ОСМИ МАКЕДОНСКИ СИМПОЗИУМ ПО ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ

- ЗБОРНИК НА ТРУДОВИ -

ОХРИД, МАКЕДОНИЈА
30 септември - 3 октомври 2004 година

Организатор на 8. МСДР
Центар за инженерска математика
Електротехнички факултет - Скопје

Организациски Одбор на 8. МСДР
Боро Пиперевски - претседател
Елена Хаџиева - секретар

Програмски Одбор на 8. МСДР
Боро Пиперевски - претседател
Борко Илиевски - член

Издавач на Зборникот на трудови
Центар за инженерска математика
Електротехнички факултет - Скопје

Редакциски одбор :
Боро Пиперевски - претседател
Елена Хаџиева - секретар

техничко уредување: Елена Хаџиева
компјутерска обработка: Боро Пиперевски

CIP - Каталогизација во публикација
Народна и универзитетска библиотека “ Св. Климент Охридски “ ,
Скопје

517.518(062)

МАКЕДОНСКИ симпозиум по диференцијални равенки (8 ; 2004 ;
Охрид)
Зборник на трудови / осми македонски симпозиум по диференцијални равенки, Охрид, Македонија, 30 септември - 3 октомври 2004 година ; [редакциски одбор: Боро Пиперевски, претседател , Елена Хаџиева, секретар] . - Скопје : Центар за инженерска математика, Електротехнички факултет, 2005,. - 178 стр. : граф. прикази : 24 см.
Текст и на англ. јазик. - Библиографија кон трудовите. - Содржи и: Прилози

ISBN 9989 - 630 - 49 - 6
Пиперевски, Боро 2. Хаџиева, Елена 3. Зборник апстракти
Диференцијални равенки - Собири
COBISS.MK-ID 61901322

Тираж 100 примероци. Ракописот е даден во печат во септември 2005.
Печати “МАК - 2000” - Скопје

СОДРЖИНА

ПРИЛОЗИ

8 МСДР 2004, (1 - 14)
Зборник на трудови
30.09.- 03.10.2004 год.
Охрид, Македонија

ISBN 9989 – 630 – 49 – 6
COBISS.MK – ID 61901322

ЗА НЕКОИ ПОСЛАБИ СПЕЦИЈАЛНИ УСЛОВИ ЗА РЕДУКТИБИЛНОСТ НА ЕДНА ЛИНЕАРНА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНА РАВЕНКА ОД ТРЕТ РЕД ЧИЈ ОПШТ ИНТЕГРАЛ Е ПОЛИНОМ

Илија А. Шапкарев

Апстракт: Во трудот се разгледува хомогена диференцијална равенка од трет ред со полиномни коефициенти. Во него се добиваат послаби доволни услови за егзистенција на општо полиномно решение. При тие услови диференцијалната равенка се редуцира на систем од две линеарни диференцијални равенки, од кои едната е од прв ред, а другата е од втор ред. Со последователно решавање на овие две диференцијални равенки се добива општото полиномно решение на разгледуваната диференцијална равенка.

Клучни зборови: Диференцијални равенки, општо решение, полиномно решение, егзистенцијални услови, редуктибилна диференцијална равенка.

0. Предмет на овој труд е диференцијалната равенка

$$\alpha y''' + \beta y'' + \gamma y' + \delta y = 0, \tag{0.1}$$

каде $\alpha=\alpha(x)=A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3$, $\beta=\beta(x)=B_0+B_1x+B_2x^2$, $\gamma=\gamma(x)=C_0+C_1x$, $\delta=\delta(x)=D_0$, а A_i, i=0,1,2,3, ($A_3 \neq 0$), B_i, i=0,1,2, C_i, i=0,1, D_0 се константи.

Во [1] се добиени некои специјални услови за диференцијалната равенка (0.1) да биде редуктибилна на систем од три линеарни диференцијални равенки од прв ред и да има општо решение полином. При тоа е добиена и формулата со која е определен овој полином.

Ние, во овој труд, добиваме послаби специјални услови за редуктибилност на диференцијалната равенка (0.1) на систем од две линеарни диференцијални равенки, од кои едната е од прв ред, а другата е од втор ред, и која има општо решение полином. Потоа е добиена формулата со која се определува полиномот.

За таа цел, ја диференцираме диференцијалната равенка (0.1) m пати, каде што m е природен број и ја добиваме диференцијалната равенка од ред $m+3$:

$$\begin{aligned} &\alpha\, y^{(m+3)} + \left[\binom{m}{1}\alpha' + \binom{m}{0}\beta \right] y^{(m+2)} + \\ &+ \left[\binom{m}{2}\alpha'' + \binom{m}{1}\beta' + \binom{m}{0}\gamma \right] y^{(m+1)} + \\ &+ \left[\binom{m}{3}\alpha''' + \binom{m}{2}\beta'' + \binom{m}{1}\gamma' + \binom{m}{0}\delta \right] y^{(m)} = 0 \end{aligned} \tag{0.2}$$

Како што е познато, види [2,3], потребен и доволен услов за диференцијалната равенка (0.1) да има полиномно решение од степен m, е да биде задоволена равенката

$$\binom{t}{3}\alpha''' + \binom{t}{2}\beta'' + \binom{t}{1}\gamma' + \binom{t}{0}\delta = 0 \tag{0.3}$$

за $t=m$, каде што m е најмалиот природен број со таа особина. Во зависност од природата на коефициентите од диференцијалната равенка (0.2), посебно ќе ги разгледаме следните случаи:

1. $\binom{m}{2}\alpha'' + \binom{m}{1}\beta' + \binom{m}{0}\gamma \neq 0;$
2. $\binom{m}{2}\alpha'' + \binom{m}{1}\beta' + \binom{m}{0}\gamma = 0, \quad \binom{m}{1}\alpha' + \binom{m}{0}\beta \neq 0;$
3. $\binom{m}{2}\alpha'' + \binom{m}{1}\beta' + \binom{m}{0}\gamma = 0, \quad \binom{m}{1}\alpha' + \binom{m}{0}\beta = 0.$

1. Во овој случај диференцијалната равенка (0.2) станува

$$\alpha\, z''+\left[\binom{m}{1}\alpha'+\binom{m}{0}\beta\right]z'+\left[\binom{m}{2}\alpha''+\binom{m}{1}\beta'+\binom{m}{0}\gamma\right]z=0, \qquad (1.1)$$

каде што $y^{(m+1)}=z$.

Ставајќи понатаму

$$\alpha=\frac{1}{F}(Ax^2+Bx+C)\left[\binom{m}{2}\alpha''+\binom{m}{1}\beta'+\binom{m}{0}\gamma\right],$$

$$\binom{m}{1}\alpha'+\binom{m}{0}\beta=\frac{1}{F}(Dx+F)\left[\binom{m}{2}\alpha''+\binom{m}{1}\beta'+\binom{m}{0}\gamma\right], \qquad (1.2)$$

каде што A, B, C, D, E и $F\neq 0$ се константи, диференцијалната равенка (1.1), после делењето со коефициентот пред z, може да се напише во вид

$$(Ax^2+B+C)z''+(Dx+E)z'+Fz=0. \qquad (1.3)$$

Бидејќи

$$\binom{m}{2}\alpha''+\binom{m}{1}\beta'+\binom{m}{0}\gamma=Gx+H, \qquad (1.4)$$

каде што

$$G=3m(m\text{-}1)A_3+2mB_2+C_1\,,\quad H=m(m\text{-}1)A_2+mB_1+C_0\,, \qquad (1.5)$$

од првата равенка од равенките (1.2) добиваме:

$$(A_3x^3+A_2x^2+A_1x+A_0)F=AGx^3+(AH+BG)x^2+(BH+CG)x+CH. \qquad (1.6)$$

Значи, за определување на коефициентите A, B, C, ги имаме равенките:

$$A_3F=AG,\quad A_2F=AH+BG,$$
$$A_1F=BH+CG,\quad A_0F=CH. \qquad (1.7)$$

Од овие равенки, последователно добиваме:

$$A=\frac{A_3}{G}F,\qquad B=\frac{A_2G-A_3H}{G^2}F,$$
$$C=\frac{A_1G^2-A_2GH+A_3H^2}{G^3}F, \tag{1.8}$$
$$A_3(\frac{H}{G})^3-A_2(\frac{H}{G})^2+A_1\frac{H}{G}-A_0=0.$$

Од втората равенка од (1.2), во врска со (1.4), го имаме идентитетот

$$[(3mA_3+B_2)x^2+(2mA_2+B_1)x+mA_1+B_0]F=$$
$$=(DGx^2+(DH+EG)x+EH) \tag{1.9}$$

од кој, за определување на коефициентите D и E, ги добиваме равенките:

$$DG=(3mA_3+B_2)F,$$
$$DH+EG=(2mA_2+B_1)F, \tag{1.10}$$
$$EH=(mA_1+B_0)F.$$

Од овие равенки последователно добиваме:

$$D=\frac{3mA_3+B_2}{G}F,$$
$$E=\frac{(2mA_2+B_1)G-(3mA_3+B_2)H}{G^2}F\ , \tag{1.11}$$
$$(3mA_3+B_2)(\frac{H}{G})^2-(2mA_2+B_1)\frac{H}{G}+(mA_1+B_0)=0\,.$$

Со x_1 и x_2 да ги означиме нулите на полиномот Ax^2+Bx+C. Во тој случај, како што е познато, потребен и доволен услов за диференцијалната равенка (1.3) да има две полиномни решенија од степени n-1 и $n+k$-1, каде што $n>1$ и k се природни броеви, е да бидат задоволени релациите (види [4]):

$$A(n-1)^2+(D-A)(n-1)+F=0,$$
$$(2n+k-3)A+D=0, \tag{1.12}$$
$$[(n+k-r-2)x_1+(n+r-1)x_2]A-E=0,\quad r=0,\,1,\,2,\,...,\,n-1.$$

Од првата равенка од (1.12), во врска со првите равенки од (1.8) и (1.11), добиваме:

$$A_3(n-1)^2+[(3m-1)A_3+B_2](n-1)+G=0. \tag{1.13}$$

Со замената на G од првата равенка од (1.5) во последнава равенка (1.13), ја добиваме равенката

$$(3m^2+n^2+3mn-6m-3n+2)A_3+(2m+n-1)B_2+C_1=0. \tag{1.14}$$

Од втората равенка од (1.12), со замената на A и D од првите равенки од (1.8) и (1.11) наоѓаме

$$(3m+2n+k-3)A_3+B_2=0. \tag{1.15}$$

Сега, од равенката (1.14), во врска со (1.15), за C_1 имаме

$$C_1=[m(3m+4n+2k-3)+(n-1)(m+k-1)]A_3. \tag{1.16}$$

Двете нули x_1 и x_2 на полиномот Ax^2+Bx+C од (1.6) се гледа дека се нули и на полиномот $\alpha(x)$. Третата негова нула, да ја означиме со x_3, во врска со (1.6) и со четвртата равенка од (1.8), ја задоволува равенката

$$G\,x_3+H=0. \tag{1.17}$$

Од третата равенка од (1.12), во врска со првата од (1.8) и втората од (1.11), добиваме

$$[(n+k-r-2)\,x_1+(n+r-1)\,x_2]A_3G-(2mA_2+B_1)G+(3mA_3+B_2)H=0.$$

Од оваа равенка, во врска со двете равенки (1.15) и (1.17) и со примена на Виетовите правила на полиномот $\alpha(x)$, за B_1 добиваме

$$B_1=[(2m+n+k-r-2)x_1+(2m+n+r-1)x_2+(2m+2n+k-3)x_3]A_3. \tag{1.18}$$

Од првата равенка од (1.5), во врска со двете равенки (1.15) и (1.16) за G добиваме

$$G=(n-1)(n+k-1)A_3 \tag{1.19}$$

а од втората равенка од (1.5), во врска со (1.17), (1.18), (1.19) и со примената на Виетовите правила на полиномот $\alpha(x)$, за C_0 добиваме

$$C_0=-[m(m+n+k-r-1)x_1+m(m+n+r)x_2+(m+n-1)(m+n+k-1)x_3]A_3. \qquad (1.20)$$

Од третата равенка од (1.11), во врска со (1.17), ја добиваме равенката

$$(3mA_3+B_2)x_3^2+(2mA_2+B_1)x_3+mA_1+B_0=0,$$

од која, со примена на Виетовите правила на полиномот $\alpha(x)$, во врска со равенките (1.15) и (1.18) за B_0 добиваме

$$B_0=-[mx_1x_2+(m+n+k-r-2)x_1x_3+(m+n+r-1)x_2x_3]A_3. \qquad (1.21)$$

Од равенката (0.3) за $t=m$, во врска со равенките (1.15) и (1.16), за D_0 добиваме

$$D_0=-m(m+n)(m+n+k)\,A_3. \qquad (1.22)$$

Сега диференцијалната равенка (0.1) може да се запише во вид

$$\begin{aligned}&(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)y'''-\\&-\{(3m+2n+k-3)x^2-[(2m+n+k-r-2)x_1+(2m+n+r-1)x_2+\\&+(2m+2n+k-3)x_3]x+[mx_1\,x_2+(m+n+k-r-2)\,x_1\,x_3\;+\\&+(m+n+r-1)\,x_2\,x_3]\}y''+\\&+\{[m(3m+4n+2k-3)+(n-1)(n+k-1)]x-[m(m+n+k-r-1)\,x_1+\\&+m(m+n+r)\,x_2+(m+n-1)(m+n+k-1)\,x_3]\}y'-\\&-m(m+n)(m+n+k)y=0\end{aligned} \qquad (1.23)$$

или уште во вид

$$\begin{aligned}&(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)y'''-\\&-[m(x-x_1)(x-x_2)+(m+n+k-r-2)(x-x_1)(x-x_3)+\\&+(m+n+r-1)(x-x_2)(x-x_3)]y''+\\&+[m(m+n+k-r-1)(x-x_1)+m(m+n+r)(x-x_2)+\\&+(m+n-1)(m+n+k-1)(x-x_3)]y'-\\&-m(m+n)(m+n+k)y=0.\end{aligned}$$

Со прегрупирање на членовите од оваа равенка ја добиваме диференцијалната равенка

$(x-x_3)\{(x-x_1)(x-x_2)\,y''-[(m+n+k-r-1)(x-x_1)+(m+n+r)(x-x_2)]y'+$
$+(m+n)(m+n+k)y\}'-m\{(x-x_1)(x-x_2)y''-$
$-[(m+n+k-r-1)(x-x_1)+(m+n+r)(x-x_2)]y'+(m+n)(m+n+k)y\}=0$

која се редуцира на системот од двете линеарни диференцијални равенки

$$(x-x_1)(x-x_2)\,y''-[(m+n+k-r-1)(x-x_1)+(m+n+r)(x-x_2)]y'+$$
$$+(m+n)(m+n+k)y=u, \qquad (1.24)$$
$$(x-x_3)u'-mu=0.$$

Општото решение на втората диференцијална од овие равенки (1.24) е

$$u=K_3(x-x_3)^m, \qquad (1.25)$$

каде што K_3 е произволна константа, а првата равенка од (1.24), во врска со (1.25) станува

$$(x-x_1)(x-x_2)\,y''-[(m+n+k-r-1)(x-x_1)+(m+n+r)(x-x_2)]y'+$$
$$+(m+n)(m+n+k)y=K_3(x-x_3)^m. \qquad (1.26)$$

Соодветната хомогена равенка од оваа диференцијална равенка има општо решение, види [4],

$$y=K_1^*y_1+K_2^*y_2 \qquad (1.27)$$

каде што

$$y_1=(x-x_1)^{m+n+r+1}(x-x_2)^{m+n+k-r}[(x-x_1)^{-r-1}(x-x_2)^{-k+r}]^{(m+n)},$$
$$y_2=(x-x_1)^{m+n+r+1}(x-x_2)^{m+n+k-r}\times$$
$$\times[(x-x_1)^{-r-1}(x-x_2)^{-k+r}\int(x-x_1)^{r}(x-x_2)^{k-r-1}dx]^{(m+n)}$$

се полиноми од степен m+n и m+n+k соодветно, а K_1^* и K_2^* се константи.

За да го добиеме општото решение на нехомогената диференцијална равенка (1.26), со примена на Лагранжовата метода на варијација на константи од (1.27) за функциите $K_1^*(x)$ и $K_2^*(x)$, добиваме (види [5,7])

$$K_1^*(x) = K_3 \int \frac{(x-x_3)^m y_2}{(x-x_1)(x-x_2)(y_1' y_2 - y_1 y_2')} dx + K_1,$$

$$K_2^*(x) = K_3 \int \frac{(x-x_3)^m y_1}{(x-x_1)(x-x_2)(y_1' y_2 - y_1 y_2')} dx + K_2,$$

каде што K_1 и K_2 се произволни константи.

Сега општото решение на диференцијалната равенка (1.26) ќе биде

$$y = K_1 y_1 + K_2 y_2 + K_3 y_3 \tag{1.29}$$

каде што

$$y_3 = y_1 \int \frac{(x-x_3)^m y_2}{(x-x_1)(x-x_2)(y_1' y_2 - y_1 y_2')} dx - \\ - y_2 \int \frac{(x-x_3)^m y_1}{(x-x_1)(x-x_2)(y_1' y_2 - y_1 y_2')} dx. \tag{1.30}$$

Бидејќи

$y_1' y_2 - y_1 y_2' = (x-x_1)^{m+n+r}(x-x_2)^{m+n+k-r-1},$

ќе биде

$$y_3 = (x-x_1)^{m+n+r+1}(x-x_2)^{m+n+k-r}\{[(x-x_1)^{-r-1}(x-x_2)^{-k+r}]^{(m+n)} \times \\ \times \int (x-x_3)^m [(x-x_1)^{-r-1}(x-x_2)^{-k+r} \int (x-x_1)^r (x-x_2)^{k-r-1} dx]^{(m+n)} dx - \\ - [(x-x_1)^{-r-1}(x-x_2)^{-k+r} \int (x-x_1)^r (x-x_2)^{k-r-1} dx]^{(m+n)} \times \\ \times \int (x-x_3)^m [(x-x_1)^{-r-1}(x-x_2)^{-k+r}]^{(m+n)} dx. \tag{1.31}$$

Лесно може да се види дека функцијата $y_3(x)$, определена со формулата (1.31) е полином од степен m.

2. Во овој случај, диференцијалната равенка (0.1) има две полиномни решенија со степени m и m+1 соодветно, а нејзините коефициенти ги задоволуваат релациите

$$\binom{m}{3}\alpha'''+\binom{m}{2}\beta''+\binom{m}{1}\gamma'+\binom{m}{0}\delta=0,$$

$$\binom{m}{2}\alpha''+\binom{m}{1}\beta'+\binom{m}{0}\gamma=0. \qquad (2.1)$$

Од овие две релации последователно добиваме

$$\gamma=-\binom{m}{2}\alpha''-\binom{m}{1}\beta',$$
$$\delta=2\binom{m+1}{3}\alpha'''+\binom{m+1}{2}\beta''. \qquad (2.2)$$

Сега диференцијалната равенка (0.2) станува

$$\alpha y^{(m+3)}+(m\alpha'+\beta)y^{(m+2)}=0,$$

од каде добиваме

$$y^{(m+2)}=\alpha^{-m}e^{-\int\frac{\beta}{\alpha}dx}.$$

За $y(x)$ да биде полином од степен $m+n$, $n>1$ е природен број, треба да биде

$$\left(\alpha^{-m}e^{-\int\frac{\beta}{\alpha}dx}\right)^{(n-1)}=0.$$

Од овде следува

$$\alpha^{-m}e^{-\int\frac{\beta}{\alpha}dx}=P_{n-2}(x),$$

каде што $P_{n-2}(x)$ е полином од степен n-2, од каде за $\beta(x)$ се добива

$$\beta(x) = -m\alpha' - \alpha \frac{P_{n-2}'}{P_{n-2}}. \tag{2.3}$$

Ако ставиме

$P_{n-2}(x)=(x-x_3^0)^{n-2}$, $P_{n-2}'(x)=(n-2)(x-x_3^0)^{n-3}$

каде што x_3^0 е нула на полиномот $\alpha(x)$, и ако со x_1^0 и x_2^0 ги означиме другите две нули на полиномот $\alpha(x)$, со примена на Виетовите правила за $\beta(x)$, имаме

$$\beta(x) = -m\alpha' - \frac{n-2}{x-x_3^0}\alpha = -[(m+n-2)(x-x_1^0)(x-x_2^0) +$$
$$+ m(x-x_1^0)(x-x_3^0) + m(x-x_2^0)(x-x_3^0)]A_3.$$

За $\gamma(x)$ и δ од (2.2) во врска со (2.3) наоѓаме последователно

$$\gamma(x) = -\binom{m}{2}\alpha'' + \binom{m}{1}[m\alpha' + \frac{n-2}{x-x_3^0}\alpha] =$$
$$= [m(m+n-1)(x-x_1^0) + m(m+n-1)(x-x_2^0) + m(m+1)(x-x_3^0)]A_3,$$
$$\delta = 2\binom{m+1}{3}\alpha''' + \binom{m+1}{2}[-m\alpha''' - (n-2)2A_3] = -m(m+1)(m+n)A_3.$$

Сега диференцијалната равенка (0.1) станува

$(x-x_1^0)(x-x_2^0)(x-x_3^0)y'''-$
$-[(m+n-2)(x-x_1^0)(x-x_2^0)+m(x-x_1^0)(x-x_3^0)+$
$+m(x-x_2^0)(x-x_3^0)]y''+m[(m+n-1)(x-x_1^0)+$
$(m+n-1)(x\ x_2^0)+(m+1)(x-x_3^0)]y'-m(m+1)(m+n)y=0$

и се редуцира на системот линеарни диференцијални равенки од прв ред

$(x-x_3^0)y'-(m+n)y=u_1,$
$(x-x_2^0)u_1'-(m+1)u_1=u_2,$
$(x-x_1^0)u_2'-m\,u_2=0.$

Со последователно решавање на овој систем, имаме

$$u_2 = K_1(x - x_1^{\,0})^m,$$

$$u_1 = (x - x_2^{\,0})^{m+1}[K_2 + K_1\int \frac{(x - x_1^{\,0})^m}{(x - x_2^{\,0})^{m+2}}dx],$$

$$y = (x - x_3^{\,0})^{m+n}[K_3 + K_2\int \frac{(x - x_2^{\,0})^{m+1}}{(x - x_3^{\,0})^{m+n+1}}dx +$$

$$+ K_1\int \frac{(x - x_2^{\,0})^{m+1}}{(x - x_3^{\,0})^{m+n+1}}\int \frac{(x - x_1^{\,0})^m}{(x - x_2^{\,0})^{m+2}}dx\, dx].$$

При тоа, K_1, K_2, K_3 се произволни константи.

3. Сега од релациите

$$\binom{m}{3}\alpha''' + \binom{m}{2}\beta'' + \binom{m}{1}\gamma' + \binom{m}{0}\delta = 0,$$

$$\binom{m}{2}\alpha'' + \binom{m}{1}\beta' + \binom{m}{0}\gamma = 0, \qquad (3.1)$$

$$\binom{m}{1}\alpha' + \binom{m}{0}\beta = 0,$$

последователно добиваме:

$$\beta = -m\alpha', \qquad \gamma = \binom{m+1}{2}\alpha'', \qquad \delta = \binom{m+2}{3}\alpha''' \qquad (3.2)$$

Диференцијалната равенка (0.1), во врска со (3.2) може да се запише во вид

$$\alpha y''' - m\alpha' y'' + \binom{m+1}{2}\alpha'' y' - \binom{m+2}{3}\alpha''' y = 0. \qquad (3.3)$$

Со x_1^*, x_2^*, x_3^* да ги означиме нулите на полиномот $\alpha(x)$. Тогаш диференцијалната равенка (3.3) може да се напише во вид

$$\begin{aligned}&(x-x_1^*)(x-x_2^*)(x-x_3^*)y''' -\\ &-m[(x-x_1^*)(x-x_2^*)+(x-x_1^*)(x-x_3^*)+(x-x_2^*)(x-x_3^*)]y''+\\ &+m(m+1)[(x-x_1^*)+(x-x_2^*)+(x-x_3^*)]y'-\\ &-m(m+1)(m+2)y=0\end{aligned} \qquad (3.4)$$

и се редуцира на системот диференцијални равенки од прв ред, види [6]

$$
\begin{aligned}
&(x- x_3^*)y'-(m+2)y=v_1,\\
&(x -x_2^*)\, v_1'-(m+1)v_1 =v_2,\\
&(x -x_1^*)\, v_2'- mv_2 =0.
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

Со решавањето на овој систем (3.5) последователно добиваме

$$
\begin{aligned}
&v_2 = C_1^*(x-x_1^*)^m,\\
&v_1 = (x-x_2^*)^{m+1}[C_2^* + C_1^*\int \frac{(x-x_3^*)^m}{(x-x_2^*)^{m+2}}dx],\\
&y = (x-x_3^*)^{m+2}[C_3^* + C_2^*\int \frac{(x-x_2^*)^{m+1}}{(x-x_1^*)^{m+3}}dx +\\
&+ C_1^*\int \frac{(x-x_2^*)^{m+1}}{(x-x_1^*)^{m+3}}\int \frac{(x-x_3^*)^m}{(x-x_2^*)^{m+2}}dx\, dx].
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

При тоа, C_1*, C_2*, C_3*, се произволни константи.

Да забележиме дека десната страна од третата формула од (3.6) претставува полином од степен m+2. Значи, општото решение на диференцијалната равенка (0.1) е полином од степен m+2.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Шапкарев И. А.: Полином како општо решение на една хомогена диференцијална равенка од трет ред, Зборник на трудови, Втор конгрес на математичарите и информатичарите на Македонија, стр. 105-109 (2000) Охрид.

[2] Пиперевски Б. М.: Егзистенција и конструкција на полиномно решение на една класа линеарни диференцијални равенки од трет ред, Зборник на трудови на ЕТФ (1996) Скопје.

[3] Пиперевски Б. М.: Полиномни решенија на една класа линеарни диференцијални равенки и нивна примена, докторска дисертација, Математички факултет (1982) Скопје.

[4] Shapkarev I. A., Piperevski B. M., Hadzieva E. J.: On Some Special General Integrals of a Linear Differential Equations of Second Order, Mathematica Balkanica, Vol. 18, 2004, Fasc. 3-4., Sofia, p. 453-459

[5] Шапкарев И. А.: Математика III, Елементарна теорија на редови и на диференцијални равенки, стр. 250, Универзитет ”Св. Кирил и Методиј” (1991) Скопје.

[6] Шапкарев И. А.: За една редуктибилна хомогена линеарна диференцијална равенка чиј општ интеграл е полином, Седми македонски симпозиум по диференцијални равенки, Зборник на трудови, стр. 73-84 (2003) Охрид.

[7] Степанов В. В.: Курс диференциальных уравнений , стр. 191, Москва (1945) Ленинград.

Ilija A. Schapkarev

Über einige schwächere spezielle Bedingungen für die Reduktion einer linearen Differentialgleichung der dritten Ordnung deren allgemeines Integral ein Polynom ist

Zusammenfassung

In der Arbeit wird die Differentialgleichung der dritten Ordnung (0.1) mit polinomische Koeffizienten betrachtet. Durch Differenzieren und Dividieren werden die Bedingungen erhalten, so dass die betrachtete Differentialgleichung (0.1) drei Polynomlösungen besitzt. Von diesen Bedingungen werden die Koeffizienten der ursprüngliche Differentialgleichung (0.1) mit den Formeln (1.15), (1.16), (1.18), (1.20), (1.21), und (1.22) erhalten. Jetzt wird die Differentialgleichung (0.1) in der Form (1.23) aufgeschhrieben. Weiter wird gezeigt dass die erhaltene Differentialgleichung (1.23) auf ein entsprechendes System der zwei Differentialgleichungen (1.24) reduziert warden kann. Mit nacheinander Auflösung dises System werden die drei Polynomlösungen y_1, y_2, y_3, der ursprüngliche Differentialgleichung (0.1) erhalten. Die Polynomlösungen y_1, y_2, y_3, werden mit den Formeln (1.28) und (1.30) gegeben.

8 МСДР 2004, (15 - 20)
Зборник на трудови
30.09.- 03.10.2004 год.
Охрид, Македонија

ISBN 9989 – 630 – 49 – 6
COBISS.MK – ID 61901322

ИНВАРИЈАНТНОСТ НА ЕДНА БРОЈНА КАРАКТЕРИСТИКА ЗА ЕДНА КЛАСА ЛИНЕАРНИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ ОД ВТОР РЕД

Боро М. Пиперевски
Електротехнички факултет–Скопје
e–mail: borom@etf.ukim.edu.mk

Апстракт:

Во овој труд се разгледува класа диференцијални равенки (1),(3),(4),(5), врзани со трансформацијата (2). Се покажува дека сите равенки имаат иста дискриминанта на своите карактеристични равенки (6),(7),(8),(9). До истиот заклучок се доаѓа и за класата диференцијални равенки од вид (10) (12),(13),(14),(15), (16),(17),(18) добиени со трансформацијата (11).

клучни зборови: инваријантност, диференцијална равенка, трансформација

I. Нека е дадена линеарна диференцијална равенка од втор ред од вид

$$(x-x_1)(x-x_2)y'' + (b_1x + b_0)y' + c_0y = 0 \qquad (1)$$

каде $x_1 \neq x_2$, b_1, b_0 , c_0 се реални константи.

Во [1] е покажано дека со трансформацијата дефинирана со

$$y = (x-x_1)^{\alpha}(x-x_2)^{\beta} z \qquad (2)$$

диференцијалната равенка (1) се трансформира во најмногу три диференцијални равенки од ист вид т.е. во равенките:

$$(x-x_1)(x-x_2)z_1'' + [(2\alpha+b_1]\, x -2\alpha\, x_2 + b_0]z_1' + [\alpha\, (\alpha-1) + \alpha b_1 + c_0]z_1 = 0, \qquad (3)$$

$$(x-x_1)(x-x_2)z_2'' + [(2\beta+b_1]\, x - 2\beta\, x_1 + b_0]z_2' + [\beta(\beta-1) + \beta b_1 + c_0\,]z_2 = 0\, , \qquad (4)$$

$$(x-x_1)(x-x_2)z_3'' + [(2\alpha+2\beta+b_1]\, x -2\alpha\, x_2 - 2\beta\, x_1 + b_0]z_3' + [2\alpha\beta + \alpha\, (\alpha-1) + \beta(\beta-1) + (\alpha+\beta)b_1 + c_0\,]z_3 = 0\, , \qquad (5)$$

каде

$$\alpha = 1 - \frac{b_1 x_1 + b_0}{x_1 - x_2}\, , \ \beta = 1 - \frac{b_1 x_2 + b_0}{x_2 - x_1}\, .$$

Во литературата е познато дека потребен и доволен услов диференцијалната равенка (1) да има едно полиномно решение од степен n е условот n да биде корен на квадратната равенка

$$t^2 + (b_1 - 1)t + c_0 = 0, \qquad (6)$$

и тоа помалиот ако и двата корени се природни броеви. Поради својата важност оваа квадратна равенка ќе ја наречеме карактеристична равенка за диференцијалната равенка (1) со дискриминанта $\Delta = (b_1 - 1)^2 - 4c_0$.

За диференцијалните равенки (3), (4) и (5) соодветните карактеристични равенки се

$$t^2 + (2\alpha+b_1 - 1)t + \alpha\, (\alpha-1) + \alpha b_1 + c_0 = 0, \qquad (7)$$

$$t^2 + (2\beta+b_1 - 1)t + \beta(\beta-1) + \beta b_1 + c_0 = 0, \qquad (8)$$

$$t^2 + (2\alpha+2\beta+b_1 - 1)t + 2\alpha\beta + \alpha\, (\alpha-1) + \beta(\beta-1) + (\alpha+\beta)b_1 + c_0 = 0. \qquad (9)$$

Лесно се покажува дека и овие три карактеристични равенки имаат иста дискриминанта Δ . Според тоа можеме да заклучиме дека дискриминантата како бројна карактеристика е инваријантна во однос на трансформацијата (2).

Со смената

$$y = (x-x_1)^{\frac{\alpha-1}{2}}(x-x_2)^{\frac{\beta-1}{2}} w \ ,$$

диференцијалната равенка (1) се трансформира во диференцијална равенка од вид (нормален вид) :

$$4(x-x_1)^2 (x-x_2)^2 w'' + (a_2 x^2 + a_1 x + a_0)w = 0.$$

Соодветната карактеристична равенка за оваа диференцијална равенка е квадратната равенка

$$t^2 - t + \frac{a_2}{4} = 0$$

и може да се покаже дека и дискриминантата на оваа квадратна равенка е еднаква на Δ.

II. Нека е дадена линеарна диференцијална равенка од втор ред од вид

$$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\, y'' + (b_2x^2 + b_1 x + b_0)y' + (c_1x + c_0)\, y = 0 \qquad (10)$$

каде $x_1 \neq x_2 \neq x_3$, b_2, b_1, b_0 , c_1, c_0 се реални константи.

Во [1] е покажано дека со трансформацијата дефинирана со

$$y = (x-x_1)^{\alpha}(x-x_2)^{\beta}(x-x_3)^{\gamma} z \qquad (11)$$

диференцијалната равенка (10) се трансформира во најмногу 7 други диференцијални равенки од ист вид :

$$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\, z_1'' + [(2\alpha+ b_2)\, x^2 -(2\alpha\, x_3 + 2\alpha\, x_2 - b_1)\, x + 2\alpha\, x_2 x_3 + b_0]z_1' + \{[\alpha(\alpha-1) + \alpha b_2 + c_1]\, x + \alpha(\alpha-1)(x_1 - x_2 - x_3) + \alpha(b_2x_1 + b_1) + c_0\}z_1 = 0, \qquad (12)$$

$$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\, z_2'' + [(2\beta+ b_2)\, x^2 -(2\beta\, x_1 + 2\beta\, x_3 - b_1)\, x + 2\beta\, x_1x_3 + b_0]z_2' + \{[\beta(\beta-1) + \beta b_2 + c_1]\, x + \beta(\beta-1)(x_2 - x_1 - x_3) + \beta(b_2x_2 + b_1) + c_0\}z_2 = 0, \qquad (13)$$

$$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\, z_3'' + [(2\gamma + b_2)\, x^2 -(2\gamma x_1 + 2\gamma x_2 - b_1)\, x + 2\gamma x_1x_2 + b_0]z_3' + \{[\gamma(\gamma -1) +\gamma b_2 + c_1]\, x + \gamma(\gamma -1)(x_3 - x_1 - x_2) + \gamma(b_2x_3 + b_1) + c_0\}z_3 = 0, \qquad (14)$$

$$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\, z_4'' + [(2\alpha+2\beta+ b_2)\, x^2 -(2\alpha\, x_3 + 2\alpha\, x_2 + 2\beta\, x_1 + 2\beta\, x_3 - b_1)\, x + 2\alpha\, x_2 x_3 + 2\beta\, x_1x_3 + b_0]\, z_4' + \{[2\alpha\beta + \alpha(\alpha-1) + \beta(\beta-1) + (\alpha+\beta)b_2 + c_1]\, x - 2\alpha\beta x_3 +\alpha(\alpha-1)(x_1-x_2 -x_3) + \beta(\beta-1)(x_2-x_1-x_3) + \alpha(b_2x_1 + b_1) +\beta(b_2x_2 + b_1) + c_0\}z_4 = 0, \qquad (15)$$

$$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\, z_5'' + [(2\alpha+2\gamma + b_2)\, x^2 -(2\alpha\, x_3 + 2\alpha\, x_2 + 2\gamma x_1 + 2\gamma x_2 - b_1)\, x + +2\alpha\, x_2 x_3 +2\gamma x_1x_2 + b_0]z_5' + \{[2\alpha\gamma + \alpha(\alpha-1) + \gamma(\gamma -1) + (\alpha+\gamma)b_2 + c_1]\, x - 2\alpha\gamma x_2 + \alpha(\alpha-1)(x_1-x_2-x_3) + \gamma(\gamma -1)(x_3-x_1-x_2) + \alpha(b_2x_1 + b_1) + \gamma(b_2x_3 + b_1) + c_0\}z_5 = 0, \qquad (16)$$

$$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\, z_6'' + [(2\beta+2\gamma + b_2)\, x^2 -(2\beta\, x_1 + 2\beta\, x_3 + 2\gamma x_1 + 2\gamma x_2 - b_1)\, x + +2\beta\, x_1x_3 +2\gamma x_1x_2 + b_0]z_6' + \{[2\beta\gamma + \beta(\beta-1) + \gamma(\gamma -1) + (\beta+\gamma)b_2 + c_1]\, x - 2\beta\gamma x_1 + \beta(\beta-1)(x_2-x_1-x_3) + \gamma(\gamma-1)(x_3-x_1-x_2) + \beta(b_2x_2 + b_1) +\gamma(b_2x_3 + b_1) + c_0\}z_6 = 0, \qquad (17)$$

$$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\, z_7'' + [(2\alpha+2\beta+2\gamma + b_2)\, x^2 - (2\alpha\, x_3 + 2\alpha x_2 + 2\beta\, x_1 + 2\beta\, x_3 + 2\gamma x_1 + 2\gamma x_2 - b_1)\, x + 2\alpha\, x_2 x_3 + 2\beta\, x_1x_3 +2\gamma x_1x_2 + b_0]z_7' + \{[2\alpha\beta + 2\alpha\gamma +2\beta\gamma + \alpha(\alpha-1)+ \beta(\beta-1) + \gamma(\gamma -1) +(\alpha+\beta+\gamma)b_2 + c_1]\, x - 2\alpha\beta x_3 - 2\alpha\gamma x_2 - 2\beta\gamma x_1 + \alpha(\alpha-1)(x_1- x_2- x_3) + \beta(\beta-1)(x_2- x_1- x_3) + \gamma(\gamma -1)(x_3 - x_1- x_2) + \alpha(b_2x_1 + b_1) +\beta(b_2x_2 + b_1) +\gamma(b_2x_3 + b_1)+ c_0\}z_7 = 0, \qquad (18)$$

каде

$$\alpha = 1 - \frac{b_2x_1^2 + b_1x_1 + b_0}{(x_3 - x_1)(x_2 - x_1)}, \quad \beta = 1 - \frac{b_2x_2^2 + b_1x_2 + b_0}{(x_1 - x_2)(x_3 - x_2)},$$

$$\gamma = 1- \frac{b_2x_3^2 + b_1x_3 + b_0}{(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)}.$$

Соодветната карактеристична равенка за равенката (10) е квадратната равенка

$$t^2 + (b_2 - 1)t + c_1 = 0,$$

чија дискриминанта е $\Delta = (b_2 - 1)^2 - 4c_1$.

