Момир Поленаковиќ

ПРИМЕНА НА СИСТЕМ ЛИНЕАРНИ НЕРАВЕНКИ ВО НОСЕЊЕТО БИЗНИС ОДЛУКИ

1. Вовед

Во бизнисот, но и во секојдневниот живот луѓето постојано донесуваат **одлуки**. Некои одлуки значително влијаат на животот на луѓето. Особено менаџерите секојдневно донесуваат одлуки, со кои треба да обезбедат успешна работа на нивните фирми. Одлуките може да се донесуваат на среќа, на база на претходното искуство, но може и да се користат математички методи кои ќе овозможат добивање на одлуки кои ќе базираат на оптимално решение на проблемот.

Под **оптимално решение** се подразбира најдоброто можно решение кое може да се реализира во дадените услови. За да се добие оптимално решение треба да се користи математички модел. Со примената на одредени математички законитости се решаваат ваквите модели при што се овозможува добивање на најдоброто можно решение. Многу често во решавањето на овие примери при изнаоѓањето на оптималното решение се користат **линераните равенки и неравенки.**

Линеарните равенки и неравенки се една многу широка област од математиката. Тие може да се решаваат со аналитички методи, но и со графичка метода, која тука и се применува. Графикот на линеарната функција е права. Бидејќи правата е наполно определена со две точки што и припаѓаат, за да се нацрта графикот на линеарната функција треба да се определат координатите на две точки што и припаѓаат. Според тоа, графичкото решение на линеарна равенка со две непознати е права. Графичко решение на линеарна неравенка со две непознати е полурамнина.

Примената на линеарните равенки и неравенки во бизнисот најчесто има главна цел да се максимизира добивката (профитот) на фирмата, или да се минимизираат трошоците (загубите) во работењето на фирмата. Оваа постапка уште се нарекува и оптимизација на системот, а методата која ги користи линеарните равенки и неравенки се вика **линеарно програмирање**.

Двата клучни елементи на линеарното програмирање се: (1) **функцијата на целта** и (2) **ограничувањата** во согласност со кои треба да се најде оптималното решение на проблемот.

Под **оптимално решение** се подразбира најдоброто можно решение кое дава **максимален резултат**, доколку станува збор за профит, добивка или искористување на капацитетите, односно, **минимален резултат** кога станува збор за загуба, трошок, шкарт и сл.

При формулирање на проблем од линеарното програмирање првиот чекор е да се определат променливите кои ќе овозможат да се донесе оптимално решение. Следниот чекор е да се определат функцијата на целта и ограничувачките фактори согласно дефинираните променливи. Потоа се решава математичкиот модел и се добива оптималното решение. На крајот, добиеното решение се спроведува во практиката. Еве како тоа изгледа во практиката.

ПРИМЕР 1

Во едно селско домаќинство за исхрана на 40 кокошки (носилки) дневниот оброк мора да содржи најмалку: 18 единици од хранливата состојка **A** **,** 16 единици од хранливата состојка **B**, 24 единици од хранливата состојка **C** **.**

Се користат два вида на храна: $\mathbf{H_1}$ и $\mathbf{H_2}$**.** Содржината на хранливите состојки (во 1 kg) е дадена во табелата.

Хранливи состојки	**A**	**B**	**C**
$\mathbf{H_1}$	6	2	2
$\mathbf{H_2}$	2	4	12

Потребно е да се состави најефтин дневен оброк кој ќе ги задоволува потребните хранливи материи, ако 1 kg од храната $\mathbf{H_1}$ чини 8 денари, а од храната $\mathbf{H_2}$ чини 12 денари.

Решение: Нека со $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ се означат: $\mathbf{x}$ - количина од храната $\mathbf{H_1}$, $\mathbf{y}$ - количина од храната $\mathbf{H_2}$ пришто $\mathbf{x}, \mathbf{y} \geq 0$ (бидејќи станува збор за количество храна).

Вкупниот трошок за храна за 1 ден би бил:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = 8\mathbf{x} + 12\mathbf{y}$$

Бидејќи се бара најефтин оброк, треба да се најде минималната вредност на оваа функција, која во исто време ги задоволува и условите за потребите од хранливи состојки. Овде мора да се напомене дека **X** е точката со координати (**x**,**y**), во која тоа ќе биде задоволено.

