

## XXI олимпијада

1. Нека  $p, q \in \mathbb{N}$  и  $\frac{p}{q} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319}$ . Докажи дека  $1979 \mid p$ .

**Решение.** Нека  $A = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{1319}$  и  $B = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{1318}$ . Тогаш е исполнето

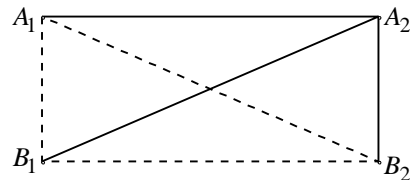
$$\begin{aligned} \frac{p}{q} &= A - B = (A + B) - 2B = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{1319} - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \dots - \frac{1}{659} \\ &= \frac{1}{660} + \frac{1}{661} + \dots + \frac{1}{1319} = \left(\frac{1}{660} + \frac{1}{1319}\right) + \dots + \left(\frac{1}{989} + \frac{1}{990}\right) \\ &= \frac{1979}{660 \cdot 1319} + \frac{1979}{661 \cdot 1318} + \dots + \frac{1979}{989 \cdot 990} = \frac{1979N}{660 \cdot 661 \cdot \dots \cdot 1319}. \end{aligned}$$

Бидејќи 1979 е прост број, тој не може да се скрати со ниту еден од множителите од именителот. Затоа броителот на добиената дробка е делив со 1979.

2. Дадена е петстрана призма со основи  $A_1A_2A_3A_4A_5$  и  $B_1B_2B_3B_4B_5$ . Сите рабови на основите и сите отсечки  $A_iB_j$  ( $i, j = 1, 2, 3, 4, 5$ ) се обоени со црвена или зелена боја, така што во секој триаголник, чии темиња се во темињата на основите на призмата, постојат две страни обоени со различна боја. Докажи дека сите десет рабови на основите на призмата се обоени со иста боја.

**Решение.** 1° Ке докажеме дека, ако некој раб од некоја од основите е обоен со една боја, тогаш за секое теме кое е крајна точка на тој раб постојат барем три отсечки кои го поврзуваат со темињата на другите основи и кои се обоени со друга боја.

Претпоставуваме дека, на пример работ  $A_1A_2$  е обоен со зелена боја, и спротивно на тврдењето, барем три од отсечките  $A_2B_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4, 5$  се исто така обоени со зелена боја. Нека се тоа отсечките  $A_2B_j$ ,  $A_2B_k$ ,  $A_2B_m$ . Од три



Црпй. 21.1.

темиња на петаголникот барем две се соседни. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека  $j = 1$ ,  $k = 2$ . Тогаш отсечките  $A_2A_1$ ,  $A_2B_1$  и  $A_2B_2$  се обоени зелено (на цртежот се означени со полна линија). Според условот на задачата, отсечките  $A_1B_1$ ,  $A_1B_2$  и  $B_1B_2$  се обоени црвено, т.е.  $\triangle A_1B_1B_2$  е еднобоен, што противречи на претпоставката. Со тоа е покажано дека барем три отсечки  $A_2B_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4, 5$  се обоени црвено.

2° Ке докажеме дека петаголниците при основите се еднобојни. Да го претпоставиме спротивното, т.е. дека во некој од нив постојат рабови со различна боја. Нека на пример, работ  $A_1A_2$  е зелен, а работ  $A_2A_3$  е црвен. Според 1°,

најмалку три од отсечките  $A_2B_i$ ,  $i=1,2,3,4,5$  се црвени, а најмалку три се зелени, што не е можно.

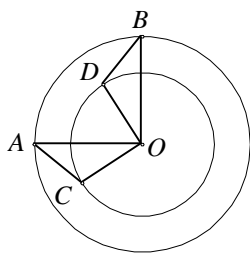
3° Да претпоставиме дека сите страни на основата  $A_1A_2A_3A_4A_5$  се зелени, а сите страни на основата  $B_1B_2B_3B_4B_5$  се црвени. Ако 1° го примениме на страните на основата  $A_1A_2A_3A_4A_5$ , добиваме дека од дваесет и петте отсечки  $A_iB_j$ ,  $i, j=1,2,3,4,5$  има најмалку  $5 \cdot 3 = 15$  црвени. Аналогно, од петаголникот  $B_1B_2B_3B_4B_5$  заклучуваме дека меѓу тие отсечки барем 15 се зелени. Бидејќи ова не е можно, сите десет рабови на основите на призмата се обоени со иста боја.