Може да се покаже дека сите карактеристични равенки за диференцијалните равенки (12),(13),(14),(15),(16),(17),(18), добиени со трансформацијата (11), кои се од ист вид со равенката (10), имаат иста дискриминанта Δ.

On Invariation for a class of differential equations of the second order numerical characteristic

Boro Piperevski
Faculty of Electrical Engineering, P.O.Box 574, Skopje, Macedonia
e–mail: borom@etf.ukim.edu.mk

Abstract:

In this article a class of differential equations (1),(3),(4),(5), connected with the transformation (2), is considered. It is showh that all equations have the same discriminant of its characteristic equations (6),(7),(8),(9). Also the same conclution can be deduced for the class of differential equations (10),(12),(13),(14),(15),(16),(17),(18), which are gotton with the transformation (11).

key words: invariantion, differential equation, transformation

ЛИТЕРАТУРА

1. Boro Piperevski: One transformation of a class of linear differential equations of the second order, Proceedings, Department of Electrical Engineering, tome 6-7, (27-34) 1990, Skopje, Macedonia.
2. Boro Piperevski: On the existence and construction of the racional solutions of a class of linear differential equations of the second order with polynomial coefficients , СМИМ, Математички билтен бр.21 (21-26) 1997, Skopje, Macedonia.

8 МСДР 2004, (21 - 32)
Зборник на трудови
30.09.- 03.10.2004 год.
Охрид, Македонија

ISBN 9989 – 630 – 49 – 6
COBISS.MK – ID 61901322

On the relation between some problems in Number theory, Orthogonal polynomials and Differential equations

Tonko Tonkov
E-mail: tonkov@mail.mgu.bg

Abstract: The author discuss a special procedure and deduces two theorems, which proofs are based on the Analysis and some properties of Chebishev polynomials.

Key words: *monotonic functions, Chebishev polynomials*, *divisor problem* in number theory, and *differential equations* of second order.

1. Introduction

Let $\tau(n)$ be the number of positive divisors of a natural integer number n and let $T(n)$ be its summatory function. Then we have

$$T(n)=\sum_{m\le n}\tau(m)=\sum_{m\le n}\sum_{xy=m}1=\sum_{x\le n}\left[\frac{n}{x}\right],$$

where $[a]$ means the integer parts of a.

Firstly P. G. Lejene Dirichlet [1] in 1849 evaluated $T(n)$, proving that

(1) $$T(n)=n(\ln n+2\gamma-1)+\Delta(n)$$

and

(2) $$\Delta(n)=O(\sqrt{n}),$$

where $\gamma=0,5772...$ is the Euler constant.

Dirichlet avoided the trivial evaluation

$$T(n) = \sum_{x \le n} \frac{n}{x} + O(n) = n \ln n + O(n)$$

by using the identity

(3) $$T(n) = -\mu\nu + \sum_{x \le \mu} \left[\frac{n}{x} \right] + \sum_{x \le \nu} \left[\frac{n}{\nu} \right],$$

where $\mu(\mu+1) \ge n$, $\nu = \left[\frac{n}{\mu} \right]$.

From (3) for $\mu = \nu = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ it follows

(4) $$T(n) = 2 \sum_{x \le \sqrt{n}} \left[\frac{n}{x} \right] - \left[\sqrt{n} \right]^2 .$$

Dirichlet deduced (1) and (2) directly from (4) by using the equality

$$\sum_{x \le \sqrt{n}} \left[\frac{n}{x} \right] = \sum_{x \le \sqrt{n}} \frac{n}{x} - \rho_n\left(\sqrt{n}\right) = n\left(\ln \sqrt{n} + \gamma\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) - \rho_n\left(\sqrt{n}\right),$$

where

$$\rho_n(m) = \sum_{x \le m} \left(\frac{n}{x} - \left[\frac{n}{x} \right] \right),$$

and $\rho_n(m) = O(m)$ as a trivial estimation.

The so called "Divisor problem" (of Dirichlet) consists of estimating the error term $\Delta(n)$ in (1) with possibly better order. The brief history consists of the following records:

Voronoj [2] in 1903: $O\left(n^{\frac{1}{3}} \ln n \right)$, by using Farrey sequences;

Van der Corput [3] in 1928: $O\left(n^{\frac{27}{82}} \right)$, with special exploration of exponential sums;

Kolesnik [4] in 1985: $O\left(n^{\frac{139}{429}}\right)$, who approved the method of Van der Corput;

Iwaniec and Mozzochi [5] in 1988: $O\left(n^{\frac{7}{22}}\right)$, who studied the number of integer points not only beneath the hyperbola (Divisor problem), but also the number of integer points in the circle (Circle problem) with equal success.

The last record is due to M. Huxley [6], who proved that $\Delta(n) = O\left(n^{\frac{23}{73}}(\ln n)^{\frac{461}{146}}\right)$. Huxley studied the number of integer points (lattice points) in a closed curve, as well as the number of unit squares which centres lie within the curve.

The lattice theory or *gitterpunktlehre* origins from Gauss`s investigation about the integer points in the circle and from the cited above Dirichlet`s work [1].

2. About a special procedure

Now we will describe a special procedure, which we described firstly in [7] in 1994. We generalize the idea of Dirichlet, hidden in the identity (3) (in (4) particularly). Geometrical point of view shows, that Dirichlet divided the graph of the hyperbola $y = n/x$ into two pieces by the dividing point $x = \mu$ (particularly $x = [\sqrt{n}]$) and in the second piece the roles of x and y are changed.

We divide the graph of the line $y = f(x)$ into pieces by the following procedure.

Let $y = f(x)$ be a real monotonic (strictly increasing or decreasing) function in the interval $[a, b]$ and let $\varphi(x)$ be its inverse function. We divide the graph of $f(x)$ into $k+1$ parts by dividing points x_1, $x_2, \ldots,$ x_κ, $a < x_1 < x_2 < \ldots x_k < b$ by the following way: the first, the third etc parts (for the intervals (a, x_1), (x_2, x_3) etc.) we project orthogonally on the axe Ox; the second, the fourth etc. parts (for the intervals (x_1, x_2), (x_3, x_4) etc.) we project orthogonally on Oy; all projections must be equal, and tend to 0, when $\kappa \to \infty$.

This procedure gives us the following equations, if $f(x)$ is increasing:

(5`) $\quad x_1 - a = x_3 - x_2 = \ldots = \begin{cases} x_{2r-1} - x_{2r-2}, & k = 2r-1; \\ x_{2r-1} - x_{2r-2} = b - x_{2r}, & k = 2r; \end{cases} =$

(5``) $\quad = f(x_2) - f(x_1) = \ldots = f(x_{2r-2}) - f(x_{2r-3}) =$

$$= \begin{cases} f(b) - f(x_{2r-1}), & k = 2r-1; \\ f(x_{2r}) - f(x_{2r-1}), & k = 2r. \end{cases}$$

We will eliminate x_2, $x_3, \ldots,$ x_κ. From (5`) and (5``) we get

$$f(x_2) = x_1 - a + f(x_1);, \; x_2 = \varphi(x_1 - a + f(x_1));$$

$$x_3 = x_1 - a + x_2 = x_1 - a + \varphi(x_1 - a + f(x_1));$$

$$f(x_4) = x_1 - a + f(x_3); \; x_4 = \varphi(x_1 - a + f(x_1 - a + \varphi(x_1 - a + f(x_1))));$$

$$x_5 = x_1 - a + x_4 = x_1 - a + \varphi(x_1 - a + f(x_1 - a + \varphi(x_1 - a + f(x_1))));$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f(x_{2s}) = x_1 - a + f(x_{2s-1}); \; x_{2s} = \varphi(x_1 - a + f(x_1 - a + \ldots + f(x_1)\ldots));$$

$$x_{2s+1} = x_1 - a + x_{2s} = x_1 - a + \varphi(x_1 - a + f(x_1 - a + \varphi(x_1 - a + \ldots$$
$$+ \varphi(x_1 - a + f(x_1))\ldots)))$$

where we have s times φ and f, $1 \le s \le \dfrac{k-1}{2}$.

But

$f(b) - f(x_{2r-1}) = x_1 - a$ and $b = \varphi(x_1 - a + f(x_{2r-1}))$ for $k = 2r-1$;
$b - x_{2r} = x_1 - a$ and $b = x_1 - a + x_{2r} = x_1 - a + \varphi(x_1 - a + f(x_{2r-1}))$ for $k = 2r$,

and we have

$$b = F_{2r}(z_r) \text{ for } k = 2r-1,$$

and

$$b = z_r + F_{2r}(z_r) \text{ for } k = 2r,$$

where $z_r = x_1 - a$ and

(6) $\quad F_{2r}(z) = \varphi\big(z + f\big(z + \varphi\big(z + f\big(z + \ldots + \varphi\big(z + f(z+a)\big)\ldots\big)\big)\big)\big)$

(r times φ and f).

We get similar results, if $f(x)$ is decreasing (in the system of equations we will have the differences $f(x_i) - f(x_{i+1})$ instead of $f(x_{i+1}) - f(x_i)$ for the case of increasing functions):

$$b = G_{2r}(z_r) \text{ for } k = 2r-1$$

and

$$b = z_r + G_{2r}(z_r) \text{ for } k = 2r,$$

where $z_r = x_1 - a$ and

(7) $$G_{2r}(z) = \varphi\big(-z + f\big(z + \varphi\big(-z + f\,\big(z + \ldots + \varphi\big(-z + f(z+a)\big)\ldots\big)\big)\big)\big)$$

(r times φ and f).

The sum of all projections will be: $L_k = (k+1)z_k$. If $k \to \infty$, then $x_1 \to a$ and $z_r \to 0$. We introduce also the designation $L = \lim\limits_{k\to\infty}(k+1)z_r$. This constant, when exists, characterizes very special properties of $f(x)$, but we will not discuss L here.

3. The relation between orthogonal polynomials and differential equations

The relation between orthogonal polynomials and differential equations is well known. This relation is presented by the equations of the form

$$A(x)\, y'' + \big(B(x) + A'(x)\big)\, y' + C\, y = 0,$$

where $A(x)$ and $B(x)$ are polynomials, and C is a constant.

In the particular case of the equation

$$(1-x^2)\, y'' - x\, y' + n^2\, y = 0,$$

its roots are the Chebyshev`s polynomials of first kind. On the other hand, the roots of these polynomials can be find geometricaly: we divide the semicircumference into parts with equal length; then the projections of the dividing points on Ox are the roots (see for instance [8], p. 69). This procedure is different from our. But we will show that the Chebyshev`s polynomials are in liaison with our procedure too, proving the following

Theorem 1. If $f(x) = \dfrac{1}{x}$ in the interval (α, β), $0 < \alpha < \beta$, then

(8) $$G_{2s}(z) = -\frac{\sin\left(2s \arccos\dfrac{z}{2}\right) + \alpha \sin\left((2s-1)\arccos\dfrac{z}{2}\right)}{\sin\left((2s+1)\arccos\dfrac{z}{2}\right) + \alpha \sin\left(2s \arccos\dfrac{z}{2}\right)},$$

where $G_{2s}(z)$ is defined in (7).

Proof. Let $f(x)=\frac{1}{x}$ in the interval (α,β), $\left(\alpha=\frac{a}{\sqrt{n}},\ \beta=\frac{b}{\sqrt{n}}\right)$. Then $\varphi(x)=f(x)=\frac{1}{x}$. We put

(9) $$G_0(z)=G_0=\alpha.$$

Then from (7) we get

(10) $$G_2(z)=\varphi\left(-z+f\left(z+G_0\right)\right)=\frac{1}{-z+\frac{1}{z+G_0}}=\frac{z+G_0}{-z^2-G_0z+1}=$$
$$=-\frac{z+G_0}{z^2+G_0z-1},$$

and in general,

(11) $$G_{2s}(z)=\varphi\left(-z+f\left(z+G_{2s-2}(z)\right)\right)=\frac{1}{-z+\frac{1}{z+G_{2s-2}(z)}}=.$$
$$=-\frac{z+G_{2s-2}(z)}{z^2-1+zG_{2s-2}(z)}.$$

Let us introduce the following system of polynomials:

(12) $$H_0=1,\ H_1=z,$$

and for any integer $s\geq 1$

(13) $$H_{s+1}(z)=zH_s(z)-H_{s-1}(z)$$

It is easy to prove that

(14) $$G_0(z)=\alpha H_0,$$

and

(15) $$G_{2s}(z)=-\frac{H_{2s-1}(z)+\alpha H_{2s-2}(z)}{H_{2s}(z)+\alpha H_{2s-1}(z)}.$$

The equality (14) follows from (9) and (12). The equality (15) can be proved by mathematical induction. Indeed, for $s=1$, as $H_2(z)=z^2-1$, we have

$$G_2(z)=-\frac{H_1(z)+\alpha H_0(z)}{H_2(z)+\alpha H_1(z)}=-\frac{z+\alpha}{z^2-1+\alpha z},$$

which coincides with (11) for $s=1$.

Let be (15) for some natural s. Then for $s+1$ we will have

$$G_{2s+2}(z) = -\frac{z + G_{2s}(z)}{z^2 - 1 + zG_{2s}(z)} = -\frac{z - \dfrac{H_{2s-1} + \alpha H_{2s-2}}{H_{2s} + \alpha H_{2s-1}}}{z^2 - 1 - \dfrac{zH_{2s-1} - \alpha zH_{2s-2}}{H_{2s} + \alpha H_{2s-1}}} =$$

$$= -\frac{zH_{2s}\alpha zH_{2s-1} - H_{2s-1} - \alpha H_{2s-2}}{(z^2-1)(H_{2s} + \alpha H_{2s-1}) - zH_{2s-1} + \alpha zH_{2s-2}} =$$

$$= -\frac{zH_{2s} - H_{2s-1} + \alpha z(zH_{2s-1} - H_{2s-2})}{z(zH_{2s} - H_{2s-1}) - H_{2s} + \alpha z(zH_{2s-1} - H_{2s-2}) - \alpha H_{2s-1}} =$$

$$= -\frac{H_{2s+1} + H_{2s}}{zH_{2s+1} - H_{2s} + \alpha(zH_{2s} - H_{2s-1})} = -\frac{H_{2s+1} + \alpha H_{2s-1}}{H_{2s+2} + \alpha H_{2s+1}}$$

or

$$G_{2s+2}(z) = -\frac{H_{2s+1} + \alpha H_{2s-1}}{H_{2s+2} + \alpha H_{2s+1}},$$

which is the equality (15) for $s+1$. So (15) is proved by mathematical induction.

But the linear relation (13) shows, that H_0, H_1, H_2, … are orthogonal polynomials as a variant of the well known polynomials of Chebyshev of second kind $\widetilde{U}_n(x)$, defined by the following relations:

$$\widetilde{U}_0(x) = 1,\ \widetilde{U}_1(x) = x, \text{ and}$$

(16) $$\widetilde{U}_{n+1}(x) = x\widetilde{U}_n(x) - \frac{1}{4}\widetilde{U}_{n-1}(x) \text{ for } n \geq 1.$$

We will prove, that for the polynomials $H_n(z)$ we have

(17) $$H_n(z) = 2^n \widetilde{U}_n\left(\frac{z}{2}\right).$$

Really, $H_0(z) = 2^0 \widetilde{U}_0\left(\frac{z}{2}\right) = 1$, $H_1(z) = 2\,\widetilde{U}_1\left(\frac{z}{2}\right) = 2.\frac{z}{2} = z$, and the relation (13), by the hypotheses (17), became

$$2^{n+1}\widetilde{U}_{n+1}\left(\frac{z}{2}\right) = z2^n\widetilde{U}_n\left(\frac{z}{2}\right) - 2^{n-1}\widetilde{U}_{n-1}\left(\frac{z}{2}\right),$$

or

$$\widetilde{U}_{n+1}\left(\frac{z}{2}\right) = \frac{z}{2}\widetilde{U}_n\left(\frac{z}{2}\right) - \frac{1}{4}\widetilde{U}_{n-1}\left(\frac{z}{2}\right),$$

which is (16) for $x = \frac{z}{2}$.

The polynomials of Chebyshev $\widetilde{U}_n(x)$ are orthogonal in $(-1, 1)$ with respect to $\sqrt{1-x^2}$. This means, that the polynomials $H_n(z)$ are orthogonal in $(-2, 2)$ with respect to $\sqrt{4-x^2}$.

The very known explicite expression of $\widetilde{U}_n(x)$ is

$$\widetilde{U}_n(x) = \frac{1}{2^n}\frac{\sin\left((n+1)\arccos x\right)}{\sqrt{1-x^2}}$$

and we have

$$H_n(z) = 2^n \widetilde{U}_n\left(\frac{z}{2}\right) = \frac{2\sin\left((n+1)\arccos\frac{z}{2}\right)}{\sqrt{4-z^2}}. \tag{18}$$

Substituting (18) in (15), we receive (8) and the theorem 1 is proved.

Remark. For some calculations equality (15) can by more suitable, and we can formulate as proved the following

Theorem 2. If $f(x) = \frac{1}{x}$ in the interval (α, β), $0 < \alpha < \beta$, then

$$G_{2s}(z) = -\frac{H_{2s-1}(z) + \alpha H_{2s-2}(z)}{H_{2s}(z) + \alpha H_{2s-1}(z)}$$

with the previous notations.

For clarity of our procedure, we present the following

An Example. For the case of hyperbola $f(x) = \varphi(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (\alpha, \beta)$, $0 < \alpha < \beta$ with 4 dividing points, $k = 2r$, $r = 2$, we will have the following system:

$$x_1 - \alpha = x_3 - x_2 = \beta - x_4 = f(x_1) - f(x_2) = f(x_3) - f(x_4),$$

which is equivalent to

$$\begin{cases} x_2 = \varphi\left(-(x_1-\alpha) + f(x_1)\right) \\ x_3 = x_1 - \alpha + \varphi\left(-(x_1-\alpha) + f(x_1)\right) \\ x_4 = \varphi\left(-(x_1-\alpha) + f(x_3)\right) = \varphi\left(-(x_1-\alpha) + f\left(x_1 - \alpha + \varphi\left(-(x_1 = \alpha) + f(x_1)\right)\right)\right) \\ x_1 - \alpha = \beta - x_4 \end{cases}$$

or

$$
(19)\qquad \begin{cases}
x_2 = \dfrac{1}{-z+\dfrac{1}{z+\alpha}} \\
x_3 = z+\dfrac{1}{-z+\dfrac{1}{z+\alpha}} \\
x_4 = \dfrac{1}{-z+\dfrac{1}{z+\dfrac{1}{-z+\dfrac{1}{-z+\dfrac{1}{z+\alpha}}}}}, \\
z = x_1-\alpha = \beta - x_4
\end{cases}
$$

where z is the same as $z_r = z_2$ in the previous notation.

For the function $G_{2r}(z)$ we will have

$$
\begin{aligned}
G_4(z) = x_4 &= \varphi\left(-(x_1-\alpha)+f(x_3)\right) = \varphi\left(-(x_1-\alpha)+f\left(x_1-\alpha+\varphi\left(-(x_1-\alpha)+f(x_1)\right)\right)\right) = \\
&= \varphi\left(-z+f\left(z+\varphi\left(-z+f(z+\alpha)\right)\right)\right)
\end{aligned}
$$

or

$$
G_4(z) = \frac{1}{-z+\dfrac{1}{z+\dfrac{1}{-z+\dfrac{1}{z+\alpha}}}} = \frac{1}{-z+\dfrac{1}{z+\dfrac{z+\alpha}{-z^2-z\alpha+1}}} =
$$

$$
= \frac{1}{-z+\dfrac{-z^2-z\alpha+1}{-z^3-z^2\alpha+2z+\alpha}} =
$$

$$
= \frac{-z^3-z^2\alpha+2z+\alpha}{z^4+z^3\alpha-2z^2-\alpha z-z^2-z\alpha+1} = -\frac{z^3-2z+\alpha\left(z^2-1\right)}{z^4-3z^2+1+\alpha\left(z^3-2z\right)} =
$$

.

$$
= -\frac{H_3(z)+\alpha H_2(z)}{H_4(z)+\alpha H_3(z)}
$$

It is easily to calculate the system (19) by using the computer system Mathematica, (where ChebyshevU[n, $z/2$] : $=H_n(z)$). We receive, with 5-digit precision,

Solve[{x2==1/(-z+1/(z+o.25)),

x3 == z+1/(-z+1/(z+0.25

x4 == 1/(-z+1/(z+1/(-z+1/(z+0.25)))), z == 4-x4

x1 == 0.25+ 4-x4} , {x1, x2, x3, x4, z}]

{{x1→ -1.43153, x2 →1.01731,

x3 →-0.66422, x4 →5.68153, z →-1.68153},

{x1 →-0.538593, x2 →-0.936247, x3 →-1.72484,

x4 →4.78859, z →-0.788593}, {x1 →0.68284,

x2 →0.969339, x3 →1.40218, x4 →3.56716, z →0.43284},

{x1 →1.78729, x2 →-1.02272, x3 →0.514575, x4 →2.46271,

z →1.53729}, {x1 →4.49999, x2 →-0.248276,

x3 →4.00172, x4 →-0.249994, z →4.24999}}

For our geometrical problem the only solution is: $x_1 = 0{,}68284$, $x_2 = 0{,}969339$, $x_3 = 1{,}40218$, $x_4 = 3{,}56716$. We illustrate our procedure in fig. 1. We comparing it with one dividing point x_1 –the method of Dirichlet – as the positive solution of the equation $x_1 - \alpha = \frac{1}{x_1} - \frac{1}{\beta}$ ($\alpha = 0{,}25$, $\beta = 4$), from where $x_1 = \frac{\alpha\beta - 1 + \sqrt{4b^2 + (\alpha\beta - 1)^2}}{2\beta} = 1$ (fig.2).

In the case of 4 dividing points we have $L_4 = 5(x_1 - \alpha) = 5(0{,}68284 - 0{,}25) = 2{,}1642$; in the case of one dividing point we have $L_1 = 2(x_1 - \alpha) = 2(1 - 0{,}25) = 1{,}5$ and $L_4 > L_1$. But if $\alpha = 0{,}5$, $\beta = 1{,}5$, then $L_4 = 1{,}01888$, $L_1 = 1{,}840266$ and $L_4 < L_1$.

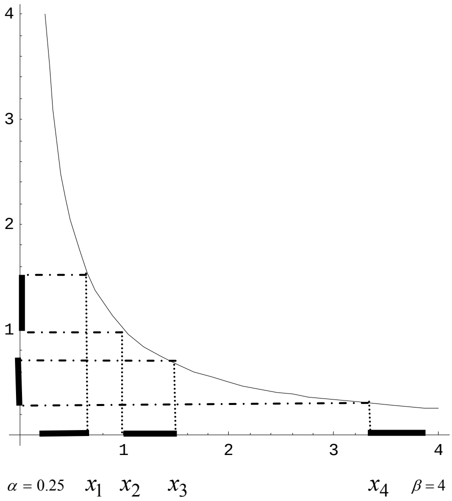

Fig. 1

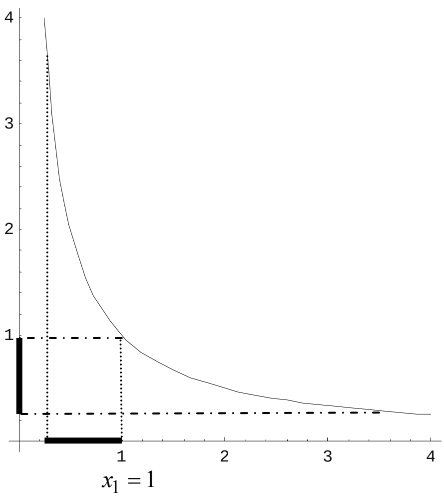

Fig. 2

Reference

[1]. P. G. Lejeune Dirichlet, *Über die Bestimmung der mittleren Werte in der Zahlentheorie*, Abh. Akad. Berlin, (1849), 69 – 83; Werke, 49 – 66, Chelsea Poublishing Company, Bronx, New York.

[2]. G. Voronoi, *Sur une problème du calcul des fonctions asymptotiques,* J. für Math.**126**, 1903, 241 – 282; Collected papers, 1, 1952, 5 – 49.

[3]. J. G. Van der Corput, *Neue zahlentheoretische Abschätzungen. I.* Math. Ann., **89,** 1923, 215 – 254; II. Math. Zeit., **29**, 397 – 426.

[4]. G. Kolesnik, *On the method of exponent pairs*. Acta Arith.XLV, 1985, 115 – 143.

[5]. H. Iwaniec, C. J. Mozzochi, *On the divisor and circle methods*, J. Number Theory, **29**, 1988, 60 – 93.

[6]. M. N. Huxley, *Exponential sums and lattice points II*, Proc. London Math. Soc. (3), **66,** 1993, 279 – 301; Corrigenda **68**, 264.

[7]. T. Tonkov, *On a procedure giving generalized continued fractions,* Orthogonality, Moment Problems and Continued Fractions, an international conference in honor of Thomas Jan Stieltjes Jr., Delft University of Technology, Delft, 1994.

[8]. П. К. Суетин, *Классические ортогональные многочлены*, изд. “Наука”, Москва, 1976.

Tonko Todorov Tonkov,
ul. “Taras Shevchenko” № 20, vhod “V”,
1113 – Sofia, Bulgaria.
E-mail: tonkov@mail.mgu.bg

8 МСДР 2004, (33 - 38)
Зборник на трудови
30.09.- 03.10.2004 год.
Охрид, Македонија

ISBN 9989 – 630 – 49 – 6
COBISS.MK – ID 61901322

ЕГЗИСТЕНЦИЈА И КОНСТРУКЦИЈА НА ПОЛИНОМНО РЕШЕНИЕ НА ЕДНА ПОДКЛАСА ЛИНЕАРНИ ХОМОГЕНИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ ОД ВТОР РЕД

Елена Хаџиева, Боро М. Пиперевски
Електротехнички факултет–Скопје
e–mail: borom@etf.ukim.edu.mk
e–mail: hadzieva@etf.ukim.edu.mk

Апстракт : Во овој труд се разгледува диференцијална равенка од вид (1). Со метод на трансформација и користење на соодветни резултати е издвоена една подкласа диференцијални равенки од вид (1) која има едно полиномно решение за кое е конструирана соодветна формула во конечен вид.

I. Во [1] е покажано дека диференцијална равенка од вид:

$$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)z'' + (\beta_2 x^2 + \beta_1 x + \beta_0)z' + (\gamma_1 x + \gamma_0)\, z = 0, \qquad (1)$$

$x_1 \neq x_2 \neq x_3$, $x_1 \neq x_2$, x_1, x_2, x_3 , β_2 , β_1, β_0, γ_1, $\gamma_0 \in R$.

има едно полиномно решение ако постои природен број n (помалиот ако постојат два) така што да се задоволени условите

$$\begin{gathered} n^2 + (\beta_2 - 1)n + \gamma_1 = 0, \\ \beta_0 + x_2x_3 - (x_2+x_3)x_1 + (\beta_2+1)x_1^2 + \beta_1 x_1 = 0, \\ \gamma_0\beta_1 + \gamma_0^2 - \gamma_1\beta_0 + (\gamma_1+\beta_2)(\gamma_1 x_1 + 2\gamma_0)x_1 = 0, \end{gathered} \qquad (2)$$

При тоа општото решение е дадено со формулата

$$z = e^{-F}\{(x+K)(x-x_2)^{n-1}(x-x_3)^{n-1} e^{F} [C_1 + C_2 \int (x-x_1)^{n-1}(x-x_2)^{1-n}(x-x_3)^{1-n}(x+K)^{-2}\, dx\,]\, \}^{(n-1)},$$

каде што

$$F = \int \frac{Mx + N}{(x - x_2)(x - x_3)}, \quad M=\beta_2-1, \qquad N=\beta_1+x_1+ x_1\beta_2,$$

$$K = -\frac{x_1\gamma_1 + n(\beta_1 + 2x_1\beta_2 + x_1\gamma_1 + \gamma_0)}{\gamma_1}$$

Во [2] е покажано дека истата равенка (1) има едно полиномно решение ако постои природен број n така што да се задоволени условите

$$\begin{aligned} n^2 + (\beta_2- 1)n + \gamma_1 &= 0, \\ 3n(n+1) + 2(n+1)\beta_2 + \gamma_1 &= 0, \\ n(n+1)(-x_1 - x_2 - x_3) + (n+1)\beta_1 + \gamma_0 &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

При тоа општото решение е дадено со формулата

$$z = AF^{-1}[A^nF(C_1 + C_2 \int A^{-(n+1)} F^{-1} dx)]^{(n+1)},$$

каде што $A = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$, $B = \beta_2x^2 + \beta_1x + \beta_0$, $F = e^{\int \frac{B}{A}dx}$.

II. Нека е дадена диференцијалната равенка од вид:

$$(x-x_1)(x-x_2)y'' + (b_1x+b_0)y' + c_0y = 0, \tag{4}$$

$x_1 \neq x_2$, $x_1, x_2, b_1, b_0, c_0 \in R$.

Во [3] е покажано дека равенката (4) има општо решение полином ако и само ако постојат природни броеви m и n така што се задоволени условите

$$\begin{aligned} &n(n-1) + nb_1 + c_0 = 0, \\ &(2n + m - 1) + b_1 = 0 \\ &(r + n)x_2 + (m + n - r - 1)x_1 - b_0 = 0, \end{aligned} \tag{5}$$

за некое $r \in \{0, 1, 2, ..., m-1\}$.

Со користење на условите (5), класата линеарни диференцијални равенки (4) кои имаат општо решение полином го има следниот општ вид:

$$(x-x_1)(x-x_2)y'' - [(2n+m-1)x-(r+n)x_2 -$$
$$(m+n-r-1)x_1]y' + n(n+m)y = 0\,, \tag{6}$$

и општото решение ќе биде дадено со формулата

$$y = C_1P_n(x) + C_2P_{n+m}(x),$$

односно

$$y = C_1(x-x_1)^{n+r+1}(x-x_2)^{n+m-r}\frac{d^n}{dx^n}[(x-x_1)^{-r-1}(x-x_2)^{-m+r}] +$$
$$+ C_2(x-x_1)^{n+r+1}(x-x_2)^{n+m-r}\frac{d^n}{dx^n}[(x-x_1)^{-r-1}(x-x_2)^{-m+r}$$
$$\int (x-x_1)^r(x-x_2)^{m-r-1}dx]\ . \tag{7}$$

Со замената y = x z , равенката (4) се трансформира во равенката

$$x(x-x_1)(x-x_2)z'' + [(b_1+2)x^2 + (b_0 - 2x_1 - 2x_2)x + 2x_1x_2]z' +$$
$$[(b_1 + c_0)x + b_0]z = 0, \tag{1'}$$

односно равенката

$$x(x-x_1)(x-x_2)z'' + (\beta_2x^2 + \beta_1x + \beta_0)z' + (\gamma_1x + \gamma_0)z = 0, \tag{1''}$$

Оваа равенка припаѓа на класата диференцијални равенки од вид (1) која е изучувана во трудовите [1,2] . Како што е покажано во точка I., во тие трудови се добиени повеќе групи доволни услови за егзистенција и конструкција на едно полиномно решение.

Нека за диференцијалната равенка (1') односно (1") се задоволени условите (5) и нека $y_1 = P_n(x)$ и $y_2 = P_{n+m}(x)$ се полиномните решенија на равенката (4) односно (6).
Во согласност со замената равенката (1') односно (1") има две решенија $z_1 = \frac{1}{x}P_n(x)$, $z_2 = \frac{1}{x}P_{n+m}(x)$, кои во општ случај не се полиноми.

Нека формираме линеарна комбинација $\lambda P_n(x) + P_{n+m}(x)$ и нека го определиме λ така што $\lambda P_n(x) + P_{n+m}(x) = x\,Q_{n+m-1}(x)$, при што $Q_{n+m-1}(x)$ е полином од $n + m - 1$ ви степен. Во согласност со смената полиномот $Q_{n+m-1}(x)$ ќе биде едно партикуларно решение на равенката (1') односно (1") . Со тоа е докажана следната теорема:

ТЕОРЕМА: Нека е дадена диференцијалната равенка (1') односно (1") . Ако постојат природни броеви m и n така што се задоволени условите

$$\begin{aligned} &n^2+(\beta_2-3)n+\gamma_1-\beta_2+2=0,\\ &2n+m+\beta_2-3=0 \qquad\qquad (8)\\ &(r+n)x_2+(m+n-r-1)x_1-\gamma_0=0, \end{aligned}$$

за некое r ∈ {0, 1, 2, ..., m -1}, тогаш равенката (1') односно (1") има едно полиномно решение дадено со формулата

$$z=\frac{1}{x}[\lambda P_n(x)+P_{n+m}(x)], \qquad (9)$$

каде што полиномите $P_n(x)$ и $P_{n+m}(x)$ се дадени со формулите (7). При тоа параметарот λ е определен со тоа што слободниот член на полиномот $\lambda P_n(x)+P_{n+m}(x)$ да биде еднаков на нула.

Во согласност со равенката (6), равенката (1') односно (1"), класата равенки дефинирана со теоремата ќе го има општиот вид:

$$x(x-x_1)(x-x_2)z''+\{(3-2n-m)x^2+[(n+m-r-3)x_1+(n+r-2)x_2]x+$$

$$+2x_1x_2\}z'+[(n^2-2n+nm-m+1)x+(n+m-r-1)x_1+(n+r)x_2]z=0.$$

III. Пример 1. Диференцијалната равенка

$$x(x-1)(x-2)z''+(-3x^2+2x+4)z'+8z=0,$$

ги задоволува условите од теоремата и во согласност со формулата (9) има едно полиномно решение

$$z=3x^4-20x^3+50x^2-60x+30.$$

Општото решение ќе биде дадено со формулата

$$z = C_1(3x^4 - 20x^3 + 50x^2 - 60x + 30) + C_2\frac{5x-8}{x}.$$

Пример 2. Диференцијалната равенка

$$x(x-1)(x-2)z'' + (-3x^2 + x + 4)z' + (3x + 7)z = 0,$$

ги задоволува условите од теоремата и во согласност со формулата (9) има едно полиномно решение

$$z = 11x^3 - 88x^2 + 168x - 96 .$$

Општото решение ќе биде дадено со формулата

$$z = C_1(11x^3 - 88x^2 + 168x - 96) + C_2\frac{6x^2 - 16x + 11}{x}.$$

Пример 3. Диференцијалната равенка

$$x(x-1)(x-2)z'' + (x^2 + 7x - 2)z' + (-4x + 1)z = 0,$$

ги задоволува условите (2) и има едно полиномно решение

$$z = x^2 + 3x + 6.$$

Пример 4. Диференцијалната равенка

$$x(x-1)(x-2)z'' - (2x^2 + x + 1)z' + (2x + 8)z = 0,$$

ги задоволува условите (3) и има едно полиномно решение

$$z = 9x^2 - 2x - 2.$$

Забелешка 1. Диференцијалните равенки дадени во примерите 1 и 2 не ги задоволуваат условите (2) и (3) т.е. не припаѓа на класите диференцијални равенки третирани во трудовите [1] и [2]. Лесно може да се покаже дека диференцијалните равенки дадени во примерите 3 и 4 кои ги задоволуваат условите (2) односно (3), не ги задоволуваат условите од теоремата. Според тоа може да се заклучи дека е проширена класата диференцијални равенки од вид (1) кои имаат едно полиномно решение.

Забелешка 2. Диференцијалните равенки од вид (1) кои ги задоволуваат условите од теоремата можат да имаат и општо решение полином ако се додаде условот полиномното решение $P_n(x)$ на диференцијалната равенка (4) дадено со соодветната формула да има слободен член еднаков на нула.

Забелешка 3. Во [4] е покажано дека комплексните полиноми кои се решенија на диференцијални равенки од класата (1) кои ги задоволуваат условите (2), се ортогонални на кружен лак.

On existention and construction of polynomial solution of a subclass linear homogeneous differential equations of second order

Elena Hadzieva, Boro M. Piperevski
Department of Electrical Engineering
hadzieva@etf.ukim.edu.mk ; borom@etf.ukim.edu.mk

Abstract:
In this article we observe differential equation of type (1). By method of transformation and by using some previous results, we come to a subclass of differential equations of type (1) which has one polynomial solution. A formula of that solution is constructed.

Литература

1. Boro Piperevski : Sur une formule de solution polynomme d'une classe d'equations dofferentielles lineares du duxieme ordre., Bulletin mathematique de la SDM de SRM , tome 7-8 , p. 10-15, 1983/84, Skopje

2. Boro Piperevski : One generalization for ones of Rodriges' formula ; Proceedings, Department of Electrical Engineering, tome 5 (1987) p.93-98 , Skopje

3. Boro Piperevski; Sur des equations differentielles lineaires du duxieme ordre qui solution generale est polinome, Department of Electrical Engineering, Proceedings N^0 4, year 9, 13-17, Skopje, 1986

4. Boro Piperevski; On complex polynomials orthogonal to circle arc, Седми македонски симпозиум по диференцијални равенки, Зборник на трудови, стр. 21 - 26 , Охрид, 2002.

8 МСДР 2004, (39 - 48)
Зборник на трудови
30.09.- 03.10.2004 год.
Охрид, Македонија

ISBN 9989 – 630 – 49 – 6
COBISS.MK – ID 61901322

ЗА НЕКОИ ХОМОГЕНИ ПРОБЛЕМИ СО СОПСТВЕНИ ВРЕДНОСТИ ОД ТРЕТ РЕД

Слободанка С. Георгиевска
Градежен факултет, Скопје
e-mail: slobodanka@gf.ukim.edu.mk

Апстракт. *Во оваа нота се определени контурени проблеми (проблеми со сопствени вредности) од трет ред чие решение (сопствени функциии) е хомогена функција од втора степен од решението (сопствената функција) и неговиот (нивниот) извод од контурен проблем (проблем со сопствени вредности) од втор ред*

0. Вовед

Проблемите со сопствени вредности како и контурните проблеми со диференцијална равенка од непарен ред поретко се предмет на разгледување во смисол на нивно решавање. Од тие причини на мислење сме дека определувањето на нивните решенија (сопствени функции) со помош на проблеми кои се полесно решливи, кои се од понизок ред е од интерес.

