**Р. Малчески, А. Малчески,**

# ПРЕСЛИКУВАЊА ВО РАМНИНА ПРЕКУ КОМПЛЕКСНИ БРОЕВИ II

*(Продолжение!)*

**2.3.** Нека е дадена права $(p)$ со својата автокоњугирана равенка (1) и точка $z_0$. Ако равенката (1) ја запишеме во обликот $z=-\frac{B}{A}\overline{z}-\frac{C}{A}$, тогаш комплексниот аглов коефициент на произволна права, нормална на $(p)$, е $\eta'=\frac{B}{A}$. Значи, равенката на правата $(q)$ која минува низ точката $z_0$ и е нормална на правата $(p)$ е $z-z_0=\frac{B}{A}(\overline{z}-\overline{z_0})$, односно

$$Az-B\overline{z}-z_0A+\overline{z_0}B=0. \qquad (2)$$

Ако ги собереме равенките (1) и (2), тогаш за пресечната точка на правите $(p)$ и $(q)$, т.е. за проекцијата на $z_0$ врз правата $(p)$ добиваме $2Az'=Az_0-B\overline{z_0}-C$, односно $z'=\frac{Az_0-B\overline{z_0}-C}{2A}$. Според тоа,

$$z_0-z'=\frac{Az_0+B\overline{z_0}+C}{2A},$$

па затоа **растојанието** од точката $z_0$ до правата $(p)$, зададена со нејзината автокоњугирана равенка (1) е

$$d(z_0,(p))=\frac{|Az_0+B\overline{z_0}+C|}{|2A|}.$$

## 3. РАВЕНКА НА КРУЖНИЦА

**3.1.** Како што знаеме $|z-z_0|=R$ е равенка на кружница со центар во точката $S$, со афикс $z_0$, и радиус $R$. Во овој параграф подетално ќе се осврнеме на кружницата во комплексната рамнина.

**3.2. Пример.** Нека $P_1$ и $P_2$ се произволни точки во комплексната рамнина со афикси $z_1$ и $z_2$, соодветно. Докажете дека кружницата опишана над отсечката $P_1P_2$, како над дијаметар има равенка

$$|2z-z_1-z_2|=|z_1-z_2|. \qquad (1)$$

**Решение.** Бидејќи радиусот на кружницата опишана над $P_1P_2$, како над дијаметар, е $R=\frac{|z_1-z_2|}{2}$, а нејзиниот центар $P_0$ е средина на отсечката $P_1P_2$, со афикс $z_0=\frac{z_1-z_2}{2}$, добиваме дека равенката на разгледуваната кружница е $|z-\frac{z_1+z_2}{2}|=\frac{|z_1-z_2|}{2}$. Ако последната равенка ја помножиме со 2 ја добиваме еквивалентната на неа равенка (1). ♦

**3.3. Пример.** Нека $A,B$ и $C$ се три различни точки во рамнината. Најдете го геометриското место на точки кои се еднакво оддалечени од точките $A,B$ и $C$.

**Решение.** Нека афиксите на точките $A,B$ и $C$ се $a,b$ и $c$, соодветно. Според пример 1.10 геометриското место на точки еднакво оддалечени од точките $A$ и $B$, $B$ и $C$, $A$ и $C$, се симетралите на отсечките $AB,BC$ и $CA$ чии равенки се

$$z-\frac{a+b}{2}=-\frac{b-a}{\overline{b}-\overline{a}}\left(\overline{z}-\frac{\overline{a}+\overline{b}}{2}\right) \qquad (2)$$

$$z-\frac{b+c}{2}=-\frac{b-c}{\overline{b}-\overline{c}}\left(\overline{z}-\frac{\overline{b}+\overline{c}}{2}\right) \qquad (3)$$

$$z-\frac{a+c}{2}=-\frac{a-c}{\overline{a}-\overline{c}}\left(\overline{z}-\frac{\overline{a}+\overline{c}}{2}\right) \qquad (4)$$

соодветно. Ќе разгледаме два сучаи.

а) Ако точките $A,B$ и $C$ се колинеарни, тогаш од последица 1.3 следува дека симетралите на отсечките $AB,BC$ и $CA$ имаат еднакви комплексни аглови коефициенти, а од последица 1.8 следува дека тие се паралелни. Но, точките $A,B$ и $C$ се различни, па затоа и средините на отсечките $AB,BC$ и $CA$ се различни, што значи дека не постои точка која ги задоволува условите на задачата.

б) Ако точките $A,B$ и $C$ не се колинеарни, тогаш симетралите на отсечките $AB,BC$ и $CA$ се сечат две по две. Ако од равенката (2) ја извадиме равенката (3) за афиксот $o$ на пресечната точка $O$ на симетралите на отсечките $AB$ и $BC$ добиваме

$$o=\frac{a\overline{a}(c-b)+b\overline{b}(a-c)+c\overline{c}(b-a)}{\begin{vmatrix} a & \overline{a} & 1 \\ b & \overline{b} & 1 \\ c & \overline{c} & 1 \end{vmatrix}}.$$

Со непосредна проверка се докажува дека точката $O$ лежи на правата $CA$. Според тоа, бараното геометриско место е точката $O$ со афикс $o$. ♦

**3.4. Забелешка.** Во претходниот пример, всушност докажавме дека низ три неколинеарни точки $A, B$ и $C$ минува една и само една кружница со центар во точката $O$ и радиус $R=|a-o|$, односно докажавме дека околу произволен триаголник може да се опише кружница чиј центар се наоѓа во пресекот на симетралите на неговите страни.