За задоволување на хранливите материи **A** од горе наведените услови се добива следната неравенка:

I: $6\mathbf{x} + 2\mathbf{y} \geq 18$

II: $2\mathbf{x} + 4\mathbf{y} \geq 16$

III: $2\mathbf{x} + 12\mathbf{y} \geq 24$ $\mathbf{2x + 12y \geq 24}$

Со решавањето на овие три неравенки како систем од три линеарни неравенки со две непознати се добива множеството решенија што истовремено ги задоволуваат сите три неравенки.

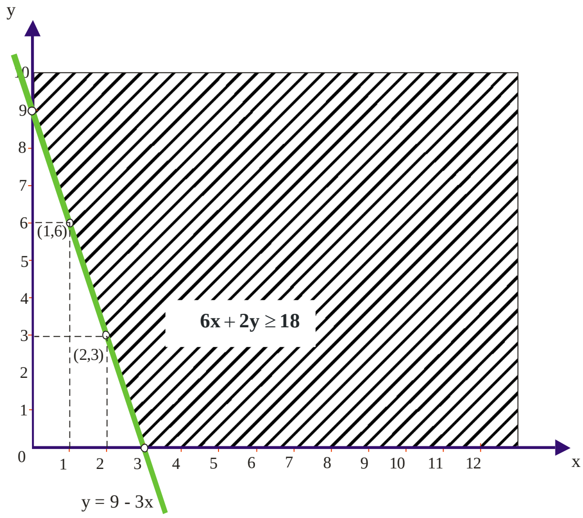
За таа цел, секоја неравенка се решава графички пришто добиените решенија се претставени во ист координатен систем. Пред графички да се претставаат неравенките, треба само да се напомене дека заради условот од задачата $\mathbf{x}, \mathbf{y} \geq 0$**,** решението може да биде лоцирано само во првиот квадрант од координатниот систем.

Со графичко решавање на функцијата $\mathbf{y}=9-3\mathbf{x}$ се добива права која ја дели рамнината на две полурамнини. Решение на неравенката $\mathbf{y}\geq 9-3\mathbf{x}$ е множеството точки од едната полурамнина на која е разделена рамнината со правата $\mathbf{y}=9-3\mathbf{x}$

За да се определи полурамнината се зема дека **y** = 0 и се заменува:

$$0\geq 9-3\mathbf{x}$$
$$3\mathbf{x}\geq 9\,/:3$$
$$\mathbf{x}\geq 3$$

Значи, решението на неравенката $6\mathbf{x}+2\mathbf{y}\geq 18$ е полурамнината во која $\mathbf{x}\geq 3$ (црт 1).



Црт 1. Графичко решение на неравенката $6\mathbf{x}+2\mathbf{y}\geq 18$

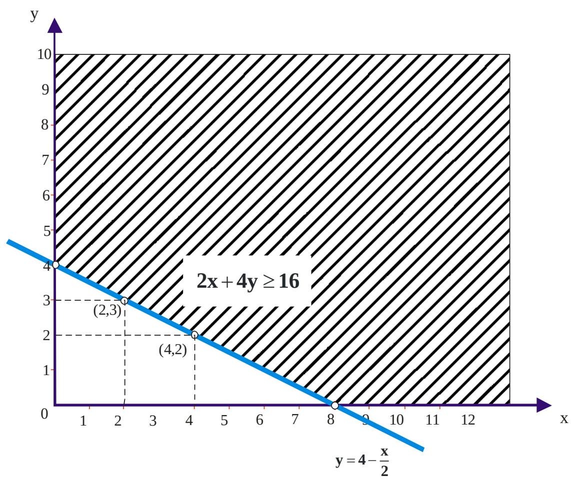
На сличен начин се решава и втората неравенка.

