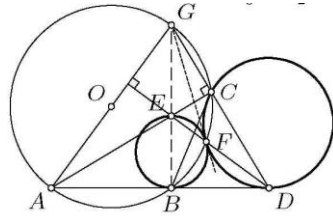


БМО 2012

1. Нека A, B и C се точки на кружница Γ со центар O такви што $\angle ABC > 90^\circ$. Нека D е пресечната точка на правата AB и нормалата на правата AC во точката C . Нека l е нормалата повлечена од точката D на правата AO , E е пресечната точка на правите l и AC , а F е онаа точка на пресекот на кружницата Γ и правата l која се наоѓа меѓу точките D и E . Докажи, дека кружниците опишани околу триаголниците BFE и CFD се допираат во точката F .

Решение. Нека G е точката на Γ дијаметрално спротивна на A . Точката E е ортоцентар на триаголникот DAG , па затоа G лежи на правата BE . Бидејќи $\angle CDF = \angle GAC = \angle GFC$ и $\angle FBE = \angle FAG = \angle GFE$, правата FG е заедничка тангента на кружниците CFD и BFE , па затоа овие кружници се допираат во точката F .



2. Нека x, y, z се позитивни реални броеви. Докажи, дека

$$\sum_{\text{cyc}} (x+y)\sqrt{(y+z)(z+x)} \geq 4(xy+yz+zx).$$

Збирот на левата страна на горното неравенство е еднаков на

$$(x+y)\sqrt{(y+z)(z+x)} + (y+z)\sqrt{(z+x)(x+y)} + (z+x)\sqrt{(x+y)(y+z)}.$$

Решение. Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$(z+x)(z+y) \geq (z + \sqrt{xy})^2,$$

од каде добиваме

$$\begin{aligned} \sum_{\text{cyc}} (x+y)\sqrt{(y+z)(z+x)} &\geq \sum_{\text{cyc}} [(x+y)z + (x+y)\sqrt{xy}] \\ &\geq \sum_{\text{cyc}} [(x+y)z + 2xy] \\ &= 4(xy + yz + zx). \end{aligned}$$

3. Нека n е природен број и нека $P_n = \{2^n, 2^{n-1} \cdot 3, 2^{n-2} \cdot 3^2, \dots, 2 \cdot 3^{n-1}, 3^n\}$. За секое подмножество X од множеството P_n со S_X да го означиме збирот на сите елементи од множеството X , при што $S_\emptyset = 0$, каде $\emptyset$ е празното множество.

Нека y е реален број таков што $0 \leq y \leq 3^{n+1} - 2^{n+1}$. Докажи, дека постои подмножество Y на множеството P_n такво што $0 \leq y - S_Y < 2^n$.

Решение. Тврдењето ќе го докажеме со индукција по N . Очигледно тврдењето важи за $n=1$. Нека претпоставиме дека тврдењето важи за $n-1$. Нека е даден y таков што $0 \leq y \leq 3^{n+1} - 2^{n+1}$. Можни се следниве случаи:

1) $0 \leq y \leq 2 \cdot 3^n - 2^{n+1}$. Од индуктивната претпоставка следува дека постои множество $Y' \subseteq P_{n-1}$ такво што $0 \leq \frac{y}{2} - S_{Y'} < 2^{n-1}$. Тогаш можеме да земеме $Y = 2Y' = \{2t \mid t \in Y'\}$.

2) $2 \cdot 3^n - 2^{n+1} \leq y \leq 3^{n+1} - 2^{n+1}$. Тогаш $0 < 3^n - 2^{n+1} \leq y - 3^n \leq 2 \cdot 3^n - 2^{n+1}$, па од индуктивната претпоставка следува дека постои множество $Y' \subseteq P_{n-1}$ такво што $0 \leq \frac{y-3^n}{2} - S_{Y'} < 2^{n-1}$. Тогаш можеме да земеме $Y = 2Y' \cup \{3^n\}$.

Според тоа, тврдењето важи и за n . Конечно, од принципот на математичка индукција следува дека тврдењето важи за секој природен број.

4. Определи ги сите функции $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ кои ги задоволуваат условите

1) $f(n!) = f(n)!$, за секој $n \in \mathbb{N}$,

2) $m - n$ е делител на $f(m) - f(n)$, за секои $m, n \in \mathbb{N}, m \neq n$.

Решение. Од $f(1) = f(1)!$ и $f(2) = f(2)!$ следува $f(1), f(2) \in \{1, 2\}$.

Нека претпоставиме дека $f(3) = 3$. Ако индуктивно дефинираме $n_0 = 3$ и $n_{i+1} = n_i!$, за $i \geq 0$, добиваме дека $f(n_i) = n_i$, за секој i . Нека m е произволен природен број. Бидејќи разликата $m - n_i$ е делител на $f(m) - f(n_i)$, добиваме дека $m - n_i$ е делител на

$$f(m) - m = f(m) - f(n_i) + f(n_i) - m = f(m) - f(n_i) + n_i - m,$$

за секој i . Според тоа, $f(m) - m$ има бесконечно многу делители, што значи дека $f(m) = m$, за секој m .

Сега нека $f(3) \neq 3$. Од $4 = 3! - 2 \mid f(3)! - f(2)$ следува дека $4 \nmid f(3)!$, па затоа $f(3) \in \{1, 2\}$. Освен тоа, $n! - 3$ е делител на $f(n)! - f(3)$ за секој $n \geq 4$, па затоа $3 \nmid f(n)!$, од што следува дека $f(n) \in \{1, 2\}$, за секој n . Сега лесно се докажува дека во случајов $f(n)$ мора да е константа.

Конечно, единствени решенија се функциите $f \equiv 1$, $f \equiv 2$ и $f(x) = x$, за секој $x \in \mathbb{N}$.