

36. МЕЂУНАРОДНИ МАТЕМАТИЧКИ ТУРНИР ГРАДОВА

Основна јесења варијанта, 12.10.2014.

Млађи узраст (8. разред основних и 1. разред средњих школа)

Израда задатака траје 5 сати

Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је ученик добио највећи број поена

поени задаци

- | | |
|---|--|
| 3 | 1. Да ли је могуће саставити правоугаони рам од 99 дашчица дужина 1, 2, ..., 99? |
| | 2. Да ли постоји десет међусобно различитих природних бројева таквих да је њихова аритметичка средина |
| 2 | a) њихов највећи заједнички делилац помножен са 6; |
| 2 | b) њихов највећи заједнички делилац помножен са 5? |
| | 3. На страницама AB и BC квадрата $ABCD$ уочене су тачке K и L , редом, тако да је $KB = LC$. Нека је P тачка пресека дужи AL и CK . Доказати да су дужи DP и KL међусобно нормалне. |
| 5 | 4. Током школске године, Андрија је бележио своје оцене из математике (које могу бити 2, 3, 4, или 5). Нову оцену коју треба да убележи назива "неочекивана" ако се у дотадашњем списку оцена, та оцена појављивала мање пута од било које друге <i>могуће</i> оцене. (На пример, ако је забележио редом оцене: 3,4,2,5,5,5,2,3,4,3, неочекиване оцене су биле оне када је први пут добио 5 и када је по други пут добио 4). Испоставило се да је на крају године Андрија имао 40 оцена, при чему се свака могућа оцена појавила тачно 10 пута (у непознатом редоследу). Да ли је могуће одредити тачан број неочекиваних оцена које је Андрија добио? |
| | 5. Дато је $N > 1$ правоуглих троуглова. У сваком од датих троуглова Адам је изабрао по једну катету и сабрао њихове дужине. Затим је сабрао дужине преосталих катета тих троуглова. На крају је сабрао дужине свих хипотенуза. Испоставило се да добијена три броја чине дужине страница правоуглог троугла. Доказати да је однос дужина катета у сваком од N датих троуглова константан, ако је |
| 2 | a) $N = 2$; |
| 3 | b) N је произвољан природан број. |

36. МЕЂУНАРОДНИ МАТЕМАТИЧКИ ТУРНИР ГРАДОВА

Основна јесења варијанта, 12.10.2014.

Старији узраст (2. и 3. разред средњих школа)

Израда задатака траје 5 сати

Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је ученик добио највећи број поена

points problems

- | | | |
|---|----|--|
| | 1. | Да ли постоји десет међусобно различитих природних бројева таквих да је њихова аритметичка средина |
| 1 | a) | њихов највећи заједнички делилац помножен са 6; |
| 2 | b) | њихов највећи заједнички делилац помножен са 5? |
| | 2. | Темена троугла означена су са A , B и C у смеру кретања казаљки на часовнику, а одговарајући углови са α , β и γ . Троугао се ротира увек у смеру кретања казаљки на часовнику и то: око тачке A за угао α , затим око тачке B за угао β , затим око тачке C за угао γ , па поново око тачке A , итд. (ротација се увек врши у односу на тренутни положај темена). Доказати да се након шест оваквих ротација троугао враћа на почетну позицију. |
| 4 | | |
| | 3. | Дато је 15 међусобно различитих целих бројева. Петар је записао све могуће суме од по седам бројева, док је Васа записао све могуће суме од по осам бројева. Да ли је могуће да су Петар и Васа записали исту колекцију бројева? (Сваки број који је записао Петар мора бити записан тачно толико пута и до стране Васе и обрнуто.) |
| 5 | | |
| | 4. | Дато је N правоуглих троуглова. У сваком од датих троуглова Адам је изабрао по једну катету и сабрао њихове дужине. Затим је сабрао дужине преосталих катета тих троуглова. На крају је сабрао дужине свих хипотенуза. Испоставило се да добијена три броја чине дужине страница правоуглог троугла. Доказати да су почетни троуглови међусобно слични. |
| 5 | | |
| | 5. | На почетку се на столу налази гомила сребрних новчића и два празна списка. У сваком кораку могуће је или додати златни новчић и забележити тренутни број сребрних новчића на првом списку, или уклонити један сребрни новчић и забележити тренутни број златних новчића на другом списку. Након неколико корака, на столу су остали само златни новчићи. Доказати да су у том тренутку суме бројева на првом и другом списку биле једнаке. |
| 5 | | |

36. МЕЂУНАРОДНИ МАТЕМАТИЧКИ ТУРНИР ГРАДОВА

Основна јесења варијанта, 26.10.2014.

