Формула на Њутн-Лајбниц

Ако функцијата f има примитивна функција на сегментот $[a,b]$, тогаш пресметувањето на $\int_a^b f(x)dx$ се поедноставува. Со други зборови точна е следната теорема.

Теорема (Њутн-Лајбниц). Ако функцијата $y=f(x)$ е непрекината на сегментот $[a,b]$ тогаш за секоја примитивна функција $y=F(x)$ за функцијата $y=f(x)$,

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a).$$

Користејќи ја формулата на Њутн-Лајбниц пресметај ги следните интеграли.

1. $\int_0^1 \sqrt{1+x}dx$.

Решение.Ќе го пресметаме интегралот $\int\sqrt{1+x}dx$. Воведуваме смена $1+x=t$, $dx=dt$ и добиваме:

$$\int\sqrt{1+x}dx=\int\sqrt{t}dt=\frac{2}{3}\sqrt{t^3}+C=\frac{2}{3}\sqrt{(1+x)^3}+C.$$

Според формулата на Њутн-Лајбниц добиваме:

$$\int_0^1\sqrt{1+x}dx=\left(\frac{2}{3}\sqrt{(1+x)^3}+C\right)\Big|_0^1=\frac{2}{3}\sqrt{(1+1)^3}+C-\left(\frac{2}{3}\sqrt{(1+0)^3}+C\right)=\frac{2}{3}\sqrt{8}-\frac{2}{3}.$$

Значи,

$$\int_0^1\sqrt{1+x}dx=\frac{2}{3}\sqrt{8}-\frac{2}{3}.$$

2. $\int_{-2}^{-1}\frac{dx}{(11+5x)^3}$.

Решение.Ќе го пресметаме интегралот $\int\frac{dx}{(11+5x)^3}$. Воведуваме смена $11+5x=t$, $dx=\frac{1}{5}dt$, при што добиваме:

$$\int\frac{dx}{(11+5x)^3}=\frac{1}{5}\int\frac{dt}{t^3}=-\frac{1}{10}\frac{1}{t^2}+C=C-\frac{1}{10}\frac{1}{(11+5x)^2}.$$

Според теоремата на Њутн-Лајбниц добиваме:

$$\int_{-2}^{-1}\frac{dx}{(11+5x)^3}$$

Значи,

$$\int_{-2}^{-1}\frac{dx}{(11+5x)^3}=\frac{7}{72}$$

3. $\int_2^{-13}\frac{dx}{\sqrt[5]{(3-x)^4}}$.

Решение.За интегралот $\int\frac{dx}{\sqrt[5]{(3-x)^4}}$ воведуваме смена $3-x=t$, $dx=-dt$ добиваме:

$$\int\frac{dx}{\sqrt[5]{(3-x)^4}}=-\int\frac{dt}{\sqrt[5]{t^4}}=-5\sqrt[5]{t}+C=C-5\sqrt[5]{3-x}.$$

Според формулата на Њутн-Лајбниц добиваме:

$$\int_2^{-13}\frac{dx}{\sqrt[5]{(3-x)^4}}=(C-5\sqrt[5]{3-x})\Big|_2^{-13}=-5\sqrt[5]{16}+5=-5(\sqrt[5]{16}-1).$$

4. $\int_4^9\frac{x-1}{\sqrt{x}+1}dx$.

Решение.Во интегралот $\int\frac{x-1}{\sqrt{x}+1}dx$ воведуваме смена $x=t^2$, $dx=2tdt$ и добиваме:

$$\int\frac{x-1}{\sqrt{x}+1}dx=\int\frac{t^2-1}{t+1}2tdt=2\int(t-1)tdt=\frac{2}{3}t^3-t^2+C=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-x+C.$$

Според теоремата на Њутн-Лајбниц добиваме:

$$\int_4^9 \frac{x-1}{\sqrt{x}+1}dx = \left(\frac{2}{3}\sqrt{x^3} - x + C\right)\Big|_4^9 = 18 - 9 - \frac{16}{3} + 4 = 13 - \frac{16}{3} = \frac{23}{3}.$$

Значи,

$$\int_4^9 \frac{x-1}{\sqrt{x}+1}dx = \frac{23}{3}.$$

5. $\displaystyle\int_0^{16} \frac{dx}{\sqrt{x+9}-\sqrt{x}}$.

Решение.Во интегралот $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x+9}-\sqrt{x}}$ ќе направиме трансформација на подинтегралната функција:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+9}-\sqrt{x}} = \int \frac{\sqrt{x+9}+\sqrt{x}}{9}dx = \frac{1}{9}\left(\frac{2}{3}\sqrt{(x+9)^3} - \frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right) + C = \frac{2}{27}\left(\sqrt{(x+9)^3} - \sqrt{x^3}\right).$$

Според формулата на Њутн-Лајбниц добиваме:

$$\int_0^{16} \frac{dx}{\sqrt{x+9}-\sqrt{x}} = \frac{2}{27}\left(\sqrt{(x+9)^3} - \sqrt{x^3}\right)\Big|_0^{16} = \frac{2}{27}(125-64) = \frac{122}{27}.$$

Значи,

$$\int_0^{16} \frac{dx}{\sqrt{x+9}-\sqrt{x}} = \frac{122}{27}.$$

6. $\displaystyle\int_0^{1} (e^x-1)^4 e^x dx$

Решение.Во неопределениот интеграл $\int (e^x-1)^4 e^x dx$ воведуваме смена $e^x - 1 = t$, $e^x dx = dt$ и добиваме:

$$\int (e^x-1)^4 e^x dx = \int t^4 dt = \frac{1}{5}t^5 + C = \frac{1}{5}(e^x-1)^5 + C.$$

Според формулата на Њутн-Лајбниц, добиваме:

$$\int_0^1 (e^x-1)^4 e^x dx = \left(\frac{1}{5}(e^x-1)^5 + C\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{5}(e^1-1)^5 + C - \left(\frac{1}{5}(e^0-1)^5 + C\right) = \frac{1}{5}(e-1)^5.$$

Значи,

$$\int_0^1 (e^x-1)^4 e^x dx = \frac{1}{5}(e-1)^5.$$

7. $\displaystyle\int_0^{2a} \frac{3dx}{2b-x}$, $b > a > 0$.

Решение.Во $\displaystyle\int \frac{3dx}{2b-x}$ воведуваме смена $2b - x = t$, $dx = -dt$ и добиваме:

$$\int \frac{3dx}{2b-x} = -3\int \frac{dt}{t} = -3\ln t + C = C - 3\ln(2b-x).$$

Според формулата на Њутн-Лајбниц добиваме:

$$\int_0^{2a} \frac{3dx}{2b-x} = [C - 3\ln(2b-x)]\Big|_0^{2a} = [C - 3\ln(2b-2a)] - [C - 3\ln(2b-0)] = 3\ln\frac{2b}{2b-2a} = 3\ln\frac{b}{b-a}$$

Значи,

$$\int_0^{2a} \frac{3dx}{2b-x} = 3\ln\frac{b}{b-a}.$$

8. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{xdx}{(1+x^2)^2}$.

Решение.Во $\displaystyle\int \frac{xdx}{(1+x^2)^2}$ воведуваме смена $1 + x^2 = t$, $xdx = \frac{1}{2}dt$ и добиваме:

$$\int \frac{xdx}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{t}\right) + C = -\frac{1}{2(1+x^2)} + C.$$

Според формулата на Њутн-Лајбниц добиваме:

$$\int_0^1 \frac{xdx}{(1+x^2)^2} = \left(-\frac{1}{2(1+x^2)} + C\right)\Big|_0^1 = -\frac{1}{2(1+1^2)} + C - \left(-\frac{1}{2(1+0^2)} + C\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

Значи,

$$\int_0^1 \frac{xdx}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{4}.$$

9. $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}$.

Решение. Во интегралот $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}$, воведуваме смена $\ln x = t$, $\frac{1}{x}dx = dt$ при што добиваме:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + C = \arcsin(\ln x) + C.$$

Според формулата на Њутн-Лајбниц добиваме:

$$\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}} = (\arcsin(\ln x) + C)\Big|_1^e = (\arcsin(\ln e) + C) - (\arcsin(\ln 1) + C) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

Значи,

$$\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}} = \frac{\pi}{2}.$$

10. $\int_1^e \frac{1+\ln x}{x}dx$.

Решение. Во $\int \frac{1+\ln x}{x}dx$ воведуваме смена $1+\ln x = t$, $\frac{1}{x}dx = dt$ и добиваме:

$$\int \frac{1+\ln x}{x}dx = \int tdt = \frac{1}{2}t^2 + C = \frac{1}{2}(1+\ln x)^2 + C.$$

Според формулата на Њутн-Лајбниц добиваме:

$$\int_1^e \frac{1+\ln x}{x}dx = \left(\frac{1}{2}(1+\ln x)^2 + C\right)\Big|_1^e = \left(\frac{1}{2}(1+\ln e)^2 + C\right) - \left(\frac{1}{2}(1+\ln 1)^2 + C\right) = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Значи,

$$\int_1^e \frac{1+\ln x}{x}dx = \frac{3}{2}.$$

11. $\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$.

Решение./

12. $\int_0^{\sqrt[n]{\frac{a}{2}}} \frac{x^{n-1}dx}{\sqrt{a^2 - x^{2n}}}$.

Решение./

13. $\int_0^{\frac{a}{2}} \frac{adx}{(x-a)(x-2a)}$.

Решение./

14. $\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$.

Решение./

15. $\int_1^2 \frac{dx}{x+x^3}$.

Решение./

16. $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$.

Решение./

17. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2 - 2x\cos\alpha + 1}$, $(0 < \alpha < \pi)$

Решение./

18. $\int_0^2 |1-x|dx$.

Решение./

19. $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Решение./

20. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos x}$.

Решение./

21. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin 2x dx$.

Решение./

22. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x}\, dx$.

Решение./

23. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^3 x}{\sqrt[3]{\sin x}}dx$.

Решение./

24. $\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}dx$.

Решение./

25. $\int_{-0,5}^1 \frac{dx}{\sqrt{8+2x-x^2}}$.

Решение./

26. $\int_{2}^{3}\frac{dx}{2x^2+3x-2}$.

Решение./

27. $\int_{0}^{1}e^x\arcsin e^{-x}dx$.

Решение./

28. $\int_{e^2}^{e^3}\frac{dx}{x\ln x}$.

Решение./

29. $\int_{0}^{1}\frac{dx}{4x^2+4x+5}$.

Решение./

30. $\int_{1}^{e}\frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}$.

Решение./

Формула на Њутн-Лајбниц, дополнение

Со применана формулата на Њутн-Лајбниц пресметај ги следните интеграли:

1. $\int_{1}^{2}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}dx$.

Решение./

2. $\int_{0}^{1}\frac{dx}{e^x+e^{-x}}$.

Решение./

3. $\int_{0}^{4}\frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

Решение./

4. $\int_{0}^{1}\frac{x^2dx}{1+x^6}$.

Решение./

5. $\int_{e}^{e^2}\frac{dx}{x\ln x}$.

Решение./

6. $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{1+2\sin^2 x}$.

Решение./

7. $\int_{0}^{1}xe^{-x}dx$.

Решение./

8. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{x}{\sin^2 x}dx$.

Решение./

9. $\int_{2}^{3}\frac{dx}{x^2-2x-8}$.

Решение./

10. $\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$.

Решение./

11. $\int_{\frac{3}{4}}^{2}\frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$.

Решение./

12. $\int_{0}^{4}\frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$.

Решение./

13. $\int_{-2}^{-1}\frac{x+1}{x^2(x-1)}dx$.

Решение./

14. $\int_{1}^{2}x\ln x dx$.

Решение./

15. $\int_{0}^{\frac{1}{2}}\arcsin x dx$.

