при која не постојат три запалени сијалици кои се темиња на рамностран триаголник, тогаш има најмалку 7 сијалици кои не се запалени, од што ќе следува дека кога се запалени 9 произволни сијалици, барем 3 од нив се темиња на рамностран триаголник. За таа цел ќе го разгледуваме бројот на запалени сијалици во централниот триаголник од 3 сијалици.

Прв случај. Нека централниот триаголник не содржи запалена сијалица, т.е. сите запалени сијалици се на периферијата. Тогаш ќе имаме барем уште 4 сијалици кои не се запалени, по една во секој од од рамностраните триаголници при темињата на големиот триаголник и една во триаголникот формиран од средините на страните. Значи, ќе имаме најмалку 7 сијалици кои не се запалени.

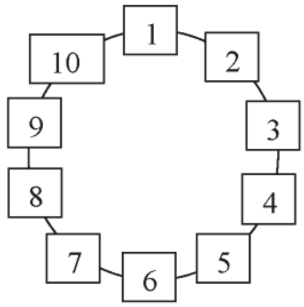
Втор случај. Нека имаме една запалена сијалица во централниот триаголник. Без ограничување на оипштоста можеме да сметаме дека тоа е сијаличката означена со пополнетото крукче нацртежот десно. Тогаш, освен двете незапалени во централниот триаголник, ќе имаме накмалку две незапалени сијалици меѓу сијалиците означени со ★, најмалку уште една меѓу означените со ◇, најмалку уште една меѓу означените со 1 и најмалку уште една меѓу темињата на големиот триаголник, т.е. вкупно најмалку 7 незапалени сијалици.



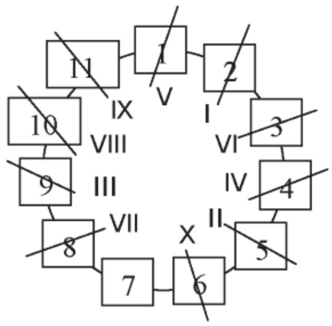
Трет случај. Нека имаме точно две запалени сијалици во централниот триаголник. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека тоа се сијалиците кои на цртежот десно се означени со пополнетите кружчиња. Тогаш освен едната незапалена во централниот триаголник, ќе имаме најмалку две незапалени меѓу сијалиците означени со ★, најмалку уште две меѓу означените со ◇, најмалку уште една една меѓу темињата на големиот триаголник и сијалицата под двете запалени со сигурност не е запален, што значи вкупно 7 незапалени сијалици.



3. ИГРИ И СТРАТЕГИИ



1. Во круг се разместени 10 деца. Треба да им се приклучи уште Ивица. Сите ќе ја играат играта на испаѓање на следниот начин: почнуваат да бројат кај бројот 1 во насока на движење на стрелките на часовникот, а кај оној кај кој што ќе падне бројот 13 испаѓа од играта. се продолжува со броење со останатите таму каде што е прекинато и тринаесеттиот пак испаѓа од играта итн. На кое место (меѓу кои два од десетте означени броеви, види цртеж) треба да застане Ивица, за да остане последен во играта?



Решение. Кога Ивица ќе влезе во кругот, во него ќе има 11 деца. Со прецртување на секој 13-ти број (не ги броиме веќе прецртаните) и ги означиме со римски броеви според тоа кој по ред испаднал, ќе ја добиеме следната слика.

Значи остана бројот 7. Според тоа за да победи, т.е за да остане последен при броењето Ивица треба да застане помеѓу броевите 6 и 7.

2. На случаен начин 2008 момчиња и 2008 девојчиња се распоредени на круг. Секое девојче има топка, а секое момче има кукла. Во еден чекор секој на својот десен сосед му го предава предметот кој го има во моментот. Потоа сите момчиња кои добиле топка и сите девојчиња кои добиле кукла го напуштаат кругот, а останатите продолжуваат на истиот начин. Определи го максималниот можен број чекори во оваа игра.

Решение. Ако сите момчиња се наредени едно до друго, тогаш и сите девојчиња се наредени едно до друго. При ваков распоред во секој чекор само двајца го напуштаат кругот, едно момче и едно девојче. Според тоа, за овој распоред се потребни 2008 чекори.

Ќе докажеме дека за произволен распоред после најмногу 2008 чекори играта ќе заврши. За таа цел доволно е да докажеме дека во секој момент во кругот има како момчиња, така и девојчиња. Тоа значи дека во секој момент ќе има најмалку две соседства девојче-момче и во следниот чекор најмалку двајца ќе го напуштат кругот.

Нека претпоставиме дека во даден момент во кругот останале само момчиња. Тогаш тие имаат кукли, а од кругот излегле 2008 девојчиња, кои исто така имале куклу. Според тоа, кукли има повеќе од 2008, што противречи на условот на задачата. Аналогно се докажува дека не е можно во кругот да останале само девојчиња.

3. На кружница се избрани $2n+1, n \geq 2$ точки, кои кружницата ја делат на еднакви лаци. Двајца играчи последователно бришат по една точка. Ако после потезот на некој од играчите сите триаголници со темиња во останатите точки се тапоаголни, играта завршува со победа на тој играч. Кој играч има победничка стратегија, првиот или вториот?

Решение. Со индукција по бројот на чекорите ќе докажеме, дека вториот играч може да игра така што пред секој потез на првиот играч, ако останале $2k+1\geq 5$ точки, тогаш на секоја полукружница се наоѓаат најмалку k точки.

На почетокот на играта овој услов е исполнет. Нека условот е исполнет и пред некој потез на првиот играч. Останатите точки последователно да ги означиме со $A_0, A_1, ..., A_{2k}$. Без ограничување на општоста можеме даземеме дека првиот играч ја брише точката A_0. Притоа триаголникот $A_{k+1}A_1A_{k+2}$ е остроаголен и играта не е завршена. Вториот играч треба да ја избрише точката A_k. Ако на некоја полукружница е избришана најмногу една точка, тогаш на неа остануваат најмалку $k-1$ точка. Во спротивно, од оваа полукружница се избришани точките A_0 и A_k и на неа останале или точките $A_1, ..., A_{k-1}$ или точките $A_{k+1}, ..., A_{2k}$, што значи дека повторно останале $k-1$ точка.

Ако првиот играч порано не ја изгубил играта, тогаш после $2n-4$ чекори на кружницата ќе останат 5 точки A_0, A_1, A_2, A_3, A_4. Без ограничување на општоста можеме да сметаме дека првиот играч ја избришал точката A_0, после што останува остроаголниот триаголник $A_1A_2A_4$. Со последниот чекор вториот играч ја брише точката A_4 и останатиот триаголник $A_1A_2A_3$ е тапоаголен (во спротивно имаме полукружница која од петте точки A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 ја содржела само точката A_2).

Конечно, од претходните разгледувања следува дека при правилна игра вториот играч има победничка стратегија.

4. Во еден сад има a топчиња, а во друг b топчиња $(a,b\in\mathbb{N})$. Двајца играчи наизманично земаат топчиња од садовите, така што кога ќе дојде на ред, секој од играчите има право да земе само од еден произволен сад произволно многу топчиња. Победник е играчот кој последен зема топчиња. Најди стратегија со која еден од играчите сигурно победува.

Решение. Да го означиме играчот кој е прв на потег со F, а другиот со S. Ако $a=b$, тогаш S сигурно победува ако секогаш зема ист број топчиња колку што последно зел F, но од различен сад со F. Без губење од општоста да претпоставиме дека $a<b$. Првиот играч зема од вториот сад $b-a$ топчиња, а потоа игра како во претходно разгледаниот случај.

5. Киро и Рампо ја играат следната игра: од две купчиња со камчиња, Киро го зема едното, а другото, по свој избор, го разделува на две купчиња. Рампо зема едно од двете нови купчиња, а другото по свој избор, го разделува на две нови купчиња итн. Играта ја губи оној што не може да го подели преостанатото купче. Во кој случај, со вистинска стратегија, играта ја добива Киро, а во кој случај Рампо? Која е стратегијата?

Решение. Ако барем едно купче е парно, тогаш тоа купче Киро ќе го раздели на две непарни купчиња. Рампо, избирајќи едно од тие две купчиња, другото ќе го раздели на парно и непарно. Сега, одново Киро ќе го избере непарното купче, а парното ќе го раздели на две непарни купчиња итн., се до последниот потег на Рампо на кого ќе му останат две купчиња со по едпо камче, кои што, се разбира, не може да се поделат, па затоа Рампо ја губи играта.

Кога и двете купчиња имаат непарен број камчиња, тогаш по првиот потег на Киро, Рампо е во позиција да има на располагање парно и непарно купче, па затоа во овој случај Рампо ја добива играта.

Значи, стратегијата на ова игра е: на противникот да му оставите на располагање две непарни купчиња.

6. На маса се наоѓаат c црвени, b бели и s сини топчиња. Два играчи, A и B, играат игра во која наизменично повлекуваат потези. Во секој потез игачот зема две или три топчиња од масата. Играта ја започнува играчот A. Победува оној играч после чиј потез барем од една боја се извлечени сите топчиња од масата. Одреди за кои вредности на c, b и s играчот A има победничка стратегија.

Решение. Ако некоја од боите не е застапена тогаш играта е завршена без повлекување на потези. Ако од некоја боја на почетокот има не повеќе од 3 топчиња тогаш играчот A со еден потез ќе победи во играта. Ако од сите бои има по барем четири топчиња тогаш можеме да забележиме дека како и да изигра играчот B играчот A може да земе топчиња така што двајцата заедно да зеле пет топчиња (со секои два потези бројот на топчињата да се намалува за пет). Ако вкупниот број на топчиња е конгруентен со -1, 0 или 1 по модул 5 тогаш играчот A зема две или три топчиња така што после неговиот потез вкупниот број на топчиња да е конгруентен со 2 или 3 по модул 5, и во секое купче да има барем по четири топчиња. Ова е можно бидејќи ќе останат најмалку 12 топчиња, па може да ги распореди така што во секое купче да има барем по 4 топчиња. Во наредните потези ќе зема топчиња така што збирот на топчињата извадени во последните два потези е пет се додека во барем едно купче не останат најмногу три топчиња (тогаш ги зема сите топчиња од тоа купче).

Ако вкупниот број на топчиња е конгруентен со -2 или 2 по модул 5 колку и да земе топчиња играчот A после неговоит потез ќе останат топчиња чиј број е конгруентен со -1, 0 или 1 по модул 5, па играчот B има победничка стратегија.

7. Три момчиња Бам, Бим и Бум собрале 33 ореви и почнале ваква игра: Првиот од нив Бам зема не повеќе од пет ореви, потоа вториот Бим, зема не повеќе од седум, а третиот Бум не повеќе од три. Победник е оној што ќе го земе последниот орев.

Може ли некој од нив да игра така што со сигурност ќе победи?

Решение. Вториот играч Бим може со сигурност да победи. Тоа може да го направи на следниов начин: Бам може да земе од 1 до 5 ореви. Значи ќе останат од 28 до 32 ореви. Бим треба да земе ореви така што ќе останат 27 (тоа може да го направи бидејќи може да земе најмногу 7 ореви). По него ореви земаат Бам и Бум и по нивното земање ќе останат од 19 до 25 ореви (заедно можат да земат најмалку 2 а најмногу 8 ореви). Сега Бим треба да земе ореви така што ќе останат 18. По земањето на Бам и Бум ќе останат од 10 до 16 ореви и повторно Бим ќе земе така што ќе останат 9 ореви. Сега се на ред Бам и Бум и по нивното земање ќе останат од 1 до 7 ореви па Бим ќе ги земе останатите. Значи Бим победува.

8. Од 43 монети наредени во еден ред, 8 монети се свртени со „писмо“ нагоре, а 35 со „глава“ нагоре. Во еден чекор се превртуваат било кои 20 монети. Дали е можно после конечен број на чекори сите монети да бидат свртени со „глава“ нагоре? Во колку најмалку чекори тоа е можно? Одговорот да се образложи!

Решение. Нека во првиот чекор x „писма" се свртат во „глави". Тогаш $20-x$ „глави" ќе се свртат во „писма". После овој чекор, бројот на „писма" и „глави" е:

$$\text{„писма“: } (8-x)+(20-x)=28-2x,$$

$$\text{„глави“: } x+(35-(20-x))=2x+15$$

На ваков начин, при првиот чекор ќе имаме парен број на „писма", а непарен број на „глави". Ако во вториот чекор y „писма" се свртат во „глави", тогаш бројот на „писмата" и „главите" после овој чекор ќе биде

$$\text{„писма“: } 28-2x-y+(20-y)=48-2x-2y$$

$$\text{„глави“: } y+2x+15-(20-y)=2x+2y-5$$

што значи дека парноста на бројот на „писмата" и бројот на „главите" не се менува. Јасно, за да се постигне саканата цел во еден чекор треба да свртиме 20 „писма". Тоа не е можно во првиот чекор, но ако во првиот чекор свртиме 4 „писма" и 16 „глави" ќе добиеме $28-2\cdot4=20$ „писма" и $2\cdot4+15=23$ „глави". Сега, во вториот чекор сите 20 „писма" ќе ги свртиме во „глава", што значи дека сите монети може да се свртат во „глава" после 2 чекори.

9. Располагаме со пет монети. Дали може со превртување на кои било три од нив, да се добие која било положба, од некоја зададена почетна положба.

Решение. Постојат вкупно шест можности и потврдниот одговор произлегува од следната шема:

$$(\text{P,P,P,P,P}) \leftrightarrow (\text{P,P,G,G,G}) \leftrightarrow (\text{G,G,P,G,G}) \leftrightarrow$$

$$(\text{P,P,P,P,G}) \leftrightarrow (\text{P,P,G,G,P}) \leftrightarrow (\text{G,G,G,G,G}).$$

Притоа двојната стрелка означува дека дадените две положби можат да се добијат една од друга со дадената операција, а ознаката П, односно Г е „петка" односно „глава".

Забелешка. Превртувањето на 3 монети може да се сведе на превртување на една монета во три потега:

1° Превртуваме произволно три монети.

2° Превртување на две од превртените и една од непревртените.

3° Превртуваме 1 монета што била превртена само во 1°, 1 што била превртена само во 2° и 1 произволна.

Шематски тоа би изгледало вака:

$$(\circ\circ\circ\circ\circ) \xrightarrow{1^\circ} (\bullet\bullet\bullet\circ\circ) \xrightarrow{2^\circ} (\circ\circ\bullet\bullet\circ) \xrightarrow{3^\circ} (\circ\circ\circ\circ\bullet)$$

Оттука заклучува дека одговорот е потврден.

10. Дадена е таблица $1\times n, (n\ge 2)$. Двајца играчи во слободните полиња наизменично ги запишуваат знаците „+" и „ – ". Првиот играч секогаш запишува „+", а вториот играч секогаш запишува „ – ". Не е дозволено два исти знака да бидат запишани во во две соседни полиња. Играта ја губи играчот кој не може да одигра потез. Кој од играчите има победничка стратегија?

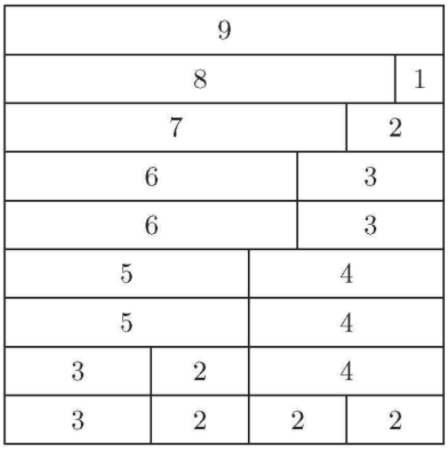
Решение. Вториот играч има победничка стратегија. Стратегијата се состои во тоа да во првиот потез вториот играч запише „ – " во некое од крајните полиња. Сега во натамошниот тек на играта може да игра на произволен начин, се разбира почитувајќи ги правилата за игра. Ќе докажеме дека со оваа стратегија тој секогаш победува. После $k-$от потез на првиот играч ако се изфрлат k полиња кои содржат „+“, таблицата се разбива на k поврзани делови кои содржат празни полиња или полиња со „ – “. Бидејќи има $k-1$ минуси, добиваме дека останал еден дел кој содржи само празни полиња и вториот играч може да запише „ – “ во некое од тие полиња. Значи, вториот играч има потез после секој потез на првиот играч, што значи дека тој победува.

11. Даден е квадрат со димензии 9×9. Киро и Ласте ја играат следнава игра. Киро го расекува квадратот на правоаголници со целобројни димензии, така што на секој правоаголник барем една од димензиите е еднаква на 1. Потоа Ласте избира природен број $k\in\{1,2,...,9\}$ и Киро ќе му даде толку денари колку што изнесува вкупната плоштина на сите правоаголници со димензии $1\times k$ и $k\times1$. Ласте го избира k така што од Киро добива што е можно повеќе денари, а Киро сака да заштеди и притоа на Ласте да му даде што е можно помалку денари. Определи го најмалиот можен број денари кои Киро ќе му ги даде на Ласте.

Решение. Тврдиме дека Киро на Ласте ќе му даде најмалку 12 денари.

Нека претпоставиме дека постои начин Киро да го расече квадратот така што на Ласте му дава помалку од 12 денари. Со тоа расекување Киро би направил најмногу 11 правоаголници со димензии 1×1, пет правоаголници со димензии 1×2, три правоаголници со димензии 1×3, два правоаголници со димензии 1×4, два правоаголници со димензии 1×5 и по еден правоаголник со димензии $1\times6, 1\times7, 1\times8$ и 1×9. Вкупната плоштина на овие правоаголници е еднаква на

$$11\cdot1+5\cdot2+3\cdot3+2\cdot4+2\cdot5+6+7+8+9=78$$



Бидејќи $78<81$, Киро покрај овие правоаголници мора да направи најмалку уште еден правоаголник се со цел да ја подели целата табла со димензии 9×9. Затоа не е можно Киро на Ласте да му даде помалку од 12 денари.

На горниот цртеж е дадено расекување на таблата кое покажува дека Киро може да ја расече таблата така што ќе биде сигурен дека на Ласте треба да му даде најмногу 12 денари.

12. а) На табла 5×5 се поставени 21 жетон со белата страна нагоре така да секој жетон лежи врз посебно 1×1 квадратче (секој жетон е двобоен, има една бела и една црна страна). Во секој потег, Марта зема од таблата еден “бел” жетон, го превртува и го враќа врз некое слободно 1×1 квадратче. Нејзина цел е да ги превртни сите 21 жетони, а да притоа во ниту еден момент на таблата не се постави “бел” и “црн” жетон врз соседни (со заедничка страна) 1×1 квадратчиња. Покажи дека независно од почетниот распоред на жетоните, Марта не може да ја реализира целта.

б) Дали доколку наместо 21 жетон, врз таблата се поставени 20 жетони со белата страна нагоре, постои почетен распоред за кој Марта може да ја реализира поставената цел?

Решение. а) Од принципот на Дирихле, во секој момент кога на таблата се поставени 21 жетон, постои редица целосно исполнета со жетони и постои колона целосно исполнета со жетони. Да претпоставиме дека Марта успеала да ја реализира поставената цел. Тогаш на почетокот, на таблата има "бел" крст жетони, а на крајот, на таблата има "црн" крст жетони. Притоа, во секој момент кога на таблата се сите 21 жетони, од условот за соседство и обоеност на соседните жетони, секој крст жетони е монохроматски (еднобоен). Но тоа значи дека мора да постои момент (потег) кога со превртување на само еден жетон, од таблата ќе исчезне "бел" крст, а ќе се појави "црн" крст. Ова не е можно, бидејќи секои два крста се преклопуваат на барем две полиња.

б) Постои поволен почетен распоред. Еден таков е да најдесната колона се остави празна. Ако квадратњата ги означиме со парови броеви (x, y) каде x е редицата а y колоната во кое тоа се наоѓа, празна колона се квадратчињата (1,5),...,(5,5), т.е. на нив нема жетони. Марта треба да започне да ги превртува жетоните на следниов начин: го подига жетонот од позиција (1,4), го превртува и го враќа врз позиција (1,5); го подига жетонот од позиција (2,4), го превртува и го враќа врз позиција (2,5); итн. се додека не ја пополни 5-тата, а испразни 4-тата колона. Потоа на истиот начин започнува да ја празни 3-тата, да ја пополнува 4-тата колона; итн. се додека не ја испразни првата, а ја пополни втората колона.

13. Петар и Никола ја играат следнава игра: на почетокот Петар замислил едно од полињата на шаховска 100×100 табла. Потоа Никола покажува на произволно поле од шаховската табла и го прашува Петар колку најмалку потези и се потребни на шаховската фигура крал за да стигне од посоченото до замисленото поле. Откако ќе го добие одговорот, Никола може повторно на ист начин да постави прашање или да го погоди полето кое го замислил Петар итн. Петар на сите прашања одговара коректно. Колку најмалку прашања треба да постави Никола за да го открие замисленото поле?

Решение. Ќе докажеме дека две прашања не се доволни. Нека претпоставиме дека Петар на првото прашање одговорил со "Еден". Тогаш (независно кое е првото избрано поле) меѓу допуштените положби на замисленото поле има три полиња a, b и c кои формираат "агол" (a и c имаат заедничко теме, а секое од нив има заедничка страна со b). Лесно се проверува, дека било кое поле да го избере Никола за да го постави второт прашање, Петар секогаш може да одговори така што или a и b, или b и c, или c и a се на еден потез од замисленото поле и Никола не може еднозначно да ја определи положбата на замисленото поле.

За да го открие замисленото поле, Никола едноставно може да посочи триа од аголните полиња на таблата. Множеството полиња, еднакво оддалечени од аголното поле за шаховската фигура крал формираат $\Gamma-$фигура составена од рабните полиња на две соседни страни на квадрат кои се спротивни на аголното поле. Пресекот на две вакви фигури, соодветни на две спротивни аголни полиња на таблата, се состои од најмногу две полиња. Притоа двете полиња секогаш се на различно растојание и затоа после третото прашање местоположбата на замисленото поле е еднозначно определена.

14. На шаховска табла со димензии 8×8 во секое поле, на произволен начин, се поставени цифрите 0 и 1. Распоредот на цифрите може да се менува со потези на следниот начин: со еден потег се менува распоредот на цела редица или цела колона, при што нулите стануваат единици, а единиците нули. Докажете дека постои низа од потези со коишто на таблата ќе се добие состојба во која збирот на цифрите во секоја редица и секоја колона е поголем или еднаков на 4.

Решение. Нека претпоставиме дека на таблата постои редица или колона таква што бројот на единиците е помал од 4. Со S_0 да го означиме бројот на единиците поставени на почетната позиција на таблата, а со S_1 да го означиме бројот на единици после промената на некој од потезите во следната стратегија:

Потег 1. Бараме редица која содржи помалку од 4 единици. Можни се два случаја.

1а) таква редица постои и истата ја менуваме, со што на таблата ќе добиеме редица која ќе има најмалку 5 единици, а бројот на единиците на таблата ќе се зголеми најмалку за две;

2а) таква редица не постои і тогаш одиме на вториот потег.

