

ВАРИЈАЦИИ НА ИСТА ТЕМА

Во СИГМА бр. 47 понудивме две решенија на една “натпреварувачка” задача (планиметриско и тригонометриски). Од вас се бараше прво да реките една задача, многу слична на дадената, а потоа, како вистински математичари, да формулирате задача, која ќе ги опфати дадените “натпреварувачки” задачи, но ќе опфати и други задачи, слични на нив. Имено, требаше да формулирате задача со општи услови и да најдете нејзино решение.

Целта ни беше да видиме колку се задлабочувате во решението на една задача и дали имате навика во една “обична” задача, со конкретни услови, да согледате “многу” задачи, слични на неа, т.е. да дадете генерализација на одреден вид на задачи.

До сега се јави само Борче Јошевски, ученик во IV година во гимназијата “Јосип Броз Тито” од Битола. Неговиот напис го објавуваме без какво и да е “дотерување”, а од вас очекуваме да се “сложите” со него или да понудите друго решение. Еве како Борче Јошевски ја формулира општата

Задача. Во внатрешноста на рамнокрак триаголник ABC ($\overline{AC} = \overline{BC}$), со агол при основата α , е избрана точка D , таква што $\angle BAD = \alpha_1$ и $\angle ABD = \alpha_2$. Одреди го аголот BCD .

Решение. Нека $\overline{AC} = \overline{BC} = b$, $\angle BAC = \angle ABC = \alpha$, $\angle BAD = \alpha_1$, $\angle ABD = \alpha_2$, $\angle BCD = \varphi = ?$; тогаш

$$\overline{AB} = 2b \cos \alpha, \angle ADB = \pi - (\alpha_1 + \beta_1), \angle DBC = \beta_2, \angle BDC = \pi - (\beta_2 + \varphi)$$

Според синусната теорема за $\triangle ABD$ и $\triangle BCD$ наоѓаме:

$$\frac{2b \cos \alpha}{\sin[\pi - (\alpha_1 + \beta_1)]} = \frac{\overline{BD}}{\sin \alpha_1}$$

$$\overline{BD} = \frac{2b \cos \alpha \sin \alpha_1}{\sin(\alpha_1 + \beta_1)} \quad (1)$$

$$\frac{b}{\sin[\pi - (\beta_2 + \varphi)]} = \frac{\overline{BD}}{\sin \varphi}$$

$$\overline{BD} = \frac{b \sin \varphi}{\sin(\beta_2 + \varphi)} \quad (2)$$

Од (1) и (2) добиваме:

$$\frac{2b \cos \alpha \sin \alpha_1}{\sin(\alpha_1 + \beta_1)} = \frac{b \sin \varphi}{\sin(\varphi + \beta_2)}$$

$$2b \cos \alpha \sin \alpha_1 \sin(\varphi + \beta_2) = b \sin \varphi \sin(\alpha_1 + \beta_1)$$

$$2 \cos \alpha \sin \alpha_1 [\sin \varphi \cos \beta_2 + \cos \varphi \sin \beta_2] = \sin \varphi \sin(\alpha_1 + \beta_1)$$

$$2 \cos \alpha \sin \alpha_1 \cos \varphi \sin \beta_2 = \sin \varphi [\sin(\alpha_1 + \beta_1) - 2 \cos \alpha \sin \alpha_1 \cos \beta_2]$$

$$\operatorname{ctg} \varphi = \frac{\sin(\alpha_1 + \beta_1)}{2 \cos \alpha \sin \alpha_1 \sin \beta_2} - \operatorname{ctg} \beta_2$$

Оттука
$$\varphi = \operatorname{arccctg} \left[\frac{\sin(\alpha_1 + \beta_1)}{2 \cos \alpha \sin \alpha_1 \sin \beta_2} - \operatorname{ctg} \beta_2 \right].$$

Забелешка. Веројатно забележувате конечниот резултат е доста “сложено исказан”. Проверете го решението на Борче Јошевски на конкретните примери од задачите (види СИГМА бр. 47).

Можете ли да најдете “поедноставен” резултат? Очекуваме да се јавите.