Лилјана Грибовска-Поповиќ

ЗА ВИЕТОВАТА ТЕОРЕМА

Делата на повеќе математичари се вградени во современата средношколска математика. Но, два математичари за неа направиле повеќе отколку останатите: античкиот геометар Евклид и таткото на современата алгебра, Франсоа Виет.

Франсоа Виет (1540-1603) е француски математичар. Најнапред студирал право и работел како адвокат. Тој бил сестрано образуван човек кој добро ги знаел и класичните јазици, но и астрономијата, а на математиката и се предавал со занес. Умеел своето знаење и способности да ги примени на различни математички проблеми и се случувало со денови да остане без храна и сон, за да ги реши.

Неговите остроумни мисли ширум ја отвориле вратата на математиката во новиот свет на современата алгебра чии основи лежат на сметањето со букви. Пред него скоро сите пресметковни операции и знаци биле пишувани со зборови. На пример, денешниот израз

$$a^3 + ab = c\ ,$$

се запишува како:

A cubus + A planum in B aequantor C solido ,

каде aequantur е напишано место знакот за еднакво, а planum значи плоштина. Во негово време не можеле да се запишат, па ниту да се проучуваат алгебарските равенки во општ облик или други алгебарски изрази. Виет и неговите следбеници забележале дека не се важни самите цифри или геометриските толкувања на самиот број, туку може да се смета дека сите тие броеви припаѓаат на ист вид и може да се означуваат, на пример со буквите од латинската азбука.

Денес, кога секој ученик умее автоматски да ги примени и запише правилата што ги вовел Виет, јасно е зошто тој е толку важен за севкупната современа алгебра,

Виетовата заслуга е и запишувањето на алгебарските изрази со помош на формули. Ваквиот начин на обележување и остроумноста му овозможиле на Виет да дојде до важни откритија при проучувањата на општиалгебарски равенки. Едно од нив, со кое особено се гордеел, е и познатата **Виетова теорема**, на средношколците позната во следниот облик:

Ако x_1 и x_2 се решенија(кморени) на квадратната равенка

$$x^2 + px + q = 0\ ,$$

тогаш за нив важи:

$$x_1 + x_2 = -p \qquad \text{и} \qquad x_1 x_2 = q\ .$$

Нејзиниот доказ лесно може да се изведе ако на местата на x_1 и x_2 се стави

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\ .$$

Овде ќе биде докажана обопштената Виетова теорема, при што ќе бидат искористени следниве својства:

1° Секој полином со реални коефициенти има барем еден комплексен корен.

2° Ако a е корен на полиномот

$$P_n(x) = a_\circ x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n\ ,$$

тогаш постои полином

$$Q_{n-1}(x) = b_\circ x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \ldots + b_{n-1}\ ,$$

таков што

$P_n(x) = (x-a)Q_{n-1}(x)$.

3° Еден полином од n -ти степен може да има најмногу n корени.

4° Ако $P_n(x) = a_\circ x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$, тогаш постојат $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{C}$, така што

$P_n(x) = a_\circ (x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)$.

Теорема. Ако $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{C}$ се корени на полиномната равенка

$$a_\circ x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n = 0 ,$$

тогаш точни се следните равенства:

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = -\frac{a_1}{a_\circ} ,$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + ... + x_{n-1}x_n = \frac{a_2}{a_\circ} ,$$

$$x_1x_2x_3 + ... + x_{n-2}x_{n-1}x_n = -\frac{a_3}{a_\circ} ,$$

....

$$x_1x_2...x_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_\circ} .$$

Доказ. Бидејќи имаме

$$a_\circ x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n = a_\circ (x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n) =$$
$$= a_\circ x^n - a_\circ (x_1 + x_2 + ... + x_n)x^{n-1} + a_\circ (x_1x_2 + x_1x_3 + ... + x_{n-1}x_n)x^{n-2} +$$
$$+ a_\circ (x_1x_2x_3 + ... + x_{n-2}x_{n-1}x_n)x^{n-3} + ... + (-1)^n a_\circ x_1x_2...x_n .$$

Со изедначување на коефициентите пред еднаквите степени на x ги добиваме бараните формули.

При мер 1. Не решавајќи ја равенката $x^3 - 3x^2 + 2x + 5 = 0$, најди го збирот на квадратите на нејзините корени.

Решение. Нека x_1, x_2, x_3 се корени на дадената равенка. Според Виетовата теорема имаме:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3 , \qquad (1)$$

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 2 \qquad (2)$$

$$x_1x_2x_3 = -5 .$$

Ако во идентитетот:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) ,$$

ги замениме (1) и (2), ќе добиеме:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 3^2 - 2\cdot 2 = 5 .$$

Значи,бараниот збир е 5 .

Пример 2. Броевите α и β ($\alpha \neq \beta$) се корени на равенката

$$x^3 + px + q = 0 ,$$

и го задоволуваат равенството

$$\alpha\beta + \alpha + \beta = 0 .$$

Да се изрази третиот корен на равенката преку α и β , а потоа да се најде односот меѓу p и q .