Решение./

16. $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{1+2\sin^2 x}$.

Решение./

17. $\int_{0}^{1}\frac{x^2+3x}{(x+1)(x^2+1)}dx$.

Решение./

18. $\int_{0}^{2}|1-x|\,dx$.

Решение./

19. $\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 x dx$.

Решение./

20. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{tg}^4 x dx$.

Решение./

Теорема за смена на променливи во определен интеграл

Како и во неопределениот интеграл така и во определениот интеграл може да се воведе смена на променливи. За разлика од неопределениот интеграл, овде ќе имаме и дополнителни претпоставки за функциите f и φ. Функцијата $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ е непрекината(интеграбилна) а функцијата $\varphi:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ е диференцијабилна и првиот извод е непрекината функција (интеграбилна) пти што $\varphi([\alpha,\beta])\subseteq[a,b]$ или $\varphi([\alpha,\beta])=[a,b]$.

Теорема.Нека функцијата $y=f(x)$ е непрекината функција на сегментот $[a,b]$ и $x=\varphi(t)$ е непрекината функција, заедно со својот извод $x'=\varphi'(t)$ на сегментот $[\alpha,\beta]$.Ако $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$ и $a\le\varphi(t)\le b$ за $t\in(\alpha,\beta)$, тогаш $\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

Многу често се користи специјалниот случај на оваа теорема, кога за функцијата φ се претпостви дека е монотона. Теоремата останува в оважност.

Покрај силните претпоставки за непрекинатост и монотоност на функциите f и φ, доволно е да се претпостави и интеграбилност на f и φ'.

Задачи

1.Провери ја точноста на равенството

$$\int\limits_0^1 x^m(1-x)^n dx=\int\limits_0^1 x^n(1-x)^m dx,\ m,n\in\mathbf{N}.$$

Решение.Воведуваме смена $t=1-x$. Функцијата $t=t(x)=1-x$ е непрекината, монотоно опаѓачка и диференцијабилна, при што $[0,1]\xrightarrow{t=t(x)}[1,0]$, т.е. кога x се менува од 0 до 1, t се менува 1 до 0. Бидејќи $dx=-dt$ добиваме:

$$\int\limits_0^1 x^m(1-x)^n dx=-\int\limits_1^0(1-t)^m t^n dt=\int\limits_0^1 t^n(1-t)^m dt.$$

2.Користејќи ја теоремата за смена на променливи во определен интеграл пресметај го интегралот:

$$\int\limits_0^1\frac{dx}{x^2+4x+5}.$$

Решение.Ќе направиме трансформација на подинтегралната функција

$$\int\limits_0^1\frac{dx}{x^2+4x+5}=\int\limits_0^1\frac{dx}{(x+2)^2+1}=(*).$$

Воведуваме смена $t=x+2$. Функцијата $t(x)=x+2$ на интервалот $[0,1]$ е непрекината, монотоно растечка и диференцијабилна, при што $[0,1]\xrightarrow{t=x+2}[2,3]$. Според тоа,

$$(*)=\int\limits_2^3\frac{dt}{t^2+1}=\operatorname{arctg}t\Big|_2^3=\operatorname{arctg}3-\operatorname{arctg}2=\operatorname{arctg}\frac{3-2}{1+3\cdot2}=\operatorname{arctg}\frac{1}{7}.$$

3.Пресметај го интегралот

$$\int\limits_0^1\frac{\sqrt{x}}{1+x}dx.$$

Решение.

Одговор: $\int\limits_0^1\frac{\sqrt{x}}{1+x}dx=\frac{4-\pi}{2}$.

4.Пресметај го интегралот

$$\int\limits_0^1\frac{\sqrt{e^x}}{\sqrt{e^x+e^{-x}}}dx,$$

кортистејќи ја теоремата за смена на променливи во определен интеграл.

Решение./

Одговор: $\int\limits_0^1\frac{\sqrt{e^x}}{\sqrt{e^x+e^{-x}}}dx=\ln\frac{e+\sqrt{e^2+1}}{1+\sqrt{2}}$.

5.Пресметај го интегралот

$$\int\limits_4^9\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}dx.$$

Решение./ **Одговор:** $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}dx = 7+\ln 4$.

6. Пресметај го интегралот:

$$\int_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{1+x}}.$$

Решение. **Одговор:** $\int_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{1+x}} = \frac{32}{3}$.

7. Пресметај го интегралот:

$$\int_0^1 \frac{xdx}{1+\sqrt{x}}.$$

8. Користејќи ја теоремата за смена на променливи кај определен интеграл, пресметај го определениот интеграл:

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}dx$$

Решение. Воведуваме смена $x = \mathrm{tg}t$, $t = \mathrm{arctg}x$. Јасно е дека $\sqrt{1+x^2} = \frac{1}{\cos t}$. Функцијата $t = \mathrm{arctg}x$ на интервалот $[1,\sqrt{3}]$ е непрекината, монотоно растечка и диференцијабилна, при што $dx = \frac{1}{\cos^2 t}dt$ и $[1,\sqrt{3}] \xrightarrow{t=arctgx} [\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}]$. Според тоа

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\frac{1}{\cos t}}{\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}}\frac{1}{\cos^2 t}dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin t\cos^2 t}dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin t}{\sin^2 t\cos^2 t}dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin t}{(1-\cos^2 t)\cos^2 t}dt = (*).$$

Воведуваме смена $z = \cos t$, $\sin t dt = -dz$. Функцијата $z(t) = \cos t$ на интервалот $[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}]$ е непрекината, монотоно опаѓачка при што $t: \frac{\pi}{4} \to \frac{\pi}{3}$, тогаш $z: \frac{\sqrt{2}}{2} \to \frac{1}{2}$ и добиваме:

$$(*) = -\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dz}{(1-z^2)z^2} = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\frac{1}{1-z^2}-\frac{1}{z^2}\right)dz = \left(\frac{1}{2}\ln\frac{1+z}{1-z}+\frac{1}{z}\right)\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{2}\ln\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\ln 3+\sqrt{2}-2$$

Значи,

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}dx = \frac{1}{2}\ln\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\ln 3+\sqrt{2}-2.$$

9. Пресметај го определениот интеграл:

$$\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^6}dx,$$

користејќи ја теоремата за смена на променливи во определен интеграл.

10. Со примена на теоремата за смена на променливи, пресметај го определениот интеграл:

$$\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-1}}$$

Решение. **Одговор:** $\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-1}} = \frac{3\sqrt{3}}{8}-\frac{5\sqrt{2}}{12}$

11. Пресметај го определениот интеграл

$$\int_0^1 \sqrt{(1-x^2)^3}dx,$$

користејќи ја теоремата за смена на променливи во определен интеграл.

12. Користејќи ја теоремата за смена на променливи во определен интеграл, пресметај го интегралот:

$$\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx.$$

Решение. **Одговор:** $\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{16}$.

13. Функцијата f е интеграбилна функција на интервалот $[0,1]$. Докажи дека

$$\int_0^{\pi/2} f(\cos x)dx = \int_0^{\pi/2} f(\sin x)dx .$$

Користејќи го тој резултат пресметај ги интегралите:

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 x dx, \quad \int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx .$$

14. Докажи дека ако функцијата $y = f(x)$ е периодична со периода T, тогаш $\int_a^{a+T} f(x)dx$ не зависи од a.

15. Докажи дека

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx = \pi\int_0^{\pi/2} f(\sin x)dx .$$

Користејќи го тој резултат, пресметај го интегралот:

$$\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx .$$

16. Ако f е интеграбилна функција на интервалот $[a,b]$, тогаш

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx .$$

Докажи!

Решение./Во интегралот на десната страна воведуваме смена $t = a+b-x$. Функцијата $t(x) = a+b-x$ на интервалот $[a,b]$ е монотоно опаѓачка, непрекината, при што $dx = -dt$ и кога x се менува од a до b, тогаш t се менува од b до a, па според тоа

$$\int_a^b f(a+b-x)dx = -\int_b^a f(t)dt = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(x)dx .$$

17. Со примена на теоремата за смена на променливи, пресметај го определениот интеграл:

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{dx}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}} .$$

18. Пресметај го определениот интеграл

$$\int_{2,5}^{5} \frac{(\sqrt{25-x^2}\,)^3}{x^4}dx ,$$

користејќи ја теоремата за смена на променливи во определен интеграл.

19. Пресметај го определениот интеграл

$$\int_0^{-\ln 2} \sqrt{1-e^{2x}}\,dx .$$

со употреба на теоремата за смена на променливи.

20. Пресметај го интегралот

$$\int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^2)^3}dx .$$

21. Пресметај го интегралот:

$$\int_0^1 \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}dx .$$

Решение./ **Одговор:** $\int_0^1 \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}dx = \frac{\pi^2}{4}$.

22. Функцијата f е непрекината при $x \ge 0$. Докажи дека

$$\int_0^a x^3 f(x^2)dx = \frac{1}{2}\int_0^{a^2} xf(x)dx$$

Решение. Во интегралот од левата страна на равенството воведуваме смена $t = x^2$, $\frac{1}{2}dt = xdx$. Функцијата $t(x) = x^2$ на интервалот $[0,a]$ е непрекината, монотоно растечка и диференцијабилна, при што

$$[0,a] \xrightarrow{t=x^2} [0,a^2],$$

и добиваме:

$$\int_0^a x^3 f(x^2)dx = \int_0^a x^2 f(x^2)xdx = \frac{1}{2}\int_0^{a^2} tf(t)dt = \frac{1}{2}\int_0^{a^2} xf(x)dt .$$

23. Функцијата f е непрекината при $x \ge 0$ и $a > 0, r \ge 1$. Докажи дека

$$\int_0^a x^{r+1} f(x^r)dx = \frac{1}{r}\int_0^{a^r} x^{\frac{2}{r}} f(x)dx$$

24. Пресметај го интегралот:

$$\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}dx .$$

Решение./ **Одговор:** $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}dx == \frac{4-\pi}{2}$.

25. Пресметај го интегралот:

$$\int_0^a x^2\sqrt{a^2 - x^2}dx .$$

Решение. **Одговор:** $\int_0^a x^2\sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{a^4\pi}{8}$.

26. Функцијата f е непрекината на интервалот $[-a,a]$. Ако f е парна функција на $[-a,a]$, тогаш $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$. Ако f е непарна функција на $[-a,a]$, тогаш $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$. Докажи!

Решение.

27. Пресметај го интегралот:

$$\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}} ,$$

користејќи ја теоремата за смена на променливи во определен интеграл.

Решение./ **Одговор:** $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}} = 2(\sqrt{2} - 1)$.

28. Со примена на теоремата за смена на променливи во определен интеграл, пресметај го интегралот:

$$\int_0^1 \frac{e^{2x} + e^x}{e^{2x} + 1}dx$$

Решение./ **Одговор:** $\int_0^1 \frac{e^{2x} + e^x}{e^{2x} + 1}dx = \ln\sqrt{\frac{e^2+1}{2}} + \mathrm{arctg}\, e - \frac{\pi}{4}$.

29. Пресметај го интегралот

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2-\sin x}.$$

Решение.Воведуваме смена $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$. Функцијата $t(x)=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ на интервалот $[0,\frac{\pi}{2}]$ е непрекината, диференцијабилна и монотоно растечка, при што $dx=\frac{2}{1+t^2}dt$ и $[0,\frac{\pi}{2}]\xrightarrow{t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}}[0,1]$. Според тоа,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2-\sin x}=\int_0^1 \frac{\frac{2}{1+t^2}dt}{2-\frac{2t}{1+t^2}}=\int_0^1 \frac{dt}{t^2-t+1}=\int_0^1 \frac{dt}{(t-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{\frac{3}{4}}\operatorname{arctg}\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\Big|_0^1=\frac{2\sqrt{3}}{3}(\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}-\operatorname{arctg}\frac{-1}{\sqrt{3}})=\frac{4\sqrt{3}}{3}\frac{\pi}{6}=\frac{2\sqrt{3}\pi}{9}$$

Значи,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2-\sin x}=\frac{2\sqrt{3}\pi}{9}.$$

30.Пресметај го интегралот

$$\int_{-3}^{-2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

Решение./

Одговор: $\int_{-3}^{-2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=\arcsin\frac{1}{2}-\arcsin\frac{1}{3}$.