**3.5. Пример.** Ако $z_j$, $j=1,2,3,4$ се последователни темиња на тетивен четириаголник, тогаш

$$\frac{(z_1-z_2)(z_3-z_4)}{(z_1-z_4)(z_2-z_3)}>0 \tag{5}$$

$$\begin{aligned} &|z_1-z_3|\cdot|z_2-z_4|= \\ &=|z_1-z_2|\cdot|z_3-z_4|+|z_1-z_4|\cdot|z_2-z_3| \end{aligned} \tag{6}$$

**Решение.** Без ограничување на општоста можеме да сметаме дека центарот на опишаната кружница се совпаѓа со координатниот почеток, а радиусот на кружницата е $r$. (зошто?). Тогаш,

$$z_j=re^{i\varphi_j},\ j=1,2,3,4.$$

Исто така, можеме да претпоставиме дека последователноста на темињата е еквивалентна со условот

$$\varphi_1<\varphi_2<\varphi_3<\varphi_4<\varphi_1+2k\pi. \tag{7}$$

При направените претпоставки важи:

$$\begin{aligned} \frac{(z_1-z_2)(z_3-z_4)}{(z_1-z_4)(z_2-z_3)} &= \frac{(e^{i\varphi_1}-e^{i\varphi_2})(e^{i\varphi_3}-e^{i\varphi_4})}{(e^{i\varphi_1}-e^{i\varphi_4})(e^{i\varphi_2}-e^{i\varphi_3})} \\ &= \frac{(e^{i\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}}-e^{-i\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}})(e^{i\frac{\varphi_3-\varphi_4}{2}}-e^{-i\frac{\varphi_3-\varphi_4}{2}})}{(e^{i\frac{\varphi_1-\varphi_4}{2}}-e^{-i\frac{\varphi_1-\varphi_4}{2}})(e^{i\frac{\varphi_2-\varphi_3}{2}}-e^{-i\frac{\varphi_2-\varphi_3}{2}})} \\ &= \frac{\sin\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\sin\frac{\varphi_3-\varphi_4}{2}}{\sin\frac{\varphi_1-\varphi_4}{2}\sin\frac{\varphi_2-\varphi_3}{2}}>0 \end{aligned}$$

бидејќи според (7), секоја величина под знакот на синусот е од интервалот $(0,\pi)$. Со тоа е докажано неравенството (5).

Од неравенството (5) следува

$$\begin{aligned} &|(z_1-z_2)(z_3-z_4)|+|(z_1-z_4)(z_2-z_3)| \\ &=|(z_1-z_2)(z_3-z_4)+(z_1-z_4)(z_2-z_3)| \\ &=|-z_1z_4-z_2z_3+z_1z_2+z_3z_4| \\ &=|(z_1-z_3)(z_2-z_4)| \end{aligned}$$

т.е. равенството (6) е исполнето. ♦

**3.6. Забелешка.** Равенството (6) всушност е познатата **теорема на Птоломеј**: *Производот на должините на дијагоналите на тетивен четириаголник е еднаков на збирот од производите на должините на спротивните страни.*

**3.7.** Како што рековме равенката на кружницата со центар во точката $z_0$ и радиус $R$ е $|z-z_0|=R$. Меѓутоа, од практични причини пожелно е да се знае обликот на равенката на кружницата сличен на оној на автокоњугираната равенка на права. Ќе докажеме дека

$$z\overline{z}+\overline{A}z+A\overline{z}+B=0,\ B\in\mathbf{R},\ A\in\mathbf{C},\ |A|^2-B>0 \tag{8}$$

е равенка на кружница.

Навистина, ако земеме $z_0=-A$ и $R^2=z_0\overline{z_0}-B=|A|^2-B>0$, и ако замениме во равенката (8) ја добиваме равенката $z\overline{z}-z_0\overline{z}-z\overline{z_0}+z_0\overline{z_0}=R^2$, т.е. равенката $|z-z_0|=R$, која е равенка на кружница со центар во $z_0$ и радиус $R$. Според тоа, равенката (8) е равенка на кружница со центар во $z_0$ и радиус $R=\sqrt{|A|^2-B}$.

**3.8. Забелешка.** Во следниот пример ќе дадеме еден аргумент кој ни дава за право правите и кружниците во комплексната рамнина да ги нарекуваме кружници, а кружниците да ги нарекуваме вистински кружници.

**3.9. Пример. (Аполониева кружница).** Нека $A$ и $B$ се произволни точки во рамнината. Геометриското место на точката $M$ со својство

$$\overline{MA}:\overline{MB}=k,\ (k>0,\ k\neq 1)$$

е кружница. Докажете!

**Решение.** Ќе го разгледаме случајот $k>1$. Поставуваме координатен систем $xOy$ таков што $x-$оската се совпаѓа со правата $AB$, а координатниот почеток се совпаѓа со средината на отсечката $AB$.

