

LI олимпијада

1. Определи ги сите функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такви што за секои $x, y \in \mathbb{R}$ важи

$$f([x]y) = f(x)[f(y)]. \quad (1)$$

($[z]$ е најголемиот цел број кој не е поголем од z .)

Решение. За $x = y = 0$ добиваме $f(0) = f(0)[f(0)]$, од каде следува $f(0) = 0$ или $[f(0)] = 1$.

Ако $[f(0)] = 1$, ставаме $y = 0$ во (1) и добиваме $f(x) = f(0) = c \in [1, 2)$, за секој $x \in \mathbb{R}$. За $c \in [1, 2)$ функцијата $f(x) = c$ е решение бидејќи за секои $x, y \in \mathbb{R}$ важи $f([x]y) = f(x)[f(y)] = c$.

Нека $f(0) = 0$. Тогаш за секој $x \in [0, 1)$ од (1) добиваме $f(x)[f(y)] = 0$, што значи дека $f(x) = 0$ за секој $x \in [0, 1)$ или $[f(y)] = 0$ за секој y .

1) Ако $[f(y)] = 0$ за секој y , тогаш за $x = 1$ од (1) следува $f(y) = 0$. Навистина функцијата $f(y) = 0$ исто така е решение на задачата.

2) Нека $f(x) = 0$ за секој $x \in [0, 1)$. За $y \in \mathbb{R}$, нека n е цел број таков што

$$\frac{y}{n} \in [0, 1). \text{ Тогаш } f(y) = y(n \cdot \frac{y}{n}) = f(n)[f(\frac{y}{n})] = 0, \text{ т.е. } f \equiv 0.$$

Конечно, единствени решенија на задачата се константните функции

$$f(x) = c \text{ каде } c = 0 \text{ или } c \in [1, 2).$$

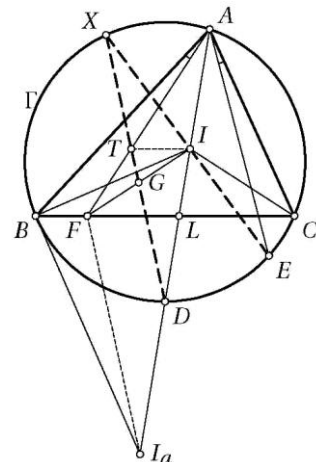
2. Нека I е центар на впишаната кружница, а Γ е опишаната кружница на $\triangle ABC$. Нека правата AI ја сече Γ во точките A и D . Нека E е точка од лакот BDC , а F е точка на отсечката BC така што

$$\angle BAF = \angle CAE < \frac{1}{2} \angle BAC.$$

Нека G е средина на отсечката IF . Докажи дека правите DG и EI се сечат на кружницата Γ .

Решение. Прв начин. Ако I_a е центарот на припишаната кружница на $\triangle ABC$ наспроти темето A , тогаш важи $\angle IBI_a = 90^\circ$ и $\overline{DI} = \overline{DB}$, па затоа D е средина на отсечката II_a . Понатаму, од $\angle AI_aB = \angle ACI$ и $\angle I_aAB = \angle CAI$ следува $\triangle ABI_a \sim \triangle AIC$, а од $\angle EAC = \angle BAF$ и $\angle AEC = \angle ABF$ следува $\triangle AEC \sim \triangle ABF$. Од овие сличности добиваме

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{AI_a}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{AB}} \cdot \frac{\overline{AB}}{\overline{AI_a}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} \cdot \frac{\overline{AI}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AI}}{\overline{AE}},$$



а тоа заедно со $\angle FAI_a = \angle IAE$ дава $\triangle AI_a F \sim \triangle AEI$. Ако сега со X ја означиме втората пресечна точка на правата EI и Γ , добиваме

$$\angle ADG = \angle AI_a F = \angle AEI = \angle AEX = \angle ADX,$$

па затоа X припаѓа на правата DG , што и требаше да се докаже.