Решение. Нека третиот корен на равенката е γ . Според формулите на Виет $\alpha + \beta + \gamma = 0$, па одовде:

$\gamma = -(\alpha + \beta)$. (1)

Но, од условот на задачата $\alpha + \beta = -\alpha\beta$, па значи $\gamma = \alpha\beta$.

Од формулите на Виет, исто така важи

$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = p$ (2)

$\alpha\beta\gamma = -q$. (3)

Ако сега од условот на задачата $\alpha\beta + \alpha + \beta = 0$ и од равенствата (1),(2) и (3) ги исклучиме α, β, γ, ќе добиеме $(p - q)^2 = q$.

Пример 3.Ако x_1, x_2, x_3 се корени на равенката $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, состави равенка од трет степен по y, чии корени се $y_1 = x_2 + x_3$, $y_2 = x_1 + x_3$ и $y_3 = x_1 + x_3$.

Решение.Бидејќи x_1, x_2, x_3 се корени на равенката $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, според Виетовата теорема важи:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -a,$$

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = b$$

$$x_1x_2x_3 = -c.$$

Од друга страна за корените на бараната равенка, која ќе има облик

$$y^3 + py^2 + qx + r = 0,$$

според Виетовата теорема ќе важи:

$$y_1 + y_2 + y_3 = -p,$$

$$y_1y_2 + y_2y_3 + y_3y_1 = q$$

$$y_1y_2y_3 = -r.$$

Од условите на задачата имаме:

а)За

$$y_1 + y_2 + y_3 = 2(x_1 + x_2 + x_3) = 2(-a) = -2a.$$

Значи, $-p = -2a$, т.е. $p = 2a$.

б)За

$$y_1y_2 + y_2y_3 + y_3y_1 = (x_2 + x_3)(x_1 + x_3) + (x_1 + x_3)(x_1 + x_2) + (x_1 + x_2)(x_2 + x_3) =$$
$$= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 3(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) =$$
$$= a^2 + b.$$

Значи, $q = a^2 + b$.

в)За

$$y_1y_2y_3 = (x_2 + x_3)(x_1 + x_3)(x_1 + x_2) = 2x_1x_2x_3 + x_1^2x_2 + x_2^2x_1 + x_2^2x_3 + x_3^2x_2 + x_1^2x_3 + x_3^2x_1 =$$
$$= (x_1 + x_2 + x_3)(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) - x_1x_2x_3 = -ab + c.$$

Значи,

$$r = ab - c$$

Тогаш бараната равенка од трет степен гласи:

$$y^3 + 2ay^2 + (a^2 + b)y + ab - c = 0.$$

Пример 4.Најди ги корените на равенката $x^3 + ax + b = 0$, ако се знае дека има еден двоен корен.

Решение.Ако x_1, x_2, x_3 се корени на дадената равенка, тогаш според Виетовата теорема имаме:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0,$$

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = a$$

$$x_1x_2x_3 = -b.$$

Од условот на задачата нека $x_1 = x_2$, тогаш имаме:

$2x_1 + x_3 = 0$,

$x_1^2 + 2x_3x_1 = a$

$x_1^2x_3 = -b$.

Од првата равенка $x_3 = -2x_1$. Тогаш во втората и третата равенка добиваме:

$x_1^2 - 4x_1^2 = a$,

$-2x_1^3 = -b$.

Значи, $x_1^2 = -\frac{a}{3}$, односно $x_1^3 = \frac{b}{2}$. Одовде, бидејќи $x_1 \cdot x_1^2 = \frac{b}{2}$, добиваме $x_1 \cdot \left(-\frac{a}{3}\right) = \frac{b}{2}$, односно $x_1 = -\frac{3b}{2a}$. На крајот бидејќи $x_3 = -2x_1$, имаме $x_3 = \frac{3b}{a}$.

Пример 5.Кој услов треба да го исполнат коефициентите p,q и r на равенката $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, така што за нејзините корени да важи релацијата $x_1x_2 = x_3$.

Решение.Нека x_1, x_2, x_3 се корени на дадената равенка. Според Виетовата теорема имаме:

$x_1 + x_2 + x_3 = -p$,

$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = q$

$x_1x_2x_3 = -r$.

Од првата равенка добиваме $x_1 + x_2 = -(x_3 + p)$, додека во втората и третата равенка ако го примениме условот на задачата ќе добиеме:

$$x_3 + x_3(x_1 + x_2) = q \quad (1)$$

$$x_3^2 = -r \quad (2)$$

Значи, од (1) ќе имаме:

$x_3 + x_3(-(x_3 + p)) = q$,

$x_3 - x_3^2 - x_3p = q$

$x_3 + r - x_3p = q$,

$x_3(1-p) = q + r$

$x_3 = \frac{q+r}{1-p}$.

Додека, од (2) ќе имаме: $x_3 = \pm\sqrt{-r}$. Од споредбата на последните два резултата ја добиваме бараната врска меѓу коеифициентите p,q и r на дадената равенка

$(1-p)\sqrt{-r} = q + r$.