Имаме $A(a,0)$ и $B(-a,0)$, т.е. точките $A$ и $B$ имаат афикси $z_1 = a$ и $z_2 = -a$, соодветно. Ако точката $M$ од разгледуваното геометриско место има афикс $z$, тогаш од условот на задачата следува дека $k = \frac{|z-a|}{|z+a|}$, односно

$$z\bar{z} + a\frac{k^2+1}{k^2-1}(z+\bar{z}) + a^2 = 0. \qquad (9)$$

Константите $A = a\frac{k^2+1}{k^2-1}, B = a^2$ го задоволуваат условот $|A|^2 - B > 0$, па затоа (9) е равенка на кружница со центар во $z_0 = -a\frac{k^2+1}{k^2-1}$ и радиус $R = \sqrt{|A|^2 - B} = \frac{2ak}{k^2-1}$.

Случајот $0 < k < 1$ се разгледува аналогно. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ♦

**3.10. Заемен однос на права и кружница.** Дадени се права $(p)$ и кружница $(K)$ чии равенки се $z - z_0 = \eta(\bar{z} - \overline{z_0})$ и $|z - z_1| = R$, соодветно. Во центарот на кружницата чиј афикс е $z_1$ повлекуваме права $(p')$ нормална на правата $(p)$. Нејзината равенка е $z - z_1 = -\eta(\bar{z} - \overline{z_1})$. Ако ги собереме равенките на правите $(p)$ и $(p')$ го добиваме афиксот на пресечната точка на овие две прави $z^* = \frac{\eta(\overline{z_1} - \overline{z_0}) + z_1 + z_0}{2}$. Според тоа, за растојанието од центарот на кружницата до правата $(p)$ добиваме

$$d(z^*, z_0) = |z^* - z_0| = \frac{|\eta(\overline{z_1} - \overline{z_0}) + z_1 - z_0|}{2}.$$

Од досега изнесеното следува:

- ако $\frac{|\eta(\overline{z_1} - \overline{z_0}) + z_1 - z_0|}{2} = R$, тогаш правата $(p)$ е тангента на кружницата $(K)$ и допирната точка има афикс $z^*$;
- ако $\frac{|\eta(\overline{z_1} - \overline{z_0}) + z_1 - z_0|}{2} < R$, тогаш правата $(p)$ и кружницата $(K)$ се сечат во две точки; и
- ако $\frac{|\eta(\overline{z_1} - \overline{z_0}) + z_1 - z_0|}{2} > R$, тогаш правата $(p)$ и кружницата $(K)$ немаат заеднички точки.

**3.11. Пример.** Определете го заемниот однос на правата $(p)$ и кружницата $(K)$ чии равенки се

$$z = \bar{z} + 3i \text{ и } |z + 4 - 2i| = 3,$$

соодветно.

**Решение.** Од равенката на правата $(p)$ добиваме $z_0 = \frac{3i}{2}$, а од равенката на кружницата $(K)$ наоѓаме $z_1 = -4 + 2i$ и $R = 3$. Затоа

$$d = \frac{|\eta(\overline{z_1} - \overline{z_0}) + z_1 - z_0|}{2} = \frac{|(-4 - 2i + \frac{3i}{2}) + (-4 + 2i - \frac{3i}{2}|}{2}$$
$$= \frac{|-8|}{2} = 4 > 3 = R$$

што според 3.10 значи дека правата правата $(p)$ и кружницата $(K)$ немаат заеднички точки. ♦

**3.12. Пример.** Нека е дадена кружница $(K)$: $|z - z_0| = R$ и точка $z_1$ на неа. Да се состави равенката на тангентата на кружницата $(K)$ која минува низ точката $z_1$.

**Решение.** Равенката на правата $(p)$ која минува низ точките $z_0$ и $z_1$ гласи $z - z_0 = \frac{z_1 - z_0}{\overline{z_1} - \overline{z_0}}(\bar{z} - \overline{z_0})$. Според тоа, равенката на тангентата $(p')$ на $(K)$ повлечена во точката $z_1$ е $z - z_1 = -\frac{z_1 - z_0}{\overline{z_1} - \overline{z_0}}(\bar{z} - \overline{z_1})$. ♦

**3.13. Забелешка.** а) Ако $(K)$: $|z| = 1$ е единичната кружница и $z_1$ е точка на неа, тогаш равенката на тангентата на $(K)$ повлечена во $z_1$ гласи $z + z_1^2\bar{z} = 2z_1$.

б) Ако $A, B, C$ и $D$ се точки од единичната кружница $(K)$: $|z| = 1$, со афикси $a, b, c$ и $d$, соодветно, тогаш $\bar{a} = a^{-1}$, $\bar{b} = b^{-1}, \bar{c} = c^{-1}$ и $\bar{d} = d^{-1}$. Според последица 1.8 тетивите $AB$ и $CD$ се паралелни ако и само ако

$$(b - a)(\bar{d} - \bar{c}) = (\bar{b} - \bar{a})(d - c),$$

што значи ако и само ако $ab = cd$. Аналогно се добива дека тетивите $AB$ и $CD$ се заемно нормални ако и само ако $ab + cd = 0$.