Млађи узраст (8. разред основних и 1. разред средњих школа)

Израда задатака траје 5 сати

Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је ученик добио највећи број поена

поени задаци

- | | |
|---|---|
| 4 | 1. Квадратна табла подељена је на $n \times n$ поља. У половини поља уписан је знак $+$, а у другој половини знак $-$. Доказати да постоје две врсте или две колоне у којима је уписан једнак број плусева. |
| 5 | 2. Доказати да сваки тангентни многоугао садржи три странице од којих је могуће саставити троугао. |
| 6 | 3. Да ли је могуће поделити све позитивне делиоце броја $100!$ (укључујући 1 и $100!$) у два скупа са једнаким бројем елемената, таква да је производ елемената у првом скупу једнак производу елемената у другом скупу. |
| 7 | 4. На кружној стази налази се 25 полицијских станица и у свакој од њих по један полицајац. Сваки полицајац носи значку, а свих 25 значки су нумерисане бројевима $1, 2, \dots, 25$, у неком редоследу. У једном тренутку полицајцима је наређено да се прераспореде по полицијским станицама тако да бројеви њихових значки иду редом по кружној стази: $1, 2, \dots, 25$ у смеру кретања казаљки на сату. Полицајци су то извели тако да је укупна сума пређених путева свих полицајаца била минимална могућа. Доказати да је барем један полицајац остао у станици у којој је и био. |
| 8 | 5. У правоуглом троуглу конструисана су два подударна круга који се међусобно додирују и сваки од њих додирује хипотенузу и једну катету. Нека су M и N додирне тачке кругова и хипотенузе. Доказати да средина дужи MN припада симетрали правог угла овог троугла. |
| 8 | 6. Природан број називамо <i>равним</i> ако су му све цифре једнаке (рецимо, 4, 111, 999999). Доказати да се сваки n -тоцифрени број може представити као сума не више од $n + 1$ равних бројева. |
| 5 | 7. Паукова мрежа изгледа као табла са 100×100 чворова (односно 99×99 поља). У ову мрежу ухватило се 100 мува, у 100 различитих чворова. Паук, који се на почетку налази у угаоном чвору, креће се по мрежи прелазећи стално у суседни чвор, памтећи колико је корака направио и једући муве успут. Да ли паук може да поједе све муве у не више од |
| 5 | а) 2100 потеза; |
| 5 | б) 2000 потеза? |

36. МЕЂУНАРОДНИ МАТЕМАТИЧКИ ТУРНИР ГРАДОВА

Основна јесења варијанта, 26.10.2014.

Старији узраст (2. и 3. разред средњих школа)

Израда задатака траје 5 сати

Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је ученик добио највећи број поена

