Шефкет Арсланагиќ
Алија Муминагиќ

ПОВЕЌЕ ДОКАЗИ НА ЕДНО ПОЗНАТО ГЕОМЕТРИСКО НЕРАВЕНСТВО

Во математиката, докажувањето на неравенства е една од најкреативните, па затоа и во исто време е најинтересна работа. Секако, тој кој што сака тоа да го прави мора многу солидно да биде едуциран од различни области од елементарната математика, но да има и добри познавања од диференцијалното сметање.

Оваа работа е посветена на доказот на едно тригонометриско неравенство, кое има важно место во тригонометриските неравенства, и кое има голема примена во докажувањето на други неравенства. Ќе биде разгледувано тригонометриското неравенство во триаголник:

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\le\frac{3}{2}, \tag{1}$$

каде α,β и γ се внатрешните агли во триаголник. Ќе бидат дадени повеќе различни докази на ова неравенство. Во некои од доказите ќе бидат користени познати равенства и неравенства, чии докази пак може да се најдат во [1]и [2].

Равенствата

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=1+4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}, \tag{2}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}=\frac{r}{4R}, \tag{3}$$

каде r и R се радиуси на впишаната и опишаната кружница во триаголникот, и неравенствата

$$R\ge 2r \tag{4}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\le\frac{1}{8}, \tag{5}$$

$$(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)\le abc, \tag{6}$$

каде a,b,c се должини на страни на триаголникот, се точни во произволен триаголник.

Доказот на овие равенства и неравенства не се предмет на оваа статија, и заради тоа ќе преминеме на доказот на неравенството (1).

Доказ 1. Од (2) и (5), т.е. имаме

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\le1+4\cdot\frac{1}{8},$$

т.е.

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\le\frac{3}{2}.$$

Равенство важи само во случај кога

$$\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = \frac{1}{2},$$

односно $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$.

Забелешка 1. Од (2) заради $\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} > 0$ добиваме дека е точно неравенството

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma > 1.$$

Заради тоа, неравенството (1) во литературата најчесто се појавува во облик на двојно неравенство

$$1 < \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \le \frac{3}{2}.$$

Доказ 2. Од (2) и (3) добиваме

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + \frac{r}{R},$$

а одовде заради (4), т.е. $\frac{r}{R} \le \frac{1}{2}$ следува

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \le \frac{3}{2}.$$

Доказ 3. Нека $S = \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma$. Користејќи ја косинусната теорема имаме

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \ \cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \ \text{ и } \ \cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Сега следува,

$$\begin{aligned}\cos\alpha + \cos\beta &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \left(\frac{b^2 - a^2}{2bc} + \frac{a^2 - b^2}{2ac}\right) + \left(\frac{c^2}{2bc} + \frac{c^2}{2ac}\right)\\ &= \left(\frac{a^2 - b^2}{2ac} - \frac{a^2 - b^2}{2bc}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{c}{b} + \frac{c}{a}\right) = \frac{a^2 - b^2}{2c}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{c}{b} + \frac{c}{a}\right)\\ &= \frac{a^2 - b^2}{2c}\,\frac{b-a}{ab} + \frac{1}{2}\left(\frac{c}{b} + \frac{c}{a}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{c}{b} + \frac{c}{a}\right) - \frac{(a-b)^2(a+b)}{2abc}.\end{aligned}$$

Потполно аналогно добиваме:

$$\cos\alpha + \cos\gamma = \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a} + \frac{b}{c}\right) - \frac{(a-c)^2(a+c)}{2abc}, \ \cos\beta + \cos\gamma = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b} + \frac{a}{c}\right) - \frac{(b-c)^2(b+c)}{2abc}.$$

Со собирање на последните три равенства, добиваме:

$$2(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma) = \frac{1}{2}\left(\frac{c}{a} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a} + \frac{b}{c} + \frac{a}{b} + \frac{a}{c}\right) - \frac{(a-b)^2(a+b) + (a-c)^2(a+c) + (b-c)^2(b+c)}{2abc}$$

т.е.

$$2S=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}-2+\frac{a}{c}+\frac{c}{a}-2\right)+3-\frac{(a-b)^2(a+b)+(a-c)^2(a+c)+(b-c)^2(b+c)}{2abc}$$

$$=3+\frac{(a-b)^2}{2ab}+\frac{(b-c)^2}{2bc}+\frac{(a-c)^2}{2ac}-\frac{(a-b)^2(a+b)+(a-c)^2(a+c)+(b-c)^2(b+c)}{2abc},$$

$$2S=3-\frac{(a-b)^2(a+b-c)+(a-c)^2(a+c-b)+(b-c)^2(b+c-a)}{2abc}.$$

Заради неравенствата $a+b-c>0, b+c-a>0, a+c-b>0$, имаме:

$$\frac{(a-b)^2(a+b-c)+(a-c)^2(a+c-b)+(b-c)^2(b+c-a)}{2abc}\geq 0,$$

па според тоа

$$2S=3-\frac{(a-b)^2(a+b-c)+(a-c)^2(a+c-b)+(b-c)^2(b+c-a)}{2abc}\leq 3,$$

односно $2S\leq 3$, т.е. $S\leq\frac{3}{2}$.