в) Ако $A, B, C$ и $D$ се точки од единичната кружница $(K)$: $|z|=1$, со афикси $a, b, c$ и $d$, соодветно, и $AB \cap CD = \{S\}$. Равенките на правите $AB$ и $CD$ се

$$z + ab\bar{z} = a + b \text{ и } z + cd\bar{z} = c + d,$$

соодветно. Ако од последните две равенки го елиминираме $\bar{z}$, за афиксот $s$ на пресечната точка $S$ добиваме

$$s = \frac{(a+b)cd-(c+d)ab}{cd-ab}.$$

г) Нека $A$ и $B$, со афикси $a$ и $b$, се точки од единичната кружница, такви што $AB$ не е дијаметар. Според а) равенките на тангентите $(t_A)$ и $(t_B)$ се $z + a^2\bar{z} = 2a$ и $z + b^2\bar{z} = 2b$, соодветно. Ако од последните две равенки го елиминираме $\bar{z}$ за афиксот $s$ на пресечната точка $S$ добиваме $s = \frac{2ab}{a+b}$.

д) Нека правата $(p)$ ја сече единечната кружница во точките $A$ и $B$, со афикси $a$ и $b$, и нека $M$, со афикс $m$, е произволна точка од рамнината. Лесно се докажува дека афиксот $c$ на ортогоналната проекција $C$ на точката $M$ врз правата $(p)$ е зададен со формулата

$$c = \frac{a+b+m-ab\bar{m}}{2}.$$

## 4. ДИРЕКТНИ СЛИЧНОСТИ

**4.1. Дефиниција.** Пресликувањето $S: \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ дефинирано со

$$w = S(z) = az + b, \quad a, b \in \mathbf{C}, a \neq 0 \qquad (1)$$

го нарекуваме **директна сличност**.

**4.2. Теорема.** Множеството директни сличности $\boldsymbol{DS}$ во однос на операцијата композиција на пресликување е група.

**Доказ.** Ако $S_1, S_2 \in \boldsymbol{DS}$, тогаш

$$S_1(z) = az + b, \quad a, b \in \mathbf{C}, a \neq 0 \text{ и}$$

$$S_2(z) = cz + d, \quad c, d \in \mathbf{C}, d \neq 0.$$

Според тоа,

$$S_1(S_2(z)) = S_1(cz+d) = a(cz+d) + b =$$
$$= (ac)z + (ad+b), \quad ac, ad+b \in \mathbf{C}, ac \neq 0$$

т.е. $S_1 \circ S_2 \in \boldsymbol{DS}$. Значи, множеството $\boldsymbol{DS}$ е затворено во однос на композицијата на пресликувања.

Нека $S_1, S_2, S_3 \in \boldsymbol{DS}$. Со непосредна проверка се докажува дека

$$S_1 \circ (S_2 \circ S_3)(z) = (S_1 \circ S_2) \circ S_3)(z),$$

за секој $z \in \mathbf{C}$, па затоа

$$S_1 \circ (S_2 \circ S_3) = (S_1 \circ S_2) \circ S_3)$$

т.е. важи асоцијативниот закон.

Пресликувањето $E(z) = z$, за секој $z \in \mathbf{C}$ припаѓа на $\boldsymbol{DS}$ и притоа

$$E \circ S = S \circ E = S, \text{ за секој } S \in \boldsymbol{DS}.$$

Нека $S(z) = az + b, \quad a, b \in \mathbf{C}, a \neq 0$ е произволна директна сличност. Пресликувањето $S_1(z) = \frac{1}{a}z - \frac{b}{a}$ е директна сличност и притоа важи $S(S_1(z)) = S_1(S(z))$, за секој $z \in \mathbf{C}$, т.е. $S^{-1} = S_1 \in \boldsymbol{DS}$.♦

**4.3. Теорема.** Секоја директна сличност е еднозначно определена со два пара придружени точки.

**Доказ.** Нека $S$ е произволна директна сличност за која важи $S(z_1) = w_1$ и $S(z_2) = w_2$. Тогаш $S(z) = az + b$, каде $a, b \in \mathbf{C}, a \neq 0$ се непознати коефициенти кои треба да ги определиме. Според теорема 4.2 секоја директна сличност е биекција, па затоа од $z_1 \neq z_2$ следува $w_1 \neq w_1$. Со замена во $S(z) = az + b$ добиваме

$$\begin{cases} w_1 = az_1 + b \\ w_2 = az_2 + b \end{cases} \qquad (2)$$

Решавајќи го системот (2) по непознати $a$ и $b$ добиваме $a = \frac{w_1 - w_2}{z_1 - z_2}$, $a = \frac{z_1 w_2 - z_2 w_1}{z_1 - z_2}$ и $a \neq 0$, т.е. коефициентите $a$ и $b$ на директната сличност $S(z) = az + b$ се наполно определени со два пара придружени точки $(z_1, S(z_1))$ и $(z_2, S(z_2))$. ♦

**4.4. Теорема.** а) Слика на права $(p)$ при директна сличност е права $(p')$.

б) Паралелни прави при директна сличност се пресликуваат во паралелни прави.

в) Нормални прави при директна сличност се пресликуваат во нормални прави.

**Доказ.** а) Нека е дадена директната сличност (1) и правата $(p)$ со равенка $z = \eta\bar{z} + c$. Од (1) имаме $z = \frac{w-b}{a}$ и ако замениме во равенката на правата добиваме

$w=(\frac{\bar{a}}{a}\eta)\overline{w}+ac+b-\frac{a\bar{b}}{a}\eta$. Сега од $|\frac{\bar{a}}{a}\eta|=1$ следува дека слика на права $(p)$ при директна сличност е права $(p')$ чиј комплексен аглов коефициент е $\frac{\bar{a}}{a}\eta$.

