

LVIII олимпијада

1. За даден природен број $a_0 > 1$ дефинираме низа $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$ таква што за секој $n \geq 0$ важи

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n}, & \text{ако } \sqrt{a_n} \text{ е цел број,} \\ a_n + 3, & \text{во спротивно.} \end{cases}$$

Определи ги сите вредности на a_0 за кои постои број A таков што $a_n = A$ за бесконечно многу вредности на n .

Решение. *Одговор:* сите природни броеви деливи со 3.

- 1) Ако за некој m важи $a_m \equiv 2 \pmod{3}$, тогаш a_m не е точен квадрат и затоа $a_{m+1} = a_m + 3$. Со индукција следува дека $a_{m+i} = a_m + 3i$, за секој $i \geq 0$, што значи дека низата строго монотонно расте, па затоа не е периодична.

- 2) Ако $a_0 \equiv 0 \pmod{3}$, тогаш сите членови на низата се деливи со 3. Нека најмалиот член на низата е $a_m = 3k$. Ако $k \geq 2$, тогаш

$$(3k-3)^2 - 3k = 9k^2 - 21k + 9 > 0,$$

па затоа првиот следен квадрат не е поголем од $(3k-3)^2$. Тоа значи дека $a_n \leq 3k-3$ за некој $n \in \mathbb{N}$, што е противречност. Според тоа, најмалиот член на низата е 3, па затоа во низата понатаму периодично се повторуваат членовите 3, 6, 9, ...

- 3) Нека $a_0 \equiv 1 \pmod{3}$ и нека a_m е најмалиот член на низата. Јасно, $3 \nmid a_m$. Да претпоставиме дека $a_m \equiv 1 \pmod{3}$, т.е. $a_m = 3k+1$. За $k > 0$ важи

$$(3k-1)^2 - (3k+1) = 9k^2 - 9k \geq 0,$$

па затоа првиот следен квадрат не е поголем од $(3k-1)^2$. Тоа значи дека $a_n \leq 3k-1$ за некој $n \in \mathbb{N}$, што е противречност. Значи, мора да важи $a_m \equiv 2 \pmod{3}$, па затоа од 1) следува дека низата не е периодична.

2. Определи ги сите функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такви што за секои реални броеви x и y важи

$$f(f(x)f(y)) + f(x+y) = f(xy). \quad (*)$$

Решение. *Одговор:* $f(x) = k(x-1)$, за $k \in \{-1, 0, 1\}$.

Прв начин. Ако во (*) ставиме $x = y = 0$ добиваме $f(f(0)^2) = 0$. Од друга страна, ако $f(a) = 0$ за некој $a \neq 1$, тогаш за $x = a$ и $y = \frac{a}{a-1}$ важи $xy = x+y$ и со замена во (*) добиваме

$$f(0) = f(f(a)f(\frac{a}{a-1})) = 0.$$

Сега, ако во (*) ставиме $y = 0$ добиваме $f(x) = 0$ за секој $x \in \mathbb{R}$ и тоа е едно решение на (*).

Понатаму, ќе сметаме дека $f \neq 0$, па од претходните разгледувања ќе следува дека

$$f(a) = 0 \text{ ако и само ако } a = 1.$$

Од $f(f(0)^2) = 0$ следува $f(0)^2 = 1$. Да забележиме дека ако функцијата f е решение на (*), тогаш и функцијата $-f$ е решение на (*). Затоа можеме да сметаме дека $f(0) = -1$. Во (*) ставаме $y = 1$ и добиваме $f(x+1) = f(x) + 1$. Сега, со индукција се докажува дека

$$f(x+n) = f(x) + n, \text{ за секој } n \in \mathbb{Z}.$$

Ќе докажеме дека функцијата f е инјекција. Нека $f(a) = f(b)$. Тогаш

$$f(a+n+1) = f(b+n) + 1, \text{ за секој } n \in \mathbb{Z}. \quad (1)$$

Земаме $n < -b$. Тогаш $(a+n+1)^2 - 4(b+n) > 0$, па затоа постојат реални броеви x и y такви што

$$x + y = a + n + 1 \text{ и } xy = b + n.$$

Понатаму, од (*) и (1) следува

$$f(f(x)f(y)) = f(b+n) - f(a+n+1) = -1,$$

а оттука $f(f(x)f(y)+1) = 0$. Сега, $f(x)f(y)+1=1$, односно $f(x) = 0$ или $f(y) = 0$, што значи $x = 1$ или $y = 1$. Но, во тој случај важи $xy = x + y - 1$, односно $a = b$.

