Љубомир Давидов, Софија

ПРИНЦИПОТ НА ДИРИХЛЕ И НЕКОИ КОМБИНАТОРНИ ПРОБЛЕМИ

Еден од основите принципи во математиката е наречен "Принципот на Дирихле". Лесно е да се разбере значењето на овој принцип. Неговата популарна форма е :

Ако n топчиња се сместат во n - 1 кутија, тогаш барем во една кутија има две топчиња.

Овој принцип има многу голема, понекогаш и неочекувана примена.

* * *

Проблем 1. Дадени се n точки во рамнина ($n \ge 2$). Некои од овие точки се поврзани со отсечки. Докажи дека постојат две точки кои се краеви на еднаков број на отсечки.

Решение. Нека $A_1, A_2, ..., A_n$ се дадените точки и со $\upsilon(A_i)$ да го означиме бројот на сите отсечки за кои точката A_i е крајна точка. Јасно е дека $0 \le \upsilon(A_i) \le n-1$. Ако постои точка A_j така што $\upsilon(A_j) = 0$, тогаш $\upsilon(A_i) \ne n-1$ за секој $i \in \{1,2,...,n\}$. Навистина, ако претпоставиме дека постои $k \in \{1,2,...,n\}$ така што $\upsilon(A_k) = n-1$ тогаш точката A_k е поврзана со сите други точки, вклучувајќи ја и точката A_j. Но, тоа е во спротивност со претпоставката дека $\upsilon(A_j) = 0$. Слично, ако $\upsilon(A_k) = n-1$ за некое k, тогаш $\upsilon(A_i) \ne 0$ за секое i.

Така, или $0 \le \upsilon(A_i) \le n-2$ или $1 \le \upsilon(A_i) \le n-1$. Оттука следува дека множеството $\{\upsilon(A_1), \upsilon(A_2), ..., \upsilon(A_n)\}$ има најмногу $n-1$ различни елементи.

Значи, имаме n броеви: $\upsilon(A_1), \upsilon(A_2), ..., \upsilon(A_n)$ (овие се $n-$ те топчиња) и нивните вредности се $n-1$ различни цели позитивни броеви (топчињата се сместени во $n-1$ кутија). Од принципот на Дирихле следува дека постојат барем две топчиња сместени во иста кутија, т.е. постојат барем два броја $\upsilon(A_k)$ и $\upsilon(A_l)$ што имаат иста вредност. Според тоа, постојат барем две точки кои се краеви на еднаков број отсечки.

Проблем 2. Избрани се 12 различни броеви од множеството $\{1, 2, ..., 20\}$. Докажи дека постојат барем два броја чија разлика е еднаква на 3.

Решение. Нека од избраните броеви е формирано множеството $A = \{x_1, x_2, ..., x_{12}\}$, каде што $1 \le x_1 < x_2 < ... < x_{12} \le 20$. Ако на секој од избраните броеви додадеме 3, го добиваме множеството $B = \{x_1 + 3, x_2 + 3 ..., x_{12} + 3\}$ каде што $4 \le x_1 + 3 < x_2 + 3 < ... < x_{12} + 3 \le 23$.

Множествата A и B заедно имаат 24 броеви (24 топчиња), 12 во A и 12 во B и сите се помали или еднакви на 23 (24 топчиња сместени во 23 кутии). Според принципот на Дирихле, два од овие броеви се еднакви (барем две од овие топчиња се сместени во иста кутија). Но, сите елементи од множеството A се различни меѓу себе што повлекува дека и сите елементи од множеството

B се различни меѓу себе. Значи постои x_i од A што е еднаков на некој x_j+3, т.е $x_i-x_j=3$.

Проблем 3. Докажи дека меѓу било кои $k+1$ цели броеви постојат барем два, чија разлика е делива со k.