Потег 2. Бараме колона во која бројот на единиците е помал од 4. Можни се два случаја:

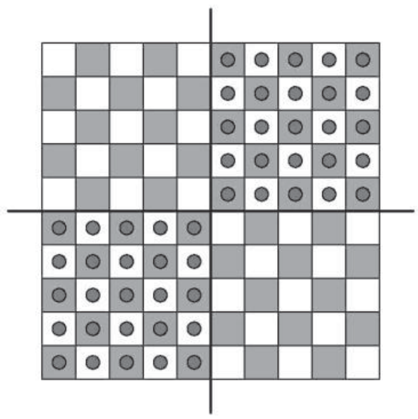
1б) таква колона постои і истата ја менуваме, со што на таблата ќе добиеме колона која ќе има најмалку 5 единици, а бројот на единиците на таблата ќе се зголеми за две;

2б) таква колона не постои и тогаш одиме на првиот потег.

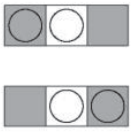
Така во случаите 1а) и 1б) го менуваме и бројот на единиците на таблата, при што добиваме низа $S_0, S_1, S_2, S_3, \ldots$, за која важи $S_0 < S_1 < S_2 < S_3 < \ldots$. Но, на таблата има 64 полиња, на кои може да се постават најмногу 64 единици. Затоа постапката ќе заврши, т.е. после некој потег нема да може да го зголемиме бројот на единиците во ниедна редица и во ниедна колона, што значи збирот на елементите во секоја редица и секоја колона ќе биде поголем или еднаков на 4.

15. На табла со димензии 10×10 се поставени 50 жетони така што на исто поле нема два жетони. Притоа 25 жетони се поставени на долната лева четвртина на таблата, а преостанатите 25 жетони на горната десна четвртина на таблата. Нека X, Y, Z се три последователни полиња на таблата (хоризонтално, вертикално или дијагонално). Ако два жетони се наоѓаат на полињата X и Y и ако полето Z е слободно, тогаш жетонот од полето X се преместува на полето Z, прескокнувајќи го жетонот на полето Y. Дали може со конечна низа такви чекори (потези) да се преместата сите 50 жетони на долната половина на таблата.

Решение. Полињата да ги обоиме како кај шаховската табла (полето во долниот лев агол е црно). Тогаш 25 жетони во долната лева четвртина на таблата зафаќаат 12 бели и 13 црни полиња, а 25 жетони во горната десна четвртина на таблата зафаќаат 12 бели и 13 црни полиња.



Понатаму, при поместување на жетон на таблата тој поминува од црно на црно или од бело на бело поле, без разлика дали се движи хоризонтално, вертикално или дијагонално (види цртеж долу). Затоа бројот на црните, односно белите полиња на кои на почетокот се



наоѓаат жетоните не се менува. Но, на почетокот се зафатени $12+12=24$ бели и $13+13=26$ црни полиња, а долната половина на таблата има 25 црни и 25 бели полиња, па заклучуваме дека со движења наопишаниот начин не може да се постигне сите жетони да се најдат на долната половина на таблата.

16. Ана е Неда играат игра така што во секој потез, откако едната ќе каже број n, другата мора да каже некој број од облик ab каде a и b се природни броеви за кои важи $a+b=n$. Потоа играта продолжува на ист начин со последниот кажан број. Определи ги сите броеви со кои може да започне играта ако после извесен број чекори едната од нив го кажала бројот 2011.

Решение. Да забележиме дека со потезот

$$n=(n-1)+1 \quad \mapsto \quad (n-1)\cdot 1=n-1$$

кажан број може да се намали за 1, па со низа такви потези кажан број може произволно да се намали. Понатаму, со потезот

$$n=(n-2)+2 \quad \mapsto \quad (n-2)\cdot 2=2n-4$$

кажан број се зголемува ако важи $2n-3>n$, т.е. $n>4$. Според тоа, тргнувајќи од било кој број n поголем оф 4, со повторување на вториот вид потез може да се добие број поголем од 2018, а потоа со намалувањето кое е опишано во првиот вид потез можеме да го добиеме бројот 2018.

Да забележиме дека броевите 1, 2, 3 и 4 со допуштените потези не можеме да ги зголемиме:

$$2=1+1, \qquad 3=2+1, \qquad 4=3+1, \qquad 4=2+2$$

$$1\cdot 1=1, \qquad 2\cdot 1=2, \qquad 3\cdot 1=3, \qquad 2\cdot 2=4,$$

па затоа тргнувајќи од нив не може да се добие бројот 2018.

Според тоа, играта може да почне со било кој број $n\geq 5$.

17. Даден е природен број n. Јана запишува n различни природни броеви, а потоа Иван брише неколку од броевите (може ниту еден, но не може сите броеви) и пред секој од преостанатите броеви става еден од знаците $+$ или $-$. Иван победува ако добиениот резултат е делив со 2003, а во спротивен случај победува Јана. Кој од играчите има победничка стратегија?

Решение. Јана има победничка стратегија ако $n\leq 10$. Имено, ако таа ги запише броевите $1,2,2^2,...,2^{n-1}$, тогаш како и да игра Иван, добиениот резултат не може да се дели со 2003, бидејќи истиот е меѓу -1023 и 1023 и не е еднаков на 0. Навистина, бидејќи има знак пред најголемиот неизбришан број имаме $2^k>2^k-1=\sum_{i=0}^{k-1}2^i$.

Ако $n\geq 11$, тогаш множеството C од броевите кои ги избрала Јана има $2^n-1>2003$ различни непразни подмножества. Според тоа збировите на броевите во две од нив, на пример A и B, даваат еднакви остатоци при делење со 2003. Ако Иван стави знач $+$ пред броевите од $A\setminus B$, $-$ пред броевите од $B\setminus A$ и ги избрише останатите броеви од C, тогаш тој победува, бидејќи добиениот збир се дели со 2003.

18. Четворица играчи A_1, A_2, A_3 и A_4 со седум коцки за не лути се човече ја играат следнава игра: A_1 ги фрла седумте коцки и потоа на секој од останатите тројца играчи му исплаќа $k-$ти дел од сумата која тој играч ја има во моментот, каде k е збирот на паднатите броеви на седумте коцки, потоа истото го прават играчите A_2, A_3 и A_4. На почетокот сите мале еднакви суми пари, а откако сите ги фрлиле коцките по еднаш, се покажало дека сумите кои ги имаат играчите се однесуваат како $3:3:2:2$ (сумата на A_1 спрема сумата на A_2 спрема сумата на A_3 спрема сумата на A_4). Определи го збирот на паднатите броеви на секој играч.

Решение. Нека $S_k^{(m)}$ се парите на $k-$тиот играч, $k=1,2,3,4$, после фрлањето и плаќањето на $m-$тиот играч. Нека збирот на паднатите броеви на A_i е еднаков на a_i, $i=1,2,3,4$. Од правилата на играта следува, дека

$$S_k^{(m)} = S_k^{(m-1)} + \frac{1}{a_m} S_k^{(m-1)} = S_k^{(m-1)} \frac{1+a_m}{a_m}, \qquad (1)$$

за $k \neq m$ (т.е. кога A_k добива пари) и

$$S_k^{(k)} = S_k^{(k-1)} - \frac{1}{a_k} \sum_{i \neq k} S_i^{(k-1)} = S_k^{(k-1)} - \frac{1}{a_k}(4S - S_k^{(k-1)}) = S_k^{(k-1)} \frac{1+a_k}{a_k} - \frac{4S}{a_k}, \qquad (2)$$

кога A_k дава пари.

Со помош на (1) и (2) ги определуваме сумите кои четирите играчи ги имаат на крајот на играта. Имаме

$$\frac{6S}{5} = S_1^{(4)} = PS - \frac{4S(1+a_2)(1+a_3)(1+a_4)}{a_1a_2a_3a_4}$$

$$\frac{6S}{5} = S_2^{(4)} = PS - \frac{4S(1+a_3)(1+a_4)}{a_2a_3a_4}$$

$$\frac{4S}{5} = S_3^{(4)} = PS - \frac{4S(1+a_4)}{a_3a_4}$$

$$\frac{4S}{5} = S_4^{(4)} = PS - \frac{4S}{a_4}$$

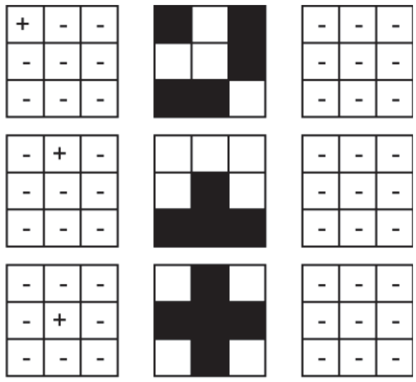
каде $P = \frac{(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)(1+a_4)}{a_1a_2a_3a_4}$. Од првата и втората равенка добиваме $a_2 = a_1 - 1$, а од третата и четвртата равенка добиваме $a_4 = a_3 - 1$. Сега од втората и третата равенка следува

$$\frac{2}{5} = \frac{4}{a_4} - \frac{4(1+a_3)}{a_2a_4}, \text{ т.е. } a_2a_4 = 10(a_2 - a_4 - 2).$$

Од последната равенка следува дека $a_4 < 10$ (во спротивно левата страна е поголема од десната). Освен тоа, $a_4 \geq 7$ (имаме седум коцки, па збирот на паднатите броеви е најмалку 7) и останува да ги провериме случаите $a_4 = 7, 8, 9$. Решение се добива единствено за $a_4 = 7$ (бидејќи максималниот збир е 42), при што добиваме $a_3 = 8, a_2 = 30, a_1 = 31$.

19. Во секое поле на квадратна табла 3×3 напишан е еден од знаците $+$ или $-$. Во еден потез се избира едно поле и се менува знакот во него и во соседните полиња (две полиња се соседни ако имаат заедничка страна). Дали од произволен почетен распоред на знаците, во конечен број потези, може да се добие табла во која секое поле е со знак $-$.

Решение. Да забележиме дека ако едно исто поле е избрано парен број пати е исто како да е не е воопшто избрано, а ако е избрано непарен врој пати е исто како да е избрано еднаш, па затоа ако може да се добие бараната таблица таа ќе се добие во најмногу девет потези.



За да докажеме дека секоја ситуација е можна доволно е да ги разгледаме трите случаи:

На цртежот со црни квадратчиња се обележани избраните полиња.

Ако за секој $+$ во таблата се изберат полињата како на цртежот само тој $+$ ќе се замени со $-$, па за секоја почетна ситуација постои конечна низа на потези (со не повеќе од девет потези) за да се добие бараната ситуација на таблата.

20. Во полињата на табела со димензии 100×100 се запишани 100^2-1 знаци плус и еден знак минус (по еден знак во едно поле). Во еден чекор се мнуваат сите знаци во даден ред или дадена колона. Дали може после конечен број чекори да се добие табела во која има точно 2011 минуси?

Решение. Нека x (соодветно y) е бројот на редиците (соодветно колоните), со кои се направени непарен број потези. За момент да заборавиме на минусот и да го сметаме за плус. Тогаш бројот на минусите е еднаков на $x(100-y)+$ $y(100-x)$ и тоа е непарен број. Според тоа, 2011 минуси може да се добијат само ако горниот број е 2010 или 2012 и ако се земе предвид почетниот минус ќе имаме зголемување или намалување за 1. Ќе докажеме, дека

$$x(100-y)+y(100-x)\neq 2010,\ 2012\ .$$

Ако

$$x(100-y)+y(100-x)=2010\ ,$$

тогаш

$$(x-50)(y-50)=1495=5\cdot13\cdot23\ .$$

Бидејќи $0\le x,y\le100$, множителите на левата страна од последното равенство се по апсолутна вредност помали од 50, а во производот $5\cdot13\cdot23$ секои два множители даваат производ поголем од 50. Аналогно, од

$$x(100-y)+y(100-x)=2012$$

добиваме

$$(x-50)(y-50)=1494=2\cdot9\cdot83$$

и останува да забележиме дека множителите на левата страна на последното равенство по апсолутна вредност се помали од 50, а 83 е поголем од 50.

Според тоа, после конечен број чекори не може да се добијат 2011 минуси.

4. ПРИНЦИП НА ДИРИХЛЕ

1. Нека a,b и c се непарни природни броеви. Докажи дека барем еден од броевите $ab-1$, $bc-1, ac-1$ е делив со 4.

Решение. Секој природен број може да се запише како $4k, 4k+1, 4k+2$ или $4k+3$. Бидејќи a,b и c се непарни броеви, тие се од видот $4k+1$ или $4k+3$. Според принципот на Дирихле два од броевите a,b и c се од ист вид. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека a и b се од ист вид. Според тоа, $a=4k_1+1, b=4k_2+1$ или $a=4k_1+3, b=4k_2+3$.

Во случајот $a=4k_1+1, b=4k_2+1$ имаме

$$ab-1=(4k_1+1)(4k_2+1)-1=16k_1k_2+4k_1+4k_2+1-1=4(4k_1k_2+k_1+k_2).$$

Во случајот $a=4k_1+3, b=4k_2+3$ имаме

$$ab-1=(4k_1+3)(4k_2+3)-1=16k_1k_2+12k_1+12k_2+9-1=4(4k_1k_2+3k_1+3k_2+2).$$

Според тоа $4\,|\,(ab-1)$, односно еден од броевите $ab-1$, $bc-1, ac-1$ е делив со 4.

2. Докажи, дека за секој $n\in\mathbb{N}$ постои број кој во декадниот запис има само 0 и 1 кој е делив со n.

Решение. Да ги разгледаме $n+1$-те броеви $1, 11, 111, \ldots, \underbrace{111\ldots1}_{n+1\text{цифра}}$. При делење со n секој од овие броеви има еден од остатоците $0,1,\ldots,n-1$. Бидејќи се $n+1$ броеви, од принципот на Дирихле следува дека меѓу остатоците мора да има барем два еднакви. Нека броевите $\underset{i}{11\ldots1}$ и $\underset{j}{11\ldots1}$, $j>i$ при делење со n имаат исти остатоци. Тогаш бројот $\underset{j}{11\ldots1}-\underset{i}{11\ldots1}=\underset{j-i}{11\ldots1}\underset{i}{00\ldots0}$ е делив со n.

3. Да се докаже дека постои природен број кој е деллив со 1985, а првите десет цифри му се 1234567890.

Решение. Нека $x=1234567890$. Да ја разгледаме низата

$$a_1=x,\ a_2=x(10^{10}+1),\ a_3=x(10^{20}+10^{10}+1),\ldots$$

При делењето на броевите $a_k, k=1,2,3,\ldots,1986$ може да се добијат најмногу 1985 различни остатоци, па, значи, постојат i и j, $i<j$, така што при делењето на a_i и a_j со 1985 се добиваат исти остатоци. Следствено

$$a_i=1985q_i+r,\qquad a_j=1985q_j+r$$

па $a_j-a_i=1985(q_j-q_i)$. За бројот a_j-a_i имаме:

$$a_j-a_i=x(10^{10j}+10^{10(j-1)}+\ldots+10^{10}+1)-x(10^{10i}+10^{10(i-1)}+\ldots+10^{10}+1)$$

$$=x(10^{10j}+10^{10(j-1)}+\ldots+10^{10(j-i+1)})$$

што значи дека првите десет цифри му се 1234567890 и е делив со 1985.

Забелешка. Поедноставно кажано, во горното решениеја ја земаме низата броеви 1234567890, 12345678901234567890, ... При делење на овие броеви бројот со

1985 се добиваат 1985 остатоци, па од принципот на Дирихле следува дека постојат два броја кои даваат еднаков остаток. Нивната разлика е број кој е делив со бројот 1985 и првите цифр му се 1234567890.

4. Избрани се 12 различни броеви од множеството $\{1,2,...,20\}$. Докажи дека постојат барем два броја чија разлика е еднаква на 3.

Решение. Нека од избраните броеви е формирано множеството $A=\{x_1,x_2,...,x_{12}\}$, каде што $1\le x_1<x_2<...<x_{12}\le 20$. Ако на секој од избраните броеви додадеме 3, го добиваме множеството $B=\{x_1+3,x_2+3...,x_{12}+3\}$ каде што $4\le x_1+3<x_2+3<...<x_{12}+3\le 23$.

Множествата A и B заедно имаат 24 броеви, 12 во A и 12 во B и сите се помали или еднакви на 23. Според принципот на Дирихле, два од овие броеви се еднакви. Но, сите елементи од множеството A се различни меѓу себе што повлекува дека и сите елементи од множеството B се различни меѓу себе. Значи постои x_i од A што е еднаков на некој x_j+3, т.е $x_i-x_j=3$.

5. Од 12 различни двоцифрени броеви можат да се изберат два, чија разлика е двоцифрен број со еднакви цифри. Докажи!

Решение. Нека $a_1,a_2,a_3,...,a_{12}$ се меѓусебно различни двоцифрени броеви. Доволно е да се докаже постојат два чија разлика е двоцифрен број делив со 11. Но, од 12 броеви постојат два, кои при делење со 11 даваат ист остаток, па нивната разлика е број делив со 11 и помал од 100. Значи, разликата е некој од броевите 11, 22, 33, 44, ..., 88, т.е. број запишан со исти цифри.

6. Нека a,b,c и d се цели броеви. Докажи дека производот

$$P=(a-b)(c-a)(d-a)(d-c)(d-b)(c-b)$$

е делив со 12.

Решение. Од четири природни, т.е. цели броеви, два броја можеме да избереме на $\frac{4\cdot3}{2}=6$ начини, и тие се ab,ac,ad,bc,bd,cd. Сега е јасно дека од разликите на броевите во секој пар одвоено е формиран производот P. Од друга страна, бројот 12 можеме да го запишеме во облик $12=2^2\cdot3$. Според тоа, доволно е да докажеме дека $4\,|\,P$ и $3\,|\,P$.

Да забележиме дека два од броевите a,b,c и d при делење со 3 имаат ист остаток (принцип на Дирихле). Според тоа, нивната разлика е делива со 3, и истата е делител на P, т.е. $3\,|\,P$. Навистина, без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $a=3k+r$ и $b=3p+r$, па тогаш од $b-a\,|\,P$, добиваме дека $3(p-k)\,|\,P$, т.е. $3\,|\,P$.

Од друга страна при делење со 4 на дадените четири броја, се добиваат четири остатоци r_1,r_2,r_3,r_4, т.е. можни се четири остатоци. Тие припаѓаат на множеството $\{0,1,2,3\}$. Сега, можни се два случаја.

Случај 1. Постојат два еднакви остатоци, т.е. два од броевите a,b,c,d се од облик $4k_1+r$ и $4k_2+r$. Тогаш нивната разлика $(4k_1+r)-(4k_2+r)=4(k_1-k_2)$ е делива со 4, т.е. $4\,|\,P$.

Случај 2. Сите остатоци се различни меѓу себе, т.е. $r_i \neq r_j$, $i \neq j$, $i, j \in \{0,1,2,3\}$. Тогаш еден од броевите е од облик $4k_i + 1$, а друг е од облик $4k_j + 3$. Нивната разлика е делива со 2. Преостанатите два броја се од облик $4k_l + 2$ и $4k_m$ и нивната разлика е исто така делива со 2. Значи, два од множителите на P се деливи со 2 (не се деливи со 4), па нивниот производ е делив со 4.

7. Во еден клас има 25 ученици. Докажи дека постојат два ученика во класот си ист број на пријатели (Сметаме дека ако А е пријател на Б, тогаш и Б е пријател на А).

Решение. Ниту еден ученик не може да има помалку од 0 и повеќе од 24 пријатели. Затоа бројот на пријатели на секој ученик може да прими 25 различни вредности 0, 1, 2, ..., 23, 24. Единствената можност да се избегне ситуацијата, 2 ученика да имаат идентичен број пријатели, е следнава ситуација: 1 ученик има 0 пријатели, 1 ученик има 1 пријател, 1 ученик има 2 пријатели,..., 1 ученик има 23 пријатели и 1 ученик има 24 пријатели. Но, не е можно да постои ученик кој е пријател со сите ученици во класот и истовремено да постои ученик во класот без пријатели. Затоа, следува дека постојат барем 2 ученика во класот со ист број пријатели.

8. На први декември минатата година еден ученик почнал да се подготвува за регионалниот натпревар по математика кој се одржа на први март оваа година. Тој секој ден решавал по една задача, но за да не се премори, во текот на една седмица (од понеделник до недела) решавал најмногу дванаесет задачи. Покажи дека во текот на неговите подготовки за натпреварот, постојат неколку последователни дена во кои ученикот решил точно 21 задача.

Решение. Нека a_i е бројот на задачи што ученикот ги решил од почетокот до i-тиот ден вклучувајќи го и i-тиот ден. За оваа низа е исполнет условот $a_{i+1} \geq a_i + 1$. Бидејќи во дадениот временски период во кој ученикот се припремал за натпревар има деведесет дена, горната низа има барем седумдесет и седум $a_r, a_{r+1}, ..., a_{r+76}$ члена кои се придружени на деновите од точно единаесет седмици. Бидејќи ученикот во секоја од тие седмици решава најмногу по дванаесет задачи, добиваме дека $a_{r+76} \leq 12 \cdot 11 = 132$.

Ја формираме низата $a_r + 21, a_{r+1} + 21, ..., a_{r+76} + 21$, која го има погорното својство како и првобитната низа, т.е. е монотоно растечка. Двете низи заедно имаат 154, кои можат да бидат некои од броевите

$$1, 2, 3, ..., 132, 133, ..., 153 = 132 + 21.$$

Според принципот на Дирихле, постојат 2 члена од тие две низи (од секоја низа по еден бидејќи и двете се строго монотоно растечки) кои се еднакви меѓу себе. Значи, постои $a_p + 21$ и a_q така што $a_p + 21 = a_q$. Според тоа, во деновите $p+1, p+2, ..., q$ ученикот решил точно 21 задача.

9. Докажи, дека меѓу девет природни броеви, ниту еден од кои нема прост делител поголем од 6, постојат два броја чиј производ е точен квадрат на природен број.

Решение. Единствени можни прости делители на дадените девет броеви се 2, 3 и 5, па затоа броевите се од видот $2^a 3^b 5^c$. Броевите ќе ги поделиме вокласи според парноста на одделните степенови показатели. Имаме

a	b	c
парен	парен	парен
парен	парен	непарен
парен	непарен	парен
парен	непарен	непарен
непарен	парен	парен
непарен	парен	непарен
непарен	непарен	парен
непарен	непарен	непарен

Според тоа, имаме $2^3 = 8$ класи, а како имаме 9 броеви, тогаш од принципот на Дирихле следува дека постои барем една класа во која се наоѓаат два броја. Меѓутоа производот на два броја од иста класа има парни степенови показатели, што значи дека е точен квадрат на природен број, Јасно, овие броеви се бараните два броја меѓу деветте дадени броеви.

10. Дали е можно во полињата на шаховската табла со димензии 1997×1997 да се запишат броевите 1, 2 и 3, така што збировите на броевите во редовите, во колоните и по двете дијагонали да бидат различни.

Решение. Ќе покажеме дека како и да ги запишуваме броевите во полињата на таблата, секогаш постојат барем два еднакви збира.

Вкупно збирови има колку што има и редови, колони и дијагонали заедно, т.е. има

$$1997 + 1997 + 2 = 3996 \qquad (1)$$

Но, ниту еден збир не е помал од 1997 (кога запишуваме само единици), ниту поголем од $3 \cdot 1997$ (кога запишуваме само тројки). Значи вкупниот број x на различни збирови е меѓу 1997 и $3 \cdot 1997$, т.е. $1997 \le x \le 3 \cdot 1997$, од каде што $x \le 2 \cdot 1997 + 1$.

Имајќи го предвид (1), според принципот на Дирихле, заклучуваме дека постојат барем два еднакви збира.