поени задаци

- | | |
|----|--|
| 4 | 1. Доказати да сваки тангентни многоугао садржи три странице од којих је могуће саставити троугао. |
| 6 | 2. На кружној стази налази се 25 полицијских станица и у свакој од њих по један полицајац. Сваки полицајац носи значку, а свих 25 значки су нумерисане бројевима $1, 2, \dots, 25$, у неком редоследу. У једном тренутку полицајцима је наређено да се прераспореде по полицијским станицама тако да бројеви њихових значки иду редом по кружној стази: $1, 2, \dots, 25$ у смеру кретања казаљки на сату. Полицајци су то извели тако да је укупна сума пређених путева свих полицајаца била минимална могућа. Доказати да је барем један полицајац остао у станици у којој је и био. |
| 6 | 3. Гриша је записао 100 бројева на табли и израчунао њихов производ. Затим је увећао сваки број за 1 и приметио да је производ свих бројева остао непромењен. Затим је нове бројеве увећао за 1 и производ је поново остао непромењен, итд. Поновио је ово k пута и сваки пут је производ бројева остао непромењен. Одредити највећу могућу вредност броја k . |
| 7 | 4. Уписани круг троугла ABC додирује странице BC, CA и AB редом у A', B' и C' . Дужи AA', BB' и CC' имају заједничку тачку G . Нека су тачке C_A и C_B пресечне тачке круга описаног око $\triangle GA'B'$ са правама AC и BC , различите од B' и A' . Аналогно дефинишемо и тачке A_B, A_C, B_C, B_A . Доказати да тачке $C_A, C_B, A_B, A_C, B_C, B_A$ припадају истом кругу. |
| 7 | 5. Петар је пребројао све могуће речи састављене од m слова из скупа $\{\Gamma, P, A, D\}$, које садрже једнак број слова Γ и P . Васа је пребројао све могуће речи састављене од $2m$ слова из скупа $\{\Gamma, P\}$ које садрже једнак број слова Γ и P . Ко је добио већи број? |
| 8 | 6. Несташни Коља има троугао састављен од жице чији су углови $x^\circ, y^\circ, z^\circ$. Сваку страницу овог троугла он је савио за 1 степен и на тај начин добио неконвексан шестоугао са угловима $(x-1)^\circ, 181^\circ, (y-1)^\circ, 181^\circ, (z-1)^\circ, 181^\circ$. Доказати да тачке савијања деле странице почетног троугла у истом односу. |
| 10 | 7. У једном краљевству однос вредности злата и платине одређује се помоћу два природна броја g и p на следећи начин: x грама злата вреде колико и y грама платине ако је $xg = yp$ (x и y не морају бити цели бројеви). Оног дана када је курс био $g = p = 1001$, Ризничари су најавили да ће се сваког наредног дана смањивати за 1 или g или p , тако да ће након 2000 дана и g и p бити једнаки јединици. Није познато којим редоследом ће се смањивати g и p . Банкар је на дан најаве поседовао један килограм злата и један килограм платине. Он жели да у наредним данима врши замену злата за платину и обрнуто (по важећем курсу у дану размене), тако да на крају заврши са барем два килограма злата и барем два килограма платине. Да ли он сигурно ово може да постигне? |

ТРИДЦАТЬ ШЕСТОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

8 – 9 классы, базовый вариант, 12 октября 2014 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

- | | | |
|---|--|---------------------|
| 3 | 1. Есть 99 палочек с длинами $1, 2, 3, \dots, 99$. Можно ли из них сложить контур какого-нибудь прямоугольника? | <i>Е. В. Бакаев</i> |
| 2. Существуют ли такие десять попарно различных натуральных чисел, что их среднее арифметическое больше их наибольшего общего делителя | | |
| 2 | а) ровно в шесть раз; | |
| 2 | б) ровно в пять раз? | <i>И. Ф. Акулич</i> |
| 3. На стороне AB квадрата $ABCD$ отмечена точка K , а на стороне BC — точка L так, что $KB = LC$. Отрезки AL и CK пересекаются в точке P . Докажите, что отрезки DP и KL перпендикулярны. | | |
| 5 | | <i>Е. В. Бакаев</i> |
| 4. С начала учебного года Андрей записывал свои оценки по математике. Получая очередную оценку (2, 3, 4 или 5), он называл её <i>неожиданной</i> , если до этого момента она встречалась реже каждой из всех остальных возможных оценок. (Например, если бы он получил с начала года подряд оценки 3, 4, 2, 5, 5, 5, 2, 3, 4, 3, то неожиданными были бы первая пятерка и вторая четвёрка.) За весь учебный год Андрей получил 40 оценок — по 10 пятерок, четверок, троек и двоек (неизвестно, в каком порядке). Можно ли точно сказать, сколько оценок были для него неожиданными? | | |
| 5 | | <i>Е. В. Бакаев</i> |
| 5. Даны N прямоугольных треугольников. У каждого выбрали по одному катету и нашли сумму их длин, затем нашли сумму длин оставшихся катетов, и, наконец, нашли сумму длин всех гипотенуз. Оказалось, что три найденных числа являются длинами сторон некоторого прямоугольного треугольника. Докажите, что у всех исходных треугольников одно и то же отношение большего катета к меньшему, если | | |
| 2 | а) $N = 2$; | |
| 3 | б) N — любое натуральное число, большее 1. | <i>Е. В. Бакаев</i> |