Решение. Нека $a_1,a_2,...,a_{k+1}$ се произволни цели броеви и нека $r_1,r_2,...,r_{k+1}$ се, соодветно, нивните остатоци при делењето со k, т.е. $a_i=kq_i+r_i$, $0\le r_i\le k-1$. Бидејќи $r_i\in\{0,1,...,k-1\}$ за $i=1,2,...,k+1$, тогаш постојат i и j така што $i\ne j$ и $r_i=r_j$. Тогаш $a_i-a_j=k(q_i-q_j)$, т.е. a_i-a_j е делив со k.

Проблем 4. Нека k, l и m се позитивни цели броеви, така што $k>\frac{m+l}{2}$. Избираме k позитивни цели броеви од множеството $\{1,2,...,m\}$. Докажи дека меѓу избраните броеви постојат два чија разлика е l.

Решение. Овој проблем е обопштување на проблемот 2. Навистина, ако $k=12$, $m=20$, $l=3$ тогаш овој проблем се сведува на проблемот 2.

Проблем 5. Нека n е позитивен цел број. Избираме $n+1$ цели позитивни броеви од $2n$ последователни цели позитивни броеви

$$S=\{a,a+1,\dots,a+n-1,a+n,a+n+1,\dots,a+2n-1\}.$$

Докажи дека меѓу избраните броеви постојат два чија разлика е n.

Решение. Елементите од секое множество S од $2n$ последователни цели броеви може да се поделат во парови на следниот начин:

$$(a,a+n),(a+1,a+n+1),...,(a+n-1,a+2n-1).$$

Ако избереме $n+1$ броеви од множеството S, тогаш, од принципот на Дирихле, следува дека барем два од избраните броеви се во ист пар, па нивната разлика е n.

Проблем 6. Од множеството $S=\{1,2,...,100\}$ произволно избираме 55 броеви. Докажи дека меѓу избраните броеви постојат два чија разлика е 9, два чија разлика е 10, два чија разлика е 12 и два чија разлика е 13, но не мора да постојат два чија разлика е 11.

Решение. Случајот $n=9$ следува од проблемот 4 $(k=55, m=100, l=9)$, но останатите не можат да се добијат со директна примена на проблемот 4. Ќе изнесеме друга идеја за решавање на овој проблем.

Нека $n=9$. Од проблемот 5 следува дека ако од 18 последователни цели позитивни броеви избереме повеќе од 9, тогаш меѓу избраните броеви постојат два чија разлика е 9. Елементите од множеството $S=\{1,2,...,100\}$ ги групираме на следниот начин:

$$(1,2,...,18),(19,20,...,36),(37,38,...,54),(55,56,...,72),(73,74,...,90),(91,92,...,100)$$

Од избраните 55 броеви, според принципот на Дирихле, следува дека барем 10 се наоѓаат во иста група (бидејќи $6\cdot 9=54<55$). Сега од проблемот 5 следува дека, постојат барем два броја чија разлика е 9.

Нека $n=10$. Елементите од множеството S ги групираме на следниот начин:

$$(1,2,...,20),(21,22,...,40),(41,42,...,60),(61,62,...,80),(81,82,...,100)$$

Меѓу избраните 55 броеви, постојат 11 кои се наоѓаат во иста група ($5\cdot 10<55$). Повторно од проблемот 5 следува дека, постојат барем два броја чија разлика е 10.

Ако $n=12$, тогаш елементите од множеството S ги групираме на следниот начин:

$$(1,2,...,24),(25,26,...,48),(49,50,...,72),(73,74,...,96),(97,98,99,100)$$

Ако меѓу избраните 55 броеви се наоѓаат сите четири броеви од последната група, тогаш останатите 51 броеви се наоѓаат во првите четири групи. Бидејќи $4\cdot 12=48<51$, барем 13 броеви се наоѓаат во иста група, па меѓу нив постојат два чија разлика е 12.

