

Х олимпијада

1. Докажи дека постои точно еден триаголник чии должини на страни се последователни природни броеви и еден од аглиите е два пати поголем од еден од преостанатите два агли.

Решение. I начин. Од синусната теорема имаме $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$ и како

$$\beta = 2\alpha, \gamma = \pi - 3\alpha, \text{ добиваме } \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin 2\alpha} = \frac{c}{\sin 3\alpha}. \text{ Затоа } b > a.$$

Воведуваме ознака $\frac{a}{\sin \alpha} = \lambda$. Тогаш од равенствата

$$a^2 = \lambda^2 \sin^2 \alpha, b^2 = \lambda^2 \sin^2 2\alpha, c^2 = \lambda^2 \sin^2 3\alpha$$

добиваме

$$b^2 - a^2 = \lambda^2 (\sin^2 2\alpha - \sin^2 \alpha), ac = \lambda^2 \sin \alpha \sin 3\alpha.$$

Од идентитетот

$$\sin^2 2\alpha - \sin^2 \alpha = \sin \alpha \cdot \sin 3\alpha,$$

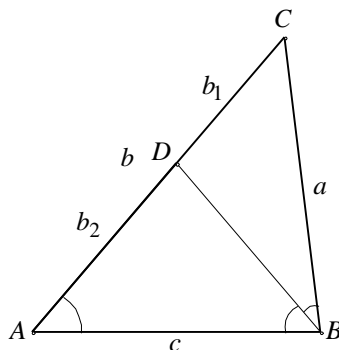
следува дека за бараниот триаголник е исполнето равенството $b^2 - a^2 = ac$ или $b^2 = a(a+c)$. Според тоа, можни се следните случаи:

- 1) $a = n, b = n+1, c = n+2$. Тогаш $(n+1)^2 = n(2n+2)$, т.е. $n^2 - 1 = 0$, од каде што $n = 1$ и $a = 1, b = 2, c = 3$, т.е. се добива дегенериран триаголник.
- 2) $a = n, b = n+2, c = n+1$. Тогаш $(n+2)^2 = n(2n+1)$, т.е. $n = 4$ и $a = 4, b = 6, c = 5$, и тоа е решение на задачата.
- 3) $c = n, a = n+1, b = n+2$, од каде што $n^2 - n + 3 = 0$, а оваа равенка нема целобројни решенија.

Останува да докажеме дека триаголникот со должини на страни $a = 4, b = 6, c = 5$ ги задоволува условите на задачата. Ќе покажеме дека $\beta = 2\alpha$. Од косинусната теорема имаме $\cos \beta = \frac{1}{8}, \cos \alpha = \frac{3}{4}$ па затоа $\cos 2\alpha = \cos \beta$, т.е. $\beta = 2\alpha$.

II начин. Нека $b > a$. Повлекуваме симетрала BD на аголот β и воведуваме ознаки $\overline{CD} = b_1$ и $\overline{DA} = b_2$. Тогаш $\triangle ABC \sim \triangle BDC$ и заради тоа $\frac{c}{b_2} = \frac{a}{b_1} = \frac{b}{a}$, од каде што добиваме $c = \frac{bb_2}{a}, a = \frac{bb_1}{a}$. Ако ги собереме последните две равенства добиваме

$$(b_1 + b_2) \frac{b}{a} = \frac{b^2}{a} = c + a$$



Црпй. 10.1.

каде $c + a$ е цел број.

Според условот на задачата, должините на страните мора да бидат последователни цели броеви, па затоа $b = a + 1$ или $b = a + 2$.

1) $b = a + 1$, $\frac{b^2}{a} = \frac{a^2 + 2a + 1}{a} = a + 2 + \frac{1}{a}$, па затоа $a = 1, b = 2, c = 3$, и овој триаголник е дегенериран.

2) $b = a + 2$, $\frac{b^2}{a} = \frac{a^2 + 4a + 4}{a} = a + 4 + \frac{4}{a}$, па затоа $a \mid 4$, т.е. $a = 1$ или $a = 2$ или $a = 4$.

Ако $a = 1$, тогаш $b = 3$ и $c = \frac{b^2}{a} - a = 8$, а триаголник со такви страни не постои.

Ако $a = 2$, тогаш $b = 4$ и $c = 6$, и овој триаголник е дегенериран.