II: $2\mathbf{x}+4\mathbf{y}\geq 16$

$$4\mathbf{y}\geq 16-2\mathbf{x}\,/:2$$
$$2\mathbf{y}\geq 8-\mathbf{x}$$
$$\mathbf{y}\geq\frac{8-\mathbf{x}}{2}$$
$$\mathbf{y}\geq 4-\frac{\mathbf{x}}{2}$$

Се определуваат координатите на две точки што припаѓаат на графикот на функцијата $y=4-\dfrac{x}{2}$ и потоа се исцртува полурамнината (црт. 2).

x	2	4
y	3	2



Црт 2. Графичко решение на неравенката $2\mathbf{x}+4\mathbf{y}\geq 16$

III: $2\mathbf{x}+12\mathbf{y}\geq 24$

Аналогно на претходните две неравенки, графичкото решение на неравенката

$$2\mathbf{x}+12\mathbf{y}\geq 24$$

е претставено на цртежот 3.

$$2\mathbf{x}+12\mathbf{y}\geq 24$$

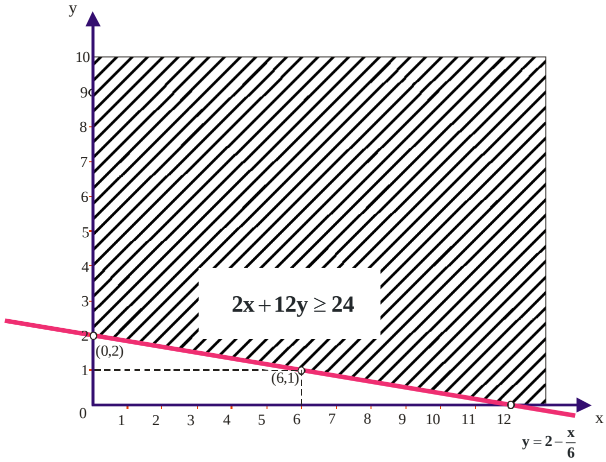
$$12\mathbf{y}\geq 24-2\mathbf{x}\ /:12$$

$$\mathbf{y}\geq \frac{24-2\mathbf{x}}{12}$$

$$\mathbf{y}\geq 2-\frac{\mathbf{x}}{6}$$

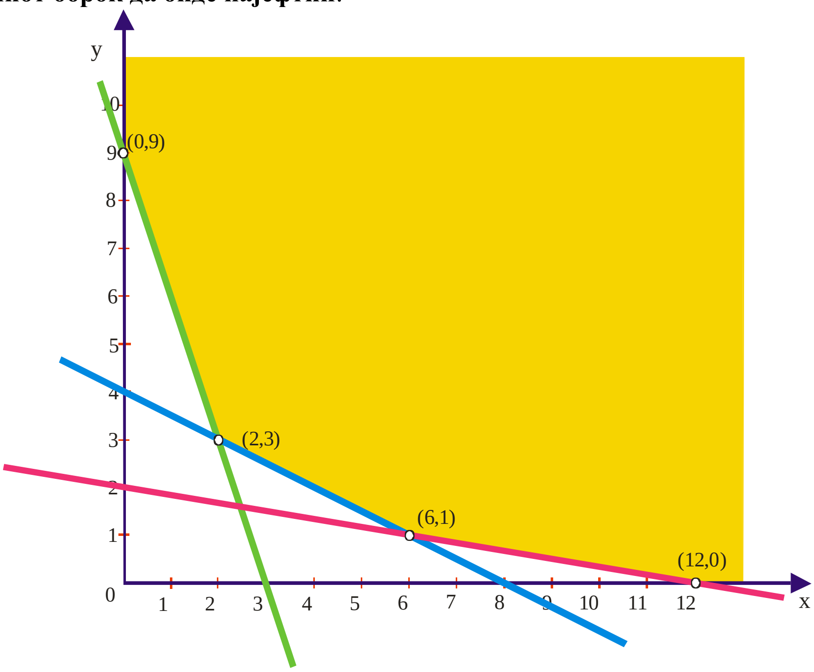
Се определуваат координатите на две точки што припаѓаат на графикот на функцијата $\mathbf{y}=2-\frac{\mathbf{x}}{6}$ (црт. 3).

x	0	6
y	2	1



Црт 3. Графичко решение на неравенката $2\mathbf{x}+12\mathbf{y}\geq 24$

Ако графиците на линеарните неравенки се претстават во иста координатна рамнина ќе се добие пресекот од нивните множества решенија (црт. 4). Тоа е множеството од решенија што ги задоволуваат потребните хранливи состојки **A**, **B** и **C** на дневниот оброк. Останува уште да да биде исполнет и последниот услов: **дневниот оброк да биде најефтин**.