Ако $n=13$, елементите од S ги групираме на следниот начин:

$$(1,2,...,26),(27,28,...,52),(53,54,...,78),(79,...,100)$$

Бидејќи $4\cdot 13=52<55$, следува дека меѓу избраните броеви барем 13 се наоѓаат во иста група, па меѓу нив постојат два чија разлика е 13.

Но, ако $n=11$, тогаш ако елементите од S ги групираме на следниот начин:

$$(1,2,...,22),(23,24,...,44),(45,46,...,66),(67,68,...,88),(89,90,...,100)$$

Бидејќи $5\cdot 11=55$, тогаш меѓу избраните броеви може да има по 11 од секоја група, како на пример:

$$(1,2,...,11),(23,24,...,33),(45,46,...55),(67,68,...,77),(89,90,...,99)$$

па разликата на било кои од избраните броеви е различна од 11.

Проблем 7. Дадени се пет точки. Докажи дека може да се обојат отсечките што ги поврзуваат дадените точки со две бои така што страните на секој триаголник чии темиња се некои од дадените точки се обоени со различна боја.

Решение. Нека A_1, A_2, A_3, A_4 и A_5 се дадените точки. Ако ги обоиме отсечките A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5 и A_5A_1 со црвена боја, а сите други отсечки со сина боја, тогаш лесно се проверува дека секој триаголник чии темиња се некои три од дадените точки има страни обоени со сина и црвена боја.

Проблем 8. Дадени се шест точки во рамнината. Отсечките што ги поврзуваат овие точки обоени се црвено или сино. Докажи дека меѓу дадените точки постојат три кои се темиња на триаголник чии страни се обоени со иста боја.

Решение. Нека A е една од дадените точки. Оваа точка е крајна за пет отсечки. Од принципот на Дирихле следува дека барем три од овие отсечки се обоени со иста боја (на пример црвена). Нека отсечките AB, AC, AD се црвени (B, C, D се три од дадените точки). Ако една од отсечките BC, CD, DB е исто така црвена (на примар BC), тогаш страните на триаголникот ABC се обоени со црвена боја. Во спртивно, ако отсечките BC, CD, DB се обоени со сина боја, тогаш страните на триаголникот BCD се обоени со сина боја.

Проблем 9. Дадени се седумнаесет точки. Отсечките што ги поврзуваат овие точки се обоени со три бои: црвена, сина и зелена. Докажи дека меѓу овие точки постојат три кои се темиња на триаголник чии страни се обоени со иста боја.

Решение. Нека A е една од дадените точки. Оваа точка е крајна за 16 отсечки. Јасно е дека барем шест отсечки се обоени со иста боја (на пример зелена). Нека S е множеството од крајните точки на овие шест отсечки, различни од A. Ако меѓу отсечките што ги поврзуваат точките од множеството S постои отсечка обоена со зелена боја, тогаш постои триаголник чии страни се обоени со зелена боја. Ако сите отсечки се обоени со црвена или сина боја, тогаш од претходниот проблем следува дека постои триаголник чии страни се обоени со иста боја.

Проблем 10. Низата $u_1, u_2, ..., u_k, ...$ е определена со следните услови:

(i) $u_1 = 3$;

(ii) $u_{k+1} = (k+1)\, u_k - k + 1$ ако $k > 0$.

Нека $n \geq u_k$ и нека се дадени n точки. Докажи дека, ако секоја од отсечките што ги поврзува овие точки е обоена со една од k дадени бои, тогаш постојат три точки, кои се темиња на триаголник чии страни се обоени со иста боја.

Решение. Ќе користиме индукција по k. Ако $k = 2$ тогаш $u_2 = 2u_1 - 1 + 1 = 6$ па тврдењето следува од претходниот проблем. Нека тврдењето е точно за некој k и нека се дадени $n \geq u_{k+1}$ точки кои се поврзани со отсечки и кои се обоени со $k+1$ боја.

