БМО 2013

1. Во триаголник ABC припашаната кружница наспроти темето A ги допира правата AB во точката P и правата AC во точката Q, а припишаната кружница наспроти темето B ги допира правата AB во точката M и правата BC во точката N. Нека K и L соодветно се подножјата на нормалите повлечени од C кон правите MN и PQ. Докажи, дека четириаголникот $MKLP$ е тетивен.

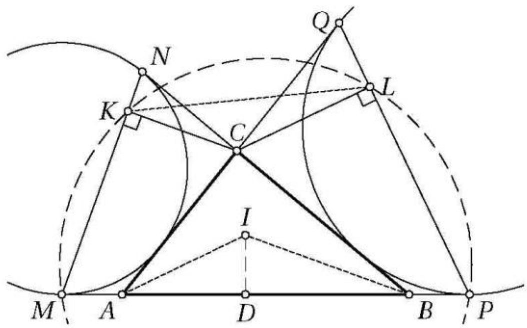
Решение. Аглите на триаголникот да ги означиме со α, β, γ. Бидејќи

$$\measuredangle KMP = 90^\circ - \frac{\beta}{2},$$

доволно е да докажеме дека

$$\measuredangle KLP = 90^\circ + \frac{\beta}{2},$$

т.е. дека $\measuredangle KLC = \frac{\beta}{2}$.



Нека I е центарот на вписаната кружница во триаголникот ABC и D е допирната точка на вписаната кружница со AB. Од $CK \parallel IB$ и $CL \parallel IA$ следува $\measuredangle KCL = \measuredangle AIB$. Понатаму, од $\overline{CN} = \overline{AD} = \frac{b+c-a}{2}$ и $\measuredangle KCN = \frac{\beta}{2}$ следува

$$\overline{CK} = \overline{CN}\cos\frac{\beta}{2} = \overline{AD}\cos\frac{\beta}{2} = \overline{AI}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}.$$

Аналогно $\overline{CL} = \overline{BI}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}$, па затоа $\frac{\overline{CK}}{\overline{CL}} = \frac{\overline{AI}}{\overline{BI}}$. Според тоа, триаголниците KCL и AIB имаат по две пропорционални страни и еднаков агол меѓу нив, па затоа тие се слични. Од сличноста на овие триаголници следува $\measuredangle KLC = \measuredangle ABI = \frac{\beta}{2}$, па затоа $\measuredangle KLP = \measuredangle KLC + \measuredangle CLP = 90^\circ + \frac{\beta}{2}$.

2. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$x^5 + 4^y = 2013^z.$$

Решение. Сведуваме по модул 11 и добиваме $x^5 + 4^y \equiv 0 \pmod{11}$, при што важи $x^5 \equiv \pm 1 \pmod{11}$, па мора да важи $4^y \equiv \pm 1 \pmod{11}$. Конгруенцијата $4^y \equiv -1 \pmod{11}$ не важи за ниту еден y, а додека конгруенцијата $4^y \equiv 1 \pmod{11}$ важи ако и само ако $5 \mid y$.

Воведуваме смена $t = 4^{\frac{y}{5}}$ и ја добиваме равенката

$$x^5 + t^5 = A \cdot B = 2013^z,$$

каде $\text{NZD}(x,t)=1$, $A=x+t$ и $B=x^4-x^3t+x^2t^2-xt^3+t^4$. Понатаму, од

$$B=A(x^3-2x^2t+3xt^2-4t^3)+5t^4$$

следува дека $\text{NZD}(A,B)=\text{NZD}(A,5t^4)\,|\,5$, но $5\nmid 2013^z$, па мора да важи $\text{NZD}(A,B)=1$. Според тоа, $A=a^z$ и $B=b^z$, за некои природни бореви a и b такви што $ab=2013$.

Меѓутоа, од неравенството $\frac{1}{16}A^4\le B\le A^4$, кое се докажува со едноставна примена на неравенствата меѓу средините, добиваме $\frac{1}{16}a^4\le b\le a^4$, т.е. $\frac{1}{16}a^5\le ab=2013\le a^5$. Оттука следува $5\le a\le 8$, што не е можно бидејќи 2013 нема делители во интервалот $[5,8]$.