Следствено, такво запишување не е можно.

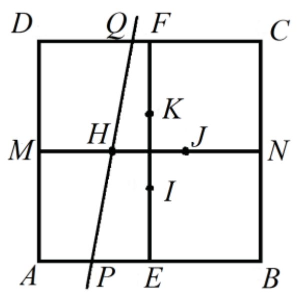
11. Докажи дека за било кој распоред на 31-на фигура на шаховска табла, постојат три полиња кои што формираат прав агол а на кои нема фигура.

Решение. Шаховската табла ќе ја разделиме на шеснаесет еднакви квадрати со димензии 4×4 (по четири единечни квадратчиња во секој голем квадрат). Во еден од формираните квадрати со димензии 4×4 има најмногу една фигура. Ако претпоставиме спротивно, т.е. во секој квадрат со димензии 4×4 да има најмалку по две фигури, тогаш на таблата би имало $s \ge 16 \cdot 2 = 32$ фигури, што не е можно. Значи, најмалку во еден квадрат со димензии 4×4 нема повеќе од една фигура. Останатите единечни квадратчиња од тој квадрат, на кои нема фигура, формираат прав агол каков што се бара во условот на задачата.

12. Во табела со димензии $2n \times 2n$ се запишани природни броеви кои се помали или еднакви на 10, при што броевите кои се запишани во квадрати со заеднички теме се заемно прости. Докажи, дека постои број кој се појавува барем $\frac{2n^2}{3}$ пати.

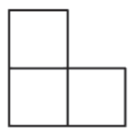
Решение. Да ја поделиме табелата на n^2 квадрати со димензија 2×2. Бидејќи секој од овие квадрати може да содржи најмногу 2 од броевите 2, 3, 4, 5, 8, 9 и 10, заклучуваме дека секој од овие квадрати содржи барем два од броевите 1, 5 и 7. Но, вакви квадрати има n^2, па затоа броевите 1, 5 и 7 во табелата ќе се појават $2n^2$. Конечно, од принципот на Дирихле следува дека некој од броевите 1, 5 и 7 ќе се појави најмалку $\frac{2n^2}{3}$ пати.

13. Дадени се 9 прави такви што секоја од нив дели даден квадрат *ABCD* на два трапези, чии плоштини се однесуваат како $2:3$. Докажи дека најмалку три од дадените девет прави минуваат низ иста точка.

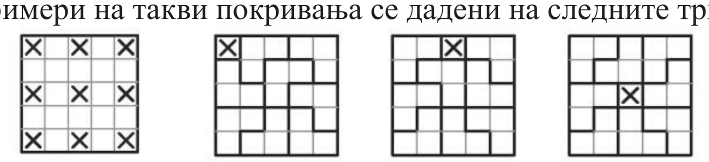


Решение. Нека дадениот квадрат е *ABCD*. Јасно, секоја од дадените прави сече по две спротивни страни на квадратот. Нека *a* е една од дадените 9 прави и нека таа го дели квадратот на два трапеза чии плоштини се однесуваат како $2:3$. Нека таа права ги сечестраните *AB* и *CD* во точките *P* и *Q*, соодветно. Таа го дели квадратот на трапезите *APQD* и *PBCQ*. Овие два трапези имаат исти висини, па затоа нивните плоштини се однесуваат како должините на соодветните средни линии. Нека *M* и *N* се средините на страните *AD* и *BC*, соодветно. Нека правата *a* ја сече отсечката *MN* во точката *H*. Тогаш *H* е средина на отсечката *PQ*, па затоа *MH* и *HN* се средни линии на трапезите *APQD* и *PBCQ,* соодветно. Бидејќи плоштините се однесуваат како $2:3$, добиваме дека $\overline{MH}:\overline{HN}=2:3$. Нека *J* е симетричната точка на точката *H* во однос на центарот на квадратот. Тогаш секоја права која минува низ точката *J* и го дели квадратот на два трапези има својство дека плоштините на тие два трапези се однесуваат како $2:3$. Аналогно се заклучува дека постојат уште две точки со саканото својство (на цртежот тоа се точките *I* и *K*). Според тоа, секоја од деветте прави минува низ една од четирите точки: H, I, J и K. Од принципот на Дирихле следува дека барем низ една од овие точки минуваат најмалку три од дадените девет прави.

14. Квадратна табла со димензии 5×5 поделена е на единечни полиња. На таблата се поставени аголни тримина (види цртеж), така што само едно поле на таблата останало непокриено. Определи ги сите полиња на таблата кои може да останата непокриени при вакво поставување на тримината.



Решение. Непокриени може да останат само 9 полиња прикажани на левиот цртеж долу. Примери на такви покривања се дадени на следните три цртежи долу.



Ќе докажеме дека непокриено мора да биде едно од наведените 9 полиња.

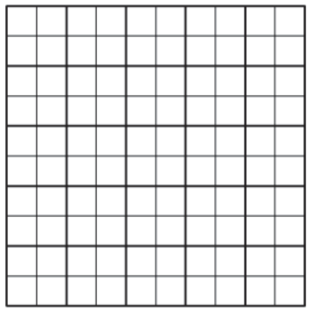
Секое тримино може да покрие најмногу едно од наведените 9 полиња. Но, полиња има 9, а на таблата поставуваме 8 тримина, па затоа од принципот на Дирихле следува дека едно од наведените полиња секогаш е непокриено.

15. Дадена е табла со димензии 10×10. За две полиња велиме дека се пријателски ако имаат барем едно заедничко теме. Во секое поле од таблата е запишан природен број помал или еднаков на 10, така што броевите во пријателксите полиња се заемно прости. Докажи дека постои број кој на таблата е запишан најмалку 17 пати.

Решение. Да ја поделиме таблата на 25 помали табли со димензии 2×2. Во секој од овие делови се појавува најмногу еден парен број и најмногу еден број делив со 3. Значи, најмногу 50 броеви во целата табла е делив со 2 или со 3. Ни останууваат уште најмалку 50 броеви и секој од нив е еднаков на 1, 5 или 7. Сега, бидејќи

$$50=3\cdot16+2$$

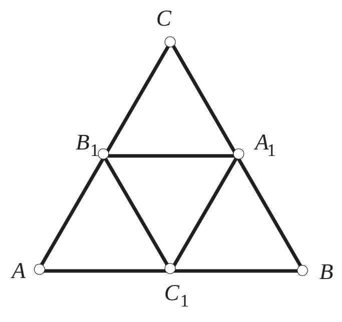
тврдењето на задачата следува од принципот на Дирихле.



16. Во таблица со димензии 10×10 се запишани цели броеви (во секое од 100-те квадратчиња по еден број). Во две соседни квадратчиња апсолутната вредност на разликата на броевите не е поголема од 5 (соседни се квадратчњата кои имаат заедничка страна). Докажи дека барем два од запишаните броеви се еднакви.

Решение. Нека a е најмалиот цел број кој е запишан во некое од 100-те единечни квадратчиња во квадратната шема со димензии 10×10. За од квадратчето во кое е запишан најмалиот цел број a да се премине до квадратчето во кое е запишан најголемиот цел број потребно е да се направат не повеќе од 19 преминувања во соседна клетка (според правилото од задачата за преминување). Нека при секое преминување во соседна клетка од клетката во која е запишан најмалиот цел број a до клетката во која е запишан најголемиот цел број, новиот број е поголем за 5. Тогаш најголемиот број е $a+95$. Значи, помеѓу запишаните броеви нема повеќе од 96 различни броеви. Според принципот на Дирихле запишани се барем два еднакви цели броеви.

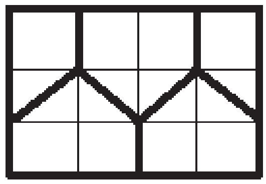
17. Рамностран триаголник ABC е покриен со пет помали рамнострани складни триаголници. Докажи, дека триаголникот ABC може да се покрие со четири од овие триаголници (дозволено е поместување на триаголниците).



Решение. Нека A_1, B_1, C_1 се средините на страните BC, CA, AB, соодветно, на триаголникот ABC. Според принципот на Дирихле еден од петте рамнострани складни триаголници покрива две од точките A, B, C, A_1, B_1, C_1, па затоа страната на овој триаголник не е помала од половината од страната на триаголникот ABC. Затоа секој од четирите рамнострани триагоници, на кои е разбиен триаголникот ABC, може да се покрие со еден од дадените пет триаголници.

18. Докажи дека помеѓу 6 точки кои се наоѓаат во внатрешноста или на страните на правоаголник 3×4 постојат најмалку две кои се на растојание не поголемо од $\sqrt{5}$.

Решение. Правоаголникот 3×4 ќе го поделим ма 5 делови, како на цртежот десно. Тогаш според принципот на Дирихле во еден од овие пет делови има две точки кои се наоѓаат во внатрешноста или на неговите страни. Сега, од Питагоровата теорема следува дека растојанието меѓу овие две точки е помало или еднакво на $\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$.



19. Рамностран триаголник ABC е покриен со пет помали рамнострани складни триаголници. Докажи, дека триаголникот ABC може да се покрие со четири од овие триаголници (дозволено е поместување на триаголниците).

Решение. Нека A_1, B_1, C_1 се средините на страните BC, CA, AB, соодветно, на триаголникот ABC. Според принципот на Дирихле еден од петте рамнострани складни триаголници покрива две од точките A, B, C, A_1, B_1, C_1, па затоа страната на овој триаголник не е помала од половината од страната на триаголникот ABC. Затоа секој од четирите рамнострани триагоници, на кои е разбиен триаголникот ABC, може да се покрие со еден од дадените пет триаголници.

20. Во квадрат со страна $1\,m$, на произволен начин, се распоредени 51-на точка. Докажи дека постојат три точки меѓу нив, кои можат да се покријат со круг чиј радиус е $\frac{1}{7}m$.

Решение. Да го поделиме дадениот квадрат на 25 еднакви квадрати со страна $\frac{1}{5}m$. Врз основа на принципот на Дирихле, бидејќи имаме 25 квадрати, а 51 точка, заклучуваме дека мора да постои квадрат во чија внатрешност или на неговите страни, се наоѓаат 3 од тие точки. Тој квадрат може да се покрие со круг, чиј радиус е поголем од половината на неговата дијагонала, т.е. $r>\frac{\sqrt{2}}{10}$. Бидејќи $\frac{1}{49}>\frac{1}{50}$, т.е. $r=\frac{1}{7}>\frac{1}{5\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{10}$, заклучуваме дека тој квадрат може да се покрие со круг чија радиус е $\frac{1}{7}m$, што и требаше да се докаже.

21. Дали може во круг со радиус 1 да се сместат извесен број кругови, чиј збир на радиусите е 1999, такви што никои два од нив немаат заеднички внатрешни точки?

Решение. Во внатрешноста на кругот можеме да конструираме квадрат со страна 1. Овој квадрат го делиме на n^2 мали квадратчиња со страна $\frac{1}{n}$. Во секое од овие квадратчиња впишуваме круг со радиус $\frac{1}{2n}$. Тогаш збирот на радиусите на овие кругови е $n^2\cdot\frac{1}{2n}=\frac{n}{2}$. Од $\frac{n}{2}=1999$ добиваме $n=3998$. Значи во кругот со радиус 1 може да се сместат 3998 кругови што не се преклопуваат, чиј збир на радиуси е 1999.

5. БОЕЊЕ, ПОКРИВАЊЕ И РАСЕКУВАЊЕ

1. Секоја точка од рамнината е обоена со една од три бои. Докажи дека постојат две точки со иста боја кои се на растојание 1.

Решение. Нека A е фиксна точка од рамнината, и k е кружница со центар во A и радиус $\sqrt{3}$. Ако сите точки од k се истобојни со A, тогаш заради тоа што дијаметарот на k е поголем од 1, постојат две точли од k кои се на растојание еднакво на 1. Тие две се со иста боја. Затоа нека постои точка $B \in k$ таква што A и B имаат различна боја. Да го разгледаме ромбот $ABCD$ со страна 1, чии темиња C и D лежат на симетралата на AB. Тогаш $\overline{AB} = \overline{AD} = \overline{BC} = \overline{BD} = \overline{CD} = 1$ и мора барем еден од паровите $(A,C),(A,D),(B,C),(B,D),(C,D)$ да е со иста боја, бидејќи точките од рамнината се обоени со три бои.

2. Секоја целобројна точка на бројната права произволно е обоена во една од две бои (плава или црвена). Докажи дека постои отсечка чии крајни точки и средина се обоени со иста боја.

Решение. Нека две соседни точки се обоени во иста боја. Без губење на општоста, можеме да земеме дека точките 4 и 5 се обоени плаво. Ако 3 или 6 се плави, ја добиваме бараната отсечка. Затоа, да претпоставиме дека 3 и 6 се црвени. Ако 9 е црвена, бараната отсечка е со крајни точки во 3 и 9. Затоа да претпоставиме дека 9 е плава. Ако 7 е плава, бараната отсечка е со крајни точки во 5 и 9. Затоа, претпоставуваме дека 7 е црвена. Ако 8 е црвена, бараната отсечка е со крајни точки во 6 и 8, па да претпоставиме дека 8 е плава. Ако 2 е плава, бараната отсечка е со крајни точки во 2 и 8. Нека 2 е црвена. Конечно, ако 1 е црвена, бараната отсечка е со крајни точки во 1 и 3, а ако 1 е плава, бараната отсечка е со крајни точки во 1 и 9.

Да ја разгледаме и можноста кога не постојат две соседни точки обоени во иста боја. Тогаш, сите точки кои претставуваат парен број се обоени во една боја, а сите точки кои претставуваат непарен број се обоени во другата боја. Во овој случај, еден пример на бараната отсечка е отсечката со крајни точки во -2 и 2.

3. Дали е можно во рамнината да се обележат 10 црвени, 10 сини и 10 зелени точки (сите различни) така што се исполнети условите:

- За секоја црвена точка A постои сина точка која е поблиска до точката A од било која зелена точка,
- За секоја сина точка B постои зелена точка која е поблиска до точката B од било која црвена точка, и
- За секоја зелена точка C постои црвена точка која е поблиска до точката C од било која сина точка.

Решение. Нека претпоставиме дека бараното обележување на точки е можно. Меѓу сите парови различно обоени точки да избереме еден од оние со најмало растојание меѓу точките. Нека се тоа црвена точка C и сина точка S. Тогаш од условот на задачата постои зелена точка Z таква што $\overline{SZ} < \overline{SC}$, што е противречност. Од добиената противречност следува дека во рамнината не може да се обележа 10 црвени, 10 сини и 10 зелени точки такви што се исполнети бараните услови.

4. Во рамнината се означени 15 точки. Некои точки се обоени црвено, некои сино, а останатите точки се обоени зелено. Познато е дека бројот на црвените точки е поголем и од бројот на сините и од бројот на зелените точки. Збирот на должините на сите отсечки чија една крајна точка е црвена, а другата крајна точка е зелена е еднаков на 31. Збирот на должините на сите отсечки чија една крајна точка е зелена, а другата крајна точка е сина е еднаков на 25. Збирот на должините на сите отсечки чија една крајна точка е сина, а другата крајна точка е црвена е еднаков на 5.

Определи по колку точки се обоени во секоја од боите црвена, сина и зелена.

Решение. Нека е c, s, z бројот на црвените, сините и зелените точки, соодветно. Според условот на задачата важи $c+s+z=15$, $c>s$ и $c>z$. Нека C, S и Z се црвена, сина и зелена точка, соодветно. Тогаш од неравенството на триаголник имаме $\overline{CS}+\overline{SZ}\geq\overline{CZ}$. Ако овие неравенства ги собереме за сите црвени, сини и зелени точки добиваме $5z+25c\geq 31s$. Аналогно наоѓаме $31s+5z\geq 25c$ и $25c+31s\geq 5z$.

Ако во првото неравенство замениме $c=15-s-z$ добиваме $375\geq 20z+56s$. Според тоа, важи $375\geq 56s$, т.е. $s\leq 6$. Ако замениме $z=15-s-c$ во второто неравенство добиваме $75+26s\geq 30c$ и како $s\leq 6$ заклучуваме $75+156\geq 30c$, т.е. $c\leq 7$. Ако замениме $z=15-s-c$ во првото неравенство добиваме $75+20c\geq 36s$ и како $c\leq 7$ заклучуваме дека $75+140\geq 36s$, т.е. $s\leq 5$. Сега следува $c\leq 6$.

Понатаму, $z=15-s-c\geq 15-5-6=4$. Бидејќи

$$6\geq c>s,\ 6\geq c>z\geq 4 \text{ и } c+s+z=15$$

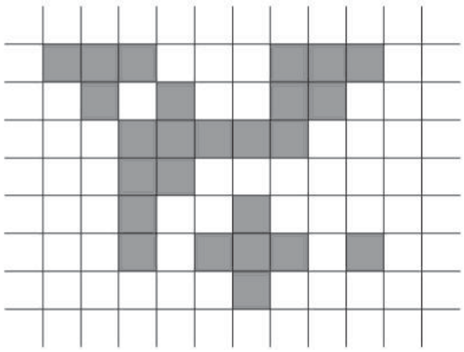
заклучуваме дека мора да важи $c=6, s=5, z=4$ или $c=6, s=4, z=5$. Сите три неравенства кои ги добивме за c, s и z ги задоволува само тројката $c=6,\ s=5,$ $z=4$ и тоа е единствено решение на задачата.

5. Дадена е табла со димензии 1000×1000. Дали може на таблата да се обојат точно 125 полиња така што секое од обоените полиња има непарен број обоени соседи? За две полиња сметаме дека се соседни ако имаат заедничка страна.

Решение. Бидејќи секое поле има најмногу 4 соседни полиња, бројот на обоени соседни полиња може да биде 0, 1, 2, 3 или 4. Со n_k да го означиме бројот на полињата со k обоени соседни полиња. Нека N е вкупниот број заеднички страни меѓу две соседни обоени полиња. Бидејќи секоја заедничка страна се брои двапати добиваме дека

$$2N=n_1+2n_2+3n_3+4n_4, \text{ односно}$$

$$N=\tfrac{1}{2}(n_1+n_3)+n_2+n_3+2n_4.$$



Според тоа, бројот n_1+n_3 мора да биде парен број. Затоа не е можно да се обојат 125 полиња така што секое од нив да има непарен број обоени соседни полиња, т.е. едно или три, бидејќи тогаш $n_1+n_3=125$.

6. Дали е можно од 5×5 квадрат да бидат избрани 16 единечни квадратчиња така, што при нивно боење секој 2×2 квадрат од дадениот квадрат ќе содржи не повеќе од две обоени единечни квадратчиња?

Решение. Одговорот е негативен. Нека го претпоставиме спротивното и да го разгледаме горниот лев 4×4 квадрат од дадениот квадрат. Тој може да се подели на четири 2×2 квадрати кои не се сечат и согласно претпоставката во секој од нив ќе има најмногу по 2 обоени единечни квадратчиња. Значи, бројот на обоени единечни квадратчиња во 4×4 квадратот не е поголем од 8. Во останатиот дел од почетниот квадрат, кој содржо 9 единечни квадратчиња (тоа е аголниот дел, составен од најдолниот ред и најдесната колона), има не помалку од 8 обоени единечни квадратчиња. Има точно 8, бидејќи ако се 9, тогаш сите единечни квадратчиња во тој дел ќе бидат обоени и тогаш долниот десен 2×2 квадрат ќе содржи 3 обоени единечни квадратчиња, што не е можно. Притоа трите единечни квадратчиња од аголниот дел, кои припаѓаат на долниот десен 2×2 квадрат, не се истовремено обоени. Оттука следува, дека првите три единечни квадратчиња одлево надесно во најдолниот ред, како и првите три единечни квадратчиња одгоре надолу в најдесната колона, се обоени. Сега да ги разгледаме обележените со ѕвездички единечни квадратчиња на цртежот. Може да се тврди, дека ниту едно од нив не е обоено. За долното најдесно квадратче тоа е јасно, бидејќи тоа се содржи во долниот десен 2×2 квадрат, кој веќе има две обоени единечни квадратчиња. Останатите учествуваат во 2×2 квадрати исто со по две обоени единечни квадратчиња. Заклучуваме, дека во горниот лев 4×4 квадрат има точно 8 обоени единични квадратчиња и тие се наоѓаат во горниот лев 3×3 квадрат. Сега е очигледно, дека во секој 2×2 квадрат од 3×3 квадратот има барем три обоени единечни квадратчиња и одново добиваме противречност.

			*	
			*	
			*	
*	*	*	*	

7. Квадрат со димензии $n\times n, n\geq 2$ е поделен на n^2 единечни квадратчиња. Секое единечно квадратче е обоено во бела или црна боја така што за секој правоаголник (со најмалку 4 квадратчиња) во квадратот барем две од единечните квадратчиња во четирите негови агли се разнобојни. Определи ја најголемата можна вредност на n .

Решение. Ќе докажеме дека бараната вредност е 4.

Нека (i, j) е единечното квадратче кое се наоѓа во $i-$тиот ред и $j-$тата колона на 4×4 квадрат. Лесно се проверува дека ако квадратчињата $(1,1)$, $(1,2), (2,1), (2,3), (3,2), (3,4), (4,2), (4,4)$ ги обоиме во црна, а останатите во бела боја, тогаш условот на задачата е исполнет.

За да докажеме дека кога $n\geq5$ немаме соодветно боење, доволно е да го разгледаме случајот $n=5$. Да разгледаме произволно боење на квадрат 5×5. Барем 13 од единечните квадратчиња се еднобојни, на пример црни. Можни се следниве три случаи.

1) Еден ред содржи само црни квадратчиња. Тогаш меѓу останатите редови има барем еден со најмалку 2 црни квадратчиња. Сега, доволно е да го разгледаме правоаголникот за кој тие квадратчиња се во два негови агли, а другите два агли се единечните квадратчиња во редот со 5 црни квадратчиња.
2) Во еден од редовите има 4 црни квадратчиња. Тогаш меѓу останатите редови има барем еден со најмалку 3 црни квадратчиња. Тогаш барем 3 од

нив не соодветствуваат на бело квадратче и со нивна помош можеме да образуваме правоаголник со 4 црни аголни квадратчиња.

3) Секој ред содржи најмногу 3 црни квадратчиња. Тогаш барем три реда содржат точно по 3 црни квадратчиња. Можеме да сметаме дека тоа се првиот, вториот и третиот ред броено одгоре-надолу. Една колона ќе ја наречеме *црна*, ако најгормото нејзино квдратче е црно. Во спротивен случај ќе велиме дека колоната е *бела*. Имаме 3 црни колони. Ако во вториот или третиот ред 3 од црните квадратчиња се наоѓаат во црните колони тогаш очигледно имаме правоаголник со 4 црни агли. Во спротивно, 2 од црните квадратчиња од вториот и 2 од црните квадратчиња од третиот ред се наоѓаат во двете бели колони. Јасно, точно тие 4 црни квадратчиња формираат правоаголник со 4 црни агли.

8. Нека $n \geq 3$ е непарен природен број. Шаховска $n \times n$ табла е стандардно обоена, т.е. долното лево поле е црно. Во еден чекор се избира произволен правоаголник составен од цели единечни полиња на таблата и се менуваат боите на сите полиња од тој правоаголник (црните полиња во бели, белите во црни). Определи го минималниот број чекори со чија реализација таблата може да стане

а) бела б) црна

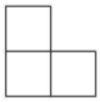
Решение. Да разгледаме произволни две полиња со заедничка страна. Бидејќи на почетокот овие полиња се различно обоени, а на крајот се обоени со иста боја, заклучуваме дека при некој чекор нивната заедничка страна треба да биде дел од границата на соодветниот правоаголник од тој чекор (зошто?).

