

XIX олимпијада

1. Во внатрешноста на квадрат $ABCD$ се конструирани рамнострани триаголници ABK, BCL, CDM и DAN . Докажи дека средините на отсечките $KL, LM, MN, NK, AK, BK, BL, CL, CM, DM, DN, AN$, се темиња на правилен дванаесетаголник.

Решение. I *Начин.* Нека $X_1, X_2, \dots, X_{12}$ се средини на отсечките $LM, AN, BL, MN, BK, CM, KN, CL, DN, KL, DM, AK$, соодветно.

Триаголникот PMX_3 е правоаголен, а X_2 е средина на хипотенузата MP . Имено, точката X_3 е средина на заемно нормалните отсечки BL и CM , а триаголникот MX_3X_2 , заради симетрија на X_2 и X_3 во однос на правата KM е рамнострани.

Точките P и X_1 лежат на дијагоналата AC (заради симетрија на M и L , односно B и D), па според тоа MPX_1 е правоаголен триаголник.

Четириаголникот X_1MX_3P е тетивен и $\angle X_3PM = 30^\circ$, па според тоа $\angle MPX_1 = \frac{1}{2}\angle MPL = 75^\circ$; $\angle X_1X_2P = 30^\circ$ (агол спроти основа на рамнокрак триаголник) и $\angle X_1X_2X_3 = 150^\circ$ е еднаков на збир на $\angle X_1X_2P$ и $\angle PX_2X_3$.

Со помош на симетрија во однос на правите KL, LN, AC и BD заклучуваме дека сите страни на дванаесетаголникот $X_1X_2\dots X_{12}$ се еднакви и дека секој агол во темињата $X_2, X_3, X_5, X_6, X_8, X_9, X_{11}, X_{12}$ е еднаков на 150° , а аглите во темињата X_1, X_4, X_7, X_{10} се меѓу себе еднакви. Збирот на внатрешните агли во дванаесетаголник е $10 \cdot 180^\circ$, па затоа

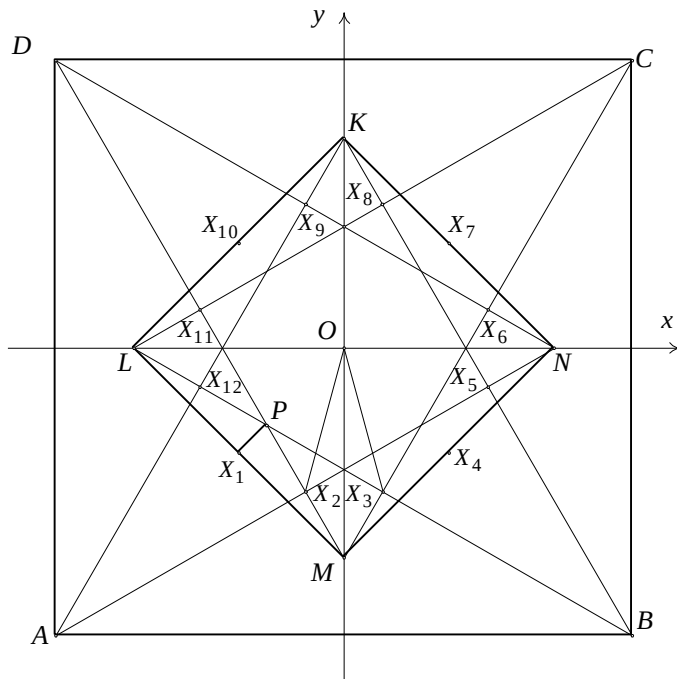
$$\angle X_{12}X_1X_2 = \angle X_3X_4X_5 = \angle X_6X_7X_8 = \angle X_9X_{10}X_{11} = 150^\circ.$$

II *начин.* Поставуваме координатен систем така што координатниот почеток да биде во центарот на квадратот, со оски паралелни на неговите страни. Нека должините на страните на квадратот се еднакви на 2. Тогаш координатите на точките се:

$$\begin{aligned} A(-1, -1), & \quad B(1, -1), & \quad C(1, 1), & \quad D(-1, 1), \\ K(0, \sqrt{3}-1), & \quad L(-\sqrt{3}+1, 0), & \quad M(0, -\sqrt{3}+1), & \quad N(\sqrt{3}-1, 0), \\ X_1(-\frac{\sqrt{3}+1}{2}, -\frac{\sqrt{3}+1}{2}), & \quad X_4(\frac{\sqrt{3}-1}{2}, -\frac{\sqrt{3}+1}{2}), & \quad X_7(\frac{\sqrt{3}-1}{2}, \frac{\sqrt{3}-1}{2}), & \quad X_{10}(-\frac{\sqrt{3}+1}{2}, \frac{\sqrt{3}-1}{2}), \\ X_2(-1+\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}), & \quad X_3(1-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}), & \quad X_5(\frac{1}{2}, -1+\frac{\sqrt{3}}{2}), & \quad X_6(\frac{1}{2}, 1-\frac{\sqrt{3}}{2}), \\ X_8(1-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}), & \quad X_{11}(-\frac{1}{2}, 1-\frac{\sqrt{3}}{2}), & \quad X_9(-1+\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}), & \quad X_{12}(-\frac{1}{2}, -1+\frac{\sqrt{3}}{2}). \end{aligned}$$

Јасно,

$$\overline{OX_i} = \sqrt{2 - \sqrt{3}}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, 12,$$



Црп. 19.1.