Овде ќе се определува решение на една класа контурни проблеми од трет ред со помош на контурни проблеми од втор ред.

Така во трудот [1] опререлено е решение на контурен проблем од n+1-ви ред чие решени е n-та степен од решението на контурен проблем од втор ред.

Во трудот [2] определено е решение на контурни проблеми од трет и четврти ред како производ на два контурни проблеми од втор ред.

Овде ќе разгледаме контурни проблеми од трети ред чие решение е хомогена функција од втора степен по решението и неговиот извод од контурен проблем од втор ред.

Во трудот [4] определена е диференцијалната равенка од трети ред чии интеграли се производи од интеграли и нивните изводи на линеарни диференцијални равенки од втор ред.

1. Определување на диференцијалната равенка

Нека ни е познато решението на контурниот проблем со диференцијална равенка од втор ред

$$y'' + p\,y' + q\,y = 0, \qquad p, q - \text{константи} \tag{1}$$

и Штурмови контурни услови

$$\alpha_{10} y_a + \alpha_{11} y'_a = 0 \tag{2.1}$$

$$\beta_{20} y_b + \beta_{21} y'_b = 0 \tag{2.2}$$

каде $y_c = y(c), \quad y'_c = y'(c)$ и $c = a, b.$

Диференцијалната равенка

$$\begin{vmatrix} z & A & B & C \\ z' & A_1 & B_1 & C_1 \\ z'' & A_2 & B_2 & C_2 \\ z''' & A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0 \tag{3}$$

каде

$$\begin{aligned} A_i &= -q\,B_{i-1} \\ B_i &= 2\,A_{i-1} - p\,B_{i-1} - 2q\,C_{i-1} \qquad i=1,2,3; \\ C_i &= B_{i-1} - 2p\,C_{i-1} \end{aligned} \tag{4}$$

и

$$A_0 = A, \quad B_0 = B \text{ и } C_0 = C$$

има решение z хомогена функција од втора степен по y и y'

$$z = A\,y^2 + B\,y\,y' + C\,y'^2 \quad (A, B, C \text{ - константи}) \tag{5}$$

каде y е решение на диференцијалната равенка (1), а y' неговиот извод , [4].

2. Определување на контурните услови

За да ги определиме контурните услови со баранато својство за функцијата z, истата ќе ја диференцираме и ќе ги користиме воведените ознаки (4). При тоа се добива системот равенки по y^2, yy', y'^2

$$\begin{aligned} A\,y^2 + B\,y\,y' + C\,y'^2 &= z \\ A_1\,y^2 + B_1\,y\,y' + C_1\,y'^2 &= z' \\ A_2\,y^2 + B_2\,y\,y' + C_2\,y'^2 &= z''. \end{aligned} \tag{6}$$

чие решение е

$$y^2 = \frac{\Delta_{y^2}}{\Delta}, \quad y\,y' = \frac{\Delta_{y\,y'}}{\Delta} \quad \text{и} \quad y'^2 = \frac{\Delta_{y'^2}}{\Delta}, \tag{7}$$

каде

$$\Delta_{y^2} = \begin{vmatrix} z & B & C \\ z' & B_1 & C_1 \\ z'' & B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \qquad \Delta_{y\,y'} = \begin{vmatrix} A & z & C \\ A_1 & z' & C_1 \\ A_2 & z'' & C_2 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{y'^2} = \begin{vmatrix} A & B & z \\ A_1 & B_1 & z' \\ A_2 & B_2 & z'' \end{vmatrix}$$

и

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & C \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Понатаму, ако контурните услови (2.1) ги помножиме соодветно со y_a и y'_a се добиваат равенките

$$\alpha_{10}\, {y_a}^2 + \alpha_{11}\, y_a y'_a = 0$$

$$\alpha_{10}\, y_a\, y'_a + \alpha_{11}\, {y'_a}^2 = 0 \ .$$

Заменувајќи ги изразите (7) соодветно се добива

$$\alpha_{10}\, \Delta_{{y_a}^2} + \alpha_{11}\, \Delta_{y_a y'_a} = 0 \tag{8.1}$$

$$\alpha_{10}\, \Delta_{y_a\, y'_a} + \alpha_{11}\, \Delta_{{y'_a}^2} = 0 \tag{8.2}$$

односно

$$\alpha_{10}\begin{vmatrix} z_a & B & C \\ z'_a & B_1 & C_1 \\ z''_a & B_2 & C_2 \end{vmatrix} + \alpha_{11}\begin{vmatrix} A & z_a & C \\ A_1 & z'_a & C_1 \\ A_2 & z''_a & C_2 \end{vmatrix} = 0 \tag{9.1}$$

$$\alpha_{10}\begin{vmatrix} A & z_a & C \\ A_1 & z'_a & C_1 \\ A_2 & z''_a & C_2 \end{vmatrix} + \alpha_{11}\begin{vmatrix} A & B & z_a \\ A_1 & B_1 & z'_a \\ A_2 & B_2 & z''_a \end{vmatrix} = 0 \tag{9.2}$$

т.е. два контурни услови во точката $x=a$.

Равенките

$$\beta_{20}\begin{vmatrix} z_b & B & C \\ z'_b & B_1 & C_1 \\ z''_b & B_2 & C_2 \end{vmatrix} + \beta_{21}\begin{vmatrix} A & z_b & C \\ A_1 & z'_b & C_1 \\ A_2 & z''_b & C_2 \end{vmatrix} = 0\,, \tag{9.3}$$

$$\beta_{20}\begin{vmatrix} A & z_b & C \\ A_1 & z'_b & C_1 \\ A_2 & z''_b & C_2 \end{vmatrix} + \beta_{21}\begin{vmatrix} A & B & z_b \\ A_1 & B_1 & z'_b \\ A_2 & B_2 & z''_b \end{vmatrix} = 0\,, \tag{9.4}$$

ги определуваат контурни услови во точката $x=b$.

Овие четири равенки (9.1) - (9.4) определуваат $\binom{4}{3}=4$ тројки контурни услови, кои заедно со диференцијалната равенка (3) определуваат $\binom{4}{3}=4$ контурни проблеми кои имаат решение од видот што го бараме, (5)

Ако p и q се параметри тогаш имаме проблеми со сопствени вредности

Пример 1. *За проблемот со сопствени вредности со диференцијална раваенка*

$$y'' + \lambda y = 0, \qquad \lambda\text{-параметар} \tag{10}$$

и контурни услови

$$\begin{aligned} y(a) &= 0. \\ y(b) &= 0 \end{aligned} \tag{11}$$

знаеме дека има сопствени вредности

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{(b-a)^2}$$

и сопствени функции

$$\varphi_n = \sqrt{\frac{2}{b-a}}\, sin\frac{n\pi(x-a)}{b-a} \tag{12}$$

[5, стр.365, **2.9** (а)]

За овој проблем $q=\lambda, p=0$; $\alpha_{10}=1$, $\alpha_{11}=0$ и $\beta_{20}=1$, $\beta_{21}=0$. При овие вредности соодветно диференцијалната равенка (3) го прима видот

$$\begin{vmatrix} z & A & B & C \\ z' & -\lambda B & 2(A-\lambda C) & B \\ z'' & -2\lambda(A-\lambda C) & -4\lambda B & 2(A-\lambda C) \\ z''' & 4\lambda^2 B & -8\lambda(A-\lambda C) & -4\lambda B \end{vmatrix} = 0 \tag{13}$$

Исто така, соодветно и контурните услови (9.1)–(9.4) се од вид

$$\begin{vmatrix} z_a & B & C \\ z'_a & B_1 & C_1 \\ z''_a & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0, \text{ т.е. } \begin{vmatrix} z_a & B & C \\ z'_a & 2(A-\lambda C) & B \\ z''_a & -4\lambda B & 2(A-\lambda C) \end{vmatrix} = 0, \quad (13.1)$$

$$\begin{vmatrix} A & z_a & C \\ A_1 & z'_a & C_1 \\ A_2 & z''_a & C_2 \end{vmatrix} = 0, \text{ т.е } \begin{vmatrix} A & z_a & C \\ -\lambda B & z'_a & B \\ -2\lambda(A-\lambda C) & z''_a & 2(A-\lambda C) \end{vmatrix} = 0, \quad (13.2)$$

$$\begin{vmatrix} z_b & B & C \\ z'_b & B_1 & C_1 \\ z''_b & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0, \text{ т.е. } \begin{vmatrix} z_b & B & C \\ z'_b & 2(A-\lambda C) & B \\ z''_b & -4\lambda B & 2(A-\lambda C) \end{vmatrix} = 0, \quad (13.3)$$

$$\begin{vmatrix} A & z_b & C \\ A_1 & z'_b & C_1 \\ A_2 & z''_b & C_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{т.е } \begin{vmatrix} A & z_b & C \\ -\lambda B & z'_b & B \\ -2\lambda(A-\lambda C) & z''_b & 2(A-\lambda C) \end{vmatrix} = 0. \quad (13.4)$$

Од претходно изложенето може да се констатира дека четири проблеми со сопствени вредности со диференцијална равенка (13) и една тројка од контурните услови (13.1) – (13.4) имаат сопствени функции

$$z_n(x) = \frac{2Cn^2\pi^2}{(b-a)^3} + \frac{2}{b-a}\left(A - \frac{Cn^2\pi^2}{(b-a)^2}\right) sin^2 \frac{n\pi(x-a)}{b-a} + \frac{Bn\pi}{(b-a)^2} sin \frac{2n\pi(x-a)}{b-a}$$

кои го имаат својството да се хомогена функција од втор степен од сопствените функции φ_n (12) и нејзиниот извод, т.е.

$$z_n(x) = A\varphi_n{}^2 + B\varphi_n\varphi_n{}' + C\varphi_n{}'^2$$

Пример 2. *Проблемот со сопствени вредности со диференцијална рваенка* (10) *и контурни услови*

$$y'(a)=0.$$
$$y'(b)=0$$

има сопствени вредности

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{(b-a)^2}$$

и сопствени функции

$$\varphi_n = \sqrt{\frac{2}{b-a}}\, cos\frac{n\pi(x-a)}{b-a}, \quad n \geq 1$$

[5,стр.365, **2.9** (б)].

За овој случај ; $\alpha_{10}=0.$ $\alpha_{11}=1$ и $\beta_{20}=0.$ $\beta_{21}=1$. При овие вредности соодветно диференцијалната равенка (3) го прима видот (13) и соодветните контурни услови се од вид

$$\begin{vmatrix} A & z_a & C \\ A_1 & z'_a & C_1 \\ A_2 & z''_a & C_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{т.е.} \quad \begin{vmatrix} A & z_a & C \\ -\lambda B & z'_a & B \\ -2\lambda(A-\lambda C) & z''_a & 2(A-\lambda C) \end{vmatrix} = 0 \quad (14.1)$$

$$\begin{vmatrix} A & B & z_a \\ A_1 & B_1 & z'_a \\ A_2 & B_2 & z''_a \end{vmatrix} = 0 \quad \text{т.е.} \quad \begin{vmatrix} A & B & z_a \\ -\lambda B & 2(A-\lambda C) & z'_a \\ -2\lambda(A-\lambda C) & -4\lambda B & z''_a \end{vmatrix} = 0 \quad (14.2)$$

$$\begin{vmatrix} A & z_b & C \\ A_1 & z'_b & C_1 \\ A_2 & z''_b & C_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{т.е} \quad \begin{vmatrix} A & z_b & C \\ -\lambda B & z'_b & B \\ -2\lambda(A-\lambda C) & z''_b & 2(A-\lambda C) \end{vmatrix} = 0 \quad (14.3)$$

$$\begin{vmatrix} A & B & z_b \\ A_1 & B_1 & z'_b \\ A_2 & B_2 & z''_b \end{vmatrix} = 0 \quad \text{т.е.} \quad \begin{vmatrix} A & B & z_b \\ -\lambda B & 2(A-\lambda C) & z'_b \\ -2\lambda(A-\lambda C) & -4\lambda B & z''_b \end{vmatrix} = 0 \quad (14.4)$$

а сопствените функции

$$z_n(x) = A\varphi_n{}^2 + B\varphi_n\varphi_n' + C\varphi_n'^2$$

го примаат видот

$$z_n(x) = \frac{2Cn^2\pi^2}{(b-a)^3} + \frac{2}{b-a}\left(A - \frac{Cn^2\pi^2}{(b-a)^2}\right)\cos^2\frac{n\pi(x-a)}{b-a} -$$

$$\frac{Bn\pi}{(b-a)^2}\sin\frac{2n\pi(x-a)}{b-a} \tag{15}$$

Пример 3 *Проблемот со сопствени вредности со диференцијална равенка* (10) *и контурни услови*

$$\alpha\, y(a) - y'(a) = 0 \tag{16.1}$$

$$\alpha\, y(b) - y''(b) = 0 \tag{16.2}$$

има сопствени функции

$$\varphi_n = cos\frac{n\pi(x-a)}{b-a} + \alpha\frac{b-a}{n\pi}sin\frac{n\pi(x-a)}{b-a}$$

[5,стр.365, **2.9** (в)].

За овој случај ; $\alpha_{10}=\alpha$. $\alpha_{11}=-1$ и $\beta_{20}=\alpha$. $\beta_{21}=-1$. При овие вредности соодветно диференцијалната равенка (3) го прима видот (13) и соодветните контурни услови се

$$\alpha\begin{vmatrix} z_a & B & C \\ z'_a & B_1 & C_1 \\ z''_a & B_2 & C_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} A & z_a & C \\ A_1 & z'_a & C_1 \\ A_2 & z''_a & C_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (17.1)$$

$$\alpha\begin{vmatrix} A & z_a & C \\ A_1 & z'_a & C_1 \\ A_2 & z''_a & C_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} A & B & z_a \\ A_1 & B_1 & z'_a \\ A_2 & B_2 & z''_a \end{vmatrix} = 0 \qquad (17.2)$$

$$\alpha\begin{vmatrix} z_b & B & C \\ z'_b & B_1 & C_1 \\ z''_b & B_2 & C_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} A & z_b & C \\ A_1 & z'_b & C_1 \\ A_2 & z''_b & C_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (17.3)$$

$$\alpha\begin{vmatrix} A & z_b & C \\ A_1 & z'_b & C_1 \\ A_2 & z''_b & C_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} A & B & z_b \\ A_1 & B_1 & z'_b \\ A_2 & B_2 & z''_b \end{vmatrix} = 0 \qquad (17.4)$$

кои можат да се запишат и во вид

$$\begin{vmatrix} z & A+\alpha\, B & C \\ z' & A_1+\alpha\, B_1 & C_1 \\ z'' & A_2+\alpha\, B_2 & C_2 \end{vmatrix}_{x=a,b} = 0\,, \quad \begin{vmatrix} A & z_b & B+\alpha\, C \\ A_1 & z'_b & B_1+\alpha\, C_1 \\ A_2 & z''_b & B_2+\alpha\, C_2 \end{vmatrix}_{x=a,b} = 0\,. \qquad (18)$$

Сопствени функции за проблемите со сопствени вредности (13)–(18) овој случај се

$$z_n = A+\alpha^2 C + \left[A\frac{\alpha^2(b-a)^2 - n^2\pi^2}{n^2\pi^2} + C\frac{n^2\pi^2-(b-a)^2}{n^2\pi^2} \right] sin^2\frac{n\pi(x-a)}{b-a} +$$

$$+\left[A\frac{\alpha(b-a)}{n\pi} + B\frac{\alpha^2(b-a)^2-n^2\pi^2}{n^2\pi^2} - C\frac{\alpha\, n\pi}{b-a}\right]\sin\frac{2n\pi(x-a)}{b-a} +$$

$$+B\alpha\cos\frac{2n\pi(x-a)}{b-a}\,.$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Georgievska S. S. *A boundary problem of the third order and fourt orders as a product of boundary problem of the second order*. Математички билтен, Скопје**19, (XVV)** (53-64), 1995

[2] Georgievska S. S. : *Reduction of a boundary problem of n+1-th order to a boundary problem of the second order*. Прилози. Одделение за мат.тех. науки, МАНУ, Скопје**17, (1-2)** (47-56) 1996

[3] Шапкарев И. А. *За еден контурен проблем од трет ред* Годишен зборник на Електротехнички факултет, Скопје, **6-7** (**11-13)** (47-53) 1990

[4] Шапкарев И. А. *Конструкција на линеарни диференцијални равенки од трет ред чии интеграли се производи од интегралите и нивните изводи на линерни дифренцијални равенки од втор ред* Годишен зборник на Електротехнички факултет, Скопје, **6-7** (**11-13)** (240-249) 1990

[5] Э.Камке- *Спровочник по обыкновенным диференциалъным уравнениям*, издателство Наука, Москва,1971

Градежен факултет

Катедра за математика, Скопје

e-mail:slobodanka@gf.ukim.edu.mk

8 МСДР 2004, (49 - 56)
Зборник на трудови
30.09.- 03.10.2004 год.
Охрид, Македонија

ISBN 9989 – 630 – 49 – 6
COBISS.MK – ID 61901322

ЗА ЕДНА АРЕОЛАРНА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНА РАВЕНКА ОД ВТОРИ РЕД

Борко Илиевски, Слаѓана Брсакоска
Природно–математички факутет – Скопје
e–mail: borkoi@iunona.pmf.ukim.edu.mk
e-mail: slaganak@iunona.pmf.ukim.edu.mk

ABSTRACT. It is known that the ordinary differential equation of II order $y'' + y = 0$ is basic for construction of the analytic theory of trigonometric functions. In this paper, we consider areolar differential equation of II order $\frac{\partial^2 w}{\partial \bar{z}^2} = \lambda \overline{w}$ (*). If we put $\lambda = -1$, than we can see some analogy between this two equations. So, the equation (*) could be basic for construction of so cold areolar trigonometry, but this is not the task for this paper. For areolar equations in which the unknown function is under the sighn of complex conjugation does not exist quadrature methods for solving them. That's why with method of areolar series,the solution of (*) is found and by using the cylindrical functions, we put the solution into a more concize form.

Ја проучуваме ареоларната равенка од втор ред :

$$\frac{\hat{d}^2 W}{d\bar{z}^2} = \lambda \overline{W} \qquad (\lambda \in C) \tag{1}$$

по непознатата функција $W = W(z) = U(x,y) + iV(x,y)$од комплексна променлива $z = x + iy$. При тоа

$$\frac{\hat{d}}{d\bar{z}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}) \tag{2}$$

е т.н. операторен извод по $\bar{z} = x - iy$ или ареоларен извод, воведен од Колосов во 1909 година [1] , и

$$\frac{\hat{d}^2}{d\bar{z}^2} = \frac{\hat{d}}{d\bar{z}}(\frac{\hat{d}}{d\bar{z}})$$

е ареоларен извод од втори ред.

Изразот

$$\hat{\int} \dots d\bar{z}\,, \tag{3}$$

дефиниран со

$$\hat{\int} f(z)d\bar{z} = W(z) + \Phi(z)\,, \tag{3'}$$

при што

$$\frac{\hat{d}W}{d\bar{z}} = f(z)$$

и $\Phi = \Phi(z)$ е произволна аналитичка функција , се вика операторен интеграл по $\bar{z} = x - iy$.
Операциските правила за операторниот извод по $\bar{z}$ (2) , како и за операторниот интеграл по $\bar{z}$ (3) се дадени во монографијата на Г.Н.Положуй [2].

Во трудот [3] со метода на ареоларни редови , најдено е општо решение на ареоларната равенка (1) во облик:

$$\begin{aligned} W = \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda|^{2n} \Bigg\{ & \frac{1}{(2n)!} \Big[\bar{z}^{2n} \underbrace{\int dz \int dz \dots \int dz \int}_{2n} \Phi_1(z) dz + \\ & + \lambda z^{2n} \underbrace{\int d\bar{z} \int d\bar{z} \dots \int d\bar{z} \int}_{2n+2} \overline{\Phi_1}(z) d\bar{z} \ \Big] + \\ & + \frac{1}{(2n+1)!} \Big[\bar{z}^{2n+1} \underbrace{\int dz \int dz \dots \int dz \int}_{2n} \Phi_2(z) dz + \\ & + \lambda z^{2n+1} \underbrace{\int d\bar{z} \int d\bar{z} \dots \int d\bar{z} \int}_{2n+2} \overline{\Phi_2}(z) d\bar{z} \ \Big] \Bigg\} \end{aligned} \tag{4}$$

при што $\Phi_1 = \Phi_1(z)$ и $\Phi_2 = \Phi_2(z)$ се произволни аналитички функции во улога на интеграциони константи .

Во оваа работа се обидуваме општото решение (4) да го запишеме во поедноставен облик.

Редот во (4) го запишуваме како збир на четири соодветни редови , потоа од првиот и третиот ред ги оделуваме членовите за $n = o$ и на крај во секој од четирите редови ставаме сумирањето да почнува од нулата со што добиваме дека

$$W=\Phi_1(z)+\bar{z}\Phi_2(z)+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\lambda|^{2n+2}\bar{z}^{2n+2}}{(2n+2)!}\underbrace{\int dz\int dz...\int dz\int}_{2n+2}\Phi_1(z)dz+$$

$$+\lambda\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\lambda|^{2n}z^{2n}}{(2n)!}\underbrace{\int d\bar{z}\int d\bar{z}...\int d\bar{z}\int}_{2n+2}\overline{\Phi_1}(z)d\bar{z}+$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\lambda|^{2n+2}\bar{z}^{2n+2}}{(2n+3)!}\underbrace{\int dz\int dz...\int dz\int}_{2n+2}\Phi_2(z)dz+ \qquad (5)$$

$$+\lambda\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\lambda|^{2n}z^{2n+1}}{(2n+1)!}\underbrace{\int d\bar{z}\int d\bar{z}...\int d\bar{z}\int}_{2n+2}\overline{\Phi_2}(z)d\bar{z}$$

Ако ја искористиме формулата **Cauchy**

$$\underbrace{\int dz\int dz...\int dz\int}_{k}\Phi(z)dz=\begin{cases}\frac{1}{(k-1)!}\int(z-\xi)^{k-1}\Phi(\xi)d\xi\ ,\ k\geq 2\\ \int\Phi(\xi)d\xi \quad k=1\end{cases} \qquad (6)$$

тогаш решението (5) добива облик

$$W=\Phi_1(z)+\bar{z}\Phi_2(z)+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\lambda|^{2n+2}\bar{z}^{\,2n+2}}{(2n+2)!}\cdot\frac{1}{(2n+1)!}\cdot$$

$$\int(z-\xi)^{2n+1}\Phi_1(\xi)d\xi+\lambda\sum_{n=o}^{\infty}\frac{|\lambda|^{2n}z^{2n}}{(2n)!}\cdot\frac{1}{(2n+1)!}\int\overline{(z-\xi)}^{\,2n+1}\overline{\Phi_1}(\xi)d\bar{\xi}+$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\lambda|^{2n+2}\bar{z}^{2n+3}}{(2n+3)!}\cdot\frac{1}{(2n+1)!}\int(z-\xi)^{2n+1}\Phi_2(\xi)d\xi+$$

$$+\lambda\sum_{n=o}^{\infty}\frac{|\lambda|^{2n}z^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot\frac{1}{(2n+1)!}\int\overline{(z-\xi)}^{2n+1}\overline{\Phi_2}(\xi)d\xi$$

односно

$$W=\Phi_1(z)+\bar{z}\Phi_2(z)+\int\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\lambda|^{2n+2}\bar{z}^{2n+2}(z-\xi)^{2n+1}}{(2n+2)!\cdot(2n+1)!}\Phi_1(\xi)d\xi+$$

$$+\lambda\int\sum_{n=o}^{\infty}|\lambda|^{2n}z^{2n}\left(\bar{z}-\bar{\xi}\right)^{2n+1}\overline{\Phi_1}(\xi)d\bar{\xi}+$$

$$+\int\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\lambda|^{2n+2}\bar{z}^{2n+3}(z-\xi)^{2n+1}}{(2n+3)!\cdot(2n+1)!}\Phi_2(\xi)d\xi+ \tag{7}$$

$$+\lambda\int\sum_{n=o}^{\infty}\frac{|\lambda|^{2n}z^{2n+1}\left(\bar{z}-\bar{\xi}\right)^{2n+1}}{[(2n+1)!]^2}\cdot\overline{\Phi_2}(\xi)d\bar{\xi}$$

Лесно се покажува дека четвртиот ред во (7) конвергира во секоја област што лежи во конечната комплексна рамнина.

Да ставиме

$$S=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\lambda|^{2n}z^{2n+1}\left(\bar{z}-\bar{\xi}\right)^{2n+1}}{[(2n+1)!]^2} \tag{8}$$

За првата сума во (7) имаме

$$\bar{S}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\lambda|^{2n}\bar{z}^{2n+1}(z-\xi)^{2n+1}}{[(2n+1)!]^2}$$

т.е.

$$\hat{\int}\bar{S}d\bar{z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\lambda|^{2n}\bar{z}^{2n+2}(z-\xi)^{2n+1}}{(2n+2)!\cdot(2n+1)!}$$

од каде што

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\lambda|^{2n+2}\bar{z}^{2n+2}(z-\xi)^{2n+1}}{(2n+2)!\cdot(2n+1)!}=|\lambda|^2\hat{\int}\bar{S}d\bar{z} \tag{9}$$

За сумата на вториот ред во (7) , имаме:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\lambda|^{2n}z^{2n}\left(\bar{z}-\bar{\xi}\right)^{2n+1}}{(2n)!\cdot(2n+1)!} \tag{10}$$

На крај , за сумата на третиот ред во (7) имаме :

$$\overline{S}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\lambda|^{2n}\,\overline{z}^{2n+1}(z-\xi)^{2n+1}}{[(2n+1)!]^2}$$

$$\hat{\int}\overline{S}d\overline{z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\lambda|^{2n}\,\overline{z}^{2n+2}(z-\xi)^{2n+1}}{(2n+2)!\cdot(2n+1)!}$$

$$\hat{\int}(\hat{\int}\overline{S}d\overline{z})d\overline{z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\lambda|^{2n}\,\overline{z}^{2n+3}(z-\xi)^{2n+1}}{(2n+3)!\cdot(2n+1)!},$$

од каде што

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\lambda|^{2n+2}\,\overline{z}^{2n+3}(z-\xi)^{2n+1}}{(2n+3)!\cdot(2n+1)!}=|\lambda|^2\hat{\int}(\hat{\int}\overline{S}d\overline{z})d\overline{z} \qquad (11)$$

Така , согласно формулите (8) , (9) , (10) и (11) функција-та, (7) го добива поедноставниот облик

$$W=\Phi_1(z)+\overline{z}\Phi_2(z)+$$
$$+|\lambda|^2\int[\hat{\int}\overline{S}d\overline{z}]\Phi_1(\xi)d\xi+\lambda\int\frac{\hat{d}S}{dz}\cdot\overline{\Phi_1}(\xi)d\overline{\xi} \qquad (12)$$
$$+|\lambda|^2\int[\hat{\int}(\hat{\int}\ \overline{S}d\overline{z})d\overline{z}]\Phi_2(\xi)d\xi+\lambda\int S\cdot\overline{\Phi_2}(\xi)d\overline{\xi}$$

Сета оваа работа може да се формулира во следнава:

Теорема: *Ареоларната диференцијална равенка од втори ред* (1) *има општо решение од облик* (12) *при што* $\Phi_j=\Phi_j(z)$, $j=\overline{1,2}$ *се произволни аналитички функции во улога на интеграциони константи . При тоа* $S=S(z,\overline{z},\xi)$ *е сума на редот* (8) .

Забелешка 1 Ако во било кој од облиците(4) или (12) за општото решение на ареоларната диференцијална равенка од втори ред (1) како и во самата равенка , ставиме $\lambda=0$, то-гаш ги добиваме познатите т.н. бианалитички функции

$$W=f(z)+\overline{z}g(z)$$

на **Goursat** [4] , [5] .

Забелешка 2 Ако ставиме $\lambda = \alpha + i\beta$, тогаш лесно се проверува дека ареоларната диференцијална равенка (1) е комплексен запис на следниов систем од две парцијални диференцијални равенки од втор ред

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4(\alpha u + \beta v) \\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 4(\beta u + \alpha v) \end{cases} \tag{13}$$

Тоа значи дека

$$u = \operatorname{Re} W$$
$$v = \operatorname{Im} W$$

каде $W = W(z)$ е определена со формулата (12) (т.е.(4)), е решение на системот парцијални диференцијални равенки (13) .

Забелешка 3 Во трудот [6], С.Фемпл ги проучува неаналитичките функции $W = W(z) = U(x, y) + iV(x, y)$ чие одстапување од аналитичност е аналитичка функција како решение на равенката

$B^2 W = f(t) \quad f = f(t)$ – аналитичка функција.

При тоа,

$$B = 2\frac{\hat{d}}{d\bar{z}} \tag{14}$$

е т.н. оператор на Билимовиќ [7], интерпретиран како мера на отстапување од аналитичност на неаналитичките функции.

Согласно врската (14) ареоларната диференцијална равенка од втор ред (1) добива облик

$$B^2 W = 4\lambda \overline{W} \ ,$$

поради што функциите $W = W(z)$, определени со (4) т.е. (12) можат да се интерпретираат како неаналитички функции чие што второ отстапување од аналитичност е “пропорционално” со нивната комплексно коњугирана вредност .

ЛИТЕРАТУРА

[1] Г.В. Колосов : Об одном приложении теории функций комплесного переменного к плосной задаче математической теории упругости , Юргев , 1909

[2] Г.Н.Положий : Обопщение теории аналитических функций комплесного переменного , Киев , 1965

[3] B.Ilievski : Solution of the Areolar Equation $\frac{\hat{d}^2 W}{d\bar{z}^2} = \lambda \overline{W}$ by Double Series , IX Conference on Applied Mathematics,Institute for Mathematics, Novi Sad 1995, pp 183 – 188

[4] Ė.Goursat : Cours d' Analyse mathématique , t.2 , cinquième édition , Paris 1929, 682 pp

[5] D.S.Mitrinović : Kompleksna analiza (drugo dopunjeno izdanje) , Beograd 1971 , str. 256

[6] Fempl S. On nonanalitic functions whose deviation from analyticity is ananalitical function . GLAS CCLIV , Section of Natural Sciences and Mathematics . Vol.24, Beograd , 1963 (in Serbian)

[7] Bilimovitch A.Sur la mesure de deflexion d'une fonction non analitique par raport a une fonction non analitique .C . R . Acad . Sci . Paris , 237 (1953) , 694

ILIEVSKI Borko
St. Cyril and Methodius University
Faculty of Natural Sciences and Mathematics, Institute of Mathematics
P.O. Box 162, 1000 Skopje, Republic of Macedonia
e-mail: borkoi@iunona.pmf.ukim.edu.mk

BRSAKOSKA Slagjana
St. Cyril and Methodius University
Faculty of Natural Sciences and Mathematics, Institute of Mathematics
P.O. Box 162, 1000 Skopje, Republic of Macedonia
e-mail: slaganak@iunona.pmf.ukim.edu.mk

8 МСДР 2004, (57 - 62)
Зборник на трудови
30.09.- 03.10.2004 год.
Охрид, Македонија

ISBN 9989 – 630 – 49 – 6
COBISS.MK – ID 61901322

ЗА ОБЛИКОТ НА РЕШЕНИЕТО НА ЕДНА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНА РАВЕНКА ОД ВТОР РЕД СО ФУНКЦИОНАЛНИ КОЕФИЦИЕНТИ

Лазо А. Димов
Машински факултет–Скопје
e–mail: ldimov@ereb1.mf.ukim.edu.mk

Апстракт

Со оглед на познатите постапки за решавање на линеарните диференцијални равенки со константни коефициенти природен е стремежот решавањето на линеарните диференцијални равенки со функционални коефициенти да се сведе на решавање на линеарни диференцијални равенки со константни коефициенти. Овде даваме еден прилог кон тој природен стремеж воедно определувајќи услови при кои линеарната диференцијална равенка од втор ред, со функционални коефициенти,

$$f(x)y'' + g(x)y' + h(x)y = 0, \qquad (1)$$

може да се сведе на линеарна диференцијална равенка со константни коефициенти. Притоа добиваме дека обликот на решението на диференцијалната равенка (1) зависи од знакот на фигурирачките коефициенти $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$.

1. Познат е фактот дека решението на линеарната диференцијална равенка

$$y'' + a(x)y = 0$$

во зависност од знакот на функцијата a(x) може да се запише во следниот облик:

$$y = C_1 \sin_{a(x)} x + C_2 \cos_{a(x)} x \text{ , за a(x) > 0,}$$

$$y = C_1 sh_{a(x)} x + C_2 ch_{a(x)} x \text{ , за a(x) < 0.}$$

Исто така познато е дека равенката

$$y'' + ay = 0, \ a \text{ - const} \qquad \text{(I)}$$

има решение дадено со формулите:

$$y = C_1 e^{\sqrt{a}\, x} + C_2 e^{-\sqrt{a}\, x}, \text{ за a > 0 и}$$

$$y = C_1 \sin\sqrt{-a}\ x + C_2 \cos\sqrt{-a}\ x, \text{ за a < 0.} \qquad \text{(II)}$$

Овде ќе докажеме дека диференцијалната равенка (1), при одредени услови може да се сведе на диференцијална равенка од облик (I) па согласно тоа решението е од облик (II).

За таа цел воведуваме нова независно променлива величина t во равенката (1) со релацијата x = x(t). При тоа добиваме:

$$\frac{f(t)}{x'^2(t)} y''(t) + \left[\frac{g(t)}{x'(t)} - \frac{f(t)x''(t)}{x'^3(t)} \right] y'(t) + h(t)y(t) = 0 .$$

При претпоставка дека x = x(t) ги задоволува условите

$$x'^2(t) = -\frac{Af(t)}{h(t)}, \text{ A – const}$$

$$g(t)x'^2(t) - f(t)x''(t) = 0, \qquad (2)$$

со елиминација на x = x(t) во условите (2) се добива условот:

$$2g(x)h(x) = f'(x)h(x) - f(x)h'(x) \qquad (3)$$

за сводливост на равенката (1) на равенката (I) по новата променлива t . При тоа самата функција x = x(t) се добива од релацијата

$$t = \int \sqrt{-\frac{h(x)}{Af(x)}}dx \qquad (4)$$

Со ова нешто практично ја докажавме следнава
Теорема. Диференцијалната равенка (1), со воведување на нова независно променлива величина t со релацијата (4) се трансформира во диференцијалната равенка

$$y''(t) - Ay(t) = 0. \qquad (5)$$

Сега имајќи во вид (I), (II) и релацијата (4) за решението на диференцијалната равенка (1) ги добиваме следните формули:

$$y = C_1 e^{\int\sqrt{-\frac{h(x)}{f(x)}}dx} + C_2 e^{-\int\sqrt{-\frac{h(x)}{f(x)}}dx}, \text{ за } \frac{h(x)}{f(x)} < 0$$

или

$$y = C_1 \sin\left(\int \frac{h(x)}{f(x)}dx\right) + C_2 \cos\left(\int \frac{h(x)}{f(x)}dx\right), \text{ за } \frac{h(x)}{f(x)} > 0. \qquad (6)$$

2. Овде ќе разгледаме неколку специјални случаи што произлегуваат од условот (3).

а) Ако е функцијата h(x) = c – константа, тогаш условот (3) станува

$$2g(x) = f'(x),$$

па равенката (1) е

$$f(x)y'' + \frac{1}{2}f'(x)y' + cy = 0,$$

и во согласност со (6) има решение

$$y = C_1 e^{\int\sqrt{-\frac{c}{f(x)}}dx} + C_2 e^{-\int\sqrt{-\frac{c}{f(x)}}dx}, \text{ за } \frac{c}{f(x)} < 0$$

или

$$y = C_1 \sin\left(\int \frac{c}{f(x)}dx\right) + C_2 \cos\left(\int \frac{c}{f(x)}dx\right), \text{ за } \frac{c}{f(x)} > 0.$$

б) Ако функцијата f(x) = c, тогаш условот (3) е

2g(x)h(x) = - ch'(x),

а соодветната равенка (3) станува

$$cy'' - \frac{ch'(x)}{2h(x)}y' + h(x)y = 0,$$

чие решение според (6) е од облик

$$y = C_1 e^{\int\sqrt{-\frac{h(x)}{c}}dx} + C_2 e^{-\int\sqrt{-\frac{h(x)}{c}}dx}, \text{ за } \frac{h(x)}{c} < 0$$

или

$$y = C_1 \sin\left(\int \frac{h(x)}{c}dx\right) + C_2 \cos\left(\int \frac{h(x)}{c}dx\right), \text{ за } \frac{h(x)}{c} > 0$$

Специјално ако h(x) = x и c = 1, се добива линеарната диференцијална равенка

$$xy'' - \frac{1}{2}y' + x^2y = 0,$$

па согласно погоре, нејзиното решение може да се запише во облик

$$y = C_1 \sin\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C_2 \cos\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}, \text{ за } x > 0,$$

$$y = C_1 e^{\frac{2}{3}(-x)^{\frac{3}{2}}} + C_2 e^{-\frac{2}{3}(-x)^{\frac{3}{2}}}, \text{ за } x < 0,$$

в) Ако е g(x) = f ’(x), тогаш условот (3) станува

f ’(x)h(x) + f)x)h’(x) = 0

па равенката (1) е

$$f^2(x)y'' + f'(x)f(x)y' + cy = 0.$$

За обликот на нејзиното решение според (6) добиваме

$$y = C_1 e^{\int\sqrt{-\frac{c}{f^2(x)}}dx} + C_2 e^{-\int\sqrt{-\frac{c}{f^2(x)}}dx}, \text{ за c} < 0,$$

или

$$y = C_1 \sin\left(\int \frac{c}{f^2(x)} dx\right) + C_2 \cos\left(\int \frac{c}{f^2(x)} dx\right), \text{ за c} > 0$$

Специјално ако е f(x) = x, се добива Ојлеровата диференцијална равенка

$$x^2y'' + xy' + cy = 0$$

па согласно погоре нејзиното решение може да се запише во облик

$$y = C_1 \sin\sqrt{c}\, \ln|x| + C_2 \cos\sqrt{c \ln|x|}, \text{ за c} > 0,$$

$$y = C_1 |x|^{\sqrt{-c}} + C_2 |x|^{-\sqrt{-c}}, \text{ за c} < 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Беркович Л.М. Преобразование обыкновеных линейниых дифференциальных уравнений , Учебное пособие, Куйбишев 1978.

