Лилјана Џајкоска, Прилеп

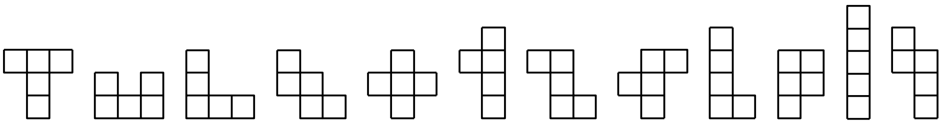
ПОЛИМИНА И ДОБРИ ПРАВОАГОЛНИЦИ

Во оваа статија ќе ги разгледаме полинимата и добрите правоаголници, кои покрај тоа што се важни за развивање на мисловниот процес кај учениците имаат и низа интересни и практични својства.

1. Пентомина

Поимот за полинимо за прв пат во математиката се јавува во 1954 година и истиот го вовел Solomon W. Golomb, професор на Универзитетот во Јужна Каролина. Оттогаш до денес тие не ја губат својата привлечност, па не само што се решени низа математички загатки, туку се објаснети и многу конфигурации. Следната дискусија на Golomb е едно од поновите откритија во оваа област.

Формите кои покриваат пет сврзани квадрати се нарекуваат ***пентонима***. Постојат дванасет вакви форми, кои се дадени на цртеж 1.



T U V W X Y Z F L P I N

Црт. 1

Со овие 12 пентонима, кои вкупно имаат 60 квадрати, може да се формираат мостри на правоаголник со димензии: 3 и 20; 4 и 15; 5 и 12; 6 и 10. Што се однесува до формирањето на правоаголници со помош на овие дванаесет пентонима да забележиме дека истите можат да се поделат во две групи и со секоја група пентонима да се формира правоаголник со димензии 5 и 6. Интересно, зар не? Обиди се да ги направиш споменатите мостри на правоаголници.

Исто така е интересно дека за дадено пентонимо, секогаш можат да се изберат 9 од останатите со кои може да се образува модел кој е три пати поголем во должина и три пати поголем во ширина. На читателот му препорачуваме самостојно да ги направи овие мостри.

Во натамошните разгледувања ќе дадеме четири интересни задачи поврзани со пентомината.

Задача 1. Подели ги 12-те пентонима во три групи, по 4 во секоја група, така што од секоја група пентонима да може да се состави иста мостра.

Z V P X *T I W F* *N P Y L*

Црт. 2

Решение. Постојат повеќе вакви поделби. Една од нив е дадена на цртеж 2. ♦

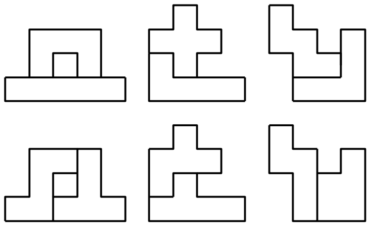
Задача 2. Подели ги 12-те пентомина во три групи, по 4 во секоја, а потоа секоја група поделија на две групи така што секои две новодобиени групи да покриваат иста површина од десет единечни квадрати.

Решение. Постојат повеќе вакви поделби, од кои една е дадена на цртеж 3. Од цртежот се гледа дека 12-те пентомина се поделени во три групи од по 4 пентомина, и тоа:

-во првата група: U и I; Z и T, по парови;

-во втората група: X и L; F и Y, по парови; и

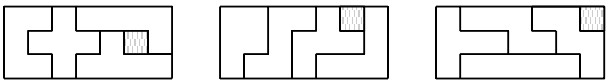
-во третата група: W и V; N и P, по парови. ♦



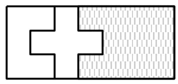
Црт. 3

Задача 3. Подели ги 12-те пентомина во три групи, по 4 во секоја. На секоја група додади едно мономино (единечен квадрат) и формирај правоаголник со димензии 3 и 7.

Решение. Као и во претходните две задачи само ќе го прикажеме решението, цртеж 4, кое во овој случај е единствено, со забелешка дека во првиот правоаголник Y пентоминото и мономиното можат да се преместат, при што повторно ќе зафаќаат иста област во правоаголникот.



