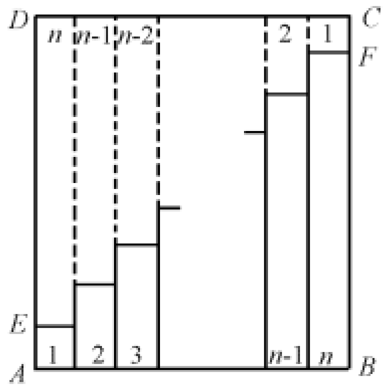
Катерина Аневска
Самоил Малчески

ГЕОМЕТРИСКО ПРЕСМЕТУВАЊЕ НА ЗБИРОВИ

Во практиката често пати користиме формули за збирови на степени или производи на природни броеви. Во оваа статија ќе покажеме како може да се изведат некои од најчесто користените формули од ваков вид. Притоа, ќе ги објасниме постапките кои во текот на историјата ги развиле математичарите од различните цивилизации.

Пример 1. Да го разгледаме цртеж 1 на кој се дадени n правоаголници кај кои едната страна е еднаква на 1, а другата е еднаква на 1, 2, 3, ..., n и кои ја формираат скалестата фигура $ABFE$, чија плоштина е

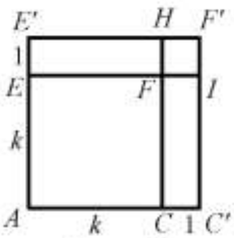
$$S = 1 + 2 + 3 + ... + n. \qquad (1)$$



Цртеж 1

На фигурата $ABFE$ и ја доцртуваме складната фигура $CDEF$ и го добиваме квадратот $ABCD$, кој е поделен на n складни правоаголници со страни 1 и $n+1$, па затоа неговата плоштина е еднаква на $n(n+1)$. Според тоа, $P_{ABCD} = 2P_{ABFE} = 2S$, па затоа $2S = n(n+1)$ и ако го искористиме равенството (1) ја добиваме *формулата за збирот на првите n природни броеви,* т.е. ја добиваме формулата

$$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}. \ \blacksquare \qquad (2)$$



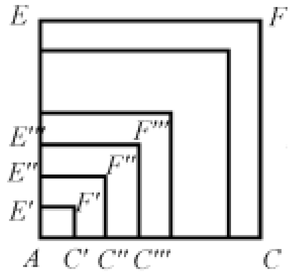
Цртеж 2

Пример 2 (Питагорејска школа). Да ги разгледаме квадратите $ACFE$ и $AC'F'E'$, чии должини на страни се k и $k+1$, соодветно (цртеж 2). Разликата меѓу овие два квадрати е фигурата $CC'F'E'EF$, која античките математичари ја нарекувале *гномон* и која е составена од еден квадрат со плоштина еднаква на 1 и два складни правоаголници со плоштини k. Според тоа, ако на квадратот $ACFE$ со плоштина k^2 му го доцртаме гномонот $CC'F'E'EF$ со плоштина $2k+1$ го добиваме квадратот $AC'F'E'$ чија плоштина е еднаква на $(k+1)^2$.

Сега да земеме квадрат $AC'F'E'$ со страна 1 и на него последователно да доцртаме гномони со плоштини

$$2\cdot 1+1=3,\ 2\cdot 2+1=5,\ 2\cdot 3+1=7,\ \dots,\ 2n+1,$$

(цртеж 3). На тој начин добиваме квадрат $ACFE$ со страна $n+1$ чија плоштина е еднаква на $(n+1)^2$. Од друга страна, плоштината на квадратот $ACFE$ е еднаква на збирот на плоштините на единичниот квадрат $AC'F'E'$ и доцртаните гномони, па затоа таа е еднаква на збирот

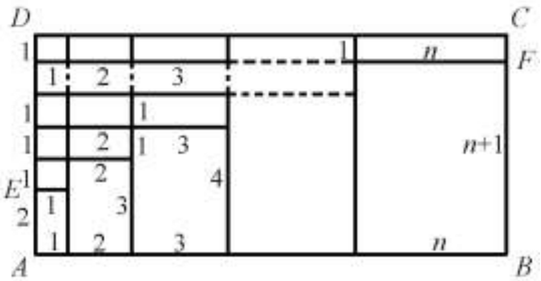


Цртеж 3

$$1+3+5+7+\dots+(2n+1).$$

Конечно, од досега изнесеното ја добиваме следнава формула за збирот на првите n непарни природни броеви:

$$1+3+5+7+\dots+(2n+1)=(n+1)^2. \ \blacksquare$$



Цртеж 4

Пример 3. Да го разгледаме правоаголникот $ABCD$ прикажан на цртеж 4. Од цртежот и од пример 1 заклучуваме дека неговите страни се со должини

$$\overline{BC}=n+2 \text{ и}$$

$$\overline{AB}=1+2+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2},$$

што значи дека неговата плоштина е

$$P_{ABCD}=\frac{n(n+1)(n+2)}{2}. \tag{3}$$

Понатаму, со искршената линија EF правоаголникот е поделен на два дела, при што фигурата $ABFE$ која е во долниот е составена од правоаголници со плоштини

$$1\cdot 2,\ 2\cdot 3,\ 3\cdot 4,\ \dots,\ n(n+1),$$

што значи дека

$$P_{ABFE}=1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\dots+n(n+1). \tag{4}$$