Црт. 4. Област на дозволени решенија за системот неравенки

Оптималното решение се добива доколку оброкот е најефтин, па затоа се црта график на функцијата $\mathbf{F}(\mathbf{X}) = 8\mathbf{x} + 12\mathbf{y}$ со која се претставени фамилија од паралелни прави, кои се добиваат за конкретни вредности на **F**. Ако оваа функција се изедначи со нула се добива точно правата која поминува низ координатниот почеток.

$$8\mathbf{x} + 12\mathbf{y} = 0$$
$$8\mathbf{x} = -12\mathbf{y}$$
$$\mathbf{y} = -\frac{8}{12}\mathbf{x}$$
$$\mathbf{y} = -\frac{2}{3}\mathbf{x}$$

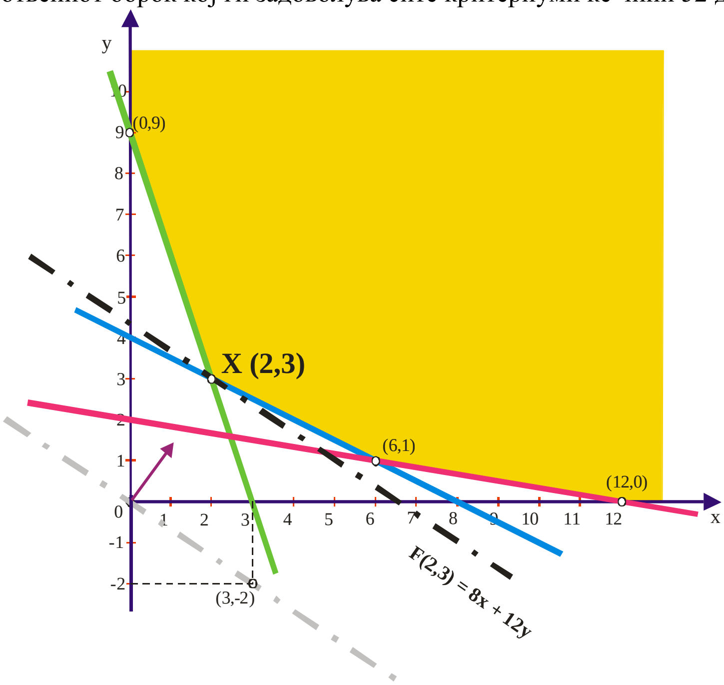
x	0	3
y	0	-2

Со нејзино паралелно поместување низ првиот квадрант ќе се одреди најблиската заедничка точка на правата со множеството решенија кои претходно беа добиени. Во конкретниот случај тоа е точката X со координати (2,3). Значи, оптималното решение е точката X (2,3) и е претставено на црт. 5.

Тоа укажува дека дневниот оброк за 40 кокошки треба да се подготви со мешавина од 2kg од храната $\mathbf{H_1}$ и 3 kg од храната $\mathbf{H_2}$. Во тој случај ќе бидат задоволени потребите од хранливи состојки A, B и C, а оброкот ќе биде најефтин.

$$\mathbf{F}(2,3) = 8 \cdot 2 + 12 \cdot 3 = 16 + 36 = 52 \ \textbf{денари.}$$

Така подготвениот оброк кој ги задоволува сите критериуми ќе чини 52 денари.



Црт. 5 Оптимално решение на задачата **X (2,3)**

ПРИМЕР 2

Во една фабрика се произведуваат два вида на пенкала (метални и пластични). Профитот од едно продадено метално пенкало е 7 денари, а од едно продадено пластично пенкало е 5 денари. За да се произведе едно метално пенкало потребни се четири минути, а за едно пластично пенкало потребни се две минути. Капацитетот на машината на која се произведуваат двата вида на пенкала (едните па другите) за еден месец е 300 часа (18000 минути). За фирмата да не работи со загуба потребно е да продава најмалку по 1000 метални и 2000 пластични пенкала месечно. Колку метални, а колку пластични пенкала треба да се произведат за еден месец за да се оствари најголем профит?

