ДВАДЕСЕТИ ТУРНИР ГРАДОВА
Јесење коло, Припремна варијанта, 1998.
8-9 разред (млађи узраст)
(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена)

поени задаци

3 **1.** Коцка ивице 20 је разложена на 8000 јединичних коцкица, и у сваку коцкицу уписан је број. Познато је да је у сваком ступцу од 20 коцкица, паралелном ивици коцке, сума бројева једнака 1 (разматрају се стубци сва три правца). У једну коцкицу је уписан број 10. Кроз ту коцкицу пролазе три слоја 1×20×20, паралелна странама коцке. Наћи суму свих бројева који су изван тих слојева.

3 **2.** Квадрат целог броја има облик ...09 (завршава се цифрама 0 и 9). Доказати да је трећа сдесна цифра парна.

4 **3.** Тачке A', B' и C' су унутрашње тачке страница BC, CA и AB троугла ABC, тим редом. Познато је да је ∠AC'B'=∠B'A'C, ∠CB'A'=∠A'C'B и ∠BA'C'=∠C'B'A. Доказати да су тачке A', B', C' средишта страница троугла.

4 **4.** 12 кандидата за градоначелника су говорили о себи. После неког времена један од них је рекао: "До сада се слагало једанпут". Други је рекао: "А сада већ двапут". "А сада већ трипут" рекао је трећи, и тако даље до 12-ог, који је рекао: "До сада је слагано 12 пута". После тога водитељ је прекинуо дискусију. Испоставило се да је бар један кандидат тачно избројао колико се пута слагало пре него. Колико су укупно пута кандидати слагали?

5 **5.** Назовимо крокодилом шаховску фигуру чији се ход (потез) састоји у скоку од m поља по вертикали или по хоризонтали, и потом од n поља у правцу нормалном на претходни. Доказати да је за произволне m и n могуће тако обојити бесконачну шаховску таблу у две боје (за сваке конкретне m и n посебно бојење), да два поља повезана једним ходом крокодила, увек буду различитих боја.

ДВАДЕСЕТИ ТУРНИР ГРАДОВА
Јесење коло, Припремна варијанта, 1998.
10-11 разред (старији узраст)
(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена; поени за тачке једног задатка се сабирају)

поени задаци

3 **1.** Дато је 19 тегова масе 1 г, 2 г, 3 г, ... , 19 г. Девет их је од гвожђа, девет од бронзе и један од злата. Познато је да је укупна маса гвоздених тегова за 90 г већа од укупне масе бронзаних. Наћи масу златног тега.

3 **2.** n папирних кругова полупречника 1 распоређени су у равни тако да њихови рубови пролазе кроз једну тачку, при чему та тачка лежи унутар области покривене круговима. Та област је многоугао с криволинијским страницама. Наћи његов обим.

4 **3.** На шаховској табли димензија 8×8 означено је 17 поља. Доказати да се од њих могу изабрати два, тако да је коњу потребно бар три скока да стигне са једног од њих на друго.

4 **4.** Разматрају се скупови реалних бројева $\{x_1, x_2, x_3, \ldots x_{20}\}$, који леже између 0 и 1, таквих да је $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_{20} = (1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)\ldots(1-x_{20})$. Наћи међу њима скуп за који је производ $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_{20}$ максималан.

5. Група психолога је направила тест на основу којег свака тестирана особа добија оцену - број Q, која је показатељ њених умних способности (што је веће Q, већа је и способност). За рејтинг земље узима се аритметичка средина вредности Q свих њених становника.

1 а) Група грађана земље А је емигрирала у земљу Б. Показати да је тада могао да порасте рејтинг обе земље.

3 б) После тога група грађана земље Б (међу којима могу бити и бивши емигранти из А) емигрирала је у земљу А. Да ли је рејтинг обеју земаља могао опет да порасте?

2 в) Група грађана земље А емигрирала је у земљу Б, а група грађана земље Б - у земљу В. Као резултат тога рејтинзи сваке од тих земаља се повећао. После тога смер миграционих токова се променио у супротан: део становника из В прешао је у Б, а део становника из Б - у А. Испоставило се да су после тога рејтинзи све три земље опет порасли (у односу на оне који су били после првог преласка, али пре почетка другог). (То тврде информационе агенције све три земље.) Да ли је то могуће (ако јесте, како, ако није, зашто)? (Претпоставља се: у разматраном временском периоду Q грађана се није мењао, нико није умро и нико се није родио.)

