

ФУНКЦИИТЕ $[x]$ И $\{x\}$

Во оваа статија ќе ги разгледаме функциите цел дел и дробен дел, кои имаат голема примена во теоријата на броеви и воопшто во математиката.

Дефиниција 1. Функцијата $[\cdot]: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{Z}$ определена со: ако x е меѓу последователните цели броеви k и $k+1$, т.е. $k \leq x < k+1$, тогаш $[x] = k$ ја нарекуваме *цел дел од x* .

Пример 1. Ако $\text{NZD}(a, 4) = 1$, тогаш $[\frac{a}{4}] + [\frac{2a}{4}] + [\frac{3a}{4}] = \frac{3a-3}{2}$. Докажи!

Решение. Од условот во задачата имаме $a = 4q + 1$ или $a = 4q + 3$. Во првиот случај

$$[\frac{a}{4}] + [\frac{2a}{4}] + [\frac{3a}{4}] = q + 2q + 3q = 6q = \frac{3a-3}{2}.$$

Во вториот случај

$$[\frac{a}{4}] + [\frac{2a}{4}] + [\frac{3a}{4}] = q + (2q + 1) + (3q + 2) = 6q + 3 = \frac{3a-3}{2}. \blacksquare$$

Пример 2. Докажи дека $[\frac{4}{p}] + [\frac{6}{p}] + \dots + [\frac{2(p-1)}{p}] = [\frac{p+1}{4}]$, каде p е непарен прост број.

Решение. За $p = 3$ точноста на тврдењето е очигледна. Ако $p > 3$, тогаш $p = 4n + 1$ или $p = 4n + 3$. Бидејќи $[\frac{4}{p}] = 0$ и $[\frac{2(p-1)}{p}] = [1 + \frac{p-2}{p}] = 1$, добиваме дека во збирот од левата страна имаме само нули и единици, при што собираме $\frac{p-1}{2}$ броеви.

За да го определиме бројот на нулите од левата страна доволно е во собирокот од облик $[\frac{2 \cdot 2x}{p}] = [\frac{4x}{p}]$ да ставиме $4x < p$ или $x < \frac{p}{4}$. Значи, $x = [\frac{p}{4}]$. Според тоа, бројот на собраните единици е $\frac{p-1}{2} - [\frac{p}{4}]$, т.е. n ако $p = 4n + 1$ или $n + 1$ ако $p = 4n + 3$. Но, $[\frac{p+1}{4}]$ е еднаков на n ако $p = 4n + 1$ или $n + 1$ за $p = 4n + 3$. ■

Дефиниција 2. Функцијата $\{\cdot\}: \mathbf{R} \rightarrow [0, 1)$ определена со $\{x\} = x - [x]$ ја нарекуваме *дробен дел од x* .

Пример 3. Докажи дека сите броеви $\{10^n \sqrt{2}\}$, $n = 0, 1, \dots$ се различни меѓу себе.

Решение. Нека $\{10^p \sqrt{2}\} = \{10^q \sqrt{2}\}$, $p \neq q$ и нека $\sqrt{2} = 1, d_1 d_2 d_3 \dots$ е децималниот запис на бројот $\sqrt{2}$. Од претходното равенство следува $d_{n+p} = d_{n+q}$, за $n=1, 2, 3, \dots$. Според тоа, $\sqrt{2}$ има мешовит периодичен децимален запис со периода $|p-q|$, што не е можно, бидејќи $\sqrt{2}$ е ирационален број. ■

Теорема 1. Нека x и y се реални броеви. Тогаш

а) $[x] \leq x < [x] + 1$, $x - 1 < [x] \leq x$, $0 \leq x - [x] < 1$

б) $[x] + [-x] = \begin{cases} 0, & \text{ако } x \text{ е цел број,} \\ -1, & \text{ако } x \text{ не е цел број.} \end{cases}$

в) $[x + m] = [x] + m$, ако m е цел број.

г) $[x] + [y] \leq [x + y] \leq [x] + [y] + 1$.

д) $[x - y] \leq [x] - [y] \leq [x - y] + 1$.

ѓ) $[x][y] \leq [xy] \leq [x][y] + [x] + [y]$, ако $x, y \geq 0$.

е) $[\frac{[x]}{m}] = [\frac{x}{m}]$, ако m е природен број.

ж) $[\sqrt{[x]}] = [\sqrt{x}]$, ако $x \geq 0$.

Доказ. а) Секој дел од тврдењето следува од дефиниција 1.