ТРИДЦАТЬ ШЕСТОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

10 – 11 классы, базовый вариант, 12 октября 2014 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

1. Существуют ли такие десять попарно различных натуральных чисел, что их среднее арифметическое больше их наибольшего общего делителя
- 1 а) ровно в шесть раз;
2 б) ровно в пять раз?

И. Ф. Акулич

2. Вершины треугольника обозначены буквами A , B , C по часовой стрелке. Треугольник последовательно поворачивают по часовой стрелке: сначала вокруг вершины A на угол, равный $\angle A$, потом — вокруг вершины B на угол, равный $\angle B$, и так далее по циклу (каждый раз поворот делают вокруг текущего положения очередной вершины). Докажите, что после шести поворотов треугольник займёт исходное положение.

В. Расторгуев

3. Даны 15 целых чисел, среди которых нет одинаковых. Петя записал на доску все возможные суммы по 7 из этих чисел, а Вася — все возможные суммы по 8 из этих чисел. Могло ли случиться, что они выписали на доску одни и те же наборы чисел? (Если какое-то число повторяется несколько раз в наборе у Пети, то и у Васи оно должно повторяться столько же раз.)

И. И. Богданов

4. Даны N прямоугольных треугольников ($N > 1$). У каждого выбрали по одному катету и нашли сумму их длин, затем нашли сумму длин оставшихся катетов, и, наконец, нашли сумму длин всех гипотенуз. Оказалось, что три найденных числа являются длинами сторон некоторого прямоугольного треугольника. Докажите, что все исходные треугольники подобны.

Е. В. Бакаев

5. На столе лежала кучка серебряных монет. Каждым действием либо добавляли одну золотую монету и записывали количество серебряных монет на первый листок, либо убирали одну серебряную монету и записывали количество золотых монет на второй листок. В итоге на столе остались только золотые монеты. Докажите, что в этот момент сумма всех чисел на первом листке равнялась сумме всех чисел на втором.

Е. В. Бакаев

ТРИДЦАТЬ ШЕСТОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

8 – 9 классы, сложный вариант, 26 октября 2014 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

- 4 1. Дана квадратная таблица. В каждой ее клетке стоит либо плюс, либо минус, причем всего плюсов и минусов поровну. Докажите, что или в каких-то двух строках, или в каких-то двух столбцах одинаковое количество плюсов.

Б. Р. Френкин

- 5 2. Докажите, что в любом описанном около окружности многоугольнике найдутся три стороны, из которых можно составить треугольник.

Т. В. Казыцына, Б. Р. Френкин

- 6 3. Можно ли все натуральные делители числа $100!$ (включая 1 и само число) разбить на две группы так, чтобы в обеих группах было одинаковое количество чисел и произведение чисел первой группы равнялось произведению чисел второй группы?

М. И. Малкин

- 7 4. На кольцевой дороге через равные промежутки расположены 25 постов, на каждом стоит полицейский. Полицейские пронумерованы в каком-то порядке числами от 1 до 25. Требуется, чтобы они перешли по дороге так, чтобы снова на каждом посту был полицейский, но по часовой стрелке за номером 1 стоял номер 2, за номером 2 стоял номер 3, ..., за номером 25 стоял номер 1. Докажите, что если организовать переход так, чтобы суммарное пройденное расстояние было наименьшим, то кто-то из полицейских останется на своём посту.