Ако $a = 4$, тогаш $b = 6$ и $c = 5$, што е решение на задачата.

2. Најди ги сите природни броеви x чиј производ на цифри (во декаден запис) е еднаков на $x^2 - 10x - 22$.

Решение. Бидејќи производот на цифрите е ненегативен добиваме

$$x^2 - 10x - 22 \geq 0,$$

од што следува

$$x \geq 5 + \sqrt{47} > 11.$$

Понатаму, производот на цифрите на секој природен број не е поголем од самиот број. Имено, за секој $x = \overline{a_1 a_2 \dots a_n}$, важи

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n \leq a_1 \cdot 9^{n-1} \leq a_1 \cdot 10^{n-1} + a_2 \cdot 10^{n-2} + \dots + a_n = x.$$

Според тоа

$$x^2 - 10x - 22 \leq x,$$

од што следува

$$x \leq \frac{11}{2} + \frac{\sqrt{209}}{2} < 13.$$

Значи бројот x ги задоволува неравенствата $11 < x < 13$, па единствена можност е $x = 12$. Со непосредна проверка се уверуваме дека бројот 12 ги задоволува условите на задачата.

3. Даден е системот равенки

$$ax_1^2 + bx_1 + c = x_2$$

$$ax_2^2 + bx_2 + c = x_3$$

.....

$$ax_{n-1}^2 + bx_{n-1} + c = x_n$$

$$ax_n^2 + bx_n + c = x_1$$

каде $a, b, c \in \mathbb{R}$ и $a \neq 0$. Докажи

а) ако $(b-1)^2 - 4ac < 0$, тогаш системот нема реално решение;

б) ако $(b-1)^2 - 4ac = 0$, тогаш системот има точно едно реално решение;

в) ако $(b-1)^2 - 4ac > 0$, тогаш системот има повеќе од едно реално решение.

Решение. Нека $y_k = x_{k+1} - x_k$, $i = 1, 2, \dots, n$, $x_{n+1} = x_1$. Тогаш

$$y_k = ax_k^2 + (b-1)x_k + c \text{ и } \sum_{k=1}^n y_k = 0$$

а) Ако $(b-1)^2 - 4ac < 0$, тогаш полиномот $ax^2 + (b-1)x + c$ нема реални корени и прима вредности со ист знак, т.е. $y_k < 0$ или $y_k > 0$, за секој $x \in \mathbb{R}$,

па според тоа $\sum_{k=1}^n y_k \neq 0$. Затоа системот нема реални решенија.

б) Ако $(b-1)^2 - 4ac = 0$, полиномот $ax^2 + (b-1)x + c$ има еден единствен корен и при тоа или сите $y_k \leq 0$ или сите $y_k \geq 0$, за секој $x \in \mathbb{R}$. Бидејќи

$$\sum_{k=1}^n y_k = 0 \text{ добиваме}$$

$$y_k = ax_k^2 + (b-1)x_k + c = 0, \text{ за } k = 1, 2, \dots, n, \text{ и } x_1 = x_2 = \dots = x_n = x_0,$$

каде што x_0 е единственото решение на равенката $ax^2 + (b-1)x + c = 0$. Значи, во овој случај системот има единствено решение $x_k = x_0$, $k = 1, 2, \dots, n$.

в) Ако $(b-1)^2 - 4ac > 0$, тогаш системот има барем две различни решенија, $x_k = x'_0$ и $x_k = x''_0$, каде x'_0, x''_0 се решенија на равенката $ax^2 + (b-1)x + c = 0$.

4. Докажи дека во секој тетраедар постои тема, такво што со рабовите кои излегуваат од него може да се конструира триаголник.

Решение. Нека $ABCD$ е дадениот тетраедар и нека AB е работ со најголема должина. Тогаш

$$(\overline{AC} + \overline{AD} - \overline{AB}) + (\overline{BC} + \overline{BD} - \overline{BA}) = (\overline{AC} + \overline{CB} - \overline{AB}) + (\overline{AD} + \overline{DB} - \overline{AB}) > 0.$$

Значи, $\overline{AC} + \overline{AD} > \overline{AB}$ или $\overline{BC} + \overline{BD} > \overline{BA}$. Според тоа, од рабовите AC, AD, AB или од рабовите BC, BD, BA се формира триаголник (останатите неравенства за триаголник се исполнети).