Нека A е една од дадените точки. Оваа точка е крајна за $n-1$ отсечки и бидејќи

$$\frac{n-1}{k+1} \geq \frac{u_{k+1}-1}{k+1} = u_k - \frac{k}{k+1} > u_k - 1$$

од принципот на Дирихле следува дека барем u_k отсечки чија крајна точка е A се обоени со иста боја. Нека $B_1, B_2, ..., B_{u_k}$ се другите (различни од A) крајни точки на овие отсечки. Ако меѓу отсечките $B_i B_j$ постои барем една која е обоена со иста боја како и отсечките $AB_1, AB_2, ..., AB_{u_k}$, тогаш постои бараниот триаголник. Ако не постои таква отсечка, тогаш отсечките $B_i B_j$ се обоени со k бои и тврдењето следува од индуктивната претпоставка.

Проблем 11. Дадени се две пирамиди со заеднички основи $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 A_7$ и врвови B и C. Рабовите BA_i, CA_i $(i = 1, 2, ..., 7)$, дијагоналите на основата и отсечката BC се обоени црвено или сино. Докажи дека постои триаголник чии страни се обоени со иста боја.

Решение. Да претпоставиме дека отсечката BC е црвена. Можни се два случаи:

I. Барем три од рабовите BA_i $(i = 1, 2, ..., 7)$ се црвени. На пример рабовите BA_k, BA_s, BA_t се црвени. Барем една страна од триаголникот $A_k A_s A_t$ е дијагонала на основата и е обоена. Нека $A_k A_s$ е дијагонала. Го разгледуваме триаголникот $A_k A_s C$. Ако една од неговите страни е црвена, тогаш оваа страна заедно со точката B определува црвен триаголник. Ако таква страна не постои, тогаш триаголникот $A_k A_s C$ е син.

II. Најмногу два од рабовите BA_i (i=1,2,…,7) се црвени. Најпрво да претпоставиме дека точно два од овие раба се црвени и нека тоа се рабовите BA_k и BA_s. Ако $A_k A_s$ е дијагонала на основата, го разгледуваме триаголникот $A_k A_s C$ и постапуваме аналогно како во претходниот случај. Ако $A_k A_s$ не е дијагонала, можеме да претпоставиме дека $k=1$ и $s=2$, т.е. дека рабовите BA_1 и BA_2 се црвени, а рабовите BA_i $(i=3,4,...,7)$ се сини. Го разгледуваме триаголникот $A_3 A_5 A_7$. Ако една од страните на овој триагоник е сина, тогаш оваа страна заедно со точката B формира син триаголник. Во спротивно, триаголникот $A_3 A_5 A_7$ е црвен.

Конечно, да го разгледаме случајот кога најмногу еден од рабовите BA_i $(i=1,2,...,7)$ е црвен, т.е. барем шест од овие рабови се сини. Можеме да претпоставиме дека рабовите BA_i $(i=2,3,...,7)$ се сини. Го разгледуваме триаголникот $A_3 A_5 A_7$ и постапуваме како претходно.

Проблем 12. Шаховска табла $n \times n$ нумерирана е со броевите $1,2,...,n^2$. Докажи дека постојат соседни квадратчиња (со заедничка страна) такви што разликата на броевите запишани во нив е најмалку n.

Решение. Да претпоставиме дека разликата на броевите од било кои соседни квадратчиња е најмногу $n-1$. За $k=1,2,...,n^2-n,$ со A_k ќе го означиме множеството од квадратчињата нумерирани со $1,2,...,k,$ со B_k множеството од квадратчиња нумерирани со $k+n,...,n^2$ и со C_k множеството од преостанатите квадратчиња. Јасно, квадратчињата од множествата A_k и B_k немаат заедничка страна, и C_k има точно $n-1$ елементи. Значи, постои редица и колона која што не содржи елементи од C_k. Сите квадратчиња од оваа редица или оваа колона припаѓаат или во A_k или во B_k. Инаку, ќе постојат две соседни квадратчиња, едно во множеството A_k, а едно во множеството B_k. Како и да е, ова не е можно ниту за A_1 ниту за B_{n^2-n}.