Е. В. Бакаев

- 8 5. Внутри прямоугольного треугольника построили две равные окружности так, что первая касается одного из катетов и гипотенузы, вторая касается другого катета и гипотенузы, а ещё эти окружности касаются друг друга. Пусть M и N — точки касания окружностей с гипотенузой. Докажите, что середина отрезка MN лежит на биссектрисе прямого угла треугольника.

Е. В. Бакаев

- 8 6. Назовем натуральное число *ровным*, если в его записи все цифры одинаковы (например: 4, 111, 999999). Докажите, что любое n -значное число можно представить как сумму не более чем $n + 1$ ровных чисел.

А. В. Шаповалов

- 5 7. Паутина имеет вид клетчатой сетки 100×100 узлов (другими словами, это сетка 99×99 клеток). В каком-то ее углу сидит паук, а в некоторых 100 узлах к паутине приклеились мухи. За ход паук может переместиться в любой соседний с ним узел. Может ли паук гарантированно съесть всех мух, затратив не более

5 а) 2100 ходов;

5 б) 2000 ходов?

И. И. Богданов

ТРИДЦАТЬ ШЕСТОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

10 – 11 классы, сложный вариант, 26 октября 2014 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.)

баллы задачи

- 4 1. Докажите, что в любом описанном около окружности многоугольнике найдутся три стороны, из которых можно составить треугольник.

Т. В. Казыцына, Б. Р. Френкин

- 6 2. На кольцевой дороге через равные промежутки расположены 25 постов, на каждом стоит полицейский. Полицейские пронумерованы в каком-то порядке числами от 1 до 25. Требуется, чтобы они перешли по дороге так, чтобы снова на каждом посту был полицейский, но по часовой стрелке за номером 1 стоял номер 2, за номером 2 стоял номер 3, ..., за номером 25 стоял номер 1. Докажите, что если организовать переход так, чтобы суммарное пройденное расстояние было наименьшим, то кто-то из полицейских останется на своём посту.

Е. В. Бакаев

- 6 3. Гриша записал на доске 100 чисел. Затем он увеличил каждое число на 1 и заметил, что произведение всех 100 чисел не изменилось. Он опять увеличил каждое число на 1, и снова произведение всех чисел не изменилось, и так далее. Всего Гриша повторил эту процедуру k раз, и все k раз произведение чисел не менялось. Найдите наибольшее возможное значение k .

Г. А. Гальперин

- 7 4. Окружность, вписанная в треугольник ABC , касается сторон BC , CA , AB в точках A' , B' , C' соответственно. Прямые AA' , BB' и CC' пересекаются в точке G . Окружность, описанная около треугольника $GA'B'$, вторично пересекает прямые AC и BC в точках C_A и C_B . Аналогично определяются точки A_B , A_C , B_C , B_A . Докажите, что точки A_B , A_C , B_C , B_A , C_A , C_B лежат на одной окружности.

А. А. Заславский

- 7 5. Петя посчитал количество всех возможных m -буквенных слов, в записи которых могут использоваться только четыре буквы T , O , W и N , причем в каждом слове букв T и O поровну. Вася посчитал количество всех возможных $2m$ -буквенных слов, в записи которых могут использоваться только две буквы T и O , и в каждом слове этих букв поровну. У кого слов получилось больше? (Слово — это любая последовательность букв.)

Г. А. Погудин

- 8 6. На столе лежал проволочный треугольник с углами x° , y° , z° . Хулиган Коля согнул каждую сторону треугольника на один градус, в результате чего получился невыпуклый шестиугольник с внутренними углами $(x-1)^\circ$, 181° , $(y-1)^\circ$, 181° , $(z-1)^\circ$, 181° . Докажите, что точки сгиба делили стороны исходного треугольника в одном и том же отношении.

И. В. Митрофанов

- 10 7. В некотором государстве ценятся золотой и платиновый песок. Золото можно менять на платину, а платину на золото по курсу, который определяется натуральными числами g и p так: x граммов золотого песка равноценны y граммам платинового, если $xg = yp$ (числа x и y могут быть нецелыми). Сейчас у банкира есть по килограмму золотого и платинового песка, а $g = p = 1001$. Государство обещает каждый день уменьшать одно из чисел g и p на единицу, так что через 2000 дней они оба станут единицами; но последовательность уменьшений неизвестна. Может ли банкир каждый день менять песок так, чтобы в конце гарантированно получить хотя бы по 2 кг каждого песка?