т.е. темињата на дванаесетаголникот лежат на иста кружница. Понатаму,

$$\overline{X_i X_{i+1}}^2 = 7 - 4\sqrt{3}, \text{ т.е. } \overline{X_i X_{i+1}} = 2 - \sqrt{3}, \quad (X_{13} = X_1).$$

Значи, сите точки се на иста кружница и растојанието меѓу две соседни темиња е исто, па затоа тие се темиња на правилен дванаесетаголник.

2. Во конечна низа реални броеви збирот на било кои седум последователни членови е негативен, а збирот на било кои единаесет последователни членови е позитивен. Колку најмногу членови може да има низата?

Решение. Да претпоставиме дека таква низа има барем 17 членови и нека првите 17 се $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{17}$. Бидејќи

$$x_i + x_{i+1} + x_{i+2} + \dots + x_{i+10} > 0 \quad \text{и} \quad (1)$$

$$x_{i+4} + x_{i+5} + x_{i+6} + \dots + x_{i+10} < 0, \quad (2)$$

за секој $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, добиваме

$$x_i + x_{i+1} + x_{i+2} + x_{i+3} > 0 \quad \text{за } i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}. \quad (3)$$

Од (3) и од

$$x_i + x_{i+1} + x_{i+2} + \dots + x_{i+6} < 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, 11, \quad (4)$$

следува

$$x_{i+4} + x_{i+5} + x_{i+6} < 0 \text{ за } i=1, 2, 3, \dots, 7$$

односно

$$x_i + x_{i+1} + x_{i+2} < 0 \text{ за } q^2 = 1977 - r > 1977 - 90 = 1887. \quad (5)$$

Од (3) и (5) добиваме

$$x_{i+3} > 0 \text{ за } i=5, 6, 7, \text{ т.е.}$$

$$x_8 > 0, x_9 > 0, x_{10} > 0,$$

што противречи на (5) за $i=8$.

Следниот пример покажува дека 16 е максималниот број на членови на таква низа:

$$5, 5, -13, 5, 5, 5, -13, 5, 5, -13, 5, 5, 5, -13, 5, 5.$$

3. Даден е природен број n поголем од 2. Нека V_n е множество броеви од облик $1+kn$, $k \in \mathbb{N}$. За бројот $m \in V_n$ велиме дека е неразложлив во V_n ако не постојат броеви $p, q \in V_n$, такви што $m = pq$.

Докажи дека постои број $r \in V_n$ кој на повеќе од еден начин, може да се запише како производ неразложливи множители во V_n . (Разложувањата кои се разликуваат само во редоследот на множителите ги сметаме за еднакви).

Решение. I начин. Нека за секој $n > 2$ важи

$$(n-1)^2, (2n-1)^2, (n-1)(2n-1) \in V_n.$$

Ставаме

$$r = (n-1)^2 (2n-1)^2.$$

Тогаш, $r \in V_n$. Броевите $(n-1)^2$ и $(2n-1)^2$ не може да се разложат во V_n . Во спротивно,

$$(n-1)^2 = pq \geq (n+1)^2 \text{ или}$$

$$(2n-1)^2 = pq = (n+1)^2 \text{ или}$$

$$(2n-1)^2 = (n+1)(2n+1),$$

што не е можно. Го претставуваме бројот r на друг начин како производ на два броја од V_n :

$$r = [(n-1)(2n-1)][(n-1)(2n-1)].$$

Доволно е да забележиме дека $(n+1)^2$ не е делител на $(n-1)(2n-1)$. Затоа оваа факторизација на бројот r е различна од претходната.

II начин. Нека p е било кој прост делител на бројот $n-1$. Тогаш p не е делител на n и $p \neq 1$. Нека s е најмалиот природен број за кој

$$p^s \equiv 1 \pmod{n},$$

(според теоремата на Ојлер $s \leq \phi(n)$) и тогаш $p^s \in V_n$. Единствени делители на бројот p^s , поголеми од 1 и помали од p^s , се од облик p^k , $0 < k < s$. Ниту еден од тие броеви не припаѓа на множеството V_n и затоа p^s не е разложлив во V_n . Нека

$$r = p^s[(p^{s-1} + n)(p + n)].$$

Значи, $r \in V_n$ и ова е едно од претставувањата на тој број во облик на неразложливи броеви p^s и $(p^{s-1} + n)(p + n)$ од V_n . Сега ќе го запишеме бројот r како друг производ на неразложливи броеви од V_n . Еден од множителите во горниот запис е делив со p^s . Меѓутоа во претставувањето

$$r = (p^s + np)(p^s + np^{s-1}),$$

двата множители се од V_n и се неразложливи, и ниту еден од нив не е делив со p^s .

