XXIV олимпијада

1. Најди ги сите функции $f:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ и за кои се исполнети условите

(1) $f(xf(y)) = yf(x)$, за секои $x, y \in \mathbb{R}^+$; и

(2) $f(x) \to 0$ кога $x \to +\infty$.

Решение. Ако во релацијата (1) ставиме $y = x$ добиваме дека постојат реални броеви z, такви што $f(z) = z$. На пример, таков е секој број од облик $x\,f(x)$, $x > 0$. Нека z е било кој таков број. Тогаш,

$$f(z^2) = f(zf(z)) = zf(z) = z^2,$$

и со индукција се докажува дека

$$f(z^n) = z^n, \text{ за секој } n \in \mathbb{N}. \qquad (3)$$

За $z \neq 0$, од $z = f(z) = f(1 \cdot f(z)) = zf(1)$, добиваме $f(1) = 1$, па од

$$z\,f(\tfrac{1}{z}) = f(\tfrac{1}{z}f(z)) = f(1) = 1,$$

следува $f(\frac{1}{z}) = \frac{1}{z}$. Сега, повторно со индукција се докажува дека

$$f(\tfrac{1}{z^n}) = \tfrac{1}{z^n}, \text{ за секој } n \in \mathbb{N}. \qquad (4)$$

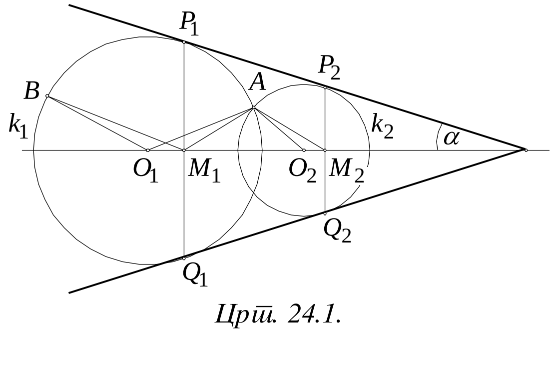
Ако $z > 1$, тогаш од (2) и (3) следува $0 = \infty$, што не е можно. Слично, од (4) следува дека не е можно и $z < 1$. Затоа $z = f(z)$, само ако $z = 1$. Но, ова својство го има секој број од облик $xf(x)$, па затоа $f(x) = \frac{1}{x}$, за секој $x > 0$. Непосредно се проверува дека оваа функција ги има својствата (1) и (2).

2. Во рамнина се дадени две кружници k_1 и k_2 со различни радиуси и центри O_1 и O_2. Кружниците k_1 и k_2 се сечат и нека A е една нивна пресечна точка. Една од заедничките тангенти ја допира k_1 во P_1 и k_2 во P_2, а другата заедничка тангента ја допира k_1 во Q_1 и k_2 во Q_2. Нека M_1 и M_2 се средини на P_1Q_1 и P_2Q_2, соодветно. Да се докаже дека $\measuredangle O_1AO_2 = \measuredangle M_1AM_2$.

Решение. Доволно е да докажеме дека

$$\measuredangle O_1AM_1 = \measuredangle O_2AM_2.$$

Нека S е пресекот на заедничките тангенти на кружниците k_1 и k_2 и нека правата SA ја сече кружницата k_1 во уште една точка



Црт. 24.1.

B. Бидејќи кружниците k_1 и k_2 се хомотетични во однос на S, важи

$$\measuredangle O_2AM_2 = \measuredangle O_1BM_1.$$

Значи, останува да докажеме дека $\measuredangle O_1AM_1 = \measuredangle O_1BM_1$, а за тоа доволно е да докажеме дека точките A, B, O_1 и M_1 се наоѓаат на една кружница. Последниот услов е исполнет бидејќи

$$\overline{SA}\cdot\overline{SB} = \overline{SP_1}\cdot\overline{SP_1} = \overline{SO_1}\cos\alpha\,\frac{\overline{SM_1}}{\cos\alpha} = \overline{SO_1}\cdot\overline{SM_1}$$

каде што $\alpha = \measuredangle P_1SO_1$.