Има $4(n-1)$ полиња кои граничат со работ на таблата и тие меѓу себе имаат $4(n-1)$ заеднички страни. Лесно се гледа дека границата на секој правоаголник со страни паралелни на страните на таблата може да содржи најмноги четири од тие заеднички страни (по две од крајните редови или по две од крајните колони). Според тоа, потребни ни се барем $\frac{4(n-1)}{4} = n-1$ чекори.

Таблата може да стане еднобојна со следните $n-1$ чекори: последователно ги пребојуваме $2,4,...,(n-1)-$от ред, а потоа $2,4,...,(n-1)-$та колона. Во тој момент сите полиња се обоени со почетната боја на аголните полиња. Сега со еден чекор на целата табла ја добиваме другата боја.

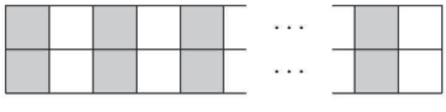
Според тоа, за да ја пребоиме таблата во црна боја ни се потребни $n-1$ чекори (на почетокот аголните полиња се црни) и за бела боја потребни ни се n чекори.

9. На колку начини во две бои може да се обојат полињата на табла со димензии 2×2016 така што да не постојат три еднобојни полиња кои истовремено може да се покријат со тетрамино од обликот прикажан на цртежот десно? Тетраминото може да се ротира.



Решение. Ако во првата колона двете полиња се бели, тогаш во втората колона ниту едно поле не смее да биде бело. Значи, во втората колона двете полиња се црни. На иста начин заклучуваме дека во третата колона двете полиња се бели итн. Ова е едно добро боење.

Аналогно, ако во првата колона двете полиња се црни, добиваме уште едно добро боење.



Ако во првата колона полињата се различно обоени, тогаш во втората колона не може да има две полиња обоени во иста боја. Значи, во втората колона полињата исто така мора да се различно обоени. Притоа имаме две допуштени можности (црното поле е во првиот или вториот ред). Истиот заклучок важи за сите останати полиња, т.е. за секоја колона имаме по 2 можности. Според тоа, бидејќи имаме 2016 колони во овој случај вкупниот број боења е еднаков на 2^{2016}.

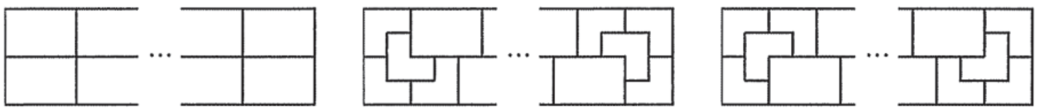
Конечно, вкупниот број на добри боења е еднаков на $2+2^{2016}$.

10. Фигурата добиена од квадрат со димензии 2×2 со отстранување на една негова клетка ја нарекуваме триклеточен агол. Дали е можно единечните клетки на табла со димензии 3000×3000 да бидат обоени во црна и бела боја, но така што како и да се ресече таблата на 3000000 триклеточни агли, секој од нив да содржи точно по една црна клетка?

Решение. Нека претпоставиме дека такво боење постои. Тоа треба да содржи точно 3000000 црни единечни клетки.

Даја расечеме таблата на 1500^2 квадрати со димензии 2×2. Нека претпоставиме дека секој од тие квадрати, кој не граничи со работ на таблата, содржи најмногу една црна клетка. Тогаш вкупно имаме $1498^2+4\cdot 1499\cdot 4<3000000$, што е противречност.

Да разгледаме еден внатрешен квадрат s, кој содржи барем две црни клетки. Нека S е правоаголник со димензии 4×3000, составен од квадратот s, сите други 2×2 квадрати во истите два реда и сите 2×2 квадрати во следните два реда. Делот од таблата кој лежи надвор од S можеме да го расечеме на правоаголници со димензии 2×3, па според тоа и на триклеточни агли. Од друга страна, правоаголникот S, можеме да го расечеме на триклеточни агли и правоаголници 2×3 на следниве три начини:



Лесно се гледа, дека барем едно од овие три рассекувања може да се доврши на таков начин што две црни клетки од s ќе бидат во еден ист триклеточен агол, што е противречност.

Од досега изнесеното следува дека бараното боење на таблата не е можно.

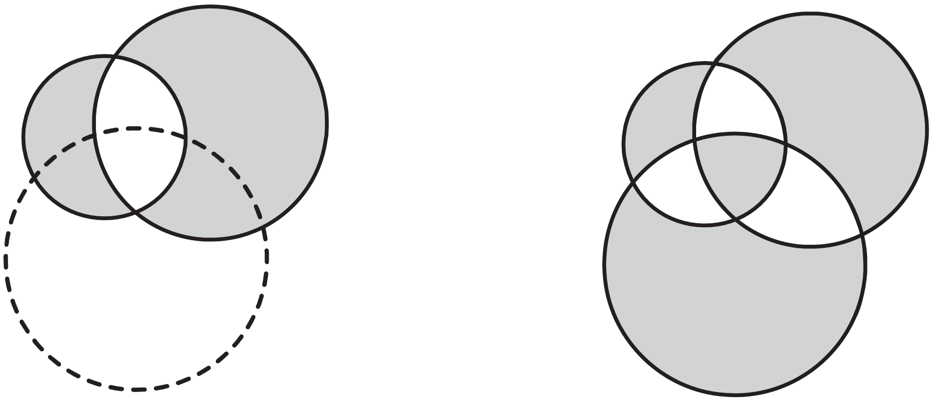
11. Докажи дека n кружници, кои лежат во иста рамнина, ја разбиваат таа рамнина на области, кои може да се обојат бело и црно, но така што кои било две соседни области (оние што имаат заеднички граници) да бидат обоени со различни бои.

Решение. Тврдењето ќе го докажеме со математичка индукција по n.

Очигледно тврдењето е точно за $n=1$, т.е. кога во рамнината M има само една кружница. Тогаш внатрешната област на кружницата може да се обои црно а надворешната област бело.

Да претпоставиме дека тврдењето е точно за n, т.е. кога n кружници ја разбиваат рамнината M на области, од кои соседните се обоени со различни бои. Да ја повлечеме $(n+1)$ - та кружница означена со k (цртеж a - со испрекината линија). Кружницата k ја дели рамнината M на две области: внатрешна M_1 и надворешна M_2. Во M_1 ќе извршиме пребојување на областите, а во M_2 секоја област ќе остане обоена како порано (цртеж b). Да разгледаме, сега две произволни соседни области N_1 и N_2. Тие може да се наоѓаат на различни страни од кружницата k, т.е. една на областа M_1 а друга на областа M_2, но може да бидат и од една страна на кружницата k, т.е. да се наоѓаат обете во областа M_1 или обете во областа M_2.

Во првиот случај областите N_1 и N_2, до повлекувањето на кружницата k беа



$a)$ $b)$

составен дел на една област, па затоа имаа и еднакви бои. По повлекувањето на кружницата k оној дел (N_1 или N_2) кој е во областа M_1- во внатрешноста на l, се пребојува, а оној дел (N_1 или N_2) кој е во областа M_2, ја задржува поранешната боја. На таков начин, областите N_1 и N_2 во овој случај се обоени, со различни бои.

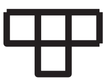
Во вториот случај областите N_1 и N_2 се или обете во M_1- тогаш секоја од нив се пребојува, или обете се наоѓаат во M_2- тогаш секој од нив ја задржува поранешната боја. Значи, и во овој случај областите N_1 и N_2 се различно обоени.

На таков начин, добиваме дека тврдењето е точно и за $n+1$. Следствено, тоа е точно за секој природен број n.

12. Дадена е квадратна шема со димензии 10×10.

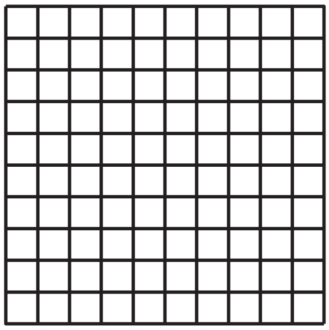
а) Дали квадратната шема може да се препокрие со со правоаголни плочки со димензии 1×4.

б) Може ли квадратната шема да се препокрие со 25 плочки кои не се преклопуваат а се од облик како на цртежот десно.

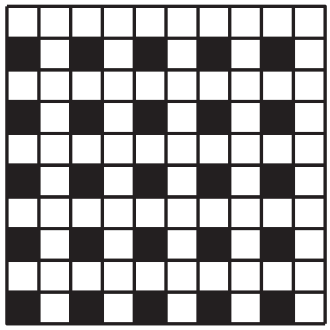


Решение. а) Квадратната шема од цртежот 1 ќе ја обоиме како на цртежот 2. Правоаголна плочка со димензии 1×4 како и да ја поставиме а таа да препокрива четири квадрати од шемата, таа ќе покрива 0 или 2 црни полиња. Според тоа 25 квадратни плочки ќе препокријат парен број црни полиња. Но бројот на црните полоиња е 25, т.е. непарен број. Според тоа, такво ппокривање не е можно.

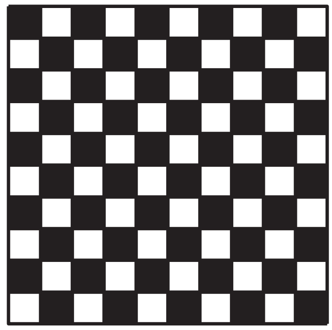
б) Нека квадратната шема е обоена на стандарден начин, како што е прикажано на цртежот 3. Секоја плочка од дадениот облик кога ќе ја поставиме а таа да покрива четири полиња, таа ќе препокрие едно или три црни полиња. Според тоа



цртеж 1



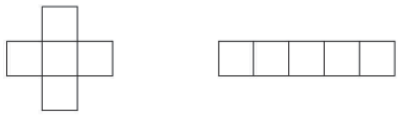
цртеж 2



цртеж 3

25 такви плочки ќе покријат непарен број на црти полиња. Но бројот на црните полиња во овој случај е 50. Значи, такво препокривање не е можно.

13. Дадена е табла со 2016 редови и 2017 колони. Дали е можно во последната колона на оваа табла да се отстранат две полиња така што преостанатиот дел од таблата без преклопување може да се покрие со фигурите прикажани на цртежот десно? Дозволено е фигурите да се ротираат.



Решение. Не. Во полињата на почетната 2016×2017 табла во секој ред да ги запишеме во растечки редослед броевите од 1 до 2017. Отстранувајќи две полиња од последната колона отстрануваме два броја: 2017 и 2017. Било која фигура покрива пет броја чиј збир е делив со 5. Крстот ги покрива броевите $n-1, n, n+1, n, n$ чиј збир е делив со 5, а правоаголникот покрива пет исти или пет последователни броеви чиј збир е делив со 5. Почетниот збир е $\frac{2017\cdot2018}{2}\cdot2016=2017\cdot2018\cdot1008$, па затоа збирот на броевите кои остануваат е

$$2017\cdot2018\cdot1008-2\cdot2017=2017\cdot(2018\cdot1008-2)$$

и овој број завршува на цифрата 4, што значи дека не е делив со 5.

14. Дадена е шаховска табла со димензии 300×300. Ќе велиме дека едно нејзино покривање со плочки со димензии 1×3 е добро, ако не постојат две плочки кои ја формираат буквата T, во било која нејзина положба.

Определи го бројот на добрите покривања на таблата.

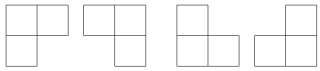
Решение. Поставуваме координатен систем така што долната лева клетка има координати $(1,1)$, а горната десна клетка координати $(300,300)$.

Нека клетката $(1,1)$ е покриена со вертикална плочка. Нека претпоставиме дека $(2,1)$ е покриена со хоризонтална плочка. За да избегнеме формирање на буквата T, $(2,2)$ треба да биде покриена со вертикална плочна, $(3,2)$ - со хоризонтална итн. Продолжувајќи ја постапката ќе стигнеме до десниот или горниот раб на таблата, после што буквата T сепак ќе биде покриена, што е противречност. Според тоа, $(2,1)$ исто така е покриена со вертикална плочка. Аналогно, $(3,1)$ е покриена со вертикална плочка итн, т.е. сите клетки $(i,1)$, $1\le i\le300$) се покриени со вертикални плочки. Пота, ако некоја клетка од видот $(i,4)$ е покриена со хоризонтална плочка, тогаш одново ја добиваме буквата T. Аналогно, сите клетки од видот $(i,7)$, сите клетки од видот $(i,10)$ итн. се покриени со веретикални плочки. Значи, сите плочки во покривањето се вертикални.

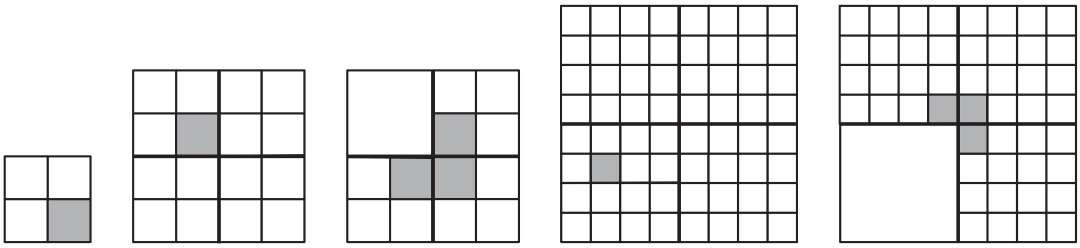
На ист начин, ако $(1,1)$ е покриена со хоризонтална плочка, тогашсите плочки во покривањето се хоризонтални.

Конечно, бројот на добриет покривања е еднаков на 2.

15. Од шаховска табла со димензии 8×8 отстрането е едно поле. Дали може остатокот од таблата да се препокрие со тримина од облик прикажан на цртежот десно.



Решение. Ако од квадратна шема со димензии 2×2 отстраниме една единечна клетка (види цртеж 1), тогаш едно од четирите тримина ќе го препокрие остатокот од квадратната шема. Јасно е дека со отстранувањето на едно квадратче од квадратната шема со димензии 2×2 од квадратната шема останува еден од облиците на тримината.



цртеж 1 цртеж 2 цртеж 3 цртеж 4 цртеж 5

Квадратна шема од облик 4×4 од која е отстрането едно единечно квадратче, ќе ја разделиме на четири квадратни шеми со димензии 2×2 (види цртеж 2). Отстранетото квадратче припаѓа точно од една од тие квадратни шеми со димензии 2×2. Таа квадратна шема се препокрива со едно тимино од дадените облици. Останатите три квадрати со димензии 2×2 кои се целосни имаат заедничко теме. Со едно од дадените тримина од дадените облици се препокрива по едно квадратче со димензија 1×1 од секоја од преостанатите квадратни шеми со димензии 2×2, (тие кои имаат заедничко теме, види цртеж 3).Останатите делови од тие три квадратни шеми со димензии 2×2 се препокрива со едно тримино од дадените облици.

Шаховската табла, т.е. квдратната шема со димензии 8×8 ќе ја поделиме на четири еднакви квадратни шеми со димензии 4×4 (види цртеж 4). Бидејќи од неа е отстрането едно квадратче со дименазија 1×1, тоа недостасува во една од квадратнтие шеми со димензии 4×4 на кои е разделена шаховската табла. Квадратната шема со димензии 4×4 од која е отстрането едно квадратче според претходниот дел од задачата се препокрива со тримина од дадените облици.Преостанатите три квадрати со димензии 4×4 од кои не е отстранет квадрат со димензии 1×1 имаат заедничко теме (види цртеж 5). Со едно тримино од дадениот облик ќе препокриеме по едно квадратче со димензии 1×1 од секој од квадратите со димензии 4×4 (тие кои имаат заедничко теме). Преостанатиот дел се состои од три квадратни шеми со димензија 4×4 и од секој од нив недостасува по едно квадратче со димензија 1×1. Според претходниот дел од задачата секоја таква квадратна шема може да се препокрие со тримина од дадениот облик.

Значи квадратот со димензии 8×8 од кој недостасува едно квадратче со димензија 1×1 може да се препокрие со тримина од дадениот облик.

16. Петар покрил шаховска табла со димензии 600×600 со правоаголници со димензии 2×3 така што секое единечно квадратче од таблата е покриено со точно еден правоаголник. Потоа тој ги расекол сите правоаголници на три помали правоаголници со димензии $1\times 1, 1\times 2, 1\times 3$ и му го покажал добиеното покривање на Никола. Дали може Никола според покривањето со помалите правоаголници еднозначно да го определи почетното покривање со правоаголниците 2×3?

Решение. Нека претпоставиме дека постојат две покривања A и B со правоаголници 2×3, кои при соодветни расекувања доведуваат до едно исто покривање со помалите правоаголници. Тогаш постои правоаголник P_1 со димензии 1×3 таков што правоаголникот Q_1 со димензии 2×3, од кој P_1 е дел во A, е поставен различно од правоаголникот R_1 со димензии 2×3, од кој P_1 е дел во B. Без ограничување на општоста, можеме да земеме дека P_1 се содржи во $i-$тиот ред од таблата, Q_1 се содржи во $i-$тиот и $(i-1)-$ виот, а R_1 се содржи во $i-$тиот и $(i+1)-$виот ред од таблата.

Нека P_2 е правоаголникот 1×2, добиен од R_1 во B и нека Q_2 е правоаголникот 2×3 од кој P_2 е дел во A. Тогаш P_2 се содржи во $(i+1)-$виот ред на таблата и Q_2 се содржи во $(i+1)-$виот и $(i+2)-$риот ред на таблата.

Аналогно, нека P_3 е правоаголникот 1×3, добиен од Q_2 во A и нека R_2 е правоаголникот 2×3 од кој P_3 е дел во B. Тогаш P_3 се содржи во $(i+2)-$риот ред на таблата и Q_2 се содржи во $(i+2)-$риот и $(i+3)-$тиот ред на раблата.

Продолжувајќи ја постапката, ќе добиеме правоаголник P_n кој треба да лежи надвор од таблата, што е противречност.

Според тоа, меѓу сите покривања со правоаголници 2×3 само од почетното може да се добие покривањето со помали правоаголници, кое Петар му го покажал на Никола. Значи, Никола може еднозначно да го определи почетното покривање, за што е доволно да да ги провери сите можни почетни покривања и сите можни нивни расекувања.

17. За дадено множество S од 2014 точки во рамнината нека l е најмалиот природен број за кој постојат l прави такви што секоја точка од S лежи на некоја од тие прави. Нека c е најмалиот природен број за кој постојат c кружници такви што секоја точка од S лежи на некоја од тие кружници. Дали постои множество S за кое

а) $l=15$ и $c=67$, б) $l=19$ и $c=53$.

Решение. а) Да разгледаме едно покривање на S со c кружници. Тогаш на кружницата со најмногу точки од S има барем $\frac{2014}{c}$ точки и за да ги покриеме овие точки со прави, потребни ни се најмалку $\frac{2014}{2c}=\frac{1007}{c}$ прави (секоја права покрива најмногу две од точките). Според тоа, треба да важи $l\geq\frac{1007}{c}$, односно

$cl \ge 1007$. Но, $15 \cdot 67 = 1005 < 1007$, па затоа не постои множество S за кое $l = 15$ и $c = 67$.

б) Да разгледаме 19 паралелни прави и 53 кружници, секоја од кои ја сече секоја од деветнаесетте прави во по две различни точки и не постојат две кружници кои се сечат на правите. Добиваме множество од вкупно $19 \cdot 53 \cdot 2 = 2014$ точки, за кои ќе докажеме дека го има саканото својство.

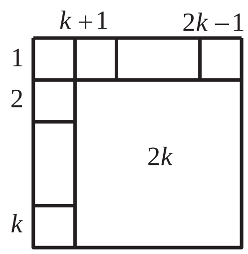
Нека претпоставиме дека $c < 53$. Тогаш ќе постои кружница на која лежат повеќе од 38 точки и некоја од деветнаесетте паралелни прави треба таа кружница да ја сече во најмалку три точки, противречност. Аналогно, ако претпоставиме дека $l < 19$, тогаш постои права која содржи повеќе од 111 точки, па затоа некоја од педесет и трите кружници треба оваа права да ја сече во најмалку три точки, што повторно е противречност.

18. Дали е можно квадрат да се раздели на 1987 квадрати?

Решение. Секој квадрат може да се раздели на четири квадрати, со што бројот на квадрати се зголемува за три. Со секое ново разделување на квадратите на четири дела, вкупниот број на квадрати се зголемува за трикратна вредност на некој природен број. Бидејќи $1987 = 3 \cdot 662 + 1$ заклучуваме дека дадениот квадрат, со ваков начин може да се раздели на 1987 квадрати.

19. Докажи дека секој квадрат може да се расече на n, $(n \ge 6)$ квадрати, кои не мора да се складни.

Решение. Нека должината на страната на квадратот е a. Ако $n = 2k$, ($k \ge 3$), постапуваме како на цртежот десно, при што страната на малиот квадрат е $\frac{a}{k}$. Ако $n = 2k+1$, ($k \ge 3$), тогаш квадратот најпрво го делиме на $2k-2$ делови како во првиот случај, а потоа еден од квадратите го делиме на четири складни квадрати и вкупно добиваме

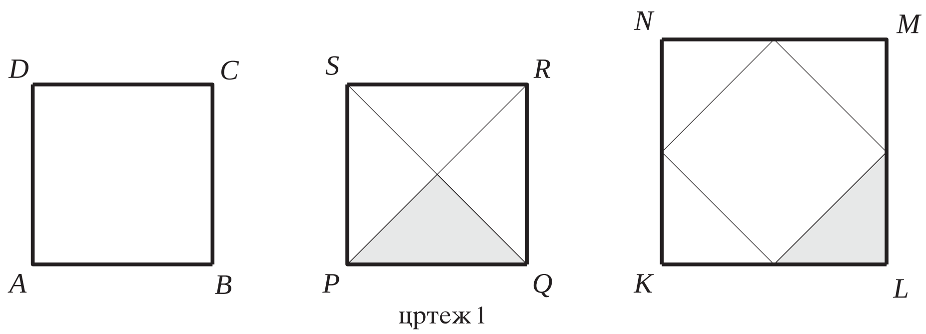


$$2k - 2 + 3 = 2k + 1 = n \text{ квадрати.}$$

Забелешка. Претходната задача е непосредна последица на оваа задача.

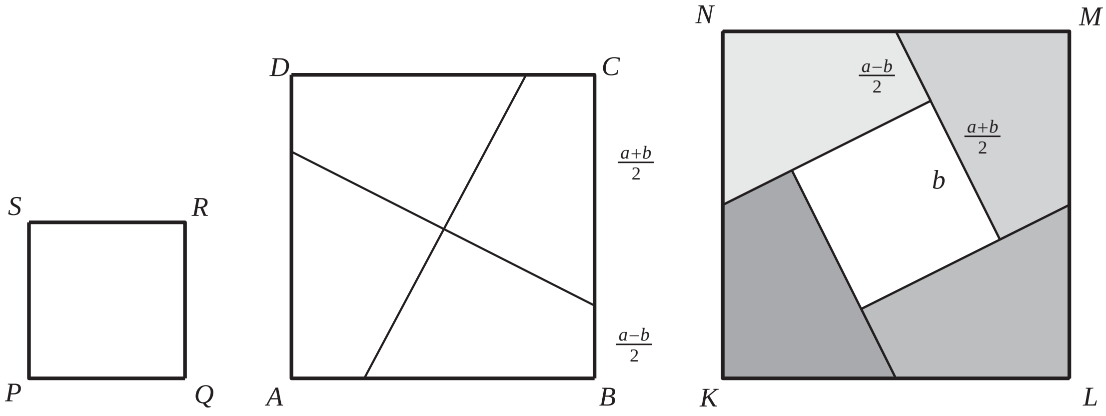
20. Дали е можно 1988 квадрати да се расечат на делови од кои може да се состави еден квадрат?

