Борислав Јовановиќ

Една задача, повеќе начини за нејзино решавање

Во овој напис ќе презентираме пет начини за решавање на една задача. Обидете се да најдете и други патишта за да ја решите истата.

Задача. Ако во триаголникот ABC важи $\angle ACB = 2\angle CAB$ и $\overline{AC} = 2\overline{BC}$, тогаш тој е правоаоголен. Докажи!

Решение. I начин. Повлекуваме симетрала s на аголот при темето C. Нека $s \cap AB = \{D\}$ (цртеж 1). Триаголникот ACD е рамнокрак. Нека DM е висина во ΔACD спуштена кон страната AC. Јасно $\overline{AM} = \overline{MC} = a$. За триаголниците MCD и BCD важи: DC е заедничка страна,

$$\overline{MC} = \overline{BC} = a \text{ и } \angle MCD = \angle BCD,$$

т.е. тие се складни. Значи,

$$\angle ABC = \angle DBC = \angle DMC = 90^\circ,$$

т.е. триаголникот е правоаголен.

II начин. Преку точката B ја продолжуваме страната BC и наоѓаме точка D така што $\overline{CB} = \overline{BD}$. Бидејќи $\overline{AC} = 2\overline{BC} = \overline{BC} + \overline{BC} = \overline{DC}$, триаголникот ADC е рамнокрак со краци $\overline{AC}$ и $\overline{DC}$. Нека CC_1 е тежишна линија спуштена кон основата на ΔADC и нека $CC_1 \cap AB = O$. Бидејќи AB е тежишна линија за ΔADC спуштена кон кракот DC, добиваме дека O е тежиштен а овој триаголник, т.е. $\overline{AO} = \overline{OD} = \overline{OB}$. Според тоа, триаголникот CDO е рамнокрак и OB е тежишна линија спуштена спуштена кон основата DC. Значи, $OB \perp DC$ од што следува дека ΔABC е правоаголен со прав агол во темето B.

III начин. Преку точката C ја продолжуваме страната BC и наоѓаме точка D така што $\overline{AC} = \overline{CD}$. Триаголникот ADC е рамнокрак и важи $\angle DAC = \angle CDA = \alpha$ (зошто?). Според тоа, за триаголниците ADB и CAB (цртеж 3) важи:

$$\angle ADB = \angle CAB \text{ и } \angle DAB = \angle ACB,$$

т.е. тие се слични. Значи, $\overline{AB} : \overline{BD} = \overline{BC} : \overline{AB}$, т.е.

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC} \cdot \overline{BD} = \overline{BC}(\overline{BC} + \overline{AC}) = \overline{BC}(\overline{BC} + 2\overline{BC}) = 3\overline{BC}^2.$$

За триаголникот ABC имаме:

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = 3\overline{BC}^2 + \overline{BC}^2 = (2\overline{BC})^2 = \overline{AC}^2,$$

т.е. тој е правоаголен триаголник со прав агол при темето B.

IV начин. Повлекуваме симетрала s на аголот при темето C. Нека $\overline{AB} \cap s = D$ (цртеж 4). Од својството на симетралата имаме

$$\overline{AD} : \overline{DB} = \overline{AC} : \overline{BC} = 2\overline{BC} : \overline{BC} = 2,$$

т.е.

$$\overline{AD} = 2\overline{DB}.$$

Значи,

$$\overline{AB} = \overline{AD} + \overline{DB} = 3\overline{DB}.$$

Сега од сличноста на триаголниците ACB и CDB добиваме $\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{BC} : \overline{DB}$, т.е. $3\overline{DB}^2 = \overline{BC}^2$ или

$$\overline{DB} = \frac{\overline{BC}}{\sqrt{3}}.$$

Конечно,

$$\overline{AD} = 3\overline{DB} = 3\frac{\overline{BC}}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}\,\overline{BC}$$

и

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = (\sqrt{3}\,\overline{BC})^2 + \overline{BC}^2 = 4\overline{BC}^2 = (2\overline{BC})^2 = \overline{AC}^2,$$

т.е. ΔABC е правоаголен.

V начин. Од синусната теорема имаме $\dfrac{\overline{BC}}{\sin\alpha} = \dfrac{\overline{AC}}{\sin(180^\circ - 3\alpha)}$, т.е. $\dfrac{\overline{BC}}{\sin\alpha} = \dfrac{2\overline{BC}}{\sin 3\alpha}$.

Значи, $\sin 3\alpha = 2\sin\alpha$, $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, т.е. $2\sin\alpha = \sin\alpha\cos 2\alpha + \cos\alpha\sin 2\alpha$ или

$$2\sin\alpha = \sin\alpha[4\cos^2\alpha - 1].$$

Но, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, па затоа $\sin\alpha\neq 0$ и од последното равенство добиваме

$$4\cos^2\alpha-1=2,$$

т.е.

$$\cos^2\alpha=\frac{3}{4}.$$

Бидејќи $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ имаме $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$, т.е. $\alpha=\frac{\pi}{6}$. Аглите на триаголникот се $\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}$ и $\frac{\pi}{2}$, т.е. тој е правоаголен.

За математичарите и математиката.

Полесно е да се научи математиката отколку да се работи без неа.

H.Bouasse

Вистинскиот математичар сам по себе е занесењак. Без занес нема математика.

Novalis

Матеамтичарот кој по малку не е и поет никогаш нема да биде вистински математичар.

Weierstrass

Светот е книга пишувана со јазикот на математиката, а личНостите се триаголниците, кружинците и другите геометриски слики, без кои човековиот збор не може да се разбере; без кои постојано би се движеле низ темен лавиринт.

Galilej