б) Ако x е цел број, тогаш $[-x] = -[x]$. Ако x не е цел број, тогаш од $[-x] = y$ следува $-y - 1 < x < -y$ или $[x] = -y - 1$ и $[-x] = -[x] - 1$.

в) Од а) следува дека $x + m - 1 < [x + m] \leq x + m$ и $x + m - 1 < [x] + m \leq x + m$. Бидејќи $[x + m]$ и $[x] + m$ се цели броеви, од претходните две неравенства следува $[x + m] = [x] + m$.

г) Нека $x = n + \alpha$, $y = m + \beta$, каде $m, n \in \mathbb{Z}$ и $0 \leq \alpha, \beta < 1$. Тогаш

$$\begin{aligned} [x] + [y] &= m + n \leq [n + \alpha + m + \beta] = [x + y] \\ &= m + n + [\alpha + \beta] \leq n + m + 1 = [x] + [y] + 1 \end{aligned}$$

д) Според г) имаме

$$[x - y] + [y] \leq [(x - y) + y] \leq [x - y] + [y] + 1,$$

т.е.

$$[x - y] \leq [x] - [y] \leq [x - y] + 1.$$

ѓ) Според а) имаме $[x][y] \leq xy < ([x] + 1)([y] + 1)$. Значи,

$$[x][y] \leq [xy] \leq ([x] + 1)([y] + 1) - 1 = [x][y] + [x] + [y].$$

е) Нека $x = n + \alpha$, $n = qm + r$, $0 \leq \alpha < 1$, $0 \leq r < m - 1$. Имаме

$$[\frac{x}{m}] = [\frac{qm + r + \alpha}{m}] = q + [\frac{r + \alpha}{m}] = q. \quad (1)$$

Од друга страна, бидејќи $0 \leq r + \alpha < m$ добиваме

$$[\frac{[x]}{m}] = [\frac{n}{m}] = [q + \frac{r}{m}] = q. \quad (2)$$

Конечно, од (1) и (2) следува $[\frac{[x]}{m}] = [\frac{x}{m}]$.

ж) Бидејќи $x \geq 0$, x може да се запише во облик $x = n^2 + r + \{x\}$ каде n и r се ненегативни цели броеви, $0 \leq r \leq 2n$. Тогаш,

$$[\sqrt{[x]}] = [\sqrt{n^2 + r}] = [\sqrt{n^2 + r} - n + n] = n + [\sqrt{n^2 + r} - n] = n + [\frac{r}{\sqrt{n^2 + r} + n}] = n.$$

Слично,

$$[\sqrt{x}] = [\sqrt{n^2 + r + \{x\}} - n + n] = n + [\sqrt{n^2 + r + \{x\}} - n] = n + [\frac{r + \{x\}}{\sqrt{n^2 + r + \{x\}} + n}] = n$$

бидејќи $0 \leq r + \{x\} < 2n < \sqrt{n^2 + r + \{x\}} + n$. Значи, $[\sqrt{[x]}] = [\sqrt{x}]$. ■

Лема 1. За секој $x \in \mathbf{R}$ важи

$$[x + \frac{1}{2}] = [2x] - [x]. \quad (3)$$

Доказ. Секој реален број x може да се запише во облик $x = k + \alpha$ или $x = k + \frac{1}{2} + \alpha$ каде што $k \in \mathbf{Z}$ и $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$.

Ако $x = k + \alpha$, тогаш

$$[k + \alpha + \frac{1}{2}] = k; [2k + 2\alpha] = 2k; [k + \alpha] = k,$$

па затоа точно е равенството (3). Ако $x = k + \alpha + \frac{1}{2}$, тогаш

$$[k + \alpha + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}] = k + 1; [2k + 2\alpha + 1] = 2k + 1; [k + \alpha + \frac{1}{2}] = k,$$

па затоа точно е равенството (3). ■

Пример 4. Нека $n \in \mathbf{N}$. Пресметај го збирот

$$[\frac{n+1}{2}] + [\frac{n+2}{2^2}] + [\frac{n+2^2}{2^3}] + \dots + [\frac{n+2^k}{2^{k+1}}] + \dots$$

Решение. *Прв начин.* Од лема 1 следува

$$\begin{aligned} [\frac{n+1}{2}] + [\frac{n+2}{2^2}] + [\frac{n+2^2}{2^3}] + \dots + [\frac{n+2^k}{2^{k+1}}] + \dots &= [\frac{n}{2} + \frac{1}{2}] + [\frac{n}{4} + \frac{1}{2}] + \dots + [\frac{n}{2^{k+1}} + \frac{1}{2}] + \dots \\ &= [n] - [\frac{n}{2}] + [\frac{n}{2}] - [\frac{n}{4}] + \dots + [\frac{n}{2^k}] - [\frac{n}{2^{k+1}}] + \dots = n, \end{aligned}$$

бидејќи почнувајќи од $k = [\log_2 n] + 1$ сите собироци во разгледуваниот збир се еднакви на 0.