Решение. Одговорот е да. За доказ на тоа тврдење, доволно е да се докаже дека два квадрати може да се исечат на делови од кои може да се состави еден квадрат.



цртеж 1

Потоа, со математичка индукција, се покажува дека за секој природен број n (па и за $n = 1988$), n квадрати може да се исечат на делови од кои може да се состави еден квадрат.



цртеж 2

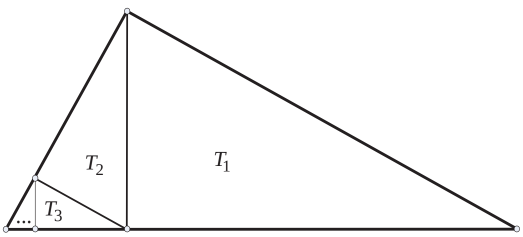
Нека $ABCD$ и $PQRS$ се два квадрати со страни a и b соодветно. Расекувањето и составувањто е прикажано на цртеж 1 за $a = b$, и на цртеж 2 за $a > b$.

21. Даден е правоаголен триаголник T. Дали е можно тој да се раздели на 2008 триаголници кои ги исполнуваат условите:

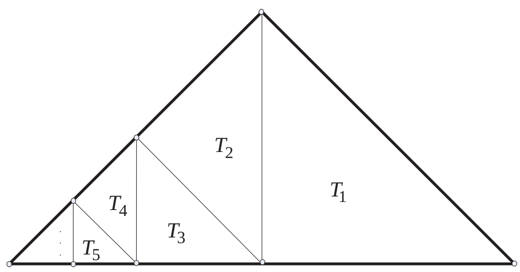
а) Секој од делбените триаголници е сличен на триаголникот T.

б) Не постојат два триаголници од делбените кои се складни.

Решение. Ќе разгледаме два случаи, и тоа кога T е рамнокрак и кога T не е рамнокрак.



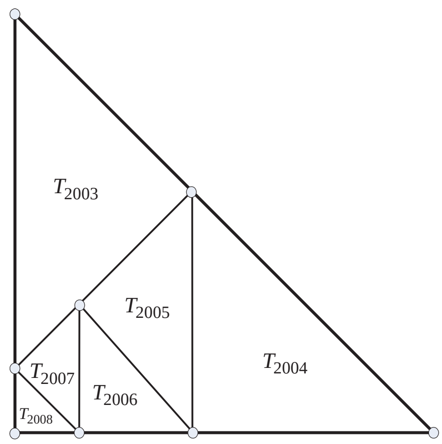
цртеж 1



цртеж 2

а) Нека T е правоаголен триаголник кој не е рамнокрак. Од темето на правиот агол ќе спуштиме висина на хипотенузата. Двата делбени триаголници се правоаголни и се слични со дадениот и не се еднакви меѓу себе. Поголемиот по плоштина ќе го означиме со T_1.

За помалиот од добиените триаголници ќе ја повториме постапката како и за триаголникот T. По повторување на оваа постапка 2007 пати, т.е. спуштање на висина 2007 пати ќе добиеме 2008 правоаголни триаголници кои се слични на дадениот и било кои два не се складни (цртеж 1).



цртеж 3

б) Во вториот случај т.е. кога триаголникот е рамнокрак правоаголен постапката од делот под а) ќе ја повториме 2002, при што ќе добиеме 2003 триаголници кои се слични со почетниот, а не се складни помеѓу себе, освен последните два кои се складни. При тоа 2003-тиот триаголник кој е складен со 2002-риот ќе го поделиме како на цртежот 3. Односот на страните на триаголниците е: $1:\sqrt{2}:2:2\sqrt{2}:4:3\sqrt{2}$.

6. РАСПОРЕДУВАЊА

1. Во низа се запишани броевите од 1 до 9 така што збирот на секој број на непарна позиција со неговите соседи (сосед) е еднаков на S. Определи ги сите можни вредности на S.

Решение. Ако редоследот на запишаните броеви е a,b,c,d,e,f,g,h,i, тогаш од условот следува дека $5S=45+b+d+f+h$. Бидејќи $10\le b+d+f+h\le 30$, добиваме дека S е еден од броевите 11, 12, 13, 14, 15. Од друга страна,

$$3S=a+b+d+e+f+h+i=45-(c+g),$$

од каде следува дека $S\neq 15$.

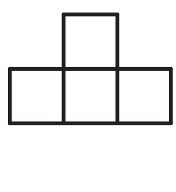
Лесно се гледа дека при подредувањето 925461738 важи $S=11$, при подредувањето 941832567 важи $S=13$ и при подредувањето 592347168 важи $S=14$.

Да претпоставиме дека $S=12$. Тогаш $c+g=9$. Ако низата a,b,c,d,e,f,g,h,i ја запишеме вообратен редослед, таа го има истото својство, па затоа без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $c<g$. Ќе ги разгледаме сите можности.

1) Ако $c=1,g=8$, тогаш $f+h=4$, што не е можно.
2) Ако $c=2,g=7$, тогаш $f+h=5$, т.е. $\{f,h\}=\{1,4\}$. Ако $h=1$, тогаш $i=11$, што не е можно. Ако $f=1,h=4$, тогаш $i=8$, $b+d=10$, што не е можно, бидејќи веќе е искористен по еден број од сите можни парови броеви чиј збир е 10.
3) Ако $c=3,g=6$, тогаш $f+h=6$, т.е. $\{f,h\}=\{1,5\}$ или $\{2,4\}$. Ако $h\le 2$, тогаш $i\ge 10$, што е противречност. Ако $f=1,h=5$, тогаш $i=7$, $b+d=9$, што не е можно, бидејќи веќе е искористен по еден број од сите можни парови броеви чиј збир е 9. Ако $f=2,h=4$, тогаш $i=8,b+d=9$, што не е можно, бидејќи веќе е искористен по еден број од сите можни парови броеви чиј збир е 9.
4) Ако $c=4,g=5$, тогаш $f+h=7$, т.е. $\{f,h\}=\{1,6\}$. Ако $h=1$, тогаш $i=11$ што не е можно. Ако $h=6$, тогаш $i=6$, што повторно епротивречност.

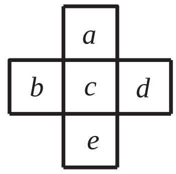
Конечно, бараните вредности се $S=11,S=13$ и $S=14$.

2. Дали може природните броеви од 1 до 100 да се запишат во квадратна шема 10×10, секој број во едно квадратче, секој од броевите да се јавува само еднаш и збирот на броевите во секоја од фигурите како на цртежот (или истата ротирана) да биде парен



број?

Решение. Ги разгледуваме броевите кои се внесени во фигурата во облик на крст (дадена на цртежот). Од условот на задачата $a+b+c+d=2m$ и $b+c+d+e=2n$. Добиваме дека $a-e=2(m-n)$ од каде мора a и e да се со иста парност. Аналогно добиваме дека b и d се со иста парност. Исто така од $a+b+c+d=2m$ и од тоа што b и d се со иста парност добиваме дека $a+b$ е парен па и a и b се со иста парност. Исто така од $c=2m-a-b-d$ е со иста парност како и другите броеви. Добиваме дека секој од броевите на сликата е со иста парност. Квадратната шема ке биде пополнета со броеви кои што се со иста парност (освен можеби броевите кои се наоѓаат на неговите краеви). Такви се вкупно 4 па како и да се пополнат тие 4 полиња за остатокот од шемата потребни се 96 парни или непарни броеви. Меѓутоа броевите од 1 до 100 се вкупно 50 парни и 50 непарни.



3. Во секое поле на табела со димензии $n \times n$ е запишан еден од броевите $-1, 0$ или 1. Дали може збировите на запишаните броеви по редици и колони да бидат различни $2n$ броеви, ако

а) $n=4$, б) $n=5$.

Решение. а) Да, на пример, тоа може да се постигне со следнава табела

1	0	1	1
1	–1	–1	–1
1	–1	1	0
1	–1	1	–1

б) Не. Имаме 11 можности за $10-$те збирови: $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5$. Со a_i да го означиме збирот на броевите во $i-$от ред, а со b_j збирот на броевите во $j-$тата колона. Очигледно

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=b_1+b_2+b_3+b_4+b_5,$$

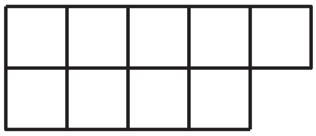
што значи дека бројот на непарните броеви a_i и бројот на непарните броеви b_j имаат иста парност. Според тоа, сите непарни збирови мора да се реализираат.

Без ограничување на општоста можеме да сметаме дека $b_1=5$. Тогаш ниту еден a_i не може да биде еднаков на -5, па затоа можеме да земеме дека $b_2=-5$. Од можните збирови 4 и -4 треба да се реализира барем еден и нека тоа е 4 (во спротивно доволно е да ги замениме знаците на запишаните броеви во табелата). Тој се реализира само ако во една колона има 4 единици и 1 нула. Нека $b_3=4$ и нулата е во последната редица. Според тоа, $a_i \neq -3$ за секој i и можеме да сметаме дека $b_4=-3$. Тогаш во третата колона има најмалку три броја -1.

Ако тие се во првите четири редици, можеме да сметаме дека се во првите три редици и добиваме дека a_1, a_2 и a_3 е пермутација на броевите $-1, 0$ и 1. Според тоа, $b_5 \neq 3$ и бидејќи $a_5 \neq 3$, добиваме дека $a_4=3$, т.е. во двете последни полиња на четвртата редица се запишани единици. Бидејќи $b_4=-3$, заклучуваме дека бројот во последното поле на четвртата колона е -1. Сега за секоја вредност на бројот во петтата редица и петтата колона добиваме противречност.

Останува да го разгледаме случајот кога во првите четири редици на четвртата колона има најмногу два броја -1. Можеме да сметаме дека броевите во четвртата колона се последователно $-1,-1,0,0,-1$. Бидејќи збировите на првите четири броеви по редици се $0,0,1,1$ и -1, заклучуваме дека ниту еден од збировите не може да биде еднаков на 3, па затоа $b_5 = 3$. Последното е можно само кога во петтата колона се запишани броевите $1,0,1,0,1$ и тогаш $a_1 = a_4 = 1$, што е противречност.

4. Броевите од 1 до 9 размести ги во табелата дадена на цртежот, така што збирот на броевите во секој столб да биде за еден помал од збирот на броевите во претходната колона.



Решение. Ако со x го означиме бројот во последната колона (самото квадратче) тогаш условот на задачата го запишуваме во видот

$$x + x+1 + x+2 + x+3 + x+5 = 1+2+3+...+9$$

од каде што $x = 7$.

Значи, во последната колона стои бројот 7, а збирот на броевите во првата колона е 11, во втората 10, во третата 9 а во четвртата 8. Имајќи го ова предвид, ги добиваме следните можности:

- во четвртата колона: 2 и 6 или 3 и 5;
- во третата колона: 8 и 1 или 6 и 3 или 5 и 4;
- во втората колона: 9 и 1 или 8 и 2 или 6 и 4;
- во првата колона: 9 и 2 или 8 и 3 или 6 и 5.

Ако во четвртата колона ги поставиме броевите 2 и 6, тогаш во третата колона ќе бидат броевите 5 и 4, во втората 9 и 1, а во првата броевите 8 и 3. Така го добиваме пополнувањето на табелата како на цртеж 1.

На сличен начин, ако во втората колона ги поставиме броевите 3 и 5 добиваме уште едно решение, прикажано како на пополнетата табела на цртеж 2.

8	9	5	2	7
3	1	4	6	

цртеж 1

9	6	8	3	7
2	4	1	5	

цртеж 2

Значи, добиваме две решенија. Но со промена на местото на броевите во секоја колона можеме да добиеме уште по 15 варијанти на секое решение, т.е. постојат вкупно 32 начина на разместување на броевите од 1 до 9 во дадената табела, што ги исполнуваат условите на задачата.

5. Дадена е квадратна шема со димензии 6×6 (составена од 36 единечни квадрати). Во неа се запишани броевите од 1 до 36, секој број во еден квадрат. За секоја колона и секоја редица посебно е пресметан збирот на броевите кои се наоѓаат во неа. Од дванаесетте добиени броеви издвоени се оние кои се деливи со четири. Дали постои распоред на броевите од 1 до 36 во кој збирот на оние броеви од 12-те добиени кои се деливи со четири да е еднаков на збирот на преостанатите, односно кои не се деливи со четири.

Решение. Нека во квадратната шема со димензии 6×6 се запишани броевите од 1 до 36 и нека се пресметани збировите на броевите кои се наоѓаат во секоја одделна редица и секоја одделна колона при што се добиени дванаесет броеви (збирови). Збирот на дванаесетте броеви е еднаков на

$$2\cdot(1+2+3+...+36)=2\cdot\tfrac{36\cdot 37}{2}=36\cdot 37\,.$$

Нека распоредот на броевите од 1 до 36 во квадратната шема е таков што е исполнет условот од задачата. Нека збирот на броевите, од дванаесетте добиени броеви, кои се деливи со 4 е еднаков на A. Тогаш и збирот на броевите кои не се деливи со 4 е еднаков на A. Значи збирот на дванаесетте броеви е еднаков на $2A$ и е еднаков на $36\cdot 37$ кој не е делив со 8. Бројот A е делив со 4, па според тоа бројот $2A$ е делив со 8, што е противречност.

Заради добиената контрадикција, таков распоред на броеви не е можен.

6. Во темињата на коцка се поставени различни броеви. Докажи дека барем еден од тие броеви е помал од аритметичката средина на трите соседни броеви. Колку најмногу од нив може да бидат поголеми од аритметичката средина на соседните три броја?

Решение. Бидејќи сите броеви се различни, меѓу нив постои најмал број. Тој број е помал од соседните три броја, па следствено и од нивната аритметичка средина.

Ако на долната основа на коцката ги распоредиме броевите 1, 11, 14, 10, а на горната основа над овие броеви ги ставиме соодветно броевите 9, 13, 15, 12, тогаш секој од броевите освен бројот 1, ќе биде поголем од аритметичката средина на своите три соседни броеви. (Провери!) Имајќи го предвид тврдењето во првиот дел на задачата, заклучуваме дека бараниот најголем број е 7.

7. Секое од темињата на една коцка нумерирано е со еден од броевите -1 и 1, а на секој ѕид е запишан производот на броевите со кои се означени темињата на тој ѕид. Дали збирот на така добиените 14 броеви може да биде еднаков на

а) 7, б) 0?

Решение. Ако сите темиња на коцката се нумерирани со единици, тогаш вкупнот збир е $14\cdot 1=14$. Ако се смени еден број на некое теме од коцката, тогаш се менуваат и производите запишани на ѕидовите на коцката, а вкупниот збир се менува за $+8,+4,0,-4,\text{или}-8$. Следува дека вкупниот збир е секогаш од облик $4n+2, n\in\mathbb{Z}$.

а) Вкупниот збир не може да биде 7, бидејќи $7=4\cdot 1+3$.

б) Вкупниот збир не може да биде 0, бидејќи $0=4\cdot 0$.

8. Во секое теме од една коцка е запишан еден број од множеството $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Збировите на броевите кои се наоѓаат во темињата на секоја страна на коцката се еднакви меѓу себе и не се деливи со бројот кој не е запишан во ниедно теме на коцката. Определи го бројот кој не е запишан во ниту едно теме на коцката.

Решение. *Прв начин.* Нека a е бројот кој не е запишан во ниту едно теме од коцката. Секој број што е запишан во едно теме од коцката учествува, т.е. припаѓа на три страни од коцката. Ако s е збирот на броевите кои што се запишани на една страна од коцката, тогаш

$$6s = 3(1+2+3+4+5+6+7+8+9) - 3a .$$

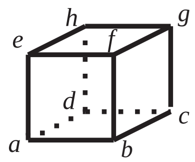
Според тоа $2s = 45 - a$. Од последната равенка, добиваме дека a е непарен број. Бидејќи бројот s не е делив со a, добиваме дека и бројот 45 не е делив со a. Единствен непарен број од множеството $\{1,3,5,7,9\}$ со кој не е делив бројот 45 е $a = 7$.

Значи, бројот кој што не е запишан во ниту едно теме на коцката е $a = 7$.

Втор начин. Нека во секое теме на коцката е запишан по еден број од броевите од множеството $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Нека

$a+b+c+d = m$, $a+b+e+f = m$, $a+d+e+h = m$,

$d+c+g+h = m$, $b+c+f+g = m$ и $e+f+g+h = m$.



Тогаш

$$3a+3b+3c+3d+3e+3f+3g+3h = 6m ,$$

т.е.

$$a+b+c+d+e+f+g+h = 2m .$$

Значи, изоставен е непарен број.

Според тоа ги имаме следните можности:

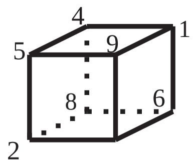
а) $2m = 36$, изоставен е бројот 9 и $m = 18$,

б) $2m = 38$, изоставен е бројот 7 и $m = 19$

в) $2m = 40$, изоставен е бројот 5 и $m = 20$

г) $2m = 42$, изоставен е бројот 3 и $m = 21$

д) $2m = 44$, изоставен е бројот 1 и $m = 22$



Случаите а), в), г) и д) не се можни, бидејќи во секој од тие случаи, изоставен е број кој е делител на соодветниот m. Единствен можен случај е б), т.е. изоставен е бројот 7 и $m = 19$. Еден таков распоред е даден на цртежот.

9. Во единечните квадратчиња на квадратна 5×5 шема се запишани броевите од 1 до 25, во секое квадратче по еден број. Секои два последователни броја се запишани во соседни квадратчиња (квадратчиња кои имаат заедничка страна).

Кој е најголемиот број на прости броеви кои можат да бидат запишани во една колона.

Решение. Во било кои две соседни квадратчиња се запишани броеви со различна парност.

Нека во некое квадратче е запишан бројот N, $N \geq 2$. Во две негови соседни квадратчиња се запишани броевите $N-1$ и $N+1$, кои се со различна парност од N. За да се дојде до запишување на броеви во останатите две соседни полиња од полето кое е запишан бројот треба да се направи запишување последователно на непарен број на броеви. Навистина, по запишувањето на бројот N, за да стасаме да запишеме број во негово соседно поле, колку броеви што ќе запишеме налево треба да запишеме надесно, колку броеви што ќе запишеме надесно треба да запишеме налево, колку броеви што ќе запишеме нагоре треба да запишеме надолу, колку броеви што ќе запишеме надолу толку броеви треба да запишеме нагоре плус еден број, во сите можни редоследи на чекори. Според тоа, запишаните броеви соседни на бројот N се со различна парност од него.

Сега е јасно дека во една колона не може да има помалку од два парни броеви. Бидејќи бројот 2 е прост број, па според тоа во една колона не може да има запишано повеќе од 4 прости броја.

Пример на такво пополнување, во кое ќе има запишано 4 прости броеви е дадено на цртежот.

17	18	19	20	21
16	15	14	13	22
9	10	11	12	23
8	1	2	3	24
7	6	5	4	25

10. Во секое поле од шаховската табла е запишан број. Збирот на броевите запишани на било кои четири полиња што формираат патека на коњ (во облик на буквата Г) е константен. Колку различни броеви се запишани на таблата?

Решение. Да разгледаме произволен 3×3 дел од таблата(види цртеж). Според

a_1	a_2	a_3
a_4	a_5	a_6
a_7	a_8	a_9

a	c	a
c	a	c
a	c	a

условот од задачата следува дека $a_1+a_4+a_5+a_6=a_4+a_5+a_6+a_3$, од каде што следува дека $a_1=a_3$. Слично се докажува дека $a_4=a_6$, $a_7=a_9=a_3=a_1$ и $a_2=a_8$.

Потоа, од $a_1+a_2+a_5+a_2=a_1+a_2+a_5+a_8=a_1+a_4+a_5+a_6=a_1+a_5+a_4+a_4$ следува дека $a_2=a_4$. Слично се покажува дека $a_1=a_3=a_5=a_7=a_9=a$ и $a_2=a_4=a_6=a_8=c$. Според тоа, броевите запишани на истобојни полиња(црни или бели) се еднакви. Нека на белите полиња е запишан бројот a, а на црните полиња е запишан бројот c. Ако $a=c$, тогаш одговорот е еден, а ако $a\neq c$, тогаш одговорот е два.

11. На секое поле на квадратна таблица 1999×1999 е запишан еден од броевите 1 или -1. Производот на броевите во $i-$тиот ред е a_i, а во $i-$тата колона е b_i $(i=1,2,\dots,1999)$. Докажи дека

$$\sum_{i=1}^{1999} a_i+\sum_{i=1}^{1999} b_i\neq 0.$$

Решение. Да го претпоставиме спротивното, т.е.

$$\sum_{i=1}^{1999} a_i+\sum_{i=1}^{1999} b_i=0. \tag{1}$$

Од тоа следува дека меѓу броевите (чиј вкупен број е $2\cdot1999=3998$) има точно 1999 броеви еднакви на +1, а другата половина од нив, т.е. 1999 се еднакви на -1. Тогаш производот

$$\prod_{i=1}^{1999} a_i\prod_{j=1}^{1999} b_j=-1. \tag{2}$$

Од друга страна, секој број од таблицата се јавува двапати како множител во производот (2) – како множител на a_i и како множител на b_j. Оттука следува дека производот (2) е еднаков на $+1$ (бидејќи $(+1)(+1)=1$ и $(-1)(-1)=+1$) т.е.

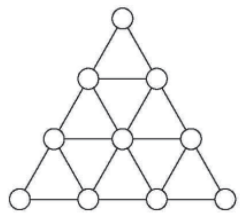
$$\prod_{i=1}^{1999} a_i \prod_{j=1}^{1999} b_j = +1. \qquad (3)$$

Добиената противречност во (2) и (3) ја исклучува можноста (1), т.е. тврдењето на задачата е точно.

12. Дали може 77 кутии со димензии $3\times3\times1$ да ги сместиме во сандак со димензии $7\times9\times11$?

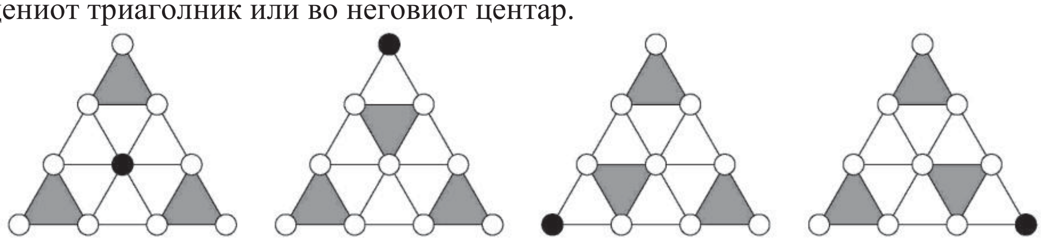
Решение. Бидејќи $77\cdot(3\cdot3\cdot1)=7\cdot9\cdot11$ следува дека волуменот на сите кутии е еднаков на волуменот на сандакот. Затоа мора секоја од страните (ѕидовите) на сандакот да ги содржи, без остаток, страните или комбинација на страните (ѕидовите) на кутиите. Плоштината на ѕидовите на кутиите е или 9 или 3 квадратни единици. Тоа, пак, значи дека плоштината на секој ѕид на сандакот мора да е делива со 3. Но плоштина од 77 квадратни единици на ѕидот со димензии 7×11 не е делива со 3, па затоа кутиите не можеме да ги сместиме во сандакот.