Доказ 4. Нека повторно $S=\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma$. Користејќи ја косинусната теорема, како и во доказот 3, добиваме:

$$S=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$
$$=\frac{1}{2abc}[a(b^2+c^2-a^2)+b(c^2+a^2-b^2)+c(a^2+b^2-c^2)]$$

Не е тешко да се докаже дека

$$a(b^2+c^2-a^2)+b(c^2+a^2-b^2)+c(a^2+b^2-c^2)=(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)+2abc,$$

од каде добиваме

$$S=\frac{1}{2abc}[(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)+2abc].$$

Заради неравенството (6), т.е. $(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)\leq abc$, имаме

$$S\leq\frac{1}{2abc}[abc+2abc]=\frac{3}{2}.$$

Доказ 5. Нека сега $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=t$. Бидејќи $\alpha+\beta=180^\circ-\gamma$, т.е. $\frac{\alpha+\beta}{2}=90^\circ-\frac{\gamma}{2}$. добиваме $\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=\cos(90^\circ-\frac{\gamma}{2})=\sin\frac{\gamma}{2}$. Исто така:

$$\cos\gamma=\cos^2\frac{\gamma}{2}-\sin^2\frac{\gamma}{2}=1-2\sin^2\frac{\gamma}{2},\qquad \cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Сега

$$t=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+1-2\sin^2\frac{\gamma}{2},$$

односно

$$-2\sin^2\frac{\gamma}{2}+2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+1-t=0\,.$$

Квадратната равенка по $\sin\frac{\gamma}{2}$ има реални решенија ако и само само ако $D\geq 0$, односно

$$4\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}+8(1-t)\geq 0\,,$$

$$t\leq 1+\frac{1}{2}\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}\,.$$

Бидејќи $\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}\leq 1$, добиваме $t\leq\frac{3}{2}$.

Доказ 6. Користејќи тригонометриски идентитети, својства на аглите во триаголник и својства на $\cos$, добиваме:

$$\begin{aligned}\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma &= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos[\pi-(\alpha+\beta)]\\ &= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos(\alpha+\beta)\\ &\leq 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-\cos(\alpha+\beta)\\ &= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}+1=\\ &= -2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}+2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+1\\ &= \frac{3}{2}-2(\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{1}{2})^2\leq\frac{3}{2}\end{aligned}$$

Доказ 7. Во овој доказ ќе го користиме неравенството (5), т.е.

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\leq\frac{1}{8}\,.$$

Бидејќи $\sin\frac{\gamma}{2}=\cos(90^\circ-\frac{\gamma}{2})$, добиваме

$$2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos(90^\circ-\frac{\gamma}{2})\leq\frac{1}{4}\,.$$

Заради равенствата

$$2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}=\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\ \text{ и }\ \cos(90^\circ-\frac{\gamma}{2})=\cos\frac{180^\circ-\gamma}{2}=\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\,,$$

имаме

$$(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2})\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\leq\frac{1}{4}\,,$$

т.е.

$$-2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}+2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\le\frac{1}{2}\,. \qquad (7)$$

Повторно, заради равенствата

$$2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=\cos\alpha+\cos\beta$$

и

$$2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}-1=\cos(\alpha+\beta)\,,$$

со замена во (7), добиваме

$$\cos\alpha+\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)\le\frac{3}{2}\,,$$

$$\cos\alpha+\cos\beta-\cos(\pi-\gamma)\le\frac{3}{2}\,,$$

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\le\frac{3}{2}\,.$$

Доказ 8. Имаме:

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\le\frac{3}{2}$$

$$2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos[\pi-(\alpha+\beta)]\le\frac{3}{2}$$

$$2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos(\alpha+\beta)\le\frac{3}{2}$$

$$2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}+1\le\frac{3}{2}$$

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}\le\frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4}\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}-(\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2})^2\le\frac{1}{4}\,.$$

Последното неравенство е точно бидејќи

$$\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}\le 1 \text{ и } (\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2})^2\ge 0\,.$$

Според тоа, точно е и неравенството (1), при што знак за равенство важи ако и само ако

$$\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=1 \text{ и } \cos\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=0\,,$$

т.е. $\alpha=\beta$ и $\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{\pi}{3}$.

