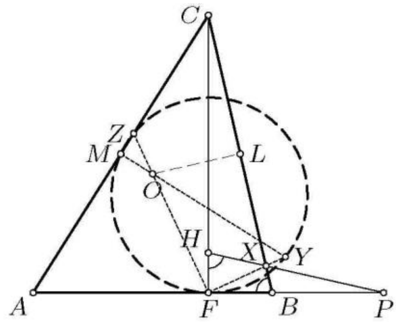
БМО 2008

1. Даден е разностран остроаголен триаголник ABC во кој $\overline{AC} > \overline{BC}$. Нека O е центарот на опишаната кружница и H е ортоцентарот на $\triangle ABC$ и нека F е подножјето на висината повлечена од темето C. На правата AB е избрана точка P, различна од A, таква што $\overline{AF} = \overline{PF}$, а M е средината на страната AC. Нека X е пресекот на правите PH и BC, Y е пресекот на правите OM и FX, а Z е пресекот на правите OF и AC. Докажи, дека точките F, M, Y и Z лежат на иста кружница.



Решение. Бидејќи $\measuredangle ZMY = 90^\circ$, доволно е да докажеме дека

$$\measuredangle ZFY = \measuredangle OFX = 90^\circ.$$

Нека X' е точка на страната BC таква што $\measuredangle OFX' = 90^\circ$ и нека L е средина на страната BC. Точките F и L се наоѓаат на кружницата k над дијаметар OX', а исто така и двете лежат на Ојлеровата кружница ω на триаголникот ABC, чиј центар K е средина на отсечката OH. Затоа FL како заедничка тетива на кружниците k и ω е нормална на JK, каде J е средината на OX'. Од $JK \parallel HX'$ следува дека $FL \perp HX'$. Оттука следува

$$\measuredangle FHX' = 90^\circ - \measuredangle CFL = 90^\circ - \measuredangle FCL = \measuredangle ABC = \measuredangle AHF = \measuredangle FHX,$$

па затоа $X \equiv X'$.

2. Дали постои низа позитивни броеви $a_1, a_2, \ldots$ кои ги задоволуваат условите

   1) $\sum_{i=1}^{n} a_i \le n^2$, за секој $n \in \mathbb{N}$ и

   2) $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \le 2008$, за секој $n \in \mathbb{N}$.

Решение. Нека претпоставиме дека таква низа постои. Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$\frac{1}{a_{n+1}} + \ldots + \frac{1}{a_{2n}} \ge \frac{n^2}{a_{n+1}+\ldots+a_{2n}} \ge \frac{n^2}{a_1+\ldots+a_{2n}} \ge \frac{n^2}{4n^2} = \frac{1}{4},$$

за секој $n \in \mathbb{N}$. Меѓутоа, од тука следува $\sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{a_i} \ge \frac{k}{4}$, за $k = 1, 2, \ldots$, што противречи на условот 2).

3. Нека n е природен број. Правоаголник со должини на страни $90n+1$ и $90n+5$

е поделен на единечни квадрати со страни паралелни на страните на правоаголникот. Нека S е множеството од сите темиња на овие единечни квадрати. Докажи, дека бројот на правите кои содржат барем две точки од множеството S е делив со 4.

Решение. Нека поставиме координатен систем со координатен почеток во центарот O на правоаголникот и x оска паралелна на подолгата страна на правоаголникот. Множеството P од разгледуваните прави да го поделиме на две групи.

1) Прави кои не минуваат низ точката O. Има $(90n+2)+(90n+6)$ прави паралелни на една од координатните оски и овој број е делив со 4. За секоја од останатите прави кои минуваат низ точката O, правите кои се симетрични на неа во однос на координатните оски и во однос на точката O исто така припаѓаат на множеството P, па затоа множеството од овие прави е унија на дисјунктни четириелементни множества. Затоа, бројот на правите кои не минуваат низ точката O е делив со 4.
2) Прави кои минуваат низ точката O. Секоја права низ O која содржи некоја точка од S ја содржи и нејзината симетрична точка, па затоа припаѓа на P, а нејзиниот коефициент на правец е рационален број $\frac{p}{q}$, каде p и q се непарни цели броеви такви што $|p|\leq 90n+1,\ \ 0<q\leq 90n+5$ и притоа $\text{NZD}(p,q)=1$. Правите од оваа група ги делиме на три подгрупи:

   а) Две прави $l_1(x=y), l_2(x=-y)$.