31.Пресметај го интегралот

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+\cos x}.$$

Решение. Воведуваме смена $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$. Функцијата $t(x)=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ на интервалот $[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}]$ е непрекината, диференцијабилна и монотоно растечка, при што $dx=\frac{2}{1+t^2}dt$ и $[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}]\xrightarrow{t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}}[\frac{\sqrt{3}}{3},1]$. Од претходното добиваме:

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+\cos x}=\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^1 \frac{\frac{2}{1+t^2}dt}{3+\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^1 \frac{2}{4+2t^2}dt=\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^1 \frac{1}{2+t^2}dt=\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}\Big|_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^1=\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}-\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

Значи,

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+\cos x}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}-\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

32.Пресметај го интегралот:

$$\int_1^9 x\sqrt[3]{1-x}\,dx.$$

Решение./

Одговор: $\int_1^9 x\sqrt[3]{1-x}\,dx=-\frac{234}{7}$.

33.Пресметај го интегралот:

$$\int_0^{\frac{3}{4}} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}.$$

34.Докажи го равенството:

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg}x}{x}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t}{\sin t}dt$$

Решение.Воведуваме смена $x=\operatorname{tg}\frac{t}{2}$, $t=2\operatorname{arctg}x$. Функцијата $t=2\operatorname{arctg}x$ на интервалот $[0,1]$ е непрекината, диференцијабилна и монотоно растечка, при што $[0,1]\xrightarrow{t=2\operatorname{arctg}x}[0,\frac{\pi}{2}]$ и $dx=\frac{1}{2\cos^2\frac{t}{2}}dt$. Според тоа:

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\frac{t}{2})}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} \frac{dt}{\cos^2\frac{t}{2}} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t}{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}} dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t}{\sin t} dt .$$

35. Функцијата f е непрекината на интервалот $[a,b]$ и за секое $t \in [0, b-a]$ е исполнето равенството $f(a+t) = f(b-t)$. Докажи дека

$$\int_a^b x f(x) dx = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x) dx .$$

36. Функцијата f е непрекината функција на интервалот $[a, b]$ и f во точките симетрични во однос на точката $\frac{a+b}{2}$ прима еднакви вредности. Докажи дека

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) dx .$$

37. Функцијата f е непрекината на интервалот $[a, b]$. Докажи дека

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a)\int_0^1 f(a+(b-a)x) dx .$$

38. Пресметај го интегралот

$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\, dx .$$

Решение./ **Одговор:** $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\, dx = \frac{\pi a^2}{4}$.

39. Пресметај го интегралот

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x} .$$

Решение./ **Одговор:** $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x} = \frac{4\pi}{ab}$

40. Докажи дека, ако n е непарен природен број , функциите

$$f(x) = \int_0^x \sin^n t dt \quad \text{и} \quad g(x) = \int_0^x \cos^n t dt$$

се периодични функции со периода 2π , а при парно n секоја од нив е збир од линеарна функција и периодична функција.

Решение./

Teorema za parcijalna integracija vo opredelen integral

1. Presmetaj go integralot:

$$\int_0^{\ln 2} xe^{-x}dx .$$

Re{enie.]e napravime parcijalna integracija so

$$\begin{cases} u = x \\ dv = e^{-x}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \int dv = \int e^{-x}dx = -e^{-x} \end{cases}.$$

Pri toa

$$\int_0^{\ln 2} xe^{-x}dx = -xe^{-x}\Big|_0^{\ln 2} + \int_0^{\ln 2} e^{-x}dx = -e^{-\ln 2}\ln 2 - e^{-x}\Big|_0^{\ln 2} = -\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{1}{2}(1-\ln 2)$$

2. Presmetaj go integralot:

$$\int_0^{\pi} x\sin x dx .$$

Re{enie. Voveduvame parcijalna integracija so

$$\begin{cases} u = x \\ dv = \sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \int dv = \int \sin x dx = -\cos x \end{cases}$$

i dobivame:

$$\int_0^{\pi} x\sin x dx = -x\cos x\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\cos x dx = -\pi\cos\pi + \sin x\Big|_0^{\pi} = \pi$$

3. Presmetaj go integralot:

$$\int_0^{2\pi} x^2\cos x dx .$$

4. Presmetaj go integralot:

$$\int_0^{\sqrt{3}} x\operatorname{arctg}x dx .$$

Re{enie. /Ako napravime parcijalna integracija so

$$\begin{cases} u = \operatorname{arctg}x \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{1+x^2}dx \\ v = \int dx = x \end{cases},$$

dobivame:

$$\int_0^{\sqrt{3}} x\operatorname{arctg}x dx = \frac{1}{2}x^2\operatorname{arctg}x\Big|_0^{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}}\frac{x^2}{1+x^2}dx = \frac{3}{2}\operatorname{arctg}\sqrt{3} - \frac{1}{2}(x - arctgx)\Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{6}.$$

5. Presmetaj go integralot:

$$\int_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x|\, dx$$

Re{enie. Bidej}i $|\ln x| = \begin{cases} \ln x, & x \in [1,e] \\ -\ln x, & x \in [\frac{1}{e},1] \end{cases}$, dobivame:

$$\int_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x|\, dx = -\int_{\frac{1}{e}}^{1}\ln x dx + \int_1^e \ln x dx = (*) .$$

Vo dvata integrali }e napravime parcijalna integracija so:

$$\begin{cases} u = \ln x \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x}dx \\ v = \int dv = \int dx = x. \end{cases}$$

Pri toa

$$(*) = -x\ln x\Big|_{e^{-1}}^{1} + \int_{\frac{1}{e}}^{1} dx + x\ln x\Big|_1^e - \int_1^e dx = \frac{1}{e}\ln\frac{1}{e} + x\Big|_{e^{-1}}^{1} + e - x\Big|_1^e = -\frac{1}{e} + 1 - \frac{1}{e} + e - (e-1) = 2 - \frac{2}{e} = 2\left(1 - \frac{1}{e}\right).$$

6. Presmetaj go integralot:

$$\int_0^1 \arccos x dx .$$

Re{enie./Ako napravime parcijalna integracija so

$$\begin{cases} u = \arccos x \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ v = \int dv = \int dx = x \end{cases},$$

dobivame:

$$\int_0^1 \arccos x dx = x \arccos x \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = 1 \arccos 1 - 0 \arccos 0 - \sqrt{1-x^2}\Big|_0^1 = 1 .$$

7. Presmetaj go integralot:

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\sin^2 x} dx .$$

Re{enie.]e napravime parcijalna integracija so

$$\begin{cases} u = x \\ dv = \frac{dx}{\sin^2 x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \int dv = \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg} x \end{cases}$$

i dobivame:

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\sin^2 x} dx = -x\mathrm{ctg} x \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{ctg} x dx = -\frac{\pi}{3}\mathrm{ctg}\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\mathrm{ctg}\frac{\pi}{4} + \ln|\sin x| \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi\sqrt{3}}{9} + \ln\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} .$$

8. Presmetaj go integralot:

$$\int_0^{e-1} \ln(x+1) dx .$$

Re{enie.]e napravime parcijalna integracija so

$$\begin{cases} u = \ln(x+1) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x+1} dx \\ v = \int dx = x \end{cases}$$

i dobivame:

$$\int_0^{e-1} \ln(x+1) dx = x\ln(x+1)\Big|_0^{e-1} - \int_0^{e-1} \frac{x}{x+1} dx = (e-1)\ln e - \int_0^{e-1} \frac{x+1-1}{x+1} dx = e-1-(x-\ln(x+1))\Big|_0^{e-1} = e-1-[(e-1)-\ln e - 0] = 1$$

9. Presmetaj go integralot:

$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2} dx .$$

Re{enie.]e napravime parcijalna integracija so

$$\begin{cases} u = \sqrt{a^2-x^2} \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}} dx \\ v = \int dv = \int dx = x \end{cases}$$

i dobivame:

$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2} dx = x\sqrt{a^2-x^2}\Big|_0^a - \int_0^a \frac{-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = -\int_0^a \frac{a^2-x^2-a^2}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = -\int_0^a \sqrt{a^2-x^2} dx + a^2 \int_0^a \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx =$$

$$= -\int_0^a \sqrt{a^2-x^2} dx + a^2 \arcsin\frac{x}{a}\Big|_0^a = -\int_0^a \sqrt{a^2-x^2} dx + a^2(\arcsin 1 - \arcsin 0) = a^2\frac{\pi}{2} - \int_0^a \sqrt{a^2-x^2} dx$$

Spored toa

$2\int_0^a \sqrt{a^2-x^2} dx = a^2\frac{\pi}{2}$, t.e. $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2} dx = a^2\frac{\pi}{4}$.

Zna~i,

$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2} dx = a^2\frac{\pi}{4} .$$

10. Presmetaj go integralot:

$$\int_0^1 \arcsin\sqrt{x}dx .$$

11. Presmetaj go integralot:

$$\int_0^e (x\ln x)^2 dx .$$

Re{enie./ **Odgovor:** $\int_0^e (x\ln x)^2 dx \frac{5e^3}{27}$

12. Presmetaj go integralot:

$$\int_0^3 \arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}dx .$$

Re{enie./ **Odgovor:** $\int_0^3 \arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}dx = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$

13. Presmetaj go integralot:

$$\int_a^{2a} \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^4}dx .$$

Re{enie.]e napravime parcijalna integracija so

$$\begin{cases} u = \sqrt{x^2-a^2} \\ dv = \frac{1}{x^4}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}d \\ v = \int \frac{1}{x^4}dx = -\frac{1}{3x^3} \end{cases}$$

i dobivame:

$$\int_a^{2a} \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^4}dx = -\frac{1}{3x^3}\sqrt{x^2-a^2}\Big|_a^{2a} + \frac{1}{3}\int_a^{2a} \frac{x}{x^3\sqrt{x^2-a^2}}dx = -\frac{a\sqrt{3}}{24a^3} + \frac{1}{3}\int_a^{2a} \frac{1}{x^3\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}}dx = (*) .$$

Voveduvame smena $t = \frac{a}{x}$, $-\frac{1}{a}dt = \frac{1}{x^2}dx$. Funkcijata $t = \frac{a}{x}$ na intervalot $[a, 2a]$ e neprekinata, monotono opa|a~ka, pri {to $x : a \to 2a$, toga{ $t : 1 \to \frac{1}{2}$ i dobivame:

$$(*) = -\frac{\sqrt{3}}{24a^2} - \frac{1}{3a^2}\int_1^{\frac{1}{2}} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt = -\frac{\sqrt{3}}{24a^2} - \frac{1}{3a^2}(-\sqrt{1-t^2})\Big|_1^{\frac{1}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{24a^2} + \frac{\sqrt{3}}{6a^2} = \frac{3\sqrt{3}}{24a^2} = \frac{\sqrt{3}}{8a^2} .$$

Zna~i,

$$\int_a^{2a} \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^4}dx = \frac{\sqrt{3}}{8a^2} .$$

14. Presmetaj go integralot:

$$\int_1^2 x^2 \ln x dx .$$

Re{enie./ **Odgovor:** $\int_1^2 x^2 \ln x dx = \frac{8}{3}\ln 2 - \frac{7}{9}$.