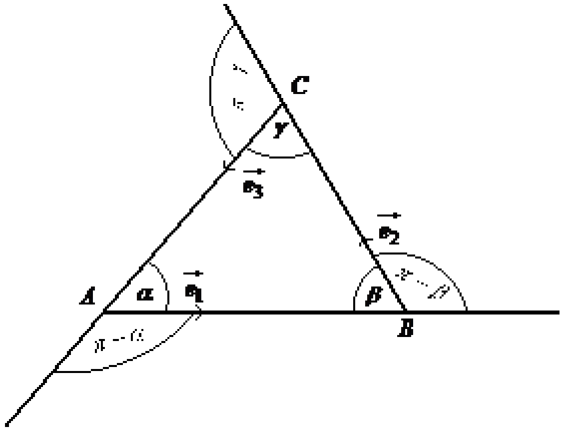
Значи, знак за равенство важи ако и само ако $\alpha=\beta=\gamma=\dfrac{\pi}{3}$.

Доказ 9. За овој доказ ќе користиме вектори. Нека е ΔABC произволен триаголник и нека

$$\measuredangle ABC = \beta, \measuredangle BCA = \gamma \text{ и}$$

$$\measuredangle CAB = \alpha,$$

а $\vec{e_1}, \vec{e_2}$ и $\vec{e_3}$ се единечни вектори колинеарни со векторите $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CA}$ соодветно (види цртеж). Јасно е дека



$$(\vec{e_1}+\vec{e_2}+\vec{e_3})^2 \geq 0,$$

од каде што добиваме

$$\vec{e_1}^2+\vec{e_2}^2+\vec{e_3}^2+2(\vec{e_1}\cdot\vec{e_2}+\vec{e_2}\cdot\vec{e_3}+\vec{e_3}\cdot\vec{e_1}) \geq 0,$$

$$|\vec{e_1}|^2+|\vec{e_2}|^2+|\vec{e_3}|^2+2(|\vec{e_1}|\cdot|\vec{e_2}|\cos(\pi-\beta)+|\vec{e_2}|\cdot|\vec{e_3}|\cos(\pi-\alpha)+|\vec{e_3}|\cdot|\vec{e_1}|\cos(\pi-\gamma)) \geq 0$$

$$1+1+1+2[\cos(\pi-\beta)+\cos(\pi-\alpha)+\cos(\pi-\gamma)] \geq 0,$$

$$3-2(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma) \geq 0,$$

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma \leq \frac{3}{2}.$$

Забелешка 2. Ако еден од аглите α или β или γ е тап или прав, тогаш $\cos\alpha \leq 0$ или $\cos\beta \leq 0$ или $\cos\gamma \leq 0$, па неравенството (1) во тој случај очигледно е точно, бидејќи тоа е точно ако се α, β и γ остри агли, т.е. $\cos\alpha > 0$, $\cos\beta > 0$ и $\cos\gamma > 0$

Доказ 10. Неравенството (1) ќе го докажеме со помош на неравенството на Jensen, ако се α, β и γ се остри агли (и овде важи забелешката 2).

Ќе ја разгледаме функцијата $y = \cos x$, $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Имаме $y' = -\sin x$, $y'' = -\cos x < 0$, за секое $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Значи, дадената функција е конкавна за $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, па според неравенството на Јенсен, имаме

$$f(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}) \geq \frac{1}{3}[f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma)].$$

Заради равенството $\alpha+\beta+\gamma=\pi$:

$$\frac{1}{3}(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma) \leq \cos\frac{\pi}{3},$$

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma \leq \frac{3}{2}.$$

Последица 1. Во случај на остроаголен триаголник, т.е. кога $\cos\alpha > 0$, $\cos\beta > 0$, $\cos\gamma > 0$, според неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина добиваме

$$\frac{\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma}{3} \geq \sqrt[3]{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}\ .$$

Од последното неравенство и заради неравенството (1) имаме:

$$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \leq \frac{1}{8}\ .$$

Ова неравенство е очигледно точно во случај кога триаголникот е тапоаголен или праваоголен, бидејќи левата страна е негативна или еднаква на нула.