Тврдењата под б) и в) непосредно следуваат од а) и последица 1.8. ♦

**4.5. Теорема.** Слика на кружница $(K)$ при директна сличност е кружница $(K')$.

**Доказ.** Нека е дадена директната сличност (1) и кружница $(K)$ чија равенка е $|z-c|=R$. Од (1) имаме $z=\frac{w-b}{a}$ и ако замениме во равенката на кружницата добиваме $|w-(ac+b)|=|a|R$, што значи дека сликата на кружницата $(K)$ при дадената сличност (1) е кружница $(K')$, чиј центар има афикс $ac+b$ и истиот е слика на центарот на кружницата $(K)$, а нејзиниот радиус е еднаков на $|a|R$. ♦

**4.6. Теорема.** Ако $A,B$ се произволни различни точки и $A',B'$ се нивните слики при директната сличност (1) и ако $a=re^{i\varphi}$, тогаш $\overline{A'B'}=r\overline{AB}$ и правите $AB$ и $A'B'$ формираат ориентиран агол $\varphi$.

**Доказ.** Нека $z_1,z_2,w_1,w_2$ се афиксите на точките $A,B$, $A',B'$, соодветно. Тогаш $z_2-z_1=\overline{AB}e^{i\alpha}$ и $w_2-w_1=\overline{A'B'}e^{i\alpha_1}$, каде $\alpha$ и $\alpha_1$ се аглите кои ги зафаќа реалната оска со векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A'B'}$, соодветно. Од равенствата $w_1=az_1+b$ и $w_2=az_2+b$ го добиваме равенството $w_2-w_1=a(z_1-z_2)$, т.е. равенството $\overline{A'B'}e^{i\alpha_1}=r\overline{AB}e^{i(\alpha+\varphi)}$, од што следува $\overline{A'B'}=r\overline{AB}$ и $\varphi=\alpha_1-\alpha$. ♦

Реалниот број $r$ го нарекуваме **коефициент на директната сличност** (1), а аголот $\varphi$ го нарекуваме **агол на директната сличност** (1).

**4.7. Дефиницвија.** За две фигури ќе велиме дека се **директно слични** ако постои директна сличност која едната од нив ја пресликува во другата.

**4.8. Последица.** Ако $ABC$ и $A'B'C'$ се директно слични триаголници, тогаш $\overline{A'B'}:\overline{A'C'}=\overline{AB}:\overline{AC}$ и $\angle A'B'C'=\angle ABC$. ♦

**4.9. Теорема.** Нека точките $A,B,C,A'$ $B',C'$ имаат афикси $z_1,z_2,z_3$, $w_1,w_2,w_3$, соодветно. Триаголниците $ABC$ и $A'B'C'$ се директно слични ако и само ако

$$z_1(w_2-w_3)+z_2(w_3-w_1)+z_3(w_1-w_2)=0 \quad (3)$$

**Доказ.** Триаголниците $ABC$ и $A'B'C'$ ако и само ако постои директна сличност (1) за која важи $w_i=az_i+b$, за $i=1,2,3$. Од последните равенства ги добиваме равенствата

$w_1-w_2=a(z_1-z_2)$ и $w_1-w_3=a(z_1-z_3)$.

Ако ги поделиме овие две равенства го добиваме равенството $\frac{w_1-w_2}{w_1-w_3}=\frac{z_1-z_2}{z_1-z_3}$ кое е еквивалентно со равенството (3). ♦

**4.10. Дефиниција.** За точката $z$ ќе велиме дека е **неподвижна** за директната сличност (1) ако го задоволува условот $z=az+b$.

Јасно, ако $a\neq 1$, тогаш директната сличност (1) има единствена неподвижна точка чиј афикс е $z_1=\frac{b}{1-a}$, а ако $a=1$, тогаш $b=0$, т.е. директната сличност (1) е идентичното пресликување и сите точки од комплексната рамнина се неподвижни.

Точката $C$ со афикс $c=\frac{b}{1-a}$ ја нарекуваме **центар** на директната сличност $S(z)=az+b$.

## 5. ДВИЖЕЊА

**5.1.** Во претходнот параграф ги разгледавме директните сличности и докажавме неколку нивни својства. Во овој параграф ќе се осврнеме наедна важна класа на директни сличности и ќе дадеме класификација на овие директни сличности.

**5.2. Дефиниција.** Директната сличност $S(z)=az+b, |a|=1$ ја нарекуваме **движење**.

**5.3. Теорема.** Множеството движења $\boldsymbol{D}$ во однос на операцијата композиција на пресликувања е подгрупа од групата директни сличности $\boldsymbol{DS}$.

**Доказ.** Ако $S_1, S_2 \in \boldsymbol{D}$, тогаш

$$S_1(z) = az + b, S_2(z) = cz + d, |a| = |d| = 1.$$

Според тоа,

$$S_1(S_2(z)) = S_1(cz+d) = a(cz+d) + b$$
$$= (ac)z + (ad+b), |ac| = 1,$$

па затоа $S_1 \circ S_2 \in \boldsymbol{D}$. Значи множеството $\boldsymbol{D}$ е затворено во однос на композицијата на пресликувања.

