Тринадцатый Турнир, 1991-1992

ТРИНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур 1991 г.

8-9 кл., тренировочный вариант.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(3)
Через центр окружности 1 проведена окружность 2; A и B - точки пересечения окружностей.
Касательная к окружности 2 в точке B пересекает окружность 1 в точке C.
Докажите, что AB=BC.
В. Прасолов

Задача 2.(3)
(Летучая ладья). На шахматной доске 4*4 расположена фигура - "летучая ладья", которая ходит так же, как обычная ладья, но не может за один ход стать на поле, соседнее с предыдущим. Может ли она за 16 ходов обойти всю доску, становясь на каждое поле по разу, и вернуться на исходное поле?
А. Толпыго

Задача 3.(3)

Докажите, что

$$\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cdots+\cfrac{1}{1991}}}} + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cdots+\cfrac{1}{1991}}}}} = 1$$

Г. Гальперин

Задача 4.(3)
На окружности записаны 6 чисел: каждое равно модулю разности двух чисел, стоящих после него по часовой стрелке. Сумма всех чисел равна 1. Найти эти числа.
Фольклор

ТРИНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур 27 октября 1991 г.

8-9 кл., основной вариант.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(4)
В некотором королевстве было 32 рыцаря. Некоторые из них были вассалами других (вассал может иметь только одного сюзерена, причём сюзерен всегда богаче своего вассала). Рыцарь, имевший не менее четырёх вассалов, носил титул барона.
Какое наибольшее число баронов могло быть при этих условиях? (В королевстве действовал закон: "вассал моего вассала - не мой вассал").
А. Толпыго

Задача 2.(6)
A - вершина равнобедренного треугольника, BC - основание, $\angle BAC=20^o$. На стороне AB отложен отрезок AD, равный BC. Найдите величину угла BCD.
И. Шарыгин

Задача 3.(8)
Можно ли в таблицу 4*4 расставить такие натуральные числа, что одновременно выполняются следующие условия:
1) произведения чисел, стоящих в одной строке, одинаковы для всех строк;
2) произведения чисел, стоящих в одном столбце, одинаковы для всех столбцов;
3) среди чисел нет равных
4) все числа не больше 100?
Н. Васильев

Задача 4.(8)
Последовательность $\{a_n\}$ определяется правилами: $a_0=9$, для любого k
$a_{k+1}=3a_k^4+4a_k^3$.
Докажите, что a_{10} содержит в десятичной записи более 1000 девяток.
М. Вялый [В отчёте о 13 Турнире в качестве автора указано: *Yao*]

Задача 5.(3+5)
Квадрат 9*9 разбит на 81 единичную клетку. Некоторые клетки закрашены, причём расстояние между центрами любых двух закрашенных клеток больше 2.
а)(3) Приведите пример раскраски, при которой закрашенных клеток 17.
б)(5) Докажите, что больше 17 закрашенных клеток быть не может.
С. Фомин

Задача 6.(8)
Дан выпуклый 8-угольник ABCDEFGH, у которого все внутренние углы равны между собой, а стороны равны через одну - AB=CD=EF=GH, BC=DE=FG=HA (будем называть такой восьмиугольник полуправильным). Проводим диагонали AD, BE, CF, DG, EH, FA, GB и HC. Среди частей, на которые эти диагонали разбивают внутреннюю область 8-угольника, рассмотрим ту, которая содержит центр 8-угольника. Если эта часть - 8-угольник, он снова является полуправильным (это очевидно); в этом случае в нём проводим аналогичные диагонали, и т. д. Если на каком-то шагу центральная фигура не является 8-угольником, процесс заканчивается. Докажите, что если этот процесс бесконечный, то исходный 8-угольник - правильный.
А. Толпыго

Задача 7.(5+7)
n школьников хотят разделить поровну m одинаковых шоколадок, при этом каждую шоколадку можно разломить не более одного раза.
а)(5) При каких n это возможно, если m=9?
б)(7) При каких n и m это возможно?
Ю. Чеканов

ТРИНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур 1991 г.

10-11 кл., тренировочный вариант.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(3)
Внутри угла расположены две окружности с центрами A и B. Они касаются друг друга и двух сторон угла.
Докажите, что окружность с диаметром AB касается сторон угла.
В. Прасолов

Задача 2.(3)
В лес за грибами пошли 11 девочек и n мальчиков. Вместе они собрали n^2+9n-2 гриба, причём все они собрали поровну грибов.
Кого было больше: мальчиков или девочек?
А. Толпыго

Задача 3.(3)
В треугольнике ABC на стороне AB выбрана точка D такая, что AD/DC=AB/BC.
Докажите, что угол C - тупой.
С. Берлов

Задача 4.(3)
На окружности записаны 30 чисел: каждое равно модулю разности двух чисел, стоящих после него по часовой стрелке. Сумма всех чисел равна 1.
Найти эти числа.
Фольклор

ТРИНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур 27 октября 1991 г.