Решение: Нека со **x** и **y** ги означиме: **x** – број на произведени метални пенкала за еден месец, **y** – број на произведени пластични пенкала за еден месец, пришто $\mathbf{x}, \mathbf{y} \geq 0$

Вкупниот профит кој би се остварил во фабриката за еден месец би бил:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 7\mathbf{x} + 5\mathbf{y}$$

Бидејќи во конкретниот пример се бара најголем остварен профит за еден месец, потребна е максималната вредност на оваа функција која во исто време ќе ги задоволува останатите услови (ограничувања) на задачата. Тие ограничувања се дадени со следните неравенки:

I: $4\mathbf{x} + 2\mathbf{y} \leq 18000$

II: $\mathbf{x} \geq 1000$

III: $\mathbf{y} \geq 2000$

Со решавањето на овие три неравенки се добива множеството решенија што истовремено ги задоволуваат сите три неравенки.

За таа цел, секоја неравенка се решава графички и се претставува во ист координатен систем. Заради условот од задачата $\mathbf{x}, \mathbf{y} \geq 0$, решението може да биде лоцирано само во првиот квадрант од координатниот систем.

I: Со решавање на првата неравенка се добива:

$$4\mathbf{x} + 2\mathbf{y} \leq 18000$$
$$2\mathbf{y} \leq 18000 - 4\mathbf{x} \ /:2$$
$$\mathbf{y} \leq 9000 - 2\mathbf{x}$$

Се определува графикот на правата $\mathbf{y} = 9000 - 2\mathbf{x}$

X	0	1000	2000
Y	9000	7000	5000

Со заменување на **y** = 0 се определува насоката на полурамнината:

$$0 \leq 9000 - 2\mathbf{x}$$
$$2\mathbf{x} \leq 9000 \ /:2$$
$$\mathbf{x} \leq 4500$$

Аналогно се решаваат и останатите две неравенки **x** ≥ 1000 и **y** ≥ 2000. Ако графиците на трите линеарни неравенки се претставaт во иста координатна рамнина се добива пресекот од нивните множества решенија (црт. 6). Тоа е множеството од решенија што ги задоволуваат условите кои произлегуваат од ограничувањата од капацитетите на машините и од барањата на пазарот.

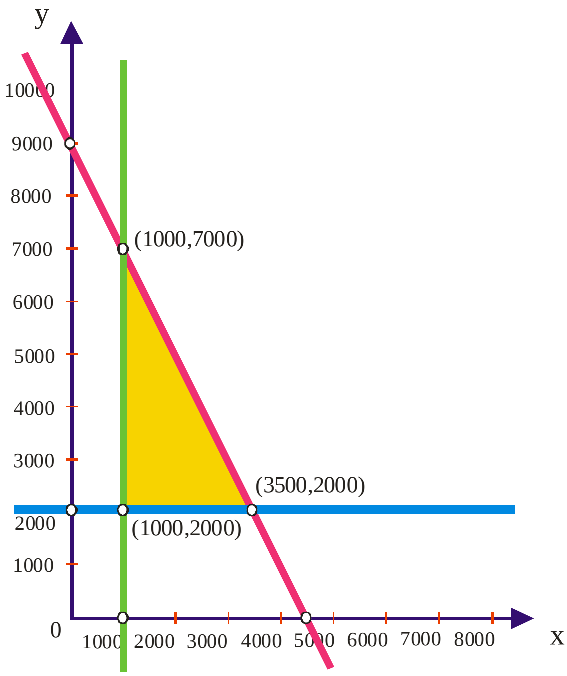
Оптималното решение се добива во услови кога фабриката остварува максимален профит. Затоа се црта графикот на функцијата

$$\mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 7\mathbf{x} + 5\mathbf{y}$$