И. И. Богданов

ТРИДЦАТЬ ШЕСТОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

8 – 9 классы, базовый вариант, 1 марта 2015 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.)

баллы задачи

- 3 1. Можно ли раскрасить грани куба в три цвета так, чтобы каждый цвет присутствовал, но нельзя было увидеть одновременно грани всех трех цветов, откуда бы мы ни взглянули на куб? (Одновременно можно увидеть только три любые грани, имеющие общую вершину.)

Е. В. Бакаев

- 4 2. На стороне AB треугольника ABC отметили точки K и L так, что $KL = BC$ и $AK = LB$. Докажите, что отрезок KL виден из середины M стороны AC под прямым углом.

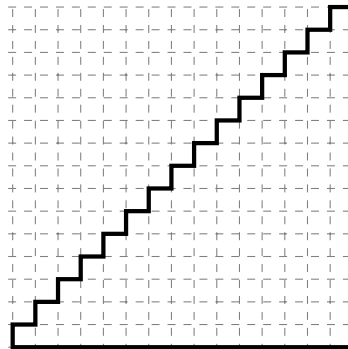
Е. В. Бакаев

- 4 3. Петя сложил 10 последовательных степеней двойки, начиная с некоторой, а Вася сложил некоторое количество последовательных натуральных чисел, начиная с 1. Могли ли они получить один и тот же результат?

Н. И. Авилов

- 4 4. На какое наименьшее количество квадратов можно разрезать лесенку из 15 ступеней (см. рисунок)? Резать можно только по границам клеток.

Е. В. Бакаев



- 5 5. Дано $2n + 1$ чисел (n — натуральное), среди которых одно число равно 0, два числа равны 1, два числа равны 2, ..., два числа равны n . Для каких n эти числа можно записать в одну строку так, чтобы для каждого натурального m от 1 до n между двумя числами, равными m , было расположено ровно m других чисел?

И. Ф. Акулич

ТРИДЦАТЬ ШЕСТОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

10 – 11 классы, базовый вариант, 1 марта 2015 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.)

баллы задачи

- 3 1. Петя сложил 100 последовательных степеней двойки, начиная с некоторой, а Вася сложил некоторое количество последовательных натуральных чисел, начиная с 1. Могли ли они получить один и тот же результат?

Н. И. Авилов

- 4 2. Ковер имеет форму квадрата со стороной 275 см. Моль проела в нем четыре дырки. Можно ли гарантированно вырезать из ковра квадратный кусок со стороной 1 м, не содержащий дырок? Дырки считайте точечными.

И. Ф. Акулич

- 4 3. Дано $2n + 1$ чисел (n — натуральное), среди которых одно число равно 0, два числа равны 1, два числа равны 2, ..., два числа равны n . Для каких n эти числа можно записать в одну строку так, чтобы для каждого натурального m от 1 до n между двумя числами, равными m , было расположено ровно m других чисел?

И. Ф. Акулич

- 5 4. Точки K и L делят медиану AM треугольника ABC на три равные части, точка K лежит между L и A . Отметили точку P так, что треугольники KPL и ABC подобны ($\frac{KP}{AB} = \frac{PL}{BC} = \frac{KL}{AC}$), причем P и C лежат в одной полуплоскости относительно прямой AM . Докажите, что P лежит на прямой AC .

Е. В. Бакаев

- 5 5. По кругу записывают 2015 натуральных чисел так, чтобы любые два соседних числа различались на их наибольший общий делитель. Найдите наибольшее натуральное N , на которое гарантированно будет делиться произведение этих 2015 чисел.

Г. К. Жуков

ТРИДЦАТЬ ШЕСТОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

8 – 9 классы, сложный вариант, 15 марта 2015 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

- 4 1. Внутри параллелограмма $ABCD$ отметили точку E так, что $CD = CE$. Докажите, что отрезок DE перпендикулярен отрезку, соединяющему середины отрезков AE и BC .