ДВАДЕСЕТИ ТУРНИР ГРАДОВА
Јесење коло, Основна варијанта, 1998.
8-9 разред (млађи узраст)
(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена)

поени	задаци
3	**1.** Нека су a и b природни бројеви. Доказати да NZS(a,a+5)= NZS(b,b+5) повлачи a=b.
4	**2.** Игор и Вала имају по један бели квадрат 8×8, разложен на пола 1×1. Они су обојили једнаке бројеве пола на својим квадратима у плаву боју. Доказати да је могуће разложити те квадрате на домине 2×1, тако да се и од Игорових и од Валиних домина може сложити по један квадрат 8×8 са истоветном плавом сликом.
5	**3.** Дуж AB пресеца две подударне кружнице и паралелан је њиховој централној линији, при чему све тачке пресека праве AB с кружницама леже између A и B. Кроз тачку A конструисане су тангенте на кружницу која је ближа тачки A, а кроз тачку B тангенте на кружницу која је ближа B. Испоставило се да те четири тангенте образују четвороугао који садржи обе кружнице унутар себе. Доказати да се у тај четвороугао може уписати кружница.
6	**4.** У правилном 25-углу су конструисане све дијагонале. Доказати да не постоје девет дијагонала које пролазе кроз једну унутрашњу тачку 25-угла.
7	**5.** Дато је 20 перли у 10 боја, по две перле сваке боје. Оне су распоређене у 10 кутија. Познато је да се може изабрати по перла из сваке кутије, тако да свака боја буде заступлена. Доказати да је број могућности таквог избора ненулти степен двојке.
7	**6.** Банда разбојника одузела је трговцу кесу с новчићима. Вредност сваког новчића је цео број гроша. Испоставило се да ако се издвоји било који новчић, остали новчићи могу да се поделе међу разбојницима тако да сваки од них добије исту суму у грошима. Доказати да ако се издвоји један новчић, број преосталих новчића је делив бројем разбојника.

ДВАДЕСЕТИ ТУРНИР ГРАДОВА
Јесење коло, Основна варијанта, 1998.
10-11 разред (старији узраст)
(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена; поени за тачке једног задатка се сабирају)

поени задаци

1.

2 а) Доказати да $NZS(a,a+5)=NZS(b,b+5)$ (a,b - природни бројеви) повлачи $a=b$.

3 б) Може ли бити $NZS(a,b)=NZS(a+c,b+c)$ (a,b,c - природни бројеви)?

2. Дуж AB пресеца две подударне кружнице и паралелан је њиховој централној линији, при чему све тачке пресека праве AB с кружницама леже између A и B. Кроз тачку A конструисане су тангенте на кружницу која је ближа тачки A, а кроз тачку B тангенте на кружницу која је ближа B. Испоставило се да те четири тангенте образују четвороугао који садржи обе кружнице унутар себе. Доказати да се у тај четвороугао може уписати кружница.

4

3. У таблицу је уписано девет бројева:

5

$$\begin{matrix} a_1, & a_2, & a_3, \\ b_1, & b_2, & b_3, \\ c_1, & c_2, & c_3. \end{matrix}$$

Познато је да су шест бројева - збирови врста и збирови стубаца - једнаки међу собом:

$$a_1+a_2+a_3=b_1+b_2+b_3=c_1+c_2+c_3=a_1+b_1+c_1=a_2+b_2+c_2=a_3+b_3+c_3.$$

Доказати да је збир производа врста таблице једнак збиру производа њених стубаца:

$$a_1b_1c_1+a_2b_2c_2+a_3b_3c_3=a_1a_2a_3+b_1b_2b_3+c_1c_2c_3.$$

4. За округлим столом је припремљено 12 места за жири с називом имена на сваком месту. Николај Николајевић, који је стигао први, због расејаности није сео на своје него на следеће место у смеру кретања казаљке на часовнику. Сваки члан жирија који је пришао столу после тога, заузео је своје место или је, ако је оно већ било заузето, ишао око стола у смеру кретања казаљке на часовнику и седао на прво слободно место. Добијени распоред чланова жирија зависи од тога којим су редом они прилазили столу. Колико се различитих распореда жирија може добити?

6

5. Називаћемо "величином" правоуглог паралелепипеда суму његове три димензије - дужине, ширине и висине. Може ли се десити да је у неки правоугли паралелепипед смештен правоугли паралелепипед веће "величине"?

