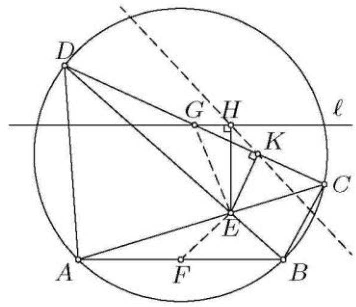
**БМО 2011**

1. Нека $ABCD$ е тетивен четириаголник кој не е трапез и чии дијагонали се сечат во точката $E$. Нека средините на отсечките $AB$ и $CD$ соодветно се точките $F$ и $G$, а $l$ е права која минува низ $G$ и е паралелна со $AB$. Подножјата на нормалите повлечени од точката $E$ кон правите $l$ и $CD$ соодветно се $H$ и $K$. Докажи дека правите $EF$ и $HK$ за заемно нормални.
**Решение.** Нека претпоставиме дека точката $K$ е меѓу точките $G$ и $C$. Точките $E, G, H$ и $K$ лежат на кружницата со дијаметар $EG$, па затоа $\measuredangle EHK = \measuredangle EGK$. Бидејќи триаголниците $EAB$ и $EDC$ се слични: $\measuredangle AEB = \measuredangle DEC$ и $\measuredangle EAB = \measuredangle EDC$, заклучуваме дека триаголниците $EFB$ и $EGC$ исто така се слични. Следува дека
$$\measuredangle EFB = \measuredangle CGE = \measuredangle KHE,$$
што заедно со $FB \perp HE$ дава $EF \perp KH$.




2. Нека $x, y, z$ се реални броеви такви што $x+y+z=0$. Докажи, дека
$$\frac{x(x+2)}{2x^2+1}+\frac{y(y+2)}{2y^2+1}+\frac{z(z+2)}{2z^2+1}\geq 0.$$
Кога важи знак за равенство?
**Решение.** Даденото неравенство е еквивалентно со неравенството
$$\frac{(2x+1)^2}{2x^2+1}+\frac{(2y+1)^2}{2y^2+1}+\frac{(2z+1)^2}{2z^2+1}\geq 3.$$
Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека
$$|z|=\max\{|x|,|y|,|z|\}.$$
Тогаш, од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува дека
$$\frac{(2x+1)^2}{2x^2+1}+\frac{(2y+1)^2}{2y^2+1}\geq\frac{2(x+y+1)^2}{x^2+y^2+1}=\frac{2(1-z)^2}{x^2+y^2+1}\geq\frac{2(1-z)^2}{2z^2+1}=3-\frac{(2z+1)^2}{2z^2+1}\geq 3,$$
што и требаше да се докаже. Знак за равенство важи ако и само ако $x=y=z=0$ или $(x,y,z)=(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1)$, до пермутации.

3. Нека $S$ е конечно множество природни броеви со следново својство: ако $S$ го содржи бројот $x$, тогаш $S$ ги содржи и сите делители на бројот $x$. Непразното подмножество $T$ на множеството $S$ го нарекуваме *добро* ако за секои $x, y \in T$, $x<y$, количникот $\frac{y}{x}$ е степен на прост број. Непразното подмножество $T$ на множеството $S$ го нарекуваме *лошо* ако за секои $x, y \in T$, $x<y$,

количникот $\frac{y}{x}$ не е степен на прост број. Едноелементните множества ги сметаме и добри и лоши. Нека $k$ е најголемиот можен број елементи на добро подмножество на $S$. Докажи, дека $k$ е најмалиот можен број на меѓусебно дисјунктни лоши подмножества чија унија е еднаква на $S$.

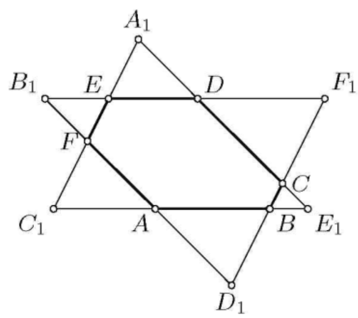
**Решение.** Јасно, не постојат два елементи на добро множество со $k$ елементи кои припаѓаат на исто лошо множество. Затоа ни требаат барем $k$ лоши множества за да го покриеме $S$.