13. Броевите 1, 2, 3, ..., 10 се распоредини во крукчињата на цртежот десно, а потоа во секој од деветте мали триаголници е запишан збирот на броевите запишани во неговите темиња.



Докажи, дека меѓу броевите запишани во триаголниците постојат три броја чиј збир е поголем или еднаков на 48.

Решение. Можеме да избереме три триаголници така што збировите во нив го формираат збирот на броевите во девет различни кругчиња. „Неискористеното“ кругче, на долните цртежи обоено во црно, се наоѓа во едно од темињата на дадениот триаголник или во неговиот центар.



За определен распоред на броевите најголем збир ќе добиеме ако го изоставиме најмалиот од броевите во означените кругчиња и тогаш вкупниот збир на одбраните броеви, т.е. на броевите во трите одбрани триаголници е еднаков на $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10-m=55-m$, каде m е најмалиот од броевите во означените кругчиња. Овој број m може да биде најмногу 7 (ако во останатите означени полиња се 8, 9 и 10), па како збир во трите означени триаголници сигурно може да се добие збирот $55-7=48$ или поголем.

14. Дали може во темињата на петоаголна призма да се распоредат позитивни броеви, така што збирот на броевите во темињата во секоја од седумте негови страни да е еднаков.

Решение. Нека $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ е петоаголна призма во чии темиња се распоредени позитивните броеви $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}$ соодветно. Нека збирот на броевите во секоја нејзина страна е еднаков на S. Во петоаголникот $ABCDE$ збирот на броевите во неговите е

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = S \ , \qquad (1)$$

а збирот на броевите во темињата на петоаголникот $A_1B_1C_1D_1E_1$ е еднаков на

$$a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} = S . \qquad (2)$$

Од друга страна збирот на броевите во четириаголникот ABA_1B_1 е еднаков на

$$a_1 + a_2 + a_6 + a_7 = S , \qquad (3)$$

а збирот на броевите во темињата на четириаголникот CDC_1D_1 е еднаков на

$$a_3 + a_4 + a_8 + a_9 = S . \qquad (4)$$

Ако ги собереме (1) и (2) добиваме

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} = 2S . \qquad (5)$$

Во (5) ќе ги замениме (3) и (4) од каде што добиваме $2S + a_5 + a_{10} = 2S$, т.е. $a_5 + a_{10} = 0$. Броевите a_5 и a_{10} се позитивни, па според тоа последното равенство не е точно. Значи, не шостојат броеви $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}$ со саканото својство.

15. Дали може во темињата на правилен осумаголник да се запишан броевите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 (секој број по еднаш), така што збирот на броевите запишани во секои три последователни темиња на осумаголникот да е:

а) поголем од 13, б) поголем од 11, в) поголем од 12.

Решение. а) Не е можно. Навистина нека претпоставиме дека броевите се запишани во редослед $a_1, a_2, a_3, ..., a_8$. Тогаш

$$a_1 + a_2 + a_3 \geq 14,\ a_2 + a_3 + a_4 \geq 14,\ ...,\ a_7 + a_8 + a_1 \geq 14,\ a_8 + a_1 + a_2 \geq 14$$

Ако ги собереме добиените неравенства добиваме

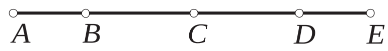
$$108 = 3 \cdot (1 + 2 + 3 + ... + 8) = 3(a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_8) \geq 8 \cdot 14 = 112 ,$$

што е противречност.

б) Да. На пример $a_1 = 1, a_2 = 5, a_3 = 6, a_4 = 2, a_5 = 4, a_6 = 7, a_7 = 3, a_8 = 8$.

в) Не. Да претпоставиме дека таков распоред постои. Лесно се гледа дека броевите 2 и 3 не може да се распоредени во соседни темиња, бидејќи во спротивен случај и од лево и од десно треба да има број поголем или еднаков на 8, што не е можно. Од друга страна, броевите 2 и 3 треба да се запишани во барем три темиња од местото во кое е запишан бројот 1. Последното е можно само при следнава конфигурација $a_1 = 1, a_4 = 2, a_6 = 3$ (со точност до насоката на обиколување). Тогаш меѓу 2 и 3 треба да биде запишан бројот 8. Но, сега каде и да биде запишан бројот 4 (во некое од останатите четири темиња) ќе биде потребна уште една осумка, што не е можно.

16. На една права се зададени пет различни точки, такви што растојанието меѓу секои две од нив е природен број, а растојанието меѓу двете крајни е десет. Докажи дека меѓу сите отсечки, чии краеви се дадените точки, постојат две со еднакви должини.



Решение. *Прв начин.* Нека A, B, C, D, E се дадените точки (види цртеж). Очигледно, постојат вкупно 10 отсечки, чии краеви се овие точки, а чии должини се природни броеви не поголеми од 10.

Да претпоставиме дека сите отсечки се со различни должини, тогаш меѓу нив ги има сите природни броеви од 1 до 10, па збирот на нивните должини е

$$1+2+3+...+10=\tfrac{10\cdot 11}{2}=55$$

Очигледно е:

$$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DE}=10,$$

$$\overline{AC}+\overline{CE}=10, \quad \overline{AE}=10,$$

па останува да важи

$$\overline{AD}+\overline{BD}+\overline{BE}=55-30=25,$$

$$\overline{AD}+\overline{BD}+\overline{BD}+\overline{DE}=25.$$

Но, $\overline{AD}+\overline{DE}=10$, па следува $\overline{BD}=7,5$ што не е можно. Следствено, не е можно сите должини на отсечките да се различни, т.е. постојат барем две со еднакви должини.

Втор начин. Нека A, B, C, D, E се дадените точки. Тие образуваат точно 10 отсечки, чии должини се природни броеви не поголеми од 10. Ако сите тие се различни, тогаш меѓу нив ги има сите природни броеви од 1 до 10.

Нека, за определеност, $\overline{AD}=9$, $\overline{DE}=1$. Ако $\overline{AC}=8$, тогаш $\overline{CD}=1$, $\overline{DE}=1$. Ако $\overline{BD}=8$, тогаш $\overline{AB}=1,$ $\overline{DE}=1$, па затоа должина 8 може да има само отсечката BE. Тогаш $\overline{AB}=2$, $\overline{BC}\geq 3$. Ако $\overline{BC}=3$, тогаш $\overline{AC}=\overline{CE}=5$; ако $\overline{BC}=4$, тогаш $\overline{BC}=\overline{CE}=4$; ако $\overline{BC}=5$, тогаш $\overline{AB}=\overline{CD}=2$ и ако $\overline{BC}=6$, тогаш $\overline{CD}=\overline{DE}=1$.

Добиената противречност покажува дека барем две отсечки имаат еднакви должини.

7. ПРЕБРОЈУВАЊА

1. Дадена е низата $\frac{1}{1},\frac{2}{1},\frac{1}{2},\frac{3}{1},\frac{3}{2},\frac{1}{3},\frac{4}{1},\frac{3}{2},\frac{2}{3},\frac{1}{4},...$. Кој број стои на 1997-то место?

Решение. Лесно се воочува дека членовите на низата се подредени во „групи", такви што збирот на броителот и именителот во секоја од нив е ист за сите броеви од таа „група". Така, првата „група", има еден член (со збир на броителот и именителот еднаков на 2), втората „група" има два члена (со збир на броителот и именителот еднаков на 3), третата „група" има три члена (со збир еднаков на 4), итн., n-тата „група" има n членови (со збир на броителот и именителот еднаков на $n+1$), т.е. тоа е „групата"

$$\tfrac{n}{1},\tfrac{n-1}{2},\tfrac{n-2}{3},...,\tfrac{2}{n-1},\tfrac{1}{n}.$$

Заклучно со ова „група" низата содржи

$$S_n=1+2+3+4+...+n=\tfrac{n(n+1)}{2}$$

члена. Бидејќи се бара кој член на низата се наоѓа на 1997 -то место, прво треба да определиме во која „група“ се наоѓа бараниот член на низата. Имаме

$$\frac{n(n+1)}{2} \le 1997 \le \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

од каде што наоѓаме дека $n = 62$. Тогаш $S_{62} = 1953$, а до 1997 има место за уште 44 членови, кои се од „групата“

$$\frac{63}{1}, \frac{62}{2}, \frac{61}{3}, \ldots, \frac{20}{44}, \ldots, \frac{1}{63}.$$

Следствено, бараниот број е $\frac{20}{44}$.

2. Дадена е бесконечна шема во која се запишани природните броеви како на цртежот. Пишувањето на броевите започнува единицата, и потоа се запишуваат сите природни броеви на начин како што е прикажано на цртежот.

21	22	23	24	25	26
20	7	8	9	10	
19	6	1	2	11	
18	5	4	3	12	
17	16	15	14	13	

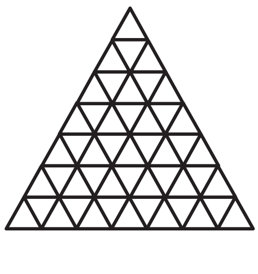
Редицата и колоната во која се наоѓа единицата е означена како прва редица и прва колона, а секоја друга се брои од неа лево или десно, т.е. горе или долу. На пример, бројот 24 е во втора колона десно и трета редица горе. Каде се наоѓа бројот 2010 во оваа шема.

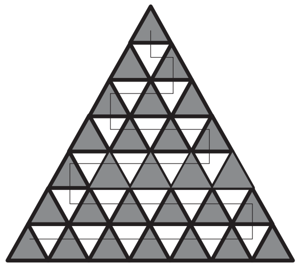
Решение. Од шемата се гледа дека $1 = 1^2 = (2 \cdot 1 - 1)^2$ се наоѓа во прва редица и прва колона, бројот $9 = 3^2 = (2 \cdot 2 - 1)^2$ се наоѓа во втора редица горе и втора колона десно, бројот $25 = 5^2 = (2 \cdot 3 - 1)^2$ се наоѓа во трета редица горе и трета колона десно итн.

21	22	23	24	25	26
20	7	8	9	10	
19	6	1	2	11	
18	5	4	3	12	
17	16	15	14	13	

Според тоа, бројот $(2k-1)^2$ се наоѓа во k – та редица горе и k – та колона десно. Најблизок број од овој облик до 2010 е бројот $2025 = 45^2 = (2 \cdot 23 - 1)^2$, кој се наоѓа во 23-та редица горе и 23-та колона десно. Помалите броеви од него па и 2010 се напишани лево од него, а за да стигнеме до 2010 треба да се вратиме 15 колони лево во истата редица. Според тоа, 2010 се наоѓа во 23-та редица горе и 8-ма колона десно.

3. Еден лавиринт е во форма на рамностран триаголник и има 49 еднакви сали (во облик на рамнострани триаголници) формирани од 18 ѕида по 6 паралелни со секоја страна на лавиринтот. Меѓу било кои две сали што имаат заеднички ѕид има врата. Давор сака да се шета во лавиринтот не влегувајќи во една сала двапати. Колку најмногу соби тој може да посети?





Решение. Салите на лавиринтот ќе ги обоиме во две бои. На секоја сала соседни и се (имаат заеднички ѕид) Сали со спротивна боја(како на цртежот). Со тоа ќе се обоени 21 сала бело обоени и 28 сали темно обоени. Преминувајќи од сала во сала тој наизменично ќе посетува бела и темна сала или обратно. Според тоа, тој може да посети најмногу $21 \cdot 2+1$ сала.

Една таква маршрута е дадена на цртежот.

4. Дадени се $2n$ точки во просторот $(n \in \mathbb{N})$ меѓу кои нема три колинеарни. Докажи дека постојат најмалку n^2 отсечки што ги поврзуваат овие точки, без притоа да се добие триаголник со темиња во три од дадените точки.

Решение. Нека $P_1, P_2, ..., P_{2n}$ се произволни точки од просторот, и никои три од нив не се колинеарни. Поврзувајќи ја секоја точка со непарен индекс со секоја точка со парен индекс се добиваат n^2 отсечки без притоа да се добие триаголник.

5. За природниот број n ќе велиме дека е *обичен*, ако бројот на различните начини на претставување на n како збир на два или повеќе последователни природни броја е непарен број. Определи го бројот на обичните броеви помали од 2012?

Решение. За секој непарен делител q на n добиваме различно претставување на n како збир на еден или повеќе последователни природни броеви на следниов начин. Нека $d = \frac{n}{q}$. Земаме q последователни цели броеви такви што средниот од нив е еднаков на d. Ако сите овие броеви се природни имаме претставување на n како збир на непарен број природни броеви. Ако меѓу овие броеви има непозитивни, тогаш нивните спротивни броеви исто така припаѓаат на збирот (0 е спротивна сама на себе). Во овој случај ги отфрламе спротивните броеви и добиваме претставување на n како збир од парен број природни броеви.

Обратно, ако n е збир на непарен број q природни броеви и средниот од нив е d, тогаш $n = dq$. Ако n е збир на парен број природни броеви, тогаш кон збирот да ги додадеме сите помали природни броеви, нулата и нивните спротивни. Ако средниот од нив е еднаков на d, тогаш $n = dq$. Добиените на тој начин делители q на n за секое претставување на n како збир на еден или повеќе последователни се различни.

Од досега изнесеното следува дека бројот на различните начини за претставување на n како збир на еден или повеќе последователни природни броеви е еднаков на бројот на непарните делители на n. Ако го исклучиме преставувањето на n како збир на еден број, добиваме дека бараните броеви во задачата се оние со парен број непарни делители. Полесно е да ги преброиме останатите броеви – тие имаат непарен број непарни делители, што е случај кога најголемиот нивен непарен делител r е точен квадрат (делителите се групираат по парови со производ r, а бројот им е непарен точно кога некој од нив е пар сам со себе). Така, броевите кои не се обични се точните квадрати: $1^2, 2^2, 3^2, ..., 44^2$ и удвоените точни квадрати: $2\cdot 1^2, 2\cdot 2^2, 2\cdot 3^2, ..., 2\cdot 31^2$. Според тоа, бројот на обичните броеви помали од 2012 е еднаков на $2011-31-44=1936$.

6. Лавиринт се состои од 10000 квадратни соби, поставен во форма на квадрат 100×100. Секои две соби, кои имаат заедничка страна се поврзани со врата. Илија шета низ лавиринтот, така што во секој свој потег влегува во некоја соба низ една од нејзините врати и излегува низ друга врата. Притоа Илија не може да искористи еден ист пар врати за две последователни посети на една иста соба (на пример, ако при првата посета Илија влегува во собата низ вратата A и излегува низ врата B, тогаш при втората посета не множе да влезе низ вратата B и да излезе низ вратата A). Дали Илија може во лавиринтот да направи повеќе од 4^{100} посети?

Решение. Да ги означиме редовите и колоните од соби во лавиринтот со броевите од 1 до 100 и секоја соба да ја означиме со подредениот пар од броевите на нејзиниот ред и колона.

Нека S е множеството соби (i, j) за кои $1\le i\le 50, 1\le j\le 50$. Да го поделиме S на 99 помали множества $S_2, S_3, ..., S_{100}$ така што во S_k се наоѓаат собите (i, j) од S за кои $i+j=k$, $2\le k\le 100$. Нека P_k е вкупниот број посети кои Илија ги направил на собата S_k.

Множеството S_2 се состои од една соба. Бидејќи таа има само две врати, добиваме дека $P_2\le 1$. Нека a е произволна соба од S_k, $k>2$. Бидејќи a има само две врати кои не водат кон соба од S_{k-1}, барем една од две последователни посети на a треба или да претходи или да следува од посета на соба од S_{k-1}. Бидејќи на секоја посета на соба од S_{k-1} може да претходи или да следува на најмногу две посети на соби од S_k, заклучуваме дека P_k е помал или еднаков од $k-1\,(\text{бројот на собите во } S_k)+4P_{k-1}$.

Оттука со индукција следува дека $P_k\le 2^{2k-3}-k+1$. Според тоа, вкупниот број на посети на собите од S е помал или еднаков на

$$S_2+S_3+...+S_{100}\le 2^1+2^3+...+2^{197}=\tfrac{2^{198}-2}{3}.$$

Истата оценка моижеме да ја направиме и за секој од преостанатите три квадранти од лавиринтот, па затоа вкупниот број потези е помал или еднаков на $4\cdot\frac{2^{198}-2}{3}<4^{100}$.

7. Во темето A на коцката $ABCDA_1B_1C_1D_1$ стои мравка. Мравката патува 2015 минути, при што секоја минута поминува преку раб до соседно теме. Нека m е бројот на патеките со кои мравката своето патување го завршува во темето B, а n е бројот на патеките со кои таа своето патување го завршува во темето C_1. Пресметај ја вредноста на изразот $m-n$.

Решение. Нека m_k е бројот на патеките при кои после k минути мравката е во B. Поради симетрија овој број е еднаков на бројот на патеките и до D и до A_1.

Нека n_k е бројот на патеките при кои после k минути мравката е во C_1. Нека p_k е бројот на патеките при кои после k минути мравката е во B_1. Поради симетрија тој број е еднаков на бројот на патеките и до C и до D_1. Нека q_k е бројот на патеките при кои после k минути мравката е во A. Имаме

$$m_{k+1} = q_k + 2p_k,\ n_{k+1} = 3p_k,\ p_{k+1} = n_k + 2m_k,\ q_{k+1} = 3m_k .$$

Според тоа,

$$m_{k+1} - n_{k+1} = q_k + 2p_k - 3p_k = q_k - p_k \text{ и } q_{k+1} - p_{k+1} = 3m_k - n_k - 2m_k = m_k - n_k ,$$

па затоа

$$\begin{aligned} m - n = m_{2015} - n_{2015} &= q_{2014} - p_{2014} \\ &= m_{2013} - n_{2013} = ... = m_3 - n_3 \\ &= q_2 - p_2 = m_1 - n_1 = q_0 - p_0 = 1. \end{aligned}$$

8. За еден природен број ќе велиме дека е *силен*, ако е делив со квадратот на секој свој прост делител (за бројот 1 ќе сметаме дека е силен). Бројот на силните делители на еден број ќе го нарекуваме *сила* на тој број. Колку последователни природни броеви најмногу можеме да избереме така што ниту еден од нив да нема сила која е делива со

а) 2, б) 3 и в) 2015?

Решение. Еден природен број е силен ако секој негов прост делитеч е барем на втор степен. Ако каноничното разложување на еден број е $p_1^{s_1} p_2^{s_2} ... p_k^{s_k}$, тогаш неговата сила е еднаква на $s_1 s_2 ... s_k$, бидејќи за степенот на неговиот делител p_k има s_k можни избори (0,2,..., s_k).

а) Ако избереме 8 последователни броеви, тогаш некој од нив ќе биде делив со 2^2, но нема да биде делив со 2^3, па така неговата сила ќе биде делива со 2. Постојат 7 последователни природни броеви, секој од кои има сила која не е делива со 2, на пример 29, 30, 31, 32, 33, 34 и 35.

б) Ако избереме 16 последователни броеви, некој од нив ќе биде делив со 2^3, но нема да биде делив со 2^4, па така неговата моѓ ќе биде делива со 3. Постојат 15 последователни природни броеви, секој од кои кои има сила која не е делива со 3, на пример 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22 и 23.

в) Ако избереме $2^{32} \cdot 3^{14} \cdot 5^5$ последователни броеви, тогаш меѓу нив има број m од видот $m = 2^{31} \cdot 3^{13} \cdot 5^5 A$, каде при делење со 30 бројот A дава остаток 1, 7, 13, 17, 23 или 29. Тогаш A не е делив со 2, 3 и 5, па така силата на m е делива со $5 \cdot 13 \cdot 31 = 2015$. Од друга страна интервалот $(31 \cdot 2^{31} \cdot 3^{13} \cdot 5^5, 37 \cdot 2^{31} \cdot 3^{13} \cdot 5^5)$ содржи $2^{32} \cdot 3^{14} \cdot 5^5 - 1$ последователни природни броеви. Нека претпоставиме дека меѓу нив постои природен број n чија моќ е 2015. Бидејќи $11^5 > 37 \cdot 5^5$, бројот n не може да е од видот $2^{31} \cdot 3^{13} p^5$, каде p е прост број поголем од 7. Од друга страна, $5 \cdot 2^{31} \cdot 3^{13} \cdot 7^5 < 31 \cdot 2^{31} \cdot 3^{13} \cdot 5^5$ и $11 \cdot 2^{31} \cdot 3^{13} \cdot 7^5 > 37 \cdot 2^{31} \cdot 3^{13} \cdot 5^5$, па затоа n не може да е делив со $2^{31} \cdot 3^{13} \cdot 5^5$. Исто така, бидејќи $3^{18} > 2^{18} \cdot 37$, бројот n не може да е од видот $3^{31} \cdot 2^{13} \cdot p^5$, каде $p \geq 5$.

Сите од останатите можности за добивање на сила 2015 доведуваат до значително поголеми броеви. Значи, можеме да избереме $2^{32}\cdot 3^{14}\cdot 5^5-1$ броеви.

9. Иво нумерирал 100 картички со природните броеви од 1 до 100 и и дал на Јана дел од нив. Познато е дека за секоја картичка на Иво и секоја картичка на Јана, збирот на броевите со кои се означени не е запишан на нартичка кај Иво и производот не е запишан на картичка кај Јана. Колку картички има Јана, ако картичката со број 13 не е кај неа?

Решение. Јана има барем една картичка k. Ако 1 е кај Иво, тогаш производот на 1 и k е кај Јана, што противречи на условот. Значи, 1 е кај Јана.

Ако 12 е кај Иво, тогаш збирот на 1 и 12 е кај Иво, што е противречност. Значи, 12 е кај Јана.

Бидејќи збирот на 6 и 7 е кај Иво, тие се кај еден човек. Но, ако се кај Иво, тогаш збирот на 1 и 6 е кај Иво, што е противречност. Значи, 6 и 7 се кај Јана.

Бидејќи збирот на 3 и 10 е кај Иво, тие се кај еден човек. Но, ако се кај Иво, тогаш збирот на 3 и 7 е кај Иво, што е противречност. Значи, 3 и 10 се кај Јана.

Бидејќи збирот на 5 и 8 е кај Иво, тие се кај еден човек. Но, ако се кај Иво, тогаш збирот на 3 и 5 е кај Иво, што е противречност. Значи, 5 и 8 се кај Јана.

Бидејќи збирот на 4 и 9 е кај Иво, тие се кај еден човек. Но, ако се кај Иво, тогаш збирот на 4 и 5 е кај Иво, што е противречност. Значи, 4 и 9 се кај Јана.

Бидејќи збирот на 2 и 11 е кај Иво, тие се кај еден човек. Но, ако се кај Иво, тогаш збирот на 2 и 9 е кај Иво, што е противречност. Значи, 2 и 11 се кај Јана.

