

Ристо Малчески, Македонија  
Алија Муминагиќ, Данска

## ТРИ ИДЕНТИТЕТИ ЗА ФИБОНАЧИЕВИТЕ БРОЕВИ

Како што знаеме, низата Фибоначиеви броеви  $\{f_n\}$  определена со

$$f_0 = 0, f_1 = 1 \text{ и } f_{n+2} = f_{n+1} + f_n, \text{ за } n \geq 0, \quad (1)$$

експлицитно се задава со помош на формулата на Бине

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right], n \geq 0. \quad (2)$$

Во оваа кратка статија користејќи ги (1) и (2) ќе докажеме неколку идентитети поврзани со Фибоначиевите броеви.

**Задача 1 (Цезаро).** Докажи дека

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k f_k = f_{3n}$$

**Решение.** Ако ги искористиме формулите на Бине, при ознаки  $r = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  и  $1-r = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ , и Њутновата биномна формула, добиваме

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k f_k &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k \frac{1}{\sqrt{5}} (r^k - (1-r)^k) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k r^k - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k (1-r)^k \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} ((1+2r)^n - (1+2(1-r))^n). \end{aligned} \quad (3)$$

Понатаму, од  $r^2 = r+1$  следува

$$r^3 = r^2 \cdot r = r(r+1) = r^2 + r = r+1+r = 2r+1$$

и аналогно се докажува дека  $(1-r)^3 = 1+2(1-r)$ . Сега, заменуваме во (3) и добиваме

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k f_k = \frac{1}{\sqrt{5}} ((1+2r)^n - (1+2(1-r))^n) = \frac{1}{\sqrt{5}} (r^{3n} - (1-r)^{3n}) = f_{3n}. \blacksquare$$

**Задача 2.** Докажи дека

$$f_n^2 = 2f_{n-1}^2 + 2f_{n-2}^2 - f_{n-3}^2, \text{ за } n \geq 0. \quad (4)$$

**Решение.** *Прв начин.* Со квадрирање на  $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ , за  $n \geq 3$  последователно добиваме

$$f_n^2 = f_{n-1}^2 + f_{n-2}^2 + 2f_{n-1}f_{n-2}$$

$$2f_{n-1}f_{n-2} = f_n^2 - f_{n-1}^2 - f_{n-2}^2. \quad (5)$$

Ако во (5) наместо  $n$  ставиме  $n-1$  добиваме

$$2f_{n-2}f_{n-3} = f_{n-1}^2 - f_{n-2}^2 - f_{n-3}^2. \quad (6)$$

Сега, од (5) ја одземеме (6) и добиваме

$$2f_{n-2}(f_{n-1} - f_{n-3}) = f_n^2 - 2f_{n-1}^2 + f_{n-3}^2. \quad (7)$$

Ако во (7) замениме  $f_{n-1} - f_{n-3} = f_{n-2}$ , добиваме

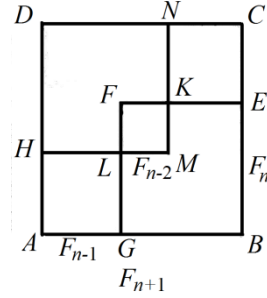
$$2f_{n-2}^2 = f_n^2 - 2f_{n-1}^2 + f_{n-3}^2, \text{ т.е. } f_n^2 = 2f_{n-1}^2 + 2f_{n-2}^2 - f_{n-3}^2,$$

што и требаше да се докаже.

*Втор начин.* Ако во (4) наместо  $n$  ставиме  $n+1$  добиваме

$$f_{n+1}^2 = 2f_n^2 + 2f_{n-1}^2 - f_{n-2}^2.$$

Да земеме квадрат  $ABCD$  со должина на страна  $\overline{AB} = \overline{BC} = f_{n+1}$ . Квадратите  $BEFG$  и  $DHMN$  се поставени како на цртежот десно и имаат должини на страни  $\overline{BE} = \overline{HM} = f_n$ . Сега, ако  $HM \cap FG = L$  и  $MN \cap EF = K$ , тогаш четириаголниците  $AGLH$  и  $CNKE$  се квадрати со должини на страни  $\overline{AG} = \overline{CE} = f_{n+1} - f_n = f_{n-1}$ , па затоа четириаголникот  $FKML$  е квадрат со должина на страна  $\overline{FK} = f_n - f_{n-1} = f_{n-2}$ .



Од досега изнесеното следува

$$\begin{aligned} f_{n+1}^2 &= P_{ABCD} = P_{EFGH} + P_{DHMN} - P_{FKML} + P_{AGLH} + P_{KECN} \\ &= f_n^2 + f_n^2 - f_{n-2}^2 + f_{n-1}^2 + f_{n-1}^2 = 2f_n^2 + 2f_{n-1}^2 - f_{n-2}^2, \end{aligned}$$

што и требаше да се докаже.

*Трет начин.* Ако во (2) ставиме  $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ,  $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ , тогаш формулата на Бине ја запишуваме во обликот

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n), \quad n \geq 0. \quad (8)$$

Сега, ако прво земеме предвид дека

$$\alpha\beta = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -1,$$

а потоа дека од  $\alpha^2 = \alpha + 1$  следува

$$\begin{aligned} 2\alpha^4 + 2\alpha^2 - 1 &= 2\alpha^4 + \alpha^2 + \alpha^2 - 1 = 2\alpha^4 + \alpha^2 + \alpha = 2\alpha^4 + \alpha(\alpha + 1) \\ &= 2\alpha^4 + \alpha^3 = \alpha^4 + \alpha^4 + \alpha^3 = \alpha^4 + \alpha^3(\alpha + 1) \\ &= \alpha^4 + \alpha^5 = \alpha^4(\alpha + 1) = \alpha^6 \end{aligned}$$