Од друга страна фигурата $CDEF$ која се наоѓа во горниот дел од правоаголникот е составена од n редици, чии плоштини се

$$1,1+2,1+2+3,\dots,1+2+3+\dots+n,$$

и ако прво ја искористиме формулата (2), а потоа формулата (4) добиваме

$$\begin{aligned} P_{CDEF} &= 1+(1+2)+(1+2+3)+...+(1+2+3+...+n) \\ &= \tfrac{1\cdot 2}{2}+\tfrac{2\cdot 3}{2}+\tfrac{3\cdot 4}{2}+...+\tfrac{n(n+1)}{2} \\ &= \tfrac{1}{2}[1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+...+n(n+1)] \\ &= \tfrac{1}{2}P_{ABEF}. \end{aligned} \qquad (5)$$

Но,

$$P_{ABCD} = P_{ABFE} + P_{CDEF}$$

и ако ги искористиме равенствата (3), (4) и (5) последователно добиваме

$$\begin{aligned} \tfrac{n(n+1)(n+2)}{2} &= P_{ABCD} = P_{ABFE} + P_{CDEF} \\ &= P_{ABFE} + \tfrac{1}{2}P_{ABFE} = \tfrac{3}{2}P_{ABFE} \\ &= \tfrac{3}{2}[1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+...+n(n+1)], \end{aligned}$$

т.е.

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+...+n(n+1) = \tfrac{n(n+1)(n+2)}{3}. \ \blacksquare \qquad (6)$$

Пример 4. Во очигледното равенство $k^2 = k(k+1)-k$ последователно ставаме $k=1,2,...,n$ ги добиваме равенствата

$$\begin{aligned} &1^2 = 1(1+1)-1 = 1\cdot 2-1 \\ &2^2 = 2(2+1)-2 = 2\cdot 3-1 \\ &.. \\ &n^2 = n(n+1)-n. \end{aligned}$$

Ги собираме левите и десните страни на последните равенства и ако ги искористиме формулите (2) и (6) ја добиваме следната формула за збирот на квадратите на првите n природни броеви:

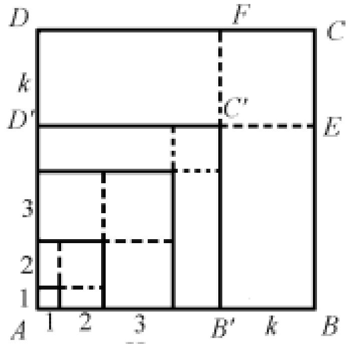
$$\begin{aligned} 1^2+2^2+...+n^2 &= 1\cdot 2-1+2\cdot 3-2+...+n(n+1)-n \\ &= 1\cdot 2+2\cdot 3+...+n(n+1)-[1+2+...+n] \\ &= \tfrac{n(n+1)(n+2)}{3} - \tfrac{n(n+1)}{2} \\ &= n(n+1)(\tfrac{n+2}{3}-\tfrac{1}{2}) \\ &= \tfrac{n(n+1)(2n+4-3)}{6} \\ &= \tfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \end{aligned}$$

т.е.

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \ \blacksquare \qquad (7)$$

Пример 5 (Алкхаркхи – арапски математичар, 11 век). Да го разгледаме квадратот $ABCD$, цртеж 5, чија должина на страна е еднаква на $1+2+\ldots+k$. Во квадратот $ABCD$ конструираме други квадрати, чие едно теме се совпаѓа со темето A, страните им се паралелни со страните AB и AD и имаат должини на страни

$$1, 1+2, 1+2+3, \ldots, 1+2+\ldots+(k-1).$$



Цртеж 5

Да го разгледаме гномонот $BCDD'C'B$ со ширина k. Неговата плоштина е

$$\begin{aligned} P_{BCDD'C'B} &= 2P_{DD'CE} - P_{ECFC'} \\ &= 2k(1+2+3+\ldots+k) - k^2 \\ &= 2k\frac{k(k+1)}{2} - k^2 \\ &= k^3 + k^2 - k^2 = k^3. \end{aligned} \qquad (8)$$

Ако сега земеме единичен квадрат и над него последователно конструираме гномони со ширини $2, 3, 4, \ldots, n$, тогаш добиваме квадрат со страна

$$1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2},$$

што значи дека неговата плоштина е еднаква на $[\frac{n(n+1)}{2}]^2$. Од друга страна плоштината на квадратот е еднаква на збирот на плоштината на единичниот квадрат и плоштините на гномоните со страни $2, 3, 4, \ldots, n$, па од (8) следува точноста на следнава формула за збирот на третите степени на првите n природни броеви:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = [\frac{n(n+1)}{2}]^2. \ \blacksquare$$