На крајот да забележиме дека призма со саканите својства постои. Дади пример!

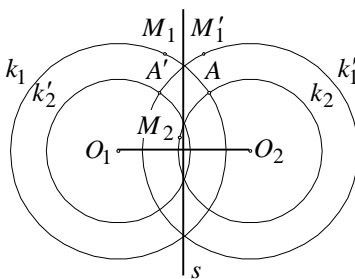
3. Во рамнина се дадени кружници  $k_1$  и  $k_2$ , за кои една пресечна точка е точката  $A$ . По кружниците  $k_1$  и  $k_2$ , тргнувајќи од точката  $A$  истовремено почнуваат да се движат точки  $M_1$  и  $M_2$ . Точките се движат во ист правец со еднакви аголни брзини и повторно се сретнуваат во точката  $A$ . Докажи дека во рамнината постои точка  $P$  која во секој момент е еднакво оддалечена од точките  $M_1$  и  $M_2$ .

**Решение.** Ќе го користиме следното тврдење, чиј доказ го оставаме на читателот за вежба: *Ако  $AB$  и  $CD$  се лаци на кружници со заеднички центар  $O$  и ако  $\angle AOB = \angle COD$ , тогаш  $\overline{AC} = \overline{BD}$ .*

Нека  $O_1$  и  $O_2$  се центри на дадените кружници  $k_1$  и  $k_2$ ,  $s$  е симетрала на отсечката  $O_1O_2$  и  $\phi$  е симетрија во однос на правата  $s$ . Ги воведуваме ознаките  $A' = \phi(A)$ ,  $k'_1 = \phi(k_1)$ ,  $k'_2 = \phi(k_2)$ . Јасно,  $A' \in k'_1 \cap k'_2$ . Кружниците  $k'_1$  и



Црп. 21.2.



Црп. 21.3.

$k_2$  се концентрични, како и кружниците  $k'_2$  и  $k_1$ .

Ќе докажеме дека  $A'$  е точка која ги задоволува условите од задачата. Нека во некој момент првата точка се наоѓа во  $M_1 \in k_1$ , а втората во  $M_2 \in k_2$ .

Од условот на задачата следува  $\sphericalangle M_1 O_1 A = \sphericalangle M_2 O_2 A$ . Ако  $M'_1 = \phi(M_1)$ , тогаш  $\overline{AM'_1} = \overline{A'M'_1}$ . Исто така  $\sphericalangle A'O_2 M'_1 = \sphericalangle M_1 O_1 A = \sphericalangle M_2 O_2 A$ , од каде што следува  $\overline{A'M_2} = \overline{AM'_1}$ . Значи,  $\overline{A'M_1} = \overline{A'M_2}$ , т.е. точката  $A'$  е еднакво оддалечена од точките  $M_1$  и  $M_2$ .

4. Дадена е рамнина  $\pi$ , точка  $P$  во таа рамнина и точка  $Q$  надвор од неа. Најди ги сите точки  $R$  од  $\pi$  за кои количникот  $\frac{\overline{PQ} + \overline{PR}}{\overline{QR}}$  е најголем.

**Решение.** Нека  $R$  е точка во рамнината  $\pi$ , различна од  $P$  и  $\sphericalangle RPQ = \alpha$ ,  $\sphericalangle PQR = \beta$ . Од триаголникот  $PQR$  добиваме

$$\frac{\overline{QR}}{\sin \alpha} = \frac{\overline{PQ}}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{\overline{PR}}{\sin \beta},$$

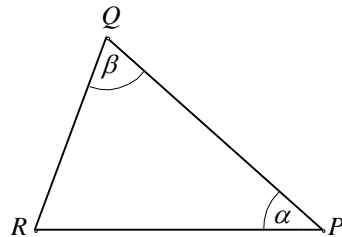
од каде што

$$\frac{\overline{PQ} + \overline{PR}}{\overline{QR}} = \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{2 \cos \frac{\alpha}{2} \sin(\alpha + \frac{\beta}{2})}{\sin \alpha} = \frac{\sin(\alpha + \frac{\beta}{2})}{\sin \frac{\alpha}{2}}.$$

За даден агол  $\alpha$ , овој количник е најголем ако  $\sin(\beta + \frac{\alpha}{2}) = 1$ , т.е.  $\beta + \frac{\alpha}{2} = 90^\circ$ . Последното равенство е исполнето ако и само ако  $\triangle QRP$  е рамнокрак, т.е.  $\overline{PR} = \overline{PQ}$ .