[2] Rašajski B. Teorija običnih diferencijalnih jednačina, Beograd 1970

[3] Камке Е. : Справочник по обькновеным дифференциальным уравнениям, Г.И. Москва 1951 година.

[4] Митриновиќ Д.С. : Зборник математичких проблема, Београд 1958 година.

[5] Митриновиќ Д.С. : Диференцијалне једначине зборник математичких проблема И задатака, Београд 1986 година.

ABOUT SOLVING A DIFFERENTIAL EQUATION OF SECOND ORDER

Dimov A. Lazo

Summary

It is natural tendency to reduct the solving of a differential equation with functional coefficients to solving of a differential equation with constant coefficients. Here, we give a supplement to this natural tendency, determining conditions in which a differential equation of second order with functional coefficients is reducted to a differential equation with constant coefficients. In the same time, we determine the solution of the differential equation.

Department of Mechanical Engineering
p. fah 464
1000 Skopje
Macedonia

On a Numerical Solution of a class of Sturm-Liouville Problems

Sonja Gegovska-Zajkova
Faculty of Electrical Engineering, P.O.Box 574,
Skopje, Macedonia,
szajkova@etf.ukim.edu.mk

Abstract

A class of Sturm-Liouville problems containing spectral parameter in the boundary or interface conditions and coefficients which are piecewise functions are considered. Approximation of spectral problems using finite difference method and the estimates for the eigenvalues and eigenfunctions is given. Numerical solutions for these problems are obtained.

1 Introduction

Let us consider the initial boundary value problem for the heat equation with concentrated capacity at the interior point $x = \xi$ [4, 5, 8]

$$[c(x) + K\,\delta(x-\xi)]\,\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(a(x)\,\frac{\partial u}{\partial x}\Big) + f(x,t), \quad (x,t) \in (0,\,1) \times (0,\,T), \tag{1.1}$$

$$u(0,\,t) = 0, \quad u(1,\,t) = 0, \quad 0 < t < T, \tag{1.2}$$

$$u(x,\,0) = u_0(x), \quad x \in (0,\,1), \tag{1.3}$$

where $K > 0$, $0 < c_1 \le a(x) \le c_2$, $0 < c_3 \le c(x) \le c_4$ and $\delta(x)$ is the Dirac distribution. It follows from (1.1), that the solution of this problem satisfies at $(x,t) \in Q_1 = (0,\,\xi) \times (0,\,T)$ and $(x,t) \in Q_2 = (\xi,\,1) \times (0,\,T)$ the equation

$$c(x)\,\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(a(x)\,\frac{\partial u}{\partial x}\Big) + f(x,t)\,,$$

and at $x = \xi$ the conditions of conjugation

$$[u]_{x=\xi} \equiv u(\xi+0,t) - u(\xi-0,t) = 0\,, \qquad \left[a\,\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{x=\xi} = K\,\frac{\partial u(\xi,t)}{\partial t}\,.$$

It is easy to see that the initial boundary value problem (1.1)–(1.3) can be written as an abstract Cauchy problem

$$B\frac{du}{dt} + Au = f(t), \quad t \in (0,T); \quad u(0) = u_0 \tag{1.4}$$

letting $H = L_2(0,1)$, $Au = -\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(a(x)\,\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big)$ and $Bu = [c(x) + K\,\delta(x - \xi)]\,u(x,\,t)$. Then $H_A = \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)$,

$$\begin{aligned} \|w\|_A^2 &= \int_0^1 a(x)\,[w'(x)]^2\,dx, \\ \|w\|_B^2 &= \int_0^1 c(x)\,w^2(x)\,dx + K\,w^2(\xi)\,. \end{aligned}$$

Thus, the following spectral problem can be obtained:

$$\begin{gathered} (a(x)w')' + \lambda c(x)w = 0, \quad x \in (0,\xi) \cup (\xi,1), \\ [w]_{x=\xi} = w(\xi+0) - w(\xi-0) = 0, \quad [aw']_{x=\xi} + \lambda K w(\xi) = 0, \\ w(0) = w(1) = 0. \end{gathered} \tag{1.5}$$

Further we assume that the function $c(x)$ is continuous on $[0,1]$ and $a(x)$ has finite jump in the point $x = \xi$.

This spectral problem can be written in the form

$$Aw = \tilde{\lambda} Bw \tag{1.6}$$

with A, B as defined above. In such a way, the spectrum of (1.6) is discrete, all eigenvalues are positive, $\tilde{\lambda}_1 \le \tilde{\lambda}_2 \le \cdots,\ \tilde{\lambda}_n \to \infty$, while the eigenfunctions $w = w_n,\ n = 1,2,\ldots$ satisfy the condition of orthogonality

$$(w_j, w_k)_B = (Bw_j, w_k) = (\tilde{w}_j, \tilde{w}_k) = \delta_{jk}$$

and represent the basis of the space H_B.

The solution of problem (1.4) can be written in the form

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\tilde{\lambda}_n t}\left[c_n + \int_0^t e^{\tilde{\lambda}_n \tau} f_n(\tau)\,d\tau\right] w_n,$$

where

$$c_n = (u_0, w_n)_B, \quad f_n(t) = (f(t), w_n).$$

2 Sturm–Liouville Problem

We consider a Sturm-Liouville problem:

$$(p(x)v')' - q(x)v + \lambda r(x)v = 0\,, \tag{2.1}$$

where λ is the eigenvalue, $v(x)$ is the eigenfunction, $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ are piecewise continuous functions on $[0,1]$ such that

$$0 < c_1 \le p(x) \le c_2\,, \quad 0 < c_1 \le r(x) \le c_3\,, \quad 0 \le q(x) \le c_4\,, \tag{2.2}$$

$c_1, c_2, c_3, c_4 = \text{const.}$

Let ξ be an interior point in $(0\,,1)$ where $v(x)$ has to satisfy the condition of conjugation

$$[v]_{x=\xi} = v(\xi+0) - v(\xi-0) = 0\,, \quad [pv']_{x=\xi} = -\lambda K v(\xi),\ K = \text{const.} > 0\,. \tag{2.3}$$

Then $p(x)$ could have a discontinuity of first order at the point $x = \xi$, $(0 < \xi < 1)$. The boundary conditions could also consist spectral parameter

$$\begin{aligned} -\quad & \alpha_0 v'(0) + \beta_0 v(0) = \lambda\gamma_0 v(0)\,, \quad \alpha_0 + \beta_0 > 0,\ \alpha_0\,, \beta_0 \ge 0\,, \\ & \alpha_1 v'(1) + \beta_1 v(1) = \lambda\gamma_1 v(1)\,, \quad \alpha_1 + \beta_1 > 0,\ \alpha_1\,, \beta_1 \ge 0\,, \\ & \alpha_i,\ \beta_i,\ \gamma_i = \text{const.}\,,\ i = 1, 2\,. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Using Dirac distribution, the problem (2.1), along with the conditions (2.3), could be written in the following form :

$$(p(x)v')' - q(x)v + \lambda[r(x) + K\delta(x-\xi)]v = 0\,, \tag{2.5}$$

or in the operator form $Av = \lambda Bv$, letting $H = L_2(0,1)$ and

$$Av = -(p(x)v')' + q(x)v\,, \quad Bv = [r(x) + K\delta(x-\xi)]v\,. \tag{2.6}$$

This kind of spectral problems appears, as it was shown previously , while solving the heat equation with concentrated capacity and combinations of various boundary conditions as a result of using the method of separation of variables [4, 1, 9].

As a model we shall consider the equation

$$[1 + K\delta(x-\xi)]\frac{\partial u}{\partial t} = p\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - qu, \quad p,\, q = \text{const.} > 0 \tag{2.7}$$

with boundary conditions: $u(0,t) = 0$, $\dfrac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 0$, and initial value $u(x,0) = u_0(x)$. As it was previously shown, following spectral problem can be obtained

$$-\frac{d^2 w}{dx^2} = \lambda w(x),\ x \in (0,\xi) \cup (\xi,1)$$

$$w(0) = 0,\ w'(1) = 0,$$

$$[w]_\xi = 0, \quad -\left[\frac{dw}{dx}\right]_\xi = \lambda K w(\xi).$$

This problem is a special case of the problem (2.1)–(2.4) setting in the boundary conditions (2.4)

$$\alpha_0 = \beta_1 = \gamma_0 = \gamma_1 = 0\,, \quad \alpha_1 = p(1)\,, \quad \beta_0 = 1\,. \tag{2.8}$$

It can be proved that for such problem the following assertions hold [2, 3].

Theorem 1 *The Sturm-Liouville problem (2.1)–(2.4) with coefficients given in (2.8) has a countable set of eigenvalues* $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$ *to which correspond the eigenfunctions* $v_1(x)$, $v_2(x), \ldots$. *The eigenfunctions* $\{v_n(x)\}$ *form a complete orthogonal system with respect to a norm* $\|\cdot\|_B$ *which arises from the inner product* $(\cdot,\cdot)_B$, *where*

$$(u,v)_B = \int_0^1 r(x) u\, v\, dx + K u(\xi) v(\xi)\,. \tag{2.9}$$

Theorem 2 *The eigenvalues of the problem (2.1)–(2.4) with coefficients (2.8),* $\lambda_n \to \infty$, $n \to \infty$, *satisfy the inequalities:*

$$c_5 n^2 \le \lambda_n \le c_6 n^2\,, \quad c_5 > 0\,, \tag{2.10}$$

c_5 *and* c_6 *are independent of* c_i, $i = 1,2,3,4$ *and* n.

Theorem 3 *The eigenfunctions of the problem (2.1)–(2.4) and their derivatives satisfy the inequalities*

$$|v_n(x)| \le c_7\,, \quad |v_n'(x)| \le c_8' \sqrt{\lambda_n} \le c_8 n\,, \tag{2.11}$$

where c_7, c_8 *are positive constants independent of* n.

The solution of spectral problem given above can be written in explicit form

$$w(x) = \begin{cases} A \sin \alpha x, & x \in (0, \xi) \\ B \cos \alpha(1-x), & x \in (\xi, 1) \end{cases}$$

We obtain the values of the constants A and B using the first condition of conjugation: $A = C cos\, \alpha(1-\xi)$, $B = C sin\, \alpha\xi$, where C is a multiplicative constant, and we can set $C = 1$. The values of $\alpha = \alpha_n$, $n = 1, 2, \ldots$ are the roots of the transcendental equation

$$\alpha = \frac{1}{K}[ctg\, \alpha\xi - tg\, \alpha(1-\xi)].$$

There exists a countable set of solutions $\alpha = \alpha_n, n = 1, 2, \ldots$ of this equation. Thus we can obtain the eigenvalues $\lambda = \lambda_n = \alpha_n^2, \quad 0 < \lambda_1 < \lambda_2 \cdots, \ \lambda_n \to \infty$, and respective eigenfunctions $w = w_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$.

There is another class of solution $w(x) = \sin \alpha x$ which exists if $\xi = \dfrac{2m}{2k+1}$, k, $m \in N$. Then for $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$\lambda_n = p\left[(2k+1)(2n+1)\frac{\pi}{2}\right]^2 + q, \quad w_n = \sin(2k+1)(2n+1)\frac{\pi}{2}x\,.$$

3 Difference Sturm-Liouville Problems

Let $\overline{\omega}_h = \{x_i = ih,\ i = 0, 1, \ldots, N,\ hN = 1\}$ is a uniform mesh in $[0, 1]$ chosen so that $\xi = x_m$ is a node. We approximate the problem (2.1)–(2.4) with coefficients (2.8) on the mesh $\overline{\omega}_h$ by the difference scheme

$$\begin{aligned} -(ay_{\overline{x}})_x + dy = \lambda^h \left(\rho(x) + K\delta_h(x-\xi)\right) y\,, \quad x \in \omega_h\,, \\ y_0 = 0\,, \qquad ay_{\overline{x}} + \frac{h}{2}dy = \frac{h}{2}\lambda^h \rho y\,, \quad x = x_N\,, \end{aligned} \tag{3.1}$$

where

$$\delta_h(x-\xi) = \begin{cases} 0\,, & x \in \omega_h \backslash \{\xi\} \\ \dfrac{1}{h}, & x = \xi \end{cases} ,$$

or

$$-(ay_{\overline{x}})_x + dy = \lambda^h \rho\, y\,, \qquad 0 < x = x_i = ih < 1\,,\ i \neq m\,,$$

$$-\frac{h}{\overline{K}}(ay_{\overline{x}})_x + \frac{h}{\overline{K}}\overline{d}\, y = \lambda^h y\,, \qquad x = x_m\,,\ \overline{K} = K + h\rho(\xi)\,,$$

$$\overline{d} = \begin{cases} \dfrac{d(x_m-0)+d(x_m+0)}{2}\,, & x = x_m = \xi \\ d\,, & x \in \omega_h \setminus \{\xi\} \end{cases}\,,$$

$$y_0 = 0\,, \qquad ay_{\overline{x}} + \frac{h}{2}dy = \frac{h}{2}\lambda^h \rho y\,, \qquad x = x_N\,.$$

We shall denote by $\Lambda\, y$ difference operator

$$\Lambda\, y = \begin{cases} - \quad (ay_{\overline{x}})_x + dy\,, & x = x_i,\ i = 1,\, 2,\, \ldots\,, N-1 \\ \quad \dfrac{2}{h}ay_{\overline{x}} + dy\,, & i = N \\ \quad 0\,, & i = 0 \end{cases}$$

while $d(x_i) = q(x_i)\,, \quad \rho(x_i) = r(x_i)\,,$

$$a(x) = \frac{p(x)+p(x-h)}{2}\,, \qquad \text{for } x \neq \xi, \xi+h\,,$$

$$a(\xi) = \frac{p(\xi-0)+p(\xi-h)}{2}\,, \quad a(\xi+h) = \frac{p(\xi+h)+p(\xi+0)}{2}\,.$$

Thus the following inequalities hold:

$$0 < c_1 \leq a \leq c_2\,, \quad 0 < c_1 \leq \rho(x) \leq c_3\,, \quad 0 \leq d(x) \leq c_4\,. \qquad (3.2)$$

Now our goal is to find nontrivial solutions of the problem (3.1) (the eigenfunctions) which correspond to the values of the parameter λ^h (the eigenvalues). It is already prove that [3]:

Theorem 4 *There exists $N-1$ eigenvalues of the problem (3.1), $0 < \lambda_1^h < \cdots < \lambda_{N-1}^h$ to which correspond the eigenfunctions $y_1(x), \ldots, y_{N-1}(x)$. The eigenfunctions $\{y_n(x)\}$ form an orthogonal system in the l^2_{N-1} space with scalar product*

$$(y,v]_{B_h} = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq m}}^{N-1} \rho_i\, y_i\, v_i\, h + \overline{K} y_m\, v_m + \frac{h}{2}\rho_N\, y_N\, v_N\,, \quad \overline{K} = K + h\rho(\xi)\,. \quad (3.3)$$

Theorem 5 *The eigenvalues of the problem (3.1) satisfy inequalities*

$$M_1' n^2 \leq \lambda_n^h \leq M_2' n^2 \,, \quad n = 1, 2, \, \ldots, \, N-1 \,, \tag{3.4}$$

where M_1' and M_2' are positive constants independent of h and n.

Theorem 6 *For the eigenfunctions of the problem (3.1) the following estimates hold*

$$\|y_n\|_C \leq M_1 \sqrt{n} \,, \quad \|(y_n)_{\overline{x}}\|_C \leq M_2 n^{3/2} \,, \tag{3.5}$$

where $\|y\|_C = \max\limits_{x \in \omega_h} |y(x)|$, $\|y_{\overline{x}}\|_C = \max\limits_{1 \leq i \leq N} |y_{\overline{x},i}|$, M_1, M_2 are constants independent of h and n.

It can be proved that the scheme (3.1) has a second order of accuracy ($\|y_n - u_n\|_C = O(h^2)$, $|\lambda_n^h - \lambda_n| = O(h^2)$) except at the point $x = \xi$ where $H_N[u] - H[u] = O(h)$, i.e. $\|y_n - u_n\|_C = O(h)$ [2].

4 Numerical Experiments

In order to approve theoretical results given above, we made some numerical experiments using program package MatLab.We set $p = 1$, $q = 0$ in (2.7) and use difference scheme (3.1), uniform mesh where the number of nodes is $2^k \cdot 10$, $k = 0, 1, \ldots, 5$. In the table 1 the approximation error of the first four eigenvalues is presented. It is obvious that approximation error has the lowest value for the first eigenvalue and it increases for every next eigenvalue. On the other hand, the approximation error depends on the number of nodes N, so we can see that the increasing of the value of N implies decreasing of the error.

$N \setminus$ Err	$\|\lambda_1 - \lambda_1^h\|$	$\|\lambda_2 - \lambda_2^h\|$	$\|\lambda_3 - \lambda_3^h\|$	$\|\lambda_4 - \lambda_4^h\|$
10	1.74 E-03	1.76 E-01	1.65 E-00	7.19 E-00
20	4.36 E-04	4.42 E-02	4.20 E-01	1.85 E-00
40	1.09 E-04	1.11 E-02	1.05 E-01	4.65 E-01
80	2.73 E-05	2.77 E-03	2.64 E-02	1.16 E-01
160	6.82 E-06	6.93 E-04	6.59 E-03	2.91 E-02
320	1.70 E-06	1.73 E-04	1.65 E-03	7.28 E-03

Table 1

In a table 2 the convergence rate calculated by the formula

$$\rho_N = \log_2 \frac{\|u - v\|_{\infty,N}}{\|u - v\|_{\infty,2N}},$$

is given. Here, we denote by u an exact and by v approximate values. We can see from the table that convergence rate of the eigenvalues is near to 2, like it was proved in previous paragraph.

$N \setminus \rho_N$	$\rho_N(\lambda_1)$	$\rho_N(\lambda_2)$	$\rho_N(\lambda_3)$	$\rho_N(\lambda_4)$
ρ_{10}	1.99902	1.99238	1.98037	1.96213
ρ_{20}	1.99976	1.99809	1.99509	1.99051
ρ_{40}	1.99994	1.99952	1.99877	1.99763
ρ_{80}	1.99998	1.99988	1.99969	1.99941
ρ_{160}	2.00001	1.99997	1.99992	1.99985

Table 2

For the eigenfunctions similar discussion can be done. Approximation error

$$\mathrm{Err}_i = \max_{x\in\bar{\omega}} |y_i^h(x) - u_i(x)|,$$

for $i = 1, 2, 3, 4$ is given in the table 3, while the values of convergence rate are presented in table 4.

$N \setminus \mathrm{Err}_i$	Err_1	Err_2	Err_3	Err_4
10	1.79 E-05	1.30 E-03	3.12 E-03	4.40 E-03
20	3.18 E-06	2.41 E-04	5.57 E-04	8.14 E-04
40	5.61 E-07	4.37 E-05	9.85 E-05	1.48 E-04
80	9.90 E-08	7.82 E-06	1.74 E-05	2.65 E-05
160	1.75 E-08	1.39 E-06	3.09 E-06	4.72 E-06
320	3.09 E-09	2.47 E-07	5.46 E-07	8.36 E-07

Table 3

$N \setminus \rho_N$	$\rho_N(y_1)$	$\rho_N(y_2)$	$\rho_N(y_3)$	$\rho_N(y_4)$
ρ_{10}	2.49591	2.43613	2.48729	2.43393
ρ_{20}	2.50218	2.46487	2.49811	2.45766
ρ_{40}	2.50226	2.48128	2.49726	2.48314
ρ_{80}	2.50144	2.49114	2.49893	2.49006
ρ_{160}	2.50079	2.49549	2.49962	2.49544

Table 4

References

[1] Belinskiy, B. P., Dauer, J. F.: *Eigenoscillations of mechanical systems with boundary conditions containing the frequency*, Q.uarterly of Appl.Math. 16 (1999), 521–541.

[2] Gegovska-Zajkova S. : *Numerical solution of Sturm-Liouville problems containing spectral parameter in boundary or interface conditions*, Matematichki bilten, Skopje (to appear).

[3] Геговска-Зајкова С. : *Спектрални проблеми кои содржат сингуларни дистрибуции и нивна примена*, Докторска дисертација, Скопје 2004.

[4] Jovanovic B. S., Vulkov L. G.: *On the convergence of finite difference schemes for the heat equation with concentrated capacity*, Numer. Math. 89, No 4 (2001), 715–734.

[5] Jovanovic B. S., Vulkov L. G., Gegovska-Zajkova S.: *On the convergence of finite difference schemes for the heat equation with concentrated capacity*, Numer. Math. 89, No 4 (2001), 715–734.

[6] Марчук, Г. И., Агошков, В. И.: *Введение в проекционно сеточные методы* , Наука, Москва (1981).

[7] Михайлов Б. П.: *Дифференциальные уравнения в частных производных*, Наука, Москва (1976).

[8] Samarskii A. A. : *Theory of difference schemes.* Nauka, Moscow 1989 (in Russian).

[9] Tihonov A. N., Samarskii A. A.: *Equations of Mathematical Physics*, GITTL, Moscow 1953 (in Russian).

8 МСДР 2004, (73 - 84)
Зборник на трудови
30.09.- 03.10.2004 год.
Охрид, Македонија
ISBN 9989 – 630 – 49 – 6
COBISS.MK – ID 61901322

УСЛОВИ ЗА ПОСТОЕЊЕ НА КВАЗИПЕРИОДИЧНИ РЕШЕНИЈА ЗА НЕКОИ НЕХОМОГЕНИ ЛИНЕАРНИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ ОД I И II РЕД

[1]Јорданка Митевска, [2]Марија Кујумџиева Николоска, [3]Драган Димитровски
Природно–математички факултет [1,3],
Електротехнички факултет [2]–Скопје
e–mail: marekn@etf.ukim.edu.mk

Апстракт. Во овој труд наоѓаме услови при кои нехомогената линеарна диференцијална равенка од I ред (5) и нехомогената линеарна диференцијална равенка од II ред (24) имаат квазипериодични решенија. Добиените услови се искажани преку седум теореми.

ВОВЕД

Дефиниција. Функцијата $y=\varphi(x)$, $x\in I\subseteq R$ ја нарекуваме **квазипериодична** (КПФ) ако постои функција $\omega(x)$ и број $\lambda\in R$ такви што да е задоволена релацијата

$$\varphi(x+\omega(x))=\lambda\varphi(x),\ \forall x,\ x+\omega(x)\in I \qquad (1)$$

Функцијата $\omega(x)$ ја викаме **квазипериод** (КП) за функцијата $y=\varphi(x)$, а λ **- квазипериодичен коефициент** (КПК) или **коефициент на деформација.**

Ако $\lambda=1$ и $\omega(x)=konst.$ тогаш функцијата $\varphi(x)$ е периодична во класична смисла.

Во врска со воведениот поим за квазипериодичност на функција го поставуваме следниов проблем:

Ако функцијата $y(x)$ е зададена имплицитно со диференцијалната равенка

$$F\left(x,y,y',\ldots,y^{(n)}\right)=0, \qquad (2)$$

да најдеме услови при кои равенката (2) има квазипериодични решенија (КПР), т.е. услови за постоење на функција (закон) $\omega(x)$ и број λ, за кои важи

$$y(x+\omega(x)) = \lambda y(x), \quad x, x+\omega(x) \in D_y \qquad (3)$$

Равенките (2)+(3) образуваат систем што ги дефинира функциите $y(x)$ и $\omega(x)$, па поставениот проблем го сведуваме на решавање на системот

$$\begin{cases} F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0 \\ y(x+\omega(x)) = \lambda y(x) \\ (y(x+\omega(x)))^{(k)} = \lambda y^{(k)}(x), \quad k = 1,2,\ldots,n \end{cases} \qquad (4)$$

што во општ случај се сведува на нелинеарна диференцијална равенка по y и функционално-диференцијална равенка по $\omega(x)$. Генерално, не е лесно да се реши ваков систем, особено ако (2) е диференцијална равенка од повисок ред.

Ако (2) е линеарна равенка, системот (4) е поедноставен и тој е линеарен по $y(x)$ и нејзините изводи, но е нелинеарен по $\omega(x)$.

Во трудот презентиран на меѓународната конференција МАТЕМАТИКА 2004, во КРАГУЕВАЦ, се изложени добиените резултати за хомогена линеарна диференцијална равенка од I ред

$$y' + f(x)y = 0$$

и за хомогена линеарна диференцијална равенка од II ред

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = 0 .$$

Овде, во врска со поставениот проблем за квазипериодичност, ги изложуваме добиените резултати за нехомогени линеарни диференцијални равенки од I и II ред.

I. Нека (2) е нехомогена линеарна диференцијална равенка од I ред

$$y' + f(x)y + g(x) = 0 . \qquad (5)$$

Бараме услови при кои (5) има квазипериодични решенија, т.е. решенија што ја задоволуваат релацијата (3).

Во овој случај системот (4) има вид

$$\begin{cases} y' + f(x)y + g(x) = 0 \\ y(x+\omega(x)) = \lambda y(x) \\ y'(x+\omega(x))(1+\omega'(x)) = \lambda y'(x) \end{cases} \qquad (6)$$

Од условот за квазипериодичност на решението на (5), следува дека (5) треба да е задоволена и во $x+\omega(x)$, т.е. важи

$$y'(x+\omega) + f(x+\omega)\cdot y(x+\omega) + g(x+\omega) = 0\,. \qquad (7)$$

Од (6) и (7) може да се елиминират $y'(x)$ и $y'(x+\omega(x))$. Така, при $1+\omega'(x)\neq 0$ од третата равенка во (6) имаме

$$y'\big(x+\omega(x)\big) = \frac{\lambda y'(x)}{1+\omega'(x)},$$

а од првата

$$y'(x) = -f(x)y - g(x)$$

и по замена во (7) добиваме

$$\frac{\lambda y'(x)}{1+\omega'} + f(x+\omega)\cdot\lambda y(x) + g(x+\omega) = 0$$

од каде

$$y\big[(1+\omega')\cdot f(x+\omega) - f(x)\big] + \left[\frac{1}{\lambda}(1+\omega')\cdot g(x+\omega) - g(x)\right] = 0 \qquad (8)$$

или

$$\big[-f(x)y - g(x)\big] + (1+\omega')\cdot\left[f(x+\omega)\cdot y + \frac{1}{\lambda}g(x+\omega)\right] = 0\,, \lambda\neq 0\,. \qquad (9)$$

Равенката (8), односно (9), е функционално диференцијална равенка по $\omega(x)$, т.е.

$$\Phi(x, y, \omega(x), \omega'(x), f(x), g(x), f(x+\omega), g(x+\omega)) = 0$$

која во општ случај не е лесно да се реши, иако решението на (1) може да се зададе експлицитно во однос на f и g. Затоа (9) можеме да ја разгледуваме само во некои специјални случаи.

1. Нека f и g се КПФ и такви што

$$f(x+\omega) = f(x), \quad g(x+\omega) = \lambda g(x) \qquad (10)$$

При услов $f(x)y + g(x)\neq 0$, од (9) добиваме $\omega'(x) = 0$, т.е. $\omega(x) = konst.$

Следува

Теорема 1. Ако (5) има КПР со КПК λ и f и g се КПФ, такви што важи (10), тогаш $\omega(x) = \text{конст.}$.

2. Нека f и g се КПФ и такви што

$$f(x+\omega) = \mu f(x), \quad g(x+\omega) = \nu g(x), \ \mu \neq 1, \ \nu \neq \lambda$$

тогаш од (9):

$$\omega(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{(1-\mu) f(x) y + (1-\frac{\nu}{\lambda}) g(x)}{\mu f(x) y + \frac{\nu}{\lambda} g(x)} dx =$$

$$= \int_{x_0}^{x} \frac{(1-\mu) f(x)[e^{-\int_{x_0}^{x} f(t)dt} (C - \int_{x_0}^{x} g(t) e^{\int_{t_0}^{t} f(u)du} dt)] + (1-\frac{\nu}{\lambda}) g(x)}{\mu f(x)[e^{-\int_{x_0}^{x} f(t)dt} (C - \int_{x_0}^{x} g(t) e^{\int_{t_0}^{t} f(u)du} dt)] + \frac{\nu}{\lambda} g(x)} dx \tag{11}$$

3. Од (9), при $\omega' = 0$ т.е. $\omega(x) = \text{конст.} = \omega^*$ и $f(x+\omega^*) - f(x) \neq 0$, добиваме:

$$y = -\frac{1}{\lambda} \cdot \frac{g(x+\omega^*) - \lambda g(x)}{f(x+\omega^*) - f(x)}. \tag{12}$$

Ако f и g се КПФ при што

$$f(x+\omega^*) = \mu f(x), \quad g(x+\omega^*) = \nu g(x), \tag{13}$$

тогаш

$$y = -\frac{(\nu-\lambda) g(x)}{\lambda(\mu-1) f(x)}, \ \mu \neq 1, \ f(x) \neq 0 \tag{14}$$

Притоа, бидејќи y е решение на (5), функциите f и g треба да го задоволуваат и условот

$$\lambda_1 (f \cdot g' - f' \cdot g) + (1+\lambda_1) g f^2 = 0,$$

каде $\lambda_1 = -\frac{\nu - \lambda}{\lambda(\mu - 1)}$

односно

$$\frac{f'g - fg'}{g f^2} = \frac{\lambda\mu - \nu}{\lambda - \nu}, \ gf^2 \neq 0, \quad \lambda \neq \nu \tag{15}$$

Следува

Теорема 2. Ако ДР (5) има КПР со константен КП, $\omega(x)=\omega^*=konst$ и f и g се КПФ за кои важат релациите (13) и (15), тогаш решението се определува со (14).

Во специјален случај, ако $\frac{\lambda\mu-\nu}{\lambda-\nu}=0$, т.е. $\lambda=\frac{\nu}{\mu}$, $\lambda\neq\nu$, тогаш $f'\cdot g-f\cdot g'=0$ од каде $f=Cg$ и тогаш од (14) добиваме

$$y=-\frac{1}{C}.$$

4. Равенката (5) е квадратурно решлива, т.е.

$$y(x)=e^{-\int_{x_0}^{x}f(t)dt}\left[C-\int_{x_0}^{x}g(t)\cdot e^{\int_{x_0}^{x}f(u)du}dt\right]. \qquad (16)$$

Од условот $y(x+\omega(x))=\lambda y(x)$ и (16) добиваме:

$$e^{-\int_{x_0}^{x}f(t)dt}\cdot e^{-\int_{x}^{x+\omega}f(t)dt}\left[C-\int_{x_0}^{x}g(t)\cdot e^{\int_{t_0}^{t}f(u)du}dt-\int_{x}^{x+\omega}g(t)\cdot e^{\int_{t_0}^{t}f(u)du}dt\right]=$$

$$=\lambda e^{-\int_{x_0}^{x}f(t)dt}\left[C-\int_{x_0}^{x}g(t)\cdot e^{\int_{t_0}^{t}f(u)du}dt\right]$$

од каде

$$\left(e^{-\int_{x}^{x+\omega}f(t)dt}-\lambda\right)\cdot C+\int_{x_0}^{x}g(t)\cdot e^{\int_{t_0}^{t}f(u)du}dt\cdot[\lambda-e^{-\int_{x}^{x+\omega}f(t)dt}]-$$

$$\int_{x}^{x+\omega}g(t)\cdot e^{\int_{t_0}^{t}f(u)du}dt=0\,. \qquad (17)$$

(17) е задоволено за секое C ако важи:

$$\begin{cases} 1^0 \quad e^{-\int_x^{x+\omega} f(t)dt} = \lambda \\ 2^0 \quad \int_x^{x+\omega} g(t)\cdot e^{\int_{t_0}^{t} f(u)du} dt = 0 \end{cases} \tag{18}$$

Нека $F(x)$ е примитивна функција за $f(x)$, т.е.

$$F(x) = \int f(x)dx .$$

Тогаш

$$\int_x^{x+\omega} f(t)dt = F(x+\omega) - F(x)$$

па од (18.1^0) следува

$$F(x+\omega(x)) = F(x) + \ln\frac{1}{\lambda}, \ \ \lambda > 0 . \tag{19}$$

Нека е

$$h(x) = e^{\int_{x_0}^{x} f(t)dt} g(t)$$

Тогаш

$$h(x) = e^{F(x)-F(x_0)} \cdot g(x)$$

т.е.

$$h(x) = C_1 e^{F(x)} \cdot g(x), \quad C_1 = e^{-F(x_0)}$$

Ако $H(x)$ е примитивна за $e^{F(x)}g(x)$, т.е.

$$\int e^{F(x)} g(x)dx = H(x)$$

тогаш од (18.2^o) добиваме

$$H(x+\omega) = H(x) .$$

Следува

Теорема 3. Ако секое решение на (5) е КП, тогаш за примитивните функции $F(x)$ и $H(x)$ на функциите $f(x)$ и $e^{F(x)}g(x)$, соодветно, важат релациите

$$F(x+\omega(x)) = F(x) + \ln\frac{1}{\lambda}, \ \ \lambda > 0 ; \ \ H(x+\omega(x)) = H(x) . \tag{20}$$

Со парцијална интеграција, од условот (18.2°) добиваме

$$e^{F(x+\omega)}G(x+\omega)-e^{F(x)}G(x)+\int_{x}^{x+\omega}e^{F(t)}G(t)f(t)dt=0\,,G'(x)=g(x)\,.\ (21)$$

Поради (19) од (21) следува

$$e^{F(x)}\left[\frac{1}{\lambda}G(x+\omega)-G(x)\right]+\int_{x}^{x+\omega}e^{F(t)}G(t)f(t)dt=0$$

или

$$\int_{x}^{x+\omega}e^{F(t)}G(t)f(t)dt=-e^{F(x)}\left[\frac{1}{\lambda}G(x+\omega)-G(x)\right] \qquad (22)$$

Специјално, ако примитивната функција за $g(x)$ е КПФ, т.е.

$$G(x+\omega(x))=\mu G(x)$$

тогаш

$$\int_{x}^{x+\omega}e^{F(t)}G(t)f(t)dt=(1-\frac{\mu}{\lambda})\cdot e^{F(x)}G(x)$$

Специјално, за $\lambda=\mu$, следува

$$\int_{x}^{x+\omega}e^{F(t)}G(t)f(t)dt=0\,.$$

Следува

Теорема 4. Доволен услов равенката (5) да има КПР е за примитивните функции $F(x)$ и $G(x)$ на функциите $f(x)$ и $g(x)$, соодветно, да важат релациите

$$\begin{cases}1^\circ\ \ F(x+\omega)=F(x)+\ln\frac{1}{\lambda}, \quad \lambda>0\\ 2^\circ\ \ \int_{x}^{x+\omega}e^{F(t)}G(t)f(t)dt=(1-\frac{\mu}{\lambda})\cdot e^{-F(x)}G(x)\end{cases} \qquad (23)$$

III. За диференцијалната равенка од II ред

$$y''+f(x)y'+g(x)y=h(x) \qquad (24)$$

проблемот за определување услови за постоење квазипериодични решенија, го сведуваме на системот:

$$\begin{cases} y'' + f(x)y' + g(x)y = h(x) \\ y(x+\omega) = \lambda y(x) \\ y'(x+\omega)(1+\omega') = \lambda y'(x) \\ y''(x+\omega)(1+\omega')^2 + y'(x+\omega)\omega'' = \lambda y''(x) \end{cases} \tag{25}$$

На сличен начин како и во случај на диференцијална равенка од I ред (5), со помош на (25) и равенката

$$y''(x+\omega(x)) + f(x+\omega(x))y'(x+\omega(x)) + g(x+\omega(x))y(x+\omega(x)) = h(x+\omega(x))$$

може да ги елиминираме $y''(x)$ и $y''(x+\omega(x))$.

Така, при $1+\omega' \neq 0$ имаме:

$$y''(x+\omega) = \frac{\lambda y'' - y'(x+\omega)\cdot\omega''}{(1+\omega')^2}$$

и

$$\frac{\lambda\big(h(x) - f(x)y' - g(x)y\big) - \dfrac{\lambda y'}{1+\omega'}\cdot\omega''}{(1+\omega')^2} + f(x+\omega)\cdot\frac{\lambda y'}{1+\omega'} + \lambda g(x+\omega)\cdot y = h(x+\omega)$$

од каде, по средување по y и y'

$$\lambda y'\Big[f(x+\omega)(1+\omega')^2 - f(x)(1+\omega') - \omega''\Big] + \lambda y\Big[g(x+\omega)(1+\omega')^3 - g(x)(1+\omega')\Big] - \Big[h(x+\omega)(1+\omega')^3 - \lambda h(x)(1+\omega')\Big] = 0 \tag{26}$$

или

$$\lambda y'\omega'' + (1+\omega')^3\big[\lambda y\cdot g(x+\omega) - h(x+\omega)\big] + (1+\omega')^2\cdot\lambda y'\cdot f(x+\omega) + \lambda(1+\omega')\big[-y'f(x) - yg(x) + h(x)\big] = 0 \tag{27}$$

(27) е линеарна равенка од I ред по y. Ако ставиме

$$\begin{aligned} F(x) &= \lambda\cdot\Big[f(x+\omega)(1+\omega')^2 - f(x)(1+\omega') - \omega''\Big] \\ G(x) &= \lambda\cdot\Big[g(x+\omega)(1+\omega')^3 - g(x)(1+\omega')\Big] \\ H(x) &= -\Big[h(x+\omega)(1+\omega')^3 - \lambda h(x)(1+\omega')\Big] \end{aligned} \tag{28}$$

имаме

$$F(x)y' + G(x)y + \frac{1}{\lambda}H(x) = 0 \tag{29}$$

или

$$y' + \frac{G(x)}{F(x)} y + \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{H(x)}{F(x)} = 0 , \; F(x) \neq 0, \; x \in I . \tag{30}$$

При познат КП $\omega(x)$ и КПК λ, функциите $F(x)$, $G(x)$, $H(x)$ се определени, па (30) е квадратурно решлива, т.е.

$$y = e^{-\int_{x_0}^{x} \frac{G(t)}{F(t)} dt} \left[C - \frac{1}{\lambda} \int_{x_0}^{x} \frac{H(x)}{F(x)} \cdot e^{\int_{t_0}^{t} \frac{G(u)}{F(u)} du} dt \right] \tag{31}$$

Некои специјални случаи.