3. Нека $a, b, c \in \mathbb{N}$ и било кои два се заемно прости. Докажи дека

$$2abc - ab - bc - ca$$

е најголемиот цел број кој не може да се претстави во облик

$$xca + yca + zab$$

со ненегативни цели броеви x, y, z.

Решение. На почеток ќе докажеме дека секој број $n > 2abc - ab - bc - ac$ може да се претстави во облик $n = abz + bcx + acy$, каде x, y и z се природни броеви, а потоа дека бројот $n = 2abc - ab - bc - ac$ не може да се претстави во тој облик.

Нека (x_0, y_0, z_0) е некое целобројно решение на равенката

$$abz + bcx + acy = n,$$

кое сигурно постои за секој цел број n бидејќи

$$\text{NZD}(a,b) = \text{NZD}(b,c) = \text{NZD}(c,a) = 1.$$

Доволно е да докажеме дека може да се избере ненегативно решение, т.е. такво што $x \ge 0$, $y \ge 0$ и $z \ge 0$. Со одземање на равенствата добиваме

$$ab(z - z_0) + bc(x - x_0) + ac\,(y - y_0) = 0.$$

Од $\text{NZD}(a,b) = \text{NZD}(c,a) = 1$ добиваме $a \mid (x - x_0)$ т.е. $x - x_0 = as$, $s \in \mathbb{Z}$. Ако замеиме во претходното равенство добиваме

$$b(z - z_o) + bcs + c\,(y - y_o) = 0.$$

Од $\text{NZD}(c,a) = 1$ следува $b \mid (y - y_0) = bt$, $t \in \mathbb{Z}$. Ако замениме во претходното равенство добиваме $cs + ct + z - z_0 = 0$, т.е. $z - z_0 = -c(s+t)$.

Во релациите $x = x_0 + as$ и $y = y_0 + bt$ броевите s и t можат да се изберат така што $0 \le x \le a - 1$ и $0 \le y \le b - 1$. Тогаш

$$abz = n - bcx - acy > (2abc - ab - bc - ca) - bc(a-1) - ca(b-1) = -ab,$$

од каде што добиваме $z > -1$, т.е. $z \ge 0$. Аналогно се добива и за x и y, со што го докажавме првиот дел од тврдењето.

За да го докажеме вториот дел, претпоставуваме дека

$$2abc-ab-bc-ca=bcx+cay+abz\,,\ x,y,z\geq 0\,.$$

Тогаш,

$$bc(x+1)+ca(y+1)+ab(z+1)=2abc\,,$$

при што $x+1\geq 1$, $y+1\geq 1$, $z+1\geq 1$. Од $\mathrm{NZD}(a,b)=\mathrm{NZD}(c,a)=1$ следува $a\,|\,(x+1)$, па затоа $a\leq x+1$. Слично добиваме $b\leq y+1$ и $c\leq z+1$, па според тоа

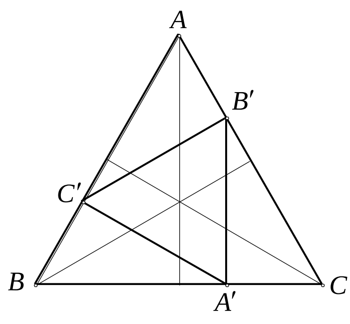
$$bca+cab+abc\leq bc(x+1)+ca(y+1)+ab(z+1)=2abc\,,$$

т.е. $3abc\leq 2abc$, што не е можно бидејќи a,b,c се природни броеви.

4. Даден е рамностран $\triangle ABC$. Нека E е множеството од сите точки од отсечките AB, BC и CA (вклучувајќи ги и A,B и C). Дали е точно дека за било која поделба на множеството E на две дисјунктни подмножества постои правоаголен триаголник со темиња во едно од тие подмножества?

Решение. Ќе докажеме дека за секоја поделба на множеството E на две дисјунктни подмножества постои правоаголен триаголник чии темиња припаѓаат на едно исто подмножество.

Нека претпоставиме дека тврдењето не е точно, т.е. дека постои поделба на множеството E на две дисјунктни подмножества X и Y така што ниту едно од нив не содржи три точки кои се темиња на правоаголен триаголник.



Црт. 24. 2.