   б) За секоја права која минува низ O со коефициент на правец $\frac{p}{q}$ за $|p|\leq 90n+1$ и $0<q\leq 90n+1$, различна од l_1 и l_2, правите симетрични на неа во однос на правите x, l_1 и l_2 припаѓаат на множеството P, па затоа множеството од овие прави е унија на дисјунктни четириелементни множества.

   в) Остануваат правите кои минуваат низ O и имаат коефициент на правец $\frac{p}{q}$ за кој $q\in\{90n+3, 90n+5\}$. Бидејќи $NZD(x,q)=1$ и $2\nmid x$ ако и само ако $NZD(q,q-x)=1$ и $2\,|\,q-x$, заклучуваме дека непарни природни броеви кои се помали или еднакви на q и се заемно прости со q има исто колку што има и парни, па затоа нивниот број е $\frac{1}{2}\varphi(q)$. Според тоа, за $q=90n+3$ бројот на овие прави е $\varphi(90n+3)$, додека за $q=90n+5$ нивниот број е $\varphi(90n+4)-2$, бидејќи треба да се исклучат правите со коефициент на агол $\pm\frac{90n+3}{90n+5}$. Бидејќи $4\,|\,\varphi(3)\varphi(30n+1)=\varphi(90n+3)$ и $4=\varphi(5)\,|\,\varphi(90n+5)$, добиваме дека бројот на овие прави е од облик $4k-2$.

Од а), б) и в) следува дека бројот на правите кои минуваат низ точката O е делив со 4.

Конечно, од 1) и 2) следува дека бројот на правите кои содржат барем две точки од множеството S е делив со 4.

4. Нека c е природен број. Низата $a_1, a_2, \dots$ е дефинирана со

$$a_1 = c, a_{n+1} = a_n^2 + a_n + c^3,$$

за секој природен број n. Определи ги сите вредности на c за кои постојат природни броеви $k \geq 1$ и $m \geq 2$ такви што бројот $a_k^2 + c^3$ е еднаков на $m-$тиот степен на некој природен број.

Решение. За $k > 1$ од рекурентната врска добиваме

$$a_k^2 + c^3 = a_{k+1} - a_k = a_k^2 + a_k - a_{k-1}^2 - a_{k-1} = (a_k - a_{k-1})(a_k + a_{k-1} + 1). \qquad (1)$$

Нека претпоставиме дека $d \mid a_k - a_{k-1}$ и $d \mid a_k + a_{k-1} + 1$. Тогаш $d \mid 2a_k + 1$ и $d \mid 2a_{k-1} + 1$. Но, од рекурентната релација следува

$$2(2a_k + 1) = (2a_{k-1} + 1)^2 + 4c^3 + 1,$$

па затоа $d \mid 4c^3 + 1$, а оттука следува дека $d \mid 2a_n + 1$, за секој $n < k$. Според тоа, $d \mid 2a_1 + 1 = 2c + 1$. Меѓутоа, тогаш $d \mid 2(4c^3 + 1) - (2c + 1)(4c^2 - 2c + 1) = 1$, т.е. $d = 1$.

Сега ако $a_{k+1} - a_k$ е $m-$ти степен, од (1) следува дека и $a_k - a_{k-1}$ е $m-$ти степен. Постапката ја продолжуваме е заклучуваме дека $a_2 - a_1 = c^2(c+1)$ е $m-$ти степен, па од $\text{NZD}(c^2, c+1) = 1$ следува дека c^2 и $c+1$ се $m-$ти степени. Меѓутоа, c не може да биде $m-$ти степен, па затоа m мора да биде парен број и уште повеќе $m = 2$. Значи, $c+1$ е точен квадрат. Конечно, ако $c+1$ е точен квадрат, тогаш и $c^2(c+1) = a_1^2 + c^3$ е точен квадрат.