# $9^{TH}$ European Mathematical Cup

$12^{th}$ December 2020

Junior Category

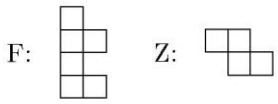
MLADI NADARENI MATEMATIČARI
**Marin Getaldić**

1. Нека $ABC$ е остроаголен триаголник. Нека $D$ и $E$ се средините на страните $AB$ и $AC$, соодветно. Нека $F$ е точка таква што $D$ е средина на отсечката $EF$. Нека $\Gamma$ е опишаната кружница околу триаголникот $FDB$. Нека $G$ е точка на отсечката $CD$ таква што средината на отсечката $BG$ припаѓа на $\Gamma$. Нека $H$ е втората пресечна точка на $FC$ и $\Gamma$. Докажи дека четириаголникот $BHGC$ е цикличен.

2. За природниот број $k \geq 3$ ќе велиме дека е *убав* ако постојат природен број $n$ и природни броеви $d_1 < d_2 < \ldots < d_k$ такви што:
   - $d_{j+2} = d_{j+1} + d_j$ за секој $j$ таков што $1 \leq j \leq k-2$,
   - $d_1, d_2, \ldots, d_k$ се делители на $n$,
   - Кој било друг делител на $n$ или е помал од $d_1$ или е поголем од $d_k$.

   Определи ги сите убави броеви.

3. Дадени се фигурите $F$ и $Z$ кои се составени од шест и четири единечни полиња, соодветно (цртеж десно). Определи ги сите природни броеви $n$ за кои квадратна $n \times n$ табла составена од $n^2$ единечни полиња може без празнини да се покрие со помош на овие два типа фигури (дозволени се вртења и превртувања на фигурите) така што фигурите не се преклопуваат и ниту една фигура не покрива површина надвор од $n \times n$ таблата.




4. Нека $a, b, c$ се позитивни реални броеви такви што $ab + bc + ca = a + b + c$. Докажи го неравенството

$$\sqrt{a+\tfrac{b}{c}} + \sqrt{b+\tfrac{c}{a}} + \sqrt{c+\tfrac{a}{b}} \leq \sqrt{2}\min\{\tfrac{a}{b}+\tfrac{b}{c}+\tfrac{c}{a}, \tfrac{b}{a}+\tfrac{c}{b}+\tfrac{a}{c}\}.$$

Време за работа: 240 минути.
Секоја задача се вреднува со 10 поени.
Не е дозволено користење на калкулатори и други технички средства, со исклучок на линијар и шестар.

# $9^{TH}$ European Mathematical Cup

$12^{th}$ December 2020

Senior Category

MLADI NADARENI MATEMATIČARI
Marin Getaldić

1. Даден е паралелограм $ABCD$ таков што $\overline{AB} > \overline{BC}$. Нека $O$ е точка на правата $CD$ таква што $\overline{OB} = \overline{OD}$. Нека $\omega$ е кружница со центар $O$ и радиус $\overline{OC}$. Ако $T$ е втората пресечна точка на $\omega$ и $CD$, докажи дека $AT, BO$ и $\omega$ се сечат во една точка.

2. Нека $n$ и $k$ се природни броеви. Подредената $n-$торка $(a_1, a_2, ..., a_n)$ ја нарекуваме пермутација на броевите $1, 2, ..., n$ ако во неа секој елемент на множеството $\{1, 2, ..., n\}$ се среќава точно еднаш. За пермутацијата $(p_1, p_2, ..., p_n)$ на броевите $1, 2, ..., n$ подредената $n-$торка
$$(p_1 + p_{1+k}, p_2 + p_{2+k}, ..., p_n + p_{n+k}),$$
каде индексите се земаат по модул $n$, ја нарекуваме нејзина $k-$мутација. Определи ги сите парови $(n, k)$ такви што секои две различни пермутации имаат различни $k-$мутации.
*Забелешка*. На пример, за $(n, k) = (4, 2)$, 2-мутацијата на пермутацијата $(1, 2, 4, 3)$ е $(1+4, 2+3, 4+1, 3+2) = (5, 5, 5, 5)$.

3. Нека $p$ е прост број. Тодор и Ангел играат игра. Тодор на таблата запишува позитивен број $X$ и на Ангел му дава низа природни броеви $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Ангел сега прави низа потези. $n-$тиот потез е:
Бројот $Y$ кој во моментот е запишан на таблата се заменува
еден од броевите $Y + a_n$ или $Ya_n$.
Ангел победува ако во даден момент бројот кој е запишан на таблата е делив со $p$. Определи дали Ангел може да победи, без оглед на изборот на Тодор ако:
а) $p = 10^9 + 7$,
б) $p = 10^9 + 9$.
*Забелешка.* Броевите $10^9 + 7$ и $10^9 + 9$ се прости.

4. Со $\mathbb{R}^+$ го означуваме множеството позитивни реални броеви. Определи ги сите функции $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ такви што
$$xf(x+y) + f(xf(y)+1) = f(xf(x)),$$
за секои $x, y \in \mathbb{R}^+$.

Време за работа: 240 минути.
Секоја задача се вреднува со 10 поени.
Не е дозволено користење на калкулатори и други технички средства, со исклучок на линијар и шестар.