Црт. 4



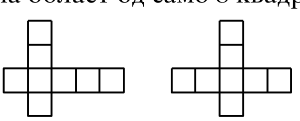
Црт. 5

За да ја докажеме единственоста, најпрво да забележиме дека X-пентоминото може да биде употребено само во комбинација со U-пентоминото, цртеж 5. Понатаму, не може да се искористат ниту F, ниту W-пентоминото за да се комплетира овој правоаголник. Сега лесно се гледа дека едниот правоаголник ќе ги содржи U и X-пентомината, другиот ќе го содржи F-пентоминото, но не и U, а третиот ќе го содржи W-пентоминото, но не и U. Со исцрпување на сите можности за распоредот на пентомината се докажува дека прикажаната решение е единствено. ♦

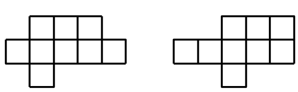
Задача 4. Најди најмала област на која може да се постави секое од 12-те пентомина.

Решение. Прво ќе покажеме дека не постои област со помалку од 9 квадрати на која може да се смести секое од 12-те пентомина. Ако постои таква област, тогаш I, X и V пентомината ќе се сместат на област со не повеќе од 8 квадрати. Притоа пентомината I и X ќе имаат 3 заеднички квадрати. Ова може да се направи на два начини, прикажани на цртеж 6.

Сега поставувањето на U-пентоминото може да се направи само ако се искористи уште еден квадрат, па затоа не е можно сите 12 пентомина да се поставaт на област од само 8 квадрати.



Црт. 6

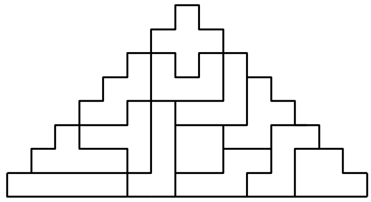


Црт. 7

Области од 9 квадрати на кои можат да се постават сите 12 пентомина се прикажани на цртеж 7. ♦

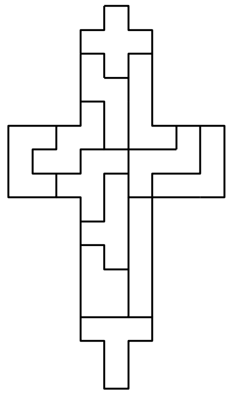
Познати се повеќе отворени проблеми како во врска со поделбите на пентомината, така и со покривањето на одредени области со помош на сите 12 пентомина.

Пред да наведеме некои од овие проблеми ќе презентираме две интересни конфигурации во кои се искористени сите 12 пентомина, кои се дадени на цртежите 8 и 9. Притоа првата конфигурација е “пирамида” за чие составување е искористен и еден квадрат со страна 2, а втората конфигурација е крст кој е оформен само со помош на 12-те пентомина.



Црт. 8

Забележуваме дека конфигурацијата дадена на цртеж 8 содржи 64 полиња, колку што има и шаховската табла. Природно е да се запрашаме дали шаховската табла може да се покрие со помош на 12-те пентомина и еден квадрат со страна 2. Одговорот на ова прашање е позитивен. Притоа, ако квадратот го сметиме во центарот на шаховската табла тогаш 12-те пентомина можеме да ги распоредиме дури на 65 различни начини. На читателот за вежба му препорачуваме да се обиде да најде неколку од овие 65 можни конфигурации.

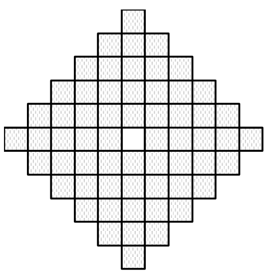


Црт. 9

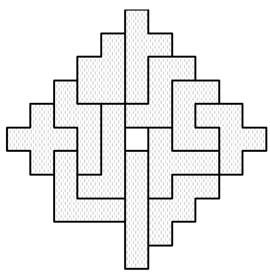
На крајот од овој дел ќе презентираме неколку нерешени проблеми, во врска со покривање на области со 12-те пентомина.

Проблем 1. Дали може областа прикажана на цртеж 10 да се покрие со 12-те пентомина.