Бидејќи  $0 < \alpha < 180^\circ$ , т.е.  $0 < \frac{\alpha}{2} < 90^\circ$ , а функцијата  $\sin$  е растечка на  $(0, 90^\circ)$ , дадениот однос има најголема вредност кога  $\alpha$  е најмал.

Ако правата  $PQ$  е нормална на рамнината  $\pi$ , множеството точки кои ги задоволуваат условите на задачата е кружница со центар во  $P$  и радиус  $\overline{PQ}$ . Ако правата  $PQ$  не е нормална на  $\pi$ , тогаш постои само една точка која ги задоволува условите од задачата и тоа е точката која припаѓа на рамнината нормална на  $\pi$ , што ја содржи правата  $PQ$ , при што растојанието меѓу точките  $R$  и  $P$  е еднакво на  $\overline{PQ}$ , а  $\sphericalangle RPQ$  е остар. Со овие услови точката  $R$  е еднозначно определена.



Црпш. 21.4.

5. Најди ги сите реални броеви  $a$  за кои постојат ненегативни броеви  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ , кои ги задоволуваат релациите

$$\sum_{k=1}^5 kx_k = a, \quad \sum_{k=1}^5 k^3x_k = a^2, \quad \sum_{k=1}^5 k^5x_k = a^3.$$

**Решение.** Да претпоставиме дека бројот  $a$  ги задоволува условите на задачата. Тогаш

$$a^3 = \sum_{k=1}^5 k^5x_k, \quad a^3 = a \sum_{k=1}^5 k^3x_k, \quad a^3 = a^2 \sum_{k=1}^5 kx_k.$$

Ако го помножиме второто од овие равенства со  $-2$  и ако сите ги собереме равенствата, добиваме

$$0 = \sum_{k=1}^5 kx_k(k^4 - 2ak^2 + a^2) = \sum_{k=1}^5 kx_k(k^2 - a)^2.$$

Сите собирачки од последниот збир се ненегативни, па според тоа

$$kx_k(k^2 - a)^2 = 0 \text{ за } k = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Ако  $a = 0$  единствено решение е  $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$ . Ако некој  $x_k \neq 0$  тогаш  $a = k^2$ . Таков  $a$  исто така ги задоволува условите на задачата за

$$x_k = k, \quad x_j = 0 \quad (j \neq k, 1 \leq j \leq k).$$

Значи, бараните броеви се  $0, 1, 4, 9, 16, 25$ .

6. Нека  $A$  и  $E$  се две спротивни темиња на правилен осумаголник. Во темето  $A$  се наоѓа жабата. Од секое теме на осумаголникот, освен од темето  $E$ , жабата може да скокне на соседно теме. Кога ќе дојде на темето  $E$  жабата останува на него. Со  $a_n$  да го означиме бројот на начините на кои жабата може да дојде од темето  $A$  во темето  $E$  скокнувајќи точно  $n$  пати. Докажи дека

$$a_{2n-1} = 0, \quad a_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^{n-1} - y^{n-1}), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

каде  $x = 2 + \sqrt{2}$  и  $y = 2 - \sqrt{2}$ .

(Жабата може да дојде од темето  $A$  во темето  $E$  скокнувајќи точно  $n$  пати ако скока по низа од темиња  $(P_0, P_1, P_2, \dots, P_n)$  така што се исполнети условите:

(i)  $P_0 = A, P_n = E$ ;

(ii) за секој  $i, 0 \leq i \leq n-1, P_i \neq E$ ;

(iii) за секој  $i, 0 \leq i \leq n-1, P_i$  и  $P_{i+1}$  се соседни темиња на осумаголникот.)