Значи, постои индекс $k \in \{1,...,n^2-n-1\}$ така што $B_1, B_2,...,B_k$ пополнуваат цел ред и цела колона, додека B_{k+1} го нема ова својство. Следува дека A_{k+1} пополнува цел ред или цела колона. Следува дека A_{k+1} има пресек со B_k, што е контрадикција.

Проблем 13. Нека $1 \le k < n$. Ги конструираме сите конечни низи од позитивни цели броеви чиј збир е n. Најди го бројот $T(n,k)$ на вакви низи што го содржат бројот k.

Решение. Да напишеме n точки во една редица. Меѓу нив има $n-1$ празни места. Во овие празни места можеме да поставиме вертикални црти на 2^{n-1} начини. Овие вертикални црти ги определуваат сите можни низи од броеви чии збир е n. За да го најдеме бројот $T(n,k)$ од сите конечни низи што го содржат бројот k, пишуваме n точки во една редица и k последователни точки ги ставаме во средни згради

$$\bullet\bullet\bullet\,|\,\bullet\,|\,\bullet\,[\bullet\bullet\bullet]\,\bullet\bullet \Leftrightarrow (3,\ 1,\ 1,\ 3,\ 2)$$

Разгледуваме два случаи:

I. Средната заграда не ги содржи крајните точки. Ова поставување на средните загради може да се направи на $n-k-1$ начини. Остануваат $n-k-2$ празнини меѓу точките надвор од средната заграда. Во овие празнини можеме да поставиме најмногу по една вертикална црта на 2^{n-k-2} начини.

II. Средните загради ги содржат крајните точки. Ова може да се направи на два начина. Меѓу точките надвор од средните загради остануваат $n-k-1$ празни места, па вертикалните црти можат да се поставaт на 2^{n-k-1} начини. Добиваме

$$T(n,k)=(n-k-1)\cdot 2^{n-k-2}+2\cdot 2^{n-k-1}=(n-k+3)\cdot 2^{n-k-2}\,.$$

Проблем 14. Парен број на луѓе дискутираат на тркалезна маса. По паузата, повторно седнале на масата, но со различен редослед. Докажи дека постојат барем двајца така што бројот на учесници што седеле меѓу нив пред паузата и после паузата е ист.

Решение. Да разгледаме $2n$ вектори со почеток во центарот на масата и краеви по границата на масата, така што границата на масата ја делат на $2n$ еднакви кружни лаци. Претпоставуваме дека краевите на овие вектори ги определуваат местата каде што седат дискутантите и обратно, секое место на седење на луѓето определува крајна точка на овие вектори.

После паузата, секој вектор е заротиран за позитивен агол околу центарот на кругот. Збирот на аглите за кои овие $2n$ вектори се заротирани е $2k\pi$ каде што k ненегативен цел број.

Ако било кои два вектори се завртени за ист агол, тогаш јасно е дека бројот на дискутанти што седеле меѓу овие двајца (определени со овие два вектори) пред паузата и после неа е ист.

Да го разгледаме случајот кога аглите на ротација на овие вектори се различни меѓу себе. Но тогаш овие агли се :

$$0,\ \alpha,\ 2\alpha,\ \ldots,(2n-1)\alpha$$

каде што $\alpha=\frac{\pi}{n}$ и збирот на овие агли е $(2n-1)\pi$, а овој број е различен од $2k\pi$. Значи овој случај не е можен.

Да забележиме дека ако имаме непарен број на учесници во дискусијата, тогаш ова не мора да важи. На пример, ако дискутантите се нумерирани со $1,2,\ldots,2n+1,$ тогаш

$$(1,\ 3,\ 5,\ \ldots,\ 2n+1,\ 2,\ 4,\ \ldots,\ 2n)$$

е еден ваков распоред на дискутантите.