10-11 кл., основной вариант.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(6)
Во вписанном четырёхугольнике ABCD BC=CD.
Докажите, что площадь этого четырёхугольника равна $(1/2)AC^2\sin\angle A$.
Д. Фомин

Задача 2.(8)
Можно ли разрезать плоскость на многоугольники, каждый из которых переходит в себя при повороте на $360^o/7$ вокруг некоторой точки, и все стороны которых больше 1 см? (Многоугольник - это часть плоскости, ограниченная несамопересекающейся ломаной, не обязательно выпуклой).
А. Анджанс

Задача 3.(8)
Можно ли в таблицу 9*9 расставить такие натуральные числа, что одновременно выполняются следующие условия:
1) произведения чисел, стоящих в одной строке, одинаковы для всех строк;
2) произведения чисел, стоящих в одном столбце, одинаковы для всех столбцов;
3) среди чисел нет равных
4) все числа не больше 1991?
Н. Васильев

Задача 4.(6)
Последовательность $\{a_n\}$ определяется правилами: $a_0=9$, для любого k $a_{k+1}=3a_k^4+4a_k^3$.
Докажите, что a_{10} содержит в дестичной записи более 1000 девяток.
М. Вялый [В отчёте о 13 Турнире в качестве автора указано: *Yao*]

Задача 5.(8)
Пусть M - центр тяжести (точка пересечения медиан) треугольника ABC. При повороте на 120^o вокруг точки M точка B переходит в точку P, при повороте на 240^o вокруг точки M (в том же направлении) точка C переходит в точку Q.
Докажите, что либо треугольник APQ - правильный, либо точки A, P, Q совпадают.
И. Быковский

Задача 6.(3+3+4)
Дана арифметическая прогрессия (с разностью, отличной от нуля), составленная из натуральных чисел, десятичная запись которых не содержит цифры 9.
а)(3) Докажите, что число её членов меньше 100.
б)(3) Приведите пример такой прогрессии с 72 членами.
в)(4) Докажите, что число членов всякой такой прогрессии не больше 72.
В. Бугаенко, С. Токарев
В отчёте о 13 Турнире в качестве авторов указано: *В. Бугаенко и Тарасов*

Задача 7.(4+6)
n школьников хотят разделить поровну m одинаковых шоколадок, при этом каждую шоколадку можно разломить не более одного раза.
а)(4) При каких n это возможно, если m=9?
б)(6) При каких n и m это возможно?
Ю. Чеканов

ТРИНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур 1992 г.

8-9 кл., тренировочный вариант.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(3)
Первого числа некоторого месяца в магазине было 10 видов товаров по одинаковой цене за штуку. После этого каждый день каждый товар дорожает либо в 2 раза, либо в 3 раза. Первого числа следующего месяца все цены оказались различными.
Докажите, что отношение максимальной цены к минимальной больше 27.
Д. Фомин, Станислав Смирнов

Задача 2.(3)
В трапеции ABCD (AD - основание) диагональ AC равна сумме оснований, а угол между диагоналями равен 60^o.
Докажите, что трапеция - равнобедренная.
Станислав Смирнов

Задача 3.(3)
У нумизмата Феди все монеты имеют диаметр не больше 10 см. Он хранит их в плоской коробке размером 30 см * 70 см (в один слой). Ему подарили монету диаметром 25 см.
Докажите, что все монеты можно уложить в одну плоскую коробку размером 55 см *55 см.
Федя Назаров

Задача 4.(5)
Окружность разбита на 7 дуг так, что сумма любых двух соседних дуг не превышает 103^o.
Назовите такое наибольшее число A, что при любом таком разбиении каждая из 7 дуг содержит не меньше A^o (и докажите, что оно действительно наибольшее).
А. Толпыго

ТРИНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур 15 марта 1992 г.

8-9 кл., основной вариант.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(2+2+2)
n чисел (n > 1) называются близкими, если каждое из них меньше, чем сумма всех чисел, деленная на n-1. Пусть a, b, c, ... - n близких чисел, S - их сумма.
Докажите, что
а)(2) все они положительны;
б)(2) всегда a+b > c;
в)(2) всегда a+b $\geq$S/(n-1).
Регина Шлейфер из Арзамаса

Задача 2.(6)
Пусть в прямоугольном треугольнике AB и AC - катеты, AC > AB. На AC выбрана точка E, а на BC - точка D так, что AB=AE=BD.
Докажите, что треугольник ADE будет прямоугольным в том и только в том случае, если стороны треугольника ABC относятся как 3:4:5.
А. Паровян

Задача 3.(6)
Пусть m, n и k - натуральные числа, причём m > n. Какое из двух чисел больше:

$(m+ (n + (m \ldots)^{1/2})^{1/2})^{1/2}$ или $(n+ (m + (n \ldots)^{1/2})^{1/2})^{1/2}$?