**Решение.** Ги означуваме последователно темињата на осумаголникот со броевите  $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$  така што темето  $A$  е означено со бројот  $0$ , а темето  $E$  со бројот  $4$ . Во секој скок жабата ја менува парноста на темето на кое се наоѓа. За пат од  $0$  до  $4$  и требаат парен број скокови. Значи  $a_{2n-1} = 0$  за  $n = 1, 2, \dots$

Нека  $u_{2n}$  е бројот на патиштата со должина  $2n$  (т.е. бројот на патиштата кои се состојат од  $2n$  скокови) од точката 0 до точката 0, кои не минуваат низ точката 4;  $v_{2n}$  е бројот на патишта со должина  $2n$  од 0 до 2, кои не минуваат низ 4. Тогаш, и бројот на патишта со должина  $2n$  од 0 до  $-2$  кои не минуваат низ 4 е еднаков на  $v_{2n}$ .

Секој пат со должина  $2n+2$  од точката 0 до точката 4 кој ги задоволува условите на задачата се состои од некој пат со должина  $2n$  од 0 до 2 (или од 0 до  $-2$ ) - такви патишта има  $2v_{2n}$  и пат со должина 2 од 2 (односно  $-2$ ) до 4, таков пат е само еден. Затоа

$$a_{2n+2} = 2v_{2n}, \text{ за } n = 1, 2, \dots \quad (1)$$

Ќе докажеме дека

$$u_{2n+2} = u_{2n} + 2v_{2n} \text{ за } n = 1, 2, \dots \quad (2)$$

Имено, секој пат со должина  $2n+2$  од точката 0 до точката 0 кој не минува низ 4 се состои од:

- некој пат со должина  $2n$  од точката 0 до точката 0 кој не минува низ 4 (такви патишта има  $u_{2n}$ ) и пат со должина 2 од 0 до 0 (такви патишта се  $(0, 1, 0)$  и  $(0, -1, 0)$ ) или
- некој пат со должина  $2n$  од 0 до 2 (или до  $-2$ ) кој не минува низ 4 (такви патишта има  $2v_{2n}$ ) и пат со должина 2 од 2 (односно  $-2$ ) до 0 (таков е само еден пат).

На сличен начин се докажува дека

$$v_{2n+2} = u_{2n} + 2v_{2n} \text{ за } n = 1, 2, \dots \quad (3)$$

Од (2) и (3) добиваме

$$\begin{aligned} v_{2n+4} &= u_{2n+2} + 2v_{2n+2} \\ &= 2u_{2n} + 2v_{2n} + 2v_{2n+2} \\ &= 2(v_{2n+2} - 2v_{2n}) + 2v_{2n} + 2v_{2n+2} \\ &= 4v_{2n+2} - 2v_{2n}. \end{aligned}$$

Од последното равенство и од (1) добиваме

$$a_{2n+4} - 4a_{2n+2} + 2a_{2n} = 0 \text{ за } n = 1, 2, \dots \quad (4)$$

Ако ставиме  $y_n = a_{2n}$  ја добиваме диференцната равенка

$$y_{n+2} - 4y_{n+1} + 2y_n = 0$$

со почетни услови  $y_1 = a_2 = 0$  (бидејќи нема патишта со должина 2 од 0 до 4) и  $y_2 = a_4 = 2$  (бидејќи постојат два пата со должина 4 од 0 до 4:  $(0, 1, 2, 3, 4)$  и  $(0, -1, -2, -3, -4)$ ).

За да ја решиме оваа диференцна равенка ја разгледуваме карактеристичната равенка

$$\lambda^2 - 4\lambda + 2 = 0,$$

чии решенија се  $\lambda_1 = 2 + \sqrt{2}$  и  $\lambda_2 = 2 - \sqrt{2}$ . Општо решение на диференцната равенка е

$$y_n = C_1(2 + \sqrt{2})^n + C_2(2 - \sqrt{2})^n,$$

каде константите се одредуваат од почетните услови:

$$C_1 = \frac{2 - \sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \text{ и } C_2 = -\frac{2 + \sqrt{2}}{2\sqrt{2}}.$$

Конечно, решението гласи

$$a_{2n} = y_n = \frac{1}{\sqrt{2}}[(2 + \sqrt{2})^{n-1} - (2 - \sqrt{2})^{n-1}], \quad n = 1, 2, \dots$$