Ако $S_1, S_2, S_3 \in \boldsymbol{D}$, тогаш $S_1, S_2, S_3 \in \boldsymbol{DS}$, па затоа $S_1 \circ (S_2 \circ S_3) = (S_1 \circ S_2) \circ S_3$, т.е. важи асоцијативниот закон.

Ако ставиме $a = 1, b = 0$ добиваме дека $1 \cdot z + 0 = E(z) \in \boldsymbol{D}$.

Нека $S(z) = az + b, |a| = 1$ е произволно движење. Пресликувањето

$$S_1(z) = \tfrac{1}{a} z - \tfrac{b}{a}, \ \left|\tfrac{1}{a}\right| = \tfrac{1}{|a|} = 1$$

е движење и притоа важи

$$S(S_1(z)) = S_1(S(z)) = z, \text{ за секој } z \in \mathbf{C},$$

т.е. $S^{-1} = S_1 \in \boldsymbol{D}$. ♦

**5.4. Дефиниција.** Движењето

$$S(z) = z + b$$

го нарекуваме **транслација**.

**5.5. Теорема.** Транслација која не е идентичното пресликување нема неподвижни точки.

**Доказ.** Непосредно следува од 4.10. ♦

**5.6. Теорема.** Множеството транслации $\boldsymbol{T}$ во однос на операцијата композиција на на пресликувања е комутативна подгрупа од групата движења $\boldsymbol{D}$.

**Доказ.** Ако $S_1, S_2 \in \boldsymbol{T}$, тогаш

$$S_1(z) = z + b, S_2(z) = z + d.$$

Според тоа,

$$S_1(S_2(z)) = S_1(z+d) = (z+d) + b = z + (d+b),$$

па затоа $S_1 \circ S_2 \in \boldsymbol{T}$. Значи множеството $\boldsymbol{T}$ е затворено во однос на композицијата на пресликувања.

Ако $S_1, S_2, S_3 \in \boldsymbol{T}$, тогаш $S_1, S_2, S_3 \in \boldsymbol{D}$, па затоа $S_1 \circ (S_2 \circ S_3) = (S_1 \circ S_2) \circ S_3$, т.е. важи асоцијативниот закон.

Нека $S_1, S_2 \in \boldsymbol{T}$, тогаш $S_1(z) = z + b$ и $S_2(z) = z + d$. Според тоа,

$$S_1(S_2(z)) = S_1(z+d) = (z+d) + b = (z+b) + d$$
$$= S_2(z+b) = S_2(S_1(z))$$

за секој $z \in \mathbf{C}$, т.е. важи комутативниот закон.

Ако ставиме $b = 0$ добиваме дека $1 \cdot z + 0 = E(z) \in \boldsymbol{T}$.

Нека $S(z) = z + b$ е произволна транслација. Пресликувањето $S_1(z) = z - b$ е транслација и притоа важи

$$S(S_1(z)) = S_1(S(z)) = z,$$

за секој $z \in \mathbf{C}$, т.е. $S^{-1} = S_1 \in \boldsymbol{D}$. ♦

**5.7. Дефиниција.** Директната сличност со коефициент 1 и агол $\pi$ ја нарекуваме **централна симетрија**.

Според тоа,

$$S(z) = az + b, \ a, b \in \mathbf{C}, \ a \neq 0$$

е централна симетрија ако $a = -1$, што значи дека централната симетрија има облик $S(z) = b - z$. Од 4.10 следува дека централната симетрија $S(z) = b - z$ има центар со афикс $c = \frac{b}{2}$. Во натамошните разгледувања множеството централни симетрии ќе го означуваме со $\boldsymbol{CS}$.

**5.8. Теорема.** а) Композиција на две централни симетрии е транслација.

б) Композиција на централна симетрија и и транслација е централна симетрија.

**Доказ.** а) Нека

$$S_1(z) = b - z \text{ и } S_2(z) = d - z, \ b, d \in \mathbf{C}$$

се произволни централни симетрии. Тогаш,

$$S_1(S_2(z)) = S_1(d-z) = b - (d-z) = z + (b-d)$$

што значи дека композицијата $S_1 \circ S_2$ е транслација за вектор $b - d$.

б) Нека $S_1(z) = b - z$ и $S_2(z) = z + d$, $b, d \in \mathbf{C}$ се произволна централна симетрија и транслација, соодветно. Тогаш,

$$S_1(S_2(z)) = S_1(z+d) = b - (z+d) = b - d - z$$
$$S_2(S_1(z)) = S_2(b-z) = d + (b-z) = b + d - z$$

т.е. $S_1 \circ S_2$ и $S_2 \circ S_1$ се централни симетрии со центри $\frac{b-d}{2}$ и $\frac{b+d}{2}$, соодветно. ♦

**5.9. Дефиниција.** За пресликувањето $S : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ ќе велиме дека е **инволуторно** ако тоа е инверзибилно, т.е. постои $S^{-1}$ и ако $S^{-1} = S$.