1. Ако $\omega' = 0$, тогаш $\omega =$ конст. $= \omega^*$ и $\omega'' = 0$, па од (27) добиваме

$$y'\left[f(x+\omega^*) - f(x) \right] + y\left[g(x+\omega^*) - g(x) \right] - \left[\frac{1}{\lambda} h(x+\omega^*) - h(x) \right] = 0 . \tag{32}$$

Ако f, g и h се КПФ со ист константен период ω^*, т.е.

$$f(x+\omega^*) = \mu f(x), \quad g(x+\omega^*) = \nu f(x), \quad h(x+\omega^*) = \eta h(x)$$

тогаш

$$F(x) = \lambda(\mu - 1) f(x), \quad G(x) = \lambda(\nu - 1) g(x), \quad H(x) = (\lambda - \eta) h(x) \tag{33}$$

па (30) има вид

$$f(x) y' + \frac{\nu - 1}{\mu - 1} \cdot g(x) y + \frac{\lambda - \eta}{\lambda(\mu - 1)} \cdot h(x) = 0 \tag{34}$$

или

$$y' + \frac{\nu - 1}{\mu - 1} \cdot \frac{g(x)}{f(x)} y + \frac{\lambda - \eta}{\lambda(\mu - 1)} \cdot \frac{h(x)}{f(x)} = 0 , \; f(x) \neq 0, \; \mu \neq 1 \tag{35}$$

и решението се одредува експлицитно со формулата

$$y = e^{-\frac{\nu - 1}{\mu - 1} \int_{x_0}^{x} \frac{g(t)}{f(t)} dt} \left[C - \frac{\lambda - \eta}{\lambda(\mu - 1)} \int_{x_0}^{x} \frac{h(x)}{f(x)} \cdot e^{\frac{\nu - 1}{\mu - 1} \int_{t_0}^{t} \frac{g(u)}{f(u)} du} dt \right] . \tag{36}$$

Следува

Теорема 5. Ако (5) има КПР со константен КП, тогаш при услов f, g и h да се КПФ со ист константен КП и $f(x) \neq 0, \; \mu \neq 1$, решението е определено експлицитно во вид (36).

2. Ако $f(x)=0$, т.е. (24) е од вид

$$y''+g(x)y=h(x) \tag{37}$$

тогаш $F(x)=0$, па од (30) ја добиваме равенка

$$G(x)y+\frac{1}{\lambda}H(x)=0 \tag{38}$$

т.е.

$$y=-\frac{1}{\lambda}\frac{H(x)}{G(x)}=-\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{h(x+\omega)-\lambda h(x)}{g(x+\omega)-g(x)} \tag{39}$$

Ако $\omega'=0$, т.е. $\omega=\text{конст.}=\omega^*$, $\omega''=0$, а g и h се КПФ т.е.

$$g(x+\omega^*)=\nu g(x),\quad h(x+\omega^*)=\eta h(x),$$

тогаш имаме

$$y=-\frac{\lambda-\eta}{\lambda(\nu-1)}\cdot\frac{h(x)}{g(x)}. \tag{40}$$

Од барањето y да е решение на (37), добиваме дека функциите g и h треба да ја задоволуваат и релацијата:

$$\frac{h''g-hg''-2h'g'}{hg^2}+\frac{2g'^2}{g^3}=\frac{\eta-\lambda\nu}{\lambda-\eta},\ hg^2\neq 0,\quad \lambda\neq\eta. \tag{41}$$

Следува

Теорема 6. Ако равенката (37) има КПР со константен КП, g и h се КПФ со ист константен КП и за нив важи (41), тогаш решението на (37) се определува без квадратури во вид

$$y=-\frac{\lambda-\eta}{\lambda(\nu-1)}\cdot\frac{h(x)}{g(x)}.$$

3. Нека во (24) $g(x)=0$, т.е. (24) е од вид

$$y''+f(x)y'=h(x) \tag{42}$$

Тогаш $G(x)=0$, па од (30):

$$y'=-\frac{1}{\lambda}\frac{H(x)}{F(x)}=-\frac{1}{\lambda}\frac{h(x+\omega)-\lambda h(x)}{f(x+\omega)-f(x)}. \tag{43}$$

Ако $\omega'=0$, т.е. $\omega=\text{const.}=\omega^*$, $\omega''=0$ и f и h се КПФ со ист КП, т.е.

$$f(x+\omega^*)=\mu f(x),\quad h(x+\omega^*)=\eta h(x)$$

тогаш од (43):

$$y' = -\frac{(\lambda-\eta)}{\lambda(\mu-1)}\frac{h(x)}{f(x)}, \tag{44}$$

Бидејќи (44) е прв интеграл на (42), функциите f и h ја задоволуваат и релацијата

$$\frac{h'f-hf'}{hf^2} = \frac{\eta-\lambda\nu}{\lambda-\eta}, hf^2 \neq 0, \eta \neq \lambda\ . \tag{45}$$

Решението се определува со една квадратура, т.е.

$$y = C - \frac{(\lambda-\eta)}{\lambda(\mu-1)}\int_{x_0}^{x}\frac{h(t)}{f(t)}dt \tag{46}$$

Следува

Теорема 7. Доволен услов равенката (42) да има КПР со константен КП е f и h да се КПФ со ист константен КП и да ја задоволуваат релацијата (45). Тогаш решението на (42) се определува со една квадратура во вид (46).

ЛИТЕРАТУРА

[1] P.Hartman, Ordinary differential equations, Moskva 1970 (in Russian)
[2] В.А.Якубович, В.М. Старжинский, Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коеффициентами и их приложениа, Москва 1972
[3] Б.М.Левитан; В.В.Жиков, Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения, Москва 1978
[4] Э.Камке, Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, Москва 1971

8 МСДР 2004, (85 - 90)
Зборник на трудови
30.09.- 03.10.2004 год.
Охрид, Македонија

ISBN 9989 – 630 – 49 – 6
COBISS.MK – ID 61901322

ONE PROOF FOR A THEOREM OF DIFFERENTIAL EQUATIONS

Nikola Rechoski

Abstract
In this article we present a proof for a known theorem of differential equations conserning to the boundary problem.The proof is given by means of distributions. Similar proof is given (2.p.275)

Introduction

The object of consideration is the differential equation of the form

$$a_n y^{(n)} + ... + a_0 y = u \qquad (1)$$

where $a_n, ..., a_0$, are complex number, $a_n \neq 0$, y is the unknown function and u is a given function.

By $L = a_n \frac{d^n}{dt^n} + ... + a_1 \frac{d}{dt} + a_o$ one denote the differential operator of order n . This means $Ly = a_n y^{(n)} + ... + a_0 y,$ so that we can write

$$Ly = u \qquad (2)$$

If on right side a given distribution U ; then Y is the unknown distribution of $D^{'}, D^{'}$ is the space of Schwartz distribution .
In this case one write

$$\text{LY=U} \qquad (3)$$

In the theory of differential equations the basic meaning has the following distribution $L\delta = \sum_{k=0}^{n} a_k \delta^{(k)}$, δ is the Dirac distribution.

Further by * one denote the operation convolution of distribution : if $T,U \in D^{'}$ then T*U is there convolution. In general the convolution is not defined for every two distribution. Moreover if at least one has compact support then the convolution is well defined and holds the relations

$$T * U = 2\pi F(F^{-1}T \cdot F^{-1}U) = F^{-1}(FT \cdot FU)$$

where F denote the Fourier transform of distribution.
If is also well known that $\delta^{(n)} * T = T^{(n)}$ from this the equation (3) can be written in the form

$$L\delta * Y = U \tag{4}$$

From the previous facts we have

$$L\delta * Y = 2\pi F\left(F^{-1}L\delta \cdot F^{-1}Y\right)$$

Since

$$F^{-1}L\delta = 2\pi\left[a_n(it)^n + \ldots + a_1(it) + a_o\right] = Q_n(t),$$
$$Q_n(t) = 2\pi\left[a_n(it)^n + \ldots + a_o\right] = A(t-t_1)^{k_1} \ldots (t-t_m)^{k_m}$$

where $A = 2\pi a_n i^n$, $t_1,\ldots,t_m$ are the roots of the polinomail $Q_n(t)$ and $k_1,\ldots,k_m$ are the multiplicity . Thus on get

$$2\pi F\left(Q_n(t)F^{-1}Y\right) = U$$

other

$$2\pi Q_n(t)F^{-1}Y = F^{-1}U, F^{-1}Y = \frac{1}{2\pi}\frac{F^{-1}U}{Q_n(t)}, Y = \frac{1}{2\pi}F\left(\frac{F^{-1}U}{Q_n(t)}\right)$$

Consequntly the solution is given by $Y = \frac{1}{2\pi}F\left(\frac{F^{-1}U}{Q_n(t)}\right)$ if the Fourier transforms exists for the distributions.
Here we consider the differential equation

$$a_n y^{(n)} + \ldots + a_o y = u \tag{5}$$

u is a continous function on the interval $[t_o, \infty]$and y is the unknown function which must satisfy (5) on the interval $[t_0, \infty]$. It is to find the function $y(t)$ which satisfy (5) and the boundary conditions $y^{(\nu)}(t_0) = y_\nu$, $\nu = 0,1,...,n-1$.

Here we will give one proof that such a function exist on the interval $\Omega = (t_0, \infty)$, $y \in C^n(\Omega)$ and $\lim_{t \to t_0} y^{(k)}(t) = y_k$. For a similar proof see for example (2.p275)

Before we pass to the proof we will consider the distribution $\Gamma = gH, H$ is the Heaviside function and g is the solution for the differential equations , $g(0) = g^{'}(0) = ... = g^{(n-2)}(0) = 0$ and $g^{(n-1)}(0) = \dfrac{1}{a_n}$. The distribution gH is the inverse for the distribution $L\delta = \sum_{k=0}^{n} a_k \delta^{(k)}$; this means $L\delta * gH = \delta$. By $D_+^{'}$ we denote the distributions which has support in the intervals of the form $[t_1, \infty]$ $t_1 \in R$.

It is of interes to remark that $D_+^{'}$ with the operation convolution of distributions is a commutative algebra with δ the identitiy element , and without multipliers of zero.

Now we pass to the proof of theorem.

Proof. By assuming that there exist a function $y(t)$ of class $C^n(t_0, \infty)$ which satisfy the conditions $\lim_{t \to t_0} y^{(k)}(t) = y_k, k = 0,1,...n-1;$ we consider the following distributions $y(t)H(t-t_0)$ and $u(t)H(t-t_0)$ of the algebra $D_+^{'}$. From the hypothesis it easy to prove that $[y(t)H(t-t_0)]^{(k)} = y^{(k)}(t)H(t-t_0) + y_{k-1}\delta(t-t_0) + ... + y_0\delta^{(k-1)}(t-t_0)$ in distributional sense for k=1,2,…,n.

With this in account on obtain

$$L[y(t)H(t-t_0)] = (Ly)H(t-t_0) + \sum_{k=0}^{n-1} b_k \delta^{(k)}(t-t_0) \qquad (6)$$

$$b_k = \sum_{j=0}^{n-k-1} a_{k+j+1} y_j$$

Since $(Ly)H(t-t_0) = u(t)H(t-t_0)$ we have

$$L\delta * \left[y(t)H(t-t_0)\right] = u(t)H(t-t_0) + \sum_{k=0}^{n-1} b_k \delta^{(k)}(t-t_0) \qquad (7)$$

After multiplication the equation (7) with distribution gH on get

$$L\delta * gH * \left[yH(t-t_0)\right] = u(t)H(t-t_0) * g(t)H(t) + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \delta^{(k)}(t-t_0) * gH$$

Because $L\delta * gH = \delta, \delta^{(k)}(t-t_0) * gH = (gH)^{(k)}(t-t_0) = g^{(k)}(t-t_0)$ for k=0,1,…,n-1 ; definitely on obtain

$$y(t)H(t-t_0) = \int_{t_0}^{t} u(\tau)g(t-\tau)d\tau + \sum_{k=0}^{n-1} b_k g^{(k)}(t-t\ ), t > t_0 \qquad (8)$$

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} u(\tau)g(t-\tau)d\tau + \sum_{k=0}^{n-1} b_k g^{(k)}(t-t_0), t > t_0 \qquad (9)$$

The following formulas holds for the function (9) :

$$y^{(j)}(t) = \int_{t_0}^{t} u(\tau)g^{(j)}(t-\tau)d\tau + g^{(j-1)}(0)u(t) + \sum_{k=0}^{n-1} b_k g^{(k+j)}(t-t_0), \qquad (10)$$

$j = 0,1,\ldots,n-1$

Thus

$$y^{(j)}(t) = \int_{t_0}^{t} u(\tau)g^{(j)}(t-\tau)d\tau + \sum_{k=0}^{n-1} b_k g^{(k+j)}(t-t_0),\ j = 0,1,\ldots,n-1 \qquad (11)$$

and

$$y^{(n)}(t) = \int_{t_0}^{t} u(\tau)g^{(n)}(t-\tau)d\tau + \frac{1}{a_n}u(t) + \sum_{k=0}^{n-1} b_k g^{(k+n)}(t-t_0) \qquad (12)$$

If , for example , $u(t) \in C^1[t_0, \infty)$ on get

$$y^{(n+1)}(t) = \int_{t_0}^{t} u(\tau)g^{(n+1)}(t-\tau)d\tau + g^{(n)}(0)u(t) + \frac{1}{a_n}u'(t) + \sum_{k=0}^{n-1} b_k g^{(k+n+1)}(t-t_0)$$

Now it is not difficult to verify that the function (9) satisfy the differential equation (5).

Indeed by using the formulas (11) and (12) and also the fact that the function $\sum_{k=0}^{n-1} b_k g^{(k)}(t-t_0)$ a solution for the equation Ly=0 on obtain

$$a_n\left[\int_{t_0}^{t} u(\tau)g^{(n)}(t-\tau)d\tau + \frac{1}{a_n}u(t) + \sum_{k=0}^{n-1} b_k g^{(k+n)}(t-t_0)\right] +$$

$$a_{n-1}\left[\int_{t_0}^{t} u(\tau)g^{(n-1)}(t-\tau)d\tau + \sum_{k=0}^{n-1} b_k g^{(k+n-1)}(t-t_0)\right] + \ldots +$$

$$+a_0\left[\int_{t_0}^{t} u(\tau)g(t-\tau)d\tau + \sum_{k=0}^{n-1} b_k g^{(k)}(t-t_0)\right] = u(t) +$$

$$+\left[a_n\int_{t_0}^{t} u(\tau)g^{(n)}(t-\tau)d\tau + \ldots + a_0\int_{t_0}^{t} u(\tau)g(t-\tau)\right] +$$

$$+a_n\left[\sum_{k=0}^{n-1} b_k g^{(k)}(t-t_0)\right]^{(n)} + \ldots + a_0\left[\sum_{k=0}^{n-1} b_k g^{(k)}(t-t_0)\right] =$$

$$= u(t) + \int_{t_0}^{t} u(\tau)\left[a_n g^{(n)}(t-\tau) + \ldots + a_0 g(t-\tau)\right]d\tau + 0$$

$$= u(t) + \int_{t_0}^{t} u(\tau)\cdot 0 d\tau = u(t)$$

for $t > t_0$ .It is also easy to see that the function (9) satisfy the boundary value conditions

$$\lim_{t\to t_0} y^{(j)}(t) = y_j,\ j = 0,\ldots,n-1$$

For example

$$\lim_{t\to t_0}\int_{t_0}^{t} u(\tau)g(t-\tau)d\tau + \lim_{t\to t_0}\sum_{k=0}^{n-1} b_k g^{(k)}(t-t_0) = 0 + b_{n-1}g^{(n-1)}(0) =$$

$$= \frac{1}{a_n}\sum_{j=0}^{n-1-(n-1)} a_{n-1+1+j}y_j = \frac{1}{a_n}a_n y_0 = y_0$$

From theorem of Picard it result that the function (9) is the unique solution of the differential equation (5) for $t > t_0$

In the same way we can consider the equation

$$L\delta * Y = U, U \in D_{+}^{'} .$$

Because $Y_i = U + gH$ is a solution for (11), then every solution is given by $Y = y_h + U * gH$, where y_h is the general solution of the equation

$$L\delta * Y = 0$$

Since the distribution $U * gH \in D_{+}^{'}$ therefore supp $U * gH \subset [t_1, \infty)$. Conse quently on the interval $(-\infty, t_1)$, U*gH=0, that's on this interval $Y = y_h$ and we can in the point $t_0 = t_1 - \varepsilon$ to sets $y^{(k)}(t_0) = y_k$.
Because the solution is unique it follows that

$$Y = \sum_{k=0}^{n-1} b_k \left[g^{(k)}(t - t_1 + \varepsilon) \right] + U * [gH]$$

is the solution that we seek.

ЕДЕН ДОКАЗ НА ТЕОРЕМА ОД ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ

Никола Речкоски, с. Велгошти Охрид

Во оваа работа е даден доказ на проблемот на Пикар-Линделеф за обични диференцијални равенки со константни коефициенти.

Литература

1. Бремерман Н , Распределенија , комплексне перемениеи преобразованија Фурие , издателство " Мир" Москва 1968.
2. Jantcher L . Distributionen , Walter de Gruyter Berlin 1971
3. Zemanian , A.H. Distribution Theory and Transform Analysis . Mc Graw - Hill Book company , New York 1965.

8 МСДР 2004, (91 - 98)
Зборник на трудови
30.09.- 03.10.2004 год.
Охрид, Македонија

ISBN 9989 – 630 – 49 – 6
COBISS.MK – ID 61901322

ЗА НЕКОИ ПОСЛАБИ УСЛОВИ ЗА РЕДУКТИБИЛНОСТ НА ЕДНА ЛИНЕАРНА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНА РАВЕНКА ОД ЧЕТВРТ РЕД ЧИЈ ОПШТ ИНТЕГРАЛ Е ПОЛИНОМ

Елена Хаџиева
Електротехнички факултет - Скопје
hadzieva@etf.ukim.edu.mk

Апстракт: Во трудов се разгледува линеарна диференцијална равенка од четврти ред која има полиномни коефициенти, чиј степен е ист со редот на изводот пред кој се наоѓаат. Добиени се доволни услови за сведување на равенката на решлив систем од две линеарни равенки од прв ред и една линеарна равенка од втор ред.

Во трудов се разгледува диференцијалната равенка

$$a(x)y^{IV}+b(x)y'''+c(x)y''+d(x)y'+e(x)y=0, \tag{1}$$

каде $a(x) = A_4x^4+A_3x^3+A_2x^2+A_1x+A_0$, $b(x)= B_3x^3+B_2x^2+B_1x+B_0$, $c(x)= C_2x^2+C_1x+C_0$, $d(x)= D_1x+D_0$, $e(x)= E_0$, A_i, B_i, C_i, D_i и E_i (i прима соодветни вредности) се константи, A_4 е ненулта константа.

Истава равенка е разгледувана во [1], но овде се добиени послаби услови за нејзино решавање. Идејата е инспирирана од трудот [2].

Ако равенката (1) се диференцира n пати, се добива

$$\begin{aligned} & a(x)y^{(n+4)}+\left[\binom{n}{1}a'(x)+\binom{n}{0}b(x)\right]y^{(n+3)}+ \\ & \left[\binom{n}{2}a''(x)+\binom{n}{1}b'(x)+\binom{n}{0}c(x)\right]y^{(n+2)}+ \\ & \left[\binom{n}{3}a'''(x)+\binom{n}{2}b''(x)+\binom{n}{1}c'(x)+\binom{n}{0}d(x)\right]y^{(n+1)}+ \\ & \left[\binom{n}{4}a^{IV}(x)+\binom{n}{3}b'''(x)+\binom{n}{2}c''(x)+\binom{n}{1}d'(x)+\binom{n}{0}e(x)\right]y^{(n)}=0 \end{aligned} \tag{2}$$

Потребен и доволен услов за да диференцијалната равенка (1) има полиномно решение од степен *n,* е да биде задоволена релацијата ([3,4]):

$$\binom{n}{4}a^{IV}(x)+\binom{n}{3}b'''(x)+\binom{n}{2}c''(x)+\binom{n}{1}d'(x)+\binom{n}{0}e(x)=0 \qquad (3)$$

$$\binom{n}{3}a'''(x)+\binom{n}{2}b''(x)+\binom{n}{1}c'(x)+\binom{n}{0}d(x)\neq 0 \qquad (4)$$

(Во случај кога равенката (3) има повеќе корени природни броеви, се зема најмалиот од нив.) Ќе претпоставиме дека сега диференцијалната равенка (2) го има обликот:

$$\begin{aligned}&a(x)y^{(n+4)}+\left[\binom{n}{1}a'(x)+\binom{n}{0}b(x)\right]y^{(n+3)}+\\&+\left[\binom{n}{2}a''(x)+\binom{n}{1}b'(x)+\binom{n}{0}c(x)\right]y^{(n+2)}+\\&+\left[\binom{n}{3}a'''(x)+\binom{n}{2}b''(x)+\binom{n}{1}c'(x)+\binom{n}{0}d(x)\right]y^{(n+1)}=0\end{aligned} \qquad (5)$$

За коефициентот пред $y^{(n+1)}$ се добива:

$$\begin{aligned}&\binom{n}{3}a'''(x)+\binom{n}{2}b''(x)+\binom{n}{1}c'(x)+\binom{n}{0}d(x)=\\&=(4n(n-1)(n-2)A_4+3n(n-1)B_3+2nC_2+D_1)x+\\&+n(n-1)(n-2)A_3+n(n-1)B_2+nC_1+D_0\end{aligned}$$

Ќе означиме $\alpha = 4n(n-1)(n-2)A_4+3n(n-1)B_3+2nC_2+D_1$,
$\beta = n(n-1)(n-2)A_3+n(n-1)B_2+nC_1+D_0$.

Ставаме:

$$a(x)=\frac{1}{p}(Ax^3+Bx^2+Cx+D)(\alpha x+\beta), \qquad (6)$$

$$\binom{n}{1}a'(x)+\binom{n}{0}b(x)=\frac{1}{p}(Ex^2+Fx+G)(\alpha x+\beta), \qquad (7)$$

$$\binom{n}{2}a''(x)+\binom{n}{1}b'(x)+\binom{n}{0}c(x)=\frac{1}{p}(Hx+I)(\alpha x+\beta), \qquad (8)$$

па равенката (1) станува

$$(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)y^{(n+4)} + (Ex^2 + Fx + D)y^{(n+3)} +$$
$$+ (Hx + I)y^{(n+2)} + py^{(n+1)} = 0 \qquad (9)$$

Ако последнава равенка,. (9), ја диференцираме m-1 пати, (m е природен број), се добива:

$$\begin{aligned}
&(Ax^3+Bx^2+Cx+D)y^{(n+m+3)}+\\
&+[(3(m-1)A+E)x^2+(2(m-1)B+F)x+(m-1)C+G]y^{(n+m+2)}+\\
&+[(3(m-1)(m-2)A+2(m-1)E+H)x+ \qquad (10)\\
&+(m-1)(m-2)B+(m-1)F+I]y^{(n+m+1)}+\\
&+[(m-1)(m-2)(m-3)A+(m-1)(m-2)E+(m-1)H+p]y^{(n+m)}=0
\end{aligned}$$

Доволен услов за да (1) има полиномно решение од степен $n+m$ е ([5]):

$$(m\text{-}1)(m\text{-}2)(m\text{-}3)A+(m\text{-}1)(m\text{-}2)E+(m\text{-}1)H+p=0, \qquad (11)$$

со што (10) го добива обликот:

$$\begin{aligned}
&(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)y^{(n+m+3)} +\\
&+[(3(m-1)A + E)x^2 + (2(m-1)B + F)x + (m-1)C + G]y^{(n+m+2)} +\\
&+[(3(m-1)(m-2)A + 2(m-1)E + H)x + \qquad (12)\\
&+(m-1)(m-2)B + (m-1)F + I]y^{(n+m+1)} = 0
\end{aligned}$$

Ако коефициентот пред $y^{(n+m+1)}$ во равенката (12) е различен од 0,

$$\begin{aligned}
&(3(m-1)(m-2)A + 2(m-1)E + H)x +\\
&+(m-1)(m-2)B + (m-1)F + I \neq 0 \qquad (13)
\end{aligned}$$

и ако означиме $\gamma = 3(m\text{-}1)(m\text{-}2)A+2(m\text{-}1)E+H$,
$\delta = (m\text{-}1)(m\text{-}2)B+(m\text{-}1)F+I$, ставајќи

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = \frac{1}{q}(Lx^2 + Mx + N)(\gamma x + \delta) \qquad (14)$$

$$(3(m\text{-}1)A + E)x^2 + (2(m-1)B + F)x + (m-1)C + G) =$$
$$= \frac{1}{q}(Jx + K)(\gamma x + \delta) \qquad (15)$$

за равенката (12) се добива:

$$(Lx^2+Mx+N)y^{(n+m+3)}+(Jx+K)y^{(n+m+2)}+qy^{(n+m+1)}=0. \qquad (16)$$

Ако ставиме $y^{(n+m+1)}=z$, тогаш последнава равенка добива вид:

$$(Lx^2+Mx+N)z''+(Jx+K)z'+qz=0 \qquad (17)$$

Коефициентите *A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N* треба да се определат, додека воведените константи *p* и *q* во понатамошните истражувања нема да влијаат.

Од равенството (6) се добива:

$$A=\frac{p}{\alpha}A_4; \qquad B=\frac{p}{\alpha}(A_3-\frac{\beta}{\alpha}A_4);$$
$$C=\frac{p}{\alpha}(A_2-\frac{\beta}{\alpha}A_3+\frac{\beta^2}{\alpha^2}A_4);$$
$$D=\frac{p}{\alpha}(A_1-\frac{\beta}{\alpha}A_2+\frac{\beta^2}{\alpha^2}A_3-\frac{\beta^3}{\alpha^3}A_4);$$
$$A_0-\frac{\beta}{\alpha}A_1+\frac{\beta^2}{\alpha^2}A_2-\frac{\beta^3}{\alpha^3}A_3+\frac{\beta^4}{\alpha^4}A_4=0 \qquad (18)$$

Од равенството (7) се добива:

$$E=\frac{p}{\alpha}(4nA_4+B_3); \qquad F=\frac{p}{\alpha}(3nA_3+B_2-\frac{\beta}{\alpha}(4nA_4+B_3));$$
$$G=\frac{p}{\alpha}(2nA_2+B_1-\frac{\beta}{\alpha}(3nA_3+B_2)+\frac{\beta^2}{\alpha^2}(4nA_4+B_3));$$
$$nA_1+B_0-\frac{\beta}{\alpha}(2nA_2+B_1)+\frac{\beta^2}{\alpha^2}(3nA_3+B_2)-\frac{\beta^3}{\alpha^3}(4nA_4+B_3)=0 \quad (19)$$

Од (8) пак, се добива:

$$H=\frac{p}{\alpha}(6n(n-1)A_4+3nB_3+C_2);$$

$$I=\frac{p}{\alpha}(3n(n-1)A_3+2nB_2+C_1-\frac{\beta}{\alpha}(6n(n-1)A_4+3nB_3+C_2));$$

$$n(n\text{-}1)A_2+nB_1+C_0-\frac{\beta}{\alpha}(3n(n-1)A_3+2nB_2+C_1)+$$

$$+\frac{\beta^2}{\alpha^2}(6n(n-1)A_4+3nB_3+C_2)=0 \tag{20}$$

Од (14) се добива:

$$L=\frac{qp}{\gamma\alpha}A_4; \qquad M=\frac{qp}{\gamma\alpha}(A_3-(\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\delta}{\gamma})A_4)$$

$$N=\frac{qp}{\gamma\alpha}(A_2-(\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\delta}{\gamma})A_3+(\frac{\beta^2}{\alpha^2}+\frac{\beta}{\alpha}\frac{\delta}{\gamma}+\frac{\delta^2}{\gamma^2})A_4);$$

$$A_1-(\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\delta}{\gamma})A_2+(\frac{\beta^2}{\alpha^2}+\frac{\beta}{\alpha}\frac{\delta}{\gamma}+\frac{\delta^2}{\gamma^2})A_3-$$

$$(\frac{\beta^3}{\alpha^3}+\frac{\beta^2}{\alpha^2}\frac{\delta}{\gamma}+\frac{\beta}{\alpha}\frac{\delta^2}{\gamma^2}+\frac{\delta^3}{\gamma^3})=0 \tag{21}$$

Од (15) се добива:

$$J=\frac{qp}{\gamma\alpha}((4n+3m-3)A_4+B_3);$$

$$K=\frac{qp}{\gamma\alpha}((3n+2m-2)A_3+B_2-\frac{\beta}{\alpha}((4n+2m-2)A_4+B_3)-$$

$$-\frac{\delta}{\gamma}((4n+3m-3)A_4+B_3)));$$

$$(2n+m-1)A_2+B_1-\frac{\beta}{\alpha}((3n+m-1)A_3+B_2)-$$

$$\frac{\delta}{\gamma}((3n+2m-2)A_3+B_2)+\frac{\beta^2}{\alpha^2}((4n+m-1)A_4+B_3)+ \tag{22}$$

$$\frac{\beta}{\alpha}\frac{\delta}{\gamma}((4n+3m-2)A_4+B_3)+\frac{\delta^2}{\gamma^2}((4n+3m-3)A_4+B_3)=0$$

Од (14) и (6) се гледа дека корените на равенката $Lx^2+Mx+N=0$, x_3 и x_4 , се и корени на равенката $a(x) = 0$, а останатите два корени на равенката $a(x)=0$ се: $x_1=-\beta/\alpha$ (заради (6)) и $x_2=-\delta/\gamma$ (заради (6) и (14)). Како што е познато ([4,6]), потребен и доволен услов за да диференцијалната равенка (17) има две полиномни решенија од степени j-1 и $j+k+1$ (j, k се природни броеви), е да бидат задоволени релациите:

$$\begin{aligned} &L(j-1)^2+(J-L)(j-1)+q=0 \\ &(2j+k-3)L+J=0 \\ &[(j+k-r-2)x_3+(j+r-1)x_4]L-K=0, \quad r=0,1,2,\dots,j-1 \end{aligned} \tag{23}$$

Од втората равенка од (23) имаме: $B_3 = -(4n+3m+2j+k-6)A_4$.

Од првата равенка од (23) се добива:

$$\begin{aligned} C_2=[&(n+m+j+k-2)(n+m+j-2)+(n+m+j+k-r-2)(n+m-1)+ \\ &+(n+m+j+r-1)(n+m-1)+(n+m+j+k-r-2)n \\ &+(n+m+j+r-1)n+(n+m)n]A_4. \end{aligned}$$

Од (11) добиваме:

$$\begin{aligned} D_1=-[&(n+m+j+k-1)(n+m+j-1)(n+m-1)+(n+m+j+k-1)(n+m+j-1)n+ \\ &+(n+m+j+k-r-1)(n+m)n+(n+m+j+r)(n+m)n]A_4, \end{aligned}$$

а од (3) се добива

$$E_0=(n+m+j+k)(n+m+j)(n+m)n\, A_4.$$

Од третата равенка од условите (23) ќе најдеме дека:

$$\begin{aligned} B_2= [&(3n+3m+2j+k-6)x_1+(3n+2m+2j+k-5)x_2+ \\ &+(3n+2m+j+k-r-4)x_3+(3n+2m+j+r-3)x_4]\, A_4. \end{aligned}$$

Од (22) пак, имаме:

$$\begin{aligned} B_1=-[&(2n+2m+2j+k-5)x_1x_2+(2n+2m+j+k-r-4)x_1x_3+(2n+2m+j+ \\ &r-3)x_1x_4+(2n+m+j+k-r-3)x_2x_3+(2n+m+j+r-2)x_2x_4+(2n+m-1)x_3x_4]A_4. \end{aligned}$$

Од (19) се добива

$$\begin{aligned} B_0=[&(n+m+k+j-r-3)x_1x_2x_3+(n+m+j+r-2)x_1x_2x_4+ \\ &+(n+m-1)x_1x_3x_4+nx_2x_3x_4]A_4, \end{aligned}$$

А тргнувајќи од тоа што $x_2=-\delta/\gamma$, се добива:

$$C_1=-\{x_1[(n+m+j+k\text{-}2)(n+m+j\text{-}2)+(n+m+j+k\text{-}r\text{-}2)(n+m+1)+$$
$$+(n+m+j+r\text{-}1)(n+m\text{-}1)]+x_2[(n+m+j+k\text{-}2)(n+m+j\text{-}2)+$$
$$+(n+m+j+k\text{-}r\text{-}2)n+(n+m+j+r\text{-}1)n]+$$
$$+x_3[(n+m+j+k\text{-}r\text{-}2)(n+m\text{-}1)+(n+m+j+k\text{-}r\text{-}2)n+(n+m)n]+$$
$$+x_4[(n+m+j+r\text{-}1)(n+m\text{-}1)+(n+m+j+r\text{-}1)n+(n+m)n]\}A_4.$$

И на крај, од тоа што $x_1=-\beta/\alpha$ се добива изразот за D_0:

$$D_0=[(n+m+j+k\text{-}1)(n+m+j\text{-}1)(n+m\text{-}1)x_1+(n+m+j+k\text{-}1)(n+m+j\text{-}1)nx_2+$$
$$+(n+m+j+k\text{-}r\text{-}1)(n+m)nx_3+(n+m+j+r)(n+m)nx_4]A_4.$$

Равенката (1) сега се трансформира во следниов облик:

$$\begin{aligned}
&(x\text{-}x_1)(x\text{-}x_2)(x\text{-}x_3)(x\text{-}x_4)y^{IV} - [(n+m+j+k\text{-}r\text{-}3)(x\text{-}x_1)(x\text{-}x_2)(x\text{-}x_3)+\\
&+(n+m+j+r\text{-}2)(x\text{-}x_1)(x\text{-}x_2)(x\text{-}x_4)+(n+m\text{-}1)(x\text{-}x_1)(x\text{-}x_3)(x\text{-}x_4)+\\
&+n(x\text{-}x_2)(x\text{-}x_3)(x\text{-}x_4)]y''' + [(n+m+j+k\text{-}2)(n+m+j\text{-}2)(x\text{-}x_1)(x\text{-}x_2)+\\
&+(n+m+j+k\text{-}r\text{-}2)(n+m\text{-}1)(x\text{-}x_1)(x\text{-}x_3)+(n+m+j+r\text{-}1)(n+m\text{-}1)(x\text{-}x_1)(x\text{-}x_4)+\\
&+(n+m+j+k\text{-}r\text{-}2)n(x\text{-}x_2)(x\text{-}x_3)+(n+m+j+r\text{-}1)n(x\text{-}x_2)(x\text{-}x_4)+ \qquad (*)\\
&+(n+m)n(x\text{-}x_3)(x\text{-}x_4)]y''\text{-}[(n+m+j+k\text{-}1)(n+m+j\text{-}1)(n+m\text{-}1)(x\text{-}x_1)+\\
&+(n+m+j+k\text{-}1)(n+m+j\text{-}1)n(x\text{-}x_2)+(n+m+j+k\text{-}r\text{-}1)(n+m)n(x\text{-}x_3)+\\
&+(n+m+j+r)(n+m)n(x\text{-}x_4)]y' + (n+m+j+k)(n+m+j)(n+m)ny=0,
\end{aligned}$$

односно

$$(x\text{-}x_1)(x\text{-}x_2)\ \{(x\text{-}x_3)(x\text{-}x_4)y''\text{-}[(n+m+j+k\text{-}r\text{-}1)(x\text{-}x_3)+(n+m+j+r)(x\text{-}x_4)]y'+$$
$$(n+m+j+k)(n+m+j)y\}'' - [(n+m\text{-}1)(x\text{-}x_1)+ n(x\text{-}x_2)\ ]\ \{(x\text{-}x_3)(x\text{-}x_4)y''\text{-}$$
$$\text{-}[(n+m+j+k\text{-}r\text{-}1)(x\text{-}x_3)+(n+m+j+r)(x\text{-}x_4)]y'+ (n+m+j+k)(n+m+j)y\}'\text{-}$$
$$+n(n+m)\{(x\text{-}x_3)(x\text{-}x_4)y''\text{-}[(n+m+j+k\text{-}r13)(x\text{-}x_3)+(n+m+j+r)(x\text{-}x_4)]\ y'+$$
$$+\ (n+m+j+k)(n+m+j)y\}=0.$$

Ако означиме:

$$z = (x\text{-}x_3)(x\text{-}x_4)y'' - [(n+m+j+k\text{-}r\text{-}1)(x\text{-}x_3)+(n+m+j+r)(x\text{-}x_4)]\ y' +$$
$$+(n+m+j+k)(n+m+j)y,$$

тогаш последнава равенка добива облик:

$$(x\text{-}x_1)(x\text{-}x_2)z'' - [(n+m\text{-}1)(x\text{-}x_1)+ n(x\text{-}x_2)]\ z'+n(n+m)z=0.$$

Ако направиме уште една трансформација, имаме

$$(x\text{-}x_1)[(x\text{-}x_2)z'\text{-}(n+m)z]'\text{-}n[(x\text{-}x_2)z'\text{-}(n+m)z]=0,$$

и ставајќи $(x\text{-}x_2)z'\text{-}(n+m)z=v,$ се добива:

$$(x\text{-}x_1)v'\text{-}nv=0.$$

Значи равенката (1) се сведува на системот:

$$\{(x-x_3)(x-x_4)y''-[(n+m+j+k-r-1)(x-x_3)+(n+m+j+r)(x-x_4)]y'+$$
$$+(n+m+j+k)(n+m+j)y\}=z$$

$$(x-x_2)z'-(n+m)z=v$$

$$(x-x_1)v'-nv=0.$$

Се доби решлив систем од две линеарни диференцијални равенки од прв ред и една линеарна диференцијална равенка од втор ред.

On Some Weaker Condition for reducibility of a homogeneous linear differential equation of forth order with a polynomial general solution

Elena Hadzieva
Department of Electrical Engineering
hadzieva@etf.ukim.edu.mk

Abstract:
A linear differential equation of forth order with polynomial coefficients is observed in this article. The degree of each coefficient is the same as the order of the derivative which is multiplied by. Sufficient conditions for reducing the equation to a solvable system of three differential equation (two of them are of the first order, and the third one of the second order) are obtained.