Конечно, ако во (*) ставиме $x + y = n \in \mathbb{Z}$ добиваме

$$f(f(x)f(n-x)) = f(nx - x^2) - f(n) = f(nx - x^2 - n + 1) = f((x-1)(n-x-1)),$$

па од инјективноста на функцијата следува

$$f(x)f(n-x) = (x-1)(n-x-1). \quad (2)$$

Сега, ако во (2) ставиме $n = 0$ и $n = 1$ добиваме

$$f(x)f(-x) = -x^2 + 1 \text{ и } f(x)f(-x) - f(x) = -x^2 + 1 - (x-1),$$

од каде следува $f(x) = x - 1$. Оваа функција е решение на (*).

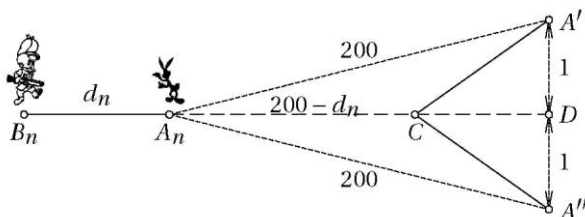
3. Ловец и невидлив зајак играат игра во рамнината. Почетните точки во рамнината на зајакот и ловецот, соодветно означени со A_0 и B_0 , се исти. По $n-1$ кругови играње, зајакот е во точката A_{n-1} , а ловецот е во точката B_{n-1} . Во n -тиот круг редоследно се случуваат следниве настани:
 - i) Зајакот неприметно се поместува во точка A_n која е на растојание 1 од точката A_{n-1} ,

- ii) Ловецот на радар отчитува точка P_n . Единствено што гарантира радарот е дека растојанието меѓу точките P_n и A_n е најмногу 1.
- iii) Ловецот се поместува во точка B_n на растојание точно 1 од точката B_{n-1} , што зајакот го гледа.

Дали ловецот секогаш, без разлика како ќе се движи зајакот и какви се извештаите на радарот, може да се движи така што ќе обезбеди по 10^9 кругови растојанието меѓу него и зајакот да биде најмногу 100?

Решение. *Одговор:* НЕ, сигналите на радарот може да бидат такви што ловецот не може да ја има саканата стратегија.

Со $d_n = \overline{A_n B_n}$ да го означиме растојанието меѓу зајакот и ловецот по n чекори. Ако $d_n \leq 100$, ќе докажеме дека со помош на радарот и малку среќа зајакот во 200 чекори може да го зголеми квадратот на растојанието од ловецот за $\frac{1}{2}$.



Да ги разгледаме точката C на полуправата $B_n A_n$ таква што $\overline{B_n C} = 200$ и точките A' и A'' на растојание 1 од правата $B_n A_n$ и растојание 200 од точката A_n (каде $\angle B_n A_n A' = \angle B_n A_n A'' > 90^\circ$). Зајакот може да ја избере една од точките A' и A'' и да направи 200 скокови кон неа. Меѓутоа, бидејќи за тоа време неговото растојание од правата $B_n A_n$ нема да е поголемо од 1, можно е сите сигнали $P_n, P_{n+1}, \dots, P_{n+200}$ да се на правата $B_n A_n$. Така, ловецот по 200 чекори стигнува во точката $B = B_{n+200}$ за која важи $\overline{B_n B} \leq 200$, при што нема начин да знае дали зајакот стигнал до точката A' или A'' . Бидејќи

$$\max\{\overline{BA'}, \overline{BA''}\} \geq \overline{CA'}$$

ниту една стратегија не му гарантира на ловецот растојание помало од $\overline{CA'}$. Со други зборови оптималната стратегија на ловецот е да оди право кон точката C . Меѓутоа, ако D е подножјето на нормалата од A' на правата $A_n B_n$, тогаш лесно се добива

$$\overline{CA'}^2 = \overline{CD}^2 + 1 = (d_n - x)^2 + 1 = x^2 + 1 + d_n^2 - 2d_n x,$$

каде $x = 200 - \sqrt{200^2 - 1}$. Од $x > \frac{1}{400}$ и $x^2 + 1 = 400x$ следува

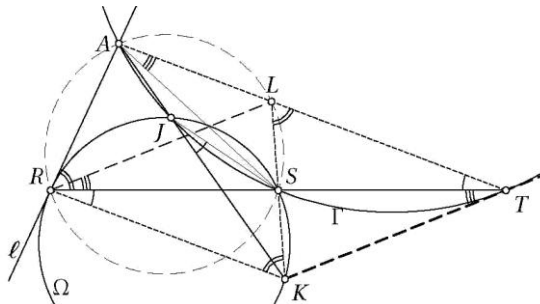
$$\overline{CA'}^2 = d_n^2 + (400 - 2d_n)x > d_n^2 + \frac{1}{2}.$$

Според тоа, со малку среќа зајакот постигнува да важи $d_{n+200}^2 > d_n^2 + \frac{1}{2}$. На овој начин по $400 \cdot 100^2 = 4 \cdot 10^6$ чекори зајакот може да му побегне на ловецот на растојание поголемо од 100, без разлика каква стратегија ќе користи ловецот.