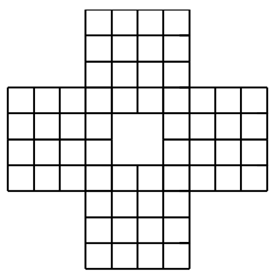
Во врска со овој проблем не е најден ниту позитивен ниту негативен одговор, дури и кога мономино-празнината е поместена на друга локација. На цртеж 11 е дадено најблиското приближно решение кое досега е најдено во врска со овој проблем.



Црт. 10



Црт. 11

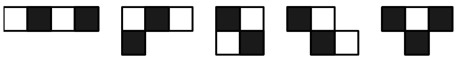


Црт. 12

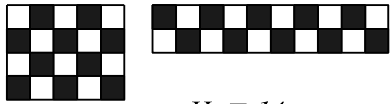
Проблем 2. За областа на Herbert Taylor, која што е прикажана на цртеж 12 се верува дека е невозможно да се покрие со 12-те пентомина. Меѓутоа досега ова тврдење не е ниту потврдено, ниту пак е негирано.

2. Кватромина

Полимината кои покриваат 4 квадрати ги нарекуваме кватромина. Постојат пет различни кватромина, кои се дадени на цртеж 13.

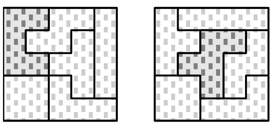


Црт. 13



Црт. 14

За разлика од пентомината, петте кватромина нема да покриваат правоаголник со страни 4 и 5, односно 2 и 10. Навистина, ако дадените правоаголници ги обоиме во две бои, како што е прикажано на цртеж 14, тогаш секој од нив ќе има по 10 црни и 10 бели полиња. Меѓутоа, четирите кватромина имаат по 2 црни и по две бели полиња, а додека кватроминото со облик Т има 3 квадрати од едната боја и еден квадрат од другата боја. Значи, петте кватромина секогаш ќе покриваат непарен број полиња од секоја боја, па затоа покривањето на овие правоаголници со кватромината не е можно.



Црт. 15

Задача 5. Користејќи ги четири кватромина и едно пентомино да се покрие квадрат со страна 5.

Решение. Секако дека не е едноставно да се најде вакво покривање, бидејќи прво треба да се одговори на прашањето дали секое пентомино може да се искористи за вакво покривање. Затоа без да навлегуваме во детали ќе дадеме две решенија на поставениот проблем (цртеж 15).

Доколку сакате да ги најдете и останатите можни покривање на овој квадрат секако ќе ви користи сознанието дека можат да се искористат осум различни пентомина, и тоа сите освен I, T, X и V-пентомината. ♦

3. Добри правоаголници

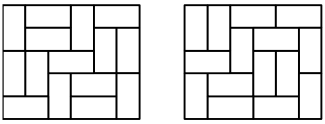
Американскиот математичар Robert I. Jewett поставил проблем, кој е наполно различен од претходно разгледуваните и кој гласи:

Со помош на домина да се направи правоаголник во кој не постои таканаречена лоша линија, односно права паралелна на страните на правоаголникот која не сече ниедно од домината.

Црт. 16

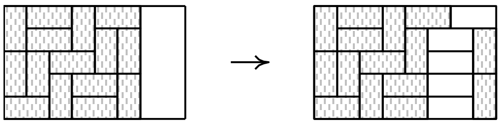
Поставениот проблем е интересен сам за себе, но иститот има и очигледна практична страна. Имено, ако домината се замислат како тули, тогаш лошата линија претставува слабост во структурата на ѕидот. Според тоа, проблемот на Robert I. Jewett можеме да го третираме како наоѓање правоаголници без слабост во структурата. На цртеж 16 е даден пример на правоаголник со слабост во структурата. Сигурно помисливте дека поставениот проблем нема решение. Меѓутоа нив ги има бесконечно многу. Во следните разгледувања ќе дадеме *алгоритам за наоѓање на добри правоаголници*, односно на правоаголници кои не содржат лоша линија.

Најмалиот добар правоаголник, што може да се направи од домина, е со димензија 5x6. На цртеж 17 се дадени две различни решенија.