7

6. Дата је функција $f(x)=(x^2+ax+b)/(x^2+cx+d)$, где триноми x^2+ax+b и x^2+cx+d немају заједничких корена. Доказати да су следећа два тврђења еквивалентна:

8

1) постоји интервал који не садржи ниједну вредност те функције;

2) $f(x)$ може да се представи у облику:

$$f(x)=f_1(f_2(\ldots f_{n-1}(f_n(x))\ldots)),$$

где свака од функција $f_i(x)$ има један од следећих облика: k_ix+b_i, x^{-1}, x^2.

ДВАДЕСЕТИ ТУРНИР ГРАДОВА
Пролећно коло, 1999.
Припремна варијанта, 8–9. разред (млађи узраст)
(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена)

поени задаци

3 1. Отац и син се сличугају на кружној стази. С времена на време отац престигне сина. После тога, пошто је син променио смер кретања у супротни, они су почели да се сусрећу 5 пута чешће. Колико пута отац брже клиза од сина?

4 2. Над хипотенузом AB правоуглог троугла ABC са спољашње стране је конструисан квадрат ABDE. Дато је: AC=1 cm и BC=3 cm. У ком односу дели страницу DE бисектриса угла C?

4 3. На табли је написано неколико природних бројева: a_0, a_1, a_2, ..., a_n. На другој табли пишемо следеће бројеве: b_0 – колико има укупан бројева на првој табли, b_1 – колико је тамо бројева већих од један, b_2 – колико је бројева већих од два, и т.д., док се добијају позитивни бројеви. На томе се завршава – нуле се не пишу. На трећој табли пишемо бројеве c_0, c_1, c_2, ..., добијене на основу бројева на другој табли по истом правилу по коме су бројеви b_0, b_1, b_2, ... добијени на основу бројева на првој табли. Доказати да се скупови бројева на првој и трећој табли поклапају.

5 4. У равни је нацртан црни једнакостранични троугао. Дато је девет троугаоних плочица исте те величине и истог тог облика. Треба их поставити у равни тако да се не прекривају и да свака плочица покрива бар један део црног троугла (бар једну тачку унутар њега). Како то урадити?

5 5. Квадрат је разрезан са 18 правих, од којих су 9 паралелне једној страници квадрата, а 9 – другој, на 100 правоугаоника. Испоставило се да су тачно девет од њих – квадрати. Доказати да се међу тим квадратима налазе два подударна.

ДВАДЕСЕТИ ТУРНИР ГРАДОВА
Пролећно коло, 1999.
Припремна варијанта, 10-11. разред (старији узраст)
(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена)

поени задаци

3 1. У низу се налази 1999 бројева. Први број је једнак 1. Познато је да је сваки број, сем првог и последњег, једнак збиру два суседна. Наћи последњи број.

3 2. Над хипотенузом АВ правоуглог троугла АВС са спољашње стране је конструисан квадрат АВDЕ. Дато је: АС=1 cm и ВС=3 cm. У ком односу дели страницу DЕ бисектриса угла С?

3 3. На табли је написано неколико природних бројева: a_0, a_1, a_2, ... , a_n. На другој табли пишемо следеће бројеве: b_0 – колико има укупан бројева на првој табли, b_1 – колико је тамо бројева већих од један, b_2 – колико је бројева већих од два, и т.д., док се добијају позитивни бројеви. На томе се завршава – нуле се не пишу. На трећој табли пишемо бројеве c_0, c_1, c_2, ... , добијене на основу бројева на другој табли по истом правилу по коме су бројеви b_0, b_1, b_2, ... добијени на основу бројева на првој табли. Доказати да се скупови бројева на првој и трећој табли поклапају.

5 4. У равни је нацртан црни квадрат. Дато је седам квадратних плочица исте те величине. Треба их поставити у равни тако да се не прекривају и да свака плочица покрива бар један део црног квадрата (бар једну тачку унутар њега). Како то урадити?

5 5. Игра се одвија на квадрату харираног папира 9x9. Играју двоје, наизменично. Онај који започиње игру ставља на слободна поља крстиће, његов партнер – кружиће. Када се сва поља попуне, изброји се број врста и стубаца у којима има више крстића него кружића, – број К, и број врста и стубаца у којима има више кружића него крстића – број N (укупан број врста и стубаца – 18). Разлика V=K-N се сматра добитком играча који почиње игру. Одредити такву вредност В, да
1) први играч може да обезбеди себи добитак не мањи од В, ма како играо други играч;
2) други играч може увек да постигне то да први играч добије добитак не већи од В, ма како играо.