Е. В. Бакаев

- 6 2. Секретная база окружена прозрачным извилистым забором в форме невыпуклого многоугольника, снаружи — болото. Через болото проложена прямая линия электропередач из 36 столбов, часть из которых стоят снаружи базы, а часть — внутри. Линия электропередач не проходит через вершины забора. Шпион обходит базу снаружи вдоль забора так, что забор всё время по правую руку от него. Каждый раз, оказавшись на линии электропередач, он считает, сколько всего столбов находится по левую руку от него (он их все видит). К моменту, когда шпион обошел весь забор, он насчитал в сумме 2015 столбов. Сколько столбов находится внутри базы?

Е. В. Бакаев

- 3 3. а) Натуральные числа x , x^2 и x^3 начинаются с одной и той же цифры. Обязательно ли эта цифра — единица?

- 4 б) Тот же вопрос для натуральных чисел $x, x^2, x^3, \dots, x^{2015}$.

Е. В. Бакаев

- 4 4. Каждая сторона некоторого многоугольника обладает таким свойством: на прямой, содержащей эту сторону, лежит ещё хотя бы одна вершина многоугольника. Может ли число вершин этого многоугольника

- 4 а) не превосходить девяти;

- 5 б) не превосходить восьми?

Е. В. Бакаев

- 3 5. а) В таблицу $2 \times n$ (где $n > 2$) вписаны числа. Суммы во всех столбцах различны. Докажите, что можно переставить числа в таблице так, чтобы суммы в столбцах были различны и суммы в строках были различны.

- 6 б) В таблицу 10×10 вписаны числа. Суммы во всех столбцах различны. Всегда ли можно переставить числа в таблице так, чтобы суммы в столбцах были различны и суммы в строках были различны?

А. В. Шаповалов

- 9 6. Внутри окружности расположен выпуклый равносторонний N -угольник. Каждую его сторону продолжают в обоих направлениях до пересечения с окружностью, получая по два новых отрезка, расположенных вне многоугольника. Затем некоторые из $2N$ полученных отрезков красятся в красный цвет, а остальные — в синий цвет. Докажите, что можно раскрасить эти отрезки так, чтобы сумма длин красных отрезков равнялась сумме длин синих.

Фольклор, предложил Г. А. Гальперин

- 10 7. Император пригласил на праздник 2015 волшебников, добрых и злых, при этом волшебники знают, кто добрый и кто злой, а император нет. Добрый волшебник всегда говорит правду, а злой говорит что угодно. На празднике император в каком хочет порядке задает каждому волшебнику по вопросу (требующему ответа «да» или «нет») и слушает ответ, а после всех ответов одного изгоняет. Волшебник выходит в заколдованную дверь, и император узнает, добрый он был или злой. После этого император вновь задает каждому из оставшихся волшебников по вопросу, вновь одного изгоняет, и так далее, пока император не решит остановиться (это возможно после любого из ответов, и после остановки можно никого не изгонять). Докажите, что император может изгнать всех злых волшебников, удалив при этом не более одного доброго.

И. В. Митрофанов

ТРИДЦАТЬ ШЕСТОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

10 – 11 классы, сложный вариант, 15 марта 2015 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

1.
2 а) Натуральные числа x , x^2 и x^3 начинаются с одной и той же цифры. Обязательно ли эта цифра — единица?
3 б) Тот же вопрос для натуральных чисел $x, x^2, x^3, \dots, x^{2015}$.

Е. В. Бакаев

2. На основании BC равнобедренного треугольника ABC отмечена точка X , а на сторонах AB и AC — соответственно точки P и Q таким образом, что $APXQ$ — параллелограмм. Докажите, что точка Y , симметричная точке X относительно прямой PQ , попадает на описанную окружность треугольника ABC .

Ф. А. Ивлев

3.
2 а) В таблицу $2 \times n$ (где $n > 2$) вписаны числа. Суммы во всех столбцах различны. Докажите, что можно переставить числа в таблице так, чтобы суммы в столбцах были различны и суммы в строках были различны.
6 б) В таблицу 100×100 вписаны числа. Суммы во всех столбцах различны. Всегда ли можно переставить числа в таблице так, чтобы суммы в столбцах были различны и суммы в строках были различны?