Втор начин. Нека правата EI по втор пат ја сече Γ во точката X , а XD ги сече AF и IF во T и G' , соодветно. Од

$$\angle IXT = \angle EXD = \angle EAD = \angle DAF = \angle IAT$$

следува дека точките I, A, X, T се конциклични, па затоа

$$\angle AIT = 180^\circ - \angle AXD = \angle ACD = \angle ALB.$$

Следува дека $TI \parallel BC$ и оттука $\frac{\overline{AT}}{\overline{TF}} = \frac{\overline{AI}}{\overline{IL}}$, каде L е пресечната точка на AD и

BC . Од друга страна, важи $\frac{\overline{AD}}{\overline{DI}} = \frac{\overline{AI}}{\overline{IL}}$ (навистина, ако L' е симетрична на

точката L во однос на CI , тогаш $IL' \parallel CD$, па е $\triangle AL'I \sim \triangle ACD$ и оттука

$\frac{\overline{AD}}{\overline{DI}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AI}}{\overline{IL'}} = \frac{\overline{AI}}{\overline{IL}}$). Сега од теоремата на Менелај во $\triangle AFI$ имаме

$$1 = \frac{\overline{FG'}}{\overline{G'I}} \cdot \frac{\overline{ID}}{\overline{DA}} \cdot \frac{\overline{AI}}{\overline{TF}} = \frac{\overline{FG'}}{\overline{G'I}},$$

па затоа $G' \equiv G$.

3. Определи ги сите функции $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ такви што

$$(g(m) + n)(m + g(n))$$

е квадрат на природен број за секои $m, n \in \mathbb{N}$.

Решение. Ќе ја користиме следнава лема.

Лема. Ако p е прост број и $p \mid g(m) - g(n)$, тогаш $p \mid m - n$.

Доказ. Ако $p^2 \mid g(m) - g(n)$, тогаш постои $l \in \mathbb{N}$ таков што $p \parallel l + g(m)$. Тогаш важи и $p \parallel l + g(n)$. Според условот на задачата $m + g(l)$ и $n + g(l)$ мора да се деливи со p , па затоа $p \mid m - n$.

Ако $p \parallel g(m) - g(n)$, тогаш постои l таков што $p^3 \parallel l + g(m)$. Тогаш важи $p \parallel l + g(n)$. И во овој случај $p \mid m + g(l)$ и $p \mid n + g(l)$, па затоа $p \mid m - n$. ■

Функцијата f е инјекција. Навистина, ако $g(m) = g(n)$, тогаш според лемата $p \mid m - n$ за секој прост број p , т.е. $m = n$. Понатаму, ако $p \mid g(n+1) - g(n)$, тогаш $p \mid 1$, што не е можно, па затоа $g(n+1) - g(n) = \pm 1$. Притоа не важи $g(n+1) - g(n) = -(g(n) - g(n-1))$, бидејќи тогаш $g(n+1) = g(n-1)$, што не е можно. Оттука со индукција добиваме $g(n+1) - g(n) = g(2) - g(1) = \varepsilon = \pm 1$ за секој n , па затоа $g(n) = k + \varepsilon n$, за некоја константа $k \in \mathbb{N}_0$. Бидејќи $g(n) > 0$ за секој n , можноста $\varepsilon = -1$ отпаѓа, па затоа $g(n) = n + k$, за некоја константа

$$k \in \mathbb{N}_0.$$

Функцијата $g(n) = n + k$, $k \in \mathbb{N}_0$ ги задоволува условите на задачата бидејќи

$$(g(m) + n)(m + g(n)) = (m + n + k)^2.$$

4. Нека P е точка во внатрешноста на $\triangle ABC$. Правите AP, BP и CP ја сечат опишаната кружница Γ на $\triangle ABC$ во точките K, L и M , соодветно. Тангентата на кружницата Γ во точката C ја сече правата AB во S . Ако $\overline{SC} = \overline{SP}$, докажи дека $\overline{MK} = \overline{ML}$.

Решение. *Прв начин.* Нека B е меѓу A и S . Ако E е пресекот на симетралата на $\angle ACB$ со страната AB , тогаш

$$\begin{aligned}\angle CES &= \angle CAB + \angle ACE \\ &= \angle BCS + \angle ECB = \angle ECS,\end{aligned}$$

што значи дека кружницата $k(S, \overline{SC})$

минува низ E . Бидејќи $\frac{\overline{EA}}{\overline{EB}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}$, k е Аполониева кружница, т.е. геометриско место на точки X за кои $\frac{\overline{XA}}{\overline{XB}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}$. Значи, условот $\overline{SC} = \overline{SP}$ е еквивалентен со условот $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}$.