Ќе конструираме $k$ лоши множества кои го покриваат $S$. Нека $p_1, p_2, ..., p_n$ се сите прости броеви во $S$. Бидејќи $S$ ги содржи сите делители на своите елементи, секој елемент на $S$ е од облик $x = p_1^{r_1} p_2^{r_2} ... p_n^{r_n}$, каде $r_i \le k-1$ за секој $i$ (броевите $\frac{x}{p_i^j}$, $j = 0,1,2,...,r_i$, формираат добро подмножество на множеството $S$ со $r_i + 1$ елементи).

За секој таков $x \in S$ дефинираме $h(x) = r_1 + r_2 + ... + r_n$. Ако $x, y \in S, x < y$ припаѓаат на некое добро множество, тогаш важи $1 \le h(y) - h(x) \le k-1$. Да ги разгледаме множествата $S_m = \{x \in S \mid h(x) \equiv m (\bmod k)\}$, $m = 1,2,...,k$. Овие множества се дисјунктни и нивната унија е еднаква на множеството $S$. Од претходно изнесеното следува дека секое множество $S_m$ е лошо, што значи дека тоа е бараната конструкција.

4. Нека $ABCDEF$ е конвексен шестаголник со плоштина 1 и таков што секои две спротивни страни му се паралелни. Правите $AB, CD$ и $EF$ се сечат по парови, при што определуваат триаголник. Слично правите $BC, DE$ и $FA$ определуваат друг триаголник. Докажи дека барем еден од овие два триаголници има плоштина поголема или еднаква на $\frac{3}{2}$.

**Решение.** Нека правите $AB, CD$ и $EF$ го определуваат триаголникот $A_1C_1E_1$, а правите $BC, DE$ и $FA$ го определуваат триаголникот $B_1D_1F_1$ (види цртеж). Да означиме




$$\frac{\overline{AB}}{\overline{F_1B_1}} = a, \frac{\overline{BC}}{\overline{A_1C_1}} = b, \frac{\overline{CD}}{\overline{B_1D_1}} = c,$$
$$\frac{\overline{DE}}{\overline{C_1E_1}} = d, \frac{\overline{EF}}{\overline{D_1F_1}} = e, \frac{\overline{FA}}{\overline{E_1A_1}} = f.$$

Од $P_{ABD_1} = a^2 P_{B_1D_1F_1}$ итн. следува

$$P_{ABCDEF} = (1 - a^2 - c^2 - e^2) P_{B_1D_1F_1}$$ и

$$P_{ABCDEF} = (1-b^2-b^2-f^2)P_{A_1C_1E_1}.$$

Коефициентите $b, d, f$ може да се изразат преку $a, c, e$. Од

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{D_1F_1}-\overline{D_1B}-\overline{CF_1}}{\overline{EF}} = 1-a-c \text{ и } \frac{\overline{A_1C_1}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{A_1E}+\overline{EF}+\overline{FC_1}}{\overline{EF}} = 2-a-c-e$$

следува $b = \frac{1-a-c}{2-a-c-e}$. Аналогно се добива $d = \frac{1-c-e}{2-a-c-e}$ и $f = \frac{1-a-c}{2-a-c-e}$. Сега за $a+c+e = p$ имаме

$$a^2+c^2+e^2 \geq \frac{1}{3}p^2 \text{ и } b^2+d^2+f^2 = \frac{3-4p+p^2+a^2+c^2+e^2}{(2-p)^2} \geq \frac{1}{3}(\frac{3-2p}{2-p})^2.$$

Нека претпоставиме дека $P_{B_1D_1F_1} < \frac{3}{2}$ и $P_{A_1C_1E_1} < \frac{3}{2}$. Од претходно изнесеното следува дека тоа е еквивалентно со $a^2+c^2+e^2 < \frac{1}{3}$ и $b^2+d^2+f^2 < \frac{1}{3}$. Но, тогаш од првото неравенство следува $p < 1$, а од второто $\frac{3-2p}{2-p} < 1$, што не е можно.