4. Дадени се различни точки R и S на кружница Ω така што RS не е нејзин дијаметар. Нека ℓ е тангентата на кружницата Ω во точката R . Точката T е таква што S е средина на отсечката RT . Точката J на пократкиот лак RS на кружницата Ω е таква што опишаната кружница Γ на триаголникот JST ја сече правата ℓ во две различни точки. Нека A е онаа од тие две точки која е поблиска до точката R . Правата AJ повторно ја сече кружницата Ω во точката K .

Докажи дека правата KT ја допира кружницата Γ .

Решение. *Прв начин.* Од $\angle KRS = \angle KJS = \angle ATS$ следува $AT \parallel KR$. Нека L е точка симетрична на точката K во однос на S . Четириаголникот $RKTL$ е паралелограм, па затоа L лежи на правата AT . Сега од



од $\angle ARS = \angle RKS = \angle TLS$ следува дека четириаголникот $ARSL$ е тетивен, а оттука следува

$$\angle KTS = \angle LRS = \angle LAS = \angle TAS,$$

што значи дека правата KT ја допира кружницата Γ .

Втор начин. Од $\angle KRS = \angle KJS = \angle ATS$ и $\angle ARS = \angle RKS$ следува дека триаголниците ART и SKR се слични. Оттука $\frac{RT}{KR} = \frac{AT}{SR} = \frac{AT}{ST}$, што заедно со равенството $\angle ATS = \angle KRT$ дава $\triangle ATS \sim \triangle TRK$. Според тоа, $\angle KTR = \angle TAS$, па правата KT ја допира кружницата Γ .

5. Даден е природен број $N \geq 2$. Во редица се наоѓаат $N(n+1)$ фудбалери со меѓусебно различни висини. Тренерот Ванчо сака да отстрани $N(N-1)$ играчи, така што ќе остане редица со $2N$ фудбалери во која се задоволени следниве N услови:

- 1) меѓу двајцата највисоки играчи не стои никој,
- 2) меѓу третиот и четвртиот играч по висина не стои никој,
-
- N) меѓу двајцата најниски играчи не стои никој.

Докажи дека ова секогаш може да се постигне.

Решение. Да ја поделиме редицата на N групи со по $N+1$ последователни играчи и со A_i и B_i соодветно да ги означиме највисокиот и вториот највисок играч во i -тата група. Нека B_k е највисокиот од сите играчи B_1, B_2, \dots, B_n . Тренерот Ванчо ги отстранува сите играчи A_i за $i \neq k$ и сите играчи од k -тата група освен B_k . На играчите A_k и B_k им дава дресови и веќе не се осврнува на нив: тие се повисоки од сите играчи во редицата и меѓу нив не стои ниту еден играч. Остануваат уште $N-1$ група со по N играчи. Ако претходната постапка ја повтори N пати, тогаш Ванчо ја постигнува целта.

6. Подредениот пар цели броеви (x, y) го нарекуваме *примитивна точка* ако најголемиот заеднички делител на броевите x и y е 1 еднаков на 1. Нека S е конечно множество примитивни точки. Докажи дека постојат природен број n и цели броеви a_0, a_1, \dots, a_n такви што за секој точки (x, y) од S важи:

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} y + a_2 x^{n-2} y^2 + \dots + a_{n-1} x y^{n-1} + a_n y^n = 1.$$

Решение. *Прв начин.* Нека $S = \{(x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k)\}$. Доволно е да се докаже дека постои хомоген полином $P(x, y)$ таков што $P(x_i, y_i) = \pm 1$ за $i = 1, 2, \dots, k$. Навистина, тогаш $P(x_i, y_i)^2 = 1$ за секој i . Понатаму, бидејќи за секој хомоген полином P важи $P(-x, -y) = \pm P(x, y)$ можеме да сметаме дека $(x_i, y_i) \neq (-x_j, -y_j)$ за секои i, j , т.е. дека никои две точки на множеството S не лежат на иста права низ координатниот почеток.