Од друга страна, од сличностите $\triangle PKM \sim \triangle PCA$ и $\triangle PLM \sim \triangle PCB$ следува $\frac{\overline{PM}}{\overline{KM}} = \frac{\overline{PA}}{\overline{CA}}$ и $\frac{\overline{LM}}{\overline{PM}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{PB}}$, од каде со множење добиваме $\frac{\overline{LM}}{\overline{KM}} = \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} \cdot \frac{\overline{CB}}{\overline{CA}}$. Значи, и условот $\overline{LM} = \overline{KM}$ е еквивалентен со условот $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}$.

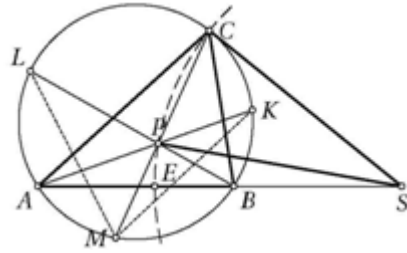
Втор начин. Нека $\overline{SC} = \overline{SP}$. Од $\overline{SA} \cdot \overline{SB} = \overline{SC}^2 = \overline{SP}^2$ следува дека правата SP ја допира кружницата APB , па затоа

$$\begin{aligned}\angle PAB &= \angle SPB = \angle CPB - \angle CPS = \angle CPB - \angle SCM \\ &= \angle CLB + \angle MCL - \angle CLM = \angle MCL - \angle BLM.\end{aligned}$$

Бидејќи $\angle PBA = \angle KAB = \angle KLB$, добиваме

$$\angle MKL = \angle MLC = \angle BLM + \angle KLB = \angle KLM,$$

и оттука $\overline{MK} = \overline{ML}$.



5. Во секоја од шесте кутии $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ на почетокот се наоѓа точно по една монета. Дозволено е да се вршат следниве операции:

1° Да се избере непразна кутија B_j за некој $j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, да се извади една монета од B_j и да се додадат две монети во B_{j+1} .

2° Да се избере непразна кутија B_k за некој $k \in \{1, 2, 3, 4\}$, да се извади една монета од B_k и да се заменат содржините (може да се и празни) на кутиите B_{k+1} и B_{k+2} .

Испитај дали со конечна низа вакви операции може да се постигне кутиите B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 да се празни, а кутијата B_6 да содржи точно 2010^{2010} монети. (Важи $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.)

Решение. Си низа операции, од почетната состојба $(1, 1, 1, 1, 1)$ последователно се добива:

$$(1, 1, 1, 0, 3, 1) \rightarrow (1, 1, 1, 0, 0, 7) \rightarrow (1, 1, 0, 2, 0, 7) \rightarrow (1, 0, 2, 2, 0, 7) \rightarrow (0, 2, 2, 2, 0, 7) \\ \rightarrow (0, 2, 2, 1, 7, 0) \rightarrow (0, 2, 2, 1, 0, 14) \rightarrow (0, 2, 2, 0, 14, 0) \rightarrow (0, 2, 1, 14, 0, 0).$$

Лема 1. За $a \in \mathbb{N}$, со низа операции на три кутии од состојба $(a, 0, 0)$ може да се дојде до состојба $(0, 2^a, 0)$.

Доказ. Индукција по a . Тврдењето е точно за $a=1$. Нека претпоставиме дека тоа е точно за $a-1$. Тогаш од состојбата $(a, 0, 0)$, занемарувајќи една монета во првата кутија може да се дојде до состојбата $(1, 2^{a-1}, 0)$. Ја применуваме операцијата 1° точно 2^{a-1} пати и ја добиваме состојбата $(1, 0, 2^a)$, од каде со примена на операцијата 2° ја добиваме состојбата $(0, 2^a, 0)$. ■

Лема 2. Дефинираме $T_1 = 2$ и $T_{a+1} = 2^{T_a}$. За $a \in \mathbb{N}$, со низа операции на четири кутии, од состојбата $(a, 0, 0, 0)$ може да се дојде до состојбата $(0, T_{a+1}, 0, 0)$.