15. Presmetaj go integralot

$$I_{\alpha,n} = \int_0^1 x^\alpha \ln^n x dx .$$

Re{enie./ **Odgovor:** $I_{\alpha,n} = \int_0^1 x^\alpha \ln^n x dx = (-1)^n \frac{n!}{(\alpha+1)^{n+1}}$.

16. Ako

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx ,$$

doka`i deka $J_n = \frac{n-1}{n} J_{n-1}$.

Re{enie./

17. Proveri ja to~nosta na ravenstvoto

$$\int_0^1 (1-x)^m x^n dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!},$$

kade $m, n \in \mathbb{N}$.

Re{enie./

18. Presmetaj gi integralite

a) $\int_0^{\pi} (x \sin x)^2 dx$, b) $\int_0^{\pi} (x \cos x)^2 dx$.

Re{enie./

Odgovor: a) $\int_0^{\pi} (x \sin x)^2 dx = \frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi^2}{3} - \frac{1}{2}\right)$.

b) $\int_0^{\pi} (x \cos x)^2 dx = \frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi^2}{3} + \frac{1}{2}\right)$.

19. Presmetaj gi integralite

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x dx$, b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx$, v) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 x dx$.

Re{enie./

Odgovor: a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x dx = \frac{8}{15}$, b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx = \frac{3\pi}{16}$, v) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 x dx = \frac{5\pi}{32}$.

20. Doka`i deka

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!}\frac{\pi}{2}, & \text{ako } n \text{ e paren} \\ \frac{(n-1)!!}{n!!}, & \text{ako } n \text{ e neparen} \end{cases}$$

Re{enie./

21. Presmetaj

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 x dx$, b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^8 x dx$, v) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{10} x dx$.

Re{enie./

22. Neka $n \in \mathbb{N}$ ili $n = 0$. Opredeli rekurentna vrska za

$$J_n = \int_{-1}^{0} x^n e^x dx.$$

Re{enie./Ako vovedeme parcijalna integracija so

$$\left[\begin{array}{l} u = x^n \\ dv = e^x dx \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} du = nx^{n-1} dx \\ v = \int dv = \int e^x dx = e^x \end{array}\right.,$$

dobivame

$$J_n = \int_{-1}^{0} x^n e^x dx = x^n e^x \Big|_{-1}^{0} - n\int_{-1}^{0} x^{n-1} e^x dx = \frac{(-1)^{n+1}}{e} - nJ_{n-1}.$$

23. Doka`i deka, ako $J_m = \int_1^e \ln^m x dx$, toga{ $J_m = e - nJ_{m-1}$.

Re{enie./

Upatstvo

1.Vovedi parcijalna integracija so $u = \ln^m x$, $dv = dx$.

24. Proveri ja to~nosta na ravenstvoto

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \sin nx dx = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k}.$$

Re{enie./

25. Proveri ja to~nosta na ravenstvoto

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \cos nx dx = \frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

Re{enie./

26. Doka`i deka

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)} \int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}},$$

kade $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$.

So doka`anata formula presmetaj go integralot

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^3}.$$

Re{enie./

Odgovor: $\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^3} = \frac{3}{8}\frac{\pi}{4}$

27. Izvedi rekurentna formula za presmetuvawe na integralot

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x dx,$$

kade $m, n \in \mathbb{N}$, ili nekoj od niv e nula. Ispitaj gi posebnite slu~ai koga m i n se parni i neparni.

Re{enie./

Odgovor: Ako $J_{m,n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x dx$, toga{ $J_{m,n} = \frac{n-1}{m+n} J_{m,n-2} = \frac{m-1}{m+n} J_{m-2,n}$.

a) Ako n e neparen broj, toga{ $J_{m,n} = \frac{(n-1)(n-3)\ldots 4\cdot 2}{(m+n)(m+n-2)(m+n-4)\ldots(m+3)(m+1)}$.

b) Ako m e neparen broj, toga{ $J_{m,n} = \frac{(m-1)(m-3)\ldots 4\cdot 2}{(m+n)(m+n-2)(m+n-4)\ldots(n+3)(n+1)}$.

v) Ako m e paren broj, toga{ $J_{m,n} = \frac{(n-1)(n-3)\ldots 3\cdot 1\cdot(m-1)(m-3)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 1}{(m+n)(m+n-2)(m+n-4)\cdot\ldots\cdot 4\cdot 2}\frac{\pi}{2}$.

28. Presmetaj go integralot

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos x dx.$$

Re{enie./

Odgovor: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos x dx = \frac{e^{\pi} - 2}{5}$

29. Presmetaj go integralot

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x \sin x}{\cos^3 x} dx.$$

Re{enie./

Odgovor: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x \sin x}{\cos^3 x} dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$.

30. Presmetaj go integralot

$$\int_0^1 \arcsin\sqrt{x}\,dx .$$

Re{enie./ **Odgovor:** $\int_0^1 \arcsin\sqrt{x}\,dx = \frac{\pi}{4}$.

31. Presmetaj go integralot

$$\int_1^{16} \operatorname{arctg}\sqrt{\sqrt{x}-1}\,dx .$$

Re{enie./ **Odgovor:** $\int_1^{16} \operatorname{arctg}\sqrt{\sqrt{x}-1}\,dx = \frac{16\pi}{2} - 2\sqrt{3}$

32. Presmetaj go integrlot

$$\int_0^1 (\arcsin x)^4\,dx .$$

Re{enie./ **Odgovor:** $\int_0^1 (\arcsin x)^4\,dx = \frac{\pi^4}{16} - 3\pi^2 + 24$.

33. Presmetaj go integralot:

$$\int_{-a}^{a} \frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx .$$

Re{enie./ **Odgovor:** $\int_{-a}^{a} \frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx = a^2[\sqrt{2} - \ln(\sqrt{2}+1)]$.

34. Presmetaj go integralot

$$\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\,dx .$$

Re{enie./ **Odgovor:** $\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\,dx = 1$.

35. Presmetaj go integralot

$$\int_1^e x^m (\ln x)^n\,dx .$$

Re{enie./

Odgovor: $\int_1^e x^m (\ln x)^n\,dx = \frac{e^{m+1}}{m+1}\left[1 - \frac{n}{m+1} + \frac{n(n-1)}{(m+1)^2} + \ldots + (-1)^n \frac{n!}{(m+1)^n}\right] + (-1)^{m+1}\frac{n!}{(m+1)^{n+1}}$.

Плоштина на рамнинска фигура

1. Пресметај ја плоштината на рамнинскиот лик ограничен со кривите $y = \operatorname{arctg}\sqrt{x}$, $y + x^2 = 0$, $x = 1$.

Решение. Заеднички точки на кривите $y = \operatorname{arctg}\sqrt{x}$ и $y + x^2 = 0$ се точките $x_1 = 0$ и $x_2 = -1$. Рамнинскиот лик што го градат трите криви лежи во десната полурамнина. Тој се состои од два дела, и тоа дел што лежи во четврт квадрант заграден со $x = 1$, $y = 0$ и $y = -x^2$ и дел што лежи во прв квадрант заграден со $y = \operatorname{arctg}\sqrt{x}$, $y = 0$ и $x = 1$. Нивни заеднички дел е отсечката $[0,1]$ од $x-$ оската. Според тоа

$$P = \int_0^1 \operatorname{arctg}\sqrt{x}dx - \int_0^1 -x^2dx = (x\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \sqrt{x} + \operatorname{arctg}\sqrt{x})\Big|_0^1 + \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - 1 + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{3} = \frac{3\pi - 4}{6}.$$

2. Пресметај ја плоштината на рамнинскиот лик ограничен со кривите $y = \frac{x^2}{2}$ и $y = \frac{1}{1+x^2}$.

Решение. Ќе ги најдеме заедничките точки на двете криви од системот $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 \\ y = \frac{1}{1+x^2} \end{cases}$. Решенија на равенката $\frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{1+x^2}$ се $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$, а заднички точки се $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$ и $\left(1, \frac{1}{2}\right)$. Според тоа

$$P = \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{2}x^2 \right)dx = \left(\operatorname{arctg}x - \frac{1}{6}x^3\right)\Big|_{-1}^1 = 2\left(\operatorname{arctg}x - \frac{1}{6}x^3\right)\Big|_0^1 = 2\left(\operatorname{arctg}1 - \frac{1}{6}\right) = 2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{6}\right) = \frac{3\pi - 2}{6}$$

3. Пресметај ја плоштината на конечниот дел од рамнината заграден со функциите $y = \frac{a^3}{a^2 + x^2}$ и $2ay = x^2$.

Решение./

Резултат: $P = \frac{(3\pi - 2)a^2}{6}$

4. Пресметај ја плоштината на делот од рамнината заграден со кривата $r = a(1 + \cos\varphi)$.

Решение. Според формулата за пресметување на рамнинска фигура во поларни координати имаме

$$P = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \rho^2 d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2(1+\cos\varphi)^2 d\varphi = \frac{1}{2}a^2 2\int_0^{\pi}(1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi)d\varphi = a^2\int_0^{\pi}\left(1 + 2\cos\varphi + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\varphi\right)d\varphi =$$
$$= a^2\left(\frac{3}{2}\varphi + 2\sin\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{3\pi a^2}{2}.$$

5. Пресметај ја плоштината на делот од рамнината заграден со кривата $r = a\sin 2\varphi$.

Решение. Дефинициона област на функцијата $r = a\sin 2\varphi$ е $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$. Плоштината на делот од рамнината што се добива за $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ е еднаков на плоштината на делот од кривата што се добива за $\varphi \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$. Според тоа

$$P = 2\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2(\varphi)d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\sin^2 2\varphi d\varphi = a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2\varphi}{2}d\varphi = \frac{a^2}{2}\left(\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^2}{4}.$$

6. Пресметај ја плоштината на делот од рамнината заграден со првиот свод на циклоидата $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ и отсечката $[0, 2a\pi]$ од Ox-оската.

Решение. Според формулата за пресметување на плоштина на фигура во параметарски облик е:

$$P = \int_0^{2\pi} y(t)x'(t)dt = \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t)a(1 - \cos t)dt = a^2\int_0^{2\pi}(1 - 2\cos t + \cos^2 t)dt = a^2(t - 2\sin t)\Big|_0^{2\pi} + a^2\int_0^{2\pi}\frac{1 + \cos 2t}{2}dt =$$
$$= 2\pi a^2 + \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{2\pi} = 2\pi a^2 + a^2\pi = 3a^2\pi$$

7. Определи ја правата која минува низ точката $(1,4)$ таква што со хиперболата $xy = 3$ заградува дел од рамнината со најамала плоштина.

Решение./

Резултат: $P = 4 - 3\ln 3$

8. Пресметај ја плоштината на делот од рамнината заграден со кривите $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 6x$, $\sqrt{3}y + x = 0$, $y - \sqrt{3}x = 0$.

Решение./

Резултат: $P = 4(\pi - \sqrt{3})$

9. Пресметај ја плоштината на делот од рамнината заграден со кружниците $x^2 + y^2 = 6$ и $x^2 + y^2 = 2x + 2y$ (оној дел за кој $x^2 + y^2 \geq 6$).

Решение./

Резултат: $P = \frac{3\sqrt{3} - \pi}{3}a^2$

10. Пресметај ја плоштината на делот од рамнината ограничен со кривата $(x^2+y^2)^2=2a^2xy$.

Решение./

Резултат: $P=a^2$

11. Пресметај ја плоштината на делот од рамнината ограничена со кривите $y^2=2x+1$ и $x-y-1=0$.

Решение./

Резултат: $P=\frac{16}{3}$

12. Хиперболата $x^2-2y^2=\frac{a^2}{4}$ го дели кругот $x^2+y^2=a^2$ на три дела. Најди ја плоштината на секој од тие делови.