Ги разгледуваме хомогените полиноми

$$G_i(x, y) = \prod_{j \neq i} (y_j x - x_j y).$$

Степенот на овие полиноми е $k-1$ и притоа важи $G_i(x_j, y_j) = 0$ за $j \neq i$ и $G_i(x_i, y_i) = c_i \neq 0$. Нека $c = \text{NZS}(c_1, \dots, c_k)$. Постојат линеарни хомогени полиноми E_i такви што $E_i(x_i, y_i) = 1$ за $i = 1, 2, \dots, k$. Саканиот полином P ќе го дадеме во обликот

$$P(x, y) = F_c(x, y) - \sum_{i=1}^k b_i E_i(x, y)^{m-k+1} G_i(x, y),$$

каде F_c е хомоген полином од некој степен $m \geq k-1$ таков што $F_c(x_i, y_i) \equiv 1 \pmod{c}$ за секој i , а $b_i = \frac{F_c(x_i, y_i) - 1}{c_i} \in \mathbb{Z}$ се соодветните константи. Потребно е само да се докаже дека ваков полином F_c постои.

Лема. За секој природен број c постои хомоген полином Q_c таков што за секоја примитивна точка (x, y) важи $Q_c(x, y) \equiv 1 \pmod{c}$.

Доказ. Ако $c = p^a$ е степен на прост број, може да се земе

$$Q_c(x, y) = \begin{cases} (x^2 + xy + y^2)^{\varphi(c)}, & p = 2 \\ (x^{p-1} + y^{p-1})^{\varphi(c)}, & p > 2. \end{cases}$$

Нека $c = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_r^{a_r}$ е каноничното разложување на бројот c . Бидејќи броевите $\frac{c}{p_i^{a_i}}, i = 1, 2, \dots, r$ се заемно прости, постојат цели броеви A_1, \dots, A_r ,

такви што $\sum_{i=1}^r A_i \frac{c}{p_i^{a_i}} = 1$, а тогаш можеме да земеме

$$Q_c(x, y) = \sum_{i=1}^r A_i \frac{c}{p_i^{a_i}} Q_{p_i^{a_i}}(x, y) \equiv \sum_{i=1}^r A_i \frac{c}{p_i^{a_i}} = 1 \pmod{c}. \blacksquare$$

Втор начин. Нека $S = \{(x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k)\}$. Тврдењето ќе го докажеме со индукција по k . Случајот $k = 1$ е тривијален. Нека $k \geq 2$. Според индуктивната претпоставка постојат хомогени полиноми $Q(x, y)$ и $R(x, y)$ со целобројни коефициенти такви што

$$Q(x_i, y_i) = 1 \text{ за } i \neq k-1 \text{ и } R(x_i, y_i) = 1 \text{ за } i \neq k, (1 \leq i \leq k).$$

Бараниот полином $P(x, y) = \sum_j a_j x^{n-j} y^j$ го бараме во облик

$$P(x, y) = F(Q(x, y), R(x, y)),$$

каде $F(u, v)$ е некој хомоген полином. Ако $Q(x_{k-1}, y_{k-1}) = a$ и $R(x_k, y_k) = b$, тогаш важи

$$P(x_i, y_i) = \begin{cases} F(1, 1), & i = 1, 2, \dots, k-2 \\ F(a, 1), & i = k-1 \\ F(1, b), & i = k. \end{cases}$$

Значи, доволно е да докажеме дека постои полином $F \in \mathbb{Z}[x, y]$ таков што

$$F(1, 1) = F(a, 1) = F(1, b) = 1.$$

Сметаме дека $|b| > 1$, а во спротивно ќе земеме

$$F(x, y) = (x - y)(x - a)(x + y)^2 + y^4.$$

Запишуваме $F(x, y) = y^m f(\frac{x}{y})$, каде $f \in \mathbb{Z}[x]$ и $m = \deg f$. Треба да важи

$$f(1) = f(a) = 1 \text{ и } f(\frac{1}{b}) = \frac{1}{b^m},$$

па доволно е да најдеме полином $g \in \mathbb{Z}[x]$ со степен $m-2$ таков што

$$f(t) = (t-1)(t-a)g(t) + 1, \text{ при што важи } g(\frac{1}{b}) = \frac{1}{b^{m-2}} \cdot \frac{b^m-1}{(b-1)(ab-1)}.$$

Ваков полином g постои ако и само ако $(b-1)(ab-1)$ е делител на $b^m - 1$, па така може да се земе $m = \varphi(|b-1| \cdot |ab-1|)$ и индукцијата е готова.