Црт. 17

Лесно се докажува дека најмалиот добар правоаголник е со димензија 5x6. Сега од овој 5x6 добар правоаголник може да се добие нов добар правоаголник, користејќи го методот на проширување на должината или ширината за два. Притоа хоризонтално домино се става до секое хоризонтално домино на старата граница, додека вертикалните домина се поместуваат од старата до новата граница, со надополнување на празните места при што се ставаат две хоризонтални домина, (види цртеж 18, на кој е дадено проширувањето од 5x6



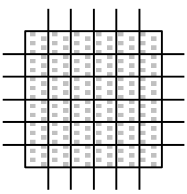
Црт. 18

до 5x8 добар правоаголник.).

Продолжувајќи ја постапката можеме да конструираме бесконечно многу добри правоаголници кај кои должината на едната страна е парна, а на другата е непарна.

Бидејќи правоаголник чии должини на страни се непарни броеви има непарен број единечни квадрати, а секое домино покрива два единечни квадрати заклучуваме дека покривањето со домина на овие правоаголници не е можно. Меѓутоа, ако имаме правоаголник чии должини на страни се парни броеви, тогаш нивната плоштина е парен број, па затоа природно е да се запрашаме дали меѓу нив има добри правоаголници.

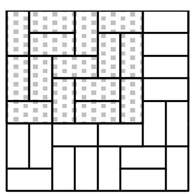
Со непосредна проверка може да се види дека секој правоаголник чии должини на страни се парни броеви помали или еднакви на 4, содржи лоша линија. Ќе докажеме дека секое покривање на квадратот 6x6 содржи лоша линија.



Црт. 19

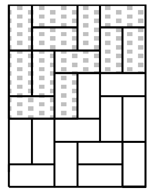
Нека претпоставиме дека сите мрежни линии на 6x6 квадратот се добри. Тогаш секоја од нив мора да сече најмалку две домина, (зошто?). Притоа секое домино може да биде пресечено од само една мрежна линија. Бидејќи бројот на мрежните линии во овој квадрат е 10, добиваме дека тие сечат 20 домина. Последното не е можно, затоа што разгледуваниот квадрат се покрива со 18 домина. Сега тврдењето следува од добиената противречност.

Претходно изнесениот доказ дека квадратот 6x6 е лош, му припаѓа на Solomon W. Golomb, кој го дава и следното проширување на правоаголникот 5x6 до квадрат 8x8



Црт. 20

кој е добар квадрат, цртеж 20. На цртеж 21 ќе го презентираме проширувањето на добриот 5x6 правоаголник во добар 8x6 правоаголник, при кое осенчениот дел е земен од добриот 5x6 правоаголник, а при натамошниот распоред на домината се користиме со фактот дека секоја добра линија мора да сече најмалку две домина.



Црт. 21

Сега, ако ја искористиме претходно илустрираната постапка за проширување на добар правоаголник со продолжување на неговата страна за два и фактот дека правоаголникот 6x8 е добар, тогаш можеме да докажеме дека секој правоаголник со парни должини на страни, $a > 6$, $b \geq 6$ е добар правоаголник.

Од досега изнесеното следува дека секој правоаголник со парна плоштина и должини на страни поголеми од 4, освен квадратот 6x6 е добар правоаголник.

Забелешка. Концептот на добриот домино-правоаголник иницира низа прашања, како на пример, кој е најмалиот добар правоаголник со ист број хоризонтално и вертикално поставени домина? Одговорот на ова прашање е познат и тоа е 5x8 правоаголникот.

Исто така, користејќи ги добрите правоаголници може да се игра следната игра. На произволна правоаголна табла со страни $a > 6, b \geq 6$ двајца играчи поставуваат домина. Победник е оној кој прв ќе направи лоша (добра линија). Се надеваме дека ваквите и слични игри ќе помогнат да ги развивате своите креативни способности и правилното математичко резонирање воопшто.

Литература

1. **Orton J.:** *Algebra, pattern and motivation,* University of Leeds
2. **Joaquim Gimenez Rovira:** *Number and puzzles for compulsory school,* Virgili University, Taragona