А. В. Шаповалов

4. Внутри окружности расположен выпуклый равносторонний N -угольник. Каждую его сторону продолжают в обоих направлениях до пересечения с окружностью, получая по два новых отрезка, расположенных вне многоугольника. Затем некоторые из $2N$ полученных отрезков красятся в красный цвет, а остальные — в синий цвет. Докажите, что можно раскрасить эти отрезки так, чтобы сумма длин красных отрезков равнялась сумме длин синих.

Фольклор, предложил Г. А. Гальперин

5. Существуют ли такие два многочлена с целыми коэффициентами, что у каждого из них есть коэффициент, модуль которого больше 2015, но при этом у их произведения модули всех коэффициентов не больше 1?

А. Я. Канель-Белов

6. Император пригласил на праздник 2015 волшебников, добрых и злых, при этом волшебники знают, кто добрый и кто злой, а император нет. Добрый волшебник всегда говорит правду, а злой говорит что угодно. На празднике император сначала выдает каждому волшебнику по бумажке с вопросом (требующим ответа «да» или «нет»), затем волшебники отвечают, и после всех ответов император одного изгоняет. Волшебник выходит в заколдованную дверь, и император узнает, добрый он был или злой. После этого император вновь выдает каждому из оставшихся волшебников по бумажке с вопросом, вновь одного изгоняет, и так далее, пока император не решит остановиться (это возможно после любого из ответов, и после остановки можно никого не изгонять). Докажите, что император может изгнать всех злых волшебников, удалив при этом не более одного доброго.

И. В. Митрофанов

7. Как известно, если у четырехугольника существуют вписанная и описанная окружности и их центры совпадают, то этот четырехугольник — квадрат. А верен ли аналог этого утверждения в пространстве: если у кубоида существуют вписанная и описанная сферы и их центры совпадают, то этот кубоид — куб? (Кубоид — это многогранник, у которого 6 четырехугольных граней и в каждой вершине сходится 3 ребра).

М. А. Евдокимов

ТРИДЦАТЬ ШЕСТОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

11 класс, устный тур, 22 марта 2015 г.

1. График квадратного трёхчлена с целыми коэффициентами пересекает ось абсцисс в точках X , Z , а ось ординат в точке Y (все три точки различны). Найдите наибольшее возможное значение угла XYZ .

Б. Френкин

2. Треугольники ABC и ADE таковы, что E лежит на луче AB , а D лежит на луче AC . Оказалось, что биссектрисы BX и DY этих треугольников перпендикулярны. Докажите, что XY параллельно EC .

В. Мокин

3. Изначально в бизнес-центре базировались 2^n фирм, каждая занимала некоторую площадь, все площади были различны. Каждый год фирмы объединялись в пары, и в каждой паре фирма с меньшей площадью присоединялась к фирме с большей. При этом ни в какой момент времени не было двух фирм с одинаковой площадью. Через n лет осталась одна фирма. Какое наименьшее место по площади (считая от меньшей к большей) эта фирма могла занимать вначале?

Б. Френкин

4. Дано натуральное число a . Докажите, что любое натуральное число n можно домножить на какое-то натуральное число, меньшее $10a$, так, чтобы десятичная запись произведения начиналась на a .

Е. Бакаев

5. В кубическую коробку поместили 3 одинаковых шара. Докажите, что в точно такую же пустую коробку можно поместить 4 таких же шара.

М. Евдокимов

6. Два дворца спорта набрали школьников в секции. В каждой секции первого дворца не меньше, чем по n детей, а в каждой секции второго — не меньше, чем по k детей. Оказалось, что каждый школьник посещает столько же секций в первом дворце, сколько и во втором. Кроме того, в любых двух секциях из разных дворцов есть не более одного общего школьника. Докажите, что в первый дворец попало не меньше nk детей.

Н. Верещагин, А. Ромащенко