**5.10. Теорема.** Директната сличност, која не е идентитет, е инволуторна ако и само ако таа е централна симетрија.

**Доказ.** Од теорема 4.2 следува дека директната сличност е инволуторна ако и само ако $az+b=\frac{z-b}{a}$, за секој $z\in\mathbf{C}$, односно ако и само ако $a=\frac{1}{a}$ и $b=-\frac{b}{a}$. Последните две равенства се исполнети ако и само ако $a=-1$, па затоа $S$ е инволуторна ако и само ако е централна симетрија. ♦

**5.11. Последица.** Множеството $\boldsymbol{T}\cup\boldsymbol{CS}$ во однос на операцијата композиција на пресликувања е некомутативна подгрупа од групата движења $\boldsymbol{D}$.

**Доказ.** Непосредно следува од теоремите 4.2, 5.6 и 5.8. ♦

**5.12. Дефиниција.** Движењата кои не се транслации ги нарекуваме **ротации**.

Бидејќи за ротацијата $S(z)=az+b$, $|a|=1$ важи $a\neq 1$ заклучуваме дека секоја ротација има центар $C$ со афикс $c=\frac{b}{1-a}$. Ако ротацијата има центар $C$ и агол $\alpha$, тогаш ќе велиме дека тоа е ротација околу $C$ за агол $\alpha$. Во натамошните разгледувања множеството ротации ќе го означуваме со $\boldsymbol{R}$. Јасно, централните симетрии се ротации за агол $\pi$, па затоа $\boldsymbol{CS}\subset\boldsymbol{R}$.

Нека $S(z)=az+b, |a|=1$, $a\neq 1$ е ротација околу $C$ за агол $\alpha$. Тогаш, инверзното пресликување $S^{-1}$ дефинирано со $S^{-1}(z)=\bar{a}z-\bar{a}b$ е ротација околу $C$ за агол $-\alpha$.

**5.13. Теорема.** а) Композиција на две ротации е ротација или транслација.

б) Композиција на ротација и транслација е ротација.

**Доказ.** а) Нека $S_1(z)=az+b, |a|=1$, $a\neq 1$ и $S_2(z)=cz+d, |c|=1$, $c\neq 1$ се две ротации. Тогаш

$$S_1(S_2(z))=S_1(cz+d)=a(cz+d)+b$$
$$=(ac)z+(ad+b)$$

Јасно, ако $ac=1$, тогаш $S_1\circ S_2$ е транслација, а ако $ac\neq 1$ таа е ротација околу $C$ чиј афикс е $\frac{ad+b}{1-ac}$ за агол $\alpha_1+\alpha_2$ каде $\alpha_1$ и $\alpha_2$ се аглите на ротациите $S_1$ и $S_2$.

б) Нека $S_1(z)=z+b$ и $S_2(z)=cz+d$ $|c|=1$, $c\neq 1$ се произволна транслација и ротација соодветно. Тогаш, од

$$S_1(S_2(z))=S_1(cz+d)=cz+(d+b)$$

следува дека $S_1\circ S_2$ е ротација околу $C$ чиј афикс е $\frac{d+b}{1-c}$ за агол $\alpha_2$ на $S_2$.

Понатаму, од

$$S_2(S_1(z))=S_2(z+b)=cz+(d+bc)$$

следува дека $S_2\circ S_1$ е ротација околу $C$ чиј афикс е $\frac{d+bc}{1-c}$ за агол $\alpha_2$ на $S_2$. ♦

**5.14. Последица.** Множеството $\boldsymbol{T}\cup\boldsymbol{R}$ во однос на операцијата композиција на пресликувања е некомутативна подгрупа од групата движења $\boldsymbol{D}$

**Доказ.** Непосредно следува од 5.12 и теоремите 4.2, 5.6 и 5.13. ♦

**5.15. Пример.** Дадени се точките $M_k, k=1,2,3,4$ со афикси $z_k, k=1,2,3,4$, соодветно. Докажете дека

$$z_2-z_1=\pm i(z_4-z_3) \qquad (1)$$

ако и само ако

$$\overline{M_1M_2}=\overline{M_3M_4} \text{ и } M_1M_2\perp M_3M_4 \qquad (2)$$

**Решение.** Од условот (1) имаме $|z_2-z_1|=|z_4-z_3|$, што значи дека $\overline{M_1M_2}=\overline{M_3M_4}$. Исто така

$$z_2-z_1=\pm i(z_4-z_3)=e^{\pm i\frac{\pi}{2}}(z_4-z_3),$$

што значи дека бројот $z_2-z_1$ се добива со ротација на бројот $z_4-z_3$ околу координатниот почеток за агол $\pm\frac{\pi}{2}$. Тоа значи $M_1M_2\perp M_3M_4$. Според тоа, условот (2) следува од условот (1).