Втор начин. Нека $n = \overline{x_m x_{m-1} \dots x_1 x_0} = \sum_{k=0}^m 2^k x_k$, $x_i \in \{0, 1\}$

е запис на бројот n во бинарен броен систем. Тогаш

$$[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}] = \begin{cases} \overline{x_m x_{m-1} \dots x_{k+1}} + x_k, & \text{ако } k > m, \\ x_m, & \text{ако } k = m, \\ 0, & \text{ако } k < m. \end{cases}$$

Ако го искористиме претходното равенство, добиваме:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}} \right] &= (\overline{x_m x_{m-1} \dots x_1 + x_0}) + (\overline{x_m x_{m-1} \dots x_2 + x_1}) + \dots + (\overline{x_m + x_{m-1}}) + x_m \\ &= x_m(2^{m-1} + \dots + 2^1 + 2^0 + 1) + x_{m-1}(2^{m-2} + \dots + 2^1 + 2^0 + 1) + \dots + x_1(2^0 + 1) + x_0 \\ &= 2^m x_m + 2^{m-1} x_{m-1} + \dots + 2x_1 + x_0 = n,\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже. ■

Лема 2. Ако $n \in \mathbf{N}$ и $x \geq 0$, тогаш постојат точно $\left[\frac{x}{n} \right]$ природни броеви помали или еднакви на x , деливи со n .

Доказ. Броеви деливи со n се: $n, 2n, 3n, \dots$. Нека има j природни броеви помали или еднакви на x , деливи со n . Тогаш

$$jn \leq x < (j+1)n, \text{ т.е. } j \leq \frac{x}{n} < j+1.$$

Според тоа, $j \leq \left[\frac{x}{n} \right] < j+1$, односно $\left[\frac{x}{n} \right] = j$. ■

Теорема 2. Нека p е прост број, n е природен број и a е најголемиот степен на бројот p таков што $p^a \mid n!$. Тогаш,

$$a = \left[\frac{n}{p} \right] + \left[\frac{n}{p^2} \right] + \dots + \left[\frac{n}{p^k} \right] + \dots \quad (4)$$

Доказ. Според лема 2 во низата $1, 2, \dots, n$ има $\left[\frac{n}{p} \right]$ броеви деливи со p , па затоа

$$n! = p \cdot 2p \cdot \dots \cdot \left[\frac{n}{p} \right] p M_1 = p^{\left[\frac{n}{p} \right]} \cdot \left[\frac{n}{p} \right]! \cdot M_1$$

и M_1 е природен број кој не е делив со p .

Ако претходното размислување го примениме на низата $1, 2, \dots, \left[\frac{n}{p} \right]$ и ако земеме во предвид дека $\left[\frac{\left[\frac{n}{p} \right]}{p} \right] = \left[\frac{n}{p^2} \right]$, добиваме дека

$$n! = p^{\left[\frac{n}{p} \right] + \left[\frac{n}{p^2} \right]} \cdot \left[\frac{n}{p^2} \right]! \cdot M_2$$

и M_2 е природен број кој не е делив со p .

Продолжувајќи ја постапката добиваме дека

$$n! = M p^{\left[\frac{n}{p} \right] + \left[\frac{n}{p^2} \right] + \left[\frac{n}{p^3} \right] + \dots}$$

каде M е природен број кој не е делив со p , што значи дека точно е равенството (2). ■

Забелешка 1. Постапката во претходниот доказ ќе заврши после конечен број чекори, бидејќи простиот број p е конечен број пати е делител на природниот број $n!$.

Пример 5. На колку нули завршува бројот 1993! ?