Решение./

13. Хиперболата $\frac{x^2}{2}-y^2=1$ ја дели областа ограничена со елипсата $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ на три дела. Пресметај ја плоштината на секој од тие делови.

Решение./

Резултат: $P_1=P_3=\pi-\frac{\sqrt{2}}{2}\ln 3-2\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}$, $P_2=2(\pi-P_1)$.

14. Пресметај ја плоштината на рамнинската површина ограничена со кривите $y=\ln x$ и $y=\ln^2 x$.

Решение./

Резултат: $P=3-e$

15. Пресметај ја плоштината на делот од рамнината ограничен со кривите $y=\frac{\ln x}{4x}$ и $y=x\ln x$.

Решение./

Резултат: $P=\frac{3-2\ln 2-2\ln^2 2}{16}$

16. Пресметај ја плоштината на рамнинската површина ограничена со кривите $y=e^x$ и $y=e^{-x}$ и правата $x=1$.

Решение./

Резултат: $P=e+\frac{1}{e}-2$

17. Пресметај ја плоштината на делот од рамнината ограничен со параболите $y=x^2$ и $y=\sqrt{x}$.

Решение./

Резултат: $P=\frac{1}{3}$

18. Пресметај ја плоштината на делот од рамнината кој е ограничен со кривата $y=xe^{-\frac{x^2}{2}}$.

Решение./

Резултат: $P=2$

19. Пресметај ја плоштината на делот од рамнината што се наоѓа меѓу кривата $y=\frac{1}{1+x^2}$ и нејзината асимптота.

Решение./

Резултат: $P=\pi$

20. Пресметај ја плоштината на делот рамнината што се наоѓа меѓу кривата $xy^2=8-4x$ и нејзината асимптота.

Решение./

Резултат: $P=4\pi$

21. Параболата $y^2=6x$ го дели кругот $x^2+y^2=16$ на два дела.Пресметај ја плоштината на секој од тие делови.

Решение./

Резултат: $P_1=\frac{4}{3}(4\pi+\sqrt{3})$, $P_2=\frac{4}{3}(8\pi-\sqrt{3})$.

22. Секоја од кривите $\rho=3+\cos 4\varphi$ и $\rho=2-\cos 4\varphi$ ограничува по една област(дел од рамнината). Пресметај ја плоштината на делот од рамнината кој е заеднички за двете области.

Решение./

Резултат: $P=\frac{37\pi}{6}-5\sqrt{3}$.

23. Параболата $y=\frac{x^2}{2}$ го дели кругот $x^2+y^2=8$ на два дела. Пресметај ја плоштината на секој од тие делови.

Решение./

Резултат: $P_1=2\pi+\frac{4}{3}$, $P_2=6\pi-\frac{4}{3}$

24. Пресметај ја плоштината на делот од рамнината кој е ограничен со кривата $\rho=2+\cos 2\varphi$ што лежи надвор од кривата $\rho=2+\sin\varphi$.

Решение./

Резултат: $P=\frac{51\sqrt{3}}{16}$.

25. Пресметај ја плоштината на делот од рамнината ограничен со кривата $y = \ln x$, правите $y = \ln a$, $y = \ln b$ и ординатната оска.

Решение./

Резултат: $P = b - a$

26. Пресметај ја плоштината на делот од рамнината кој е ограничен со петљата на кривата $\begin{cases} x = 3t^2 \\ y = 3t - t^3 \end{cases}$.

Решение./

Резултат: $P = \frac{72}{5}\sqrt{3}$

27. Пресметај ја плоштината на делот од Лемнискатата на Бернули $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ што се наоѓа во внатрешноста на кругот $x^2 + y^2 = \frac{a^2}{2}$.

Решение./

Резултат: $P = a^2\left(1 + \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

28. Пресметај ја плоштината на делот од рамнината кој е ограничен со петљата на кривата $\begin{cases} x = t^2 - 1 \\ y = t^3 + t \end{cases}$.

Решение./

Резултат: $P = \frac{8}{15}$

29. Пресметај ја плоштината на рамнинската фигура огранична со кривата $\rho^2 = a^2 \cos n\varphi$.

Решение./

Резултат: $P = a^2$

30. Пресметај ја плоштината на делот од рамнината заграден со астроидата $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$.

Решение./Плоштините на секој од деловите што се наоѓа во секој од квадртантите се еднакви. Според тоа

$$P = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} y(t)x'(t)dt = -4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} a\sin^3 t\, 3a\cos^2 t \sin t dt = 12a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t\cos^2 t dt = 12a^2\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2t)^2(1 + \cos 2t)dt = \frac{3}{2}a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t(1 - \cos 2t)dt =$$

$$= \frac{3}{2}a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t dt - \frac{3}{2}a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t\cos 2t dt = \frac{3}{2}a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt - \frac{3}{4}a^2\frac{1}{3}\sin^3 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{4}a^2\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{8}a^2\pi$$

31. Пресметај ја плоштината на фигурате ограничена со кривата $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$.

Упатство:Параметарски равенки на кривата се $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = b\sin^3 t \end{cases}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Резултат: $P = \frac{3ab\pi}{8}$.

32. Пресметај ја плоштината на делот од рамнината заграден со елипсата $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Упатство:Параметарски равенки на елипсата се $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$.

Резултат: $P = \pi ab$.

33. Пресметај ја плоштината на фигурате ограничена со кривата $\begin{cases} x = \frac{c^2}{a}\cos^3 t \\ y = \frac{c^2}{b}\sin^3 t \end{cases}$.

Решение.

Резултат: $P = \frac{3\pi(a^2 - b^2)^2}{8ab}$.

34. Пресметај ја плоштината на делот од делот од рамнината ограничена со кривата $\begin{cases} x = a(1 - \cos t)\cos t \\ y = a(1 - \cos t)\sin t \end{cases}$.

Решение./

Резултат: $P = \frac{3a^2\pi}{2}$.

35. Пресметај ја плоштината на делот од рамнината ограничен со кривата $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1$, $a > 0$, $y > 0$.

Решение./

Резултат: $P = \frac{|ab|}{6}$.

Должина на лак на крива

1.Пресметај го периметарот на криволинискиот триаголник ограничен со кружницата $x^2+y^2=2$ и графикот на функцијата $y=\sqrt{|x|}$.

Решение./Параметарски равенки на кружницата се $x=\sqrt{2}\sin t$, $y=\sqrt{2}\sin t$. Заеднички точки на кривите се решенија на системот $\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ y=\sqrt{|x|} \end{cases}$. Негово решение е $(-1,1)$, $(1,1)$. При тоа

$$l_1=\int_0^1\sqrt{1+[x'(y)]^2}\,dy=\int_0^1\sqrt{1+(2y)^2}\,dy=\int_0^1\sqrt{1+4y^2}\,dy=\left[\frac{1}{4}\ln(2y+\sqrt{1+4y^2})+\frac{1}{2}y\sqrt{1+4y^2}\right]\Big|_0^1=\frac{1}{4}\ln(2+\sqrt{5})+\frac{1}{2}\sqrt{5}$$

Од друга страна

$$l_2=\int_0^1\sqrt{1+[(\sqrt{2-x^2})']^2}\,dx=\int_0^1\sqrt{1+\left(-\frac{x}{\sqrt{2-x^2}}\right)^2}\,dx=\int_0^1\sqrt{1+\frac{x^2}{2-x^2}}\,dx=\int_0^1\sqrt{\frac{2-x^2+x^2}{2-x^2}}\,dx=\sqrt{2}\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{2-x^2}}=\sqrt{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}\Big|_0^1=\sqrt{2}(\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}-\arcsin 0)=\sqrt{2}\,\frac{\pi}{4}.$$

Конечно,

$$l=2(l_1+l_2)=2\left(\frac{1}{4}\ln(2+\sqrt{5})+\frac{1}{2}\sqrt{5}+\sqrt{2}\,\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\ln(2+\sqrt{5})+\sqrt{5}+\frac{\pi\sqrt{2}}{2}.$$

Резултат: $l=\frac{\pi}{\sqrt{2}}+\sqrt{5}+\frac{1}{2}\ln(2+\sqrt{5})$

2.Определи го радиусот на кружницата која има центар во координатниот почеток и лакот на астроидата $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ кој лежи во првиот квадрант го дели на три еднакви дела.

Решение. /

Резултат: $R=\frac{a}{\sqrt{3}}$

3.Пресметај ја должината на делот од кривата $x^2=5y^3$, што се наоѓа во внатрешноста на кружницата $x^2+y^2\le 6$.

Решение./

Резултат: $l=\frac{134}{27}$.

4.Пресметај ја должината на кривата $y=\ln x$, $x\in[2\sqrt{2},2\sqrt{6}]$.

Решение./За должината на лакот на $y=\ln x$ што се добива за вредностите на $x\in[2\sqrt{2},2\sqrt{6}]$ имаме

$$l=\int_{2\sqrt{2}}^{2\sqrt{6}}\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx=\int_{2\sqrt{2}}^{2\sqrt{6}}\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\,dx=\int_{2\sqrt{2}}^{2\sqrt{6}}\sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}}\,dx=\int_{2\sqrt{2}}^{2\sqrt{6}}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\,dx=\left[1+x^2=t^2\ ,\ [2\sqrt{2},2\sqrt{6}]\xrightarrow{t=\sqrt{1+x^2}}[\,3\,,\,5\,]\right]=\int_3^5\frac{t^2}{t^2-1}\,dt=$$
$$=\left(t+\frac{1}{2}\ln\frac{t-1}{t+1}\right)\Big|_3^5=2+\frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}$$

5. Пресметај ја должината на кривата $r=a\sin\varphi$.

Решение./Функцијата $r=a\sin\varphi$ е определена за $\varphi\in[\,0\,,\,\pi\,]$. При тоа

$$l=\int_0^{\pi}\sqrt{r^2+r'^2}\,d\varphi=\int_0^{\pi}\sqrt{(a\sin\varphi)^2+(a\cos\varphi)^2}\,d\varphi=a\int_0^{\pi}d\varphi=a\varphi\Big|_0^{\pi}=\pi a.$$

Резултат: $l=\pi a$

6.Пресметај ја должината на кривата $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$.

Решение.

Резултат: $l=\frac{a}{\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2}+1)+a$.

7.Пресметај ја должината на кривата $\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2/3}=1$.

Решение./

Резултат: $l=4(a+b)-\frac{4ab}{a+b}$

8.Пресметај ја должината на кривата $(y-\arcsin x)^2=1-x^2$.

Решение./

Резултат: $l=1$.

9.Докажи дека должините на последователните свиоци на логаритамската спирала

$r=ae^{k\varphi}$, $2\pi n\le\varphi\le 2\pi(n+1)$,

образуваат геометриска прогресија. Определи го количникот на прогресијата.

Решение./

Резултат: $q=e^{2k\pi}$.

10.Определи ја должината на кривата $r=2(1+\cos\varphi)$ што се наоѓа во внатрешноста на кругот $r\le 1$.

Решение./

Резултат: $l = 8(2-\sqrt{3})$.

11. Пресметај ја должината на кардиоидата $r = a(1-\cos\varphi)$.

Решение. Бидејќи кривата е зададена во поларни координати, добиваме:

$$l = 2\int_0^{\pi}\sqrt{(r(\varphi))^2+(r'(\varphi))^2}\,d\varphi = 2\int_0^{\pi}\sqrt{a^2(1-\cos\varphi)^2+a^2\sin^2\varphi}\,d\varphi = 2a\int_0^{\pi}\sqrt{2-2\cos\varphi}\,d\phi = 4a\int_0^{\pi}\sin\frac{\varphi}{2}d\varphi = -8a\cos\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi} = 8a$$

12. Пресметај ја должината на логаритамската спирала $r = ae^{k\varphi}$ за $\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$.