Пример 6.Одреди ги коефициентите a и b, така што равенката од четврти степен $ax^4 + bx^3 + 1 = 0$, да има еден двоен корен $x = 1$.

Решение.Нека x_1, x_2, x_3, x_4 се корени на дадената равенка, тогаш според Виетовата теорема имаме:

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{b}{a}$,

$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = 0$,

$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = 0$

$x_1x_2x_3x_4 = \frac{1}{a}$.

Од условот на задачата нека $x_3 = x_4 = 1$, тогаш од горните равенства имаме:

$$x_1 + x_2 + 2 = -\frac{b}{a},$$
$$x_1x_2 + 2x_1 + 2x_2 + 1 = 0,$$
$$2x_1x_2 + x_1 + x_2 = 0$$
$$x_1x_2 = \frac{1}{a}.$$

Од втората и третата равенка наоѓаме дека: $x_1x_2 = \frac{1}{3}$, додека $x_1 + x_2 = -\frac{2}{3}$. Заменувајќи ги овие резултати во четвртата односно првата равенка, ќе добиеме дека $a = 3$, додека $b = 4$.

Пример 7.Реши го системот равенки

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ xy + yz + zx = a^2 \\ xyz = a^3 \end{cases}$$

Решение 1.Да го замениме збирот $x+y$ од првата равенка во втората, ќе добиеме:

$$xy + z(a-z) = a^2.$$

Сега xy од оваа равенак да го замениме во третата равенка, ќе добиеме:

$$z^3 - az^2 + a^2z - a^3 = 0.$$

Левата страна од ова равенство можеме да ја разложиме на множители:

$$(z-a)(z-ai)(z+ai) = 0.$$

Од овде имаме:

$$z_1 = a,\ z_2 = ai,\ z_3 = -ai.$$

Ако го замениме $z_1 = a$ во првата и втората равенка ќе го добиеме системот: $x + y = 0$, $xy = a^2$. Одовде $x = \pm ai$, $y = \pm ai$. Притоа лесно може да се провери дека тројките броеви (x, y, z):

$$(ia, -ai, a),\ (-ia, ai, a),$$

го задоволуваат почетниот систем равенки.

Аналогно наоѓаме уште два пара решенија, од $z_2 = ai$ и од $z_3 = -ai$. Тоа се:

$$(a, -ai, ai),\ (a, ai, -ai),\ (ai, a, -ai), ((-ai, a, ai).$$

На тој начин шесте горедобиени решенија го задоволуваат системот.

Решение 2.До овој резултат можеме да дојдеме и на поелегантен начин, ако воочиме дека дадениот систем равенки се сведува на решавање на кубната равенка:

$$t^3 - at^2 + a^2t - a^3 = 0 \qquad (1)$$

Ако на неа ги примениме Виетовите формули, трите корени на равенката (1) се:

$$t_1 = a,\ t_2 = ia,\ t_3 = -ia.$$

Ако ги индекситаме на сите можни начини ($3!$), ќе ги добиеме сите решенија на разгледуваниот систем. На таков начин ние повторно ги имаме шесте решенија, најдени и во погоре наведеното решение. Овде ќе покажеме дека тие шест решенија се сите можни решенија на дадениот систем равенки. Навистина, да земеме тројката (x_1, y_1, z_1) да е некое решение на системот равенки и да ја разгледаме равенката од трет степен:

$$(t - x_1)(t - y_1)(t - z_1) = 0, \qquad (2)$$

чии корени се броевите x_1, y_1 и z_1. Ако се ослободиме од заградите во равенката (2) и ако ги искористиме равенствата:

$$x_1 + y_1 + z_1 = a$$
$$x_1y_1 + y_1z_1 + z_1x_1 = a^2$$
$$x_1y_1z_1 = a^3$$

ќе забележиме дека равенките (1) и (2) се еквивалентни. Значи, x_1, y_1 и z_1 се јавуваат како корени и на равенката (1), што и требаше да се докаже.

ЗАДАЧИ ЗА САМОСТОЈНА РАБОТА

1.Не решавајќи ја равенката $x^3 - 2x^2 + x - 3 = 0$, најди го збирот на квадратите на нејзините корени.

2.Состави равенка од трет степен по y, чии корени се

$$y_1 = x_2 + x_3\ ,\ y_2 = x_1 + x_3\ ,\ y_3 = x_1 + x_3$$

каде x_1, x_2, x_3 се корени на равенката $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$, без да ја решаваш равенката по x.

3.Под кој услов равенката $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, има трикратен корен.

4.Кој услов треба да ги исполнуваат коефициентите p, q и r на равенката

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0\ ,$$

така што за нејзините корени да важи релацијата $x_1 + x_2 = x_3$.

5.Реши го системот равенки

$$\begin{cases} x + y + z = 9 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1 \\ xy + yz + zx = 27. \end{cases}$$

ЛИТЕРАТУРА

1.Bell Eric Templ, *Veliki Matematičari*, Zagreb, 1972

2.Stipanić Ernest, *Putevima razvitka matematike*, Vuk Karadzić, Beograd, 1982

3.Лидскиј В.Б и др. *Задачи по елементарној математике*, Москва, 1962.