Според тоа, броевите од 1 до 12 се кај Јана. Тогаш броевите од видот $13k,\ k=1,2,...,7$ се кај Иво, а нивните збирови со броевите од 1 до 12 се кај Јана. Според тоа, кај јана се картичките означени со броевите кои не се делат со 13, што значи дека Јана има $100-7=93$ картички.

10. Канаста и игра со карти која ја играат пет играчи. Во една населба 25 лица сакаат да играат канаста, но имаат само еден комплет карти. После секоја игра петте играчи се караат и секој играч решава дека повеќе нема да игра со ниту еден од останатите четири играчи. Колку игри најмногу може да се одиграат?

Решение. Вкупниот број на парови играчи е $\frac{25\cdot 24}{2}=300$ и после секоја игра губиме по $\frac{5\cdot 4}{2}=10$ парови играчи. Според тоа, најмногу може да се одиграат $300:10=30$ игри.

Ќе докажеме дека 30 игри се можни. Играчите ги нумерираме со парови природни броеви $(m,n),\ m,n\le 5$, т.е. ги претставуваме во 5×5 табела.

Во играта со број i, $1\le i\le 5$ играат петтемина за кои $m=i$ (од редот со број i во табелата). Во играта со број $6+5k+i,\ 0\le i\le 4,\ 0\le k\le 4$ играат играчите (m,n) за кои $mk+n$ дава остаток i при делење со 5. Јасно, за секои конкретни k,i,m имаме единствен n со саканиот остаток. Така од секој ред од табелата има по еден играч, т.е. имаме 5 играчи и тие не играле меѓу себе во првите 5 игри.

За секои два играчи (m,n) и (m',n'), $m'\ne m$, броевите $k(m-m')$, $k=0,1,$ $2,3,4$ даваат различни остатоци при делење со 5. Според тоа, постои единствен k за кој $k(m-m')\equiv n-n'(\bmod 5)$. Тоа значи, дека $km-n$ и $km'-n'$ даваат ист остаок при делење со 5 и добиените k и i определуваат единствена игра во која учествувале играчите (m,n) и (m',n').

Конечно, од претходноизнесеното следува дека со ваквата организација ќе се одиграат точно 30 игри.

11. Во рамнината се дадени две множества паралелни прави $a_1,a_2,\dots,a_{13}$ и $b_1,b_2,\dots,b_7$. Правите од првото множество ги сечат правите од второто множество. Колку паралелограми се определени со овие прави?

Решение. Секој пар прави од првото множество и секој пар прави од второто множество одредуваат точно еден паралелограм и обратно. Еден пар прави од првото множество може да избереме на $\frac{13\cdot 12}{2}=78$ начини, а од второто множество на $\frac{7\cdot 6}{2}=21$ начини, па бараниот број на паралелограми е $78\cdot 21=1638$.

12. Дадена е правоаголна табла со димензии 2017×2018. Дали може да се повлече права која на таблата ќе пресекува 4035 единечни квадрати?

Решение. Да разгледаме правоаголна табла со димензии $m\times n$. Таа е формирана од $m+1$ хоризонтална и $n+1$ вертикална права. Притоа имаме 2 рабни и $m-1$ внатрешна хоризонтална права и 2 рабни и $n-1$ внатрешна вертикална права. Права која на таблата пресекува k единечни квадрати мора да сече $k-1$ внатрешни прави кои ги формираат овие квадрати (зошто?). Бидејќи таблата има $m-1+n-1=m+n-2$ внатрешни прави, добиваме дека правата може да сече најмногу $k-1=m+n-2$ прави, што значи дека таа може да пресекува најмногу $k=m+n-1$ единечни квадрати.

Од претходно изнесеното следува дека на табла со димензии 2017×2018 може да се повлече права која ќе пресекува најмногу $k=2017+2018-1=4034$ единечни квадрати. Според тоа, не може да се повлече права која на таблата ќе пресекува 4035 единечни квадрати.

13. Определи множество S со најмал број точки со кои се определени седум различни прави.

Решение. Нека S е множество точки кои определуваат 7 различни прави и нека $|S|=7$.

Ако во множеството S не постојат три колинерани точки, тогаш тоа множество определува $\frac{n(n-1)}{2}$ различни прави. Ако ова множество определува 7 прави, тогаш $\frac{n(n-1)}{2}=7$, т.е. $n(n-1)=14$, што не е можно, бидејќи бројот 14 не е производ на два последователни броја. Според тоа, ниту едно множество во кое нема барем една тројка колинеарни точки не определува 7 различни прави.

Значи, во множеството S постои најмалку едно триелементно подмножество колинеарни точки. Ако имаме само едно триелементно подмножество колинеарни точки, тогаш со ова множество се определени $\frac{n(n-1)}{2}-2$ различни прави. Имено, триелементното подмножество колинеарни точки определува само една права, а триелемнтното подмножество содржи три двоелементни подмножества, што значи дека една иста права сме ја броеле трипати. Затоа од $\frac{n(n-1)}{2}$ треба да одземеме 2. Така имаме $\frac{n(n-1)}{2}-2=7$, т.е. $n(n-1)=18$, што повторно не е можно.

Ако имаме точно две триелементни подмножества колинеарни точки, тогаш со ова множество се определени $\frac{n(n-1)}{2}-2\cdot 2$ различни прави. Значи, треба да важи $\frac{n(n-1)}{2}-2\cdot 2=7$, т.е. $n(n-1)=22$, што повторно не е можно.

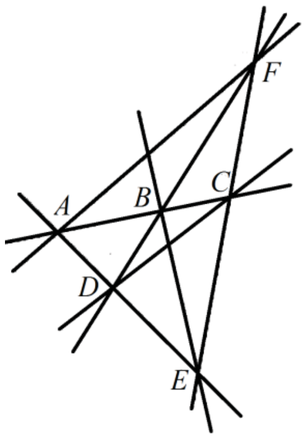
Ако имаме точно три триелементни подмножества колинеарни точки, тогаш со ова множество се определени $\frac{n(n-1)}{2}-3\cdot 2$ различни прави. Значи, треба да важи $\frac{n(n-1)}{2}-3\cdot 2=7$, т.е. $n(n-1)=26$, што повторно не е можно.

Ако имаме точно четири триелементни подмножества колинеарни точки, но немаме подмноижество од четири колинеарни точки (четири колинеарни точки определуваат четири триелементни подмножества колинеарни точки), тогаш со ова множество се определени

$$\frac{n(n-1)}{2}-3\cdot 2$$

различни прави. Значи, треба да важи

$$\frac{n(n-1)}{2}-4\cdot 2=7\text{, т.е. } n(n-1)=30.$$



Од последната равенка наоѓаме $n=6$. Според тоа, множество S од 6 точки, во кое постојат точно четири триелементни подмножества колинеарни точки и не постојат четири колинеарни точки определува точно 7 прави. Нека

$S=\{A,B,C,D,E,F\}$, $S_1=\{A,B,C\}$, $S_2=\{A,D,E\}$, $S_3=\{B,D,F\}$, $S_4=\{C,E,F\}$.

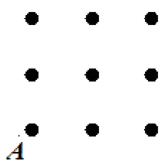
Ова множество ги определува правите $AB, AE, AF, BF, BE, CD, CE$ (види цртеж).

14. Пресметај го збирот на сите четирицифрени броеви во кои цифрата 0 не се јавува и сите цифри се различни.

Решение. Бројот на сите такви броеви е $9\cdot 8\cdot 7\cdot 6=3024$. На секој број $\overline{abcd}$ му го придружуваме бројот $\overline{(10-a)(10-b)(10-c)(10-d)}$. Збирот на овие два броја е 11110, па затоа збирот на сите броеви е $\frac{3024}{32}\cdot 11110=16789320$.

15. Девет точки во рамнината се распоредени како на цртежот. Колку триаголници можеме да конструираме со едно теме во точката A, а со другите две темиња во две од преостанатите точки?

Решение. Од преостанатите 8 точки две темиња на триаголникот може да се добијат на $\frac{8\cdot 7}{2}=28$, т.е. на 28 начини. Во три од тие можности точките се колинеарни и не можеме да конструираме триаголник. Значи, можат да се конструираат само 25 триаголници.



16. Имаме 9 стапчиња со различна должина од $1\,cm$ до $9\,cm$ и од нив составуваме квадрати. Колкави можат да бидат страните на тие квадрати и колку различни можеме да составиме? Притоа, два квадрати се различни, ако се составени од различни стапчиња и не задолжително сите.

Решение. Должината на страната на квадратот треба да биде поголема од $6\,cm$. Бидејќи збирот на должините на сите стапчиња е $45\,cm$, следува дека периметарот на квадратот не може да биде поголем од $44\,cm$, а неговата страна поголема од $11\,cm$. Следствено, страната на квадратот може да биде: $7\,cm$, $8\,cm$, $9cm$, $10cm$ и $11\,cm$.

На единствен начин можеме да составиме квадрат чија страна е: или $7\,cm$, или $8\,cm$, или $10\,cm$ или $11\,cm$, а на пет начини ако страната е $9\,cm$. Тоа се следните можности:

1) $9,\ 8+1,\ 7+2,\ 6+3$;
2) $9,\ 8+1,\ 7+2,\ 5+4$;
3) $9,\ 8+1,\ 6+3,\ 5+4$;
4) $9,\ 7+2,\ 6+3,\ 5+4$;
5) $8+1,\ 7+2,\ 6+3,\ 5+4$.

Значи, можеме да составиме вкупно $1+1+1+1+5=9$ квадрати.

17. На еден шаховски турнир учествувале n жени и $2n$ мажи и сите меѓусебно одиграле по една партија при што ниту една партија не завршила нерешено. Бројот на партии во кои победиле жените во однос на бројот на партии во кои победиле мажите се однесува како $7:5$. Определи го n.

Решение. Бројот на партии меѓу две жени на турнирот е еднаков на $\frac{n(n-1)}{2}$ а бројот на партии кои се одиграле меѓу два мажи е еднаков на $n(2n-1)$, (го користиме равенството $1+2+3+...+k=\frac{k(k+1)}{2}$ кое е точно за секој природен број k). Бројот на партии кои се одиграле меѓу маж и жена е еднаков на $2n\cdot n=2n^2$. Ако во меѓусебните партии меѓу маж и жена на турнирот жените извојувале x победи, тогаш бројот на победи кои ги извојувале жените е $\frac{n(n-1)}{2}+x$ а бројот на победи кои ги извојувале мажите е еднаков на $n(2n-1)+2n^2-x$. Од условот на задачата имаме

$$\frac{\frac{n(n-1)}{2}+x}{n(2n-1)+2n^2-x}=\frac{7}{5},$$

која што можеме да ја запишеме во облик $8x=17n^2-3n$. Бидејќи $x\le 2n^2$, добиваме $8x\le 16n^2$, т.е. $16n^2\ge 17n^2-3n=8x$. Последното неравенство можеме да го запишеме во облик $n(n-3)\le 0$ кое е можно и точно за $n=1,2,3$. За $n=1,2$ равенката $8x=17n^2-3n$ нема целобројни решенија. За $n=3$, добиваме $x=18$.

Според тоа, бројот на мажи, учесници на турнирот е 6, а бројот на жени кои се учесници на турнирот е 3.

18. Нека е даден бројот $A=12345678901234567890...1234567890$ каде што бројот 1234567890 е запишан 100 пати по ред. Прво ги прецртуваме сите цифри што стојат на непарните места и добиваме еден 500 цифрен број. И на овој број ги прецртуваме ситре цифри кои стојат на непарните места итн. додека не остане само една цифра. Која е таа цифра?

Решение. *Прв начин.* Бројот A има 1000 цифри. Цифрата која што ќе остане на крајот по сите прецртувања, мора во секој новодобиен број да се наоѓа на парно место. За да остане само една цифра, треба постапката да се повтори 9 пати Нека бараната цифра во 1000 цифрениот број се наоѓа на x-та позиција. Тогаш $x:2^9=1$, $x=512$. Следува бараната цифра е на 512-то место, а тоа е цифрата 2.

Втор начин. Наместо бројот A ќе ја разгледаме низата на броеви од 1 до 1000: $1,2,3,4,....,999,1000$.При тоа на секој број од оваа низа одговара точно една од цифрите: $1,2,3,4,5,6,7,8,9,0$.

При првото прецртување, т.е. со првиот чекор ги прецртуваме сите непарни броеви; со вториот чекор ги прецртуваме сите броеви што се делливи со 2, но не се деливи со 4, во третиот чекор се прецртани сите броеви што се делливи со 4 но не се делливи со 8 итн. ќе остане бројот 512. На овој број му одговара цифрата 2, бидејќи $512=51\cdot 10+2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Aczél, J., Dhombres, J.: Functional Equations Containing Several Variables. Reading, Mass., Addison-Wesley, 1985
2. Aczél, J.: Lectures on Functional Equations and Their Applications, New York, Birkhäuser, 1966
3. Alexanderson, G. L., Klosinski, L. F., Larson, L. C.: The William Lowell Putnam Mathematical Competition. Problems and Solutions: 1938–1964. Mathematical Association of America,Washington, DC, 1985
4. Alfonsin, J. L. R.: The Diophantine Frobenius Problem, Oxford Lecture Series, 2005
5. Amini, A. R.: Fibonacci Numbers a Long Division Formula, Mathematical Spectrum, Vol. 40, Number 2, 2007/08
6. Anderson, J. A.: Diskretna matematika sa kombinatorikom, CET, Beograd, 2005
7. Andreescu, T., Andrica, D., Feng, Z.: 104 Number Theory Problems: From the Training of the USA IMO Team, Birkhauser, 2007
8. Andreescu, T., Andrica, D.: Complex Numbers from A to ...Z, Birkhauser, 2006
9. Andreescu, T., Andrica, D.: Number Theory – Structures, Examples and Problems, Birkhauser, 2009
10. Andreescu, T., Feng, Z.: USA and International Mathematical Ulympiads 2003, The Mathematical Association of America, Washington, 2003
11. Andreescu, T., Gelea, R.: Mathematical Olympiad Challenges, Birkhäuser, Boston-Basel-Berlin, 2000
12. Archibald, R. G.: An Introduction to the Theory of Numbers, Merrill, Publishing and Co., Columbia, OH, 1970.
13. Arslanagić, Š., Zejnulahi, F., Govedarica, V.: Zbirka zadataka sa republičkih takmičenja u Bosni i Hercegovini 1981-1991, Bosanska riječ, Sarajevo, 2004
14. Arslanagić, Š.: Matematička čitanka 9, Grafičar promet, Sarajevo, 2017
15. Arslanagić, Š.: Matematika za nadarene (drugo izdanje), Bosanska riječ, Sarajevo, 2005
16. Ašić, M. i dr.: Međunarodne matematičke olimpijade, DM Srbije, Beograd, 1986
17. Ašić, M. i dr.: Republička i savezna takmičenja srednjoškolaca (1970-1983), DMS, Beograd, 1984
18. Batchedder P. M.: An Introduction to linear difference equations, Dover Publications, 1967
19. Becheanu, M., Enescu, B.: Inegalitati elementare. Bucurest: Gil., 2002
20. Beklekamp, E. , Rodgers, T.: Math Puzzles, Springer-Verlag, New York, Inc., 1992
21. Benjamin, A. T., Quinn, J. J.: Proofs that Really Count: The Art of Combinatorial Proof, MAA, 2003
22. Bilinski, S.: Problem parketiranja, Matematičko-fizičko list, 196, Zagreb, 1999
23. Bottema, O. and oth.: Geometric Inequalities, Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, 1969
24. Boyvalenkov, P., Kolev, E., Musharov, O., Nikolov, N.: Bulgarian Mathematical Competitions 2003-2006, GIL Publishing House, Zalău, 2007
25. Boyvalenkov, P., Kolev, E., Musharov, O., Nikolov, N.: Bulgarian Mathematical Competitions 2006-2008, GIL Publishing House, Zalău, 2009
26. Burton, D. M.: Elementary Number Theory, Wm. C. Brown, Dubuque, Iowa, 1994
27. Cerone, P.; Dragomir, S. S.: Mathematical Inequalities, CRC Press, London – New York, 2011
28. Cîrtoaje, V.: Algebraic Inequalities, GIL Publishing house, Zalau, 2006
29. Cull P., Elahive M., Robson R.: Difference equations: From rabbits to chaos, Springer, 2005
30. Cvetkovski, Z.: Inequalities, Springer, Heidelberg – Dordrecht – London – New York, 2012
31. Djukić,. D., Janković, V., Matić, I., Petrović, N.: The IMO Compendium, Springer, 2011
32. Đurković, R.: Matematička takmičenja srednjoškolaca u Jugoslaviji 1990, DMS, Beograd, 1991
33. Dye R. H.; Nickakalls R.W. D.: A new algorithm for generating Pythagorean triples, Mathematical Gazette; 1998
34. Engel, A.: Problem-Solving Strategies, Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg, 1997
35. Feng, Z., Zhao, Y.: USA and International Mathematical Ulympiads 2006-2007, The Mathematical Association of America, Washington, 2003
36. Gleason, A. M.; Greenwood, R. E.; Kelly, L. M.: The William Lowell Putnam Mathematical Competition. Problems and Solutions: 1965–1984. Mathematical Association of America, Washington, DC, 1984
37. Govedarica, V.: Matematička takmičenja u Republici Srpskoj, ZUNS, Sarajevo, 2007
38. Graham R.L, Knuth D.E., Patashnik O.: Concrete Mathematics: A foundation for computer science, Second edition, Addison-Wesley Professional, 1994
39. Green D. H., Knuth D.E.: Homogeneous equations, Mathematics for the analysis of algorithms, Birkhäuser, 1982
40. Grozdev, S., Kolev, E., Mushkarov, O., Nikolov, N. Bulgarian Mathematical Competitions 1997-2002, SMB, Sofia, 2002

41. Grozdev, S.: For High Achievements in Mathematics. The Bulgarian Experience (Theory and Practice). Sofia: ADE, 2007
42. Hatch G.: Pythagorean triples and triangular square numbers, Mathematical Gazette; 1995
43. Herman, J.; Kučera, R.; Šimša, J.: Equations and Inequalities, Springer – Verlag, New York – Berlin – Heidelberg, 2000
44. Hung, P. K.: Secrets in Inequalities, GIL Publishing Hause, Zalau, 2007
45. Kadelburg, Z., Mladenović, P.: Savezna takmičenja iz matematike, DMS, Beograd, 1990
46. Kuczma, M. E., Mientka, W. E.: Problems of the Austrian-Polish Mathematics Competition, The Academic Distribution Center, Freeland, Maryland, 1994
47. Kuczma, M., Choczewski, B., Ger, R.: Iterative Functional Equations. Cambridge, UK, Cambridge University Press, 1990
48. Landau, E.: Elementary number theory, Chelsea Publishing Company, New York, 1966
49. Lee, H.: Topics in Inequalities - Theorems and Techniques, 2007
50. Lozansky, E. , Rouseau, C.. Winning solutions, Springer-Verlag, Inc., New York, 1996
51. Manfrino, R. B., Ortega, J. A. G., Delgado, R. V.: Inequalities, Birkhäuser, Basel – Boston – Berlin, 2000
52. Mićić, V., Kadelburg, Z.: Uvod u teoriji brojeva, DMS, Beograd, 1989
53. Mitrinović, D. S., Barnes, E. S., Marsh, D. C. B., Radok, J. R. M.: Elementary Inequalities, P. Noordhoff, Groningen, 1964
54. Mitrinović, D. S.: Analytic Inequalities, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1970
55. Mitrović, M., Ognjanović, S., Veljković, M., Petković, Lj., Lazarević, N.: Geometrija za prvi razred Matematičke gimnazija, Krug, Beograd, 1998
56. Mladenović, P.; Ognjanović, S.: Pripremni zadaci za matematička takmičenja za učenike srednjoh škola, DMS, Beograd, 1991
57. Nardy, G. H., Littlewood, J. E., Pólya, G.: Inequalities, Cambridge University Press, Cambridge, 1951
58. Nathanson, M. B.: Elementary Methods in Number Theory, Springer, 1993
59. Nesbitt, A. M.: Problem 15114, Educational Times, 3, 1903
60. Neville, R. Beginning: Number Theory, 2nd ed. Sudbury, Mass.: Jones and Bartlett, 2006.
61. Niven, I., Zuckerman, H. S.: An introduction to the Theory of Numbers, John Wiley & Sons, Inc., New Yor, 1980
62. Palman, D.: Planimetrija, Element, Zagreb, 1998
63. Pavković, B., Dakić, B., Hajnš, Ž., Mladinić, P.: Male teme iz matematike, Hrvatsko matematičko društvo, Knjiga 2., Element, Zagreb, 1994
64. Pavković, B., Veljan, D.: Elementarna matematika I, Tehnička knjiga, Zagreb, 1992
65. Pavković-Veljan, Elementarna Matematika 2, Školska kniga, Zagreb, 1995
66. Pavković-Veljan: Elementarna matematika 1, Tehnička knjiga, Zagreb, 1992
67. Pečarić, J. E.: Nejednakosti, Element, Zagreb, 1996
68. Riordan, J.: Combinatorial Identities, John Willey & Sons, 1968
69. Sierpinski, W.: Elementary theory of numbers, PWN, Warszawa, 1964
70. Small, C. G.: Functional Equations and How to Solve Them, Springer, New York, 2007
71. Specht, E.: Geometria-Scientiae Atlantis, Magdeburg, 2001
72. Stark, H. M.: An introduction to Number Theory, Markh. Publis. Comp., Chicago, 1970
73. Stevanović, D., Milošević, M., Baltić, V. Diskretna matematika, DMS, Beograd, 2004
74. Tripathi, A.: The Coin Exchange Problem for Arithmetic Progressions, American Mathematical Monthly,1994
75. Veljan, D.: An Analogue of the Pythagorean Theorem, El. Math. 51 (1996)
76. Vo Quoc B.: On a class of three-variable Inequalities, 2007
77. Volenc, V.: Analitička geometrija u kompleksnim koordinatima I, II, III, Matematičko-fizički list, 186, 187,188, Zagreb, 1996/97
78. Vrećica, S.: Konveksna analiza, BS Procesor, Matematički fakultet, Beograd, 1993
79. Wells, D.: Prime numbers. The most mysterious figures in Math, John Wiley and Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2005
80. Wilf, H. S.: A Circle-of-lights Algorithm for the Money-changing Problem , American Mathematical Monthly, 1978
81. Xiong, B., Lee Peng, Y.: Mathematical Olympiad in China – Problems and Solutions, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltgt., Singapore , 2007
82. Алексиев, К., Бангачев, К., Бойваленков, П.: 640 задачи или Теория на числата за олимпиади, УНИМАТ СМБ, София, 2017
83. Аневска, К.: Една задача, повеќе начини за решавање, Сигма, Скопје