(В каждом выражении k знаков квадратного корня, m и n чередуются).
Л. Курляндчик

Задача 4.(10)
Точка P лежит на описанной окружности треугольника ABC. Построим треугольник $A_1B_1C_1$, стороны которого параллельны отрезкам PA, PB, PC ($B_1C_1 \parallel PA$, $C_1A_1 \parallel PB$, $A_1B_1 \parallel PC$). Через точки A_1, B_1, C_1 проведены прямые, параллельные соответственно BC, CA и AB.
Докажите, что эти прямые пересекаются в точке, лежащей на описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$.
В. Прасолов

Задача 5.(10)
Имеется 50 серебряных монет, упорядоченных по весу, и 51 золотая монета, также упорядоченные по весу. Известно, что все монеты различны по весу. В нашем распоряжении - двухчашечные весы, позволяющие про каждые две монеты установить, какая тяжелее.
Как за 7 взвешиваний найти монету, занимающую среди всех монет 51-ое место?
А. Анджанс

Задача 6.(12)
Круг разбит на n секторов, в некоторых секторах стоят фишки - всего фишек n+1. Затем позиция подвергается преобразованиям. Один шаг преобразования состоит в следующем: берутся какие-нибудь две фишки, стоящие в одном секторе, и переставляются в разные стороны в соседние секторы.
Докажите, что через некоторое число шагов не менее половины секторов будет занято.
Д. Фомин

ТРИНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур 1992 г.

10-11 кл., тренировочный вариант.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(3)
Первого числа некоторого месяца в магазине было 10 видов товаров по одинаковой цене за штуку. После этого каждый день каждый товар дорожает либо в 2 раза, либо в 3 раза. Первого числа следующего месяца все цены оказались различными.
Докажите, что отношение максимальной цены к минимальной больше 27.
Д. Фомин, Станислав Смирнов

Задача 2.(3)
Стороны треугольника равны 3 см, 4 см и 5 см. Биссектрисы внешних углов треугольника продолжены до пересечения с продолжениями сторон.
Докажите, что одна из трёх полученных точек лежит в середине отрезка, соединяющего две другие.
В. Прасолов

Задача 3.(4)
Из центра O правильного n-угольника $A_1A_2...A_n$ проведены n векторов в его вершины. Даны числа a_1, a_2, ..., a_n, такие что $a_1>a_2>...>a_n>0$.
Докажите, что линейная комбинация векторов: $a_1*\mathbf{OA_1}+ a_2*\mathbf{OA_2}+...+ a_n*\mathbf{OA_n}$ отлична от нулевого вектора.
Д. Фомин, Алексей Кириченко

Задача 4.(4)
По окружности выписано 10 чисел, их сумма равна 100. Дано, что сумма любой тройки чисел, стоящих подряд, не меньше 29. Укажите такое наименьшее число A, что в любом таком наборе чисел каждое из чисел не превышает A (и докажите, что оно действительно наименьшее).
А. Толпыго

ТРИНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур 15 марта 1992 г.

10-11 кл., основной вариант.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(6)
Докажите, что произведение всех целых чисел от $2^{1917}+1$ до $2^{1991}-1$ включительно не есть квадрат целого числа.
В. Сендеров

Задача 2.(6)
Внутри окружности радиуса 1 расположена замкнутая ломаная (самопересекающаяся), содержащая 51 звено, причём известно, что длина каждого звена равна $3^{1/2}$. Для каждого угла этой ломаной рассмотрим треугольник, двумя сторонами которого служат звенья ломаной, образующие этот угол (таких треугольников всего 51).
Докажите, что сумма площадей этих треугольников не меньше, чем утроенная площадь правильного треугольника, вписанного в окружность.
А. Берзиньш

Задача 3.(8)
Дана таблица n*n, заполненная числами по следующему правилу: в клетке, стоящей в i-той строке и j-том столбце таблицы записано число $(i+j-1)^{-1}$. В таблице зачеркнули n чисел таким образом, что никакие два зачёркнутых числа не находятся в одном столбце или в одной строке.
Докажите, что сумма зачёркнутых чисел не меньше 1.
Сергей Иванов

Задача 4.(8)
Даны три треугольника: $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$, $C_1C_2C_3$. Известно, что их центры тяжести (точки пересечения медиан) лежат на одной прямой, а никакие три точки из числа 9 вершин этих треугольников не лежат на одной прямой. Рассматриваются 27 треугольников вида $A_iB_jC_k$, где i, j, k независимо пробегают значения 1, 2, 3.
Докажите, что эти 27 треугольников можно разбить на две группы так, что сумма площадей треугольников первой группы будет равна сумме площадей треугольников второй группы.
А. Анджанс

Задача 5.(12)
Имеется 100 серебряных монет, упорядоченных по весу, и 101 золотая монета, также упорядоченная по весу. Известно, что все монеты различны по весу. В нашем распоряжении - двухчашечные весы, позволяющие про каждые две монеты установить, какая тяжелее.
Как за наименьшее число взвешиваний найти монету, занимающую среди всех монет 101-ое место? Укажите это число и докажите, что меньшим числом взвешиваний обойтись нельзя.
А. Анджанс

Задача 6.
Пусть n и b - натуральные числа. Через V(n,b) обозначим число разложений n на сомножители, каждый из которых больше b (например: 36=6*6=4*9=3*3*4=3*12, так что V(36,2)=5).
Докажите, что $V(n,b) < n/b$.
Н. Б. Васильев