Доказ. Индукција по a . Тврдењето е точно за $a=1$. Нека претпоставиме дека тоа е точно за $a-1$. Тогаш од состојбата $(a, 0, 0, 0)$ може да се дојде до состојбата $(1, T_a, 0, 0)$, па според лема 1 до состојбата $(1, 0, T_{a+1}, 0)$, па ако уште еднаш го примениме чекорот 2° до состојбата $(0, T_{a+1}, 0, 0)$. ■

Користејќи ги низите чекори опишани во лемите 1 и 2 добиваме

$$(0, 2, 1, 14, 0, 0) \rightarrow (0, 2, 1, 0, 2^{14}, 0) \rightarrow (0, 2, 0, 2^{14}, 0, 0) \rightarrow (0, 1, 2^{14}, 0, 0, 0) \\ \rightarrow (0, 1, 0, T_{2^{14}}, 0, 0) \rightarrow (0, 0, T_{2^{14}}, 0, 0, 0) \rightarrow (0, 0, 0, T_{T_{2^{14}}}, 0, 0).$$

Очигледно $T_{T_{2^{14}}}$ е многу поголем од $N = 2010^{2010^{2010}}$. Со примена на операцијата 2° точно $T_{T_{2^{14}}} - \frac{1}{4}N$ пати ја добиваме состојбата $(0, 0, 0, \frac{1}{4}N, 0, 0)$, од каде со примена на операцијата 1° добиваме $(0, 0, 0, 0, \frac{1}{2}N, 0)$, па добиваме $(0, 0, 0, 0, 0, N)$.

6. Нека $a_1, a_2, a_3, \dots$ е низа позитивни реални броеви. За некој природен број s

важи

$$a_n = \max\{a_k + a_{n-k} \mid 1 \leq k \leq n-1\},$$

за секој $n > s$. Докажи дека постојат природни броеви l и N такви што $l \leq s$ и $a_n = a_l + a_{n-l}$ за секој $n \geq N$.

Решение. Нека $n > r$. По дефиниција важи $a_n = a_{n_1} + a_{n_2}$ за некои индекси n_1, n_2 со $n_1 + n_2 = n$. Ако понатаму е на пример $n_1 > r$, можеме да ја продолжиме постапката за a_{n_1} итн. се додека не добиеме

$$a_n = a_{i_1} + a_{i_2} + \dots + a_{i_k}, \quad (1)$$

за некои $1 \leq i_1, \dots, i_k \leq r$. Притоа ако i_1 и i_2 се индексите добиени во последниот чекор, тогаш $i_1 + i_2 > r$. Од друга страна, ако $1 \leq i_1, \dots, i_k \leq r$ и $i_1 + i_2 > r$, тогаш

$$a_{i_1} + a_{i_2} + \dots + a_{i_k} \leq a_{i_1+i_2} + a_{i_3} + \dots + a_{i_k} \leq \dots \leq a_{i_1+i_2+\dots+i_k}.$$

Од досега изнесеното следува дека

$$a_n = \max\{a_{i_1} + a_{i_2} + \dots + a_{i_k} \mid 1 \leq i_1, \dots, i_k \leq r, i_1 + i_2 > r\}, \text{ за сите } n > r. \quad (2)$$

Разгледуваме $l \in \{1, \dots, r\}$ таков што $\frac{a_l}{l} = \max_{1 \leq i \leq r} \frac{a_i}{i}$. Нека $n > r(rl+2)$. Бидејќи

во (1) е $k \geq \frac{n}{r} > rl+2$, меѓу индексите $i_3, \dots, i_k$ постои некој кој се појавува најмалку l пати: нека $i_{k-l+1} = \dots = i_k = j$. Бидејќи од дефиницијата на l имаме $la_j \leq ja_l$, од (2) следува

$$a_n \geq a_{i_1} + \dots + a_{i_{k-l}} + ja_l \geq a_{i_1} + \dots + a_{i_{k-l}} + la_j = a_n,$$

па затоа двете неравенства мора да се равенства. Според тоа, можеме да претпоставиме дека во (1) барем еден собирик е еднаков на a_l .

Ако сега во (1) важи $i_k = l$, тогаш од условот на задачата и релацијата (2) следува

$$a_{n-l} \leq a_n - a_l = a_{i_1} + \dots + a_{i_{k-1}} \leq a_{n-l},$$

што значи $a_n = a_l + a_{n-l}$.