Литература:

[1] Hadzieva E. J., Shapkarev I. A., Polynomial as a General Solution of a Linear Differential Equation of Fourth Order, Mathematica Balkanica, Vol. 18, 2004, Fasc. 3-4., Sofia, p.295 – 303

[2] Шапкарев И. А., За некои послаби услови за редуктибилност на една линеарна хомогена диференцијална равенка од трет ред чиј општ интеграл е полином, ракопис

[3] Пиперевски Б. М., Егзистенција и конструкција на полиномно решение на една класа линеарни диференцијални равенки од трет ред, Зборник на трудови на ЕТФ, 1996, Скопје

[4] Пиперевски Б. М., Полиномни решенија на една класа линеарни диференцијални равенки, Докторска дисертација, 1982, Скопје

[5] Шапкарев И. А., Полином како општо решение на една хомогена диференцијална равенка од трет ред, Зборник на трудови, Втор конгрес на математичарите и информатичарите на Македонија, 2000, Скопје

[6] Shapkarev I. A., Piperevski B. M., Hadzieva E. J., On Some Special General Integrals of a Linear Differential Equations of Second Order, Mathematica Balkanica, Vol. 18, 2004, Fasc. 3-4., Sofia, p. 453-459

8 МСДР 2004, (99 - 108)
Зборник на трудови
30.09.- 03.10.2004 год.
Охрид, Македонија

ISBN 9989 – 630 – 49 – 6
COBISS.MK – ID 61901322

ON INTEGRABILITY OF A CLASS OF LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THIRD ORDER

Nevena Serafimova, Katerina Mitkovska – Trendova
Military Academy "General Mihailo Apostolski"–Skopje
e–mail: nevenase@yahoo.com ; trendov@yahoo.com

Abstract: In this article we observe a class of linear differential equation of third order, which is obtained from a class of second order differential equation. Using some previous results, conditions for the existence of two of its particular solutions are obtained.

In this article we observe a differential equation of type

$$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\, y''' + (B_2 x^2 + B_1 x + B_0)\, y'' + (C_1 x + C_0)\, y' + D\, y = 0 \tag{1}$$

Using differentiation and other relevant results, we obtain the conditions for existence and integrability of (1), together with the formulae of its two particular solutions.

We start with differentiation of the differential equation of second order with polynomial coefficients

$$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\, y'' + (b_2 x^2 + b_1 x + b_0)\, y' + (c_1 x + c_0)\, y = 0 \tag{2}$$

thus obtaining the differential equation of third order

$$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\, y''' + [(3+b_2)\, x^2 + (-2x_1-2x_2-2x_3+b_1)\, x + x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3+b_0]\, y'' + [(2b_2 + c_1)\, x + b_1 + c_0]\, y' + c_1\, y = 0 \tag{3}$$

which is of type (1). Using this fact, we get the interdepedence equations between the coefficients of (1) i (3):

$$\begin{aligned}
&D = c_1\\
&C_0 = b_1 + c_0\\
&C_1 = 2b_2 + c_1\\
&B_0 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + b_0\\
&B_1 = -2(x_1 + x_2 + x_3) + b_1\\
&B_2 = 3 + b_2
\end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{gathered}
b_2 = B_2 - 3\\
b_1 = B_1 + 2(x_1 + x_2 + x_3)\\
b_0 = B_0 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3\\
c_0 = C_0 - B_1 - 2(x_1 + x_2 + x_3)\\
c_1 = D\\
c_1 = C_1 - 2B_2 + 6
\end{gathered} \tag{*}$$

In the article [1] we obtain the conditions for existence of one particular polynomial solution of (1), of order n. Using this conditions together with (*) over (1), we get the conditions for existence of one particular polynomial solution of the differential equation (1):

$$\begin{gathered}
n^2 + (B_2 - 4)\, n + D = 0\\
B_2\, x_1^2 + B_1\, x_1 + B_0 = 0\\
[C_0 - B_1 - 2\,(x_1 + x_2 + x_3)]\, C_0 + D\,(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 - B_0) +\\
(D + B_2 - 3) + \{Dx_1 + 2[C_0 - B_1 - 2(x_1 + x_2 + x_3)]\}\, x_1 = 0\\
2B_2 - C_1 + D = 6
\end{gathered} \tag{**}$$

where the last equation is an additional condition, a result of the last two equations of (*).

In this, the polynomial degree $n \in N$ of the particular solution, is a root of the characteristic equation given with the first relation of (**), the lower one if both roots are natural numbers.

The formula of the polynomial solution is given with

$$y_1 = e^{-F}\left[(x+K)(x-x_2)^{n-1}(x-x_3)^{n-1}e^{F}\right]^{(n-1)} \tag{4}$$

where

$$F = \int \frac{Mx + N}{(x - x_1)(x - x_2)} dx,$$

$$M = B_2 - 4\,, \quad N = B_1 + 2(x_2 + x_3) + x_1 B_2\,, \quad K = -\frac{x_1 D + n(C_1 x_1 + D)}{D}\,.$$

In $[2]$, the formula of the general solution of (2) is given, from which we can find the second particular solution of (1), according to the formula (5) **:**

$$y_2 = e^{-F}\Big[(x+K)(x-x_2)^{n-1}(x-x_3)^{n-1}e^{F}\,\cdot$$
$$\cdot \int (x-x_1)^{n-1}(x-x_2)^{1-n}(x-x_3)^{1-n}(x+K)^{-2}dx\ \Big]^{(n-1)} \qquad (5)$$

where K is as stated above. We obtain the third particular solution using the classical method.

*Theorem*1: If the differential equation (1) satisfies the conditions (**), then it has two independent particular solutions given with the formulae (4) and (5), of which the first is a polynomial of order *n*, the lower one if the characteristic equation of (2) has two natural roots.

According to $[2]$, the differential equation (1) can be transformed to at most 7 other differential equations of the same type, using the substitution

$$y = (x - x_1)^{\alpha}\,(x - x_2)^{\beta}\,(x - x_3)^{\gamma}\,z, \quad \text{where}$$

$$\alpha = 1 - \frac{b_2 x_1^{\,2} + b_1 x_1 + b_0}{(x_3 - x_1)(x_2 - x_1)}\,, \beta = 1 - \frac{b_2 x_2^{\,2} + b_1 x_2 + b_0}{(x_1 - x_2)(x_3 - x_2)}\,, \gamma = 1 - \frac{b_2 x_3^{\,2} + b_1 x_3 + b_0}{(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)} \qquad (6)$$

With the connecting relations between the equations of second and third order, together with the substitutions :

$$y = (x-x_1)^{\alpha}(x-x_2)^{\beta}(x-x_3)^{\gamma} z_7,\ y = (x-x_1)^{\alpha} z_1,\ y = (x-x_2)^{\beta} z_2\,,$$

$$y = (x-x_3)^{\gamma} z_3 \qquad\qquad y = (x-x_1)^{\alpha}(x-x_2)^{\beta} z_4$$

$$y = (x-x_1)^{\alpha}(x-x_3)^{\gamma} z_5 \qquad\qquad y = (x-x_2)^{\beta}(x-x_3)^{\gamma} z_6 \qquad (7)$$

we obtain at most seven other differential equations of third order with one polynomial solution.

The same equations, with the use of the coefficients of (1), have the following form:

$$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\,\mathbf{z_1'''}+[(2\alpha+B_2)\,x^2-(2\alpha x_3+2\alpha x_2-B_1)\,x+2\alpha x_2x_3+B_0]\,\mathbf{z_1''}+ \\ +\{[\alpha(\alpha-1)+4\alpha+\alpha(B_2-3)+C_1]\,x+\alpha(\alpha-1)(x_1-x_2-x_3)+ \\ +\alpha[(B_2-3)x_1+B_1+2x_1+2x_2+2x_3]-2\alpha(x_2+x_3)+C_0\}\,\mathbf{z_1'}+ \\ +[\alpha(\alpha-1)+\alpha(B_2-3)+D]\,\mathbf{z_1}=0 \qquad \mathbf{(1a)}$$

$$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\,\mathbf{z_2'''}+[(2\beta+B_2)x^2-(2\beta x_1+2\beta x_3-B_1)\,x+2\beta x_3x_1+B_0]\,\mathbf{z_2''}+ \\ +\{[\beta(\beta-1)+4\beta+\beta(B_2-3)+C_1]\,x+\beta(\beta-1)(x_2-x_3-x_1)+\beta[(B_2-3)x_2+ \\ +B_1+2x_1+2x_2+2x_3]-2\beta(x_1+x_3)+C_0\}\,\mathbf{z_2'}+ \\ +[\beta(\beta-1)+\beta(B_2-3)+D]\,\mathbf{z_2}=0 \qquad \mathbf{(1b)}$$

$$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\mathbf{z_3'''}+[(2\gamma+B_2)x^2-(2\gamma x_2+2\gamma x_1-B_1)x+2\gamma x_1x_2+B_0]\mathbf{z_3''}+ \\ +\{[\gamma(\gamma-1)+4\gamma+\gamma(B_2-3)+C_1]x+\gamma(\gamma-1)(x_3-x_1-x_2)+ \\ +\gamma[(B_2-3)x_3+B_1+2x_1+2x_2+2x_3]-2\gamma(x_1+x_2)+C_0\}\,\mathbf{z_3'}+ \\ +[\gamma(\gamma-1)+\gamma(B_2-3)+D]\mathbf{z_3}=0 \qquad \mathbf{(1c)}$$

$$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\,\mathbf{z_4'''}+[(2\alpha+2\beta+B_2)\,x^2- \\ -(2\alpha x_3+2\alpha x_2+2\beta x_1+2\beta x_3-B_1)\,x+2\alpha x_2x_3+2\beta x_3x_1+B_0]\,\mathbf{z_4''}+ \\ +\{[B_2(\alpha+\beta)+(\alpha+\beta)^2+C_1]\,x+\alpha^2(x_1-x_2-x_3)+\beta^2(x_2-x_3-x_1)-2\alpha\beta x_3+ \\ +(\alpha+\beta)(x_1+x_2+x_3+B_1)+(B_2-3)(\alpha x_1+\beta x_2)+C_0\}\,\mathbf{z_4'}+ \\ +[(\alpha+\beta)^2+(\alpha+\beta)(B_2-4)+D]\,\mathbf{z_4}=0 \qquad \mathbf{(1d)}$$

$$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\,\mathbf{z_5'''}+[(2\alpha+2\gamma+B_2)\,x^2- \\ -(2\alpha x_3+2\alpha x_2+2\gamma x_1+2\gamma x_2-B_1)\,x+2\alpha x_2x_3+2\gamma x_1x_2+B_0]\,\mathbf{z_5''}+ \\ +\{[B_2(\alpha+\gamma)+(\alpha+\gamma)^2+C_1]\,x+\alpha^2(x_1-x_2-x_3)+\gamma^2(x_3-x_2-x_1)-2\alpha\gamma x_2+ \\ +(\alpha+\gamma)(x_1+x_2+x_3+B_1)+(B_2-3)(\alpha x_1+\gamma x_3)+C_0\}\,\mathbf{z_5'}+ \\ +[(\alpha+\gamma)^2+(\alpha+\gamma)(B_2-4)+D]\,\mathbf{z_5}=0 \qquad \mathbf{(1e)}$$

$$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\,\mathbf{z_6'''}+[(2\beta+2\gamma+B_2)\,x^2- \\ -(2\beta x_1+2\beta x_3+2\gamma x_1+2\gamma x_2-B_1)\,x+2\beta x_1x_3+2\gamma x_1x_2+B_0]\,\mathbf{z_6''}+ \\ +\{[B_2(\beta+\gamma)+(\beta+\gamma)^2+C_1]\,x+\beta^2(x_2-x_1-x_3)+\gamma^2(x_3-x_2-x_1)-2\beta\gamma x_1+ \\ +(\beta+\gamma)(x_1+x_2+x_3+B_1)+(B_2-3)(\beta x_2+\gamma x_3)+C_0\}\,\mathbf{z_6'}+ \\ +[(\beta+\gamma)^2+(\beta+\gamma)(B_2-4)+D]\,\mathbf{z_6}=0 \qquad \mathbf{(1f)}$$

$$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\,\mathbf{z_7'''} + [(2\alpha+2\beta+2\gamma+B_2)\,x^2 -$$
$$-(2\alpha x_3+2\alpha x_2+2\beta x_1+2\beta x_3+2\gamma x_1+2\gamma x_2-B_1)x+2\alpha x_2x_3+2\beta x_3x_1+2\gamma x_2x_1+$$
$$+B_0]\,\mathbf{z_7''} + \{[\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\alpha\gamma+2\beta\gamma+(\alpha+\beta+\gamma)B_2+C_1]\,x -$$
$$-2\alpha x_3-2\alpha x_2-2\beta x_1-2\beta x_3-2\gamma x_1-2\gamma x_2-2\alpha\beta x_3-2\beta\gamma x_1-2\alpha\gamma x_2+$$
$$+\alpha(\alpha-1)(x_1-x_2-x_3)+\beta(\beta-1)(x_2-x_3-x_1)+\gamma(\gamma-1)(x_3-x_2-x_1)+$$
$$+\alpha[(B_2-3)x_1+b_1]+\beta[(B_2-3)x_2+b_1]+\gamma[(B_2-3)x_3+b_1]+C_0\}\,\mathbf{z_7'}+$$
$$+[2\alpha\beta+2\alpha\gamma+2\beta\gamma+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+(\alpha+\beta+\gamma)(B_2-4)+D]\,\mathbf{z_7}=0 \qquad \textbf{(1g)}$$

The conditions for the existence of one particular polynomial solution for each of the equations, using the coefficients of (1), have a common fourth equation, same as the one in (**), are adequatly given with:

- $n^2+(2\alpha+B_2-4)\,n+\alpha(\alpha-1)+\alpha(B_2-3)+$
  $\alpha(\alpha-1)+\alpha(B_2-3)+D=0$ **(1a-u)**
- $B_2\,x_1^{\,2}+B_1\,x_1+2\alpha(x_1^{\,2}-x_1x_2+x_2x_3-x_1x_3)+B_0=0$
- $[\alpha(\alpha-1)(x_1-x_2-x_3)+\alpha(B_2-3)x_1+(\alpha-1)(B_1+2x_1+2x_2+2x_3)+C_0]$
  $+[\alpha(1-\alpha)(x_1+x_2+x_3)+\alpha(B_1+B_2-3)x_1+C_0]-[\alpha(\alpha-1)+$
  $+\alpha(B_2-3)+D]\,(2\alpha x_2x_3+B_0-x_1x_2-x_1x_3-x_2x_3)+$
  $+[\alpha^2+(\alpha+1)(B_2-3)+D+\alpha]\{[\alpha(\alpha-4)+\alpha B_2+D]x_1+$
  $+2[\alpha(\alpha-1)(x_1-x_2-x_3)+\alpha(B_2-3)x_1+$
  $+(\alpha-1)\,(B_1+2x_1+2x_2+2x_3)+C_0]\}x_1=0$
- $2B_2-C_1+D=6$

- $n^2+(2\beta+B_2-4)\,n+\beta(\beta-1)+\beta(B_2-3)+\beta(\beta-1)+\beta(B_2-3)+D=0$
- $B_2x_1^{\,2}-B_1\,x_1+B_0=0$ **(1b-u)**
- $[\beta(\beta-1)(x_2-x_3-x_1)+\beta(B_2-3)x_2+(\beta-1)(B_1+2x_1+2x_2+2x_3)+C_0]\cdot$
  $\cdot[\beta(\beta-1)(x_2+x_3+x_1)+\beta(B_1+B_2-3)x_2+C_0]-[\beta(\beta-1)+$
  $\beta(B_2-3)+D](2\beta x_3x_1+B_0-x_1x_2-x_1x_3-x_2x_3)+[\beta^2+$
  $(\beta+1)(B_2-3)+D+\beta]\{[\beta(\beta-4)+\beta B_2+D]x_1+$
  $2[\beta(\beta-1)(x_2-x_3-x_1)+\beta(B_2-3)x_2+$
  $+(\beta-1)(B_1+2x_1+2x_2+2x_3)+C_0]\}\,x_1=0$
- $2B_2-C_1+D=6$

- $n^2 + (2\gamma + B_2 - 4)\,n + \gamma(\gamma-1) + \gamma(B_2-3) + D = 0$
- $B_2 x_1^{\;2} - B_1 x_1 + B_0 = 0$ **(1c-u)**
- $[\gamma(\gamma-1)(x_3-x_2-x_1) + \gamma(B_2-3)x_3+(\gamma-1)(B_1+2x_1+2x_2+2x_3) + C_0] \cdot$
  $\cdot [\gamma(1-\gamma)(x_3+x_2+x_1) + \gamma\,(B_1+B_2-3)x_3+C_0] - [\gamma(\gamma-1) +$
  $\gamma(B_2-3)+ D](2\gamma x_1x_2+ B_0 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3) +$
  $[\gamma^2 + (\gamma+1)\,(B_2-3) + D + \gamma]\{[\gamma(\gamma-4) + \gamma B_2 + D]x_1 +$
  $2[\gamma(\gamma-1)(x_3-x_2-x_1) + \gamma(B_2-3)x_3+$
  $+ (\gamma-1)(B_1 + 2x_1+2x_2+2x_3) + C_0\,]\}\;x_1 = 0$
- $2B_2 - C_1 + D = 6$

- $n^2 + (2\alpha+2\beta +B_2-4)\,n +(\alpha+\beta)^2 + (\alpha+\beta)(B_2-4)+D = 0$
- $B_2\,x_1^{\;2} + B_1\,x_1 + 2\alpha(x_1^{\;2} -x_1x_2+x_2x_3-x_1x_3) + B_0= 0$ **(1d-u)**
- $[(\alpha^2 - \beta^2)(x_1-x_2) - (\alpha+\beta)^2x_3 + (\alpha+\beta)(x_1+x_2+3x_3+B_1) +$
  $+ (B_2-3)(\alpha x_1+\beta x_2) + 2\alpha x_2+ 2\beta x_1 - B_1-2x_1-2x_2-2x_3 + C_0]\cdot$
  $\cdot [(\alpha^2 - \beta^2)(x_1-x_2) - (\alpha+\beta)^2x_3 + (\alpha+\beta)(x_1+x_2+x_3+B_1) +$
  $+ (B_2-3)(\alpha x_1+\beta x_2)] - [(\alpha+\beta)^2 +(\alpha+\beta)(B_2-4)+D]+$
  $+ (2\alpha x_2x_3 + 2\beta x_3x_1 + B_0-x_1x_2-x_1x_3-x_2x_3) + [(\alpha+\beta)^2 +$
  $+ (\alpha+\beta+1)B_2+ D-2\alpha-2\beta-3]\;\{[(\alpha+\beta)^2 +(\alpha+\beta)(B_2-4)+D]x_1+$
  $+ 2[(\alpha^2-\beta^2)(x_1-x_2) - (\alpha+\beta)^2x_3 + (\alpha+\beta)(x_1+x_2+3x_3+B_1) +$
  $+ (B_2-3)(\alpha x_1+\beta x_2) +2\alpha x_2 +2\beta x_1 - B_1-2x_1-2x_2-2x_3 +C_0]\}x_1 =0$
- $2B_2 - C_1 + D = 6$

- $n^2 + (2\alpha+2\gamma+B_2 -4)\,n +(\alpha+\gamma)^2 +(\alpha+\gamma)(B_2-4)+D = 0$
- $B_2\,x_1^{\;2} + B_1\,x_1 + 2\alpha(x_1^{\;2} -x_1x_2+x_2x_3-x_1x_3) + B_0= 0$ **(1e-u)**
- $[(\alpha^2 - \gamma^2)(x_1-x_3) - (\alpha+\gamma)^2x_2 + (\alpha+\gamma)(x_1+3x_2+x_3+ B_1) +$
  $+ (B_2-3)(\alpha x_1+\gamma x_3)+ 2\alpha x_3 +2\gamma x_1 - B_1-2x_1-2x_2-2x_3 +C_0]\cdot$
  $\cdot [(\alpha^2 - \gamma^2)(x_1-x_3) - (\alpha+\gamma)^2x_2 + (\alpha+\gamma)(x_1+x_2+x_3-B_1)+$
  $+ (B_2-3)(\alpha x_1+\gamma x_3)] - [(\alpha+\gamma)^2 + (\alpha+\gamma)(B_2-4) +D] +$
  $+ (2\alpha x_2x_3 + 2\gamma x_1x_2 + B_0 -x_1x_2 -x_1x_3-x_2x_3) + [(\alpha+\gamma)^2 +$
  $+ (\alpha+\gamma+1)B_2+ D- 2\alpha-2\gamma -3]\{[(\alpha+\gamma)^2 +(\alpha+\gamma)(B_2-4)+D]x_1 +$
  $+ 2[(\alpha^2 - \gamma^2)(x_1-x_3)-(\alpha+\gamma)^2x_2+ (\alpha+\gamma)(x_1+3x_2+x_3+ B_1) +$
  $+ (B_2-3)(\alpha x_1+\gamma x_3)+2\alpha x_3 +2\gamma x_1 -B_1 -2x_1-2x_2-2x_3 + C_0]\}x_1 = 0$
- $2B_2 - C_1 + D = 6$

- $n^2 + (B_2 - 4)\, n + (\beta+\gamma)^2 + (\beta+\gamma)(B_2-4) + D = 0$
- $B_2 x_1^{\ 2} - B_1 x_1 + B_0 = 0$ **(1f-u)**
- $[(\beta^2-\gamma^2)(x_2-x_3) - (\beta+\gamma)^2 x_1 + (\beta+\gamma)(x_2+x_3+3x_1+B_1) +$
  $+ (B_2-3)(\beta x_2+\gamma x_3) + 2\beta x_3 + 2\gamma x_2 - B_1 - 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 + C_0]\cdot$
  $\cdot [(\beta^2-\gamma^2)(x_2-x_3) - (\beta+\gamma)^2 x_1 + (\beta+\gamma)(x_1+x_2+x_3-B_1) +$
  $+ (B_2-3)(\beta x_2+\gamma x_3)] - [(\beta+\gamma)^2 + (\beta+\gamma)(B_2-4)+D]\cdot$
  $\cdot (2\beta x_1x_3 + 2\gamma x_1x_2 + B_0 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3) + [(\beta+\gamma)^2 +$
  $+ (\beta+\gamma+1)B_2 + D - 2\beta - 2\gamma - 3]\ \{[(\beta+\gamma)^2 + (\beta+\gamma)(B_2-4) + D]\, x_1 +$
  $+ 2[(\beta^2-\gamma^2)(x_2-x_3) - (\beta+\gamma)^2 x_1 + (\beta+\gamma)(x_2+x_3+3x_1+B_1) +$
  $+ (B_2-3)(\beta x_2+\gamma x_3) + 2\beta x_3 + 2\gamma x_2 - B_1 - 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 + C_0]\}x_1 = 0$
- $2B_2 - C_1 + D = 6$

- $n^2 + (2\beta+2\gamma+B_2-4)n + 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma + \alpha(\alpha-1) +$
  $+ \beta(\beta-1) + \gamma(\gamma-1) + (\alpha+\beta+\gamma)b_2 + D = 0$
- $B_2 x_1^{\ 2} + B_1 x_1 + 2\alpha(x_1^{\ 2} - x_1x_2 + x_2x_3 - x_1x_3) + B_0 = 0$ **(1g-u)**
- $[\alpha(\alpha-1)(x_1-3x_2-3x_3) + \beta(\beta-1)(x_2-3x_3-3x_1) + \gamma(\gamma-1)(x_3-3x_2-3x_1) +$
  $+ \alpha\,(B_2x_1 + B_1 - x_1 + 2x_2 + 2x_3) + \beta(B_2x_2 + B_1 + 2x_1 - x_2 + 2x_3) +$
  $+ \gamma\,(B_2x_3 + B_1 + 2x_1 + 2x_2 - x_3) + C_0]\ [\alpha(\alpha-1)(x_1-x_2-x_3) +$
  $+ \beta(\beta-1)(x_2-x_3-x_1) + \gamma(\gamma-1)(x_3-x_2-x_1) + (B_2-3)(\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3) +$
  $(B_1+2x_1+2x_2+2x_3)(\alpha+\beta+\gamma-1) + C_0] - [2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma + \alpha(\alpha-1) +$
  $\beta(\beta-1) + \gamma(\gamma-1) + (\alpha+\beta+\gamma)(B_2-3) + D]\ (2\alpha x_2x_3 +$
  $2\beta x_3x_1 + 2\gamma x_2x_1 + B_0 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3) + [2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma +$
  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + (B_2-3)(\alpha+\beta+\gamma+1) + D + \alpha + \beta + \gamma]\{[2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma +$
  $\alpha(\alpha-4) + \beta(\beta-4) + \gamma(\gamma-4) + (\alpha+\beta+\gamma)B_2 + D]x_1 +$
  $2[\alpha(\alpha-1)(x_1-3x_2-3x_3) + \beta(\beta-1)(x_2-3x_3-3x_1) +$
  $\gamma(\gamma-1)(x_3-3x_2-3x_1) + \alpha(B_2x_1 + B_1 - x_1 +$
  $+ 2x_2 + 2x_3) + \beta(B_2x_2 + B_1 + 2x_1 - x_2 + 2x_3) +$
  $+ \gamma(B_2x_3 + B_1 + 2x_1 + 2x_2 - x_3) + C_0\}\ x_1 = 0$
- $2B_2 - C_1 + D = 6$

According to *Theorem* 1, the two particular solutions of each of the equations (1a) - (1g), are given with the formula :

$$z_{1(i)} = e^{-F_i}\left[(x+K_i)(x-x_2)^{n-1}(x-x_3)^{n-1}e^{F_i}\right]^{(n-1)} \qquad (8)$$

$$z_{2(i)} = e^{-F_i}\left[(x+K_i)(x-x_2)^{n-1}(x-x_3)^{n-1}e^{F_i}\cdot\int(x-x_1)^{n-1}(x-x_2)^{1-n}(x-x_3)^{1-n}(x+K_i)^{-2}dx\right]^{(n-1)}$$

where

$$F_i = \int \frac{M_i x + N_i}{(x - x_1)(x - x_2)} dx, \qquad \text{for } i = a, b, c, d, e, f, g \tag{9}$$

$$M_i = B_{2i} - 4, \quad N_i = B_{1i} + 2(x_2 + x_3) + x_1 B_{2i}, \quad K_i = -\frac{x_1 D_i + n(C_{1i} x_1 + D_i)}{D_i}$$

$$B_{1a} = -(2\alpha x_3 + 2\alpha x_2 - B_1), \quad B_{2a} = 2\alpha + B_2$$
$$C_{1a} = \alpha(\alpha-1) + 4\alpha + \alpha(B_2-3) + C_1, \quad D_a = \alpha(\alpha-1) + \alpha(B_2-3) + D$$

$$B_{1b} = -(2\beta x_1 + 2\beta x_3 - B_1), \; B_{2b} = 2\beta + B_2$$
$$C_{1b} = \beta(\beta-1) + 4\beta + \beta(B_2-3) + C_1, \; D_b = \beta(\beta-1) + \beta(B_2-3) + D$$

$$B_{1c} = -(2\gamma x_2 + 2\gamma x_1 - B_1), \quad B_{2c} = 2\gamma + B_2$$
$$C_{1c} = \gamma(\gamma-1) + 4\gamma + \gamma(B_2-3) + C_1, \quad D_c = \gamma(\gamma-1) + \gamma(B_2-3) + D$$

$$B_{1d} = -(2\alpha x_3 + 2\alpha x_2 + 2\beta x_1 + 2\beta x_3 - B_1), \quad B_{2d} = 2\alpha + 2\beta + B_2$$
$$C_{1d} = B_2(\alpha+\beta) + (\alpha+\beta)^2 + C_1, \quad D_d = (\alpha+\beta)^2 + (\alpha+\beta)(B_2-4) + D$$

$$B_{1e} = -(2\alpha x_3 + 2\alpha x_2 + 2\gamma x_1 + 2\gamma x_2 - B_1), \; B_{2e} = 2\alpha + 2\gamma + B_2$$
$$C_{1e} = B_2(\alpha+\gamma) + (\alpha+\gamma)^2 + C_1, \; D_e = (\alpha+\gamma)^2 + (\alpha+\gamma)(B_2-4) + D$$

$$B_{1f} = -(2\beta x_1 + 2\beta x_3 + 2\gamma x_1 + 2\gamma x_2 - B_1), \quad B_{2f} = 2\beta + 2\gamma + B_2$$
$$C_{1f} = B_2(\beta+\gamma) + (\beta+\gamma)^2 + C_1, \quad D_f = (\beta+\gamma)^2 + (\beta+\gamma)(B_2-4) + D$$

$$B_{1g} = -(2\alpha x_3 + 2\alpha x_2 + 2\beta x_1 + 2\beta x_3 + 2\gamma x_1 + 2\gamma x_2 - B_1)$$
$$B_{2g} = 2\alpha + 2\beta + 2\gamma + B_2$$
$$C_{1g} = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma + (\alpha+\beta+\gamma)B_2 + C_1$$
$$D_g = 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma + \alpha(\alpha-1) + \beta(\beta-1) + \gamma(\gamma-1) + (\alpha+\beta+\gamma)b_2 + D$$

$$\alpha = \frac{(2 - B_2)x_1^{\,2} - (B_1 + 2x_2 + 2x_3)x_1 - B_0 + 2x_2 x_3}{(x_3 - x_1)(x_2 - x_1)}$$
$$\beta = \frac{(2 - B_2)x_2^{\,2} - (B_1 + 2x_1 + 2x_3)x_2 - B_0 + 2x_1 x_3}{(x_1 - x_2)(x_3 - x_2)}$$
$$\gamma = \frac{(2 - B_2)x_3^{\,2} - (B_1 + 2x_1 + 2x_2)x_3 - B_0 + 2x_1 x_2}{(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)}$$

Theorem 2*:* If there is a natural number *n* such that one of the groups of conditions (1a-u) – (1g-u) for the differential equation (1) is satisfied , then this equation is solvable. From the formula (8) and the connecting relations (7), we get two particular solutions of its fundamental system, while the third one can be obtained using the classical method.

Example 1*:* We consider the differential equation

$$(x-1)(x+1)(x-3)\, y'' - (3x^2-6x-1)\, y' + 4(x-2)\, y = 0$$

then $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 3$, $b_0 = 1$, $b_2 = -3$, $b_1 = 6$, $c_1 = 4$, $c_0 = -8$.

The conditions for the existence of one polynomial solution of order 2 for this equation are satisfied, so two particular solutions of its general solution can be found:

$$y_1 = (x+1)^2 , \quad y_2 = \frac{(x+1)^2}{16} \ln\frac{x-3}{x+1} + \frac{x+3}{4} + \frac{x-3}{x+1}$$

They are also particular solutions to the following third order differential equation:

$$(x-1)(x+1)(x-3)\, y''' - 2(x+1)y' + 4y = 0$$

From here, we can find the solutions of each of the transformed equations:

$$(x-1)(x+1)(x-3)\, z_1''' + (4x^2 - 8x - 12)\, z_1'' + (2x - 6)\, z_1' = 0$$

$$z_{11} = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 , \quad z_{12} = \left(\frac{x+1}{4x-4}\right)^2 \ln\frac{x-3}{x+1} + \frac{x^2+8x-9}{4(x+1)(x-1)^2}$$

$$(x-1)(x+1)(x-3)\, z_2''' + (4x^2 - 16x + 12)\, z_2'' + (2x - 10)\, z_2' = 0$$

$$z_{21} = 1 , \quad z_{22} = \frac{1}{16} \ln\frac{x-3}{x+1} + \frac{x^2+8x-9}{4(x+1)^3}$$

$$(x-1)(x+1)(x-3)\, z_3''' + (4x^2 - 2)\, z_3'' + (2x - 2)\, z_3' = 0$$

$$z_{31} = \left(\frac{x+1}{x-3}\right)^2 , \quad z_{32} = \left(\frac{x+1}{4x-12}\right)^2 \ln\frac{x-3}{x+1} + \frac{x^2+8x-9}{4(x+1)(x-3)^2}$$

$$(x-1)(x+1)(x-3)\, z_4''' + (8x^2-24)\, z_4'' + (14x-14)\, z_4' + 4\, z_4 = 0$$

$$z_{41} = \frac{1}{(x-1)^2}, \quad z_{42} = \frac{1}{16(x-1)^2}\ln\frac{x-3}{x+1} + \frac{x^2+8x-9}{4(x+1)^3(x-1)^2}$$

$$(x-1)(x+1)(x-3)\, z_5''' + (8x^2-8x-16)\, z_5'' + (14x+2)\, z_5' + 4\, z_5 = 0$$

$$z_{51} = \left(\frac{x+1}{x^2-4x+3}\right)^2, \quad z_{52} = \left(\frac{x+1}{4(x^2-4x+3)}\right)^2 \ln\frac{x-3}{x+1} + \frac{x^2+8x-9}{4(x+1)(x^2-4x+3)^2}$$

$$(x-1)(x+1)(x-3)\, z_6''' + (8x^2-16x+8)\, z_6'' + (14x-18)\, z_6' + 4\, z_6 = 0$$

$$z_{61} = \frac{1}{(x-3)^2}, \quad y_{62} = \frac{1}{16(x-3)^2}\ln\frac{x-3}{x+1} + \frac{x^2+8x-9}{4(x+1)^3(x-3)^2}$$

$$(x-1)(x+1)(x-3)\, z_7''' + (12x^2-24x-4)\, z_7'' + (34x-38)\, z_7' + 16\, z_7 = 0$$

$$z_{71} = \left(\frac{1}{x^2-4x+3}\right)^2, \quad z_{72} = \left(\frac{1}{4(x^2-4x+3)}\right)^2 \ln\frac{x-3}{x+1} + \frac{x^2+8x-9}{4(x+1)^3(x^2-4x+3)^2}$$

Literatura

1. Boro Piperevski: Sur une formule de solution polynomme d'une classe d'equations differentielees lineares du duxieme ordre, Bulletin methematique de la SDM de SRM, tome 7-8, p.10-15, 1983/84, Skopje
2. Boro Piperevski, Elena Hadzieva, Nevena Serafimova, Katerina Mitkovska Trendova: On a class of differential equations of second order with poynomial coefficients , Mathematica Balkanica, New Series Vol. 18, Fasc. 3-4, p. 411-418, 2004,

8 МСДР 2004, (109 - 120)
Зборник на трудови
30.09.- 03.10.2004 год.
Охрид, Македонија

ISBN 9989 – 630 – 49 – 6
COBISS.MK – ID 61901322

ГЕНЕРАЛИЗИРАН *n*-СКАЛАРЕН ПРОИЗВОД

Ристо Малчески, Факултет за општествени науки, Скопје

Апстракт. Во оваа работа, користејќи ги Gateaux изводи на $n-$нормата е дадена една генерализација на поимот за $n-$скаларен производ и се докажани повеќе својства во врска со оваа генерализација.

Поимите $n-$норма и $n-$скаларен производ се воведени од A. Misiak ([3]), како што следува.

Нека L е реален векторски простор со димензија поголема или еднаква на n, $n>1$ и $\|*,....,*\|$ е реална функција на L^n за која важат условите

i) $\|x_1,x_2,...,x_n\|\geq 0$, за секои $x_1,x_2,...,x_n\in L$ и $\|x_1,x_2,...,x_n\|=0$ ако и само ако множеството $\{x_1,x_2,...,x_n\}$ е линеарно зависно;

ii) $\|x_1,...,x_n\|=\|\pi(x_1),...,\pi(x_n)\|$, за секои $x_1,x_2,...,x_n\in L$ и за секоја биекција $\pi:\{x_1,x_2,...,x_n\}\to\{x_1,x_2,...,x_n\}$.

iii) $\|\alpha x_1,x_2,...,x_n\|=|\alpha|\cdot\|x_1,x_2,...,x_n\|$, за секои $x_1,x_2,...,x_n\in L$ и за секој $\alpha\in\mathbf{R}$.

iv) $\|x_1+x_1^{'},x_2,...,x_n\|\leq\|x_1,x_2,...,x_n\|+\|x_1^{'},x_2,...,x_n\|$, за секои $x_1,...,x_n,x_1^{'}\in L$.

Функцијата $\|*,....,*\|$ се нарекува $n-$норма на L, а $(L,\|*,....,*\|)$ се нарекува реален $n-$нормиран простор.

Нека n е природен број, L е реален векторски простор таков што $\dim L\geq n$ и $(*,*|*,....,*)$ е реална функција на L^{n+1} таква што

i) $(a,a\,|\,x_1,...,x_{n-1})\geq 0$, за секои $a,x_1,...,x_{n-1}\in L$ и $(a,a\,|\,x_1,...,x_{n-1})=0$ ако и само ако $a,x_1,...,x_{n-1}$ се линеарно зависни;

ii) $\left(a,b\,|\,x_1,...,x_{n-1}\right)=\left(\varphi(a),\varphi(b)\,|\,\pi(x_1),...,\pi(x_{n-1})\right)$, за секои $a,b,x_1,...,x_{n-1}\in L$ и за секои биекции

$$\pi:\left\{x_1,...,x_{n-1}\right\}\to\left\{x_1,...,x_{n-1}\right\},\quad \varphi:\{a,b\}\to\{a,b\};$$

iii) за секои $a,x_1,x_2,...,x_{n-1}\in L$ важи

$$\left(a,a\,|\,x_1,x_2...,x_{n-1}\right)=\left(x_1,x_1\,|\,a,x_2...,x_{n-1}\right);$$

iv) за секои $a,b,x_1,...,x_{n-1}\in L$ и за секој $\alpha\in\mathbf{R}$ важи

$$\left(\alpha a,b\,|\,x_1,...,x_{n-1}\right)=\alpha\left(a,b\,|\,x_1,...,x_{n-1}\right);\text{ и}$$

v) за секои $a,b,a_1,x_1,...,x_{n-1}\in L$ важи

$$\left(a+a_1,b\,|\,x_1,...,x_{n-1}\right)=\left(a,b\,|\,x_1,...,x_{n-1}\right)+\left(a_1,b\,|\,x_1,...,x_{n-1}\right),.$$

Функцијата $\mathbf{(*,*|*,....,*)}$ се нарекува *n*-скаларен производ, а $\mathbf{(}L\mathbf{,(*,*|*,....,*))}$ се нарекува *n*-предхилбертов простор.

Да забележиме дека ако $n-$нормираниот простор е $n-$пред-хилбертов, тогаш

$(a,a\,|\,x_1,...,x_{n-1})=\|\,a,x_1,...,x_{n-1}\,\|$, за секои $a,x_1,...,x_{n-1}\in L$.

Нека $\mathbf{(}L\mathbf{,\|*,....,*\|)}$ е реален *n*-нормиран простор и $\phi:L$ x ... x $L\to\mathbf{R}$ е произволен *n*-функционал.