Решение. Ако N е бараниот број нули, тогаш е $1993! = 10^N M$, M е природен број кој не е делив со 10. Бидејќи $10 = 2 \cdot 5$ добиваме $N = \min\{N_1, N_2\}$, каде

$$N_1 = \left[\frac{1993}{5}\right] + \left[\frac{1993}{5^2}\right] + \left[\frac{1993}{5^3}\right] + \left[\frac{1993}{5^4}\right] + \left[\frac{1993}{5^5}\right] + \dots = 495 \text{ и}$$

$$N_1 = \left[\frac{1993}{2}\right] + \left[\frac{1993}{2^2}\right] + \left[\frac{1993}{2^3}\right] + \dots + \left[\frac{1993}{2^{10}}\right] + \left[\frac{1993}{2^{11}}\right] + \dots = 1986.$$

Значи, $N = 495$, т.е. бројот 1993! завршува на 495 нули. ■

Пример 6. Ако $a + b + \dots + m \leq n$; $n, a, b, \dots, m \in \mathbb{N}$, тогаш $\frac{n!}{a!b!\dots m!} \in \mathbb{N}$.

Докажи!

Решение. Според теорема 2 простиот број p учествува во каноничното разложување на броевите $n!, a!, b!, \dots, m!$ соодветно со степени

$$\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \dots + \left[\frac{n}{p^k}\right] + \dots$$

$$\left[\frac{a}{p}\right] + \left[\frac{a}{p^2}\right] + \dots + \left[\frac{a}{p^k}\right] + \dots$$

$$\left[\frac{b}{p}\right] + \left[\frac{b}{p^2}\right] + \dots + \left[\frac{b}{p^k}\right] + \dots$$

.....

$$\left[\frac{m}{p}\right] + \left[\frac{m}{p^2}\right] + \dots + \left[\frac{m}{p^k}\right] + \dots$$

Според тоа, ако p е прост број, тогаш од теорема 2 следува дека за степените во каноничните разложувања на именителот и броителот на дробката $\frac{n!}{a!b!\dots m!}$ важи

$$\begin{aligned}
& ([\frac{a}{p}] + [\frac{a}{p^2}] + \dots + [\frac{a}{p^k}] + \dots) + ([\frac{b}{p}] + [\frac{b}{p^2}] + \dots + [\frac{b}{p^k}] + \dots) + \dots + ([\frac{m}{p}] + [\frac{m}{p^2}] + \dots + [\frac{m}{p^k}] + \dots) = \\
& = ([\frac{a}{p}] + [\frac{b}{p}] + \dots + [\frac{m}{p}]) + ([\frac{a}{p^2}] + [\frac{b}{p^2}] + \dots + [\frac{m}{p^2}]) + \dots + ([\frac{a}{p^k}] + [\frac{b}{p^k}] + \dots + [\frac{m}{p^k}]) \\
& \leq ([\frac{a}{p} + \frac{b}{p} + \dots + \frac{m}{p}]) + ([\frac{a}{p^2} + \frac{b}{p^2} + \dots + \frac{m}{p^2}]) + \dots + ([\frac{a}{p^k} + \frac{b}{p^k} + \dots + \frac{m}{p^k}]) \\
& \leq [\frac{n}{p}] + [\frac{n}{p^2}] + \dots + [\frac{n}{p^k}] + \dots
\end{aligned}$$

т.е. степенот на простиот број p во каноничното разложување на имени-телот е помал или еднаков од степенот на простиот број p во каноничното разложување на броителот. Ова важи за секој прост број, па затоа

$$\frac{n!}{a!b!...m!} = \frac{p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_t^{\alpha_t}}{p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} ... p_t^{\beta_t}} = p_1^{\alpha_1 - \beta_1} p_2^{\alpha_2 - \beta_2} ... p_t^{\alpha_t - \beta_t}, \quad 0 \leq \beta_i \leq \alpha_i, \quad \forall i = 1, 2, ..., t,$$

T.e. $\frac{n!}{a!b!\dots m!} \in \mathbf{N}$. ■

Лема 3. Ако $a, b \in \mathbf{R}^+$. Тогаш

$$[2a] + [2b] \geq [a] + [b] + [a + b]$$

Доказ. Нека $a = [a] + \alpha$ и $b = [b] + \beta$, каде што $0 \leq \alpha < 1$ и $0 \leq \beta < 1$.

Ако $\alpha + \beta < 1$, тогаш $[a + b] = [a] + [b]$ и затоа

$$[2a] + [2b] \geq 2[a] + 2[b] = [a] + [b] + [a + b]$$

Ако $\alpha + \beta \geq 1$, тогаш $2\alpha \geq 1$ или $2\beta \geq 1$. Нека $2\alpha \geq 1$. Тогаш

$$[a + b] = [a] + [b] + 1 \text{ и } [2a] = 2[a] + 1,$$

па затоа

$$[2a] + [2b] \geq 2[a] + 1 + 2[b] = [a] + [b] + [a + b]. \blacksquare$$

Пример 7. Докажи дека $\frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!} \in \mathbf{N}$, за секои $m, n \in \mathbf{N}$.