и аналогно  $2\beta^4 + 2\beta^2 - 1 = \beta^6$  и ја искористиме (8), добиваме:

$$\begin{aligned}
2f_n^2 + 2f_{n-1}^2 - f_{n-2}^2 &= \frac{1}{5}[2(\alpha^n - \beta^n)^2 + 2(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1})^2 - (\alpha^{n-2} - \beta^{n-2})^2] \\
&= \frac{1}{5}(2\alpha^{2n} + 2\beta^{2n} - 4 \cdot (-1)^n + 2\alpha^{2n-2} + 2\beta^{2n-2} \\
&\quad - 4 \cdot (-1)^{n-1} - \alpha^{2n-4} - \beta^{2n-4} + 2 \cdot (-1)^{n-2}) \\
&= \frac{1}{5}(2\alpha^{2n} + 2\alpha^{2n-2} - \alpha^{2n-4} + 2\beta^{2n} + 2\beta^{2n-2} - \beta^{2n-4} - 2 \cdot (-1)^{n+1}) \\
&= \frac{1}{5}[\alpha^{2n-4}(2\alpha^4 + 2\alpha^2 - 1) + \beta^{2n-4}(2\beta^4 + 2\beta^2 - 1) - 2 \cdot (-1)^{n+1}] \\
&= \frac{1}{5}(\alpha^{2n-4}\alpha^6 + \beta^{2n-4}\beta^6 - 2 \cdot (-1)^{n+1}) \\
&= \frac{1}{5}(\alpha^{2n+2} + \beta^{2n+2} - 2 \cdot (-1)^{n+1}) \\
&= \frac{1}{5}(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1})^2 = f_{n+1}^2,
\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже. ■

**Задача 3.** Докажи дека

$$f_n^3 = 3f_{n-1}^3 + 6f_{n-2}^3 - 3f_{n-3}^3 - f_{n-4}^3, \text{ за } n \geq 0. \quad (9)$$

**Решение.** Имаме:

$$\begin{aligned}
f_n^3 &= \frac{1}{5\sqrt{5}}(\alpha^{3n} - 3\alpha^{2n}\beta^n + 3\alpha^n\beta^{2n} - \beta^{3n}) \\
&= \frac{1}{5\sqrt{5}}(\alpha^{3n} - 3(-1)^n\alpha^n + 3(-1)^n\beta^n - \beta^{3n}) \\
&= \frac{1}{5} \cdot \frac{\alpha^{3n} - \beta^{3n}}{\sqrt{5}} - \frac{3}{5}(-1)^n \cdot \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}} \\
&= \frac{1}{5}f_{3n} - \frac{3}{5}(-1)^n f_n.
\end{aligned}$$

Според тоа, ако во последниот идентитет  $n$  последователно го замениме со  $n-1$ ,  $n-2$ ,  $n-3$  и  $n-4$  за десната страна на (9) добиваме:

$$\begin{aligned}
3f_{n-1}^3 + 6f_{n-2}^3 - 3f_{n-3}^3 - f_{n-4}^3 &= \frac{1}{5}(3f_{3n-3} + 6f_{3n-6} - 3f_{3n-9} - f_{3n-12}) - \\
&\quad - \frac{3}{5}(-1)^n(-3f_{n-1} + 6f_{n-2} + 3f_{n-3} - f_{n-4}).
\end{aligned}$$

Понатаму,

$$\begin{aligned}
-3f_{n-1} + 6f_{n-2} + 3f_{n-3} - f_{n-4} &= -3f_{n-1} + 3(f_{n-2} + f_{n-3}) + 3f_{n-2} - f_{n-4} \\
&= -3f_{n-1} + 3f_{n-1} + 3f_{n-2} - f_{n-4} \\
&= 3f_{n-2} - f_{n-4} = 3f_{n-2} - (f_{n-2} - f_{n-3}) \\
&= 2f_{n-2} + f_{n-3} = f_{n-2} + (f_{n-2} + f_{n-3}) \\
&= f_{n-2} + f_{n-1} = f_n,
\end{aligned}$$

и користејќи дека  $f_k = f_{k-1} + f_{k-2}$ , со последователно намалување на индексот на  $f_{3n}$ , на потполно аналоген начин како погоре се докажува дека

$$f_{3n} = 3f_{3n-3} + 6f_{3n-6} - 3f_{3n-9} - f_{3n-12}.$$

Според тоа,

$$\begin{aligned}f_n^3 &= \frac{1}{5}f_{3n} - \frac{3}{5}(-1)^n f_n \\ &= \frac{1}{5}(3f_{3n-3} + 6f_{3n-6} - 3f_{3n-9} - f_{3n-12}) - \frac{3}{5}(-1)^n(-3f_{n-1} + 6f_{n-2} + 3f_{n-3} - f_{n-4}) \\ &= 3f_{n-1}^3 + 6f_{n-2}^3 - 3f_{n-3}^3 - f_{n-4}^3,\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже. ■

#### Литература

1. Abbas Roohol Amini: Fibonacci Numbers a Long Division Formula, Mathematical Spectrum, Vol. 40, Number 2, 2007/08 2. Jens Carstensen
2. Alija Muminagić: Fibonaccital og polynomiers division, Matematik Magasinet 40, juni, 2008
3. Карстенсен, Ј., Муминагиќ, А. (2020). Фибоначиеви броеви и полиноми со целобројни коефициенти, Армаганка, Скопје (armaganka.org.mk)
4. Малчески, Р. (2009). Фибоначиеви броеви, Сигма, Скопје
5. Малчески, Р., Муминагиќ, А. (2021). Некои релации за Фибоначиевите и Лукасовите броеви, Армаганка, Скопје (armaganka.org.mk)