Десен парцијален извод на *n*-функционалот ϕ по x_1 во точката $(x_1,...,x_n)$ во правец на y е

$$\phi_{1^+}^{'}(x_1,...,x_n)(y)=\lim_{\lambda\to 0^+}\frac{\phi(x_1+\lambda y,x_2,...,x_n)-\phi(x_1,x_2,...,x_n)}{\lambda},$$

ако наведената граница постои.

Лев парцијален извод на *n*-функционалот ϕ по x_1 во точката $(x_1,...,x_n)$ во правец на y е

$$\phi_{1^-}^{'}(x_1,...,x_n)(y)=\lim_{\lambda\to 0^-}\frac{\phi(x_1+\lambda y,x_2,...,x_n)-\phi(x_1,x_2,...,x_n)}{\lambda},$$

ако наведената граница постои.

Ако левиот и десниот парцијален извод на *n*-функционалот ϕ по x_1 во точката $(x_1,...,x_n)$ во правец на y постојат и се еднакви, тогаш ќе велиме дека *n*-функционалот ϕ е диференцијабилен по x_1 во точката $(x_1,...,x_n)$ во правец на y, т.е. постои $\phi_1^{'}(x_1,...,x_n)(y)$, при што

$$\phi_1'(x_1,...,x_n)(y)=\phi_{1^+}'(x_1,...,x_n)(y)=\phi_{1^-}'(x_1,...,x_n)(y).$$

Аналогно се дефинираат парцијалните изводи

$$\phi_i'(x_1,...,x_n)(y),\ \ \phi_{i^+}'(x_1,...,x_n)(y)\ \text{ и }\ \phi_{i^-}'(x_1,...,x_n)(y),\ \ i=2,3,...,n.$$

Во [2] е разгледан n-функционалот $\varphi: L \text{ x } ... \text{ x } L \to R$, дефиниран со

$$\varphi(x_1,...,x_n)=\|x_1,...,x_n\|,$$

и неговата диференцијабилност. Притоа, за функцијата

$$\delta_1(x_1,...,x_n,y,t)=\frac{\|x_1+ty,x_2,...,x_n\|-\|x_1,x_2,...,x_n\|}{t},\quad x_1,x_2,...,x_n,y\in L \text{ и } t\in\mathbf{R}$$

докажани се следниве тврдења.

Лема 1. Функцијата $t\to\delta_1(x_1,...,x_n,y,t)$ е монотоно растечка за $t>0$. ♦

Последица 1. Функцијата $t\to\delta_1(x_1,...,x_n,y,t)$ е монотоно растечка за $t<0$. ♦

Лема 2. На интервалот $(0,\infty)$ функцијата $t\to\delta_1(x_1,...,x_n,y,t)$ е ограничена и важи

$$-\|-y,x_2,...,x_n\|\le\delta_1(x_1,...,x_n,y,t)\le\|y,x_2,...,x_n\|.\ ♦$$

Забелешка. Аналогно, може да се докаже дека на интервалите $(-\infty,0)$ и $(0,\infty)$ функциите

$$t\to\delta_i(x_1,...,x_n,y,t)=\frac{\|x_1,...,x_{i-1},x_i+ty,x_{i+1},...,x_n\|-\|x_1,...,x_n\|}{t},\quad i=2,3,...,n$$

се монотоно растечки и дека на интервалот $(0,\infty)$ се ограничени, при што важат оценките

$$-\|-y,x_2,...,x_n\|\le\delta_i(x_1,...,x_n,y,t)\le\|y,x_2,...,x_n\|,\quad i=2,3,...,n.$$

Последица 2. Нека $(L,\|*,....,*\|)$ е реален n-нормиран простор. Тогаш постои

$$\varphi_{1^+}'(x_1,...,x_n)(y)=\lim_{t\to0^+}\frac{\|x_1+ty,x_2...,x_n\|-\|x_1,...,x_n\|}{t},$$

и важи

$$-\|-y,x_2,...,x_n\|\le\varphi_{1^+}'(x_1,...,x_n)(y)\le\|y,x_2,...,x_n\|.\ ♦$$

Теорема 1. За секои $x_1,x_2,...,x_n,y,y'\in L$ важат следниве својства:

i) $\varphi'_{1^+}(x_1,...,x_n)(y+y') \le \varphi'_{1^+}(x_1,...,x_n)(y) + \varphi'_{1^+}(x_1,...,x_n)(y')$;

ii) За секој $\alpha > 0$ важи $\varphi'_{1^+}(\alpha x_1,...,x_n)(y) = \varphi'_{1^+}(x_1,...,x_n)(y)$;

iii) Засекој $\alpha \ge 0$ важи $\varphi'_{1^+}(x_1,...,x_n)(\alpha y) = \alpha\varphi'_{1^+}(x_1,...,x_n)(y)$;

iv) Засекој $\alpha \ge 0$ важи $\varphi'_{1^+}(x_1,...,x_n)(\alpha x_1) = \alpha\|x_1,...,x_n\|$; и

v) $\|x_1 + ty, x_2,...,x_n\| \ge \|x_1, x_2,...,x_n\|$, за секој $t \in \mathbf{R}$ ако и само ако

$$-\varphi'_{1^+}(x_1,...,x_n)(-y) \le 0 \le \varphi'_{1^+}(x_1,...,x_n)(y). \ \blacklozenge$$

Лема 3. За секои $x_1,...,x_n, y \in L$ важи

$$-\varphi'_{1^+}(x_1,...,x_n)(-y) = \varphi'_{1^-}(x_1,...,x_n)(y). \ \blacklozenge$$

Последица 3. За секои $x_1,...,x_n, y, y' \in L$ важат следните својства

i) $-\|y, x_2,...,x_n\| \le \varphi'_{1^-}(x_1,...,x_n)(y) \le \|y, x_2,...,x_n\|$;

ii) $\varphi'_{1^-}(x_1,...,x_n)(y) + \varphi'_{1^-}(x_1,...,x_n)(y') \le \varphi'_{1^-}(x_1,...,x_n)(y+y')$;

iii) За $\alpha < 0$, $\varphi'_{1^+}(\alpha x_1, x_2,...,x_n)(y) = -\varphi'_{1^-}(x_1,...,x_n)(y)$;

iv) За $\alpha \le 0$, $\varphi'_{1^+}(x_1, x_2,...,x_n)(\alpha y) = \alpha\varphi'_{1^-}(x_1,...,x_n)(y)$;

v) $\varphi'_{1^-}(x_1,...,x_n)(y) \le \varphi'_{1^+}(x_1,...,x_n)(y)$. ♦

Теорема 2. Ако *Gateaux* извод на *n*-нормата по x_1 во точката $(x_1,...,x_n)$ по правец *y* постои, тогаш точни се следните тврдења

i) $\varphi'_1(x_1,...,x_n)(y+y') = \varphi'_1(x_1,...,x_n)(y) + \varphi'_1(x_1,...,x_n)(y')$;

ii) $\varphi'_1(x_1,...,x_n)(\alpha y) = \alpha\varphi'_1(x_1,...,x_n)(y)$, за секој реален број α;

iii) $\varphi'_1(\alpha x_1, x_2,...,x_n)(y) = \mathrm{sgn}(\alpha)\varphi'_1(x_1,...,x_n)(y)$, за секој реален број $\alpha \ne 0$;

iv) $|\varphi'_1(x_1,...,x_n)(y)| \le \|y, x_2,...,x_n\|$; и

v) $\varphi'_1(x_1,...,x_n)(\alpha x_1) = \alpha\|x_1,...,x_n\|$. ♦

1. Глатки (мазни) *n*-нормирани простори

n-нормираниот векторски простор $(L, \|*,\ldots,*\|)$ го нарекуваме *мазен* (*гладок*) ако за секој $x \neq 0$ и за секои линеарно независни вектори $x_1,\ldots,x_{n-1} \in L$ такви што $P(x) \cap P(x_1,\ldots,x_{n-1}) = \{0\}$ n-нормата е Gateaux диференцијабилна по x во точката $(x, x_1,\ldots,x_{n-1})$ по секој правец y.

Забелешка. Во претходната дефиниција претпоставивме дека $x \neq 0$ и $P(x) \cap P(x_1,\ldots,x_{n-1}) = \{0\}$. Овие претпоставки се неопходни бидејќи:

- ако $x = 0$ и векторите $x_1,\ldots,x_{n-1}$ се линеарно независни, тогаш постои $y_0 \in L$ таков што $\|y_0, x_1,\ldots,x_{n-1}\| \neq 0$, па затоа

$$\begin{aligned}\varphi'_{1^+}(x, x_1,\ldots,x_{n-1})(y_0) &= \|y_0, x_1,\ldots,x_{n-1}\| \neq -\|y_0, x_1,\ldots,x_{n-1}\| \\ &= \varphi'_{1^-}(x, x_1,\ldots,x_{n-1})(y_0)\end{aligned},$$

т.е. n-нормата не е Gateaux диференцијабилна по $x = 0$ во точката $(x, x_1,\ldots,x_{n-1})$ по правецот y_0, и

- ако $z \neq 0$ и ако $z \in P(x) \cap P(x_1,\ldots,x_{n-1}) \neq \{0\}$, тогаш постојат α_i, $i = 1,\ldots,n-1$ такви што $x = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i x_i$. Од линеарната независност на $x_1,\ldots,x_{n-1}$ следува дека постои $y_0 \in L$ таков што $\|y_0, x_1,\ldots,x_{n-1}\| \neq 0$, па затоа

$$
\begin{aligned}
\varphi'_{1^+}(x,x_1,...,x_{n-1})(y_0) &= \lim_{t\to 0^+}\frac{\|x+ty_0,x_1,...,x_{n-1}\|-\|x,x_1,...,x_{n-1}\|}{t}\\
&= \lim_{t\to 0^+}\frac{\| x+ty_0-\sum\limits_{i=1}^{n-1}\alpha_i x_i, x_1,...,x_{n-1}\|}{t}\\
&= \lim_{t\to 0^+}\frac{t\|y_0,x_1,...,x_{n-1}\|}{t}=\|y_0,x_1,...,x_{n-1}\|\\
&\neq -\|y_0,x_1,...,x_{n-1}\| = \lim_{t\to 0^-}\frac{-t\|y_0,x_1,...,x_{n-1}\|}{t}\\
&= \lim_{t\to 0^-}\frac{\| x+ty_0-\sum\limits_{i=1}^{n-1}\alpha_i x_i, x_1,...,x_{n-1}\|}{t}\\
&= \lim_{t\to 0^-}\frac{\|x+ty_0,x_1,...,x_{n-1}\|-\|x,x_1,...,x_{n-1}\|}{t}\\
&= \varphi'_{1^-}(x,x_1,...,x_{n-1})(y_0),
\end{aligned}
$$

т.е. n-нормата не е Gateaux диференцијабилна по $x=0$ во точката $(x,x_1,...,x_{n-1})$ по правецот y_0.

Лема 4. n-нормираниот векторски простор $(L,\|*,....,*\|)$ е гладок ако и само ако за секој $x\neq 0$ и за секои линеарно независни вектори $x_1,...,x_{n-1}\in L$ такви што $P(x)\cap P(x_1,...,x_{n-1})=\{0\}$ важи

$$\varphi'_{1^+}(x,x_1,...,x_{n-1})(y+y')=\varphi'_{1^+}(x,x_1,...,x_{n-1})(y)+\varphi'_{1^+}(x,x_1,...,x_{n-1})(y'),$$

за секои $y,y'\in L$.

Доказ. Непосредно следува од лема 3, последица 3 и теорема 2. ♦

Лема 5. n-нормираниот векторски простор $(L,\|*,....,*\|)$ е гладок ако и само ако за секој $x\neq 0$ и за секои линеарно независни вектори $x_1,...,x_{n-1}\in L$ такви што $P(x)\cap P(x_1,...,x_{n-1})=\{0\}$ важи

$$-\varphi'_{1^+}(x,x_1,...,x_{n-1})(y)=\varphi'_{1^+}(x,x_1,...,x_{n-1})(y),\text{ за секои } y\in L.$$

Доказ. Непосредно следува од лема 3, последица 3 и теорема 2. ♦

2. Генерализиран *n*-скаларен производ

Нека $(L,\|*,....,*\|)$ е n-нормиран простор. Од непрекинатоста на n-нормата во однос на секоја координата добиваме

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{\|x+ty,x_1,...,x_{n-1}\|^2-\|x,x_1,...,x_{n-1}\|^2}{2t}=$$
$$=\lim_{t\to 0^+}\frac{\|x+ty,x_1,...,x_{n-1}\|-\|x,x_1,...,x_{n-1}\|}{t}\cdot\frac{\|x+ty,x_1,...,x_{n-1}\|+\|x,x_1,...,x_{n-1}\|}{2}$$
$$=\|x,x_1,...,x_{n-1}\|\cdot\varphi'_{1^+}(x,x_1,...,x_{n-1})(y).$$

Со

$$\langle x,y\,|\,x_1,...,x_{n-1}\rangle=\|x,x_1,...,x_{n-1}\|\cdot\varphi'_{1^+}(x,x_1,...,x_{n-1})(y) \qquad (1)$$

дефинираме *генерализиран n-скаларен производ* придружен на n-нормата $\|*,....,*\|$. Да забележиме дека $\langle x,y\,|\,x_1,...,x_{n-1}\rangle=0$ ако и само ако $x,x_1,...,x_{n-1}$ се линеарно зависни или $\varphi'_{1^+}(x,x_1,...,x_{n-1})(y)=0$.

Теорема 3. За секои $y_1,y_1',x_1,x_2,...,x_n\in L$ и за секои позитивни реални броеви α,β важи

i) $\|x_1,x_2,...,x_n\|^2=\langle x_1,x_1\,|\,x_2,...,x_n\rangle$,

ii) $|\langle x_1,y_1\,|\,x_2,...,x_n\rangle|\leq\|x_1,x_2,...,x_n\|\cdot\|y_1,x_2,...,x_n\|$,

iii) $\langle x_1,y_1+y_1'\,|\,x_2,...,x_n\rangle\leq\langle x_1,y_1\,|\,x_2,...,x_n\rangle+\langle x_1,y_1'\,|\,x_2,...,x_n\rangle$, , и

iv) $\langle\alpha x_1,\beta y_1\,|\,x_2,...,x_n\rangle=\alpha\beta\langle x_1,y_1\,|\,x_2,...,x_n\rangle$.

Доказ. *i)* Од дефиницијата на генерализираниот n-скаларен производ и од теорема 1 *iv)* имаме

$$\langle x_1,x_1\,|\,x_2,...,x_n\rangle=\|x_1,x_2,...,x_n\|\varphi'_{1^+}(x_1,x_2,...,x_n)(x_1)=\|x_1,x_2,...,x_n\|^2.$$

ii) Од последица 2 и лема 3 добиваме

$$|\langle x_1,y_1\,|\,x_2,...,x_n\rangle|=\|x_1,x_2,...,x_n\|\cdot|\varphi'_{1^+}(x_1,x_2,...,x_n)(y_1)|\leq\|x_1,x_2,...,x_n\|\cdot\|y_1,x_2,...,x_n\|.$$

iii) Од теорема 1 *i)* имаме

$$\left\langle x_1, y_1 + y_1^{'} \mid x_2, ..., x_n \right\rangle = \|x_1, x_2, ..., x_n\| \cdot \varphi_{1^+}^{'}(x_1, x_2, ..., x_n)(y_1 + y_1^{'})$$

$$\leq \|x_1, x_2, ..., x_n\| \cdot \left(\varphi_{1^+}^{'}(x_1, x_2, ..., x_n)(y_1) + \varphi_{1^+}^{'}(x_1, x_2, ..., x_n)(y_1^{'}) \right)$$

$$= \|x_1, x_2, ..., x_n\| \cdot \varphi_{1^+}^{'}(x_1, x_2, ..., x_n)(y_1) + \|x_1, x_2, ..., x_n\| \cdot \varphi_{1^+}^{'}(x_1, x_2, ..., x_n)(y_1^{'})$$

$$= \left\langle x_1, y_1 \mid x_2, ..., x_n \right\rangle + \left\langle x_1, y_1^{'} \mid x_2, ..., x_n \right\rangle.$$

iv) Според теорема 1 *ii)* и *iii)* за секои позитивни реални броеви α, β добиваме

$$\left\langle \alpha x_1, \beta y_1 \mid x_2, ..., x_n \right\rangle = \|\alpha x_1, x_2, ..., x_n\| \varphi_{1^+}^{'}(\alpha x_1, x_2, ..., x_n)(\beta y_1)$$

$$= \alpha\beta \|x_1, x_2, ..., x_n\| \varphi_{1^+}^{'}(x_1, x_2, ..., x_n)(y_1) = \alpha\beta \left\langle x_1, y_1 \mid x_2, ..., x_n \right\rangle. \ \blacklozenge$$

Лема 6. Ако n-нормираниот векторски простор $(L, \|*, ..., *\|)$ е n-предхилбертов простор, тогаш n-скаларниот производ и генерализираниот n-скаларен производ се совпаѓаат, т.е.

$$\left\langle x_1, y_1 \mid x_2, ..., x_n \right\rangle = \left(x_1, y_1 \mid x_2, ..., x_n \right).$$

Доказ. Имаме:

$$\left\langle x_1, y_1 \mid x_2, ..., x_n \right\rangle = \lim_{t \to 0^+} \frac{\|x_1 + t y_1, x_2, ..., x_n\|^2 - \|x_1, x_2, ..., x_n\|^2}{2t}$$

$$= \lim_{t \to 0^+} \frac{\left(x_1 + t y_1, x_1 + t y_1 \mid x_2, ..., x_n \right) - \left(x_1, x_1 \mid x_2, ..., x_n \right)}{2t}$$

$$= \lim_{t \to 0^+} \frac{2t \left(x_1, y_1 \mid x_2, ..., x_n \right) - t^2 \left(y_1, y_1 \mid x_2, ..., x_n \right)}{2t}$$

$$= \left(x_1, y_1 \mid x_2, ..., x_n \right). \ \blacklozenge$$

Теорема 4. Нека $(L, \|*, ..., *\|)$ е гладок n-нормиран векторски простор. Ако x и y се линеарно независни вектори во L и $x_1, ..., x_{n-1} \in L$ линеарно независни вектори такви што $P(x) \cap P(x_1, ..., x_{n-1}) = \{0\}$, тогаш постои единствен реален број α таков што $\left\langle x, \alpha x + y \mid x_1, ..., x_{n-1} \right\rangle = 0$.

Доказ. Нека

$$\alpha = -\frac{\varphi_1^{'}(x, x_1, ..., x_n)(y)}{\|x, x_1, ..., x_n\|}.$$

Имаме:

$$\langle x, \alpha x + y \mid x_1, ..., x_{n-1} \rangle = \| x, x_1, ..., x_{n-1} \| \cdot \varphi_1^{'}(x, x_1, ..., x_{n-1})(\alpha x + y)$$
$$= \| x, x_1, ..., x_{n-1} \| \cdot (\varphi_1^{'}(x, x_1, ..., x_{n-1})(\alpha x) + \varphi_1^{'}(x, x_1, ..., x_{n-1})(y))$$
$$= \| x, x_1, ..., x_{n-1} \| \cdot (\alpha \| x, x_1, ..., x_{n-1} \| + \varphi_1^{'}(x, x_1, ..., x_{n-1})(y)) = 0.$$

Ако $\alpha, \beta \in R$ се такви што

$$\langle x, \alpha x + y \mid x_1, ..., x_{n-1} \rangle = 0 \text{ и } \langle x, \beta x + y \mid x_1, ..., x_{n-1} \rangle = 0,$$

тогаш бидејќи

$$\| x, x_1, ..., x_{n-1} \| \neq 0$$

добиваме

$$\varphi_{1^+}^{'}(x, x_1, ..., x_{n-1})(\alpha x + y) = \varphi_{1^+}^{'}(x, x_1, ..., x_{n-1})(\beta x + y)$$

од што следува $\alpha = \beta$. ♦

Теорема 5. За гладок n-нормиран векторски простор $(L, \|*, ..., *\|)$ следните тврдења се еквивалентни:

i) $(L, \|*, ..., *\|)$ е n-предхилбертов простор.

ii) Ако $\| x, x_1, ..., x_{n-1} \| = \| y, x_1, ..., x_{n-1} \|$, тогаш
$$\lim_{n \to \infty} \left(\| nx + y, x_1, ..., x_{n-1} \| - \| x + ny, x_1, ..., x_{n-1} \| \right) = 0.$$

iii) за секои $x, y, x_1, ..., x_{n-1} \in L$ важи
$$\langle x, y \mid x_1, ..., x_{n-1} \rangle = \langle y, x \mid x_1, ..., x_{n-1} \rangle,$$
т.е. генерализираниот n-скаларен производ е симетричен во однос на x и y.

iv) $\langle x, y \mid x_1, ..., x_{n-1} \rangle$ е линеарен по x за секои $y, x_1, ..., x_{n-1} \in L$.

Доказ. $i) \Rightarrow ii)$. Нека претпоставиме дека $(L, \|*, ..., *\|)$ е n-предхилбертов простор со n-скаларен производ $(*, * | *, ..., *)$ и $\| x, x_1, ..., x_{n-1} \| = \| y, x_1, ..., x_{n-1} \|$. Тогаш, за секој $n \in N$ важи

$$\| x + ny, x_1, ..., x_{n-1} \|^2 = (x + ny, x + ny \mid x_1, ..., x_{n-1})$$
$$= (x, x \mid x_1, ..., x_{n-1}) + 2n(x, y \mid x_1, ..., x_{n-1}) + n^2 (y, y \mid x_1, ..., x_{n-1})$$
$$= (y, y \mid x_1, ..., x_{n-1}) + 2n(x, y \mid x_1, ..., x_{n-1}) + n^2 (x, x \mid x_1, ..., x_{n-1})$$
$$= (nx + y, nx + y \mid x_1, ..., x_{n-1}) = \| nx + y, x_1, ..., x_{n-1} \|^2,$$

па затоа

$$\lim_{n \to \infty} \left(\| nx + y, x_1, ..., x_{n-1} \| - \| x + ny, x_1, ..., x_{n-1} \| \right) = 0.$$

$ii) \Rightarrow iii)$. Нека $\|x, x_1, ..., x_{n-1}\| = \|y, x_1, ..., x_{n-1}\|$. Тогаш,

$$\begin{aligned}\langle x, y \mid x_1, ..., x_{n-1}\rangle &= \|x, x_1, ..., x_{n-1}\| \cdot \varphi'_{1^+}(x, x_1, ..., x_{n-1})(y) \\ &= \|x, x_1, ..., x_{n-1}\| \cdot \lim_{n\to\infty}(\|nx + y, x_1, ..., x_{n-1}\| - \|nx, x_1, ..., x_{n-1}\|) \\ &= \|y, x_1, ..., x_{n-1}\| \cdot \lim_{n\to\infty}(\|x + ny, x_1, ..., x_{n-1}\| - \|ny, x_1, ..., x_{n-1}\|) \\ &= \|y, x_1, ..., x_{n-1}\| \cdot \varphi'_{1^+}(y, x_1, ..., x_{n-1})(x) = \langle y, x \mid x_1, ..., x_{n-1}\rangle.\end{aligned}$$

Ако $\|x, x_1, ..., x_{n-1}\| \neq \|y, x_1, ..., x_{n-1}\|$, тогаш

$$\big\|\|y, x_1, ..., x_{n-1}\| x, x_1, ..., x_{n-1}\big\| = \big\|\|x, x_1, ..., x_{n-1}\| y, x_1, ..., x_{n-1}\big\|,$$

па затоа

$$\begin{aligned}\langle x, y \mid x_1, ..., x_{n-1}\rangle &= \|x, x_1, ..., x_{n-1}\| \cdot \varphi'_{1^+}(x, x_1, ..., x_{n-1})(y) \\ &= \varphi'_{1^+}(\|y, x_1, ..., x_{n-1}\| x, x_1, ..., x_{n-1})(\|x, x_1, ..., x_{n-1}\| y) \\ &= \varphi'_{1^+}(\|x, x_1, ..., x_{n-1}\| y, x_1, ..., x_{n-1})(\|y, x_1, ..., x_{n-1}\| x) \\ &= \|y, x_1, ..., x_{n-1}\| \cdot \varphi'_{1^+}(y, x_1, ..., x_{n-1})(x) = \langle y, x \mid x_1, ..., x_{n-1}\rangle.\end{aligned}$$

$iii) \Rightarrow iv)$. Бидејќи L е гладок и $\langle x, y \mid x_1, ..., x_{n-1}\rangle$ е симетричен во однос на x и y од теорема 2 добиваме

$$\begin{aligned}\langle x + x', y \mid x_1, ..., x_{n-1}\rangle &= \langle y, x + x' \mid x_1, ..., x_{n-1}\rangle \\ &= \|y, x_1, ..., x_{n-1}\| \cdot \varphi'_1(y, x_1, ..., x_{n-1})(x + x') \\ &= \|y, x_1, ..., x_{n-1}\| \cdot (\varphi'_1(y, x_1, ..., x_{n-1})(x) + \varphi'_1(y, x_1, ..., x_{n-1})(x')) \\ &= \|y, x_1, ..., x_{n-1}\| \cdot \varphi'_1(y, x_1, ..., x_{n-1})(x) + \|y, x_1, ..., x_{n-1}\| \cdot \varphi'_1(y, x_1, ..., x_{n-1})(x') \\ &= \langle y, x \mid x_1, ..., x_{n-1}\rangle + \langle y, x' \mid x_1, ..., x_{n-1}\rangle \\ &= \langle x, y \mid x_1, ..., x_{n-1}\rangle + \langle x', y \mid x_1, ..., x_{n-1}\rangle.\end{aligned}$$

$iv) \Rightarrow i)$. Од линеарноста на $\langle x, y \mid x_1, ..., x_{n-1}\rangle$ по x следува

$$\begin{aligned}\langle x + y, y \mid x_1, ..., x_{n-1}\rangle &= \langle x, y \mid x_1, ..., x_{n-1}\rangle + \langle y, y \mid x_1, ..., x_{n-1}\rangle = \\ &= \|x, x_1, ..., x_{n-1}\| \cdot \varphi'_1(x, x_1, ..., x_{n-1})(y) + \|y, x_1, ..., x_{n-1}\|^2\end{aligned} \tag{2}$$

Од друга страна, ако $x, y, x_1, ..., x_{n-1} \in L$ се такви што

$$x+y\neq 0 \text{ и } P(x+y)\cap P(x_1,...,x_{n-1})=\{0\},$$

тогаш

$$\begin{aligned}
\langle x+y,y\,|\,x_1,...,x_{n-1}\rangle &= \|x+y,x_1,...,x_{n-1}\|\cdot\varphi_1^{'}(x+y,x_1,...,x_{n-1})(y)\\
&= \|x+y,x_1,...,x_{n-1}\|\cdot\varphi_1^{'}(x+y,x_1,...,x_{n-1})(x+y+(-x))\\
&= \|x+y,x_1,...,x_{n-1}\|\cdot\left(\varphi_1^{'}(x+y,x_1,...,x_{n-1})(x+y)+\varphi_1^{'}(x+y,x_1,...,x_{n-1})(-x)\right)\\
&= \|x+y,x_1,...,x_{n-1}\|^2+\|x+y,x_1,...,x_{n-1}\|\cdot\varphi_1^{'}(x+y,x_1,...,x_{n-1})(-x)\\
&= \|x+y,x_1,...,x_{n-1}\|^2+\langle x+y,-x\,|\,x_1,...,x_{n-1}\rangle\\
&= \|x+y,x_1,...,x_{n-1}\|^2+\langle x,-x\,|\,x_1,...,x_{n-1}\rangle+\langle y,-x\,|\,x_1,...,x_{n-1}\rangle\\
&= \|x+y,x_1,...,x_{n-1}\|^2+\|x,x_1,...,x_{n-1}\|\cdot\varphi_1^{'}(x,x_1,...,x_{n-1})(-x)+\\
&\quad +\|y,x_1,...,x_{n-1}\|\cdot\varphi_1^{'}(y,x_1,...,x_{n-1})(-x)\\
&= \|x+y,x_1,...,x_{n-1}\|^2-\|x,x_1,...,x_{n-1}\|^2+\|y,x_1,...,x_{n-1}\|\cdot\varphi_1^{'}(y,x_1,...,x_{n-1})(-x).
\end{aligned}$$

т.е.

$$\begin{aligned}
\langle x+y,y\,|\,x_1,...,x_{n-1}\rangle = \|x+y,x_1,...,x_{n-1}\|^2-\|x,x_1,...,x_{n-1}\|^2\\
+\|y,x_1,...,x_{n-1}\|\cdot\varphi_1^{'}(y,x_1,...,x_{n-1})(-x).
\end{aligned} \tag{3}$$

Од (2) и (3) следува

$$\begin{aligned}
\|x+y,x_1,...,x_{n-1}\|^2 = \|x,x_1,...,x_{n-1}\|^2+\|y,x_1,...,x_{n-1}\|^2+\\
+\|x,x_1,...,x_{n-1}\|\cdot\varphi_1^{'}(x,x_1,...,x_{n-1})(y)-\\
-\|y,x_1,...,x_{n-1}\|\cdot\varphi_1^{'}(y,x_1,...,x_{n-1})(-x).
\end{aligned} \tag{4}$$

Ако во (4) наместо y ставиме $-y$ и ако $x,y,x_1,...,x_{n-1}\in L$ се такви што $x-y\neq 0$ и $P(x-y)\cap P(x_1,...,x_{n-1})=\{0\}$, добиваме

$$\begin{aligned}
\|x-y,x_1,...,x_{n-1}\|^2 = \|x,x_1,...,x_{n-1}\|^2+\|y,x_1,...,x_{n-1}\|^2+\\
+\|x,x_1,...,x_{n-1}\|\cdot\varphi_1^{'}(x,x_1,...,x_{n-1})(-y)-\\
-\|y,x_1,...,x_{n-1}\|\cdot\varphi_1^{'}(y,x_1,...,x_{n-1})(-x).
\end{aligned} \tag{5}$$

Бидејќи L е гладок важи

$$\varphi_1'(x,x_1,...,x_{n-1})(-y)+\varphi_1'(x,x_1,...,x_{n-1})(y)=0.$$

Ако ги собереме (4) и (5) добиваме

$$\|x+y,x_1,...,x_{n-1}\|^2+\|x-y,x_1,...,x_{n-1}\|^2=2\left(\|x,x_1,...,x_{n-1}\|^2+\|y,x_1,...,x_{n-1}\|^2\right).$$

Сега тврдењето непосредно следува од теорема 7, [1]. ♦

Последица 4. Нека $(L,\|*,....,*\|)$ е гладок n-нормиран векторски простор. Следниве тврдења се еквивалентни:

i) $(L,\|*,....,*\|)$ е n-предхилбертов простор.

ii) $\varphi_1'(x,x_1,...,x_{n-1})(y)=\varphi_1'(y,x_1,...,x_{n-1})(x)$, за секои $x,y,x_1,...,x_{n-1}\in L$. ♦

Литература

[1] Малчески, Р.: *Забелешки за n-нормирани простори,* Мат. бил. 20 (1996)

[2] Малчески, Р.: *Gateaux изводи за n-норма,* Мат. бил. 27 (2003)

[3] Misiak, A.: *n-Inner Product Spaces,* Math.Nachr. 140 (1989)

[4] Rudin, W: *Functional Analysis,* 2d ed., McGraw-Hill Book Company, New York, (1991)

e-mail: rmalcheski@yahoo.com

8 МСДР 2004, (131 - 140)
Зборник на трудови
30.09.- 03.10.2004 год.
Охрид, Македонија

ISBN 9989 – 630 – 49 – 6
COBISS.MK – ID 61901322

ОПЕРАТОРИ СО ОРБИТИ ШТО ТЕЖАТ КОН БЕСКОНЕЧНОСТ

Соња Манчевска, Технички факултет, Битола

Апстракт. Во овој труд се разгледуваат услови што треба да задоволува еден оператор на бесконечно-димензионален Банахов простор со спектрален радиус строго поголем од 1 за во просторот да постојат вектори чии орбити во однос на тој оператор тежат кон бесконечност.

Клучни зборови и изрази. Банахов простор, ограничен линеарен оператор, орбити, спектар, тежински поместувања, хиперцикличност.

Нека $\mathcal{X}$ е бесконечно-димензионален комплексен Банахов простор и $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ е алгебрата од сите ограничени линеарни оператори на $\mathcal{X}$. *Орбита* на векторот $x\in\mathcal{X}$ во однос на операторот $T\in\mathcal{B}(\mathcal{X})$ е множеството итерати $Orb(T,x)=\{T^n x : n\geq 0\}$. Во понатамошните разгледувања ќе бидат дадени услови под кои за даден оператор $T\in\mathcal{B}(\mathcal{X})$ во просторот ќе постојат вектори чии орбити во однос на T тежат кон бесконечност и притоа ваквите вектори да формираат густо множество во просторот. Овие услови се однесуваат на спектралниот радиус $r(T)=\sup\{|\lambda| : \lambda\in\sigma(T)\}$ на операторот T, каде $\sigma(T)$ е спектарот на T, и на две подмножества на спектарот: точкастиот спектар $\sigma_p(T)$ и апроксимативниот точкаст спектар $\sigma_a(T)$ што се состои од сите оние $\lambda\in\sigma(T)$ за кои постои нормализирана низа вектори $(x_n)_{n\geq 1}$ таква што $\|Tx_n-\lambda x_n\|\to 0$ кога $n\to\infty$ (ваквата низа се уште се нарекува *низа од скоро сопствени вектори* за λ). Напоменуваме дека за секој $T\in\mathcal{B}(\mathcal{X})$ е исполнето ([3], пропозиција VII.6.7.) $\varnothing\neq\partial\sigma(T)\cup\sigma_p(T)\subseteq\sigma_a(T)$.

Општите резултати што ќе бидат презентирани во продолжение се мотивирани и засновани на резултатите на B. Beauzamy изложени во [1]. Првиот резултат, лема 1, е формулирана и докажана врз основа на доказот на пропозиција [1].II.1.13. Вториот резултат, лема 2, е модификација на лема [1].III.2.A.6 направена со цел да се даде детален доказ на теорема [1].III.2.A.5; резултатот од оваа теорема, со мала измена во заклучокот, е формулиран во теорема 3 подолу и за истата е приложен комлетен доказ.

Лема 1. Ако $\mathcal{X}$ е рефлексивен Банахов простор, $T\in\mathcal{B}(\mathcal{X})$ и $\lambda\in\sigma_a(T)\setminus\sigma_p(T)$, тогаш секоја низа од скоро сопствени вектори за λ е слаба нула низа.

Доказ. Нека $(x_n)_{n\geq 1}$ е низа од скоро сопствени вектори за $\lambda\in\sigma_a(T)\setminus\sigma_p(T)$. Бидејќи во случај на рефлексивен Банахов простор, $ball\,\mathcal{X}=\{x\in\mathcal{X}:\|x\|\leq 1\}$ е слабо компактно (теорема на *Alaoglu*), постојат вектор $x\in ball\,\mathcal{X}$ и подниза $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ на $(x_n)_{n\geq 1}$ така што $x_{n_k}\to x(wk)$, каде wk е слабата топологија на $\mathcal{X}$. Тогаш $Tx_{n_k}-\lambda x_{n_k}\to Tx-\lambda x(wk)$ и, поради $\|Tx_n-\lambda x_n\|\to 0$ кога $n\to\infty$, $Tx_{n_k}-\lambda x_{n_k}\to 0(wk)$. Но во случај на Банахови простори wk е *Hausdorffov*-ова топологија, што значи дека $Tx-\lambda x=0$. Ова заедно со $\lambda\notin\sigma_p(T)$, ќе даде $x=0$. Со тоа добивме дека $x=0$ е всушност единствената точка на натрупување за низата $(x_n)_{n\geq 1}$ во однос на wk. Ова, заедно со слабата компактност на $ball\,\mathcal{X}$, имплицира $x_n\to 0\,(wk)$. ■

Лема 2. Ако $(z_n)_{n\geq 1}$ е слаба нула низа во Банаховиот простор $\mathcal{X}$, тогаш за секој вектор $z\in\mathcal{X}$

(a) $\limsup\limits_{n\to\infty}\|z+z_n\|\geq\|z\|$;

(b) ако $\|z_n\|\to\alpha$ кога $n\to\infty$, тогаш

$$\limsup_{n\to\infty}\|z+z_n\|\geq\max\{\alpha/2\,,\|z\|\}.$$

Доказ. При условите во лемата, $x^*(z_n)\to 0$ кога $n\to\infty$ за секој ограничен линеарен функционал $x^*\in\mathcal{X}^*$. Ако притоа $\|x^*\|\leq 1$, тогаш

$$|x^*(z)|=\lim_{n\to\infty}|x^*(z+z_n)|\leq\limsup_{n\to\infty}\|z+z_n\|\quad\Rightarrow$$
$$\|z\|=\sup\{|x^*(z)|:x^*\in\mathcal{X}^*,\|x^*\|\leq 1\}\leq\limsup_{n\to\infty}\|z+z_n\|,$$

со што е докажано (a). Нека сега $\|z_n\|\to\alpha$ кога $n\to\infty$. За $\|z_n\|>\alpha/2$, тврдењето (b) ќе следи од (a), а ако $\|z_n\|\leq\alpha/2$, тогаш $\|z_n\|-\alpha/2\leq\|z+z_n\|+\|z\|-\alpha/2\leq\|z+z_n\|$ за секој $n\geq 1$, што имлицира $\alpha/2=\lim\limits_{n\to\infty}(\|z_n\|-\alpha/2)\leq\limsup\limits_{n\to\infty}\|z+z_n\|$. ■

Теорема 3. Нека $\mathcal{X}$ е рефлексивен Банахов простор. Ако за операторот $T\in\mathcal{B}(\mathcal{X})$ кружницата $\{\lambda\in\mathbb{C} : |\lambda| = r\}$, каде $r = r(T)$, содржи точка од $\sigma(T)\setminus\sigma_p(T)$, тогаш за секоја низа позитивни броеви $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ таква што $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n < +\infty$, во секоја топка од просторот со радиус строго поголем од $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ постои вектор $y\in\mathcal{X}$ таков што

$$\|Ty\| \geq \frac{1}{2}\alpha_n r^n \text{, за секој } n\geq 1 .$$

Доказ. Ако $\lambda\in\sigma(T)\setminus\sigma_p(T)$ е таков што $|\lambda| = r$, тогаш $\lambda\in\partial\sigma(T)\setminus\sigma_p(T) \subseteq \sigma_a(T)\setminus\sigma_p(T)$, па според лема 1, постои низа вектори $(x_n)_{n\geq 1}$ во $\mathcal{X}$ со особини:

(a) $\|x_n\| = 1$ за секој $n\geq 1$;

(b) $\| Tx_n - \lambda x_n \| \to 0$ кога $n\to\infty$;

(c) $x_n \to 0\,(wk)$.