ДВАДЕСЕТИ ТУРНИР ГРАДОВА
Пролећно коло, 1999.
Основна варијанта, 8-9 разред (млађи узраст)
(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена)

поени задаци

3 1. У банци се налази 500 долара. Дозволене су две операције: подићи 300 долара или уложити 198 долара. Те операције могу се вршити произвољан број пута, при том нема другог новца, осим оног који је првобитно лежао у банци. Коју је максималну суму могуће узети из банке и како то урадити.

4 2. Нека је O тачка пресека дијагонала паралелограма ABCD. Доказати: ако кружница која пролази кроз тачке A, B и D, додирује праву BC, онда кружница, која пролази кроз тачке B, C и O, додирује праву CD.

4 3. Играју двоје. Први уписује у врсту слева на десно цифру по цифру, произвољно смењујући 0 и 1. Сваки пут, после тога, пошто први упише цифру која је на реду, други разменује међу собом две цифре из већ уписаног низа (када је написана само једна цифра, други пропушта потез). Тако се поступа док цифара не буде укупно 1999. Да ли други може да постигне то, да после његовог последњег потеза распоред цифара буде симетричан у односу на средњу цифру?

6 4. Круг је са 2n полупречника разложен на 2n једнаких сектора: n плавих и n црвених, који се смењују у произвољном поретку. У плаве секторе, почев од неког, уписују се у смеру супротном смеру кретања казаљке на часовнику бројеви од 1 до n. У црвене секторе, почев од неког, уписују се исти ти бројеви али у смеру кретања казаљке на часовнику. Доказати да се може наћи полукруг у који су уписани сви бројеви од 1 до n.

6 5. Уписана кружница троугла ABC додирује странице AB и AC редом у тачкама P и Q. Нека је RS средња линија, паралелна AB, T - тачка пресека правих PQ и RS. Доказати да T лежи на бисектриси угла B тог троугла.

9 6. Топ, који прави потезе по вертикали и хоризонтали на суседно поље, у 64 потеза је обишао сва поља шаховске табле 8x8 и вратио се на почетно поље. Доказати да број потеза по вертикали није једнак броју потеза по хоризонтали.

ДВАДЕСЕТИ ТУРНИР ГРАДОВА
Пролећно коло 1999.
Основна варијанта, 10–11 разред (старији узраст)
(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена; поени за тачке једног задатка се сабирају)

поени задаци

4 1. У мору плива предмет који има облик конвексног полиедра. Може ли се десити да се 90% његове запремине налази испод нивоа воде и да се притом више од половине његове површине налази изнад нивоа воде?

4 2. Нека је ABCD конвексан четвороугао уписан у кружницу с центром у тачки O. Кружнице описане око троуглова ABO и CDO секу се други пут у тачки F. Доказати да кружница која пролази кроз тачке A, F и D, пролази кроз пресечну тачку дужи AC и BD.

5 3. Наћи све парове целих бројева (x,y) за које је задовољен услов: бројеви x^3+y и $x+y^3$ су дељиви са x^2+y^2.

5 4. Круг је са 2n полупречника разложен на 2n једнаких сектора: n плавих и n црвених, који се смењују у произвољном поретку. У плаве секторе, почев од неког, уписују се у смеру супротном смеру кретања казаљке на часовнику бројеви од 1 до n. У црвене секторе, почев од неког, уписују се исти ти бројеви али у смеру кретања казаљке на часовнику. Доказати да се може наћи полукруг у који су уписани сви бројеви од 1 до n.

5. За сваки цео ненегативан број k дефинишимо број M(k) на следећи начин: запишимо број k у бинарном облику; ако је број јединица у том запису паран, онда је M(k)=0, а ако је непаран – онда је M(k)=1 (почетни чланови тог низа су: 0,1,1,0,1,0,0,1,...).

2 а) Уочимо коначан низ M(0), M(1), ... , M(1000). Доказати да број чланова тог низа, који су једнаки свом десном суседу, није мањи од 320.

5 б) Уочимо коначан низ M(0), M(1), ... , M(1000000). Доказати да број чланова низа, таквих да је M(k)=M(k+7), није мањи од 450000.

8 6. Топ, који прави потезе по вертикали и хоризонтали на суседно поље, у 64 потеза је обишао сва поља шаховске табле 8×8 и вратио се на почетно поље. Доказати да број потеза по вертикали није једнак броју потеза по хоризонтали.