XX Медитеранска математичка олимпијада,

23 април 2017

Problem 1

Определи го најмалиот цел број n, за кој постојат цели броеви $x_1,\dots,x_n$ и позитивни цели броеви $a_1,\dots,a_n$, такви што

$$x_1+\dots+x_n=0, \qquad a_1x_1+\dots+a_nx_n>0, \qquad a_1^2x_1+\dots+a_n^2x_n<0.$$

Problem 2

Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што $a+b+c=1$. Докажи дека

$$\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(\frac{a^3}{x^2+2y^2}+\frac{b^3}{y^2+2z^2}+\frac{c^3}{z^2+2x^2}\right)\geq\frac{1}{9},$$

е исполнето за било кои позитивни реални броеви x,y и z.

Problem 3

Нека P е некоја точка од опишаната кружница околу триаголникот ABC кој е рамностран. Определи ги, со доказ, сите позитивни цели броеви $n\in\mathbb{N}^*$ такви што збирот

$$S_n(P)=|PA|^n+|PB|^n+|PC|^n,$$

не зависи од изборот на точката P.

Problem 4

Множеството S го нарекуваме *балеарско*, ако тоа содржи два елементи (не обавезно различни) $s,s'\in S$ чиј збир $s+s'$ е еднаков на степен на бројот 2; во спротивен случај го нарекуваме *небалеарско*.

Определи го целиот број n таков што $\{1,2,\dots,n\}$ содржи 99 елементно подмножество кое е *небалеарско* множество, додека сите негови 100 елементни подмножества се *балеарски*.

време за работа: 04:30 hours **Секој задача** се вреднува со најмногу 7 поени