3. Со $\mathbb{R}_+$ да го означиме множеството позитивни реални броеви. Определи ги сите функции $f:\mathbb{R}_+^3\to\mathbb{R}_+$ такви што за секои $x,y,z,k\in\mathbb{R}_+$ важи

1) $xf(x,y,z)=zf(z,y,x)$,

2) $f(x,ky,k^2z)=kf(x,y,z)$ и

3) $f(1,k,k+1)=k+1$.

Решение. Од својствата на функцијата f следува дека за секои $x,y,z,a,b>0$ важи

$$f(a^2x,aby,b^2z)=bf(a^2x,ay,z)=b\tfrac{z}{a^2x}f(z,ay,a^2x)=\tfrac{bz}{ax}f(z,y,x)=\tfrac{b}{a}f(x,y,z).$$

Броевите a и b ќе ги избереме така што тројката (a^2x,aby,b^2z) и од облик $(1,k,k+1)$, за некој k. Нека земеме $a=\frac{1}{\sqrt{x}}$ и b така да важи $b^2z-aby=1$. Последната равенка ја решаваме по b и добиваме $b=\frac{y+\sqrt{y^2+4xz}}{2z\sqrt{x}}$ и $k=\frac{y(y+\sqrt{y^2+4xz})}{2xz}$. Сега лесно следува дека

$$f(x,y,z)=\tfrac{a}{b}f(a^2x,aby,b^2z)=\tfrac{a}{b}f(1,k,k+1)=\tfrac{a}{b}(k+1)=\frac{y+\sqrt{y^2+4xz}}{2x}.$$

Непосредно се проверува дека функцијата f ги задоволува условите на задачата.

4. На математички натпревар некои учесници се пријатели (пријателството е симетрична релација, т.е. ако A е пријател на B, тогаш и B е пријател на A. За различните натпреварувачи $A_1,A_2,...,A_n$, каде $n\ge 3$, велиме дека формираат *скоро пријателски циклус* ако A_i не е пријател со A_{i+1} за $1\le i\le n$ ($A_{n+1}=A_1$),

додека сите останати парови натпреварувачи од овој циклус пријатели.
Притоа, на овој натпревар важи:
За секој натпреварувач C и секој скоро пријателски циклус $\mathbb{S}$ кој не го содржи C, множеството натпреварувачи D од $\mathbb{S}$ кои не се пријатели со C има најмногу еден елемент.
Докажи дека сите натпреварувачи може да се распоредат во три соби така што секои два натпреварувачи кои се наоѓаат во иста соба се пријатели.
Решение. Разгледуваме граф $\mathbb{G}$ чии темиња соодветствуваат на натпреварувачите при што две темиња се поврзани со ребро ако и само ако соодветните натпреварувачи не се пријатели.
Лема. Графот $\mathbb{G}$ содржи теме со степен помал или еднаков на 2.
Доказ. Нека претпоставиме дека секое теме има степен поголем или еднаков на три. Да го разгледаме најдолгиот индуциран пат во графот $P = u_0u_1...u_k$ (пат во кој никои две несоседни темиња не се поврзани). Темето u_0 е поврзано најмалку со уште две темиња v и w и тие се надвор од патот P. Бидејќи P е најдолгиот индуциран пат, темињата v и w мора да имаат соседи во тој пат. Нека u_i и u_j се по ред соседите на v и w со најмали индекси i, j и нека без ограничување на општоста $i \geq j$. Тогаш $u_0, u_1, ..., u_i, v$ формираат скоро пријателски циклус, а на него w има два соседи u_0 и u_j, што е противречност. ■

Да се вратиме на тврдењето на задачата кое ќе го докажеме со индукција по бројот на темињата n на $\mathbb{G}$. За $n \leq 3$ тврдењето е тривијално. Нека претпоставиме дека тврдењето важи за $n-1$ и ќе го докажеме за n. Според лемата, во $\mathbb{G}$ постои теме v чиј степен е помал или еднаков на два. Графот $\mathbb{G}'$ добиен со бришење на темето v и сите ребра кои излегуваат од него, очигледно ги задоволува условите на задачата, па неговите темиња може да се поделат во три соби на саканиот начин. Притоа v нема соседи барем во една соба, па може да се стави во таа соба. Со ова доказот е завршен.