преку фамилија од паралелни прави кои се добиваат за конкретни вредности на **F**. Ако оваа функција ја изедначи со нула, т.е. **F** = 0 се добива точно правата која поминува низ координатниот почеток,

$$7\mathbf{x} + 5\mathbf{y} = 0$$

x	0	2500
y	0	-3500

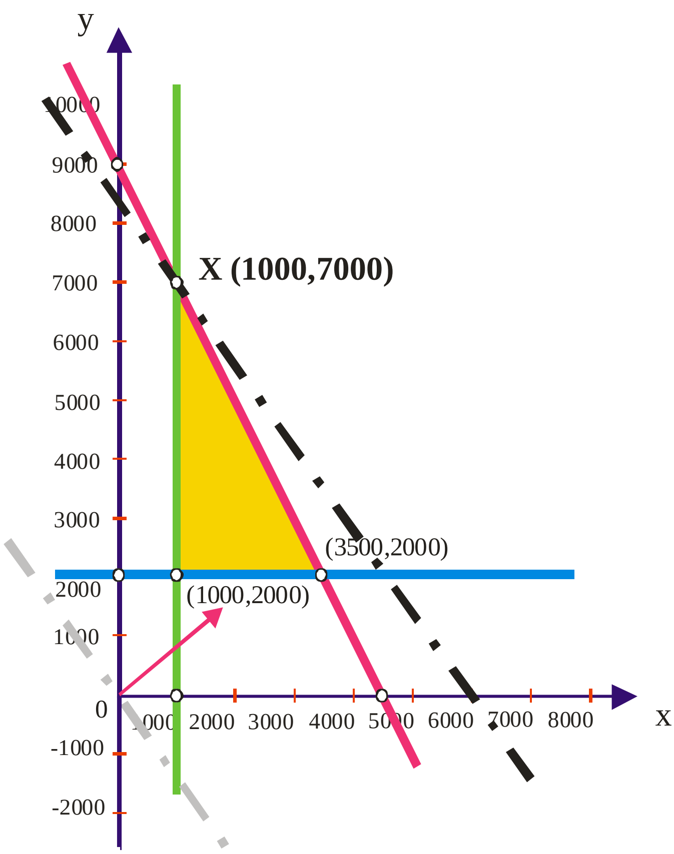


Црт. 6. Област на дозволени решенија за системот неравенки

Со нејзино паралелно поместување низ првиот квадрант се одредува најдалечната заедничка точка на правата со множеството решенија кои претходно се добија. Во конкретниот случај тоа е точката X со координати (1000, 7000) претставена на црт. 7.

Фабриката ќе оствари најголем профит доколку произведе 1000 метални пенкала и 7000 пластични пенкала, притоа профитот ќе изнесува

$$\mathbf{F}(1000,7000) = 7\cdot 1000 + 5\cdot 7000 = 7000 + 35000 = 42000 \text{ } \textbf{денари.}$$



Црт. 7. Оптимално решение на задачата **X (**1000**,**7000**)**

3. ЗАКЛУЧОК

Првите истражувања на линеарните модели му се препишуваат на научникот **Минковски** во почетокот на 19 век. Линеарното програмирање како математички модел за првпат е развиен за време на Втората светска војна со цел да се планираат операциите на војската и да се редуцираат трошоците на армијата, а истовремено да се зголемат загубите на непријателот.

За време на Втората светска војна во Англиската армија било формирано „Одделние за анализа на операциите“ кое имало за цел да изврши распоредување на радарите на таков начин што ќе бидат покриени со радарскиот сигнал сите крајбрежни точки од Англиската територија. На тој начин сите германски авиони кои ќе се упателе кон англиската територија би биле фатени со радарски сигнал. За да се изврши целосно покривање на крајбрежната територија со радарски сигнал требало да се постават многу радари кои во тој момент Англија ги немала. Затоа со користење на линеарно програмирање направен е оптимален распоред на радарските системи кои успеале да бидат така распоредени да го покријат целокупниот простор на Англија.

Овие методи биле чувани како воена тајна до 1947 година. По војната многу фирми почнале да ги применуваат овие методи во секојдневното работење.

Најзаслужни за разработката на овие методи биле Леонид Канторович и Тјалинг Копманс кои покажале како со помош на методот на линеарното програмирање може да се решаваат класичните економски проблеми.

Leonid Vitaliyevich Kantorovich
1912 - 1986

Медалот на Нобеловата награда за економија

Tjalling C. Koopmans
1910 - 1985

Како заслуга за својата работа Кантропович и Копманс во 1975 година ја добиваат **Нобеловата награда за економија** за нивната теорија за оптимално распоредување на ресурсите во којашто линеарното програмирање имало главна улога.