Обратно, од

$$\overline{M_1M_2}=|z_2-z_1|,\ \overline{M_3M_4}=|z_4-z_3| \text{ и}$$
$$\overline{M_1M_2}=\overline{M_3M_4}$$

следува $z_2-z_1=re^{it}$, $z_4-z_3=re^{is}$, т.е.

$$z_2-z_1=e^{i(t-s)}(z_4-z_3). \qquad (3)$$

Сега од втората релација во (2) следува дека $t-s=\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbf{Z}$. Со замена во

(3) добиваме $z_2 - z_1 = \pm i(z_4 - z_3)$. Според тоа, условот (1) следува од условот (2). ♦

## 6. ХОМОТЕТИЈА

**6.1. Дефиниција.** Директната сличност со агол 0 или $\pi$, која не е транслација ја нарекуваме **хомотетија.**

Според тоа, директната сличност

$$S(z) = az + b,\ a, b \in \mathbf{C},\ a \neq 0$$

е хомотетија ако и само ако $a \in \mathbf{R} \setminus \{0,1\}$. Под коефициент на хомотетијата ќе го подразбираме реалниот број $a, (a \neq 0,1)$, а не бројот $a$ како кај општите директни сличности. Јасно, централните симетрии се хомотетии со коефициент $-1$. Од теорема 4.2 следува дека инверзното пресликување на хомотетија со коефициент $a$ е хомотетија со коефициент $\frac{1}{a}$. Во натамошните разгледувања множеството хомотетии ќе го означуваме со $\boldsymbol{H}$.

**6.2. Теорема.** а) Композиција на две хомотетии е хомотетија или транслација.

б) Композиција на хомотетија и транслација е хомотетија.

**Доказ.** а) Нека

$$S_1(z) = a_1 z + b_1,\ a_1 \in \mathbf{R} \setminus \{0,1\} \text{ и}$$
$$S_2(z) = a_2 z + b_2,\ a_2 \in \mathbf{R} \setminus \{0,1\}$$

се две хомотетии. Тогаш,

$$S_2(S_1(z)) = a_1 a_2 z + a_2 b_1 + b_2 .$$

Јасно, ако $a_1 a_2 = 1$, тогаш $S_2 \circ S_1$ е транслација за вектор $a_2 b_1 + b_2$, а ако $a_1 a_2 \neq 1$, тогаш $S_2 \circ S_1$ е хомотетија со центар $C$ чиј афикс е $\frac{a_2 b_1 + b_2}{1 - a_1 a_2}$ и коефициент $a_1 a_2$.

б) Нека се дадени хомотетијата $S_1(z) = a_1 z + b_1,\ a_1 \in \mathbf{R} \setminus \{0,1\}$ и транслацијата $S_2(z) = z + b_2$. Од $S_2(S_1(z)) = a_1 z + b_1 + b_2$, $a_1 \in \mathbf{R} \setminus \{0,1\}$ следува дека $S_2 \circ S_1$ е хомотетија со центар $C$ чиј афикс е $\frac{b_1 + b_2}{1 - a_1}$ и коефициент $a_1$. Од

$$S_1(S_2(z)) = a_1 z + b_1 + a_1 b_2,\ a_1 \in \mathbf{R} \setminus \{0,1\}$$

следува дека $S_1 \circ S_2$ е хомотетија со центар $C$ чиј афикс е $\frac{a_1 b_2 + b_1}{1 - a_1}$ и коефициент $a_1$. ♦

**6.3. Последица.** Множеството $\boldsymbol{T} \cup \boldsymbol{H}$ во однос на операцијата композиција на пресликувања е некомутативна подгрупа од групата директни сличности $\boldsymbol{DS}$.

**Доказ.** Непосредно следува од дефиниција 6.1 и теоремите 4.2, 5.6 и 6.2. ♦

**6.4. Теорема.** Било кои две хомотетии и нивната композиција, ако таа не е транслација, имаат колинеарни центри.

**Доказ.** а) Нека

$$S_1(z) = a_1 z + b_1,\ a_1 \in \mathbf{R} \setminus \{0,1\} \text{ и}$$
$$S_2(z) = a_2 z + b_2,\ a_2 \in \mathbf{R} \setminus \{0,1\}$$

се две хомотетии чии центри се $C_1$ и $C_2$, со афикси $c_1 = \frac{b_1}{1 - a_1}$ и $c_2 = \frac{b_2}{1 - a_2}$, соодветно, и нека $S_2(S_1(z)) = a_1 a_2 z + a_2 b_1 + b_2$ е хомотетија со центар $C$ чиј афикс е $\frac{a_2 b_1 + b_2}{1 - a_1 a_2}$. Тогаш,

$$\frac{c_2 - c}{c_1 - c} = \frac{\frac{b_2}{1 - a_2} - \frac{a_2 b_1 + b_2}{1 - a_1 a_2}}{\frac{b_1}{1 - a_1} - \frac{a_2 b_1 + b_2}{1 - a_1 a_2}} = \frac{a_1 a_2 - a_2}{1 - a_2} \in \mathbf{R}$$

што според последица 1.4 значи дека точките $C_1, C_2$ и $C$ се колинеарни. ♦

**6.5. Теорема.** Директната сличност $S(z) = az + b$ правата $(p)$ ја пресликува во паралелна права $(p')$ ако и само ако таа е хомотетија или транслација.

**Доказ.** Ако правата $(p)$ има комплексен аглов коефициент $\eta$, тогаш нејзината слика $(p')$ при директната сличност $S(z) = az + b$ има комплексен аглов коефициент $\eta \frac{a}{\bar{a}}$. Правите $(p)$ и $(p')$ се паралелни ако и само ако $\eta \frac{a}{\bar{a}} = \eta$, т.е. ако и само ако $a = \bar{a}$, што значи ако и само ако $a \in \mathbf{R}$. Значи, директната сличност $S(z) = az + b$ правата $(p)$ ја пресликува во паралелна права $(p')$ ако и само ако таа е хомотетија или транслација. ♦

(Продолжува!)