Тогаш

$$\| T^k x_n - \lambda^k x_n \| \to 0 \text{ и } \|T^k x_n\| \to r^k \text{ кога } n\to\infty \text{, за секој } k\geq 1 . \quad (1)$$

Нека $x\in\mathcal{X}$ и $\varepsilon > 0$ се произволни и $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ е низата од условот во теоремата.

I. Според (1) за $k=1$ и (c), за низата $((1+\varepsilon)\alpha_1 Tx_n)_{n\geq 1}$ важи $\| (1+\varepsilon)\alpha_1 Tx_n \| \to (1+\varepsilon)\alpha_1 x_n$ кога $n\to\infty$ и $(1+\varepsilon)\alpha_1 Tx_n \to 0(wk)$, што според лема 2.$(b)$ имплицира

$$\sup_{n\geq 1}\|T(x+(1+\varepsilon)\alpha_1 x_n)\| \geq \limsup_{n\to\infty}\|T(x+(1+\varepsilon)\alpha_1 x_n)\| \geq$$
$$\geq \max\left\{\frac{1}{2}(1+\varepsilon)\alpha_1 r, \|Tx\|\right\} > \frac{1}{2}\alpha_1 r .$$

Тогаш постои $n_1 \geq 1$ така што за векторот $y_1 = x + (1+\varepsilon)\alpha_1 x_{n_1}$ да важи $\|Ty_1\| \geq \frac{1}{2}\alpha_1 r$.

II. Нека претпоставиме дека за некој $k\geq 2$ се најдени природни броеви $n_1 < ... < n_{k-1}$ такви што за векторите

$$y_l = x + (1+\varepsilon)\alpha_1 x_{n_1} + ... + \alpha_l x_{n_l}) \text{, } 1\leq l\leq k-1$$

да важи

$$\|T^j y_l\| > \frac{1}{2}\alpha_j r^j \text{, за секои } 1\leq j\leq l\leq k-1 . \quad (2)$$

III. Ја разгледуваме низата вектори $(y_{k-1}+(1+\varepsilon)\alpha_k x_n)_{n\geq 1}$.

ТВРДЕЊЕ 4. Постојат стого растечки низи $(N_j(n))_{n\geq 1}$, $1\leq j\leq k-1$ во $\mathbb{N}$ такви што

$$\left\|T^j(y_{k-1}+(1+\varepsilon)\alpha_k x_{N_1(\ldots(N_j(n))\ldots)})\right\|>\frac{1}{2}\alpha_j r^j \text{ за секои } 1\leq j\leq k-1 \text{ и } n\geq 1. \quad (3)$$

Доказот на ова тврдење го спроведуваме со индукција:

i) Според (c) имаме $(1+\varepsilon)\alpha_1 Tx_n\to 0(wk)$. Од индуктивната претпоставка II. (2), за $j=1$ и $l=k-1$, како и лема 2. (a), добиваме

$$\sup_{n\geq m}\left\|T(y_{k-1}+(1+\varepsilon)\alpha_k x_n)\right\|\geq \limsup_{n\to\infty}\left\|T(y_{k-1}+(1+\varepsilon)\alpha_k x_n)\right\|\geq\left\|Ty_{k-1}\right\|>$$
$$>\frac{1}{2}\alpha_1 r,\ \forall m\geq 1.$$

Ова дозволува да се најде строго растечка низа $(N_1(n))_{n\geq 1}$ во $\mathbb{N}$ така што

$$\left\|T(y_{k-1}+(1+\varepsilon)\alpha_k x_{N_1(n)})\right\|>\frac{1}{2}\alpha_1 r, \text{ за секој } n\geq 1.$$

ii) Нека се најдени строго растечките низи $(N_j(n))_{n\geq 1}$ во $\mathbb{N}$ за $1\leq j\leq s$, каде $s\leq k-2$, а притоа неравенството во (2) да важи за секој $1\leq j\leq s$.

iii) Низата $(x_{N_1(\ldots(N_s(n))\ldots)})_{n\geq 1}$ како подниза на $(x_n)_{n\geq 1}$ е исто така слаба нула низа, што имплицира $(1+\varepsilon)\alpha_k T^{s+1}x_{N_1(\ldots(N_s(n))\ldots)}\to 0(wk)$, и последователно

$$\limsup_{n\to\infty}\| T^{s+1}(y_{k-1}+(1+\varepsilon)\alpha_k x_{N_1(\ldots(N_s(n))\ldots)})\|\geq\| T^{s+1}y_{k-1}\|>\frac{1}{2}\alpha_{s+1}r^{s+1},\forall m\geq 1.$$

Тогаш

$$\sup_{n\geq m}\| T^{s+1}(y_{k-1}+(1+\varepsilon)\alpha_k x_{N_1(\ldots(N_s(n))\ldots)})\|>\frac{1}{2}\alpha_{s+1}r^{s+1}, \text{ за секој } m\geq 1$$

што дозволува да се најде строго растечка низа $(N_{s+1}(n))_{n\geq 1}$ во $\mathbb{N}$ така што

$$\| T^{s+1}(y_{k-1}+(1+\varepsilon)\alpha_k x_{N_1(\ldots(N_s(n))\ldots)})\|>\frac{1}{2}\alpha_{s+1}r^{s+1} \text{ за секој } n\geq 1.\ \blacklozenge$$

Продолжуваме со доказот на теоремата.

Бидејќи $(x_{N_1(\ldots(N_{k-1}(n))\ldots)})_{n\geq 1}$ е подниза на $(x_n)_{n\geq 1}$,

$$\|(1+\varepsilon)\alpha_k T^k x_{N_1(\ldots(N_{k-1}(n))\ldots)})\|\to(1+\varepsilon)\alpha_k r^k \text{ кога } n\to\infty \text{ и}$$

$$(1+\varepsilon)\alpha_k T^k x_{N_1(\dots(N_{k-1}(n))\dots)}) \to 0(wk),$$

па според лема 2. (b)

$$\limsup_{n\to\infty} \| T^k(y_{k-1} + (1+\varepsilon)\alpha_k x_{N_1(\dots(N_{k-1}(n))\dots)}) \| \geq$$

$$\geq \max\left\{\frac{1}{2}(1+\varepsilon)\alpha_k r^k, \| T^k y_{k-1} \|\right\} > \frac{1}{2}\alpha_k r^k. \qquad (4)$$

Нека $m_k \in \mathbb{N}$ е таков што $N_1(\dots(N_{k-1}(m_k))\dots) \geq n_{k-1}+1$. Тогаш според (4)

$$\sup_{n\geq m_k} \| T^k(y_{k-1} + (1+\varepsilon)\alpha_k x_{N_1(\dots(N_{k-1}(n))\dots)}) \| > \frac{1}{2}\alpha_k r^k,$$

па постои $n_k' \geq m_k$ така што

$$\| T^k(y_{k-1} + (1+\varepsilon)\alpha_k x_{N_1(\dots(N_{k-1}(n_k'))\dots)}) \| > \frac{1}{2}\alpha_k r^k. \qquad (5)$$

Нека $n_k = N_1(\dots(N_{k-1}(n_k'))\dots)$. Бидејќи низите $(N_j(n))_{n\geq 1}$ се строго растечки и $n_k' \geq m_k$, ќе важи $n_k \geq N_1(\dots(N_{k-1}(m_k))\dots) \geq n_{k-1}+1$.

Нека $y_k = y_{k-1} + (1+\varepsilon)\alpha_k x_{n_k}$. Тогаш, според (5) за $j = k-1$ и $n = n_k'$, односно според (3) за $j \in \{1,\dots,k-2\}$ и $n = N_{j+1}(\dots(N_{k-1}(n_k'))\dots)$,

$$\left\|T^j y_k\right\| > \frac{1}{2}\alpha_j r^j \text{ за секој } 1 \leq j \leq k. \qquad (6)$$

Од I. - III. според принципот на математичка индукција следи дека постои строго растечка низа $(n_k)_{k\geq 1}$ во $\mathbb{N}$ така што за векторите $y_k = x + (1+\varepsilon)(\alpha_1 x_{n_1} + \dots + \alpha_k x_{n_k})$, $k \geq 1$ да важи (6), и тоа за секој $k \geq 1$. За вака најдените вектори $(y_k)_{k\geq 1}$, поради условот $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < +\infty$ и (a), $\left\|y_n - y_m\right\| \leq (1+\varepsilon)(\alpha_{\min\{m,n\}+1} + \dots + \alpha_{\max\{m,n\}}) \to 0$ кога $m,n \to \infty$, што значи дека $(y_k)_{k\geq 1}$ е Кошиева низа. Тогаш постои $y \in \mathcal{X}$ така што $y = \lim_{k\to\infty} y_k = x + (1+\varepsilon)\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_{n_k}$. Притоа

$$\left\|y - x\right\| = (1+\varepsilon)\left\|\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_{n_k}\right\| \leq (1+\varepsilon)\sum_{k=1}^{\infty}\left|\alpha_k\right| < (1+2\varepsilon)\sum_{k=1}^{\infty}\left|\alpha_k\right|$$

и, според (6) $\left\|T^n y\right\| = \lim_{k\to+\infty}\left\|T^n y_k\right\| \geq \frac{1}{2}\alpha_n r^n$ за секој $n \geq 1$. ■

Последица 5. Ако операторот T е со спектрален радиус $r = r(T) > 1$, тогаш при условите во теорема 2.1 во просторот постои густо множество вектори чии орбити тежат кон бесконечност.

Доказ. За дадени $x \in \mathcal{X}$, $\varepsilon > 0$ и произволно избран $1 < q < r$ дефинираме низа $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ со

$$\alpha_n = \varepsilon(q-1)(1+2\varepsilon)^{-1} q^{-n}, \; n \geq 1.$$

Тогаш

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \varepsilon(1+2\varepsilon)^{-1} \text{ и } \alpha_n r^n \to \infty \text{ кога } n \to \infty,$$

и последователно за векторот конструиран во предходниот доказ важи $\|y - x\| < \varepsilon$ и $\|T^n y\| \to \infty$ кога $n \to \infty$. ■

Напоменуваме дека во случај кога при $r = r(T) > 1$ постои $\lambda \in \sigma_p(T)$ таков што $1 < |\lambda| \leq r$, тогаш за секој ненулти вектор $x \in \ker(T - \lambda) \neq \{0\}$, орбитата $Orb(T, x)$ тежи кон бесконечност: $\| T^n x \| = |\lambda|^n \| x \| = r^n \| x \| \to \infty$ кога $n \to \infty$.

Теорема 6. Ако $\mathcal{X}$ е Банахов простор (не задолжително рефлексивен) и за $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ постои нормализирана слаба нула низа $(x_n)_{n \geq 1}$ со особина: за секој $k \geq 1$ постои λ_k така што $\|T^k x_n\| \to \lambda_k$ кога $n \to \infty$, тогаш за секоја низа позитивни броеви $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ таква што $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < +\infty$, во секоја топка од просторот со радиус строго поголем од $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ постои вектор $y \in \mathcal{X}$ за кој $\|T^n y\| \geq \alpha_n \lambda_n / 2$, за секој $n \geq 1$. Ако притоа $\alpha_n \lambda_n \to \infty$ кога $n \to \infty$, тогаш во просторот постои густо множество вектори чии орбити тежат кон бесконечност. ■

Доказот на теорема 6 се спроведува на сосема истиот начин како оној на теорема 3, само наместо низата r^n на соодветното место ќе стои λ_n.

За крај, како илустрација на предходните резултати ќе дадеме уште еден едноставен пример на оперетор. Бидејќи истиот е модификација на едни од наједноставните примери на хиперциклични оператори што му се познати на авторот, заради комплетност во теорема 7.B.(c) ќе биде покажано и ова негово својство. Операторот $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ се нарекува *хиперцикличен оператор* ако постои вектор $x \in \mathcal{X}$ таков што $Orb(T, x)$ е густа во целиот простор, ваквиот вектор уште се нарекува *хиперцикличен вектор* за операторот T. Да напомeнеме дека ако T е хиперцикличен оператор, тогаш множеството од сите хиперциклични вектори е густо G_δ множество во просторот ([1], гл.III , §5). За подетални информации за хиперцикличноста читателот се упатува на [1], [2], [4]-[8].

Пример 7. Го разгледуваме Банаховиот простор c_0 од сите нула низи од комплексни броеви $x=(x_k)_{k\geq 0}$ со супремум нормата $\|x\|_\infty = \sup_{k\geq 0}|x_k|$ и, за $1\leq p<\infty$ просторите $\ell^p(\mathbb{N}_0)$ од сите низи комплексни броеви $x=(x_k)_{k\geq 0}$ такви што $\sum_{k=0}^{\infty}|x_k|^p<\infty$, со ℓ^p – нормата $\|x\|_p = (\sum_{k=0}^{\infty}|x_k|^p<\infty)^{1/p}$. Нека $\{e_k : k\geq 0\}$ е заедничката канонска база за овие простори.

За дадени $r>0$ и низа $w=(w_k)_{k\geq 1}$ во кружницата $\{\lambda\in\mathbb{C} : |\lambda| = r\}$ дефинираме тежинско поместување наназад T_w со

$$T_w e_0 = 0 \quad \text{и} \quad T_w e_k = w_k e_{k-1} \text{ за } k\geq 1 . \tag{1}$$

Бидејќи низата $w=(w_k)_{k\geq 1}$ е ограничена $T_w\in\mathcal{B}(\ell^p(\mathbb{N}_0))$, $T_w\in\mathcal{B}(c_0)$ и притоа $\|T_w\|\leq r$. Од друга страна, за дадено $n\geq 1$

$$T_w{}^n e_k = \begin{cases} 0 & \text{, ако } \ k<n \\ w_k w_{k-1}\ldots w_{k-n+1}e_{k-n} & \text{, ако } k\geq n \end{cases} , \tag{2}$$

од каде следи дека

$$\left\|T_w{}^n e_k\right\|_p = | w_k w_{k-1}\ldots . w_{k-n+1}| = \left\|T_w{}^n e_k\right\|_\infty = r^n \text{ за секој } k\geq n ,$$

што заедно со $\|T_w\|\leq r$ и дефиницијата на норма на оператор, имплицира дека $\left\|T_w{}^n\right\| = r^n$ за секој $n\geq 1$, и последователно

$$r(T_w) = \lim_{n\to\infty}\left\|T_w{}^n\right\|^{1/n} = r \text{ и } \sigma(T_w)\subseteq\{\lambda\in\mathbb{C} : |\lambda| = r\} .$$

Ако $\lambda\in\mathbb{C}$ е таков што $|\lambda| = r$, тогаш

$$x_\lambda = e_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(w_1 w_2 \ldots w_k)^{-1}\lambda^k e_k \in \ell^p(\mathbb{N}_0)\subseteq c_0$$

и притоа $T_w x_\lambda = \lambda x_\lambda$. Бидејќи $x_\lambda\neq 0$, последното имплицира дека $\lambda\in\sigma_p(T)$.

Ако $\lambda\in\mathbb{C}$ е таков што $|\lambda| = r$, и векторот $x=\sum_{k=1}^{\infty}x_k e_k$ е таков што $T_w x = \lambda x$, тогаш $w_k x_k = \lambda x_{k-1}$ за секој $k\geq 1$ што, поради изборот на низата $w=(w_k)_{k\geq 1}$, ќе имплицира $|x_k| = |x_{k-1}|$ за секој $k\geq 1$. Ова, при $x\in\ell^p(\mathbb{N}_0)$ или $x\in\ell^p(c_0)$ (поради $\sum_{k=0}^{\infty}|x_k|^p<\infty$, односно $x_k\to 0$ кога $k\to\infty$) е можно само доколку $x_k = 0$ за секој $k\geq 1$, т.е. $x=0$. Од тука следи дека кружницата $\{\lambda\in\mathbb{C} : |\lambda| = r\}$ не содржи сопствени вредности за T_w.

Сумирајќи ги предходните резултати ја добиваме следната

ПРОПОЗИЦИЈА 7.А. Тежинското поместување наназад T_w дефинирано со (1) е ограничен линеарен оператор на просторите c_0 и $\ell^p(\mathbb{N}_0)$, $1 \le p < \infty$ и притоа:

(a) за секој $n \ge 1$, $\|T_w{}^n\| = r^n$ и $r(T_w) = \lim_{n\to\infty} \|T_w{}^n\|^{1/n} = r$;

(b) $\sigma_p(T_w) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < r\}$ и $\sigma(T_w) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \le r\} = \sigma_a(T_w)$. ■

ТЕОРЕМА 7.В. Ако $r > 1$ и $1 < p < \infty$, тогаш за тежинското поместување наназад T_w дефинирано со (1) во секој од просторите c_0 и $\ell^p(\mathbb{N}_0)$ постои

(a) густо множество вектори x такви што $\|T_w{}^n x\| \to \infty$ кога $n \to \infty$;

(b) густо множество вектори x такви што $\|T_w{}^n x\| \to 0$ кога $n \to \infty$;

(c) густо G_δ множество вектори x такви што $Orb(T_w, x)$ е густа во целиот простор.

ДОКАЗ. (a) Бидејќи секој од просторите $\ell^p(\mathbb{N}_0)$, $1 < p < \infty$ е рефлексивен Банахов простор, точноста на тврдењето за овие простори следи од предходната пропозиција и теорема 3, односно последица 5.

За да се покаже тврдењето за просторот c_0 нека $(x^{(n)})_{n\ge1}$ е низата дефинирана со $x^{(n)} = \sum_{k=n}^{\infty} e_k$. Тогаш за секој $n \ge 1$, $\|x^{(n)}\|_\infty = 1$ и за секој линеарен функционал

$$a = (a_k)_{k\ge0} \in \ell^1 = c_0{}^*,\ |a(x_n)| = \left|\sum_{k=n}^{\infty} a_k\right| \le \sum_{k=n}^{\infty} |a_k| \to 0 \text{ кога } n \to \infty,$$

што значи дека $(x^{(n)})_{n\ge1}$ е слаба нула низа во c_0 . Натаму,

$$T_w{}^m x^{(n)} = \sum_{k=n}^{\infty} w_k w_{k-1} \dots w_{k-m+1} e_{k-m},$$

и последователно

$$\left\|T_w{}^m x^{(n)}\right\|_\infty = \sup\{|\, w_k w_{k-1} \dots w_{k-m+1} \,| : k \ge n\} = r^m \text{ за секои } n \ge m \ge 1.$$

Тогаш за секој $m \ge 1$ постои

$$\lambda_m = \lim_{n\to\infty} \left\|T_w{}^m x^{(n)}\right\|_\infty = r^m .$$

Дефинирајќи сега низа $(\alpha_n)_{n\ge1}$ како во доказот на последица 5, точноста на тврдењето за просторот c_0 ќе следи од теорема 6.

(b) Нека $\mathcal{L} = span\{e_k : k \ge 0\}$ е на густиот векторски потпростор c_0 и $\ell^p(\mathbb{N}_0)$ генериран од векторите $\{e_k : k \ge 0\}$, т.е. векторскиот потпростор од сите конечни линеарни комбинации овие вектори. Бидејќи за секој $y \in \mathcal{L}$ постои $n(y) \in \mathbb{N}_0$ така што $y \in span\{e_k : 0 \le k \le n(y)\}$, според (2) $\|T_w{}^n x\|_\infty = 0$ за секој $n \ge n(y)$, и последователно $\|T_w{}^n x\|_\infty \to 0$ кога $n \to \infty$.

(c) За да се покажи дека T_w е хиперцикличен оператор нека $S_{1/w}$ е тежинското поместување на c_0 и $\ell^p(\mathbb{N}_0)$ дефинирано со: $S_{1/w} e_k = w_{k+1}^{-1} e_{k+1}$, $k \ge 0$. Тогаш

i) $S_{1/w} \in \mathcal{B}(\ell^p(\mathbb{N}_0))$, $S_{1/w} \in \mathcal{B}(c_0)$ и

$$\left\|S_{1/w}{}^n\right\| = \sup_{k\ge0} |(w_k w_{k+1} \dots w_{k+n-1})^{-1}| = 1/r^n \text{, за секој } n \ge 1,$$

и последователно, за секој вектор y од овие простори $Orb(S_{1/w}, y)$ тежи кон 0.

ii) $T_w S_{1/w} e_k = T_w(w_{k+1}^{-1} e_{k+1}) = w_{k+1} w_{k+1}^{-1} e_k = e_k$ за секој $k \ge 0$, што имплицира дека $T_w S_{1/w} = I$, каде I е идентичниот оператор.

Сега го применуваме следниот резултат ([2], пропозиција 2.2.) за $X_0 = Y_0 = \mathcal{L}$.

Критериум за хиперцикличност. Ако $\mathcal{X}$ е сепарабилен Банахов простор, $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ и постои строго растечка низа природни броеви $(n_j)_{j\ge1}$ $(n_j)_{j\ge1}$ за која

(a) постои густо множество X_0 во $\mathcal{X}$ така што $\|T^{n_j} x\| \to 0$ кога $j \to \infty$ за секој $x \in X_0$;

(b) постои густо множество Y_0 во $\mathcal{X}$ и пресликување $S : Y_0 \to Y_0$ (не задолжително линеарно и не задолжително непрекинато) така што

$$\|S^{n_j} y\| \to 0 \text{ кога } j \to \infty \text{ за секој } y \in Y_0 \text{ и } T|_{Y_0} \circ S = I|_{Y_0};$$

тогаш T е хиперцикличен оператор. ■

Да напоменеме уште дека тврдењата (b) и (c) од предходната теорема важат и за просторот ℓ^1, но теорема 6 не е применлива на овој простор. Според теорема на *Schur* ([3],V.5.2 и [9], стр.348), за секоја низа $(x_n)_{n\geq 1}$ во ℓ^1 условите „$x_n \to 0(wk)$ " и „$\|x_n\| \to 0$ кога $n \to \infty$", се еквивалентни. Ова значи дека во ℓ^1 во однос ℓ^1– нормата не постои низа $(x_n)_{n\geq 1}$ така што $\|x_n\| = 1$, $n \geq 1$ а притоа $x_n \to 0(wk)$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] B. Beauzamy: *Introduction to Operator Theory and Invariant Subspaces*, Nort-Holand, New York, 1988;

[2] K. C. Chan; J. H. Shapiro: *The Cyclic Behaviour of Translation Operators on Hilbert Spaces of Entire Functions*, Indiana Math.J., 40 (1991) pp.1421-1449;

[3] J. B. Conway: *A Course in Functional Analysis,* Springer-Verlag , New York, 1985;

[4] N. S. Feldman: *Hypercyclicity and Supercyclicity for Invertable Bilateral Weighted Shifts*, Proc. Amer. Math. Soc. 131 (2003) pp 479-485;

[5] N. S. Feldman: *Linear Chaos?*, preprint;

[6] S. Grivaux: *Construction of operators with prescribed behaviour*, Archiv der Mat. 81 (2003) pp 291-299;

[7] S. Grivaux: *Sums of hypercyclic operators*, J.Func.Anal. 202 (2003) pp 486-503;

[8] S. Grivaux: *Hypercyclic operators with infinite dimensional closed subspaces of periodic points*, to appear in Rev.Mat. Complut. .

[9] S. Kurepa: *Funkcionalna analiza, elementi teorije operatora*, II izd. Školska knjiga, Zagreb, 1990.

e-mail: sonjamanchevska@yahoo.com
sonjamanchevska@uklo.edu.com

8 МСДР 2004, (141 - 148)
Зборник на трудови
30.09.- 03.10.2004 год.
Охрид, Македонија

ISBN 9989 – 630 – 49 – 6
COBISS.MK – ID 61901322

КОНЕЧНИ МАТЕМАТИЧКИ ИЗБОРНИ НИЗИ

Драган Димитровски, Јорданка Митевска
Природно–математички факултет–Скопје

ВОВЕД

Областа на правните науки е една од областите во кои математиката се применува многу малку. Но, практиката покажува дека без примена на математиката дури и во оваа област може да се направат грешки. Тоа е случај со изборните методи, особено при Донтовиот, Сен-Лаговиот и модифицираниот метод, каде се користат конечните математички низи.

Во овој труд, без да навлегуваме во прашањата на демократичноста или правната легитимност на изборните резултати, ќе дадеме математички доказ на формулата за пресметување на изборните резултати по Донтовиот метод, што скоро автоматски подразбира и анологни формули и за Сен-Лаговиот и модифицираниот метод, за која формула сметаме дека не е позната и со која се објаснуваат многу недостатоци и нелогичности на Донтовиот метод кои се јавуваат во изборната пракса. Прашањето е особено важно бидејќи Донтовиот изборен метод се користи во голем број држави.

ФОРМУЛА ЗА МНОЗИНСКИ ИЗБОРЕН СИСТЕМ

Ги воведуваме следните означувања за основните изборни големини:

M - вкупна маса на важечки изборни ливчиња;

m_i - број на гласови добиени за i-тата партија или поединец;

p_i - број на пратеници кои ги добива секоја партија врз основа на m_i;

p - броен состав на Парламентот (константа);

n - број на релевантни партии учеснички во изборите.

Основен изборен проблем (во математичка смисла) е да се определи изборната функција

$$p_i = p_i(m_i) \tag{1}$$

која го дава бројот на пратеници избрани според соодветен изборен метод врз основа на гласовите. Таа е различна според различни изборни методи и постапки.

Основните изборни релации се исти во секој метод:

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_n = M \tag{2}$$

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = p \tag{3}$$

Ако е $m_1 > m_2 > \ldots > m_n \geq 0$, тогаш е природно да важи $p_1 > p_2 > \ldots > p_n \geq 1$.

Појдовна изборна хипотеза за мнозинскиот систем е бројот на избраните пратеници да е право пропорционален на добиените избирачки маси. Имено, потребно е да важи релацијата

$$\frac{m_1}{p_1} = \frac{m_2}{p_2} = \frac{m_3}{p_3} = \ldots = \frac{m_n}{p_n} = \frac{M}{p} \tag{4}$$

или

$$\frac{p_i}{m_i} = \frac{p}{M} \quad (i = 1,2,\ldots,n)$$

од каде ја добиваме **основната формула за бројот на пратениците по мнозинскиот изборен систем:**

$$p_i = \frac{p}{M} m_i, \; i = 1,2,\ldots,n \tag{5}$$

во која бројот

$$k = \frac{M}{p} = \frac{\text{вкупна важечка избирачка маса}}{\text{вкупен број пратеници во изборното тело}} =$$

$$= \text{број на избирачи потребни за еден пратеник}$$

Бројот κ е **изборен коефициент.**

Добри страни на мнозинскиот изборен метод се:

- потполно еднаков број гласови за едно пратеничко место (демократичност)
- еднаква примена и изборни предвидувања (транспарентност)
- уважување и на малите партии (рамноправност)

Слабости на мнозинскиот изборен метод се:

- голем број уситнети партии во парламентот, што отежнува стекнување на мнозинство и изгласување на законите;
- тешкотии при формирање на коалиции потребни за брза и ефикасна работа на парламентот, а особено при донесување на уставни закони за кои е потребно двотретинско мнозинство;
- поради намалена ефикасност, зголемен број на парламентарни кризи, што значи општествена нестабилност.

ДОНТОВ ИЗБОРЕН МЕТОД

Мнозинскиот изборен систем е без сомнение математички и демократски најкоректен. Може да се докаже дека при него отстапувањата од срединатa се минимални и тоа е единствен систем со оваа особина. Меѓутоа, потребата за компромиси, неопходни во животот, често пати бара напуштање на овој систем. Затоа се предложени други изборни системи од кои најмногу се применува ДОНТОВИОТ МЕТОД.

Суштината на овој метод се состои во следното:

- Изборните маси $m_1, m_2, \dots, m_n$, подредени по големина, ги делиме со природни броеви и така ги добиваме конечните низи

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{m_1}{1}, \frac{m_1}{2}, \frac{m_1}{3}, \frac{m_1}{4}, \quad \dots \quad, \frac{\boldsymbol{m_1}}{\boldsymbol{p_1}}, \quad \dots \quad, \frac{m_1}{N} \\
\frac{m_2}{1}, \frac{m_2}{2}, \frac{m_2}{3}, \dots \quad, \frac{\boldsymbol{m_2}}{\boldsymbol{p_2}}, \quad \dots \quad, \frac{m_2}{N} \\
\frac{m_3}{1}, \frac{m_3}{2}, \ \dots \ , \frac{\boldsymbol{m_3}}{\boldsymbol{p_3}}, \quad \dots \quad, \frac{m_3}{N} \\
\dots \\
\frac{m_n}{1}, \dots, \frac{\boldsymbol{m_n}}{\boldsymbol{p_n}}, \quad \dots \quad, \frac{m_n}{N}
\end{array}\right\} \tag{6}$$

Од овие низи ги избираме првите p_i најголеми количници, p_1 за m_1, p_2 за m_2, итн. p_n за m_n, така што да важи (3). Секој од овие количници тогаш определува по едно пратеничко место.

Овој метод е очигледно конструиран интуитивно. Не сме сретнале математички доказ и формула, кои би ја потврдиле неговата коректност и демократичност.

ХАРМОНИСКИ СУМИ

Математизацијата на изборниот проблем може да се изведе ако Донтовиот триаголник од шемата (6) се претвори во формула.

Тоа може да се направи само ако елементите - количници ги собереме, за статистика или аналитичка обработка. Така добиваме n конечни суми

$$\begin{aligned}&\frac{m_i}{1}+\frac{m_i}{2}+\frac{m_i}{3}+\ldots+\frac{m_i}{p_i}+\ldots+\frac{m_i}{n}=\\&=m_i\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{p_i}+\ldots+\frac{1}{n}\right)=m_i\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k},\ (i=1,2,\ldots,n)\end{aligned}\tag{7}$$

кои ги викаме **конечни хармониски суми**. Тоа се суми кои растат многу полека, при растење на бројот на членовите, што во математиката претставува **спора дивергенција**. За овие низи како единствено средство за сумирање служи теоремата на Ојлер:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n\right)=C=\text{Euler}-\text{ова константа}\approx 0{,}56\,. \tag{8}$$

Ако ја примениме оваа формула врз конечните низи тогаш важи

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}=\ln n+C+\varepsilon_n\,.$$

Бидејќи ε_n зависи од n и не може да се оцени однапред, следува дека не може да се оцени ниту горната сума. Спората дивергенција на горната сума може да се согледа низ следниот пример.

Да најдеме колку членови n треба да собереме за да имаме сума еднаква на 20, што определува 20 пратеници:

$$\underbrace{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}}_{=20,\ n=?}\approx\ln n+C$$

Ако земеме $n=1\ 000\ 000\ 000=10^9$ и логаритмираме имаме

$$\ln n=\ln 10^9=9\cdot\ln 10=9\cdot 2{,}30+0{,}56\approx 21{,}2\,.$$

Значи за да добиеме сума 20 (т.е.20 пратеници) треба да собереме една милијарда членови во горната низа. Бидејќи во Македонија мнозинство се определува со над 60 пратеници, тоа значи дека треба да собереме над 3 милијарди дропки, што е многу и за компјутер, а не за рачно собирање при изборните комисии.

Затоа Донтовиот метод даден со дефиницијата (6) е особено тежок за прогнозирање и е нетранспарентен за примена.

МАТЕМАТИЧКИ ДОКАЗ НА ДОНТОВИОТ СИСТЕМ. МЕТОД НА РЕЦИПРОЧНИ МОМЕНТИ

Бидејќи собирањето во шемата е тешко изводливо, ќе го примениме методот на моменти, што особено се користи во физиката, и статистиката. Има многу моменти: на сила, на инерција, на работа, на количество движење, импулс на сила, кинетичка енергија. Ние ќе примениме момент во вид на јачина на полето, $E = \frac{f_i}{r_i}$, т.е. во вид на реципрочни вредности на Донтовите количници $\frac{n}{m_i}$ во (6). Имено ќе ги разгледуваме реципрочните низи

$$\frac{1}{m_i}, \frac{2}{m_i}, \frac{3}{m_i}, \ldots, \frac{p_i}{m_i}, \ldots, \frac{N}{m_i}$$

кои се сумираат лесно, т.е.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{m_i} = \frac{1}{m_i} \sum_{k=1}^{n} (1 + 2 + 3 + \ldots + k) = \frac{1}{m_i} \cdot \frac{n(n+1)}{2}. \qquad (9)$$

Причината за ваква трансформација на Донтовите количници е едноставна и се состои во следното:

На максимумот на Донтовите количници соответствува и максимална сума

$$\max \frac{m_i}{p_j} \leftrightarrow \max \sum_{i,j} \frac{m_i}{p_j}$$

и реципрочно, на минималните Донтови количници соответствува минимална сума

$$\min \frac{p_i}{m_j} \leftrightarrow \min \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{m_j} \sum_{i=1}^{j} p_i \qquad (10)$$

ИЗБОРНА ФУНКЦИЈА

Формираме збир од реципрочните вредности на членовите од Донтовата шема

$$F(m_j, p_i) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{m_j} \sum_{i=1}^{j} p_i \qquad (11)$$

кој ќе го наречеме **изборна функција**. Таа зависи од избирачките маси m_j, од пратениците p_i и бројот на партиите што учествуваат во изборите.

Ако m_j и p_i се непрекинати променливи, тогаш проблемот на наоѓање на $\min F(m_j, p_i)$ се сведува на примена на апаратот на математичката анализа: *определување условни екстреми на* $F(m_j, p_i)$ *при условите* (2) и (3).

ЛАГРАНЖОВА ФУНКЦИЈА НА УСЛОВНИ ЕКСТРЕМИ

Со (10), (2) и (3) формираме Лагранжова функција со параметри λ и μ:

$$\Phi(m_i, p_i, \lambda, \mu) = F(m_i, p_i) + \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} p_i - p\right) + \mu\left(\sum_{i=1}^{n} m_i - M\right)$$

ЛАГРАНЖОВИ ФОРМУЛИ ЗА УСЛОВЕН ЕКСТРЕМ

Од анализата е познато дека во случај на екстрем (max или min) за (11) ќе важи:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p_i} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial m_i} = 0 \qquad (2n \text{ равенки})$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \mu} = 0 \tag{13}$$

ДОНТОВИ РАВЕНКИ И НИВНО РЕШЕНИЕ

Од (9), (11), (12) и (13) добиваме:

$$\left.\begin{aligned}
&\Phi = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i^2 + p_i}{2m_i} + \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} p_i - p\right) + \mu\left(\sum_{i=1}^{n} m_i - M\right)\\
&\frac{\partial \Phi}{\partial p_i} = \frac{2p_i + 1}{2m_i} + \lambda \cdot 1 = 0\\
&\frac{\partial \Phi}{\partial m_i} = -\frac{p_i^2 + p_i}{2m_i^2} + \mu \cdot 1 = 0\\
&\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = p_1 + p_2 + \ldots + p_n - p = 0\\
&\frac{\partial \Phi}{\partial \mu} = m_1 + m_2 + \ldots + m_n - M = 0
\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Од овие равенки наоѓаме:

$$p_i = -\lambda m_i - \frac{1}{2}, \; i = 1,2,\ldots,n \tag{15}$$

$$\lambda = -\frac{p + \frac{n}{2}}{M} \tag{16}$$

од кои ја добиваме Донтовата формула за основниот изборен проблем (1):

$$\boxed{p_i = m_i \cdot \frac{p}{M} + \frac{1}{2}\left(n \cdot \frac{m_i}{M} - 1\right), \; i = 1,2,\dots,n\,.} \tag{17}$$

Од формулата (17) можни се следните заклучоци:

1. Донтовиот број на пратеници е еднаков на збирот од множинскиот број пратеници $\frac{m_i p}{M}$ и собирокот

$$\Delta = \frac{1}{2}\left(n \cdot \frac{m_i}{M} - 1\right) \tag{18}$$

т.е.

$$p_{i(\text{по Донт})} = p_{i(\text{по множ.})} + \Delta$$

2. Разликата $\Delta = p_{i(\text{по Донт})} - p_{i(\text{по множ.})}$ е толку поголема колку е поголем бројот m_i и бројот на партиите n.

3. Партиите со голем број пратеници по Донт добиваат уште поголем број пратеници.

4. ИЗБОРЕН ПРЕЛОМ. Не постои разлика помеѓу Донтовиот и множинскиот метод ако

$$\Delta = \frac{1}{2}\left(n \cdot \frac{m_i}{M} - 1\right) = 0$$

од каде добиваме

$$m_i = \frac{M}{n}\,.$$

(Овој број во Р.Македонија на изборите во 2002 година изнесуваше 40 000 гласачи).

5. Ако партијата има избирачи над бројот $\frac{M}{n}$, таа автоматски добива Δ пратеници повеќе. Партиите што имаат избирачи околу бројот $\frac{M}{n}$, со Донтовиот систем не добиваат повеќе пратеници, т.е.

тие добиваат еднаков број пратеници и по Донтовиот и по мнозинскиот систем. Партиите за кои бројот на избирачи е под прагот $\frac{M}{n}$ имаат негативна разлика Δ и тие партии губат Δ пратеници по Донтовиот во однос на мнозинскиот систем.

6. Големите партии добиваат уште повеќе пратеници, а малите ги губат и онака малиот број места. Според тоа најмалите партии се потполно уништени.

7. Бидејќи масата на важечки гласови е M и таа е фиксна, следува дека големите партии добиваат извесен број пратеници на сметка на малите партии и тоа точно од нивните гласови (така во Македонија, 4 победнички партии ги имаат превземено гласовите од 12 мали партии и така некои партии добиваат и по 20% повеќе пратенички места).

8. Донтовиот метод врши еден вид аритметичко присвојување на гласовите.

9. Донтовиот метод го намалува бројот на парламентарните партии.

Останува на правниците да ја оценат демократичноста на овој изборен метод.

Се остава широко поле за дискусија за успешноста на Донтовата формула во старите и големи европски демократии и во малите и зависни држави.

Исто така, потребна е посебна анализа и за зголемувањето (мултиплицирањето) на грешката Δ при поделба на државата на изборни единици (6 во Р. Македонија) или по временски зони (8 во Русија).

Овде уште еднаш ја препознаваме инаку познатата релативност на демократијата - нема идеално праведен изборен метод и истовремено ефикасна државна власт.