Разгледуваме триаголник $A'B'C'$, таков што $A'\in BC$, $B'\in AC$, $C'\in AB$ и точките A',B',C' ги делат страните во однос $2:1$. Од точките A',B',C' барем две, да речеме A' и B', припаѓаат на исто подмножество, на пример X. Тогаш сите точки од отсечката BC (освен A') припаѓаат на множеството Y. Ако точката C' припаѓа на множеството Y, тогаш точките C', B и проекцијата на точката C' на страната BC исто така припаѓаат на Y. Ако C' припаѓа на множеството X, тогаш сите точки од отсечката AB (освен C') исто така припаѓаат на множеството Y, што значи дека Y ќе ги содржи точките A,B и проекцијата на точката A на BC, а тоа се темиња на правоаголен триаголник. И во двата случаи добивме противречност со претпоставката, што значи дека тврдењето е вистинито.

5. Докажи го или негирај го тврдењето: Во множеството природни броеви $\{1,2,3,...,10^5\}$ постои подмножество од 1983 елементи, кое не содржи тројка броеви кои се последователни членови на некоја аритметичка прогресија.

Решение. Ќе докажеме дека тврдењето во задачата е точно. Со T_n го означуваме множеството природни броеви чиј запис во систем со основа 3 има најмногу n цифри, во кој запис сите цифри се различни од 2. Бројот на елементите на тоа множество е 2^n, а неговиот најголем елемент е

$$11...1 = 3^\circ + 3^1 + ... + 3^{n-1} = \tfrac{1}{2}(3^n - 1).$$

Множеството T_n не содржи ниту една аритметичка тројка. Имено, ако $x, y, z \in T_n$ и $2y = x + z$, тогаш записот бројот $2y$ во систем со основа 3 ќе ги содржи само цифрите 0 или 2, а бројот $x + z$ (ако x и y се различни броеви од T_n) мора барем на едно место да има цифра 1.

За $n = 11$ добиваме

$$2^{11} > 1983 \text{, а } \tfrac{1}{2}(3^{11} - 1) = 88573 < 100000,$$

што значи дека не може да се избере множество од 2048 броеви кои ги имаат бараните својства.

6. Нека a,b,c се должини на страни на $\triangle ABC$. Докажи го неравенството

$$a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \geq 0 .$$

Кога важи знак за равенство?

Решение. I *начин*. За секој триаголник со должини на страни a, b, c секогаш може да се изберат ненегативни броеви x, y, z, такви што $a = y + z$, $b = z + x$, $c = x + y$ (зошто?). Ако овие равенства ги замениме во даденото неравенство, после средувањето го добиваме еквивалентното неравенство

$$xy^3 + yz^3 + z^3 \geq xyz(x + y + z) .$$

Последното неравенство следува од неравенството на Коши-Шварц-Буњаковски за ненегативни реални броеви a_1, a_2, a_3:

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)$$

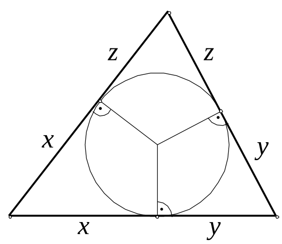
применето на броевите:

$$a_1 = \sqrt{z}, \quad a_2 = \sqrt{z}, \quad a_3 = \sqrt{y},$$
$$b_1 = \sqrt{xy^3}, \quad b_2 = \sqrt{yz^3}, \quad b_3 = \sqrt{zx^3},$$

при што знак за равенство е исполнет ако и само ако

$$\frac{xy^3}{z} = \frac{yz^3}{x} = \frac{zx^3}{y} .$$

т.е. ако и само ако $x = y = z$, односно $a = b = c$.



Црт. 24.3.

II *начин*. Изразот од левата страна на неравенството ќе го запишеме во облик

$$\frac{1}{2}[(a+b-c)(a-b+c)(c-a)^2 +$$
$$+(b+c-a)(b-c+a)(b-a)^2 +$$
$$+(c+a-b)(c-a+b)(c-b)^2].$$

Ако a, b, c се должни на страни на триаголникот, овој израз е ненегативен, а еднаков е на нула ако и само ако $a=b=c$.