Линеарните равенки и неравенки, т.е. линеарното програмирање имаат огромна примена во секојдневното работење и живеење. Во следната табела се прикажани неколку примери на успешна примена на линеарното програмирање, добиени од интернет.

Фирма	**Примена**	**Придобивка**
ДЕЛ компјутери	Оптимизирање на залихи (2004)	Намалување на залихите за 40 %
УПС	Реорганизација на системот за испорака на поштенски пратки (2003)	Заштеда од 87 милиони долари
Хјулит пакард	Редизајн на монтажната лента (1998)	Зголемување на профитот за 280 милиони долари
Делта аирлејнс	Оптимизирање на редот на летање (1993)	Заштеда од 100 милиони долари
Полициски одел на Сан Франциско	Оптимален распоред на полициски патроли (1989)	Заштеда од 11 милиони долари

Од претходното може да се заклучи дека математиката има огромна апликативна вредност, како во секојдневниот живот така и во бизнисот. Не случајно се вели дека математиката е кралица на науките. Ова се однесува и на употребата на математичките модели при донесувањето на одлуките во бизнисот, кои резултираат со максимален профит и минимални загуби .

Презентирана беше употреба на линеарните равенки и неравенки, нивно графичко решавање, кои во еден систем се нарекува линеарно програмирање. Посебно беше истакнато користењето на линеарното програмирање во деловното одлучување со цел добивање на оптимални решенија на дадени проблеми. Акцентот беше ставен на графичкото решавање на две конкретни задачи од малото стопанство. По решавањето на првата задача точно беше определена количината од двата типа храна што го чинат дневниот оброк на 40 кокошки. Притоа се внимаваше да биде задоволена дневната потреба од соодветните хранливи состојки по најниска цена. Во втората задача е претставен оптимален план на производство со цел фирмата да оствари максимален профит.

За огромното значење на оваа проблематика во бизнис круговите говори и Нобеловата награда за економија која ја добиле основоположниците на оваа метода во 1975 година. Тие го дефинираа општиот проблем со кој се опишуваат и решаваат овие појави.

Математичките изрази и на функцијата на целта и на ограничувањата во општ случај се линеарни функции зададени со:

(1) $$\mathbf{F(X) = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n}$$

(2) $$\begin{aligned} &\mathbf{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n\ (\geq = \leq)\ a_{10}} \\ &\mathbf{a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n\ (\geq = \leq)\ a_{20}} \\ &\mathbf{\ldots\ldots\ldots \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots} \\ &\mathbf{a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n\ (\geq = \leq)\ a_{m0}} \\ \\ &\mathbf{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \geq 0} \end{aligned}$$

Во случајот n = 2, како што беа разработените примери моделот изгледа:

(1) $$\mathbf{F(X) = a_1x_1 + a_2x_2}$$

(2) $$\begin{aligned} &\mathbf{a_{11}x_1 + a_{12}x_2\ (\geq = \leq)\ a_{10}} \\ &\mathbf{a_{21}x_1 + a_{22}x_2\ (\geq = \leq)\ a_{20}} \\ &\mathbf{\ldots\ldots\ldots} \\ &\mathbf{a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2\ (\geq = \leq)\ a_{m0}} \\ \\ &\mathbf{x_1, x_2 \geq 0} \end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

- http://www.mathwarehouse.com/algebra/linear_equation/linear-inequality.php
- http://www.mathcentre.ac.uk/students.php/all_subjects/algebra/quadratic_inequalities/resources/25
- http://www.purplemath.com/modules/ineqgrph.htm
- http://www.algebra-online.com/index.htm

- http://www.nobelprizes.com
- http://www.egwald.com/operationsresearch/lpgraphical.php
- http://www.richland.edu/james/ictcm/2006/
- Z. Usiskin at all.: Transition Mathematics, *Scott, Foresman*, Glenview, 1992
- Ј. Стефановски, и други: Математика – осмо одделение, *Алби*, Скопје, 2006
- J. Petric, L. Sarenac, Z. Kojic: Operaciona istrazivanja I, *Naucna knjiga*, Beograd, 1984