Решение./

Резултат: $l = a\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}\left(e^{k\varphi_2} - e^{k\varphi_1}\right)$.

13. Докажи дека должината на еден свод на кривата $\begin{cases} x = at - b\sin t \\ y = a - b\cos t \end{cases}$, $0 \le t \le 2\pi$, $a > 0, b > 0$ е еднаков на должината на елипса со полуоски $a+b$ и $|a-b|$.

Решение./

14. Пресметај ја должината на кривата $r = a\sin^n\frac{\varphi}{n}$, $n \in \mathbf{N}$, ако

а) n е парен број

б) n е непарен број.

Решение./

Резултат: а) $l = 2a\dfrac{(2k)!!}{(2k-1)!!}$, $n = 2k$

б) $l = \pi a\dfrac{(2k+1)!!}{(2k)!!}$, $n = 2k+1$.

15. Нека $s(\alpha)$ е должината на логаритамската спирала

$r = ae^{k\varphi}$, $k > 0$, $\alpha \le \varphi \le 0$.

Пресметај

$\lim\limits_{\alpha\to-\infty} s(\alpha)$.

Решение./

Резултат: $\lim\limits_{\alpha\to-\infty} s(\alpha) = a\dfrac{\sqrt{1+k^2}}{k}$.

16. Пресметај ја должината на кривата $\begin{cases} x = 6-3t^2 \\ y = 4t^3 \end{cases}$, $x \ge 0$.

Решение./

Резултат: $l = 26$.

17. Пресметај ја должината на кривата

$y = \sqrt{2x-x^2} - 1$, за $\frac{1}{4} \le x \le 1$.

Решение./

Резултат: $l = \arcsin\frac{3}{4}$.

18. Пресметај ја должината на кривата $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}\ln x$, $1 \le x \le 3$.

Решение./

Резултат: $l = 4 + \frac{\ln 3}{4}$.

19. Пресметај ја должината на кривата $y = \ln x$, што се наоѓа над интервалот $[2\sqrt{2}, 2\sqrt{6}]$.

Решение./

Резултат: $l = 2 + \frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}$

20. Пресметај ја должината на делот од кривата $x = \ln\cos y$, што се наоѓа над интервалот $0 \le y \le \frac{\pi}{3}$.

Решение./

Резултат: $l = \ln(2+\sqrt{3})$.

21. Пресметај ја должината на делот од кривата $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$, што се наоѓа над интервалот $[0, b]$.

Решение./

Резултат: $l = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{b}{a}} - e^{-\frac{b}{a}}\right)$

22. Пресметај ја должината на параболата $y^2 = 2px$ од нејзиното теме до нејзината точка $M_\circ(x_\circ, y_\circ)$.

Решение./

Резултат: $l = \dfrac{y_\circ}{2p}\sqrt{y_\circ^2 + p^2} + \dfrac{p}{2}\ln\dfrac{y_\circ + \sqrt{y_\circ^2 + p^2}}{p}$

23. Најди ја должината на кривата $y = \ln\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$, што се наоѓа над интервалот $[a,b]$, $0 < a < b$.

Решение. Бидејќи $y' = \dfrac{1}{\frac{e^x+}{e^x-1}}\dfrac{-2e^x}{(e^x-1)^2} = \dfrac{-2e^x}{e^{2x}-1}$, добиваме:

$$l = \int_a^b \sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx = \int_a^b \sqrt{1+\left(-\frac{2e^x}{e^{2x}-1}\right)^2}\,dx = \int_a^b \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}dx = \frac{1}{2}\int_a^b \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}(e^{2x}-1)}2e^{2x}dx = \frac{1}{2}\int_{e^{2a}}^{e^{2b}} \frac{t+1}{t(t-1)}dt = \frac{1}{2}\int_{e^{2a}}^{e^{2b}} \frac{t+1}{t(t-1)}dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{e^{2a}}^{e^{2b}}\left(\frac{2}{t-1} - \frac{1}{t}\right)dt = \left(\ln(t-1) - \frac{1}{2}\ln t\right)\Big|_{e^{2a}}^{e^{2b}} = \ln\frac{e^b - e^{-b}}{e^a - e^{-a}}$$

24. Определи права $y = \text{const}$ која што првиот свод на циклоидата $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$ го дели на три еднакви дела.

Решение./

Резултат: $y = \dfrac{16a}{9}$

25. Пресметај ја должината на делот од кривата $r = a\varphi^3$ што се наоѓа над интервалот $0 \le \varphi \le 4$.

Решение./

Резултат: $l = \dfrac{a}{2}\left(205 - \dfrac{81}{4}\ln 3\right)$.

26. Определи ја должината на делот кривата $\begin{cases} x = \cos^4 t \\ y = \sin^4 t \end{cases}$ што се добива за вредности на параметарот t од интервалот $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Решение./

Резултат: $l = 1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\ln(1+\sqrt{2})$

27. Пресметај ја должината на делот од кривата $\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t) \\ y = a(\sin t - t\cos t) \end{cases}$ што се добива за вредности на параметарот t од интервалот $[0, \varphi_\circ]$

Решение. Бидејќи $\begin{cases} \dot{x} = a(-\sin t + \sin t + t\cos t) = at\cos t \\ \dot{y} = a(\cos t - \cos t + t\sin t) = at\sin t \end{cases}$, и $\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{a^2t^2\cos^2 t + a^2t^2\sin^2 t}$ добиваме:

$$l = \int_0^{\varphi_\circ} \sqrt{(at\cos t)^2 + (at\sin t)^2}\,dt = \int_0^{\varphi_\circ} at\,dt = \frac{1}{2}at^2\Big|_0^{\varphi_\circ} = \frac{1}{2}a\varphi_\circ^2.$$

Резултат: $l = \dfrac{a\varphi_\circ^2}{2}$

28. Определи ја должината на делот од кривата $\begin{cases} x = ae^{\alpha\varphi}\cos\varphi \\ y = ae^{\alpha\varphi}\sin\varphi \end{cases}$ што се добива за вредности на параметарот φ од интервалот $[0, \varphi_\circ]$.

Решение. Бидејќи $\begin{cases} \dot{x} = ae^{\alpha\varphi}(\alpha\cos\varphi - \sin\varphi) \\ \dot{y} = ae^{\alpha\varphi}(\alpha\sin\varphi + \cos\varphi) \end{cases}$, добиваме:

$$l = \int_0^{\varphi_\circ} \sqrt{[ae^{\alpha\varphi}(\alpha\cos\varphi - \sin\varphi)]^2 + [ae^{\alpha\varphi}(\alpha\sin\varphi + \cos\varphi)]^2}\,d\varphi = \int_0^{\varphi_\circ} ae^{\alpha\varphi_\circ}\sqrt{\alpha^2\cos^2\varphi + \alpha^2\sin^2\varphi + \sin^2\varphi + \cos^2\varphi}\,d\varphi =$$

$$= a\int_0^{\varphi_\circ} e^{\alpha\varphi}\sqrt{\alpha^2+1}\,d\varphi = a\frac{\sqrt{\alpha^2+1}}{\alpha}e^{\alpha\varphi}\Big|_0^{\varphi_\circ} = a\frac{\sqrt{\alpha^2+1}}{\alpha}[e^{\alpha\varphi_\circ} - 1]$$

Резултат: $l = \dfrac{\sqrt{1+\alpha^2}}{\alpha}a(e^{\alpha\varphi_\circ} - 1)$.

29. Пресметај ја должината на делот од кривата $\begin{cases} x = \dfrac{c^2}{a}\cos^3 t \\ y = \dfrac{c^2}{b}\sin^3 t \end{cases}$, $0 \le t \le 2\pi$, $c^2 = a^2 - b^2$.

Решение./

Резултат: $l = 4\dfrac{a^3 - b^3}{ab}$.

30. Пресметај ја должината на делот од кривата $\begin{cases} x = \displaystyle\int_1^t \frac{\sin t}{t}dt \\ y = \displaystyle\int_1^t \frac{\cos t}{t}dt \end{cases}$, за вредности на параметарот t од интервалот $[0, t_\circ]$.

Решение.Од самата дефиниција на кривата имаме $\dot{x}(t)=\frac{\sin t}{t}$, $\dot{y}(t)=\frac{\cos t}{t}$, па според тоа

$$l=\int_1^{t_\circ}\sqrt{(\dot{x}(t))^2+(\dot{y}(t))^2}\,dt=\int_1^{t_\circ}\sqrt{\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2+\left(\frac{\cos t}{t}\right)^2}=\int_1^{t_\circ}\frac{1}{t}dt=\ln t\Big|_1^{t_\circ}=\ln t_\circ-\ln 1=\ln t_\circ$$

Волумен на ротационо тело

1.Рамнинската површина ограничена со параболата $y=4-x^2$, отсечката $[-2,0]$ од оската Ox и правата $y=3x$ ротира околу оската Ox. Пресметај го волуменот на добиеното ротационо тело.

Решение./Заедничките точки на двете криви се решение на системот $\begin{cases} y=4-x^2 \\ y=3x \end{cases}$. Решенија на равенката $4-x^2=3x$ се $x_1=1$ и $x_2=-4$, па според тоа заеднички точки се $(1,3)$ и $(-4,-12)$. Рамнинскиот лик кој ротира околу Ox оската е отсечката од Ox оската што се наоѓа меѓу точките $(-2,0)$ и $(0,0)$, делот од параболата $y=4-x^2$ од точката $(-2,0)$ до точката $(1,3)$, и делот од правата $y=3x$ што се наоѓа меѓу точките $(0,0)$ и $(1,3)$. Според тоа

$$V=\pi\int_{-2}^{1}(4-x^2)^2dx-\pi\int_{0}^{1}(3x)^2dx=\pi\int_{-2}^{1}(16-8x^2+x^4)dx-\pi 3x^3\Big|_0^1=\left(16x-\frac{8}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5\right)\Big|_{-2}^{1}-3\pi=\frac{153}{5}\pi-3\pi=\frac{138}{5}\pi .$$

Резултат: $V=\frac{138}{5}\pi$

2.Кругот $(x-a)^2+y^2\le a^2$ ротира околу Oy оската.Пресметај го волуменот на добиеното ротационо тело.

Решение.Границата на кругот $(x-a)^2+y^2\le a^2$ е кружницата $(x-a)^2+y^2=a^2$. При тоа, равенката на горната полукружница(десната полукружница) е $x=x(y)=a+\sqrt{a^2-y^2}$ а равенката на долната полукружница(левата полукружница) е $x=x(y)=a-\sqrt{a^2-y^2}$. Според тоа,

$$V=\pi\int_{-a}^{a}[a+\sqrt{a^2-y^2}]^2dy-\pi\int_{-a}^{a}[a-\sqrt{a^2-y^2}]^2dy=4a\pi\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-y^2}dy=[y=a\sin t, dy=a\cos t dt]=4a^3\pi\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2 t dt=2\pi^2a^3 .$$

Резултат: $V=2\pi^2a^3$

3.Пресметај го волуменот на телото што се добива со ротација на астроидата $\begin{cases} x=a\cos^3 t \\ y=a\sin^3 t \end{cases}$ околу Ox -оската.

Решение.Точките на астроидата се добиваат за вредности на параметарот t од интервалот $[0,2\pi]$, при што кога t се менува од 0 до π, тогаш x се менува од a до $-a$. Според тоа

$$V=-\pi\int_{0}^{\pi}(a\sin^3 t)^2 3a\cos^2 t(-\sin t)dt=\pi a^3\int_{0}^{\pi}\sin^6 t\cos^2 t\sin t dt=\pi a^3\int_{0}^{\pi}(1-\cos^2 t)^3\cos^2 t\sin t dt=-\pi a^3\int_{1}^{-1}(1-z^2)^3z^2dz=\frac{32}{105}a^3\pi .$$

Резултат: $V=\frac{32}{105}a^3\pi$.