5. Нека $a > 0$ е реален број и $f(x)$ е реална функција дефинирана за секој $x \in \mathbb{R}$ таква што

$$f(x+a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - (f(x))^2}, \text{ за секој } x \in \mathbb{R}.$$

а) Докажи дека функцијата f е периодична, т.е. дека постои реален број $b > 0$ таков што за секое $f(x+b) = f(x)$, за секој $x \in \mathbb{R}$.

б) За $a=1$ најди пример на таква функција f , $f \neq \text{const}$.

Решение. а) За функцијата f исполнето е

$$\begin{aligned} f(x+2a) &= f[(x+a)+a] = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x+a) - [f(x+a)]^2} \\ &= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - [f(x)]^2} - \left(\frac{1}{4} + \sqrt{f(x) - [f(x)]^2} + f(x) - [f(x)]^2 \right) \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - f(x) + [f(x)]^2} = \frac{1}{2} + |f(x) - \frac{1}{2}|. \end{aligned}$$

Но, бидејќи

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x-a) - [f(x-a)]^2} \geq \frac{1}{2}$$

тогаш $f(x+2a) = f(x)$, т.е. $b = 2a$.

б) За $a=1$ ($b=2$) дадениот услов го задоволува, на пример периодичната непрекината функција

$$f(x) = \frac{1}{2}(1 + |\cos \frac{\pi x}{2}|).$$

6. Нека $n \in \mathbb{N}$. Пресметај го збирот

$$\left[\frac{n+1}{2} \right] + \left[\frac{n+2}{2^2} \right] + \left[\frac{n+2^2}{2^3} \right] + \dots + \left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}} \right] + \dots$$

Решение. I начин. Прво ќе го докажеме идентитетот

$$\left[x + \frac{1}{2} \right] = [2x] - [x]. \quad (1)$$

Доказ. Секој реален број x може да се запише во облик $x = k + \alpha$ или $x = k + \frac{1}{2} + \alpha$ каде што $k \in \mathbb{Z}$ и $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$.

Ако $x = k + \alpha$, тогаш

$$\left[k + \alpha + \frac{1}{2} \right] = k; [2k + 2\alpha] = 2k; [k + \alpha] = k,$$

т.е.

$$\left[x + \frac{1}{2} \right] = [2x] - [x].$$

Ако $x = k + \alpha + \frac{1}{2}$, тогаш

$$\left[k + \alpha + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right] = k + 1; [2k + 2\alpha + 1] = 2k + 1; \left[k + \alpha + \frac{1}{2} \right] = k,$$

т.е.

$$\left[x + \frac{1}{2} \right] = [2x] - [x]. \blacksquare$$

Да го примениме идентитетот на бараниот збир. Имаме

$[\frac{n}{2} + \frac{1}{2}] + [\frac{n}{4} + \frac{1}{2}] + \dots + [\frac{n}{2^{k+1}} + \frac{1}{2}] + \dots = [n] - [\frac{n}{2}] + [\frac{n}{2}] - [\frac{n}{4}] + \dots + [\frac{n}{2^k}] - [\frac{n}{2^{k+1}}] + \dots = n$
 бидејќи почнуваќи од $k = [\log_2 n] + 1$ сите собирци во разгледуваниот збир се еднакви на 0.

II начин. Нека $n = \overline{x_m x_{m-1} \dots x_1 x_0} = \sum_{k=0}^m 2^k x_k$, $x_k \in \{0,1\}$ е запис на бројот n во бинарен броен систем. Тогаш

$$[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}] = \begin{cases} \overline{x_m x_{m-1} \dots x_{k+1}} + x_k, & k < m \\ x_m, & k = m \\ 0, & k > m \end{cases}$$

Ако го искористиме претходното равенство, добиваме:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} [\frac{n+2^k}{2^{k+1}}] &= (\overline{x_m x_{m-1} \dots x_1} + x_0) + (\overline{x_m x_{m-1} \dots x_2} + x_1) + \dots + (x_m + x_{m-1}) + x_m \\ &= x_m (2^{m-1} + \dots + 2^0 + 1) + x_{m-1} (2^{m-2} + \dots + 2^0 + 1) + \dots + x_1 (2^0 + 1) + x_0 \\ &= 2^m x_m + 2^{m-1} x_{m-1} + \dots + 2x_1 + x_0 = n. \end{aligned}$$