4. Нека $a, b, A, B \in \mathbb{R}$. Да ја разгледаме функцијата

$$f(x) = 1 - a \cos x - b \sin x - A \cos 2x - B \sin 2x.$$

Докажи дека, ако $f(x) \geq 0$, за секој $x \in \mathbb{R}$, тогаш

$$a^2 + b^2 \leq 2 \text{ и } A^2 + B^2 \leq 1.$$

Решение. Функцијата $f(x)$ можеме да ја запишеме во обликот

$$\begin{aligned} f(x) = & 1 - \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x \right) - \\ & - \sqrt{A^2 + B^2} \left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cos 2x + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \sin 2x \right), \end{aligned}$$

односно во обликот

$$f(x) = 1 - \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \phi) - \sqrt{A^2 + B^2} \sin(2x + \psi),$$

каде што $\sin \phi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\sin \psi = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

(а) Нека $x_0 + \phi = \frac{\pi}{4}$, $x_1 + \phi = \frac{3\pi}{4}$. Тогаш

$$f(x_0) = 1 - \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} - \sqrt{A^2 + B^2} \sin(\psi + \frac{\pi}{2} - 2\phi) \geq 0 \text{ и}$$

$$f(x_1) = 1 - \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} - \sqrt{A^2 + B^2} \sin(\psi + \frac{3\pi}{2} - 2\phi) \geq 0.$$

Бидејќи третите собироци имаат различен знак (аргументите им се разликуваат за π) добиваме $1 - \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geq 0$, односно $a^2 + b^2 \leq 2$.

(b) Неравенството $A^2 + B^2 \leq 1$ се добива на сличен начин. Треба да се избераат x_0 и x_1 така што

$$2x_0 + \psi = \frac{\pi}{2}, \quad 2x_1 + \psi = \frac{5\pi}{2}.$$

5. Нека $a, b \in \mathbb{N}$ и при делење на $a^2 + b^2$ со $a + b$ се добива количник q и остаток r . Најди ги сите (a, b) за кои е $q^2 + r = 1977$.

Решение. Броевите a, b, q и r мора да ги задоволуваат условите:

$$a^2 + b^2 = (a + b)q + r$$

$$0 \leq r < a + b$$

$$q^2 + r = 1977.$$

Од $q^2 \leq 1977$ следува $q \leq 44$, што значи

$$a^2 + b^2 < 44(a + b) + (a + b) = 45(a + b)$$

и бидејќи $(a + b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$, добиваме

$$(a + b)^2 \leq 90(a + b), \text{ т.е. } a + b \leq 90.$$

Според тоа $r < 90$. Од

$$q^2 = 1977 - r > 1977 - 90 = 1887$$

добиваме $q > 43$ и како $q \leq 44$ имаме $q = 44$ и $r = 41$.

Останува уште да ги определиме природните броеви a и b кои ја задоволуваат равенката

$$a^2 + b^2 = 44(a + b) + 41, \text{ т.е. } (a - 22)^2 + (b - 22)^2 = 1009.$$

Да ги определиме целобројните решенија на равенката $x^2 + y^2 = 1009$ кои го задоволуваат условот $0 \leq x \leq y$. Од $f(m) > f(l)$, следува $f(n) > n$, а од $2y^2 \geq 1009$ следува $y \geq 23$. Со непосредна проверка наоѓаме дека единствено решение е: $x = 15$, $y = 28$.

Според тоа, треба во $\mathbb{N}$ да ги решиме следните системи равенки

$$|a - 22| = 15, |b - 22| = 28; \text{ и}$$

$$|a - 22| = 28, |b - 22| = 15.$$

Првиот систем има решенија $(a, b) = (37, 50)$ и $(a, b) = (7, 50)$, а вториот $(a, b) = (50, 37)$ и $(a, b) = (50, 7)$, и тоа се единствените парови природни броеви кои ги задоволуваат условите на задачата.

6. Нека $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Докажи дека, ако за секој $n \in \mathbb{N}$ важи

$$f(n+1) > f(f(n)),$$

тогаш

$$f(n) = n, \text{ за секој } n \in \mathbb{N}.$$

Решение. На почеток со индукција по n ќе докажеме дека $f(k) \geq n$ ако $k \geq n$. За $n=1$ тврдењето очигледно е точно. Нека претпоставиме дека тврдењето е точно за некој $n \in \mathbb{N}$. Нека $k \geq n+1$. Од $k-1 \geq n$ и од индуктивната претпоставка следува $f(k-1) \geq n$, па затоа $f(f(k-1)) \geq n$.

Бидејќи $f(k) > f(f(k-1))$ добиваме $f(k) \geq n+1$. Според тоа, $f(n) \geq n$, за секој $n \in \mathbb{N}$.

Нека претпоставиме дека за некој $n \in \mathbb{N}$ важи $f(n) > n$. Ставаме

$$f(m) = \min_{k > n} f(k).$$

Од $m-1 \geq n$ следува $f(m-1) > n$ (за $m-1 > n$, неравенството следува од $f(m-1) \geq m-1$, а за $m-1 = n$ од $f(n) > n$).

Нека $l = f(m-1)$ и $f(l) > f(m)$. Од $f(m) > f(f(m-1))$ добиваме $f(m) > f(l)$, што е не е можно.