4.Рамнинскиот лик заграден со кривите $y^2=2px$, $y=0$ и $x=a$ ротира околу Ox -оската. Пресметај го волуменот на добиеното ротационо тело.

Решение./

Резултат: $V=a^2p\pi$.

5.Пресметај го волуменот на телото ограничено со цолиндерот $x^2+y^2=R^2$ и рамнините $y=0$, $z=0$, $\frac{x}{R}+\frac{z}{H}-1=0$, $\frac{x}{R}-\frac{z}{H}+1=0$.

Решение./

Резултат: $V=HR^2\frac{3\pi-4}{6}$.

6.Определи го волуменот на телото што се добива со ротација на рамнинскиот лик ограничен со кривата $y=\sqrt{x}e^{-x}$ и правите $y=0$ и $x=a$ околу Ox оската.

Решение./

Резултат: $V=\frac{\pi}{4}\left(1-\frac{1+2a}{e^{2a}}\right)$.

7.Пресметај го волуменот на телото што се добива со ротација на рамнинскиот лик, ограничен со кривата $y=\frac{\ln x}{x}$, $(1\le x\le e)$ и правите $y=0$ и $x=e$ околу Ox -оската.

Решение./

Резултат: $V=\pi\left(2-\frac{5}{e}\right)$.

8.Пресметај го волуменот на телото што се добива со ротација на рамнинскиот лик ограничен со кривата $y=\sin\sqrt{x}$ и правата $y=0$ $(0\le x\le\pi^2)$, околу Ox -оската.

Решение./

Резултат: $V=\frac{\pi^3}{2}$.

9.Пресметај го волуменот на телото што се добива со ротација на рамнинскиот лик ограничен со елипсата $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

а)околу Ox -оската
б)околу Oy -оската

Решение.Параметарски равенки на елипсата се $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases}$.Точките на елипсата се добиваат за вредности на параметарот t од интервалот $[0, 2\pi]$. Кога t се менува во интервалот $[0, \pi]$, т.е. кога t се менува од 0 до π, тогаш x се менува од a до $-a$. Кога t се менува од $\frac{\pi}{2}$ до $\frac{3\pi}{2}$, тогаш y се менува од a до $-a$ па според тоа:

а) $V = -\pi\int\limits_0^{\pi} b^2\sin^2 t(-a\sin t)dt = \pi b^2 a\int\limits_0^{\pi}(1-\cos^2 t)\sin tdt = [\cos t = z, \sin tdt = -dz] = -\pi b^2 a\int\limits_1^{-1}(1-z^2)dz = \frac{4}{3}ab^2\pi$

б) $V = -\pi\int\limits_{\pi/2}^{3\pi/2} a^2\cos^2 t\, b\cos tdt = -\pi a^2 b\int\limits_{\pi/2}^{3\pi/2}(1-\sin^2 t)\cos tdt = [\ \sin t = z, \cos tdt = dz\ ] = -\pi a^2 b\int\limits_1^{-1}(1-z^2)dz = \frac{4}{3}\pi a^2 b$

Резултат: $V = \frac{4}{3}ab^2\pi$.

10.Пресметај го волуменот на телото што се добива со ротација околу Oy-оската на рамнинскиот лик ограничен со кривата $xy = k^2$ и правите $x = a$, $x = b$ ($b > a > 0$).

Решение./

Резултат: $V = 2\pi k^2(b-a)$.

11.Пресметај го волуменот на телот што се добива со ротација околу Oy оската на рамнинскиот лик ограничен кривата $y = e^{x^2}$ и правите $y = 0$, $x = 0$ и $x = 1$.

Решение./

Резултат: $V = \pi(e-1)$

12.Пресметај го волуменот на телото што се добива со ротација на кривата

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} = 1$$

а)околу Ox-оската

б)околу Oy-оската

Решение./

Резултат: **а)** $V = \frac{32ab^2\pi}{105}$

б) $V = \frac{32a^2b\pi}{105}$.

13.Пресметај го волуменот на телото што се добива со ротација на рамнинскиот лик ограничен со кривите $2py = x^2$ и $y = |x|$,

а)околу Ox-оската

б)околу Oy-оската.

Решение./

Резултат: **а)** $V = \frac{32p^3\pi}{15}$

б) $V = \frac{4p^3\pi}{3}$

14.Определи го волуменот на телото што се добива со ротација на криволинискиот трапез со основа $[0,1]$ кој е ограничен со кривата $y = \arcsin x$ ротира околу Ox-оската. Определи го волуменот на добиеното ротрационо тело.

Решение./

Резултат: $V = \pi\left(\frac{\pi^2}{4} - 2\right)$.

15.Кривата $x^4 + y^4 = ay^3$ ротира околу Oy оската. Пресметај го волуменот на добиеното ротационо тело.

Решение./

Резултат: $V = \frac{\pi^2 a^3}{16}$.

16.Пресметај го волуменот на телото што се добива со ротација на кривата $x^4 + y^4 = a^2x^2$ околу Ox-оската.

Решение./

Резултат: $V = \frac{2}{3}\pi a^3$.

17.Пресметај го волуменот на телото што се добива со ротација на кривата $x^4 + y^4 = 2axy^2$ околу Ox-оската.

Решение./

Резултат: $V = \frac{2\pi a^3}{3}$

18.Определи го волуменот на телото што се добива со ротација на леминискатата $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ околу Ox-оската.

Решение./

Резултат: $V=\frac{\pi a^3}{4}\left[\sqrt{2}\ln(1+\sqrt{2})+\frac{2}{3}\right]$

19. Кривата $(x^2+y^2)^3=a^2x^4$ ротира околу Ox оската. Пресметај го волуменот на добиеното ротационо тело.

Решение./

Резултат: $V=\frac{4\pi a^3}{21}$.

20. Пресметај го волуменот на телото што се добива со ротација на еден свод на циклоидата $\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$ заедно со неговата тетива, околу Ox -оската.

Решение./

Резултат: $V=5\pi^2a^3$

21. Пресметај го волуменот на телото ограничено со површините $z=0$ и $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{(z-H)^2}{H^2}$.

Решение./

Резултат: $V=\frac{\pi\, abH}{3}$.

22. Фигурата што ја образуваат хиперболата $x^2-y^2=a^2$ и правата $x=a+h$ ротира околу Ox -оската. Определи го волуменот на добиеното ротационо тело.

Решение./

Резултат: $V=\frac{\pi h^2}{3}(3a+h)$.

23. Рамнинската фигура ограничена со параболите $y=x^2$ и $y=\sqrt{x}$ ротира околу Ox оската. Определи го волуменот на добиеното ротационо тело.

Решение./

Резултат: $V=\frac{3\pi}{10}$.

24. Пресметај го волуменот на телото што се добива со ротација на рамнинскиот лик определен со поларните координатни неравенства $0\le r\le a\varphi$, за $\varphi\in[0,\pi]$, околу поларната оска.

Решение./

Резултат: $V=2(\pi^4-6\pi^2)\frac{a^3}{3}$

25. Пресметај го волуменот на телото што се добива со ротација на кардиоидата $r=a(1+\cos\varphi)$ околу поларната оска.

Решение. Кардиоидата е симетрична во однос на правата што минува низ поларната оска. Точките што се наоѓаат над таа права се добиваат за вредности на параметарот φ од интервалот $[0,\pi]$. Според тоа,

$$V=\frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi} r^3(\varphi)\sin\varphi\, d\varphi=\frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi}[a(1+\cos\varphi)]^3\sin\varphi\, d\varphi=\frac{2\pi a^3}{3}\int_0^{\pi}(1+\cos\varphi)^3\sin\varphi\, d\varphi=[1+\cos\varphi=z,\sin\varphi d\varphi=dz]=-\frac{2\pi a^3}{3}\int_2^0 z^3dz=\frac{8\pi a^3}{3}$$

Резултат: $V=\frac{8\pi\, a^3}{3}$

26. Определи го волуменот на телото што се добива со ротација на рамнискиот лик определен со $0\le r\le 2a\frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi}$, $0\le\varphi\le\frac{\pi}{3}$ околу поларната оска.

Решение. Бидејќи ротацијата е околу поларната оска, добиваме:

$$V=\frac{2\pi}{3}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(2a\frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi}\right)^3\sin\varphi\, d\varphi=\frac{2\pi}{3}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(2a\frac{1-\cos^2\varphi}{\cos\varphi}\right)^3\sin\varphi\, d\varphi=[\cos\varphi=t,\ \sin\varphi d\varphi=-dt]=-\frac{16\pi a^3}{3}\int_1^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1-t^2}{t}\right)^3dt=\frac{\pi a^3(51-64\ln 2)}{4}.$$

Резултат: $V=\frac{\pi\, a^3(51-64\ln 2)}{4}$

27. Пресметај го волуменот на телото што се добива со ротација на рамнинскиот лик ограничен со $y=\mathrm{tg}x^2$, $y=0$, $x=\sqrt{\frac{\pi}{3}}$ околу Oy оската.

Решение./ Бидејќи ротацијата е околу Oy -оската добиваме:

$$V=2\pi\int_0^{\sqrt{\pi/3}}xy(x)dx=2\pi\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{3}}}x\mathrm{tg}x^2dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{tg}t dt=-\pi\ln|\cos t|\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=-\pi\ln\left|\cos\frac{\pi}{3}\right|=\pi\ln 2.$$

Резултат: $V=\pi\ln 2$.

28. Пресметај го волуменот на телото што се добива со ротација на рамнинскиот лик ограничен со кривите $2py=a^2-(x-b)^2$, $y=0$, $b>a>0$, околу Oy оската.

Решение./

Резултат: $V = \dfrac{4\pi\, a^3 b}{3p}$

29. Пресметај го волуменот на телото што се добива со ротација на рамнинскиот лик ограничен со параболите $2py = x^2$, $2qx = y^2$, $p, q > 0$ околу Ox оската.

Решение./

Резултат: $V = \dfrac{12\pi\, pq}{5}\sqrt[3]{pq^2}$

30. Пресметај го волуменот на телото ограничен со површините $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ и $|z| = H$.

Решение./

Резултат: $V = 2\pi\, abH$.

Плоштина на ротационо тело

1.Пресметај ја плоштината на ротационата површината што се добива со ротација на делот од кривата $y^2=4x$, за $x\in[0,3]$ околу Ox оската.

Решение.Бидејќи

$$P=2\pi\int_a^b |\,y(x)\,|\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx\,,$$

каде $y=y(x)$ е непрекинато диференцијабилна функција на интервалот $[a,b]$. Ротационото тело што се добива со ротација на $y^2=4x$ околу Ox оската е исто со ротационото тело што се добива со ротација на $y=2\sqrt{x}$ околу Ox оската. Бидејќи $y(x)\geq 0$ за $x\in[0,3]$, добиваме

$$P=2\pi\int_a^b |\,y(x)\,|\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx=2\pi\int_0^3 y(x)\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx=2\pi\int_0^3 2\sqrt{x}\sqrt{1+\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2}\,dx=4\pi\int_0^3\sqrt{1+x}\,dx=4\pi\frac{2}{3}\sqrt{(1+x)^3}\Big|_0^3=\frac{64\pi}{3}-\frac{8\pi}{3}=\frac{56\pi}{3}.$$

Резултат: $P=\dfrac{56\pi}{3}$.

2.Пресметја ја плоштината на ротационата површина што се добива со ротација на делот од кривата $y^2=4+x$ за $-4\leq x\leq 2$ околу Ox-оската.

Решение./

Резултат: $P=\dfrac{62\pi}{3}$.