Решение. Ќе докажеме дека максималниот степен на произволен прост број p со кој е делив броителот на дадената дробка, не е помал од максималниот степен на бројот p со кој е делив именителот на дадената дробка. Нека p е прост број. Од теорема 2, следува дека степенот на бројот p во броителот на дробката е

$$s = \left[\frac{2n}{p}\right] + \left[\frac{2n}{p^2}\right] + \left[\frac{2n}{p^3}\right] + \dots + \left[\frac{2m}{p}\right] + \left[\frac{2m}{p^2}\right] + \left[\frac{2m}{p^3}\right] + \dots,$$

а степенот на бројот p во именителот е

$$t = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \dots + \left[\frac{m}{p}\right] + \left[\frac{m}{p^2}\right] + \left[\frac{m}{p^3}\right] + \dots + \left[\frac{m+n}{p}\right] + \left[\frac{m+n}{p^2}\right] + \left[\frac{m+n}{p^3}\right] + \dots$$

Сега тврдењето на задачата следува од лема 3, за $a = \frac{n}{p^k}$, $b = \frac{m}{p^k}$, $k = 1, 2, \dots$. ■

Задачи за самостојна работа

- Докажи дека постојат бесконечно многу природни броеви n такви што $\sqrt{n}$ не е цел број, и n е делив со $[\sqrt{n}]$.
- Докажи дека $x + \left[\frac{n}{x}\right] \geq 2[\sqrt{n}]$, за секои $x, n \in \mathbf{N}$.
- Докажи дека важи $[a[na]] + 1 = [na^2]$, за секој $n \in \mathbf{N}$ и $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
- Кој е степеновиот показател на простиот број p во каноничното разложување на p^n !?
- Докажи, дека ако $\frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbf{N}$ не е цел број, тогаш $\frac{p}{q} \geq \left[\frac{p}{q}\right] + \frac{1}{q}$.
- Докажи, дека за секој реален број a и за секој природен број n важи

$$n[a] \leq [na] \leq n[a] + n - 1.$$

7. Докажи дека $\frac{(ab)!}{a!(b!)^a}$ е природен број, за секои $a, b \in \mathbf{N}$.

8. Докажи дека за секој позитивен број x важи $[\sqrt{[\sqrt{x}]}] = [\sqrt{\sqrt{x}}]$.

9. а) Дади пример на број a таков што $\{a\} + \{\frac{1}{a}\} = 1$.

б) Докажи, дека таков број a не може да биде рационален.

10. Докажи,

$$[\frac{a}{m}] + [\frac{2a}{m}] + \dots + [\frac{(m-1)a}{m}] = \frac{(m-1)(a-1)}{2}, \text{ ако } m \geq 2, a \geq 2 \text{ и } \text{NZD}(a, m) = 1.$$

11. Докажи дека $\sum_{k=0}^{n-1} [x + \frac{k}{n}] = [nx]$, за секој $n \in \mathbf{N}$ и за секој $x \in \mathbf{R}$.

12. Докажи дека $\sum_{k=1}^{n^2-1} [\sqrt{k}] = \frac{1}{6}(n-1)n(4n+1)$, за секој $n \in \mathbf{N}$.

13. Докажи дека, ако n е природен број поголем од 1, за кој важи

$$[\frac{n}{1}] + [\frac{n}{2}] + \dots + [\frac{n}{n}] = 2 + [\frac{n-1}{1}] + [\frac{n-1}{2}] + \dots + [\frac{n-1}{n-1}],$$

тогаш n е прост број.

14. Пресметај ги збирите:

$$\text{а) } \sum_{k=1}^{n^2+2n} k[\sqrt{k}],$$

$$\text{б) } \sum_{k=1}^{n^2} \frac{n - [\sqrt{k-1}]}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}}.$$

15. Нека $0 \leq x < 1$. Докажи дека $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[2^k x]}}{2^k} = 1 - 2x$.

16. Низата $\{a_n\}$, $n=1, 2, \dots$ е дефинирана со: n -тиот член на оваа низа е последната цифра на бројот $[\sqrt{10^n}]$, за $n=1, 2, \dots$. Дали оваа низа е периодична?

17. Дали постои природен број n таков што дробниот дел на бројот $(2 + \sqrt{2})^n$ е поголем од 0,999999?

18. Докажи дека за секој природен број n , бројот $[(2 - \sqrt{3})^n]$ е непарен природен број.