84. Арноль, И. В.: Теория чиесл, Учиедгиз, Москва, 1939
85. Арсеновић, М.; Драговић, В.: Функционалне једначине, ДМС, Београд, 1999
86. Арсланагиќ, Ш. За подобрувањето на неравенствата, Сигма, Скопје
87. Арсланагиќ, Ш., Зејнулаху, Ф.: Две условни алгебарски неравенства, Сигма, Скопје
88. Арсланагиќ, Ш., Муминагиќ , А.: Повеќе докази на едно познато геометриско неравенство, Сигма, Скопје
89. Арсланагиќ, Ш., Муминагиќ, А.: Повеќе решенија на една геометриска задача, Сигма, Скопје
90. Арсланагиќ, Ш., Муминагиќ, А.: Повеќе докази на едно познато неравенство, Сигма, Скопје
91. Арсланагиќ, Ш.: Едно неравенство во врска со симетралата на внатрешен агол нма триаголник, Сигма, Скопје
92. Арсланагиќ, Ш.: Неравенства со факториели, Сигма, Скопје
93. Арсланагиќ, Ш.: Неравенство на Чебишев, Сигма, Скопје
94. Арсланагиќ, Ш.: Несбитовото неравенство и едно негово подобрување, Сигма, Скопје
95. Арсланагиќ, Ш.: Повеќе докази на едно познато неравенство, Сигма, Скопје
96. Арсланагиќ, Ш.: Подобрување на едно алгебарско неравенство, Сигма, Скопје
97. Арсланагиќ,Ш., Муминагиќ, А.: Едно интересно равенство за триаголник и негови последици, Сигма, Скопје
98. Баралић, Ђ.: 300 припремних задатака за Јуниорске математичке олимпијаде (искуство Србије), Klett, Београд, 2016
99. Бойваленков, П., Колев, Е., Мушкаров, О., Николов, Н.: Балкански олимпиади по математика 1984-2006, УНИМАТ СМБ, София, 2007
100. Бойваленков, П., Колев, Е., Мушкаров, О., Николов, Н.: Български математически състезания 2009-2011, УНИМАТ СМБ, София, 2012
101. Бойваленков, П., Колев, Е., Мушкаров, О., Николов, Н.: Български математически състезания 2012-2015, УНИМАТ СМБ, София, 2015
102. Бойваленков, П., Колев, Е., Мушкаров, О.: Български математически състезания 2003-2005, УНИМАТ СМБ, София, 2005
103. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2009, УНИМАТ СМБ, София, 2010
104. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2010, УНИМАТ СМБ, София, 2011
105. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2011, УНИМАТ СМБ, София, 2012
106. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2012, УНИМАТ СМБ, София, 2013
107. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2013, УНИМАТ СМБ, София, 2014
108. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2014, УНИМАТ СМБ, София, 2015
109. Бойваленков, П., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2008, УНИМАТ СМБ, София, 2008
110. Брсаковска, С., Малчески, С.: Некои последици на Питагоровата теорема, Нумерус, Скопје, 2019
111. Василевска, В.: Степен на точка во однос на кружница, Сигма, Скопје
112. Велинов, Д. Полиномни равенки, Сигма, Скопје
113. Велинов, Д.: Некои методи за решавање на Диофантови равенки, Сигма, Скопје, 2018
114. Велинов, Д.: Рекурентни релации, Сигма, Скопје
115. Виноградов, И. М.: Основы теории чисел, Наука, Москва, 1972
116. Гаврилов, М, Давидов, Л.: Делимост на числата, Народна просвета, София, 1976
117. Гарднер, М.: Математически развлечения. Том 2. София, Наука и изкуство, 1977
118. Главче, М.: Повеќе начини за решавање на иста задача, Сигма, Скопје
119. Гроздев, С., Лесов, Х.: Квадратни параметарски неравенки, Сигма, Скопје
120. Гроздев, С., Ненков, В.: Магични квадрати, Сигма, Скопје
121. Гроздев, С., Стефанова, Д., Иванов, И.: Планиметрични задачи за триъгълник с тригонометрични функции, Светлина, София, 2016
122. Гроздев, С.: Минимален прост делител, Сигма, Скопје
123. Гроздев, С.: Примена на едно обопштување на теоремата на Птоломеј, Сигма, Скопје
124. Гуревич, Е.: Тайна древнего талисмана. Москва, Наука, 1969
125. Давидов, Љ.: Генераторни функции, Сигма, Скопје

126. Давидов, Љ.: Принципот на Дирихле и некои комбинаторни проблеми, Сигма, Скопје
127. Давидов, Љ.: Функционални уравнения, Народна Просвета, София, 1977
128. Давыдов, У. С.: Задачи и упражниния по теоретической арифметике целых чисел, ГУНИМИ БССР, Минска, 1963
129. Димитров, С., Личев, Л., Чобанов, С.: 555 задачи по геометрия (решения по Геометрия в картинки на А. В. Акопян), УНИМАТ СМБ, 2015
130. Димовски, Д., Малчески, Р., Тренчевски, К., Шуниќ, З.: Натпревари по математика '94, СММ, Скопје, 1995
131. Димовски, Д., Тренчевски, К., Малчески, Р., Јосифовски, Б.: Практикум по елементарна математика, Просветно дело, Скопје, 1993
132. Димовски, И.: Врска меѓу биномните коефициенти и пермутациите со повторување, Сигма, Скопје
133. Димовски, И.: Неограниученост на низата совршени и низата прости броеви, Сигма, Скопје
134. Димовски, И.: Теорема на Дезарг, Сигма, Скопје
135. Дирихле, П. Г. Л.: Лекции по теория на числата, Наука и изкуство, София, 1980
136. Докоска, М.: Некои карактеристични неравенства во врска со триаголник, Сигма, Скопје
137. Дуденков, С., Чакърян, К.: Задачи по теория на числата, Регалия 6, София, 1999
138. Ђукић, Д.: Задаци о скуповима, Београд, 2015 (www.imo.org.yu/sc)
139. Ђукић, Д.: Задаци са распоредима бројева, Београд, 2016 (www.imo.org.yu/sc)
140. Ђукић, Д.: Инваријанте, Београд, 2013 (www.imo.org.yu/sc)
141. Ђукић, Д.: Инверзија, Београд, 2013 (www.imo.org.yu/sc)
142. Ђукић, Д.: Комбинаторна геометрија, Београд, 2016 (www.imo.org.yu/sc)
143. Ђукић, Д.: Комбинаторна теорија бројева, Београд, 2016 (www.imo.org.yu/sc)
144. Ђукић, Д.: Математичке игре погађања, Београд, 2015 (www.imo.org.yu/sc)
145. Ђукић, Д.: Микелова тачка и Симсонова права, Београд, 2015 (www.imo.org.yu/sc)
146. Ђукић, Д.: Партиције природног броја, Београд, 2013 (www.imo.org.yu/sc)
147. Ђукић, Д.: Паскалова теорема, пол и полара, Београд, 2015 (www.imo.org.yu/sc)
148. Ђукић, Д.: Полиноми по једној променљивој, Београд, 2015 (www.imo.org.yu/sc)
149. Ђукић, Д.: Полиномске једначине, Београд, 2006 (www.imo.org.yu/sc)
150. Ђукић, Д.: Потенција тачке, Београд, 2012 (www.imo.org.yu/sc)
151. Ђукић, Д.: Холова теорема, Београд, 2016 (www.imo.org.yu/sc)
152. Ђукић, Д.: Хомотетија, Београд, 2016 (www.imo.org.yu/sc)
153. Ерусалимский, Я. М.: Дискретная математика, Везувская книга, Москва, 2004
154. Избраные задачи из журнала American Mathematical monthly, Мир, Москва, 1977
155. Јанев, И.: Една задача, повеќе начини за решавање, Сигма, Скопје
156. Јанев, И.: Варијации на иста тема, Сигма, Скопје
157. Јанев, И.: Метод на неодредени коефициенти, Сигма, Скопје
158. Јанковић, З., Каделбург, З., Младеновић, П. Међународне и балканске математичке олимпијаде 1984-1995, ДМС, Београд, 1995
159. Јегоров, А.: Логаритамски равенки, Сигма, Скопје
160. Каделбург, З.; Ђукић, Д.; Лукић, М.; Матић, И.: Неједнакости, ДМС, Београд, 2003
161. Карамата, Ј.: Комплексан број, са применом на елементарну геометрију, Научна књига, Београд, 1950
162. Карамата, Ј.: Комплексан број, са применом на елементарну геометрију, Научна књига, Београд, 1950
163. Карстенсен, Ј., Муминагић, А.: Адициони теореми, Сигма, Скопје
164. Карстенсен, Ј., Муминагић, А.: Паскаловиот триаголник и бројот е, Сигма, Скопје
165. Карстенсен, Ј., Муминагић, А.: Геометриски решенија на некои задачи поврзани со аркустангенсите, Сигма, Скопје
166. Карстенсен, Ј., Муминагиќ, А.: Геометрски докази на некои тригонометриски равенства, Сигма, Скопје
167. Карстенсен, Ј., Муминагиќ, А.: Суперзлатен четириаголник, Сигма, Скопје
168. Карстенсен, Ј., Муминагиуђ, А.: Фибоначиеви броеви и полиноми со целобројни коефициенти, Сигма, Скопје
169. Кендеров, П., Табов, Й.: Български олимпиади по математика, Народна просвета, София, 1990
170. Кртинић, Ђ.: Математичке олимпијаде средњошколаца 2007-2011 године, ДМ Србије, 2012
171. Кудреватов, Г. А.: Сборник задач по теории чисел, Просвещение, Москва, 1970

172. Кючуков, М.; Недевски, П.: Функционални и диференциални уравнения, Проф. Марин Дринов, София, 1995
173. Лидский В. Б. и др.: Задачи по элементарной математике, Москва, 1962
174. Лихтарников, Л. М.: Элементарное введение в функциональные уравнения, Лань, Санкт-Петербург, 1997
175. Лукић, М.: Инверзија, Београд, 2005 (www.imo.org.yu/sc)
176. Мадески, Ж.; Самарџиски, А.; Целакоски, Н.: Збирка задачи по геометрија, Просветно дело, Скопје, 1981
177. Макарова, Н.: Волшебный мир магических квадратов. Саратов, 2009
178. Малческа, В., Малчески, С.: Латински квадрати и блок дизајни I, Сигма, Скопје
179. Малческа, В., Малчески, С.: Латински квадрати и блок дизајни II, Сигма, Скопје
180. Малчески, А. Манова-Ераковиќ, В., Малчески, Р., Маркоски, Ѓ., Брсаковска. С.: Сигмина ризница (конкурсни здачи 1-192), СММ, Скопје, 2012
181. Малчески, А.: Регресивна индукција, Сигма, Скопје
182. Малчески, А., Малчески, Р. и др.: Натпревари по математика во средното образование во учебната 1998/99 година, СММ, Скопје, 2000
183. Малчески, А., Малчески, Р.: Разбивање на броеви, Математика$^+$, Софија, 1997
184. Малчески, А., Малчески, Р.: Теорема на Чева, Сигма, Скопје, 2018
185. Малчески, А., Малчески, С.: Теорема на Птоломеј, Сигма, Скопје
186. Малчески, А., Манова – Ераковиќ, В., Малчески, Р., Маркоски, Ѓ., Брсакоска, С.: Сигмина ризница (рубрика подготвителни задачи), СММ, Скопје, 2012
187. Малчески, А., Манова – Ераковиќ, В., Малчески, Р.: Сигмина ризница (рубрика задачи 506-1005), СММ, Скопје, 2011
188. Малчески, А., Манова – Ераковиќ, В., Малчески, Р.: Сигмина ризница (рубрика задачи 1006-1200), СММ, Скопје, 2012
189. Малчески, А.: Симетрични полиноми од три променливи 1, Сигма, Скопје
190. Малчески, А.: Симетрични полиноми од три променливи 2, Сигма, Скопје
191. Малчески, А.: Симетрични полиноми од три променливи 3, Сигма, Скопје
192. Малчески, А.: Симетрични полиноми од три променливи 4, Сигма, Скопје
193. Малчески, Р., Аневска, К.: Теорема на Стјуарт, Сигма, Скопје, 2018
194. Малчески, Р., Димовски, Д., Малчески, А., Атанасов, Р., Манова – Ераковиќ, В., Јанев, И.: Меѓународни математички олимпијади, СММ, Скопје, 2000
195. Малчески, Р., Димовски, Д., Малчески, А., Тренчевски, К.: Натпревари по математика '96, СММ, Скопје, 1997
196. Малчески, Р., Димовски, Д., Тренчевски, К.: Натпревари по математика '95, СММ, Скопје, 1996
197. Малчески, Р., Докоска, М.: Математика 2, Просветно дело, Скопје, 2002
198. Малчески, Р., Малческа, В.: Математика 1 – алгебарски структури (второ издание), ФОН универзитет, Скопје, 2012
199. Малчески, Р., Малческа, В.: Математика 2 – векторска и линеарна алгебра (второ издание), ФОН универзитет, Скопје, 2012
200. Малчески, Р., Малческа, В.: Математика 3 – калкулус 1 (трето изадние), ФОН универзитет, Скопје, 2011
201. Малчески, Р., Малческа, В.: Математика 4 – калкулус 2 (трето издание), ФОН универзитет, Скопје, 2011
202. Малчески, Р., Малческа, В.: Математика 5 – дискретна математика (второ издание), ФОН универзитет , Скопје, 2011
203. Малчески, Р., Малчески, А. Избрани содржини од елементарна математика, СММ, Скопје, 1994
204. Малчески, Р., Малчески, А., Аневска, К.: Вовед во елементарна теорија на броеви, СММ, Скопје, 2015
205. Малчески, Р., Малчески, А.: Избрани содржини од елементарна математика, СММ, Скопје, 1993
206. Малчески, Р., Малчески, А.: Пресликување во рамнина преку комплексни броеви I, Сигма, Скопје, 2000
207. Малчески, Р., Малчески, А.: Пресликување во рамнина преку комплексни броеви II, Сигма, Скопје, 2000
208. Малчески, Р., Малчески, А.: Пресликување во рамнина преку комплексни броеви III, Сигма, Скопје, 2001
209. Малчески, Р., Малчески, А.: Пресликување во рамнина преку комплексни броеви IV, Сигма, Скопје, 2001

210. Малчески, Р., Малчески, А.: Теорема на Helly за конвексните множества, Математика, Софија, 1997
211. Малчески, Р., Малчески, А.: Функции и функционални равенки, СММ, Скопје, 2016
212. Малчески, Р., Малчески, А.: Херонови триаголници, Сигма, Скопје, 1994
213. Малчески, Р., Малчески, С.: Белешка за распределбата на простите броеви, Сигма, Скопје, 2018
214. Малчески, Р., Малчески, С.:. Ред на број по модул и примитивни корени, Сигма, Скопје, 2018
215. Малчески, Р., Манова – Ераковиќ, В., Марковски, Ѓ., Малчески, А.: Сигмина ризница (рубрика задачи 1-505), СММ, Скопје, 2008
216. Малчески, Р., Цветковски, З.: Математичка индукција 1, Сигма, Скопје, 2005
217. Малчески, Р., Цветковски, З.: Математичка индукција 2, Сигма, Скопје, 2005
218. Малчески, Р.. Паркетирания и приложения, Математика +, София, 2001
219. Малчески, Р.: Метод на инваријанти, Сигма, Скопје, 2014
220. Малчески, Р.: Аневска, К.: Хомотетија, Сигма, Скопје, 2014
221. Малчески, Р.: Ах тие питагорови тројки, Сигма, Скопје, 1995
222. Малчески, Р.: Две важни неравенства и бројот е, Сигма, Скопје, 1996
223. Малчески, Р.: Елементарна алгебра, Просветно дело, Скопје, 2002
224. Малчески, Р.: Елементарни алгебарски и аналитички неравенства, СММ, Скопје, 2016
225. Малчески, Р.: Елементарно испитување на текот и скицирање на графикот на кубната функција, Сигма, Скопје, 1993
226. Малчески, Р.: Енгелов принцип на минимум, Сигма, Скопје, 2016
227. Малчески, Р.: За рационалните корени на полином од *n*-ти степен со целобројни коефициенти, Сигма, Скопје, 1992
228. Малчески, Р.: Мултипликативни функции и теорема на Ојлер, Сигма, Скопје, 2004
229. Малчески, Р.: Неколку елементарни алгебарски методи за определување екстремни вредности, Сигма, Скопје, 2004
230. Малчески, Р.: Неравенства меѓу срединитe и пресметување на квадратен корен од позитивен број, Математика+, София, 2003
231. Малчески, Р.: Неравенства меѓу срединитe, Сигма, Скопје, 2011
232. Малчески, Р.: Неравенство на Коши-Буњаковски-Шварц, Сигма, Скопје, 2011
233. Малчески, Р.: Неравенство на Чебишев, Сигма, Скопје, 2011
234. Малчески, Р.: Проблем на бои, Сигма, Скопје, 2000
235. Малчески, Р.: Пчелиното саќе – генијална творба во природата, Сигма, Скопје, 2013
236. Малчески, Р.: Семејно решавање на една „едноставна“ задача, Сигма, Скопје
237. Малчески, Р.: Теорема на Менелај, Сигма, Скопје, 1999
238. Малчески, Р.: Триаголни броеви, Сигма, Скопје, 1995
239. Малчески, Р.: Фибоначиеви броеви, Сигма, Скопје, 2009
240. Малчески, Р.: Функциите [x] и {x}, Сигма, 2015
241. Малчески, Р.: Хармониска прогресија, Сигма, Скопје, 1999
242. Малчески, Р.:. Една задача повеќе начини на решавање, Сигма, Скопје, 2001
243. Маркоска, Ј., Маркоски, Ѓ.: Тангентни-тетивни четириаголници, Сигма, Скопје
244. Маркоска, Ј., Маркоски, Ѓ.: Геометриско пресметување на тригонометриски функции од некои агли, Сигма, Скопје
245. Маркоска, Ј., Маркоски, Ѓ.: Гометриско решавање на системи равенки 1, Сигма, Скопје
246. Маркоска, Ј., Маркоски, Ѓ.: Гометриско решавање на системи равенки 2, Сигма, Скопје
247. Маркоска, Ј., Маркоски, Ѓ.: Тангентни четириаголници, Сигма, Скопје
248. Маркоска, Ј., Маркоски, Ѓ.: Тетивни четириаголници, Сигма, Скопје
249. Маркоска, Ј.: Една задача, повеќе начини за решавање, Сигма, Скопје
250. Маркоски, Ѓ. Девет карактеристични точки за триаголник 1, Сигма, Скопје
251. Маркоски, Ѓ. Девет карактеристични точки за триаголник 2, Сигма, Скопје
252. Маркоски, Ѓ. Девет карактеристични точки за триаголник 3, Сигма, Скопје
253. Маркоски, Ѓ. Девет карактеристични точки за триаголник 4, Сигма, Скопје
254. Матић, И.: Инверзија, Београд (www.imo.org.yu/sc)
255. Миличић, П.: Идентични трансформации (збирка нестандардни решени задачи), СММ, Скопје, 2013

256. Миовска, В.: Една задача и дванаесет начини за решавање, Сигма, Скопје
257. Миовска, В.: Теорема на Симпсон, Сигма, Скопје
258. Михелович, Ш. Х.: Теория чисел, Высшая школа, Москва, 1967
259. Младеновић, П.: Комбинаторика (четврто издање), ДМС, 2013
260. Моденов, П. Ц.: Задачи по геометрии, Наука, Москва, 1979
261. Морозова, Е. А., Петраков, А. С., Скворцов, В. А.: Международние математические олимпиады, Просвещение, Москва, 1976
262. Муминагиħ, А., Карстенсен, Ј.: Една задача, повеќе начини за нејзино решавање, Сигма, Скопје
263. Муминагиħ, А., Карстенсен, Ј.: Познати задачи со не така познати решенија, Сигма, Скопје
264. Муминагиħ, А.: Бабилиерова теорема, Сигма, Скопје
265. Муминагиħ, Никобинг: За една интересна математичка задача со корени, Сигма, Скопје
266. Мушкаров, О., Грозед, С.: Едно математичко чудовиште, Сигма, Скопје
267. Нагел, Т.: Увод в теорията на числата, Наука и изкуство, София, 1971
268. Начевска-Настоска, Б., Настоски, Љ.: Системи од точки или принцип на Дирихле, Сигма, Скопје
269. Пиперевски, Б., Малчески, Р., Малчески, А., Стојковска, И.: Избрани содржини од елементарна математика II (второ издание), СММ, Скопје, 2014
270. Плотников, А. Д.: Дискретная математика, Новое знание, Москва, 2005
271. Поја, Г.: Математическое откріитие, Москва 1976
272. Поповиќ-Грибовска, Л.: Инверзија, Сигма, Скопје
273. Поповска – Грибовска, Л.: За Виетовата теорема, Сигма, Скопје
274. Самарџиски, А.: Хомотетија, инверзија и задачите на Аполониј, ПМФ, Скопје, 1988
275. Серпинский, В.: 250 задач по елементарной теории чисел, Просвещение, Москва, 1976
276. Серпинский, В.: Что мы знаем и чего мы не знаем о Простиых числа, Физматгиз, Москва, 1963
277. Сивашинский, И. Х.: Неравенства в задачах, Наука, Москва, 1967
278. Стојменовска, И.: Обопштена равенка на Ојлер, Сигма, Скопје
279. Страшевич, С., Боровкин, Е.: Польские математические олимпиады, Мир, Москва, 1978
280. Тонов, И. К.; Сидеров, П. Н.: Приложение на комплексните числа в геометрията, Наука, София, 1981
281. Тренчевски, Г., Малчески, Р., Тренчевски, К.: Математика 3, (авторизиран ракопис), 2003
282. Тренчевски, К., Урумов, В.: Меѓународни олимпијади по математика, Природно – математички факултет, Скопје, 2000
283. Филеп, Л., Березнай, Г.: История на цифрите. София, Техника, 1988
284. Филиповски, С.: 200 –тероија на броеви (подготвителни задачи), Скопје, 2013
285. Филиповски, С.: Една задача, повеќе начини за ршавање, Сигма, Скопје
286. Хинчин, А. Я.: Три бисера од теорията на числата, Наука и изкуство, София, 1971
287. Хинчин, А. Я.: Цепные дроби, Физматгиз, Москва, 1961
288. Хинчин, А. Я.: Элементи теории чиесл, Гостехиздат, Москва-Ленинград, 1951
289. Цветковски, З., Малчески, Р.: Алгоритам за генерирање на Питагорини тројки, Сигма, Скопје, 2006
290. Цветковски, З., Малчески, Р.: Докажување на симетрични неравенства со три променливи, Сигма, Скопје, 2008
291. Цветковски, З., Малчески, Р.: Еден метод за докажување неравенства со три променливи, Сигма, Скопје, 2008
292. Цветковски, З., Малчески, Р.: Неравенства на Schur и Muirhead, Сигма, Скопје, 2007
293. Цофман, Ј.: Примена на паркетот при решавање на задачи, Сигма, Скопје, 2000
294. Шаригин, И.: Задачи по геометрија, Наука, Москва, 1986 (на руски)
295. Школярски, Д. О.; Ченцов, Н. Н.; Яаглом, И. М.: Избраные задачи и теоремы по елементарной математике, Наука, Москва, 1976
296. Шнилерман, Л. Г.: Простиы числа, Гостехиздат, Москва-Ленинград, 1940
297. Штерјов, З.: Конвексност и тригонометриски неравенства 1, Сигма, Скопје
298. Штерјов, З.: Конвексност и тригонометриски неравенства 2, Сигма, Скопје
299. Штерјов, З.: Конвексност на функцијата $f(x)=\frac{1}{x}$ на интервалот $(0,\infty)$ и една примена, Сигма, Скопје
300. Штерјов, З.: Методи за докажување неравенства, Пробиштип, 2008
301. Штерјов, З.: Триаголници чии страни формираат аритметичка прогресија, Сигма, Скопје
302. Штерјов, З.: Функционални равенки во множеството реални броеви, НУ Гоце Делчев, Штип, 2011