3.Пресметај ја плоштината на ротационата површина што се добива со ротација на делот од кривата $x=\frac{1}{4}y^2-\frac{1}{2}\ln y$ за $y\in[1,e]$ околу Ox-оската.

Решение./

Резултат: $P=\dfrac{\pi(\,e^3+3e-4\,)}{3}$.

4.Пресметај ја плоштината на ротационата површина што се добива со ротација на делот од кривата $y=e^{-x}$ за $x\in[0,a]$ околу Ox-оската.

Решение./

Резултат: $P=\pi\left(\sqrt{2}-e^{-a}\sqrt{1+e^{-2a}}-\ln\dfrac{e^{-a}+\sqrt{1+e^{-2a}}}{1+\sqrt{2}}\right)$

5.Пресметај ја плоштината на од ротационата површина што се добива со ротација на делот од кривата $4x+2\ln y=y^2$ за вредности на y од интервалот $\left[\frac{1}{e},e\right]$ околу Oy-оската.

Решение./

Резултат: $P=\pi\dfrac{\mathrm{sh}4-4e^{-2}}{8}$.

6.Пресметај ја плоштината на ротационата површина што се добива со ротација на делот од кривата $y=\mathrm{tg}x$ за $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ околу Ox оската.

Решение./

Резултат: $P=\pi\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}+\ln\dfrac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{2}-2}\right)$.

7.Пресметај ја плоштината на ротационата површина што се добива со ротација на делот кардиоидата $r=a(\,1+\cos\varphi\,)$ околу

а)поларната оска **б)**околу правата $r=\dfrac{2a}{\cos\varphi}$.

Решение./

Резултат:а) $P=\dfrac{32\pi\,a^2}{5}$, **б)** $P=\dfrac{96\pi\,a^2}{5}$.

8.Пресметај ја плоштината на ротационото тело што се добива со ротација на леминискатата на Бернули $r^2=a^2\cos2\varphi$ околу поларната оска.

Решение./

Резултат: $P=2\pi\,a^2(\,2-\sqrt{2}\,)$.

9.Определи ја плоштината на ротационото тело што се добива со ротација на кружницата $x^2+(y-b)^2=a^2$, $b\geq a>0$ околу правата $y=0$.

Решение./

Резултат: $P=4\pi^2ab$.

10.Пресметај ја плоштината на ротационото тело што се добива со ротација на елипсата $4x^2+y^2=4$ околу:

а) $y=0$ **б)** $x=0$

Решение./Зададената крива е елипса со полуоски $a=1$ и $b=2$. Нејзините параметаски равенки се $\begin{cases} x=\cos t \\ y=2\sin t \end{cases}$. Телото што се добива со ротација на елипсата околу Ox оската е исто со ротација на кривата $\begin{cases} x=\cos t \\ y=2\sin t \end{cases}$, $t\in[\pi,2\pi]$ околу Ox оската, т.е. правата $y=0$. Според тоа

$$P=2\pi\int_{o}^{2\pi}-2\sin t\sqrt{(-\sin t)^2+(2\cos t)^2}\,dt=-4\pi\int_{\pi}^{2\pi}\sin t\sqrt{1+3\cos^2 t}\,dt=\left[\sqrt{3}\cos t=z,\sin t dt=-\frac{1}{\sqrt{3}}dz\right]=\frac{4\pi}{\sqrt{3}}\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\sqrt{1+z^2}\,dz=(*)\,.$$

Бидејќи

$$\int\sqrt{1+z^2}\,dz=\frac{1}{2}\ln|z+\sqrt{1+z^2}|+\frac{z}{2}\sqrt{1+z^2}\,,$$

имаме

$$(*)=\frac{4\pi}{2\sqrt{3}}(\ln(2+\sqrt{3})-\ln(2-\sqrt{3}))+2\frac{4\pi}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1+3}=8\pi+\frac{4\pi}{\sqrt{3}}\ln(2+\sqrt{3})\,.$$

Резултат:а) $P=8\pi+\frac{4\pi}{\sqrt{3}}\ln(2+\sqrt{3})$,**б)** $P=2\pi+\frac{8\pi^2}{3\sqrt{3}}$.

11.Најди ја плоштината на ротационото тело, што се добива со ротација на кривата $y=\arcsin\sqrt{x}+\sqrt{x-x^2}$ околу
а)правата $y=0$.
б)правата $x=0$
Решение./

Резултат:а) $P=\frac{2\pi(3\pi-4)}{3}$ **, б)** $\frac{4\pi}{3}$.

12.Пресметај ја плоштината на ротационото тело што се добива со ротација на астроидата $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$, $0\le t\le 2\pi$, околу
а)правата $y=0$.
б)правата $x=a$.
Решение./

Резултат:а) $P=\frac{12\pi a^2}{5}$, **б)** $P=12\pi a^2$.

13.Определи ја плоштината на ротационото тело што се добива со ротација на циклоидата $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ околу
а)правата $y=0$ **б)**правата $x=0$ **в)**правата $y=2a$ **г)**правата $x=\pi a$ **д)**правата $y=2a$.
Решение./

Резултат:а) $P=\frac{64\pi a^2}{3}$, **б)** $P=16\pi^1 a^2$, **в)** $P=\frac{32\pi a^2}{3}$
г) $P=\frac{8}{3}\pi(3\pi-4)a^2$, **д)** $P=16(2\sqrt{2}-1)\frac{\pi a^2}{3}$.

14.Циклоидата $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $0\le t\le 2\pi$ ротира околу правата $y=ka$, $0\le k\le 2$.
а)пресметај ја плоштината на добиената ротациона површина.
б)за кои вредности на k плоштината на формираната ротациона површина е најмала.Опреели ја таа површина.
Решение./

Резултат: а) $P=16\pi(3k-4+(4-2k)^{\frac{3}{2}})\frac{a^2}{3}$
б) $k=\frac{3}{2}$, $S_{\min}=8\pi a^2$

15.Кривата $y=\cos x$, $-\pi\le x\le\pi$, ротира околу правата $y=a$. За кои вредности на a плоштината на добиената ротациона површина е најмала? Определи ја таа најмала површина.
Решение./

Резултат: $a=0$, $S_{\min}=4\pi(\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1))$

16.Кривата $x=\sqrt{2}\sin t$, $y=\frac{1}{4}\sin 2t$, $0\le t\le\pi$ ротира околу
а)правата $y=0$.
б)правата $x=0$.
Определи ја плоштината на добиеното ротационо тело.
Решение./

Резултат:а) $P=\frac{\pi}{2}$ **б)** $P=\frac{10\pi\sqrt{2}}{3}$.

17.Кругот $r=2a\sin\varphi$ ротира околу поларната оска. Пресметај ја плоштината на добиеното ротационо тело.
Решение.Бидејќи дефиниционата област на функцијата е $\varphi\in[0,\pi]$ и ротацијата е околу поларната оска, добиваме:

$$P=2\pi\int_0^{\pi}r(\varphi)\sqrt{r^2(\varphi)+r'^2(\varphi)}\sin\varphi d\varphi=2\pi\int_0^{\pi}2a\sin\varphi\sqrt{(2a\sin\varphi)^2+(2a\cos\varphi)^2}\sin\varphi\,d\varphi=8\pi a^2\int_0^{\pi}\sin^2\varphi d\varphi=4\pi a^2\int_0^{\pi}(1-\cos 2\varphi)d\varphi=$$
$$=4\pi a^2\left(\varphi-\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Big|_0^{\pi}=4a^2\pi^2$$

Резултат: $P = 4\pi^2 a^2$.

18.Петљата на кривата $9ay^2 = x(3a-x)^2$, $a > 0$ ротира околу апсцисната оска. Пресметај ја плоштината на добиената ротациона површина.
Решение./

Резултат: $P = 3\pi a^2$.

19.Еден свод на синусоидата $y = \sin x$ ротира околу апсцисната оска. Пресметај ја површината на добиеното ротационо тело.
Решение./

Резултат: $P = \pi[\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})]$.

20.Лемин искатата $r^2 = 2a^2 \cos 2\varphi$ ротира околу:
а)поларната оска.
б)околу правата $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$
Пресметај ја плоштината на добиената ротациона површина.
Решение./

Резултат: **а)** $P = 4a^2\pi(2-\sqrt{2})$
б) $P = 4\pi\sqrt{2}a^2$.

21.Циклоидата $\begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases}$ ротира околу
а) y -оската **б)**околу x -оската
Решение./

Резултат: **а)** $P = 16\pi^2 a^2$.
б) $P = \dfrac{64a^2\pi}{3}$.

22.Пресметај ја плоштината на телото што се добива со ротација на кривата $\begin{cases} x = a(t\sin t + \cos t) \\ y = a(\sin t - t\cos t) \end{cases}$, $0 \le t \le \pi$ околу
а) правата $y = 0$ **б)** правата $x = -a$
Решение./

Резултат: **а)** $P = 6\pi^2 a^2$.
б) $P = 3\pi(\pi^2 - 4)a^2$.

23.Елипсата $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ ротира и околу помалата и околу поголемата своја оска. Пресметај ја плоштината на добиените ротациони тела.
Решение./

Резултат: $P = 2\pi b^2 + \dfrac{2\pi ab}{\varepsilon}\arcsin\varepsilon$
$P = 2\pi a^2 + \dfrac{\pi b^2}{\varepsilon}\ln\dfrac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}$, ε -ексцентритет.

24.Пресметај ја плоштината на телото што се добива со ротација на кривата $3x = 4\cos y$, $-\dfrac{\pi}{2} \le y \le 0$ околу Oy оската.
Решение./

Резултат: $P = \dfrac{\pi(20 + 9\ln 3)}{9}$.

25.Пресметај ја плоштината на телото што се добива со ротација на кривата $x = a\arcsin\sqrt{\dfrac{y}{a}} + \sqrt{y(a-y)}$, $\dfrac{a}{4} \le y \le \dfrac{3a}{4}$ околу Oy -оската.
Решение./

Резултат: $P = \dfrac{\pi a^2}{6}[11 - 9\sqrt{3} + 2\pi(2\sqrt{3} - 1)]$.

26.Најди ја плоштината на површината што се добива со ротација на кривата $x = e^t \sin t$, $y = e^t \cos t$, $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ околу апсцисната оска.
Решение./

Резултат: $P = \dfrac{2\pi\sqrt{2}}{5}(e^{\pi} - 2)$.

27.Пресметај ја плоштината на телото што се добива со ротација на делот од кривата $y = \dfrac{x^2}{2p}$ околу, $0 \le x \le b$ околу Oy оската.
Решение./

Резултат: $P = \dfrac{2\pi}{3p}[(p^2 + b^2)^{\frac{3}{2}} - p^3]$.

28.Пресметај ја плоштината на телото што се добива со ротација на кривата $16y^2 = 2x^2 - x^4$ околу
а) правата $y = 0$ б)правата $x = 0$.
Решение./

Резултат: **а)** $P=\frac{\pi}{2}$. **б)** $P=\frac{10\sqrt{2}\pi}{3}$.

29. Пресметај ја плоштината на телото што се добива со ротација на кривата $\begin{cases} x=a(t+\sin t\cos t) \\ y=a\sin^2 t \end{cases}$, $0\le t\le\frac{\pi}{2}$ околу

а) правата $y=0$ **б)** правата $x=0$

Решение./

Резултат: **а)** $P=\frac{4a^2\pi}{3}$ **б)** $P=\frac{2\pi(3\pi-4)a^2}{3}$

30. Лакот на кругот $x^2+y^2=a^2$ што лежи во првиот квадрант ротира околу својата тетива. Пресметај ја плоштината на добиената ротациона површина.

Решение./

Резултат: $P=\pi\, a^2\sqrt{2}\left(2-\frac{\pi}{2}\right)$