Доказ 11. Заради симетрија на равенството, можеме да претпоставиме дека $0 < \alpha \leq \beta \leq \gamma < \pi$. Заради равенството $\gamma = \pi - (\alpha + \beta)$ имаме

$$\cos\gamma = \cos[\pi - (\alpha + \beta)] = -\cos(\alpha + \beta)\ .$$

Ќе ја разгледаме функцијата

$$f(\alpha) = \cos\alpha + \cos\beta - \cos(\alpha + \beta)\ ,$$

$$f'(\alpha) = -\sin\alpha + \sin(\alpha + \beta)\ ,$$

од каде добиваме

$$f'(\alpha) = -2\cos(\alpha + \frac{\beta}{2})\sin\frac{\beta}{2}\ .$$

Решенија на равенката $f'(\alpha) = 0$ се решенија на равенката $\cos(\alpha + \frac{\beta}{2}) = 0$, бидејќи $\sin\frac{\beta}{2} > 0$. Решение на последната равенка е $\alpha + \frac{\beta}{2} = \frac{\pi}{2}$, односно $\alpha = \frac{\pi - \beta}{2}$. Бидејќи

$$f''(\alpha) = -2\sin(\alpha + \frac{\beta}{2})\sin\frac{\beta}{2}\ ,$$

добиваме

$$f'(\frac{\pi - \beta}{2}) = -2\sin\frac{\pi}{2}\sin\frac{\beta}{2} = -2\sin\frac{\beta}{2} < 0\ .$$

Според тоа, во точката $\alpha = \frac{\pi - \beta}{2}$ функцијата $f(\alpha)$ има максимум:

$$f_{\max} = f(\frac{\pi - \beta}{2}) = \cos\frac{\pi - \beta}{2} + \cos\beta - \cos(\frac{\pi - \beta}{2} + \beta)$$

$$f_{\max} = 2\sin\frac{\beta}{2} + \cos\beta = -2\sin^2\frac{\beta}{2} + 2\sin\frac{\beta}{2} + 1,$$

$$f_{\max} = -2(\sin^2\frac{\beta}{2} - \sin\frac{\beta}{2} - \frac{1}{2}) = -2(\sin\frac{\beta}{2} - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{2}\ ,$$

$$f_{\max} = \frac{3}{2} \text{ за } \sin\frac{\beta}{2} = \frac{1}{2}\ .$$

Значи, максимумот се достигнува за $\beta=\frac{\pi}{3}$, при што

$$f(\alpha)\le f_{\max}=\frac{3}{2},$$

$$\cos\alpha+\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)\le\frac{3}{2},$$

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\le\frac{3}{2}.$$

Доказ 12. Имаме

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=\cos\alpha+\cos\beta+\cos[\pi-(\alpha+\beta)]=\cos\alpha+\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)$$
$$=(\cos\alpha+\cos\beta)\cdot 1+\sin\alpha\sin\beta-\cos\alpha\cos\beta.$$

Заради неравенството меѓу аритметичка средина A и геометриска средина G, $A\ge G$, добиваме:

$$\sqrt{(\cos\alpha+\cos\beta)^2\cdot 1^2}\le\frac{(\cos\alpha+\cos\beta)^2+1^2}{2},.$$

$$(\cos\alpha+\cos\beta)\cdot 1\le\frac{(\cos\alpha+\cos\beta)^2+1^2}{2},$$

$$\sqrt{\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta}\le\frac{\sin^2\alpha+\sin^2\beta}{2},$$

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta\le\frac{\sin^2\alpha+\sin^2\beta}{2}.$$

Ако ги употребиме последните неравенства, имаме

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\le\frac{1}{2}[(\cos\alpha+\cos\beta)^2+1^2]+\frac{1}{2}(\sin^2\alpha+\sin^2\beta)-\cos\alpha\cos\beta$$
$$=\frac{1}{2}(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+2\cos\alpha\cos\beta+1+\sin^2\alpha+\sin^2\beta)-\cos\alpha\cos\beta$$
$$=\frac{1}{2}[(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)+(\cos^2\beta+\sin^2\beta)+1]=\frac{3}{2}.$$

Значи,

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\le\frac{3}{2}.$$

Равенство важи ако и само ако

$$\cos\alpha+\cos\beta=1 \text{ и } \sin\alpha=\sin\beta,$$

од каде добиваме $\alpha=\beta$ и $2\cos\alpha=1$. Добиваме $\alpha=\frac{\pi}{3}$, па затоа

$$\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{3}.$$

Литература

[1] Arslanagić, Š., Matematika za nadarene, Bosanska riječ, Sarajevo, 2004

[2] Arslanagić, Š., Metodička zbirka zadataka sa osnovama teorije iz elementarne matematike, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2006.

[3] Bottema, O. i ostanati, Geometric Inequalities, Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, 1969.